

EL USO DE INFORMACIÓN EXTERNA EN APROXIMACIONES BIPLLOT

Olesia Cárdenas*

José L. Noguera

POST-GRADO EN ESTADÍSTICA, UCV

María. P Galindo

José Vicente-Villardón

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA, ESPAÑA

Resumen:

En esta investigación se propone un método alternativo de estimación máximo verosímil, que permite restringir los ejes sobre una representación Biplot, de manera tal que sean combinaciones lineales de variables externas. Aun cuando los métodos Biplot Clásicos de Gabriel (1971), se utilizan generalmente para describir matrices de datos, sin hacer supuestos sobre distribuciones poblacionales, es posible interpretar el Biplot de una matriz como un Modelo Bilineal Multiplicativo (Gollob, 1968). Este enfoque es el aquí utilizado, describiendo la geometría de los Biplots con Información Externa e ilustrando el método de estimación propuesto con una aplicación práctica, demostrando su utilidad en diversos campos de la investigación científica, entre ellos psicología, educación, economía, biología, etc.

Palabras claves: Biplots, información externa, modelos bilineales multiplicativos, estimación máximo verosímil.

1 - INTRODUCCION

Los métodos Biplot Clásicos de Gabriel (1971) se usan generalmente para describir conjuntos de datos multivariantes contenidos en una matriz de datos (n individuos por p variables), sin hacer supuestos sobre modelos subyacentes ni distribuciones poblacionales. Sin embargo, siguiendo las ideas de Gollob (1968) se puede interpretar el Biplot de una matriz de datos como un modelo bilineal multiplicativo, permitiendo este enfoque la descripción de la interacción en una tabla de dos vías (Denis, 1991; Falguerolles, 1995; Van Eeuwijk, 1995; Choulakian, 1996), o la visualización del modelo subyacente en los datos (Bradú y Gabriel, 1978; Gabriel, Galindo y Vicente-Villardón, 1998; Blázquez, 1998). Siguiendo las ideas de Cárdenas (2000), en este trabajo analizamos el ajuste de los Biplots a través de modelos bilineales, pero retomando el objetivo descriptivo

* Correo electrónico: ocardena@cantv.net

de los Biplots Clásicos de Gabriel, considerando el caso de que las variables tengan cualquier distribución de la familia Exponencial y teniendo en cuenta la posibilidad de inclusión de información externa que explique algún comportamiento subyacente en los datos. 2 - APROXIMACIONES BIPLLOT A TRAVES DE MODELOS BILINEALES

La representación gráfica (generalmente bidimensional) de una matriz de datos \mathbf{Y} de orden $n \times p$ (n individuos \times p variables) a través de un Biplot, permite aproximar gráficamente la estructura de dicha matriz en cuanto a la similitud y el orden de los individuos, la variabilidad y correlación de las variables, así como también los datos originales, el orden de las medias, los efectos filas y columna, etc.

La fundamentación teórica de los Biplots Clásicos de Gabriel (1971) se basa en la aproximación de la matriz \mathbf{Y} de rango r , por una de bajo rango ($q < r$) a través de la Descomposición en Valores Singulares (DVS):

$$\mathbf{Y}_r \approx \mathbf{Y}_q = \mathbf{U}_q \Sigma_q \mathbf{V}'_q \quad (1)$$

siendo \mathbf{U} y \mathbf{V} matrices cuyos vectores columna ortonormales son respectivamente los vectores singulares por la izquierda de $(\mathbf{Y}\mathbf{Y}')$ y por la derecha de $(\mathbf{Y}'\mathbf{Y})$ y Σ una matriz diagonal constituida por los valores singulares α_k ($k = 1, \dots, q$).

Posterior a la DVS se realiza una factorización en matrices de marcadores filas \mathbf{A} y de marcadores columnas \mathbf{B} tal que:

$$\mathbf{Y}_r \approx \mathbf{Y}_q = \mathbf{U}_q \Sigma_q \mathbf{V}'_q = (\mathbf{U}_q \Sigma^s) (\Sigma^{1-s} \mathbf{V}'_q) = \mathbf{A}_q \mathbf{B}'_q \quad (2)$$

siendo $s = 0, 1, \frac{1}{2}$, lo que permite obtener los Biplots Clásicos (Gabriel, 1971) el GH-Biplot o Column Metric Preserving ($s = 0$), el JK-Biplot o Row Metric Preserving ($s = 1$) y el SQRT o Square Root Biplot ($s = \frac{1}{2}$). Cuando $s > 1$ también se puede obtener el HJ-Biplot o Row-Column Metric Preserving (Galindo, 1986).

