Revista Venezolana de Análisis de Coyuntura, 1998, Voi. IV, No. 2 (jul-dic), pp. 207-222

ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE LOS TEST DE HIPÓTESIS NO ANIDADAS

Rubén A. Ibarra
ESCUELA DE ESTADÍSTICA, UCV

Resumen

En este trabajo introducimos una discusión sobre el tema de los Test de Hipótesis no Anidadas, apoyándonos sobre todo en publicaciones y revistas del área econométrica. Se busca poner en contacto a los investigadores de las ciencias sociales con esta metodología con el objeto de que puedan conocer los orígenes de la idea, cuáles son sus principios estadísticos, los supuestos que subyacen detrás de cada uno de ellos, así como las posibilidades reales de aplicación empírica. También se exponen los resultados obtenidos por el autor en relación con estos test, en modelos no anidados cuyos errores siguen procesos de media móvil de orden uno.

Palabras claves: Hipótesis no anidadas, modelos no anidados.

INTRODUCCIÓN

Un área de sumo interés en econometría, así como en otras disciplinas científicas, es la relacionada con la selección de modelos. En no pocas ocasiones el investigador estará interesado en determinar cuál de dos teorías explica mejor un determinado fenómeno bajo estudio. Cuando esto ocurre con frecuencia se tratará de modelos no anidados. En estos casos, algunos de los criterios de selección generalmente usados no serán del todo adecuados y es entonces, cuando herramientas más potentes son requeridas. El presente artículo tiene que ver con una metodología para la selección de modelos conocida como Test de Hipótesis No Anidadas. La idea es hacer una revisión del tema desde sus inicios, apoyándonos en aquellos desarrollos y publicaciones que por su relevancia, de alguna manera han determinado el rumbo del tema.

CRITERIOS DE SELECCIÓN DE MODELOS DE USO MÁS FRECUENTE

Tal vez la solución de mayor popularidad, entre los diferentes investigadores, haya sido la de utilizar, como criterio de selección el cuadrado del coeficiente de correlación múltiple ajustado por la pérdida de grados de libertad. Esto es, el R cuadrado ajustado. Es de hacer notar que, el uso de este indicador comporta elegir aquel modelo con la menor varianza residual. H. Theil (1957) fue quizás quien dio mayor soporte o justificación al procedimiento anterior, al probar que con la aplicación del R cuadrado ajustado estaríamos en promedio realizando la selección correcta, siempre que fuesen satisfechas las siguientes condiciones:

I. Alguno de los modelos contendientes debe ser el "verdadero modelo", definiendo esta última característica en términos de los supuestos del modelo lineal general.

II. Las variables explicativas deben ser no estocásticas (ie. constantes en muestras repetidas).

Ambas condiciones fueron criticadas en aquel entonces, y lo son aún más, en la actualidad. La primera de ellas, por cuanto no existe justificación teórica, ni empírica, que permita asegurar que el verdadero mecanismo generador de los datos deba satisfacer los supuestos clásicos del modelo lineal general. En realidad, tales supuestos son necesarios para asegurar que los procesos de estimación y de prueba de hipótesis posean validez en sentido estadístico. En cuanto a la segunda condición, impide el uso de la variable dependiente como explicativa, despreciando el hecho que, en el pasado de la variable objeto de estudio, puede existir información útil en la determinación de la evolución del fenómeno.

Una segunda forma de selección de amplio uso, implica la consideración de un modelo global que contenga los distintos modelos contendientes. En tal sentido, cada modelo particular puede ser obtenido de la especificación global, a través de restricciones de exclusión sobre los parámetros. El problema con ésta aproximación estriba en decidir como ha de construirse el modelo global. Por otro lado, ¿si partimos de diferentes especificaciones globales obtendremos los mismos resultado?. Existe pues cierto grado de arbitrariedad o subjetividad en relación con esta forma de selección.

TEST DE HIPÓTESIS NO ANIDADAS

La metodología introducida por estos test no ha tenido toda la repercusión que en un principio se esperaba. Ello no es atribuible a su disponibilidad desde el punto de vista operativo, ya que en la actualidad se encuentran perfectamente implementados en la mayor parte del software estadístico ligado al área de series de tiempo y econometría.

