

REPRESENTACIÓN DE VARIABLES SOBRE UNA CONFIGURACIÓN DE OBJETOS OBTENIDA A TRAVÉS DE UN ESCALAMIENTO MULTIDIMENSIONAL

Lucila Blanco
Escuela de Medicina, UCV

Carlos Mujica
Escuela de Odontología, UCV

Resumen

El presente trabajo propone una metodología a partir de la cual se puede realizar una ordenación de objetos permitiendo la representación gráfica de medidas de proximidad entre pares de estos objetos, en la búsqueda de estructuras de conglomeración. El método se apoya en la técnica de Escalamiento Multidimensional (MDS). Al mismo tiempo, se considera una metodología para la inclusión de variables en el ordenamiento obtenido a través del MDS, con el objetivo de definir una configuración de países latinoamericanos con respecto a características socio-demográficas y económicas. Para ello nos basaremos en un método de predicción aplicado por Gower en el ámbito del MDS. Los resultados sugieren que las técnicas aplicadas pueden ofrecer una visión global del comportamiento socio-demográfico y económico de los países latinoamericanos, apoyados básicamente por análisis gráficos, todo ello desde una perspectiva descriptiva.

Palabras claves: escalamiento multidimensional, proximidad, coordenadas principales, J-K biplot.

INTRODUCCIÓN

El escalamiento multidimensional como técnica de ordenación de datos permite la representación gráfica de medidas de similaridad o disimilaridad entre pares de objetos en la búsqueda de estructuras de conglomeración entre estos objetos. Una vez que las estructuras han sido definidas, el analista trata de buscar su relación con las variables analizadas. El MDS no explica que variables fueron importantes para los objetos cuando se efectuó su ordenación. El propósito fundamental de esta investigación es aplicar una metodología para la inclusión de variables en las configuraciones obtenidas a través de un MDS, con el objeto de definir una ordenación de Países Latinoamericanos con respecto a características socio-demográficas y económicas. Para ello nos basaremos en un método de predicción aplicado por Gower (Gower, 1966) en el ámbito del MDS.

OBJETIVOS

1. Presentar una metodología que permita ubicar variables dentro de una configuración de objetos obtenida a través de la técnica MDS.
2. Obtener una ordenación de Países Latinoamericanos a través de la técnica MDS en función de sus estructuras socio-demográficas y económicas para el año 1994.
3. Aplicar un Análisis de Clasificación sobre los ordenamientos encontrados en el MDS, para obtener agrupaciones objetivas de los países.
4. Incorporar las variables socio-demográficas y económicas al diagrama de agrupación de países para identificar las variables que conducen a la configuración encontrada.

MATERIALES Y MÉTODOS

Población y muestra

En principio el objetivo del estudio fue evaluar todos los países latinoamericanos, para observar las agrupaciones de acuerdo a sus semejanzas en la estructura de sus economías, así como también en sus comportamientos socio-demográficos. Aplicar una metodología multivariante que pudiera dar respuesta a estos planteamientos y mostrar la potencialidad de estos métodos fue la meta propuesta.

Para cumplir con esta tarea, se realizó una revisión bibliográfica de los materiales publicados por las siguientes instituciones: Cepal, Banco Mundial, Centro Español de Estudios de América Latina y el Caribe (Cedeal), Naciones Unidas, Banco Interamericano de Desarrollo, Fondo Monetario Internacional, Instituto de Estudios Políticos para Africa y América Latina, Oficina de Estadística e Informática de la Presidencia de la República (OCEI). Se consideraron las publicaciones de los años 1997 y 1998. La Biblioteca del Banco Central de Venezuela, La Biblioteca Nacional y la sala de consulta de la OCEI, fueron las sedes visitadas. También se utilizaron las redes de información: Internet y Reacciu.

En una primera etapa, la revisión de información reportó datos sobre 33 países del área del Caribe, Centro y Sudamérica. Estos fueron los siguientes: Antigua y Barbuda, Argentina, Bahamas, Barbados, Belice, Bolivia, Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica, Cuba, Dominica, Ecuador, El Salvador, Granada, Guate-

mala, Guyana, Haití, Honduras, Jamaica, México, Nicaragua, Panamá, Paraguay, Perú, República Dominicana, Saint Kitts y Nives, Santa Lucía, San Vicente y las Granadinas, Suriname, Trinidad y Tobago, Uruguay y Venezuela. Toda esta información fue sometida a un proceso de depuración, para lo cual se establecieron los criterios siguientes: Para que un país entrara en el estudio, debía tener toda la información completa, en todas las variables consideradas. Con relación a las variables, no deberían estar altamente correlacionadas y establecer diferencias de alguna naturaleza entre los países considerados.