Los marcadores columna \mathbf{b}_j ($j = 1, \dots, p$) contenidos en la matriz \mathbf{B} se representan en el gráfico con vectores (ejes biplot) y los marcadores fila \mathbf{a}_i ($i = 1, \dots, n$) contenidos en la matriz \mathbf{A} se representan con puntos. Considerando las propiedades geométricas del producto interno entre marcadores fila \mathbf{a}_i y columna \mathbf{b}_j , se pueden reconstruir los datos originales así como también visualizar la estructura de los mismos a través de la proyección ortogonal de \mathbf{a}_i sobre \mathbf{b}_j ya que:

$$y_{ij} = \mathbf{a}_i \mathbf{b}_j = \|\text{Proy}(\mathbf{a}_i / \mathbf{b}_j)\| (\text{signo}) \|\mathbf{b}_j\|$$

Las propiedades mínimo cuadráticas de la descomposición en valores singulares de una matriz (Householder & Young, 1938), proporciona la base para la aproximación de la matriz \mathbf{Y} a través de un modelo bilineal, siendo en ese caso las matrices de marcadores \mathbf{A} y \mathbf{B} en la factorización Biplot (2), equivalentes a matrices de parámetros desconocidas excepto por el rango de la matriz producto $[\mathbf{AB}']$. De allí que una aproximación Biplot también se puede realizar a través del ajuste de modelos bilineales multiplicativos, o sea:

1- A través de un modelo bilineal clásico ($E(\mathbf{Y}) = \mu = \mathbf{A} \mathbf{B}'$), cuando la distribución de las p variables contenidas en la matriz \mathbf{Y} es Normal.

2- A través de un modelo bilineal generalizado ($\eta = g(\mu) = \mathbf{A} \mathbf{B}'$), cuando la distribución de las p variables en \mathbf{Y} pertenece a la familia exponencial y sus valores esperados se encuentran relacionados con predictores lineales (η) a través de funciones link (g) como la logit, la probit, etc.

Una vez estimadas (por mínimos cuadrados) las matrices de parámetros \mathbf{A} y \mathbf{B} , se puede realizar a posteriori la descomposición en valores singulares (para introducir las restricciones de ortonormalidad) y recalcular las matrices de marcadores fila (\mathbf{MF}) y columna (\mathbf{MC}) a utilizar en la representación, o sea:

$$g(\hat{\mu}) = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}' = (\mathbf{U}\Sigma^s)(\Sigma^{1-s}\mathbf{V}') = (\mathbf{MF})(\mathbf{MC}) \quad (3)$$

De acuerdo a la terminología de Gower & Hand (1996) a esos Biplots se les conoce como *Biplots de Regresión*.

La estimación de la matriz de parámetros $[\mathbf{AB}']$ en la especificación general (3) se puede obtener iterativamente partiendo de valores iniciales para la matriz \mathbf{A} , de dos formas:

a) **En forma individual** para cada fila de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} , utilizando respectivamente regresiones para cada fila y columna de la matriz \mathbf{Y} , bien a través del *método de mínimos cuadrados alternados* (Blázquez, 1998) cuando las variables se distribuyen normalmente, o a través del *método de regresiones generalizadas alternadas* cuando las variables tienen cualquier distribución de la familia exponencial y la función link utilizada en el ajuste es diferente de la identidad.

b) **En forma conjunta** para todas las filas de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} , utilizando respectivamente regresiones simultáneas para todas las filas y columnas de la matriz \mathbf{Y} , a través de:

1) El *método de regresiones bilineales generalizadas* (Gabriel, 1998) el cual es una generalización del utilizado en los modelos lineales generalizados (Nelder y Wedderburn, 1972), que se basa en la reespecificación del modelo bilineal transformando las matrices \mathbf{Y} y \mathbf{B}' en vectores, para lo cual se concatenan las columnas de dichas matrices y se denotan $\langle \mathbf{Y} \rangle$ y $\langle \mathbf{B}' \rangle$. Con respecto a la matriz \mathbf{A} se reescribe tal que sea posible la estimación de todos los parámetros en \mathbf{B} simultáneamente, para lo cual se considera el producto Kronecker¹ entre matrices y sus propiedades. De esta manera el modelo bilineal generalizado utilizado en el ajuste de un Biplot se transforma en:

$$g \langle \mu \rangle = [\mathbf{I} \otimes \mathbf{A}] \langle \mathbf{B}' \rangle \quad (4)$$