El origen de la idea de hipótesis no anidadas se remonta al año 1962, con el trabajo desarrollado por D. R. Cox, " Further Results on Test of Separate Families of Hypotheses". Como punto de partida se tiene un vector aleatorio $Y' = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ y el contraste de las siguientes hipótesis estadísticas:

H_o: Y_{nx1} posee distribución $f(Y, \alpha_o)$ con $\alpha_o \in \Omega_o \subset \Re^k$

H_1: Y_{nx1} posee distribución $g(Y, \beta_1)$ con $\beta_1 \in \Omega_1 \subset \Re^k$

Y_{nx1} se supone vector aleatorio discreto o continuo. En cuanto a los espacios de parámetros Ω_o y Ω_1, se tiene que la intersección de ellos, $\Omega_o \cap \Omega_1$, es diferente tanto del primero como del segundo espacio y, por su parte, α_o y β_1 son vectores de parámetros. En el caso en que $\Omega_o \cap \Omega_1 = \Omega_o$ ó $\Omega_1 \cap \Omega_o = \Omega_1$ decimos que las hipótesis son anidadas.

Se dice que $f(Y, \alpha_o)$ y $g(Y, \beta_1)$ son familias separadas, si dado $\alpha_o \in \Omega_o$, $f(Y, \alpha_o)$ no puede ser arbitrariamente aproximado por $g(Y, \beta_1)$ mediante un proceso al límite. Análogamente, para $\beta_1 \in \Omega_1$, $g(Y, \beta_1)$ no puede ser aproximado arbitrariamente por $f(Y, \alpha_o)$. La verificación de las hipótesis anteriores no puede ser llevada a cabo mediante la teoría de Neyman-Pearson, debido a que ésta requiere que los espacios paramétricos asociados con f y g sean iguales.

Un estadístico propuesto por D. R. Cox, para superar la limitación anterior, surge de una modificación al test de razón de verosimilitud de Neyman - Pearson. Sean $\hat{\alpha}_o$ y $\hat{\beta}_1$ los estimadores de máxima verosimilitud de α_o y β_1 respectivamente, $L_f(\hat{\alpha}_o)$ el valor máximo del logaritmo de la función de verosimilitud bajo H_o, $L_g(\hat{\beta}_1)$ el análogo del anterior bajo H_1 y $E_{H_o}\{L_f(\hat{\alpha}_o) - L_g(\hat{\beta}_1)\}$ el valor esperado de la discrepancia entre las funciones de verosimilitud, cuando la distribución de Y_{nx1} es f. La expresión explícita del estadístico bajo consideración es la siguiente:

$$T_f = \{L_f(\hat{\alpha}_o) - L_g(\hat{\beta}_1)\} - E_{H_o}\{L_f(\hat{\alpha}_o) - L_g(\hat{\beta}_1)\}$$

T_f compara la diferencia observada de los logaritmos de las funciones de verosimilitud, con la estimación de lo que cabría esperar que fuese dicha diferencia, si H_o fuese verdadera. En $\{L_f(\hat{\alpha}_o) - L_g(\hat{\beta}_1)\}$ tenemos la discrepancia entre los máximos de ambas funciones de verosimilitud bajo cada distribución por separado. Ahora bien, si f define la verdadera distribución de Y_{nx1}, $E_{H_o}\{L_f(\hat{\alpha}_o) - L_g(\hat{\beta}_1)\}$ debería estar muy próxima a

$\{L_f(\hat{\alpha}_o) - L_g(\hat{\beta}_1)\}$. En consecuencia, valores significativamente distintos de cero para T_f inducen a rechazar H_o.

D.R. Cox, se vale de las propiedades que tiene el estimador de máxima verosimilitud en muestras grandes, para probar que T_f posee una distribución asintóticamente normal con media cero y varianza V_f (ie $T_f \approx AN(\vec{0}, V_f)$).

Hay ciertas consideraciones de interés que conviene resaltar:

(i) El test basado en T_f se ubica dentro de la teoría de muestras grandes, suponiendo además que las variables que componen al vector aleatorio Y_{nx1} son independientes y equidistribuidas.

(ii) Se trata de un problema de verificación y no de discriminación entre f y g, es decir, H_1 sólo indica el tipo de alternativa para la cual se requiere la mayor potencia, H_1 no es la única alternativa posible. De allí que si deseamos verificar a g como distribución de Y_{nx1}, deben invertirse las distribuciones establecidas en H_o y H_1. En tal caso, el estadístico adopta la forma que sigue:

$$T_g = \{L_g(\hat{\beta}_1) - L_f(\hat{\alpha}_o)\} - E_{H_o}\{L_g(\hat{\beta}_1) - L_f(\hat{\alpha}_o)\}$$

En 1970, B. C. Atkinson, intenta enfrentar el problema de la selección, construyendo una distribución combinada la cual contiene a f y g como componentes; es decir, se busca anidar ambas distribuciones en una mayor. Su trabajo se titula “A Method for Discriminating Between Models”. Atkinson desarrolla un test que permite discriminar entre f y g. Si bien la idea de una distribución combinada es sugerida por Cox en su trabajo (1962), es Atkinson quien la retoma y la desarrolla. Este último, emplea una distribución combinada del tipo:

$$p_\lambda(Y_{nx1}) = k\{f(Y,\alpha_o)\}^{1-\lambda}\{g(Y,\beta_1)\}^{\lambda}$$

en el que k se elige de modo que satisfaga la relación $\int\int ...... \int p_\lambda(Y)dY = 1$.