Diferentes metodologías estadísticas fueron utilizadas para aplicar los criterios antes mencionados, entre ellas: Análisis descriptivos, Análisis exploratorio de datos, Análisis de Clasificación, Análisis de la Varianza.

Una vez realizadas todas estas actividades, la muestra de países y variables para el año 1994 es descrita en la siguiente tabla:

Países	Variables
01 Argentina	V01: Consumo de energía eléctrica por habitante (kilovatio/hora)
02 Bolivia	V02: Consumo de hidrocarburos por habitante (kg. de petróleo equivalente)
03 Brasil	V03: Mecanización (hectáreas de tierra cultivadas por tractor)
04 Chile	V04: Mortalidad infantil (por 1.000 niños nacidos vivos)
05 Colombia	V05: Esperanza de vida (años promedio)
06 Costa Rica	V06: Natalidad (por 1000 habitantes)
07 Ecuador	V07: Población (%)
08 Guatemala	V08: Crecimiento de la población (%)
09 Honduras	V09: Fertilidad (número promedio de hijos por mujer)
10 México	V10: Médico por habitante
11 Nicaragua	V11: Consumo de calorías (%)
12 Panamá	V12: Servicio de agua potable en el hogar
13 Paraguay	V13: Porcentaje de analfabetos
14 Perú	V14: Número de estudiantes por maestro
15 Rep. Dominicana	V15: Número de periódicos por cada 1.000 hogares
16 Uruguay	V16: Número de televisores por cada 1.000 hogares
17 Venezuela	V17: Uso de fertilizantes
	V18: Exportaciones
	V19: Importaciones
	V20: Deuda externa
	V21: PNB

Métodos estadísticos

Escalamiento multidimensional

El escalamiento multidimensional (MDS) (Cox, 1994), toma como punto de partida una matriz de proximidades (similaridades o disimilaridades) entre un conjunto de objetos, con la finalidad de producir representaciones de esta matriz en un espacio de baja dimensión, de manera que las distancias entre estos puntos estimen con la mejor precisión posible a las proximidades de partida.

Los procedimientos de análisis de proximidades se fundamentan en modelos espaciales de naturaleza geométrica, en los que las medidas de proximidad se encuentran relacionadas mediante una cierta función con las distancias de la representación aproximada.

Tenemos así una matriz $\Delta_{n \times n}$ de disimilaridades (δ_{ij}) entre n objetos de una matriz $X_{n \times p}$ en un espacio \mathcal{Y}^p , y se trata de hallar un conjunto de n puntos de un subespacio q -dimensional \mathcal{X} , con coordenadas dadas como filas de una matriz $Z_{n \times q} = (z_{ij})$, la cual define una configuración de los n puntos en el espacio euclídeo \mathcal{X} , cuyas interdistancias $\{d_{ij}\}$ reproducen, con una aproximación razonable, las disimilaridades $\{\delta_{ij}\}$.

Para lograr esta aproximación, se utiliza algún criterio de optimización para la medida de la diferencia entre $\{\delta_{ij}\}$ y $\{d_{ij}\}$. Dicho criterio establece que la función S , que describe las diferencias: $S(f(\delta_{ij}), d_{ij})$ deberá ser un mínimo, donde f_i representa una transformación de las distancias de partida δ_i .

Takane, Young, y De Leeuw, (1977), desarrollaron un algoritmo de aproximación según un modelo simple o ponderado, utilizando un ajuste de los datos mediante la minimización de
$$SStress = \frac{\sum \sum (d_{ij}^2 - (f(\delta_{ij}))^2)^2}{\sum \sum d_{ij}^4}$$

El procedimiento se llama *Alternating Least Square Scaling* (ALSCAL). En el presente trabajo, se utilizará este algoritmo métrico para hallar la ordenación de países; su implementación se hará a través del SPSS.