2) El *método de estimación conjunta* (Cárdenas, 2000; Cárdenas, Galindo y Vicente-Villardón, 2001) el cual es una generalización del método de estimación utilizado en Teoría de Respuesta al Ítem (Baker, 1992) y del método de regresiones bilineales generalizadas (Gabriel, 1998). Este método no sólo permite estimar simultáneamente todos los parámetros en la matriz \mathbf{A} , sino también los de \mathbf{B} , o sea se pueden estimar conjuntamente y en forma simultánea ambas matrices de parámetros.

3 - **ESPECIFICACION Y ESTIMACION DE BIPLOTS CON INFORMACION EXTERNA** El ajuste de un Biplot a través de modelos bilineales permite restringir los ejes sobre la representación de manera tal que sean combinaciones lineales de variables externas, con el fin de ordenar los individuos de acuerdo a las mismas en el sentido del Análisis Canónico de Correspondencias (Ter Braak, 1986) y/o descubrir algunas relaciones con variables medidas en otro contexto. Para el ajuste de los Biplot con Información Externa se generalizan y adecúan las ideas expuestas en otros contextos por Denis (1991), Choulakian (1996), Blázquez (1998) y Gabriel (1998), proponiendo utilizar la siguiente especificación general:

$$\eta = g[E(\mathbf{Y}) = \mu] = \mathbf{X} \Theta \mathbf{Z}' = \mathbf{X} (\mathbf{A} \mathbf{B}') \mathbf{Z}' \quad (5)$$

donde

$\mathbf{X}_{(n \times m)}$ y $\mathbf{Z}_{(p \times s)}$ son matrices de variables externas y $\Theta_{(m \times q)} = \mathbf{A}_{(m \times q)} \mathbf{B}'_{(q \times s)}$ es la matriz de parámetros.

¹ El producto Kronecker entre dos matrices se define como: $\mathbf{P}_{(m \times p \times n \times q)} = [\mathbf{A}_{(m \times n)} \otimes \mathbf{B}_{(p \times q)}] = [a_{ij} \mathbf{B}] = [\mathbf{B} a_{ij}]$

La matriz **X** puede ser una matriz de variables continuas o discretas que caractericen a los individuos (variables demográficas por ejemplo), mientras que la matriz **Z** puede ser una matriz de variables explicativas que capturen la relación entre variables en otro período o contexto. Cuando no se dispone de información adicional sobre individuos y/o variables, **X** y **Z** se suponen iguales a matrices identidad **I**.

Una vez estimadas en (5) las matrices de parámetros **A** y **B** se introducen las restricciones de ortonormalidad, realizando a posteriori la descomposición en valores singulares y recalculando las matrices **MF** (de marcadores fila) y **MC** (de marcadores columna) a utilizar en la representación:

$$\eta = \mathbf{X} \mathbf{A} \mathbf{B}' \mathbf{Z}' = (\mathbf{X} \mathbf{U} \Sigma^s) (\Sigma^{1-s} \mathbf{V}' \mathbf{Z}') = (\mathbf{M}\mathbf{F}) (\mathbf{M}\mathbf{C}') \quad (6)$$

El modelo (5) se puede generalizar y contemplar la inclusión de un término independiente, para lo cual se puede descomponer la especificación general en dos sumandos, de la siguiente manera:

$$g(\mu) = \mathbf{X}(\mathbf{A}^* \mathbf{B}^{*'}) \mathbf{Z}' = \mathbf{X} (\mathbf{A}_0 \mathbf{B}'_0 + \mathbf{A} \mathbf{B}') \mathbf{Z}' \quad (7)$$

siendo $\mathbf{A}^* = [\mathbf{A}_0 \ \mathbf{A}]$ y $\mathbf{B}^* = [\mathbf{B}_0 \ \mathbf{B}]$. Los primeros subvectores en las matrices \mathbf{A}^* y \mathbf{B}^* , \mathbf{A}_0 y \mathbf{B}_0 respectivamente, permiten la inclusión de un término independiente (o constante) en el modelo. En caso de modelos sin término independiente esas matrices se reducen a las submatrices **A** y **B** en el modelo (5).