Obsérvese que para los valores particulares $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ tenemos respectivamente (salvo una constante de proporcionalidad) las hipótesis H_0 y H_1 definidas por Cox (1962). En este caso se realizan inferencias sobre λ, de forma que la teoría de Neyman - Pearson puede ser utilizada, puesto que existe sólo un espacio de parámetros (ie $\lambda \in \Re$). Se trata de seleccionar *ó* f *ó* g, lo cual va a depender de que λ sea significativamente mayor que cero o menor que uno. Surgen cuatro posibilidades:

(i) H_0 es rechazada, H_1 es "aceptada".

(ii) H_0 es "aceptada", H_1 es rechazada.

(iii) Ambas H_0 y H_1 son rechazadas.

(iv) Ambas H_0 y H_1 son "aceptadas".

El primer caso sugiere que existe un desvío significativo de H_0 en la dirección de H_1, pero no de H_1 en la dirección de H_0 (ie $\hat{\lambda} \geq 1$). El segundo establece un desvío significativo de H_1 en la dirección de H_0, pero no de H_0 en la dirección de H_1 (ie $\hat{\lambda} \leq 0$). La tercera posibilidad plantea que la combinación de las dos distribuciones provee una mejor descripción de los datos que aquella debida a una sola distribución; es decir, existe un desvío significativo de una distribución en la dirección de otra y viceversa (ie $0 < \hat{\lambda} < 1$). En otras palabras, la distribución artificial $p_{\lambda}(Y_{nx1})$ debe ser "aceptada" cuando la muestra no es consistente ni con H_0 ni con H_1. El último caso sugiere que no existe evidencia de un desvío significativo de una distribución en dirección de la otra; esto es, no existe suficiente información para discriminar entre las distribuciones. Ocurre que $\hat{\lambda}$ no es significativamente mayor que cero, ni significativamente menor que uno.

A partir de las reflexiones anteriores, se establecen dos puntos de vista dentro de los cuales se van a ubicar la mayoría de los desarrollos posteriores; estos son: el Anidado Artificial y las Familias de Hipótesis Separadas.

Para 1974, M. H. Pesaran publica "On the General Problem of Model Selection", en este trabajo el autor desarrolla un test tipo Cox (ie Familias de Hipótesis Separadas) en el contexto de los modelos de regresión lineal.

Se desea verificar un modelo lineal bajo H_0 versus un modelo alternativo, también lineal en H_1. Esto se plantea del modo siguiente:

$$H_0: \quad Y = X\beta_0 + U_0 \text{ con } U_0 \approx N(\vec{0}, \sigma_0^2 I_n)$$

$$H_1: \quad Y = Z\beta_1 + U_1 \text{ con } U_1 \approx N(\vec{0}, \sigma_1^2 I_n)$$

donde X_{nxk_0} y Z_{nxk_1} son matrices de variables explicativas no estocásticas; Y_{nx1} es el vector de observaciones de la variable aleatoria a explicar. Además, las hipótesis son no anidadas, lo cual en el ámbito de los modelos lineales equivale a exigir que los conjuntos de vectores columna en X y Z sean mutuamente independientes desde el punto de vista lineal. Por lo tanto, las variables de un modelo no pueden ser obtenidas a partir de las variables incluidas en la especificación alternativa. Bajo estas condiciones, Pesaran desarrolla uno de los test más ampliamente conocidos en la literatura sobre hipótesis no anidadas, llamado N-test. El autor consigue una expresión explícita para el estadístico de Cox, sujeta a las hipótesis H_0 y H_1 establecidas anteriormente.

La distribución del N-test es asintóticamente normal, de allí que necesitemos contar con muestras grandes para que tal supuesto distribucional pueda ser de utilidad. Sin embargo, en razonable cantidad de problemas prácticos sólo contamos con muestras pequeñas, es por ello que Pesaran intentó medir la robustez de dicho estadístico al tamaño de la muestra a través de métodos de simulación. Los resultados fueron poco alentadores, ya que el verdadero nivel de significación resultó mucho mayor que el nivel nominal, sobreestimación que se hace mucho más severa cuando el número de variables en H_1, no presentes en H_0, se incrementa. Por lo tanto, el N-test no es recomendable en muestras pequeñas. Cabe destacar que M. H. Pesaran también logra desarrollar una expresión válida para el estadístico de Cox, en el caso en que los errores U_0 y U_1 siguen esquemas autorregresivos de orden 1 débilmente estacionarios.

