El Teorema de indecidibilidad de Church (1936): Formulación y presentación de las ideas principales de su prueba.

Franklin Galindo[*] *y Ricardo Da Silva*[**]

Resumen

El *Teorema de indecidibilidad de Church* es uno de los resultados meta-teóricos de mediados de la tercera década del siglo pasado, que junto a otros teoremas limitativos como los de Gödel y Tarski, han generado todo un sinfín de reflexiones y análisis tanto en el marco de las ciencias formales, esto es, la matemática, la lógica y la computación teórica, como fuera de ellas, en especial la filosofía de la matemática, la filosofía de la lógica y la filosofía de la mente. Nos proponemos, como propósito general del presente artículo, formular el *Teorema de indecidibilidad de Church y* presentar las ideas principales de su demostración. Para llevar a cabo el primer objetivo necesitamos introducir y explicar las nociones de *función recursiva* y la *numeración de Gödel*, que permitirán enunciar de manera formal y rigurosa el Teorema de Church. Luego que enunciemos el *Teorema de indecibilidad de Church* de manera formal y rigurosa, pasaremos a presentar las ideas principales de la prueba del *Teorema de indecidibilidad de Church* para la *Lógica de primer orden*, en la cual se utiliza el *sistema axiomático de Robinson para la aritmética* y cuatro hechos sobre él mismo: (a) En el sistema de Robinson para la aritmética las funciones recursivas son representables, (b) El sistema de Robinson es indecidible, (c) El número de axiomas propios del sistema de Robinson es finito y (d) El cálculo lógico del sistema de Robinson es igual (formalmente) al cálculo de la lógica de primer orden.

Palabras claves: Teorema de indecidibilidad de Church, Lógica de primer orden, funciones recursivas.

Church's Undecidability Theorem (1936): Formulation and presentation of the main ideas of its demonstration

Abstract

Church's Undecidability Theorem is one of the meta-theoretical results of the mid-third decade of the last century, which along with other limiting theorems such as those of Gödel and Tarski have generated endless reflections and analyzes, both within the framework of the formal sciences, that is, mathematics, logic and theoretical computation, as well as outside them, especially the philosophy of mathematics, philosophy of logic and philosophy of mind. We propose, as a general purpose of this article, to formulate Church's Undecidability Theorem and present the main ideas of its demonstration. In order to carry out the first objective, we need to

[*] Universidad Central de Venezuela.
[**] Universidad Central de Venezuela.
Articulo recibido 15 de octubre de 2016 – Arbitrado 15 de noviembre de 2016

introduce and explain the notions of recursive function and numbering used by Gödel, which will allow to formally and rigorously enunciate Church's Theorem. After we enunciate Church's Theorem of Unspeakability in a formal and rigorous manner, we will present the main ideas of the proof of Church's Undecidability Theorem for First Order Logic, which uses Robinson's axiomatic system for arithmetic and four facts about himself: (a) In Robinson's system for arithmetic recursive functions are representable (b) Robinson's system is undecidable, (c) The number of axioms proper to the Robinson system is finite and (d) The logical calculation of the Robinson system is equal (formally) to the calculation of the first-order logic.

Keywords: Church's Undecidability Theorem, First Order Logic, Recursive Function.

1. Introducción

Si tuviésemos que ubicar una fecha para el origen por la inquietud de la decidibilidad dentro de la matemática diríamos, junto con Mancosu, Zach y Badesa[1], que tal fecha es 1900, cuando David Hilbert presenta su famosa ponencia "*Mathematische Probleme*" ante el *Congreso Internacional de París*. Según Mancosu, Zach y Badesa, Hilbert en tal ponencia asegura que todo problema matemático debe tener una solución[2]. Sin embargo, las afirmaciones que al respecto hace el autor en dicha ponencia sobre el problema de la decidibilidad, y la resolubilidad de todo problema matemático, no fueron probadas por Hilbert de manera formal, eran más bien la exposición de sus convicciones filosóficas al respecto del conocimiento matemático, de tal manera que 1900 es la fecha de origen del problema de la decidibilidad desde una perspectiva filosófica o especulativa, mas no desde una perspectiva formal.

En el año de 1917, en una conferencia titulada "El pensamiento axiomático"[3], Hilbert presenta, siguiendo la misma línea de su artículo "Acerca del concepto de número"[4], los problemas que deben ocupar la mayor atención en el nuevo enfoque axiomático. A diferencia del texto de 1900 donde se hablaba del valor de las pruebas de *completitud*, esta vez el autor sólo se centra en dos requisitos para juzgar a nuestras axiomatizaciones como adecuadas: el primero consiste en ofrecer una visión de conjunto de la *dependencia* (o *independencia*) de los axiomas de la teoría y el otro consiste en la obtención de una *prueba de consistencia* del sistema. Hilbert tajantemente nos dice que "son estos los dos principios que debemos tomar como criterio en el examen de los axiomas de una teoría"[5], pero luego afirma que la problemática por *la consistencia y* por la *axiomatización de una teoría* no es una investigación que se lleva a cabo de forma aislada, sino que viene ligada a otra serie de inquietudes teórico-cognoscitivas. Estas inquietudes son[6]:

[1] Cf. Mancosu, P., Zach, R. y Badesa, C., *The development of mathematical logic. From Russell to Tarski: 1900-1935*. Oxford University Press New York and Oxford. 2005, Pág. 71.

[2] Por ejemplo Hilbert afirma: "La convicción en la resolubilidad de todo problema matemático es un incentivo para el trabajador. Escuchamos dentro de nosotros el canto imperecedero: he ahí un problema. Busca su solución. La podrás encontrar mediante la razón pura, pues en la matemática no hay *ignorabimus.*" En David Hilbert, "Mathematical Problems" (trad. de Mary Winston Newson), en *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. 28. American Mathematical Society, 1976, Pág. 7.

[3] Hilbert, D. "El pensamiento axiomático", 1918 en Hilbert, D., *Fundamentos de la matemática*, Carlos Álvarez y Luis Felipe Segura (Comp.). MATHEMA. México D.F. 1993.

[4] Hilbert, D. "Acerca del concepto de número", 1900 en Hilbert, D., *Fundamentos de la matemática.*

[5] Hilbert, D. "El pensamiento axiomático", Pág. 26.

[6] Cf. Ibíd. Pág.32.

a. La solubilidad de cualquier problema matemático
b. La posibilidad ulterior de control de los resultados de una investigación matemática (es decir, saber de antemano si mediante la aplicación de las reglas del cálculo, se llegará a la solución deseada o no).
c. La elección de un criterio que determine cuándo una demostración matemática es más sencilla que otra.
d. La relación entre el contenido intuitivo de las teorías y el formalismo en matemática y lógica.
e. La *decidibilidad* de un problema matemático mediante un número finito de pasos.

