Revista Venezolana de Análisis de Coyuntura, 1997, Vol. III, Nº 1 (ene-jun), pp. 212-219

VON NEUMANN Y LA EXISTENCIA DEL EQUILIBRIO GENERAL

Jesús Gerardo Navarro C.(*)
ESCUELA DE ECONOMÍA, UCV

RESUMEN

Este ensayo pone en relieve la forma particularmente original en que el modelo de equilibrio general de Von Neumann resuelve el problema de la "existencia" del equilibrio económico. A partir de una reinterpretación del teorema de minimax, el modelo de Von Neumann permite verificar la existencia del equilibrio general como resultado de un punto de silla (saddle point) de una función bilineal común a un juego de dos personas de suma-cero.

Palabras claves: equilibrio general, teorema del minimax, tasa de crecimiento.

Equilibrio general, acumulación y un crecimiento sostenido simplificado son los rasgos intrínsecos del modelo de crecimiento de von Neumann. La noción de equilibrio general ha sido un elemento esencial del pensamiento económico desde los tiempos de Walras. A Walras se le atribuye el desarrollo del primer modelo de equilibrio general, que consistió en un sistema de ecuaciones lineales que describen el modelo de equilibrio general de una economía nacional, cuya solución se basa en el conteo de ecuaciones e incógnitas. No obstante, este tipo de solución no es necesaria ni suficiente para garantizar un único equilibrio, además, aunque esta solución desde un punto de vista matemático puede ser valedera, ella es capaz de carecer de significado económico, es decir, puede ser negativa.

La prueba de existencia de este equilibrio no fue, sin embargo, objeto de la investigación de Walras. La primera contribución a la obtención del equilibrio

(*) *Deseo expresar mi agradecimiento a la Prof. María Antonia Moreno y a los árbitros anónimos por las sugerencias en el desarrollo del presente trabajo.*

competitivo se debe a Wald, quien en una serie de artículos usa las modificaciones hechas por Schlesinger del sistema Walras-Cassel, en el cual, por primera vez, se usaron desigualdades (para detalles, ver Weintraub, 1983, pp. 4-9, o Arrow, 1989, pp. 19-21). Con la idea de iluminar, resolver y hallar condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un equilibrio económico, independientemente de los resultados de Wald, von Neumann, uno de los grandes matemáticos de este siglo, produce un poderoso y nuevo análisis del problema del equilibrio, diferente de cualquier otro modelo económico anterior a éste. El viejo método walrasiano de contar ecuaciones e incógnitas como una manera de establecer un equilibrio económico, llega así a su fin.

Von Neumann probó que existe un único equilibrio que garantiza la no negatividad de cantidades y precios, y el factor de crecimiento, el cual es igual al factor de interés; esto es, él probó que hay una solución no trivial no negativa. Él obtuvo el más alto factor de crecimiento de toda la economía, haciendo uso de las mejores técnicas de producción con los más bajos precios posibles. Además, el factor de crecimiento es uniforme en todos los sectores, en consecuencia, existe un crecimiento continuo simplificado.

El modelo original de von Neumann intitulado "A Model of General Equilibrium", fue presentado por primera vez en la Universidad de Princeton en un Seminario Matemático en 1932 y publicado en *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquium*, 8 (Viena, 1937). La versión inglesa fue publicada más tarde en *Review of Economic Studies* (1945-1946). En este artículo von Neumann, por medio de desigualdades lineales y condiciones de holgura complementarias, presenta un modelo de equilibrio general el cual se formula en tiempo discreto. El modelo incluye bienes y procesos, donde los bienes son producidos mediante esos procesos de producción: al comienzo de cada período todas las mercancías son introducidas simultáneamente dentro del proceso, y al final del período todas las mercancías se producen simultáneamente. El proceso i-ésimo es definido como

$$P_i : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} G_j \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} b_{ij} G_j, \; i=1,\ldots,m$$

donde $a_{ij} \geq 0$ y $b_{ij} \geq 0$ son las cantidades usadas y producidas, respectivamente, de los bienes G_j mediante los procesos P_i, $j=1,\ldots,n;$ $i=1,\ldots,m.$

El modelo de von Neumann, en aquellos días, representó el primer modelo riguroso y abstracto en las teorías de crecimiento multisectorial y del capital. La producción de mercancías se obtiene por medio de mercancías, esto es, las salidas (outputs) de cada período serán las entradas (inputs) del siguiente período. El modelo está restringido al análisis de sus propiedades internas, sin tomar en cuenta sus interacciones con cambios económicos externos; en consecuencia el modelo de von Neumann es un modelo multisectorial cerrado con acumulación de capital: el proceso i-ésimo convierte una canasta de bienes en otra canasta de bienes, los cuales son usados de nuevo en la producción. Los bienes de capital se incluyen en cada proceso, tanto en la canasta de los inputs, como en la canasta de los outputs.