Algunas consideraciones finales de interés:

(i) Aún se está en el marco de variables aleatorias $y_1, y_2, \dots, y_n$ independientes y equidistribuidas. Ambos modelos en H_0 y H_1 deben satisfacer todos los supuestos del modelo lineal general.

(ii) El supuesto de X y Z no estocásticas, impide que en cualquiera de las especificaciones en H_0 y H_1, esté presente como variable explicativa algún retardo de la variable dependiente.

En 1981 Russell, Davidson y James, G. Mackinnon introducen otro de los test sobre hipótesis no anidadas de uso más frecuente, el cual es conocido como J-test. La publicación llevó por título " Several Test for Model Specification in the Presence of Alternative Hypotheses". Estos autores se restringieron a modelos No Lineales.

Sea un modelo no lineal bajo H_0 cuya validez se desea verificar:

$$H_0 : y_t = f_t(X_t, \beta) + \varepsilon_{0t}$$

con y_t (t-ésima) observación de la variable dependiente, X_t vector de observaciones de las variables exógenas, β un vector de k parámetros y $\varepsilon_{0t} \approx NID(0, \sigma_0^2)$ $\forall t$. Y supongamos que la teoría económica sugiere una hipótesis alternativa sobre la cual se necesita tener cierta confianza; esto es:

$$H_1 : y_t = g_t(Z_t, \gamma) + \varepsilon_{1t}$$

con Z_t vector de observaciones de las variables exógenas, γ un vector de parámetros a ser estimados, y $\varepsilon_{1t} \approx NID(0, \sigma_1^2)$ $\forall t$. Además, H_0 y H_1 hipótesis no anidadas.

Ellos plantean realizar la regresión auxiliar $y_t = (1-\alpha) f_t(X_t, \beta) + \alpha \hat{g}_t + \varepsilon_t$ en la cual, $\hat{g}_t = g_t(Z_t, \hat{\gamma})$ con $\hat{\gamma}$ estimador de máxima verosimilitud de γ. La idea es verificar la hipótesis $\alpha = 0$, en cuyo caso H_0 sería cierta. Davidson y Mackinnon probaron que el estadístico que permite verificar la restricción anterior se distribuye asintóticamente normal si H_0 es cierta.

La regresión auxiliar, anteriormente sugerida, anida a H_0 y H_1, lo que plantea la adopción del punto de vista del anidado artificial. Por otra parte, existe también la versión lineal del J-test, en tal caso se toma $f_t = X\beta$ y $\hat{g} = Z\hat{\gamma} = \hat{y}_1$ representando ésta última los valores ajustados de Y bajo H_1. Mientras tanto, la regresión auxiliar se transforma entonces en $y_t = (1-\alpha) X\beta + \alpha \hat{y}_1 + \varepsilon_t$. En cuanto a la estimación de esta especificación en muestras pequeñas, no es adecuado el uso de mínimos cuadrados ordinarios, ya que $E(\hat{\gamma}\varepsilon) \neq 0$, de forma que obtendríamos estimaciones no consistentes de α; no obstante, se justifica el uso de mínimos cuadrados ordinarios en muestras grandes pues $plim(\hat{\gamma}\varepsilon)=0$.

El J-test también puede ser utilizado para verificar la veracidad de una hipótesis versus varias alternativas a la vez. Para verificar la hipótesis H_o, definida anteriormente, versus m modelos alternativos:

$$H_j : y_t = g_{tj}(Z_{tj}, \gamma_j) + \varepsilon_{tj} \text{ ; j = 1,....., m}$$

mediante el J-test, debemos estimar la regresión auxiliar:

$$y_t = \left(1 - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j\right) f_t(X_t, \beta) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \hat{g}_{tj} + \varepsilon_t$$

y llevar a cabo un test de razón de verosimilitud, que permita verificar la restricción de que todos los α_j son nulos. Se desprende entonces que aceptar dicha restricción, es aceptar H_o.