Ahora bien, dentro de estas inquietudes el mismo autor reconoce que la más conocida, pero también la más significativa, es la referente a la *decidibilidad* de un problema matemático mediante un número finito de operaciones[7].

Durante los años veinte del siglo XX, se empiezan a obtener resultados con respecto a la *decidibilidad* de varios sistemas lógicos-matemáticos. Pero, no es hasta finales de la segunda década del siglo pasado cuando el problema de la *decidibilidad* aparece como una interrogante de peso dentro de los fundamentos de la matemática. Esta vez, el problema aparece enmarcado en la primera presentación moderna de la *Lógica de primer orden (*$\mathbf{L}_{\mathbf{1}}$), se trata pues, de la obra *Grundzüge der theoretischen Logik*[8] de 1928 que escribieron conjuntamente Hilbert y Ackermann. En tal obra la interrogante se presentaba como una cuestión semántica, conocida a lo largo de la historia como el *Entscheidungsproblem*, que venía a manifestar que el problema de la decisión para la *Lógica de primer orden* en su globalidad, se resolvía si para cualquier fórmula del sistema, existiese un procedimiento efectivo que determinase si la misma fuese lógicamente válida o no (o satisfacible o no), la cita en cuestión donde los autores plantean el problema de la *decidibilidad* para $\mathbf{L}_{\mathbf{1}}$es la siguiente: "el problema de la decisión se resuelve, si se conoce un

[7] Cf. Ibídem.
[8] Existen traducciones de esta obra al inglés y al español. La primera traducción al inglés (1950), que recibe el título *Principles of mathematical logic,* se realiza a partir de la segunda edición de la versión alemana (1938). La presentación en español recibe el nombre de *Elementos de lógica teórica.* la primera edición de la presentación en español (1962) responde a la traducción de la cuarta edición alemana (1958), mientras que la segunda edición española (1975) corresponde a una traducción de la sexta edición alemana (1972). Vale la pena resaltar que el problema de la decibilidad de la Lógica de primer orden fue eliminado como problema abierto en las ediciones posteriores a 1928, probablemente porque Alonzo Church en 1936 probó la indecibilidad de la *Lógica de primer orden*.

procedimiento que permita, para cualquier fórmula de la lógica, decidir si esta es válida o satisfacible, respectivamente ”[9]

Tanto para Hilbert como Ackermann el problema de la decisión para la *Lógica de primer orden* se presentaba como el problema más importante de la lógica que debía encontrar una solución, pues su solución positiva significaría la resolubilidad mecánica de todo problema matemático[10], es decir, la existencia de un procedimiento efectivo o algoritmo que solucione en un número finito de pasos bien definidos, que no ameriten de ingenio o creatividad, los problemas matemáticos que pudiesen plantearse en el seno de un sistema formal. Ahora bien, el problema de la decisión para $\mathbf{L}_1$ fue resuelto de manera negativa por Alonzo Church en 1936 mediante el siguiente teorema:

Teorema de indecidibilidad de Church (versión 1): La *Lógica de primer orden* es indecidible[11].

Según dicho teorema es imposible encontrar un procedimiento decisorio para la *Lógica de primer orden* en su globalidad. Dicho resultado, considerado por algunos como “uno de los últimos grandes resultados de limitación del siglo XX”[12], tiene consecuencias lógico-filosóficas de sumo interés, en especial con las relacionadas con el *Programa original de David Hilbert.* El teorema, fuera de toda especulación filosófica, tiene una gran importancia, tanto por lo que significa, como por la introducción de los conceptos formales que se ven involucrados en su enunciación y demostración. En síntesis, el *Teorema de indecidibilidad de Church* afirma la ausencia de un método efectivamente calculable de decisión para $\mathbf{L}_1$. Pero, surge inmediatamente la inquietud de cómo se llegó a tal resultado, si se tiene presente que la *calculabilidad efectiva*[13] es un concepto intuitivo, esto es, no formal; la respuesta es que el autor identificó la *calculabilidad efectiva* con la noción formal y rigurosa de *recursividad*. Mostraremos a continuación como Church llega a tal identificación, llamada por muchos la *Tesis de Church*.

---

[9] Dichas líneas están traducidas al inglés y citadas en Mancosu, P., Zach, R. y Badesa, C., *Ob. Cit.*, Pág. 72. (La Traducción al español es propia).

[10] Cf. Mosterín, J. “El problema de la decisión en la lógica de predicados” en *Convivium*, Núm. 39, 1973. También se refleja este pensamiento en Mancosu, P., Zach, R. y Badesa, C., *Ob. Cit.*, Pág. *72.*

[11] Esta es la enunciación intuitiva del *Teorema de indecibilidad de Church*. Una enunciación similar puede encontrarse en Garrido, M., *Lógica Simbólica*, Tecnos, Madrid, 2001 (4ta edición), Pág. 371. Más adelante enunciaremos el Teorema usando conceptos lógicos-matemáticos rigurosos.

[12] Alonso, E., *Sócrates en Viena: Una biografía intelectual de Kurt Gödel* .Ed. Montesinos, 2007, Pág. 94.

[13]Sinónimos de *calculabilidad efectiva* son *tarea efectiva, función efectivamente calculable, procedimiento efectivo, algoritmo, procedimiento efectivo computable*, etc.

El Teorema de indecidibilidad de Church (1936): Formulación y presentación de las ideas principales de su prueba

A principio de 1930 el profesor Alonzo Church y un grupo de lógicos investigadores, entre los que destaca S. Kleene, llevaban a cabo estudios sobre la identificación de funciones numéricas cuyos valores pudiesen ser calculados de manera efectiva, en donde una función numérica *f* es *efectivamente calculable* en el caso en que se puede ofrecer una lista de instrucciones que, en principio, permitan determinar el valor de *f* (n) para cualquier argumento n (siendo completamente explícitas y definidas dichas instrucciones)[14]. En 1933 Church ofrece una presentación del *cálculo-*λ en donde se pueden definir todas las funciones numéricas que son *efectivamente calculable*[15]; un año más tarde, luego de las conferencias dictadas por Gödel en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton sobre *funciones recursivas*, el profesor Church demuestra que existe una equivalencia entre la clase de *funciones recursivas* y la clase de *funciones definibles en el cálculo-*λ[16]. Para 1936 el lógico y matemático británico Alan Turing demuestra que existe una equivalencia entre su propia caracterización formal de *procedimiento efectivo*, esto es, las *funciones computables por máquinas de Turing* y las *funciones definibles en el cálculo-* λ[17]. Otras caracterizaciones formales surgieron durante la misma época y todas ellas son equivalentes[18], esto dio pie a que Church afirmase la siguiente equivalencia "definimos la noción de función efectivamente calculable sobre enteros positivos, identificándola con la noción de función recursiva de enteros positivos."[19] Esta afirmación es la que se conoce como la *Tesis de Church* y puede ser enunciada de la siguiente manera:

<u>*Tesis de Church*[20]:</u> Una función es *efectivamente calculable* si, y sólo si, es *recursiva*.