El modelo de von Neumann está fundamentado en algunas suposiciones específicas, a saber: el número de procesos no es menor que el número de bienes, y éste es finito; hay retornos constantes a escala; todo el excedente producido es acumulado; hay procesos conjuntos produciendo diferentes bienes; los factores naturales de producción, incluyendo el trabajo están disponibles en cantidades ilimitadas; el consumo es determinado por las necesidades de vida y es parte del input.

Así mismo, von Neumann introduce la regla de precios competitivos y la regla de eficiencia, esto es, si hay exceso de producción de un bien (sobreproducción de un bien) éste llega a ser un bien libre y su precio será cero. Si un proceso produce una ganancia negativa (funciona con pérdidas), éste no será usado, y su intensidad es cero. Además, considera que en un período dado es imposible para un consumidor usar más de un bien de lo que fue producido en el período anterior, y que en situación de equilibrio no pueden haber ganancias por encima del promedio del factor de interés. Todas esas reglas pueden ser formalmente expresadas como sigue:

$$\alpha\ x\ A \leq x\ B \qquad (1)$$

$$\text{si } \alpha\ x\ A^{j} << x\ B^{j}, \text{ entonces } p_j = 0 \qquad (2)$$

$$\beta\ A\ p \geq B\ p \qquad (3)$$

$$\text{si } \beta\ A_i\ p >> B_i\ p\ , \text{ entonces } x_i = 0 \qquad (4)$$

donde *A* y *B* son las matrices de coeficientes de input y output; *x* es un vector m-dimensional de intensidad del proceso (o nivel de actividad) y *p* es un vector n-dimensional de precios.[1] Además, los vectores *x* y *p* son semipositivos;

1. Usaremos la siguiente notación:
A_i y A^j: i-ésimo vector fila y j-ésimo vector columna de la matriz A
$x \geq y$: $x_i \geq y_i$, $i=1, 2, ..., m$
$x > y$: $x_i > y_i$, pero $x \neq y$
$x >> y$: $x_i >> y_i$, $i=1, 2, ..., m$
$\Re$: conjunto de los números reales.

α (1 + tasa de crecimiento) es el factor de crecimiento de toda la economía y β (1 + tasa de interés) es el factor de interés. Las relaciones (1)-(4) son llamadas las ecuaciones económicas de von Neumann.

Para asegurar que la economía no se divida en partes inconexas, von Neumann asume adicionalmente que todo bien aparece en toda actividad, o bien como un input o bien como un output, es decir,

$$A + B >> 0$$

Los datos económicos en el modelo de crecimiento de von Neumann están representados mediante un par de matrices rectangulares (es decir, las matrices de input y output) derivadas de relaciones de producción mediante transformaciones tecnológicas. Una matriz gobierna los costos y los inputs y la otra gobierna las ganancias y los outputs, lo cual implica que tanto los precios como los outputs de bienes individuales sean determinados por condiciones técnicas de producción.

Teniendo en cuenta lo anterior, nosotros consideramos el par de matrices (A,B) como una descripción de la parte tecnológica de un sistema económico; de esta forma el modelo de crecimiento de von Neumann puede también escribirse de la manera siguiente

$$\underset{\alpha,\, x}{\text{maximizar}} \{ \alpha \in \mathfrak{R} : \exists\, x > 0 \qquad x (B - \alpha A) \geq 0 \} \quad \text{(P.1)}$$

$$\underset{\beta,\, p}{\text{minimizar}} \{ \beta \in \mathfrak{R} : \exists\, p > 0 \qquad (B - \beta A) p \leq 0 \} \quad \text{(P.2)}$$

donde (P.1) y (P.2) son los denominados problemas de expansión tecnológica y expansión económica, respectivamente.