En la estimación de la matriz de parámetros ($\mathbf{A}^* \mathbf{B}^{*'})$ se puede utilizar el método de estimación conjunta (Cárdenas, 2000; Cárdenas, Galindo y Vicente-Villardón, 2001) citado en el apartado 2, siendo necesario reescribir las matrices **Y**, \mathbf{A}^* y \mathbf{B}^* como vectores columna, para lo cual se concatenan sus filas y se designan $\langle \mathbf{Y}' \rangle$, $\langle \mathbf{A}^{*'} \rangle$ y $\langle \mathbf{B}^{*'} \rangle$. Finalmente se reespecifica el modelo (5) considerando el producto Kronecker⁽¹⁾ y la concatenación de columnas de matrices producto² de la siguiente manera:

$$\langle \eta \rangle = g \langle \mu \rangle = \langle (\mathbf{X} \mathbf{A}^*) \mathbf{B}^{*'} \mathbf{Z}' \rangle \quad (8)$$

Para estimar \mathbf{A}^* y \mathbf{B}^* el procedimiento resulta equivalente a la realización alternada de las siguientes regresiones bilineales generalizadas:

² La concatenación de columnas de una matriz que resulta del producto de 3 matrices es igual a: $\langle \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{Z} \rangle = [\mathbf{Z}' \otimes \mathbf{A}] \langle \mathbf{B}' \rangle$.

$$g\langle \mu \rangle = \langle (\mathbf{XA}^*)\mathbf{B}^{*'}\mathbf{Z}' \rangle = [\mathbf{Z} \otimes (\mathbf{XA}^*)] \langle \mathbf{B}^{*'} \rangle$$

$$g\langle \mu' \rangle = \langle (\mathbf{ZB}^*)\mathbf{A}^{*'}\mathbf{X}' \rangle = [\mathbf{X} \otimes (\mathbf{ZB}^*)] \langle \mathbf{A}^{*'} \rangle$$

Para la resolución de ese sistema de ecuaciones no lineales se puede utilizar el método iterativo de Newton-Raphson, el cual puede realizarse en dos etapas o en forma simultánea, o sea:

Etapla 1: Se estiman los parámetros de la matriz \mathbf{B}^* correspondientes a las p variables en la matriz de datos \mathbf{Y} , suponiendo conocidas las coordenadas a_{ik} ³ de las filas de la matriz \mathbf{A}^* , a través de la resolución de la siguiente ecuación:

$$g\langle \mu \rangle = \langle (\mathbf{XA}^*)\mathbf{B}^{*'}\mathbf{Z}' \rangle = [\mathbf{Z} \otimes (\mathbf{XA}^*)] \langle \mathbf{B}^{*'} \rangle = [z_{ij}(\mathbf{XA}^*)] \langle \mathbf{B}^{*'} \rangle$$

De donde como la matriz de variables externas \mathbf{Z} es de orden $(p \times s)$ entonces:

$$g\langle \mu \rangle = \begin{bmatrix} z_{11}(\mathbf{XA}^*) & z_{12}(\mathbf{XA}^*) & \dots & z_{1s}(\mathbf{XA}^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{p1}(\mathbf{XA}^*) & z_{p2}(\mathbf{XA}^*) & \dots & z_{ps}(\mathbf{XA}^*) \end{bmatrix} \langle \mathbf{B}^{*'} \rangle$$

Cuando las matrices de variables externas \mathbf{X} y \mathbf{Z} son iguales a la matriz identidad \mathbf{I} :

$$g\langle \mu \rangle = [\mathbf{diag}(\mathbf{A}^*)] \langle \mathbf{B}^{*'} \rangle$$

Lo cual es equivalente a realizar una regresión generalizada de todas las columnas (simultáneamente) de \mathbf{Y} sobre las columnas de la matriz $[\mathbf{diag}(\mathbf{A}^*)]$ para estimar la matriz de parámetros \mathbf{B}^* .