Hay que advertir que la tesis no puede ser demostrada (no puede considerársela como un teorema), pues ella establece una conexión entre un concepto informal y uno formal. Sin

---

[14] Cf. Boolos, G. y Jeffrey, R., *Computability and Logic*, Cambridge University Press. Cambridge, 2007, Pág. 23.
[15] Cf. Alonso, E., *Ob. Cit.*,Pág. 93.
[16] Cf. Ibídem.
[17] Cf. Turing, A. "On computable numbers with an application to the entscheidungsproblem" (1936) en Davis, M. (editor), *Theundecidable. Basic papers on undecidable propositions, unsolvable problems and computable functions.* Raven Press, Nueva York, 1965, Págs. 115-153.
[18] Cf. Vega, L. y Olmos, P. (Ed.), *Compendio de lógica, argumentación y retórica*, Editorial Trotta, Madrid, 2012 (2da edición), Pág. 43, Entrada: Algoritmo.
[19] Church, A. "An unsolvable problem of elementary number theory" (1936) en Martin Davis, *Ob, Cit*., Pág.100.
[20] Cf. Copeland, B., "The Church-Turing Thesis", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*(Fall 2008 Edition), Edward N. Zalta (ed.),
URL = <http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/church-turing/>.

embargo, existen varios resultados que invitan a creer que la tesis es cierta, entre esos resultados podemos mencionar[21]:

a) El hecho de que todas las *funciones efectivamente calculables* (hasta la fecha) son *recursivas* y viceversa.
b) El hecho de que todas las caracterizaciones formales son equivalentes (sugiriendo que todas ellas recogen una misma clase de funciones).

Ahora bien, como dijimos anteriormente, fue la *Tesis de Church* la que permitió una aproximación formal al problema de la decisión y en consecuencia una respuesta negativa tanto para la aritmética[22] como para la *Lógica de primer orden*. A continuación nos proponemos formular el *Teorema de indecidibilidad de Church*, para ello será menester explicar antes los conceptos que se involucran en su enunciación, siendo uno de dichos conceptos el de *función recursiva* que por la *Tesis de Church* es equivalente al de *función efectivamente calculable*. El otro concepto de suma importancia para la enunciación del resultado obtenido por Church es la *numeración de Gödel*, técnica de codificación muy útil dentro de las investigaciones meta-matemáticas. Luego que enunciemos el *Teorema de indecibilidad de Church* de manera formal y rigurosa, pasaremos a presentar las ideas principales de la prueba del *Teorema de indecidibilidad de Church* para la *Lógica de primer orden*, en la cual se utiliza el *sistema axiomático de Robinson para la aritmética* y cuatro hechos sobre él mismo: (a) En el sistema de Robinson para la aritmética las funciones recursivas son representables, (b) El sistema de Robinson es indecidible, (c) El número de axiomas propios del sistema de Robinson es finito y (d) El cálculo lógico del sistema de Robinson es igual (formalmente) al cálculo de la *Lógica de primer orden*.

2. El concepto de *función recursiva*

La clase de las *funciones recursivas* puede definirse (de manera intuitiva) del siguiente modo: “Ciertas funciones que pueden definirse fácilmente son recursivas, y todas las funciones obtenidas a partir de éstas mediante la aplicación de tres reglas son también recursivas”[23].

[21] Cf. Ramos, J. “Sobre la naturaleza de la tesis de Church” en *Ideas y valores*, No. 92-93, Diciembre 1993, Pág. 164.
[22] “…el *Entscheidungsproblem* es imposible de resolver en el caso de cualquier sistema de la lógica simbólica que sea**ω**-consistente en el sentido de Gödel y lo suficientemente potente como para permitir ciertos métodos relativamente simples de definición y la prueba.” en A. Church, “An unsolvable problem of elementary number theory” (1936) en Martin Davis, *Ob, Cit*., Pág. 107. (Traducción propia).

[23] Hamilton, A. *Lógica para matemáticos*, Editorial Paraninfo, Madrid, 1981, Pág. 149.

<u>*Definición 1 (Función recursiva)*</u>[24]<u>*:*</u>

(a) <u>*Definición de las funciones básicas:*</u>

1) **La función cero** $z\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, definida de la siguiente manera: $z(n)=0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

2) **La función sucesor** $s\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, definida de la siguiente manera: $s(n)=n+1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3) **Las funciones de proyección** $p_i^k\colon \mathbb{N}^k\to\mathbb{N}$, definida de la siguiente manera: $p_i^k(n_1, \dots, n_k) = n_i$, para todo $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$

(b) <u>*Las tres reglas básicas:*</u>

i. **Composición:** Si $g\colon \mathbb{N}^J\to\mathbb{N}$ y $h_i\colon \mathbb{N}^k\to\mathbb{N}$ para $1\leq i \leq j$, entonces $f\colon \mathbb{N}^k\to\mathbb{N}$ se obtiene mediante composición de g y $h_1,\dots,h_j$, definiéndose así:

$$f(n_1,\dots,n_k) = g\,(h_1(n_1,\dots,n_k),\dots,h_j(n_1,\dots,n_k)).$$

ii. **Recursión:** Si $g\colon\mathbb{N}^k\to\mathbb{N}$ y $h\colon\mathbb{N}^{k+2}\to\mathbb{N}$, entonces la función $f\colon\mathbb{N}^{k+1}\to\mathbb{N}$ definida por:

$$f\,(n_1,\dots,n_k,0) = g(n_1,\dots,n_k)$$

$$f(n_1,\dots,n_k,n+1)= h(n_1,\dots,n_k, n, f(n_1,\dots,n_k,n))$$

Se dice que fue obtenido por recursión a partir de las funciones g y h.

iii. **Operador de minimización:** Sea $g\colon\mathbb{N}^{k+1}\to\mathbb{N}$ cualquier función que tenga la propiedad de que para todo $n_1,\dots,n_k \in \mathbb{N}$ existe al menos un $n \in \mathbb{N}$ tal que $g(n_1,\dots,n_k,n)= 0$. Entonces la función $f\colon\mathbb{N}^k\to\mathbb{N}$ definida por:

$$f(n_1,\dots, n_k)= \text{mínimo número } n\in\mathbb{N} \text{ tal que } g(n_1,\dots, n_k, n)= 0$$

Se dice que f se obtuvo a partir de g mediante uso del *operador de minimización*.

[24] Cf., Ibid, Págs. 149-151.

En base a las tres funciones básicas y las tres reglas podemos ofrecer una caracterización rigurosa y adecuada de la noción de función recursiva de la siguiente manera.