Configuración MDS con incorporación de las variables de estudio

Predicción y MDS

Gower (1966), a partir de un nuevo vector de coordenadas en un subespacio \mathcal{T} cuyas distancias a los n puntos vienen dadas por $d_{n+1} = \{d_{i,n+1}\}$, propone la predicción es x_{n+1} , que genera las distancias $\delta_{n+1} = \{\delta_{i,n+1}\}$ en \mathcal{R} . El valor a predecir es la proyección del valor z_{n+1} que hace mínimo

$$S(f(\delta_{i,n+1}), d_{i,n+1})$$

Esto hace necesario que se asocien los espacios Z y X , Gower propone el método de regresión múltiple para predecir los valores de X dados los de Z . El planteamiento de Gower se puede expresar de la manera siguiente: Dado que las distancias ajustadas en el MDS no se verán afectadas por la rotación o traslación de Z , los valores de X pueden predecirse a partir de los valores de Z mediante el ajuste de un modelo de regresión múltiple $X = Z \beta'$, donde la estimación de β viene dada por la estimación usual de los coeficientes de regresión mínimos cuadrados, $\beta' = (Z'Z)^{-1} Z'X$. La predicción para una posición z en \mathcal{T} viene dada por $x = z \beta'$, y para la k -ésima variable por $x_k = z \beta'_k$.

Análisis biplot desde una visión de ajuste bilineal

Desde una perspectiva lineal la búsqueda de la matriz de mejor aproximación a las filas de la matriz $X_{n \times p}$, a saber:

$$\min_{G_{(q)}} \|X' - H_{(q)} G'_{(q)}\|^2 = \min_{G_{(q)}} \left(\sum_{i=1}^n d^2(x_i, v(H_{(q)})) \right)$$

equivale a hallar los coeficientes de regresión (matriz $G'_{(q)}$) de las filas de $X(x'_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}) \ i = 1, 2, \dots, n)$, sobre el espacio $v(H_{(q)})$, generado por las columnas de $H_{(q)}$, matriz que en este caso se supone conocida. La solución para $G_{(q)}$ es:

$$G_{(q)} = X H_{(q)} (H'_{(q)} H_{(q)})^{-1}$$

Por otro lado, desde una perspectiva bilineal (Vásquez, 1995), se plantea la estimación de las matrices H y G' en la factorización de la matriz $X'_{p \times n}$,

$$X' = H G'$$

bajo restricciones sobre H ($H'H=I$). A saber:

$$\min_H \min_G ||X - H_{(q)}G'_{(q)}||^2$$

$$H'H=I$$

Una forma de resolver este problema es hallar H y G , optimizando el ajuste con la mejor elección de $H_{(q)}$ (subespacio de representación). Considerando que G' es la matriz de coordenadas de proyección de las filas de X sobre $v(H_{(q)})$.

La solución estará dada por:

a) $H_{(q)}$ es la matriz cuyas columnas son vectores propios ortonormalizados, asociados con los q mayores valores propios de la matriz $X'X$.

Este resultado garantiza que el espacio de representación está definido por las q primeras componentes principales de la matriz X .

b) $G_{(q)} = X H_{(q)}$, ya que $H'_{(q)}H_{(q)}=I_q$ y por consiguiente:

$$\text{Siendo } H_{(q)} = V_{(q)} = (V^1, V^2, \dots, V^q).$$

$$G_{(q)} = X V_{(q)} = (XV^1, XV^2, \dots, XV^q).$$

Donde : XV^α es la α -ésima componente principal de X (coordenadas principales).

Supongamos que se desea analizar la configuración MDS en función de las variables de partida, se requerirá ubicar sobre esta configuración c_k vectores ($k=1,2,\dots,q$), de manera que el producto escalar de una fila de Z , z_i , ($i=1,2,\dots,n$) por cada uno de estos vectores, $z_i c_k$, aproxime con la mayor fiabilidad, el elemento x_{ik} de la matriz X . La solución al problema planteado consistirá en buscar una matriz C que haga mínimo $||X' - Z' C||$. El mínimo se obtiene para $C' = (Z' Z)^{-1} Z' X' = G'$ en el JK-biplot. Observamos la correspondencia de este resultado con la predicción de Gower en MDS.

Donde $C' = \beta'$, β nos da los coeficientes de regresión de cada variable considerada sobre los ejes que dan origen a la configuración MDS.

Las coordenadas halladas β se pueden considerar como coeficientes de regresión de cada una de las columnas de X sobre los ejes de ordenación contenidos en Z .