La publicación "Comparison of Local Power of Alternative Test of Non-Nested Regression Models" de M. H. Pesaran (1982) es también de interés. En ésta se compara la potencia de tres métodos diferentes de prueba para modelos no anidados: el método Ortodoxo, el N-test y el J-test. Los dos últimos procedimientos son conocidos, pasemos a explicar en que consiste el primero. El método Ortodoxo adopta el punto de vista del anidado artificial, como en otros casos se parte de las hipótesis no anidadas:

$$H_o : \quad Y = X\beta_o + U_o \text{ con } U_o \approx N(\vec{0}, \sigma_o^2 I_n)$$

$$H_1 : \quad Y = Z\beta_1 + U_1 \text{ con } U_1 \approx N(\vec{0}, \sigma_1^2 I_n)$$

este método propone considerar la especificación lineal:

$$Y = X\beta_o + Z\beta_1 + U \text{ ; } U \approx N(\bar{0}, \sigma^2 I_n)$$

la cual anida a los modelos establecidos en H_o y H_1, para luego verificar la hipótesis $H_o : \beta_o = 0$ ó $H_o : \beta_1 = 0$. Esta restricción equivale a la verificación de la significación conjunta de un subconjunto de parámetros. El estadístico que nos permite realizar tal contraste posee distribución F; sin embargo, existe cierta objeción hacia este estadístico (independientemente de los resultados de este artículo), debido a que la potencia del test decrece con el aumento de correlación entre las variables explicativas. Por otro lado, el método Ortodoxo ha sido una de las formas usuales de llevar a cabo el contraste entre H_0 y H_1.

El autor muestra que la potencia asintótica del test ortodoxo versus alternativas locales es estrictamente menor que las asociadas al N-test y J-test, salvo que el número de variables en H_1 no presentes en H_0 sea uno. En ese caso, los tres métodos son asintóticamente equivalentes. Bajo este punto de vista, el resultado anterior declara la superioridad de estos nuevos procedimientos sobre el tipo de contraste implícito en el método Ortodoxo.

Otro desarrollo valioso se debe a Naorayex. K. Dastoor (1983), publicado bajo el título " Some Aspects of Testing Non - Nested Hypotheses ", el cual será conocido a partir de entonces como procedimiento R. El punto de partida es:

$$H_0 : Y_{nx1} \text{ es vector aleatorio caracterizado por los parámetros en } \theta_0 \in \Omega_0 \subset \Re^k$$

$$H_1 : Y_{nx1} \text{ es vector aleatorio caracterizado por los parámetros en } \theta_1 \in \Omega_1 \subset \Re^k$$

H_0 y H_1 no anidadas, lo cual implica diferentes espacios de parámetros. Cabe destacar que no se establece supuesto alguno acerca de la distribución de la variable aleatoria Y_{nx1}.

Para probar H_0 el procedimiento R trata de verificar que tan próximo al vector nulo de $\Re^k$ se encuentra el estadístico definido por:

$$\hat{\eta}_0 = \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_{10}$$

donde $\hat{\theta}_{10}$ es la esperanza asintótica de $\hat{\theta}_1$ bajo H_0.

Ciertamente, aún persisten las ideas introducidas por Cox (1962), puesto que $\hat{\theta}_1$ es la estimación del vector de parámetros que caracteriza a Y_{nx1} bajo H_1, mientras $\hat{\theta}_{10}$ es el valor esperado de $\hat{\theta}_1$ cuando Y_{nx1} es caracterizado por los parámetros en θ_0. Sin embargo, mientras D. R. Cox utiliza funciones de verosimilitud, el procedimiento R trabaja directamente con los vectores de parámetros.

Como no siempre se está interesado en todos los parámetros en θ_1, éste puede ser particionado en la forma $\theta_1^t = (\alpha_1^t, \gamma_1^t)$ donde α_1 debe contener aquellos parámetros que se consideren de importancia, y en ese caso:

$$\hat{\eta}_0 = \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_{10}$$

El estadístico $\hat{\eta}_0$ posee distribución asintótica.

N. K. Dastoor intenta por último relacionar el estadístico $\hat{\eta}_0$ con algunos test de hipótesis no anidadas ya existentes, como son: el N-test y J-test. Probando que estos últimos pueden ser interpretados como funciones no lineales del respectivo $\hat{\eta}_0$ asociado a cada test.

La publicación " Asymptotic Properties of Instrumental Variables Statistic for Testing Non - Nested Hypotheses", propuesta por Neil. R. Ericsson (1983) amplía el ámbito donde los test de hipótesis no anidadas pueden ser aplicados.

Supongamos como en otros casos:

$$H_0: \quad Y = X_0\beta_0 + U_0 \text{ con } U_0 \approx N(\vec{0}, \sigma_0^2 I_n)$$

$$H_1: \quad Y = X_1\beta_1 + U_1 \text{ con } U_1 \approx N(\vec{0}, \sigma_1^2 I_n)$$

H_0 y H_1 no anidadas.