Utilizando la noción de punto de silla, como criterio de optimización, von Neumann resuelve el conjunto dual de desigualdades (P.1) y (P.2). Las desigualdades determinan los niveles de output y los precios de equilibrio, así como también el factor de crecimiento de equilibrio y, por lo tanto, el factor de interés. Además, de las ecuaciones económicas de von Neumann, se obtiene que $\alpha = \beta$. En efecto, de (1) se tiene que

$$\alpha x A p \leq x B p, \text{ para } p > 0;$$

análogamente, de (3)

$$\beta x A p \geq x B p, \text{ para } x > 0.$$

En consecuencia,

$$\alpha x A p \leq x B p \leq \beta x A p ,$$

y por lo tanto,

$$\alpha = \beta .$$

No obstante, para demostrar la existencia de un factor de crecimiento (factor de expansión), un vector de intensidad *x*, y un vector de precios *p*, se requiere de un teorema sofisticado de topología: El Teorema del Punto Fijo Generalizado de Brouwer (para detalles, ver von Neumann 1945-1946, pp. 5-7).

Es necesario señalar que el concepto de dualidad fue formulado y elaborado primeramente por Marx, 1961, basado en relaciones del valor: valor de uso o valor de cambio (imágenes duales de la división social del trabajo) (para detalles, ver Brody, 1970, pp. 61-67). No obstante, von Neumann fue el primero que desarrolló una formulación matemática precisa del principio de dualidad entre el vector de intensidad x y el factor de crecimiento α por una parte, y el vector de precios p y el factor de interés β por la otra.

En economía, dualidad se refiere a la existencia de funciones duales, las cuales son típicamente funciones a valores máximos, ya que usualmente, el problema primal se considera como un problema de funciones a valores mínimos. Mediante la dualidad un sistema lineal o no lineal puede ser examinado desde dos puntos de vista, la cual envuelve la misma información sobre preferencias o tecnología como las funciones primales más familiares. Hay importantes ejemplos de dualidad en economía tales como dualidad entre tasa de crecimiento y tasa de interés; los autovalores duales derecho e izquierdo; la dualidad de intensidad y precios; dualidad entre la teoría de programación lineal y la teoría de juegos dos-personas suma-cero.

Los orígenes de la dualidad entre intensidad y precios los encontramos en el modelo de von Neumann, a menudo llamado problema primal y problema dual, respectivamente, de la programación lineal, desarrollado por Kantorovichy, 1939, y Dantzig, 1963, y más tarde llamado modelo de análisis de producción, desarrollado por Koopmans, 1951.

Por otra parte, es importante señalar que bajo la influencia de un artículo sobre teoría de juegos, (V. Von Neumann y Morgenstern, 1944), escrito en 1928, donde se consideran desigualdades para determinar la maximización de cada uno de los jugadores, von Neumann reinterpreta su teorema del minimax de teoría de juegos (dos-personas suma-cero), probando que, bajo los supuestos enumerados anteriormente, una economía puede crecer en un factor de crecimiento proporcional y, que en tal situación, el factor de crecimiento debe ser igual al factor de interés.

Por esta razón, la existencia del equilibrio general depende de la existencia de un punto de silla de la función de pago

$$\Phi(x, p) = \frac{x B p}{x A p}$$

la cual es bilineal en un juego dos-personas suma-cero, donde x y p indican intensidad de los procesos y precios de los bienes, respectivamente, y ellos son vectores normalizados o probabilísticos; $x B p$ y $x A p$ son los valores del output total y del input total, respectivamente. Por lo tanto, si la función de pago tiene un punto de silla, entonces existe un punto de equilibrio, y en este punto de equilibrio el valor común del juego es el factor de crecimiento, el cual es igual al factor de interés, es decir

$$\alpha = \beta = \Phi(x, p)$$

donde α es el factor de crecimiento y β es el factor de interés.

La función de pago $\Phi(x, p)$ es una función potencial, cuyos orígenes se encuentran en la termodinámica, y es el cociente de dos formas bilineales. Von Neumann fue el primero que desarrolló y resolvió el problema de la existencia de una función potencial en economía (para detalles, ver Samuelson, 1992, pp. 377-378).

Además, a pesar de que en un juego dos-personas suma-cero la bilinealidad es aceptada y x y p son las estrategias máximas y mínimas respectivamente, de los jugadores, las cuales son independientes cada una de la otra, en economía la independencia entre x y p es discutida, incluso no aceptada pues casi todo depende de casi todo (ver Dore, 1989, pp. 91-92). Parece ser que la independencia entre x y p del juego dos-personas suma-cero fue la razón por la cual von Neumann no consideró la función de demanda en su modelo. Pero, como dijo Arrow: ¿Por qué von Neumann descartó totalmente la función de demanda?; no podemos saberlo (ver Arrow, 1989, p. 25).