Se da una correspondencia entre estos resultados y los encontrados en el ajuste bilineal a través de un JK-biplot. Los marcadores para individuos (G) coinciden con los coeficientes de regresión β . Por su parte los marcadores para las variables (H) pueden interpretarse como un conjunto de ejes de predicción (Gower, 1966). Las proyecciones de los marcadores filas sobre los ejes biplot, predicen los valores de las variables.

De aquí que, si generalizamos lo anteriormente planteado a cualquier método de MDS, la solución para la ubicación de las variables sobre la configuración MDS se obtendrá a través de la factorización JK-biplot de la matriz obtenida del producto $Z \beta_q'$.

Otra herramienta a utilizar son los índices de calidad de representación, (Vásquez, 1995). Éstos indican en que medida el plano biplot tiene peso en la ubicación de las filas y columnas de la matriz factorizada.

En este análisis se utilizó el programa computacional "Biplot", desarrollado como una subrutina en el paquete *MatLab*, por el Dr. José Luis Villardon del Departamento de Estadística y Matemáticas Aplicadas de la Universidad de Salamanca, España.

Análisis de clasificación

En términos generales, el análisis de clasificación (AC) es una técnica que tiene por finalidad agrupar un conjunto de objetos, de forma que éstos sean internamente lo más homogéneos posible y lo más heterogéneos entre sí (Everitt, 1993). Se requiere, por lo tanto, de la definición de una distancia que permita cuantificar la similitud o disimilitud entre los objetos.

En el presente trabajo se determinaron conglomerados de países mediante el método de Clasificación Jerárquica de Ward (1989), aplicado sobre las distancias entre los países, obtenidas a partir de las coordenadas de ordenación del MDS.

Los grupos encontrados fueron introducidos en la configuración MDS permitiendo la formación de agrupaciones de países de una manera objetiva.

El tratamiento de los datos mediante AC fue realizado utilizando el paquete SPSS.

RESULTADOS

Configuración MDS y análisis de clasificación

El cuadro 1 presenta los resultados del MDS aplicado a la matriz de datos de partida constituida por 17 filas (países) y 21 columnas (variables). Las disimilaridades entre los países fueron calculadas usando distancias euclídeas, sometiéndolas a un escalamiento mínimo cuadrático por medio del procedimiento ALSCAL, ajustando el modelo euclídeo simple. Se consideraron dos dimensiones de interés para el análisis con una medida de stress de 0,13, medida que se considera aceptable (Saber, 1984), y una bondad de ajuste de 91,49%, lo que indica que aproximadamente el 92% del escalamiento óptimo de los datos es

Cuadro 1: Configuración del MDS en dos dimensiones

<i>Países</i>	<i>Coordenadas de los países</i>	
	<i>Dimensión</i>	
	<i>1</i>	<i>2</i>
01 Argentina	1,7463	0,5851
02 Bolivia	-1,7707	0,6500
03 Brasil	0,9326	0,9878
04 Chile	1,1087	-0,3740
05 Colombia	0,3526	-0,1668
06 Costa Rica	0,6269	-1,3182
07 Ecuador	-0,3953	-0,0698
08 Guatemala	-2,4461	-0,2099
09 Honduras	-1,3870	-0,1493
10 México	1,6555	1,2246
11 Nicaragua	-1,2183	-0,0378
12 Panamá	0,3499	-0,2980
13 Paraguay	-1,2620	0,8346
14 Perú	-0,2616	0,1597
15 Rep. Dominicana	-0,6750	-0,7553
16 Uruguay	1,3000	-0,4524
17 Venezuela	1,3433	-0,6104

Estrés = 0.13313

Bondad de ajuste = 0.91487

explicado por el modelo MDS ajustado. El gráfico 1 muestra el diagrama de dispersión de Shepard (COX, 1994), que permite comparar las distancias obtenidas mediante el MDS y las disimilaridades, se aprecia una fuerte relación lineal entre ambas medidas. Estos resultados indican que el diagrama bidimensional (gráfico 2) reproduce adecuadamente la estructura de disimilaridad entre los países atendiendo a las variables socio-demográficas y económicas consideradas.