³ Para estimar los valores iniciales \mathbf{A}^{*0} se puede proceder de la siguiente manera: Sea $g\langle \mu \rangle = \mathbf{CD}'$, donde $\mathbf{C} = (\mathbf{XA}^{*0})$. Estimemos $\mathbf{C}_{n \times 2}$ aplicando un Análisis de Coordenadas Principales sobre la matriz de similaridades de la matriz de datos \mathbf{Y} , la cual puede obtenerse aplicando el coeficiente de Jaccard. Obtenida la estimación $\hat{\mathbf{C}}$ podemos estimar \mathbf{A}^{*0} aplicando mínimos cuadrados ordinarios, de donde $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{XA}^{*0} \Rightarrow \hat{\mathbf{A}}^{*0} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\hat{\mathbf{C}}$.

Etapa 2: Se estiman los parámetros de la matriz \mathbf{A}^* correspondientes a los n individuos en la matriz de datos \mathbf{Y} , utilizando los parámetros b_{jk} de la matriz \mathbf{B}^* estimados en la etapa 1, a través del siguiente sistema de ecuaciones:

$$g\langle \mu' \rangle = \langle (\mathbf{ZB}^*)\mathbf{A}^* \mathbf{X}' \rangle = [\mathbf{X} \otimes (\mathbf{ZB}^*)] \langle \mathbf{A}^* \rangle = [x_{ij}(\mathbf{ZB}^*)] \langle \mathbf{A}^* \rangle$$

La resolución de ese sistema de ecuaciones, es equivalente a la realización de la regresión generalizada de todas las filas (simultáneamente) de la matriz \mathbf{Y} sobre las columnas de la matriz $[x_{ij}(\mathbf{ZB}^*)]$. Cuando $\mathbf{X} = \mathbf{Z} = \mathbf{I}$ entonces:

$$g \langle \mu' \rangle = [\text{diag}(\mathbf{B}^*)] \langle \mathbf{A}^* \rangle$$

Ese procedimiento bietápico se realiza iterativamente hasta que las estimaciones de los parámetros de las matrices \mathbf{A}^* y \mathbf{B}^* no difieran significativamente entre iteraciones sucesivas.

Para medir la bondad del ajuste se puede usar la Deviance al igual que en los modelos lineales generalizados y también el porcentaje de individuos bien clasificados.

Una vez estimadas las matrices de parámetros \mathbf{A}^* y \mathbf{B}^* se procede a introducir las restricciones de ortonormalidad para luego realizar la factorización Biplot. Para ello se realiza la descomposición en valores singulares, tal que permita redefinir las matrices de marcadores fila (\mathbf{MF}) y marcadores columna (\mathbf{MC}) a utilizar sobre la representación Biplot:

$$g(\hat{\mu}) = \mathbf{X}(\hat{\mathbf{A}}^* \hat{\mathbf{B}}^*)\mathbf{Z}' = \mathbf{X}(\mathbf{U}\Sigma^s)(\Sigma^{1-s}\mathbf{V}')\mathbf{Z}' = [\mathbf{X}(\mathbf{U}\Sigma^s)] [\Sigma^{1-s}\mathbf{V}')\mathbf{Z}'] = \quad (9)$$

$$(\mathbf{MF})(\mathbf{MC}')$$

Dicha descomposición corresponde a la descomposición en valores singulares generalizada la cual utiliza métricas diferentes de la identidad en los espacios fila y columna (Greenacre, 1984).

4 - DIFERENTES REPRESENTACIONES DE LOS BIPLLOT CON INFORMACION EXTERNA

Una vez estimadas en el modelo (7) las matrices de parámetros \mathbf{A}^* y \mathbf{B}^* , el problema del ajuste de los Biplots con Información Externa se reduce a la representación elegida, ya que como se detalla a continuación se pueden obtener cuatro representaciones diferentes que nos permitirán obtener indicadores de las relaciones entre dos de las matrices \mathbf{X} , \mathbf{Y} y \mathbf{Z} o entre las tres simultáneamente.

Supongamos que las matrices \mathbf{X} , \mathbf{Y} y \mathbf{Z} se han estandarizado, de donde las matrices producto $[\mathbf{X}'\mathbf{X}]$, $[\mathbf{X}'\mathbf{Y}]$, $[\mathbf{Z}'\mathbf{Z}]$, $[\mathbf{Z}'\mathbf{Y}]$ corresponden respectivamente a las matrices de correlaciones \mathbf{R}_{xx} , \mathbf{R}_{xy} , \mathbf{R}_{zz} y \mathbf{R}_{zy} (\mathbf{R}_{xy} por ejemplo denota la matriz de correlaciones entre las variables en las matrices \mathbf{X} e \mathbf{Y}).