(c) *Finalmente definimos Función recursiva a partir de (a) y (b):*

Una función sobre ℕ es *recursiva*, si se puede obtener a partir de las funciones básicas mediante un número finito de aplicaciones de las reglas I, II, III. De tal manera tenemos que la clase de las *funciones recursivas* es la menor clase de funciones sobre ℕ que contiene a las funciones de 1, 2, 3 y es cerrada bajo la aplicación de las reglas I, II, III.

Como se mencionó en la introducción, las *funciones recursivas* son una caracterización formal de la noción intuitiva de *procedimiento efectivamente calculable* o *algoritmo*. Esta caracterización es equivalente a otras como la caracterización de Church por medio de *funciones λ,* la de Turing por medio de *máquinas de Turing*, la de Post por medio de *procesos combinatorios finitos*, la de *algoritmos normales* de Markov, etc.[25] Lo que quiere decir lo anterior es que todas caracterizan el mismo conjunto de funciones.

Entre las funciones recursivas se encuentran las funciones aritméticas más comunes, como lo son la adición, la multiplicación, la potencia, entre otras. Consideremos algunos ejemplos de funciones recursivas de manera detallada:

a) La función de adición se obtiene mediante la regla de recursión a partir de la función proyección (p^1_1) y la aplicación de la regla de composición entre la función sucesor y la función de proyección (p^3_3), ya que:

$$f_1(m,0)= p^1_1(m)$$
$$f_1(m,n+1)= s(p^3_3\ (m,n,f_1(m,n))$$ [26]

b) La función de multiplicación se obtiene a partir de la función cero y de función de adición mediante la regla de recursión:

[25] Cf. Immerman, N, "Computability and Complexity", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2011 Edition), Edward N. Zalta (ed.),
URL = <http://plato.stanford.edu/archives/fall2011/entries/computability/>.

[26] Notar que $g = p^1_1$ y $h = s\ ^o p^3_3$. h es recursiva pues se obtiene aplicando la regla de composición, considerando a $g = s$ y $h = p^3_3$.

$$f_2(m,0)= z(m)$$
$$f_2(m,n+1)= h(m, n, f_2(m,n))$$

Donde la función h(m,n,p) es una función recursiva definida por composición de la siguiente manera: $h(m,n,p) = f_1(p^3_3(m,n,p),\ p^3_1(m,n,p))$.

c) La función g:ℕxℕxℕ→ℕ definida de la siguiente manera: $g(m,n,p)=n^2$, se obtiene mediante composición a partir de f_2 (denotando f_2 a la función multiplicación) y la función proyección(p^3_2):

$$g(m,n,p)= f_2(p^3_2(m,n,p),\ p^3_2(m,n,p))$$

<u>Definición 2 (Función recursiva primitiva)</u>[27]*<u>:</u>*

Una función es *recursiva primitiva*, si se puede obtener a partir de las funciones básicas mediante un número finito de aplicaciones de las reglas I y II únicamente[28].

Neil Immerman comenta que, a pesar de lo simple que resulta la definición de las *funciones recursivas primitivas*, estas resultan en extremo poderosas y de gran valor dentro de las investigaciones meta-matemáticas; el autor cita un caso en concreto:

> Gödel demostró inductivamente que toda función recursiva primitiva puede ser representada en la aritmética de primer orden. A continuación, utiliza las funciones recursivas primitivas para codificar las fórmula se incluso secuencias de fórmulas con números. Finalmente utiliza las funciones recursivas primitivas para calcularlas propiedades de las fórmulas representadas, incluyendo que una fórmula está bien formada, que una secuencia de fórmulas es una prueba, y que una fórmula es un teorema.[29]

A continuación ofrecemos algunos ejemplos de funciones recursivas primitivas:

a) La función suma es recursiva primitiva.

b) La función producto es recursiva primitiva.

[27] Cf. Hamilton, A. *Ob. Cit.*, Pág. 151.
[28] La clase de las funciones recursivas primitiva forman una clase estrictamente menor que la clase de las funciones recursivas.
[29]Immerman, N. *Ob. Cit. (traducción propia)*

c) Todas las funciones constantes son recursivas primitivas. La función constante de valor *k* puede definirse a través de la función de proyección usando la regla de recursión:

$$f(0)=k$$
$$f(n+1)=p^{2}_{2}(n, f(n))$$

Se puede extender la noción de recursividad a las relaciones mediante la noción de función característica.

Definición 3 (Función característica de una relación)[30]:

Sea *R* una relación de *k* argumentos sobre ℕ. La *función característica de R* (a la que denotaremos como C_R) se define de la siguiente manera:

$$C_R(n_1,\ldots,n_k)=\begin{cases} 0 \text{ si se verifica } R(n_1,\ldots,n_k) \\ 1 \text{ si no se verifica } R(n_1,\ldots,n_k) \end{cases}$$

Definición 4 (Relaciones recursivas)[31]:

Una relación *R* sobre ℕ es *recursiva*, si su función característica es recursiva.

Algunos ejemplos de relaciones recursivas son los siguientes:

a) La relación binaria *R*, definida como *R* (m,n) se verifica si, y sólo si, m+n es par, es recursiva[32].

b) Las relación "menor o igual que" es recursiva[33].

Hecho sobre relaciones recursivas[34]:

Si *R* y *S* son relaciones recursivas de aridad *k*, entonces las relaciones $\neg R, R\wedge S$ *y* $R\vee S$ son recursivas de aridad *k*.

[30] Cf. Hamilton, A. *Ob. Cit.*, Pág. 153.
[31] Cf. Ibídem.
[32] Cf. Ibídem.
[33] Cf. Ibídem.
[34] Cf. Ibíd. Pág. 155.

La propiedad de recursividad se puede extender a los conjuntos de números y esto gracias a la noción de función característica.

Definición 5 (Conjunto recursivo)[35]:

Dado un conjunto A de números naturales, diremos que A es *recursivo,* si la función característica de A es recursiva (La función característica de un conjunto A viene dada por la relación de pertenencia "Є").

Algunos ejemplos de conjuntos recursivos son los siguientes:

a) El conjunto ℕ es recursivo, pues su función característica es la función cero que es recursiva.

b) El conjunto vacío es recursivo, pues su función característica es una función constantemente 1.

Hechos sobre conjuntos recursivos[36]:

(I) Si A y B son conjuntos recursivos, entonces A', A∩B, A∪B son conjuntos recursivos.

(II) Todo conjunto unitario de ℕ es recursivo.

(III) Todo conjunto finito es recursivo.