Gráfico 1
Configuración bidimensional MDS de las disimilaridades entre países latinoamericanos

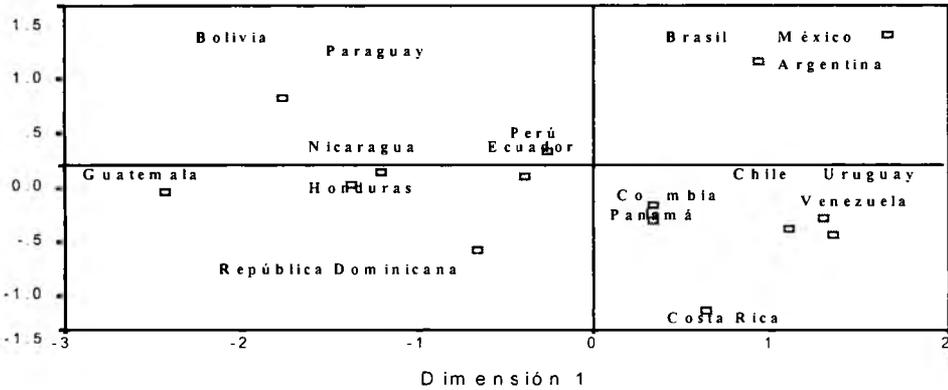
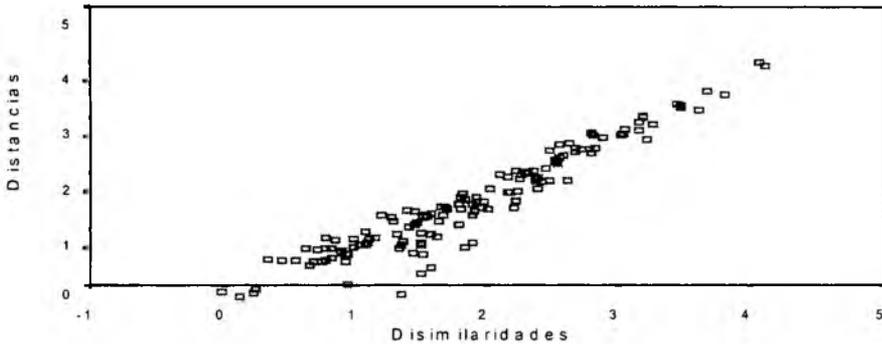


Gráfico 2: Diagrama de Shepard



A partir de los resultados obtenidos del Análisis de Clasificación realizados sobre las coordenadas de ordenación, observamos que truncando el "dendograma" a una distancia igual a 10 (gráfico 3), lo cual parece razonable dado el salto significativo al que se produce la próxima partición, se definen las siguientes agrupaciones de países:

- Grupo 1: Colombia, Costa Rica, Chile, Ecuador, Panamá, Perú, Uruguay, Venezuela.
- Grupo 2: República Dominicana.
- Grupo 3: Argentina, Brasil, México.
- Grupo 4: Bolivia, Guatemala, Honduras, Nicaragua, Paraguay.

Gráfico 3: Dendograma de los ordenamientos de países obtenido del MDS

Países	Núm.	Distancias					
		0	5	10	15	20	25
Colombia	5	+	+	+	+	+	+
Panamá	12	+	+				
Ecuador	7	+					
Perú	14	+	+	+	+	+	+
Chile	4	+					I
Uruguay	16	+	+		I		I
Venezuela	17	+	+	+			+
Costa Rica	6	+	+				I I
Dominica	15	+					I I
Brasil	3	+					I I
México	10	+					I
Argentina	1	+					+
Bolivia	2	+					I
Paraguay	13	+					
Honduras	9		+				+
Nicaragua	11	+	+	+			
Guatemala	8	+					

Configuración MDS con incorporación de las variables de estudio

El análisis JK-Biplot pone de manifiesto que todas las variables, excepto por el consumo de hidrocarburos, número de estudiantes por maestro y uso de fertilizantes, se encuentran bien representadas (Cuadro 2) sobre el plano biplot. En lo que respecta a los países, Ecuador, Perú y República Dominicana presentan una "calidad de representación" muy baja en el plano estudiado. Estas variables y países no serán consideradas en el análisis, ya que la posición que ocupan puede ser sólo aparente.