Las diferentes representaciones Biplot conducen a la obtención de los siguientes indicadores de las relaciones entre las matrices \mathbf{Y} , \mathbf{X} y \mathbf{Z} :

a) **Indicadores de las relaciones entre las variables en las matrices \mathbf{Y} y \mathbf{X}** a través de la representación Biplot de la matriz de parámetros en el siguiente modelo que resulta de la reordenación de las matrices en el modelo (7):

$$g(\mu) = \mathbf{X}(\mathbf{A}^* \mathbf{B}^{*'} \mathbf{Z}') = \mathbf{X}(\mathbf{A}^* \mathbf{D}') \quad \text{siendo} \quad \mathbf{D} = \mathbf{ZB}^*$$

de donde la matriz de parámetros a estimar ($\mathbf{A}^* \mathbf{D}'$) igual a:

$$(\hat{\mathbf{A}}^* \hat{\mathbf{D}}') = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y} = \mathbf{S}_{xx}^{-1} \mathbf{S}_{yx} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{R}_{yx}$$

Esa matriz de parámetros es equivalente a la *matriz ponderada* de coeficientes de correlación \mathbf{R}_{yx} , cuando la matriz de pesos corresponde a la inversa de la matriz de correlaciones \mathbf{R}_{xx} . Así tenemos que, de la representación Biplot de la matriz de coeficientes de regresión ($\hat{\mathbf{A}}^* \hat{\mathbf{D}}'$) se pueden obtener indicadores de las relaciones entre el conjunto de variables \mathbf{Y} y el conjunto de variables externas \mathbf{X} .

b) **Indicadores de las relaciones entre los perfiles de los individuos en la matriz \mathbf{Y} y las variables en la matriz \mathbf{Z}** a través de la representación Biplot de la matriz de parámetros en el siguiente modelo:

$$g(\mu') = \mathbf{Z}(\mathbf{B}^* \mathbf{A}^* \mathbf{X}') = \mathbf{Z}(\mathbf{B}^* \mathbf{C}') \quad \text{siendo} \quad \mathbf{C} = \mathbf{XA}^*$$

de donde la matriz de parámetros a estimar igual a:

$$(\hat{\mathbf{B}}^* \hat{\mathbf{C}}') = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}'\mathbf{Y}' = \mathbf{R}_{zz}^{-1} \mathbf{R}_{y'z} \quad (11)$$

siendo esa matriz similar a la *matriz ponderada* de coeficientes de correlación $\mathbf{R}_{y'z}$, cuando la matriz de pesos corresponde a la inversa de la matriz de correlaciones \mathbf{R}_{zz} , pudiendo obtener de la representación Biplot de la matriz

$(\hat{\mathbf{B}} * \hat{\mathbf{C}}')$ indicadores de las relaciones entre los perfiles de los individuos en la matriz \mathbf{Y} y el conjunto de variables externas \mathbf{Z} .

c) **Indicadores de la relación entre los perfiles de los individuos en la matriz \mathbf{Y} y los conjuntos de variables externas en las matrices \mathbf{X} y \mathbf{Z}** a través de la representación Biplot de la matriz de parámetros en el siguiente modelo:

$$[g(\mu) \mathbf{Z} (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}] = \mathbf{X} (\mathbf{A} * \mathbf{B}'^*) \quad \text{siendo} \quad \mathbf{R}'_{y'z} = [g(\mu) \mathbf{Z} (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}]$$

De donde:

$$(\hat{\mathbf{A}} * \hat{\mathbf{B}}'^*) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{R}'_{y'z} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{R}_{(y'z),x} \quad (12)$$

siendo esa matriz similar a la *matriz ponderada* de coeficientes de correlación entre $\mathbf{R}_{y'z}$ y \mathbf{X} , cuando la matriz de pesos corresponde a la inversa de la matriz de correlaciones \mathbf{R}_{xx} .