Es de hacer notar que el teorema de topología del punto fijo jugó un rol básico en la prueba de existencia de un equilibrio en el modelo de von Neumann. Para probar la existencia de una solución no trivial y no negativa von Neumann usó una generalización del teorema del punto fijo de Brouwer. Pero tal prueba clásica dada de este teorema no indica ni insinúa cómo puede hallarse la solución. Además, la generalización del Teorema del punto fijo de

Brouwer no era necesaria para asegurar la existencia de un equilibrio. Con sólo argumentos de convexidad y el teorema de soporte de un hiperplano se podía establecer la existencia de tal equilibrio (ver por ejemplo, Loomis, 1946; Howe, 1960; etc.).

Por otra parte, von Neumann desarrolló un sistema no controlado (libre), donde si éste no es perturbado deberá seguir una trayectoria de expansión equilibrada. Él obtuvo mediante este comportamiento dinámico una expansión uniforme de toda la economía y como consecuencia de esto su equilibrio puede llamarse cuasi-estacionario, donde los precios y la tasa de interés son constantes en el tiempo, y la intensidad de producción crece o decrece a una tasa constante, es decir sigue un patrón de crecimiento equilibrado. No obstante, él no consideró la estabilidad de aquel equilibrio, el cual, por cierto, es dinámicamente inestable[2]. Una pequeña perturbación aplicada a este sistema, puede cambiar la trayectoria de expansión equilibrada y el sistema nunca regresa a esa trayectoria.

Sin lugar a dudas, el famoso modelo de von Neumann resolvió el problema esencial de la existencia del equilibrio general de una economía, sometida a los supuestos del modelo, dado por Walras. Es también interesante notar que el modelo de von Neumann suministró una metodología para determinar los vectores de niveles de actividad y precios, así como también los factores de crecimiento y de interés, y ellos caracterizan la relación entre la tasa máxima de crecimiento del output y la tasa mínima de interés por medio de la dualidad.

BIBLIOGRAFIA

Arrow, K. J., (1989). "Von Neumann and the Existence Theorem for General Equilibrium", en *John von Neumann and Modern Economics,* editado por M. Dore; S. Chakravarty y R. Goodwin, Clarendon Press, Oxford.

Bródy, A., (1970). *Proportions, Prices and Planning,* Akadémiai Kiadó, Budapest.

Chakravarty, S., (1989). "John von Neumann's Model of an Expanding Economy: an Essay in Interpretation", en *John von Neumann and Modern Economics,* editado por M. Dore, S Chakravarty y R. Goodwin, Clarendon Press, Oxford.

Champernownw, D. G., (1945-1946). "A Note on J. V. Neumann's article on 'A Model of Economic Equilibrium", *Review of Economic Studies,* 13.

Dantzing, G. B., (1963). *Linear Programming and Extension,* Princeton University Press, Nueva Yersey.

2. Es de gran interés estudiar la estabilidad de un sistema alrededor del equilibrio cuando este es ligeramente perturbado. Si el sistema perturbado vuelve finalmente al estado de equilibrio, se dice que el sistema es estable; en caso contrario, se llamará inestable.

Dore, M., (1989). "The Legacy of John von Neumann", en *John von Neumann and Modern Economics*, editado por M. Dore, S. Chakravarty y R. Goodwin, Clarendon Press, Oxford.

Howe, C. W., (1960). "An Alternative Proof of the Existence of General Equilibrium in a Von Neumann Model", *Econométrica*, 28.

Kantorovich, L. V., (1939). "Mathematical Methods in Organization and Planning of Production", *Management Science*, 6.

Koopmans, T. C., (1951). *Activity Analysis of Production and Allocation*, Jhon Wiley, Nueva York.

Loomis, L. H., (1946). "On a Theorem of Von Neumann", *Proceeding of National Academy of Science*, 32.

Marx, K., (1961). *Capital*, Vol. I, Foreing Lenguage Publishing House, Moscú.

Samuelson, P. A., (1989). "A Revisionist View of Von Neumann's Growth Model", en *John von Neumann and Modern Economics*, editado por M. Dore, S Chakravarty y R. Goodwin, Clarendon Press, Oxford.

Von Neuman, J. y Morgenstern, O., (1944). *Theory of Game and Economic Behavior*, Princeton, Princeton University Press, Nueva Yersey.

Von Neumann, J., (1945-1946). "A Model of General Economic Equilibrium", *Review of Economics Studies*, 13.

Weintraub, E. R., (1983). "On the Existence of a Competitive Equilibrium: 1930-1945", *Journal Economic Literature*, XXI.