Cuadro 2: Calidad de representación de los países sobre el plano biplot

<i>Países</i>	<i>Calidad repres. (%)</i>	<i>VARIABLES</i>	<i>Calidad repres. (%)</i>
01 Argentina	71,56	V01: Consumo de energía	76,85
02 Bolivia	75,20	V02: Consumo de hidrocarburos	42,65
03 Brasil	70,40	V03: Mecanización	64,05
04 Chile	87,80	V04: Mortalidad infantil	45,02
05 Colombia	54,50	V05: Esperanza de vida	73,68
06 Costa Rica	55,20	V06: Natalidad	82,28
07 Ecuador	27,90	V07: Población urbana	63,75
08 Guatemala	66,66	V08: Crecimiento de la población	66,52
09 Honduras	80,65	V09: Fertilidad	79,08
10 México	80,20	V10: Médico por habitante	63,39
11 Nicaragua	71,12	V11: Consumo de calorías	59,18
12 Panamá	49,06	V12: Servicio de agua potable	53,84
13 Paraguay	37,45	V13: % de Analfabetos	59,71
14 Perú	10,46	V14: No. de estudiantes por maestro	26,57
15 Rep. Dominicana	31,67	V15: No. de periódicos	60,80
16 Uruguay	71,57	V16: No. de televisores	64,61
17 Venezuela	44,00	V17: Uso de fertilizantes	37,71
		V18: Exportaciones	83,13
		V19: Importaciones	76,80
		V10: Deuda externa	87,55
		V21: PNB	66,21

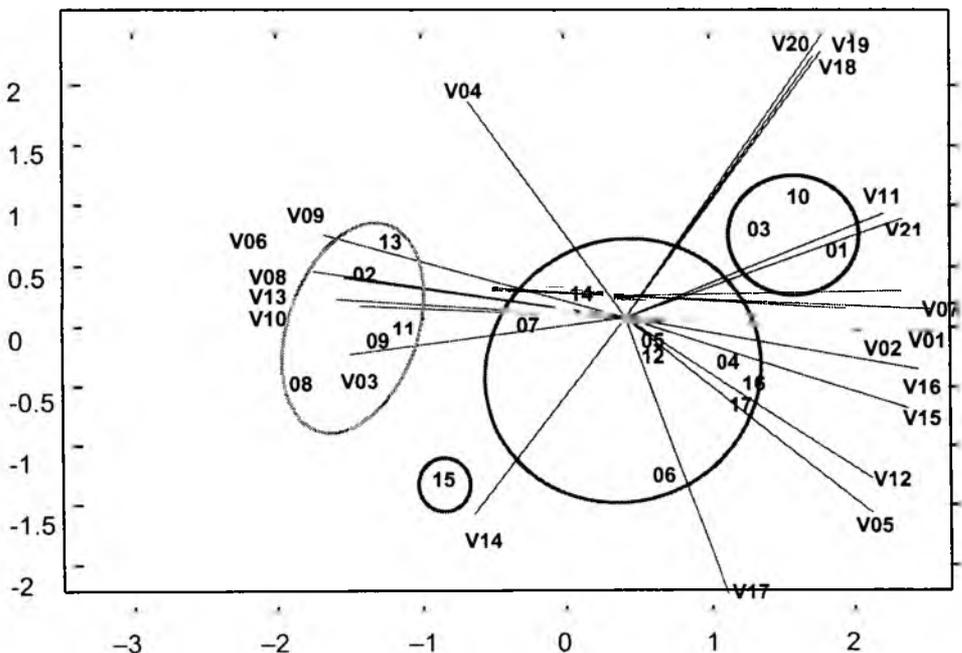
El Gráfico 4 muestra la representación biplot de la matriz factorizada a través del JK-Biplot, si proyectamos los marcadores filas sobre los ejes biplot, se evidencian las siguientes estructuras socio-demográficas y económicas de los grupos definidos anteriormente:

El grupo 1 (formado por Colombia, Costa Rica Chile, Ecuador, Panamá, Perú, Uruguay y Venezuela) se caracteriza por un elevado consumo de energía eléctrica, alta densidad de población urbana y esperanza de vida, buen servicio de agua potable y número de periódicos y televisores por habitante bastante elevado. En contraste, se observan bajas tasas de natalidad y fertilidad, bajo crecimiento poblacional, bajo porcentaje de analfabetas y un bajo número de hectáreas cultivadas.

El grupo 3 (integrado por Argentina, Brasil y México) definido por un alto producto interno bruto, alto porcentaje de población urbana, altas importaciones, alta deuda externa, elevado consumo de energía eléctrica y calorías por habitante; presenta, por otro lado, una baja tasa de natalidad y fertilidad, bajo crecimiento poblacional y bajo porcentaje de analfabetas y hectáreas cultivadas.