3. La numeración de Gödel

La *numeración de Gödel* es la otra noción lógico-matemática que permite presentar *el teorema de indecidibilidad de Church* de una manera rigurosa y formal. Esta técnica de codificación del lenguaje formal, a la que muchos llaman *gödelización*, *aritmetización de la sintaxis* o *representación numérica de la sintaxis*, es una idea original que presentó Gödel en 1931 con el propósito de probar la existencia de proposiciones indecidibles en *Principia Mathematica* y cualquier sistema similar, es decir, la incompletitud de un sistema axiomático recursivo para la

[35] Cf. Ibíd. Pág. 154.
[36] Cf. Ibíd. Págs. 155-156.

aritmética. La numeración de Gödel parece tener como raíz heurística aquella tesis leibniziana según la cual se le puede asignar números primos a las ideas simples, mientras que las ideas complejas se pueden interpretar como el producto de los números asociados a las ideas simples que la componen[37], sin embargo, parece ser algo más intuitivo lo que fundamenta la gödelización y es la idea de que:

> ..Como los números son más fáciles de manejar que las fórmulas o las ideas, en ciertas investigaciones conviene traducir nuestras preguntas acerca de las proposiciones (por ejemplo, si son verdaderas o si se siguen unas de otras) a preguntas acerca de los números y sus relaciones, susceptibles de recibir repuesta mediante el cálculo.[38]

Ahora bien, debemos recordar que Gödel tomó como sistema axiomático para caracterizar a la aritmética una adaptación del sistema expuesto por Russell y Whitehead en *Principia Mathematica.* Éste sistema contiene una sintaxis, en donde se ofrecen los signos primitivos que constituyen su vocabulario y a partir de los cuales se puede definir las hileras de signos que serán consideradas fórmulas del sistema (Fbf). Gödel lo que hizo fue definir una función g sobre el conjunto de los símbolos primitivos del sistema, tal que a cada símbolo le asigna un número natural, y mediante ciertos procedimientos, también se extiende la función g para asignarle un número gödeliano a toda fórmula del sistema (sucesión de signos) y a toda prueba del sistema (sucesión finita de fórmulas). La función g se caracteriza por cumplir las siguientes propiedades[39]:

1) La función g es inyectiva, es decir, a diferentes símbolos, le corresponden diferentes números de Gödel.
2) Sea w un elemento del dominio de g, entonces el número de Gödel de w puede ser calculado de forma efectiva por un algoritmo.
3) La función inversa g^{-1} es efectivamente calculable, esto es, si n es un número de Gödel, entonces existe un algoritmo que permite construir la hilera de símbolos cuyo número de Gödel es n.

Para la presente investigación no seguiremos la codificación original de Gödel, sino la que ofrece Hamilton en *Lógica para matemáticos*. Así pues, siguiendo al autor, definiremos una

[37] Cf. Mosterín, J. y Torretti, R. *Diccionario de lógica y filosofía de la ciencia*. Alianza. Madrid. 2002, Pág. 266. Entrada: Gödelización.
[38] Ibídem.
[39] Cf. Vega, L. y Olmos, P. (Ed.), *Ob. Cit.*, Pág. 429. Entrada: Numeración de Gödel.

función *g* sobre un conjunto de símbolos de un lenguaje de primer orden. Nuestra función tendrá como dominio tal conjunto de símbolos lógicos y como conjunto de llegada a los números naturales.

Definición 6 (La función *g*)[40]:

Símbolo	Descripción del símbolo	Numero de Gödel según la función g
(	Paréntesis abierto	g (()= 3
)	Paréntesis cerrado	g ())= 5
,	Coma	g (,)= 7
¬	Negación	g (¬)= 9
→	Implicación	g (→)= 11
∀	Cuantificador universal	g (∀)= 13
x_k	Variable	$g(x_k)= 7+8 \cdot k$, para $k \in \mathbb{N}$
a_k	Constante	$g(a_k) = 9+8 \cdot k$, para $k \in \mathbb{N}$
f_k^n	Letras para funciones, donde el n indica la aridad, y el k la posición.	$g(f_k^n)= 11 + 8 \cdot (2^n \cdot 3^k)$, para $k \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$
A_k^n	Letras para predicado, donde el n indica la aridad, y el k la posición.	$g(A_k^n)= 13 + 8 \cdot (2^n \cdot 3^k)$, para $k \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$

[40] Cf. Hamilton, A. *Ob. Cit.*, Pág.159.

Como dijimos anteriormente, dado un número podemos saber si él es o no el número de Gödel de un símbolo del lenguaje, ejemplo: el número 587 es el número de Gödel de un símbolo del lenguaje, lo que hacemos es dividir 587 entre 8, esto nos da como resultado $(8\cdot 73) + 3$, eso es igual a $(8 \cdot 72) + 11$, y esto es igual a $(8 \cdot (2^3 \cdot 3^2)) + 11$, este número es el resultado que la función g le da a la letra para función f^3_2. Pero no todo número natural representa un número de Gödel, por ejemplo el número impar 333 dividido entre 8 es igual a $(8 \cdot 41) + 5$, esto es igual a $(8 \cdot 40) + 13$, pero si descomponemos 40, esto nos da $(8 \cdot (2^3 \cdot 5)) + 13$, y este número no es imagen de ningún símbolo del sistema.

Extensión de la función *g* para asignarle un número de Gödel a cualquier término y fórmula (fbf) del sistema:

Lo más apropiado es darle un único número de Gödel a una fórmula, en vez de una serie de números. Ahora bien, es importante señalar que el número de Gödel de un símbolo primitivo del sistema siempre será un número impar (el resultado de la suma de un numero par con un número impar es siempre un número impar), mientras que el número de Gödel de una cadena de símbolos del sistema (fbf) será un número par[41]. A continuación procedemos a mostrar cómo se le asigna un número gödeliano a una cadena o sucesión de símbolos del sistema[42]:

Si $U_1,\ldots, U_k$ son símbolos primitivos del lenguaje, definimos:

$g(U_1,\ldots, U_k)= 2^{g(U1)}\cdot 3^{g(U2)}\cdot\ldots\cdot p_k^{g(Uk)}$, donde para cada i, $1\geq i \leq k$, P_i es el i-ésimo número primo.

Consideremos los siguientes ejemplos:

(a) Calcularemos el número de Gödel de la siguiente término $f^1_1(x_1)$

$$g\,(f^1{}_1(x_1))= 2^{g(f^1_1)}\cdot 3^{g(()}\cdot 5^{g(x1)}\cdot 7^{g())}$$

$$2^{11+8\cdot(2\cdot 3)}\cdot 3^3\cdot 5^{7+8\cdot 1}\cdot 7^5$$

$$2^{59}\cdot 3^3\cdot 5^{15}\cdot 7^5$$

(b) Un número par que no resulta ser un número de Gödel es 1008, pues $1008= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$, y esto no refleja ni un término, ni una fórmula y mucho menos un símbolo

[41] Cf. Ibíd. Pág. 160.
[42] Cf. Ibídem.

primitivo. Notar que 4, la potencia de 2, no es el número de Gödel de ningún símbolo primitivo.