La importancia del desarrollo de Ericsson estriba en que el test implementado por éste no exige que X_0 y X_1 sean no estocásticas. No olvidemos que, en el trabajo empírico tal supuesto es muy restrictivo, sobre todo cuando se trata de formulaciones dinámicas. Por ejemplo, la hipótesis de expectativas adaptables, conduce a la construcción de modelos con variable dependiente desfasada como regresor. En esas condiciones, el uso de Mínimos Cuadrados Ordinarios da lugar a estimaciones no consistentes. Una posible solución es la utilización del Método de Variables Instrumentales introducido por Sargan (1958).

Más precisamente, Ericsson se asimila al punto de vista del anidado artificial, considerando una tercera hipótesis (la cual anida a H_0 y H_1):

$$H_2: Y = X_2\beta_2 + U_2 \; ; \; U_2 \approx N(\bar{0},\sigma_2^2 I)$$

para luego, con base en el estimador de variables instrumentales, desarrollar un test estadístico que le permite verificar la restricción que reduce el modelo bajo H_2 al modelo bajo H_0, estadístico que se va a distribuir asintóticamente como una variable aleatoria chi-cuadrado.

L. G. Godfrey y M. H. Pesaran (1983) dan lugar a la publicación " Test of Non - Nested Regression Models, Small Sample Adjustments and Monte Carlo Evidence". Trabajo de suma importancia, ya que fue la respuesta a la necesidad de contar con test de hipótesis no anidadas en muestras pequeñas.

Se parte de las hipótesis no anidadas:

$$H_0: \quad Y = X\beta_0 + U_0 \text{ con } U_0 \approx N(\bar{0},\sigma_0^2 I_n)$$

$$H_1: \quad Y = Z\beta_1 + U_1 \text{ con } U_1 \approx N(\bar{0},\sigma_1^2 I_n)$$

con X y Z no estocásticas.

Como señaláramos anteriormente, estos test sobreestiman el nivel de significación nominal en muestras pequeñas, lo que no los hace recomendables a ese nivel. Ahora bien, todos los test tipo Cox tienen media cero sólo asintóticamente; es esto último lo que los autores hacen ver como posible causa de la sobreestimación señalada. A partir de esa premisa derivan un test al cual denominan W-test, el cual tiene media cero para todo n, manteniendo además las propiedades asintóticas de que gozan dichos test. Debemos hacer énfasis en que el W-test no es un test exacto, es decir, con distribución conocida para todo n. En realidad nada sabemos acerca de la distribución del W- test en muestras pequeñas, sólo que $E(W_n) = 0 \;\; \forall n$.

Una vez desarrollado el test, a través de métodos de simulación se ha estudiado su desempeño para diversos tamaños de muestra (ie n = 20, 40, 60) y se ha comparado con el desenvolvimiento de los test más conocidos de la literatura, como son: el N-test, J-test , R-test y el método Ortodoxo. Para estos tamaños de muestra, los tres primeros test sobrestiman el verdadero nivel de significación, siendo el J-test el de mayor severidad en cuanto al sesgo hacia el rechazo de la hipótesis nula. Por otro lado, si bien el método Ortodoxo no sobrestima el nivel de significación por ser un test exacto, su potencia disminuye con el aumento de correlación entre las variables explicativas. En cambio, el W-test no sobrestima el nivel nominal y mantiene elevada potencia incluso cuando los regresores están altamente correlacionados. Se ha medido la robustez del test con respecto al supuesto de normalidad de los errores, encontrándose que los estadísticos bajo comparación presentan adecuados niveles de significación y de potencia; sin embargo, el W-test presentó cierta tendencia hacia el no rechazo de la hipótesis nula, sobre todo cuando n=20. El supuesto de X y Z no estocásticas también ha sido chequeado introduciendo como explicativa la variable dependiente desfasada un período, de nuevo, tanto el J-test como el N-test sobreestiman el verdadero nivel de significación, no así el W-test.

Los resultados anteriores, sustentan al W-test como el estadístico de referencia cuando se trata de muestras pequeñas.

En 1986 es publicado "The Encompassing Principle and its Application to Testing Non - Nested Hypotheses" por G. E. Mizon y J. F. Richard. El investigador, que se enfrenta a la construcción de un modelo, suele postular la existencia de un mecanismo generador de los datos (ie MGD). Sin embargo en la práctica difícilmente podremos llegar a conocerlo, en su lugar, es muy posible que se sugiera la existencia de varios modelos estadísticos compitiendo entre sí por explicar el fenómeno en estudio; siendo entonces fundamental la elección del modelo más apropiado. El trabajo de Mizon y Richard propone el Principio del Encompassing como la base para el desarrollo de una estrategia que permita comparar modelos contendientes.