El grupo 4 (Bolivia, Guatemala, Honduras, Nicaragua y Paraguay) se presenta opuesto a los países del grupo 1 y 3, con bajo producto interno bruto, consumo de calorías por habitante y consumo de energía eléctrica, un mal servicio de agua potable, con unas altas tasas de natalidad y fertilidad, elevado crecimiento poblacional, elevado porcentaje de analfabetas y un alto número de hectáreas cultivadas.

Gráfico 4: Ubicación de variables en la agrupación de países



De aquí que, los resultados reflejan la existencia de tres grandes estructuras socioeconómicas en el ámbito Latinoamericano. A saber, una estructura con el mayor poderío económico y social, formado por Argentina, Brasil y México. Una segunda estructura de mediano desarrollo: Colombia, Costa Rica, Chile, Ecuador, Panamá, Perú, Uruguay y Venezuela y una tercera estructura, de escasos recursos y poco desarrollo, formada por Bolivia, Guatemala, Honduras, Nicaragua y Paraguay.

CONCLUSIONES

- El escalamiento multidimensional, como técnica de representación gráfica de medidas de parecido o diferencias entre objetos, es una herramienta descriptiva que ha probado ser de utilidad en la ordenación de objetos, permitiendo el tratamiento de datos cualitativos como cuantitativos. La incorporación de variables a los gráficos de ordenamiento enriquece el análisis por cuanto permite explicar las posibles estructuras de conglomeración. En este sentido, la presente investigación aplica una metodología basada en la factorización JK-Biplot, la cual puede ser de utilidad en el análisis gráfico de la identificación y caracterización de estructuras de agrupación subyacentes en los datos.

- La presente investigación aplica tres técnicas de análisis multivariante de datos, MDS métrico, Análisis de Clasificación y Factorización JK-Biplot, a un conjunto de 17 países latinoamericanos caracterizados por una serie de variables sociodemográficas y económicas. Cada método, por sí mismo, contribuyó de una manera única en el análisis global de los datos. El MDS permitió la obtención de un mapa del ordenamiento de las diferencias entre los países estudiados en cuanto a sus disimilaridades sociales, demográficas y económicas. Como complemento, el Análisis de Clasificación permitió agrupar objetivamente los ordenamientos obtenidos en el MDS y, por último, la Factorización JK-Biplot ubicó las variables en el mapa de agrupación de los países, ofreciendo los fundamentos para explicar las estructuras de conglomeración en función de las variables estudiadas. En base a estos análisis, se identificaron tres estructuras de desarrollo en el ámbito Latinoamericano.

BIBLIOGRAFÍA

Banco Interamericano de Desarrollo (1977), *Progreso económico y social de América Latina*, BID, Washington DC.

Centro Español de Estudios de América Latina y el Caribe (CEDEAL) (1977), *Situación latinoamericana*, CEDEAL, Madrid.

- Cox, T. F. y Cox; M.A.A (1994), *Multidimensional Scaling. Monographs on Statistics & Applied Probability*, Chapman & Hall, Londres.
- Everitt, B. (1993), *Cluster Analysis*, Edward Arnold, Londres.
- Fondo Monetario Internacional (1997), *Estadísticas financieras internacionales*, FMI, Washington DC.
- Gower J.C. y Hand D.J (1966), *Biplots*, Chapman & Hall, Londres.
- Gower J.C. y Harding S.A. (1988), *Nonlinear Biplots*, Biometrika, 75, San Francisco.
- Instituto de Estudios Políticos para Africa y América Latina, IEPALA (1997), *Guía del mundo*, IEPALA, Madrid.
- Naciones Unidas, CEPAL, (1997), *Balance preliminar de la economía de América Latina y del Caribe*, CEPAL, Santiago de Chile.
- (1997), *Anuario estadístico de América Latina y el Caribe*, CEPAL, Santiago de Chile.
- (1997), *Estudio económico de América Latina y el Caribe*, CEPAL, Santiago de Chile.
- Saber G.A.F. (1984), *Multivariate Observations*, John Wiley & Sons, Nueva York.
- Takane Y., Young F. W. y de Leeuw J. (1977), *Nonmetric Individual Differences Multidimensional Scaling: An Alternating Least Squares Method with Optimal Scaling Features*, Psychometrika, 49.
- Vásquez M (1995), *Aportaciones al análisis Biplot: un enfoque algebraico*, Mimeo, Tesis Doctoral UCV, Caracas.
- Ward R., Ross W, Leyland A., & Selbie S. (1989), *The Advanced O Scale Physique Assessment System*, Kinematic, 117.