<u>Extensión de la función *g* para asignarle un número de Gödel a las sucesiones finitas de fórmulas del sistema:</u>

A las sucesiones finitas de fórmulas también se le puede asignar, mediante la función *g*, un número de Gödel, es decir, las pruebas de derivación también tienen un número gödeliano. La extensión de *g* es la siguiente[43]:

Sea $S_1, S_2, \ldots, S_r$ una sucesión finita de fórmulas entonces:

$g(S_1, S_2, \ldots, S_r) = 2^{g(S1)} \cdot 3^{g(S2)} \cdot 5^{g(S3)} \cdot \ldots \cdot p_r^{g(Sr)}$, donde para cada i, $1 \geq i \leq r$, P_i es el i-ésimo número primo.

Ahora bien, ¿Cómo sabemos cuándo hablamos del número de Gödel de una prueba? Pues cuando tengamos un producto de primos elevados a números pares tendremos una fuerte candidata de ser una sucesión finita de fórmulas o términos. Así pues, la diferencia entre los números de Gödel de un símbolo, una fórmula y una secuencia de fórmulas puede resumirse perfectamente de la siguiente manera:

> …se puede ver fácilmente que el número correspondiente a un símbolo no es nunca el correspondiente a una palabra[44], ya que el primero es impar y el segundo es par. Además, el número de una palabra (fórmula) no es nunca el número de una sucesión de palabras[45] (el primero es tal que el exponente de 2 es impar, mientras que el exponente de 2 en el segundo es par)[46]

Por último, es importante señalar que la propiedad inyectiva de la función *g* se preserva bajo sus dos extensiones, es decir, a diferentes fórmulas le corresponde diferentes números de Gödel (lo mismo para el caso de secuencias de fórmulas), esto se debe al *teorema fundamental de*

[43] Cf. Ibíd., Pág. 161.
[44] En este contexto "palabra" es sinónimo de "fórmula".
[45] En este contexto "sucesión de palabras" es sinónimo de "Sucesión de fórmulas".
[46] Vega, L. y Olmos, P. (Ed.), *Ob. Cit.*, Pág. 429. Entrada: Numeración de Gödel.

la aritmética según el cual la factorización de cualquier número entero en términos de potencias de factores primos es única[47].

4. Formulación lógico-matemática del *Teorema de indecidibilidad de Church*

El concepto de *función recursiva* y la técnica de *numeración de Gödel* permiten formular, como lo dijimos al principio de este capítulo, el *Teorema de indecidibilidad de Church* de una manera lógico-matemática rigurosa. El primer concepto, como ya vimos, permite caracterizar la noción intuitiva de *procedimiento efectivamente calculable* y ello gracias a la *Tesis de Church*. Mientras que la *gödelización* se ha convertido en una técnica estándar en la lógica matemática gracias a que con su ayuda las preguntas lógicas se vuelven preguntas aritméticas, es decir, las preguntas sobre las relaciones entre fórmulas o si una determinada fórmula es un teorema, es un axioma, etc., se vuelven preguntas sobre si ciertos números están en ciertas relaciones con otros números o si ciertos números son elementos de ciertos conjuntos. Así pues, con la ayuda de estos dos conceptos podemos enunciar de una manera formal y rigurosa la indecidibilidad de la *Lógica de primer orden* de la siguiente manera:

Teorema de indecidibilidad de Church (Versión 2): El conjunto de los números de Gödel de los teoremas de la *Lógica de primer orden* no es recursivo, es decir, su función característica no es recursiva.

5. Presentación de las ideas principales de la prueba del *Teorema de indecidibilidad de Church*

Con el fin de presentar un esbozo de prueba del *Teorema de indecidibilidad de Church,* expondremos a continuación el *sistema axiomático de Robinson para la aritmética* y unos hechos sobre el mismo.

[47] El profesor Enrique Alonso nos dice cómo Gödel llega a dicho resultado: "…Gödel se sirve de los conocimientos de teoría de números adquiridos en las clases impartidas por Furtwängler en Viena –Según él mismo declara– y en particular del conocido teorema chino del resto." en Alonso, E. *Ob. Cit.*, Pág. 78.

5.1. El sistema de Robinson para la aritmética

Consideremos el siguiente sistema axiomático, el cual se denomina "sistema de Robinson para la aritmética" y al que denotaremos por RR siguiendo a Mendelson[48].

(a) Lenguaje:

El lenguaje de RR está constituido por el siguiente conjunto de símbolos {=, <, s, +, ·, 0}, donde tenemos:

- Un símbolo relacional binario, =, para denotar la identidad.
- Un símbolo relacional binario, <, para la denotar la relación "menor que".
- Un símbolo funcional monádico, s, para denotar la operación sucesor.
- Un símbolo funcional diádico, +, para denotar la función suma.
- Un símbolo funcional diádico, ·, para denotar la función producto.
- Un símbolo constante, 0, para denotar el cero.

(b) Axiomas lógicos:

Los axiomas lógicos lo constituyen los axiomas del 1 al 4 para la *Lógica de primer orden* que ofrece Herbert Enderton en *A mathematical introduction to logic*[49]:

Los axiomas lógicos (esquemas de axiomas) son todas las generalizaciones de fórmulas de las formas siguientes, donde *x, y* son variables y tanto φ como ψ son fórmulas (decimos que φ es una generalización de ψ, si φ es $\forall x_1,\ldots,x_n\ \psi$, para variables $x_1,\ldots,x_n$).

1. Todas las instancias de tautología de la lógica proposicional[50].
2. $\forall x\varphi\rightarrow\varphi^{x}_{t}$, donde *t* es sustituible por *x* en φ[51].
3. $\forall x\,(\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow(\forall x\,\varphi\rightarrow\forall x\,\psi)$[52].
4. $\varphi\rightarrow\forall x\,\varphi$, *donde x no ocurre libre en* φ[53].

[48] Cf. Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*, Chapman & Hall, London, 1997 (4ta Ed.).,Págs. 200-201.
[49] Cf. Enderton, H., *A matematical introduction to logic*, Harcourt Academic Press, San Diego, 2001 (2da. Edición), Pág.112.
[50] Este axioma nos permite incluir todas las fórmulas tautológicas de la *Lógica proposicional*.
[51] Este axioma es la regla de *eliminación del generalizador* sustituyendo el mismo por cualquier término.
[52] Este axioma es la *regla de distribución del cuantificador universal*.
[53] Este axioma permite la *introducción del generalizador* siempre y cuando x no ocurra libre en φ.

Llamaremos al sistema axiomático, constituido por estos axiomas más la regla de inferencia *modus ponens*, AL1*.