La idea general es que el modelo M_1 "domina" al modelo M_2, si M_1 es capaz de explicar los resultados obtenidos a través del modelo M_2. Obsérvese que ésta es la característica básica del MGD, ya que cualquier modelo que se conciba a nivel empírico será una reducción del MGD.

Los autores sugieren que un modelo estadístico M puede ser caracterizado por:

(i) la elección de una variable endógena a explicar y_t.

(ii) la elección de un conjunto de variables exógenas Z_t condicionantes.

(iii) una hipótesis sobre la distribución de y_t, como por ejemplo, la densidad

$$f_t(y_t / z_t, Y_{t-1}, Z_{t-1}, \alpha)$$

donde Y_{t-1} es un vector de retardos de la variable endógena, Z_{t-1} es un vector de rezagos de las variables condicionantes y α vector de parámetros.

Sea ahora un modelo M_2 contendiente con el modelo M_1 para la misma variable endógena y_t, $\hat{b}$ un estadístico de interés dentro del contexto de M_2, $b_{\hat{\alpha}} = E_{M_1}(\hat{b})$ valor esperado del estadístico bajo M_1.

<u>Definición</u>: M_1 encompass (ie "domina") a M_2 con respecto a $\hat{b}$ si el estadístico $\hat{\phi} = \hat{b} - b_{\hat{\alpha}}$ no difiere significativamente de cero.

Por ejemplo, $\hat{b}$ podría ser el estadístico de Durbin-Watson para verificar autocorrelación de orden 1 en el modelo M_2. En tal caso, si M_1 encompass M_2 ello implica que se pueden predecir los problemas de autocorrelación de M_2 desde M_1, y en ese sentido M_1 es más próximo al MGD que M_2.

Otro resultado notable, derivado por los autores, se encuentra en que los test de hipótesis no anidadas ya conocidos como son el N-test, J-test y W-test pueden ser interpretados como test de encompassing; esto es, son una forma de hacer operativa la definición anterior. En ese sentido, el Principio del Encompassing unifica el tema de hipótesis no anidadas.

El siguiente desarrollo, del cual haremos referencia, fue introducido por King. Maxwell. L y M. Mc Aleer (1987) bajo el título "Further Results on Testing AR(1) Against MA(1) Disturbances in the Linear Regression Model".

Dado un modelo de regresión lineal, la preocupación usual ha sido investigar la posible existencia de un esquema autorregresivo de orden p (de preferencia p = 1). Sin embargo, el mejor conocimiento de que se dispone ahora sobre los procesos MA(q), gracias a los trabajos de Box-Jenkins (1970) y otros, aunado al uso de hipótesis o restricciones de la teoría económica, las cuales dan lugar a modelos econométricos dinámicos con errores MA(q), ha producido cambios en el énfasis inicial por los AR(p).

El trabajo pionero en esta línea se debe a A.M. Walker (1967) con la publicación "Some Test of Separate Families of Hypotheses in the Series Analysis", allí consideró el problema de verificar si un proceso estocástico gaussiano es generado por un esquema AR(1) o MA(1). Walker desarrolló un test basado en el estadístico de Cox T_f. Por su parte, King y Mc Aleer intentan una aproximación algo diferente, aunque siempre manejándose con hipótesis no anidadas.

Consideran el modelo de regresión lineal $Y = X\beta + U$ con X_{nxk} no estocástica y U_{nx1} vector de errores, donde $U \approx AR(1)$ ó $U \approx MA(1)$.Estas condiciones conducen a la verificación de las siguientes hipótesis:

$$H_0 : U \approx N(\vec{0}, \sigma^2 \Omega(\rho)) \qquad 0 \leq \rho < 1$$

$$H_1 : U \approx N(\vec{0}, \sigma^2 \Sigma(\gamma)) \qquad 0 \leq \gamma < 1$$

los rangos de variación de ρ y γ permiten asegurar que el AR(1) es débilmente estacionario y el MA(1) invertible. Se han derivado diversos test en esta línea, habida cuenta del inmenso desarrollo que ha tenido el área de series de tiempo.

Un último trabajo al cual hemos de referirnos, se debe al autor de este artículo: R. Ibarra (1998) y lleva por título "Un Test de Hipótesis no Anidadas en Modelos Lineales con Errores de Media Móvil de Orden Uno". La mayor parte de los test de hipótesis no anidadas en modelos lineales desarrollados hasta la fecha, suponen esquemas simples o autorregresivos para el término de error; sin embargo, no existe justificación teórica alguna que impida el uso de esquemas algo más complejos. Tal vez la principal restricción, sobre todo si se trata de procesos de media móvil, se encuentre en la dificultad de encontrar una inversa exacta para la matriz de varianzas y covarianzas.