Así tenemos que, de la representación Biplot de la matriz de coeficientes de regresión $(\hat{\mathbf{A}} * \hat{\mathbf{B}}'^*)$ se pueden obtener indicadores de las relaciones entre los perfiles de los individuos en la matriz \mathbf{Y} y los conjuntos de variables externas \mathbf{Z} y \mathbf{X} .

d) **Indicadores de la relación entre las variables en la matriz \mathbf{Y} y los conjuntos de variables externas en las matrices \mathbf{X} y \mathbf{Z}** a través de la representación Biplot de la matriz de parámetros en el siguiente modelo:

$$[g(\mu') \mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}] = \mathbf{Z} (\mathbf{B}' * \mathbf{A}^*) \quad \text{siendo} \quad \mathbf{R}'_{yx} = [g(\mu') \mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}]$$

de donde:

$$(\hat{\mathbf{B}} * \hat{\mathbf{A}}^*) = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}' \mathbf{R}'_{yx} = \mathbf{R}_{zz}^{-1} \mathbf{R}_{(yx),z} \quad (13)$$

siendo esa matriz similar a la *matriz ponderada* de coeficientes de correlación entre \mathbf{R}_{yx} y \mathbf{Z} , cuando la matriz de pesos corresponde a la inversa de la matriz de correlaciones \mathbf{R}_{zz} , luego de la representación Biplot de la matriz $(\hat{\mathbf{B}} * \hat{\mathbf{A}}^*)$ se pueden obtener indicadores de las relaciones entre las variables en las matrices \mathbf{Y} , \mathbf{Z} y \mathbf{X} .

Para realizar cualquiera de esas cuatro representaciones Biplot se hallan las coordenadas para las matrices de marcadores filas (**MF**) y marcadores columnas (**MC**), a través de la Descomposición en Valores Singulares Generalizados (Greenacre, 1984) de la matriz de coeficientes de regresión a estimar ($\hat{\mathbf{A}} * \hat{\mathbf{D}}'$), ($\hat{\mathbf{B}} * \hat{\mathbf{C}}'$), ($\hat{\mathbf{A}} * \hat{\mathbf{B}}^*$) y ($\hat{\mathbf{B}} * \hat{\mathbf{A}}^*$) (las cuales de manera genérica denotaremos $\hat{\mathbf{R}}$), referida a métricas específicas en los espacios fila y columna, o sea:

$$[\mathbf{R}_{tt}^{-1/2} (\hat{\mathbf{R}}) \mathbf{R}_{ww}^{-1/2}] = \mathbf{U} \Sigma^s \Sigma^{1-s} \mathbf{V}'$$

Sustituyendo respectivamente las correspondientes matrices **t** y **w** de acuerdo a cada una de las antes citadas cuatro representaciones Biplot, tenemos que:

$$\mathbf{MF} = (\mathbf{R}_{tt}^{-1/2} \mathbf{U} \Sigma^s) \text{ siendo } \mathbf{t} = \mathbf{Y}, \mathbf{Y}', (\mathbf{Y}'\mathbf{Z}) \text{ o } (\mathbf{Y}\mathbf{X}) \quad (14)$$

$$\mathbf{MC} = (\mathbf{R}_{ww}^{-1/2} \mathbf{V} \Sigma^{1-s}) \text{ siendo } \mathbf{w} = \mathbf{X} \text{ o } \mathbf{Z} \quad (15)$$

5 – INTERPRETACION DE LOS BIPLOTS CON INFORMACION EXTERNA

De acuerdo a las *propiedades clásicas de los marcadores*, la interpretación de los Biplots con Información Externa se basa en principio en las propiedades geométricas del producto interno entre marcadores fila (**MF**) y columna (**MC**). Sin embargo, considerando que la aproximación se realiza a través del ajuste de modelos bilineales se deben considerar también sus *relaciones con los coeficientes de regresión* del análisis de regresión múltiple, y con *los coeficientes de correlación Intraset e Interset* del Análisis de Correlaciones Canónicas (Ter Braak, 1990), tal cual se resume en la tabla 1.