(c) Axiomas propios:

Los axiomas propios del sistema de Robinson son los siguientes:

(ASR-1) $x_1 = x_1$[54]

(ASR-2) $x_1 = x_2 \rightarrow x_2 = x_1$[55]

(ASR-3) $x_1 = x_2 \rightarrow (x_2 = x_3 \rightarrow x_1 = x_3)$[56]

(ASR-4) $x_1 = x_2 \rightarrow s(x_1) = s(x_2)$[57]

(ASR-5) $x_1 = x_2 \rightarrow (x_1 + x_3 = x_2 + x_3 \wedge x_3 + x_1 = x_3 + x_2)$[58]

(ASR-6) $x_1 = x_2 \rightarrow (x_1 \cdot x_3 = x_2 \cdot x_3 \wedge x_3 \cdot x_1 = x_3 \cdot x_2)$[59]

(ASR-7) $s(x_1) = s(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$[60]

(ASR-8) $0 \neq s(x_1)$[61]

(ASR-9) $x_1 \neq 0 \rightarrow (\exists x_2)(x_1 = s(x_2))$[62]

(ASR-10) $x_1 + 0 = x_1$[63]

(ASR-11) $x_1 + s(x_2) \rightarrow s((x_1 + x_2))$[64]

(ASR-12) $x_1 \cdot 0 = 0$[65]

54 Este axioma expresa la propiedad reflexiva de la identidad.
55 Este axioma expresa la propiedad simétrica de la identidad.
56 Este axioma expresa la propiedad transitiva de la identidad.
57 Este axioma expresa que la función sucesor preserva la identidad.
58 Este axioma expresa que la función suma preserva la identidad.
59 Este axioma expresa que la función producto preserva la identidad.
60 Este axioma expresa que la función sucesor es inyectiva.
61 Este axioma expresa que el cero no es sucesor de ningún número.
62 Este axioma expresa que todo número distinto del cero es sucesor de algún número.
63 Este axioma expresa el caso base de la definición de la suma.
64 Este axioma expresa el caso inductivo de la definición de la suma.
65 Este axioma expresa el caso base de la definición del producto.

(ASR-13) $x_1 \cdot s(x_2) \rightarrow (x_1 \cdot x_2) + x_1$[66]

(ASR-14) $[(x_2 = x_1 \cdot x_3 + x_4) \wedge (x_4 < x_1) \wedge (x_2 = x_1 \cdot x_5 + x_6) \wedge (x_6 < x_1)] \rightarrow x_4 = x_6$[67]

(d) Regla de inferencia de RR:

Modus ponens.

RR es el sistema axiomático AL1* más los catorce axiomas propios anteriormente presentados.

El sistema axiomático RR es una sub-teoría de la aritmética de Peano (AP) en primer orden[68], en donde todos los teoremas de RR se pueden obtener como teoremas a partir de los axiomas de AP. A diferencia de esta última, RR resulta más débil que la primera, ya que no posee el principio de inducción matemática como axioma propio[69].

5.1.1. Recursividad y Representatividad en el sistema de Robinson

Todas las funciones recursivas son representables en el sistema de Robinson para la aritmética. Antes, es menester explicar que significa que una relación sea expresable y que una función sea representable en un sistema formal (en nuestro caso en el sistema RR).

Definición 7[70]: Una relación k-aría *R* sobre los números naturales es *expresable* en RR, si existe una fbf $\varphi(x_1,\ldots, x_k)$ con k variables libres tal que, para todo $n_1,\ldots, n_k$ que pertenecen a los naturales, se cumple lo siguiente:

(i) Si $R(n_1,\ldots, n_k)$ ocurre en $\mathbb{N}$, entonces

$$RR \vdash \varphi(\underline{S^{(n1)}}(\underline{0}),\ldots,\underline{S^{(nk)}}(\underline{0}))$$[71]

[66] Este axioma expresa el caso inductivo de la definición del producto.

[67] Se trata de un axioma que introduce Mendelson para simplificar algunas pruebas sobre RR. En este caso no trabajamos exactamente con la formulación del axioma que aparece en Mendelson, por consideraciones de simplicidad agregamos paréntesis para distinguir las conjunciones y corchetes para distinguir el antecedente del enunciado condicional. La diferencia entre el axioma que presenta Mendelson y el nuestro es de notación.

[68] Cf. Mendelson, E. *Ob. Cit.*, Pág. 201. El sistema AP puede encontrarse en la página 155 del texto de Mendelson.

[69] Cf. Kneale, W. y Kneale, M. *Desarrollo de la lógica*, Editorial Tecnos, Madrid, 1972, Pág. 681.

[70] Cf. Hamilton, A. *Ob. Cit.*, Pág. 144.

[71] $\underline{\mathbf{S^{(n1)}}}$ ($\underline{\mathbf{0}}$), es el término del lenguaje que nombra al número n_1, de tal manera con $\underline{\mathbf{S^{(nk)}}}$ ($\underline{\mathbf{0}}$) que nombra a n_k.

(ii) Si $R(n_1,\ldots, n_k)$ no ocurre en $\mathbb{N}$, entonces

$$RR \vdash \neg(\varphi(\underline{S^{(n1)}}(\underline{0}), \ldots, \underline{S^{(nk)}}(\underline{0})))$$

De esta manera tenemos que una relación es expresable en el sistema, si existe una fórmula en el lenguaje, de tal manera que si ocurre la relación, entonces la fórmula se deriva del sistema (es un teorema del sistema), en caso de que no ocurra la relación, entonces se deriva la fórmula negada.

Definamos ahora cuando una función es representable en el sistema[72].

Definición 8[73]: una función de n argumentos es r*epresentable* en RR, si existe una fbf con n+1 variables libres $\varphi(x_1,\ldots, x_k, x_{k+1})$, tal que para cada $k_1,\ldots,k_n$, m $\in\mathbb{N}$, lo siguiente ocurre:

(i) Si $f(k_1,\ldots,k_n)= m$, entonces $RR \vdash \varphi(\underline{S^{(k1)}}(\underline{0}),\ldots, \underline{S^{(kn)}}(\underline{0}), \underline{S^{(m)}}(\underline{0}))$.

(ii) $RR \vdash \exists! x\varphi(\underline{S^{(k1)}}(\underline{0}),\ldots, \underline{S^{(kn)}}(\underline{0}), x)$. Ésta cláusula asegura la unicidad de la función.

Con la ayuda de dichas definiciones podemos enunciar el siguiente teorema sobre el sistema de Robinson.

Teorema[74]: Todas las funciones recursivas son representables en RR[75].