Se consideran las siguientes hipótesis:

$$\mathrm{H_o} : \mathrm{Y} = \mathrm{X}\beta_o + \mathrm{U_o} \;;\; \mathrm{u_{ot}} = \mathrm{a_{ot}} - \theta_o \mathrm{a_{o\,t-1}} \;;\; \mathrm{a_{ot}} \approx \mathrm{NID}(0, \sigma_o^2)$$

$$\mathrm{H_1} : \mathrm{Y} = \mathrm{Z}\beta_1 + \mathrm{U_1} \;;\; \mathrm{u_{1t}} = \mathrm{a_{1t}} - \theta_1 \mathrm{a_{1\,t-1}} \;;\; \mathrm{a_{1t}} \approx \mathrm{NID}(0, \sigma_1^2)$$

los modelos en las hipótesis se consideran no anidados, X y Z no estocásticas, y los residuos en ambos modelos ajustados a procesos de media móvil de orden uno invertibles (ie $|\theta_i| < 1$, i = 0,1). Bajo estas condiciones, se desarrolló un test de hipótesis no anidadas siguiendo los lineamientos metodológicos establecidos por D. R. Cox (1962) en su trabajo pionero. Por otro lado, nos apoyamos también en el artículo de P. Balestra (1980) en el cual se da explícitamente la expresión general de la inversa para la matriz de varianzas y covarianzas de procesos de media móvil de orden uno.

CONSIDERACIONES FINALES

Un campo de permanente actividad en el área económica es el relacionado con la verificación de teorías económicas, éstas sugieren variables que potencialmente determinan el fenómeno económico y cuando algunas de tales variables son diferentes, los modelos a que dan lugar a nivel empírico son no anidados. Este es el tipo de situación ideal para la utilización de los test de hipótesis no anidadas, ya que difícilmente algún indicador tan sólo basado en la suma de cuadrados de los residuos puede resultar confiable para llevar a cabo la discriminación. Por otro lado, es necesario el desarrollo de test de hipótesis no anidadas que permitan trabajar con esquemas complejos en los términos de error, de modelos tanto lineales como no lineales.

BIBLIOGRAFÍA

Atkinson, A. C. (1970), "A Method for Discriminating Between Models", *Journal of the Royal Statistical Society B*, 32.

Box, G. E. P. y G. M. Jenkins. (1970), *Time Series Analysis: Forecasting and Control, Holden-Day*, San francisco, CA.

Balestra, P. (1980), "A Note on the Exact Transformation Associated with the First-Order Moving Average Process", *Journal of Econometric*, 14.

Cox, D. R. (1962), "Further Results on the Test of Separate of Families of Hypotheses", *Journal of the Royal Statistical Society B*, 24.

Davidson, R. y J. G. Mackinnon. (1981), "Several Test of Model Specification in the Presence of Alternative Hypotheses", *Econometrica*, 49.

Dastoor, N. K. (1983), "Some Aspects of Testing Non-Nested Hypotheses", *Journal of Econometrics*, 21.

Ericsson, N. R. (1983), "Asymptotic Properties of Instrumental Variables Statistic for Testing Non-Nested Hypotheses", *The Review of Economics Studies*, 50.

Godfrey, L. G. y M. H. Pesaran (1983), "Test of Non-Nested Regression Models: Small Sample Adjustments and Monte Carlo Evidence", *Journal of Econometrics*, 21.

Ibarra, R. (1998), *Un test de hipótesis no anidadas en modelos lineales con errores de* *media móvil de orden uno*, Tesis de Maestria, UCV, FACES, Caracas.

King, M. L. y M. Mcaleer (1987), "Further Results on Testing AR(1) Against MA(1) Disturbances in the Linear Regression Model", *Reviews of Economics Studies*, 54.

Mizon, G. E. y J. F. Richard (1986), "The Encompassing Principle and its Application to Testing Non-Nested Hypotheses", *Econometrica*, 54.

Pesaran, M. H. (1974), "On the General Model Selection Problem", *Review Of Economics Studies*, 41.

Sargan, J. D. (1958), "The Estimation of Economic Relationships Using Instrumental Variables", *Econometrica*, 26.

Theil, H. (1957), "Specification Errors and the Estimation of Economic Relations", *Review of the International Statistics Institute*, 25.

Walker, A. M. (1967), "Some Test of Separate Families of Hypotheses in the Series Analysis", *Biometrika*,, 54, San Francisco.