[72] Cuando hablamos de relaciones decimos que éstas son *expresables*; las funciones, en cambio, diremos que son *representables.*
[73] Cf. Ibíd., Pág. 145.
[74] Cf. Mendelson, E. *Ob. Cit.,* Pág. 201.
[75] Con la ayuda de la noción de número de Gödel, ofreceremos una lista de relaciones sobre $\mathbb{N}$ que son recursivas y por ende son expresables en RR, la lista es la siguiente:
Teorema:
a. Fbf(n) se verifica si y sólo si n es el número de Gödel de una fórmula de RR.
b. Prax(n) se verifica si y sólo si n es el número de Gödel de un axioma propio de RR.
c. Demt(n) se verifica si y sólo si n es el número de Gödel de una demostración en RR.
d. Dm(m, n) se verifica si y sólo si m es el número de Gödel de una demostración de la fórmula cuyo número de Gödel n.
e. W(m, n) se verifica si y sólo si m es el número de Gödel de una fórmula A (x_1), en la que aparece libre x_1 , y n es el número de Gödel de una demostración de A $(\underline{S^{(m)}}(\underline{0}))$ en RR.
Vale la pena resaltar que con la última de estas relaciones es con que Gödel construye su fórmula indecidible para la aritmética en primer orden. Una prueba de estos teoremas se puede encontrar en Mendelson, E., *Ob. Cit.,* Págs. 193-

Por ejemplo, las funciones básicas *cero*, *sucesor* y *proyección* son representables en RR por las siguientes fórmulas:

(a) La función cero es representable en RR por la fórmula $x_1 = x_1 \wedge y = 0$. Para todo $k, m \in \mathbb{N}$:

(i) Si $z(k) = m$, entonces $m = 0$, por lo tanto $\vdash_{RR} \underline{k} = \underline{k} \wedge 0 = 0$

(ii) $\vdash_{RR} (\exists! y)(x_1 = x_1 \wedge y = 0)$

(b) La función sucesor es representable en RR por la fórmula $y = s(x_1)$. Para todo $k, m \in \mathbb{N}$:

(i) Si $s(k)=m$, entonces $m=k+1$, por lo tanto $\vdash_{RR} \underline{m} = \underline{s(k)}$

(ii) $\vdash_{RR} (\exists! y)(y = s(x_1))$

(c) La función proyección es representable en RR por la fórmula $x_1 = x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge \ldots \wedge x_n = x_n \wedge y = x_j$. Para todo $k_1, \ldots, K_n, m \in \mathbb{N}$:

(i) Si $p_j^k(k_1, \ldots, k_n) = m$, entonces $m = k_j$. Por lo tanto, $\vdash_{RR} \underline{k_1} = \underline{k_1} \wedge \underline{k_2} = \underline{k_2} \wedge \ldots \wedge \underline{k_n} = \underline{k_n} \wedge \underline{m} = \underline{k_j}$.

(ii) $\vdash_{RR} (\exists! y)(x_1 = x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge \ldots \wedge x_n = x_n \wedge y = x_j)$

5.1.2. El número de axiomas propios del sistema de Robinson es finito

Cuando se estudian varios de los sistemas axiomáticos para la aritmética que se han presentado a lo largo de la historia[76], como por ejemplo el propuesto por Russell y Whitehead en *Principia* o la aritmética de Peano en primer orden, nos damos cuenta de que ellos poseen un conjunto infinito de axiomas. A diferencias de dichos sistemas axiomáticos, el sistema RR tiene

199. Una prueba del *Primer teorema de incompletitud de Gödel* puede encontrarse en Hamilton, *Lógica para matemáticos*, Cap. 6, sección 6.5.

[76] Por ejemplo, Mendelson, E. *Ob. Cit.*, Pág. 155.

un número finito de axiomas. El hecho de que el sistema de Robinson sea finito será de suma importancia en el esbozo de la prueba del *Teorema de indecidibilidad de Church.*

5.1.3. El cálculo lógico del sistema de Robinson

Todos los teoremas de sistema axiomático para la *Lógica de primer orden*, por ejemplo el que presenta Enderton en *A mathematical introduction to logic*[77], también son teoremas de RR, incluyendo los de identidad[78] (lo que puede variar es el lenguaje).

6. Esbozo de una prueba del *Teorema de indecidibilidad de Church* de la *Lógica de primer orden* usando la indecidibilidad del sistema de Robinson para la aritmética

Para llevar a cabo un esbozo de la prueba del *Teorema de indecidibilidad de Church* utilizaremos el siguiente hecho cuya demostración puede encontrarse en *Introduction to mathematical logic* de E. Mendelson.[79]

<u>Hecho:</u> El sistema de Robinson para la aritmética (RR) no es decidible recursivamente[80].

Ahora procederemos, por reducción al absurdo, a demostrar el *Teorema de indecidibilidad de Church* usando el hecho anterior:

Supongamos que la *Lógica de primer orden sin identidad* es decidible. Vamos a demostrar que RR es decidible lo cual contradice el hecho anterior. Sea φ una fórmula del lenguaje de RR, entonces construimos la siguiente fórmula condicional $\bigwedge ASR \rightarrow \varphi$, donde $\bigwedge ASR$ es la conjunción de los axiomas propios del sistema de Robinson (de ASR-1 hasta ASR-14).

Ahora bien, como la *Lógica de primer orden sin identidad* es decidible, por la hipótesis de absurdo, tenemos que en un número finito de pasos podemos determinar si $AL1^* \vdash \bigwedge ASR \rightarrow \varphi$ o $AL1^* \nvdash \bigwedge ASR \rightarrow \varphi$. Consideremos ambos casos:

---

[77] Los axiomas para la identidad (el quinto y el sexto) en el sistema axiomático para *Lógica de primer orden que presenta* Enderton en *A mathematical introduction to logic*, Pág. 112*, son:*

5. $x=x$ [Este axioma expresa la reflexividad de la identidad.].

6. $x\equiv y\rightarrow (\varphi\rightarrow\varphi')$, donde φ es una fórmula atómica y φ’ se obtiene de φ al remplazar *x* por *y* en cero o más lugares (aunque no necesariamente en todos) [Este axioma refleja la *sustitución de idénticos* para fórmulas atómicas.]. Los axiomas del 1 al 4 de la sección (b) del apartado 5.1. más estos dos axiomas (5 y 6), constituyen un sistema axiomático para la *Lógica de primer orden con identidad.*

[78] Cf. Mendelson, E. *Ob. Cit*., Pág. 201.

[79] Cf. Ibíd., Pág. 218.

[80] Una teoría K se dice que es *decidible recursivamente* si el conjunto de los números de Gödel de los teoremas de K (T_k) es un conjunto recursivo.

Caso 1: $AL1^* \vdash \bigwedge ASR \rightarrow \varphi \overset{\substack{Por \\ Teorema \\ de\ la \\ deducci\acute{o}n}}{\Longleftrightarrow} \underline{AL1^*, \bigwedge ASR} \vdash \varphi$ (RR)

Por lo tanto, del sistema de Robinson se deriva φ.

Caso 2: $AL1^* \nvdash \bigwedge ASR \rightarrow \varphi \overset{\substack{Por \\ Teorema \\ de\ la \\ deducci\acute{o}n}}{\Longleftrightarrow} \underline{AL1^*, \bigwedge ASR} \nvdash \varphi$ (RR)

Por lo tanto, del sistema de Robinson no se deriva φ.

Por lo tanto RR es decidible, contradiciendo el hecho anterior, luego la *Lógica de primer orden sin identidad* no es decidible. Esto implica que la *Lógica de primer orden con identidad* tampoco es decidible. □