Tabla 1.- Interpretación de los Marcadores en los Biplot con Información Externa

<i>Tipos de Marcadores, Propiedades e Interpretaciones</i>	
Marcadores Fila Tipo 1: $MF_1 = (R_{TT}^{-1/2}U)$ siendo $T = Y, Y', (Y'Z), (YX)$	
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Baja calidad de representación 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Aproximan la matriz de correlaciones intraset entre las variables $(Y, Y'), (Y', Y'^*), (R'_{y'z}, R'^*_{y'z}), (R'_{yx}, R'^*_{yx})$ ▪ La distancia euclídea entre marcadores fila aproxima la distancia de Mahalanobis entre puntos fila en T.
Marcadores Fila Tipo 2: $MF_2 = (R_{TT}^{-1/2}UD)$ siendo $T = Y, Y', (Y'Z), (YX)$	
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Alta calidad de representación 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Aproximan la matriz de correlaciones interaset entre las variables $(Y, X^*), (Y', Z^*), (R'_{y'z}, X^*), (R'_{yx}, Z^*)$. ▪ Aproximan la proporción de varianza de T que se puede predecirse a través de las variables canónicas X* o Z* ▪ La distancia euclídea entre marcadores fila aproxima la distancia entre puntos fila en T. <ul style="list-style-type: none"> ▪ Hacen posible superponer sobre el gráfico regiones de predicción para las variables T
Marcadores Columna Tipo 1: $MC_1 = (R_{ww}^{-1/2}VD)$, donde $w = X$ or Z	
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Alta calidad de representación 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Aproximan la matriz de correlaciones interaset entre las variables $(X, Y^*), (Z, Y'^*)$ <ul style="list-style-type: none"> ▪ Aproximan la proporción de varianza de las variables X o Z que se puede predecir a través de las variables canónicas Y* o Y'^* <ul style="list-style-type: none"> ▪ Aproximan el coeficiente de determinación R^2. ▪ Son equivalentes a la contribución de el factor al elemento.
Marcadores Columna Tipo 2: $MC_2 = (R_{ww}^{-1/2}V)$, donde $w = X$ or Z	
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Baja calidad de representación . 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Aproximan la matriz de correlaciones intraset entre las variables $(X, X^*),$ o (Z, Z^*). ▪ Hacen posible superponer sobre el gráfico escalas de predicción para las variables Y

Paralelamente, en el caso de los Biplots ajustados a través de modelos bilineales generalizados, se debe considerar también en la interpretación de los marcadores la función link utilizada en el ajuste, razón por la cual es necesario analizar su geometría en términos de proyecciones sobre los subespacios de mejor ajuste en el sentido de los mínimos cuadrados, pero para cada columna de la matriz Y, tal como lo hacen Gower & Hand (1996) para los Biplots de Regresión Lineal, Vicente-Villardón y Galindo (1998) para los Biplots Logísticos (con función link logit) y Cárdenas, Galindo y Vicente-Villardón (2001, p. 336) para los Biplots en cuyo ajuste se utiliza cualquier función link.

Esos autores demuestran que la geometría en el ajuste de los Biplots a través de modelos bilineales generalizados (o clásicos), es similar al ajuste de una curva (o plano) de regresión para cada columna de la matriz \mathbf{Y} , lo que conlleva a la obtención de una superficie de respuesta no necesariamente lineal, cuya proyección sobre un subespacio de baja dimensión es siempre lineal.

De allí que es posible reconstruir los datos al igual que en los Biplots Clásicos, o sea, a través del producto interno de la fila i de la matriz de marcadores fila \mathbf{MF} y la columna j de la matriz de marcadores columna \mathbf{MC} , admitiendo por ende una representación gráfica a través de la proyección ortogonal de los marcadores fila (\mathbf{mf}_i) sobre los marcadores columna (\mathbf{mc}_j) y viceversa. Sin embargo, hay que tener especial cuidado en su interpretación la cual dependerá de la función link utilizada en el ajuste.

Por ejemplo, en el caso de los Biplots Logísticos la proyección de la curva de respuesta sobre el espacio de mejor ajuste, conducirá a la obtención de ejes biplot cuya longitud dependerá de la pendiente de dicha curva. De esa manera se pueden obtener ejes más cortos para aquellas variables con mayor pendiente, siempre que la variable tenga un buen ajuste y alta calidad de representación. Por esa razón, en contraste con los Biplots Clásicos, los ejes más cortos podrían reflejar variables con alta calidad de representación, siempre que las mismas tengan a su vez un buen ajuste. Paralelamente la proyección ortogonal de los marcadores fila sobre los marcadores columna aproximará, salvo un factor de escala, la probabilidad de presencia o ausencia de cada variable en cada uno de los individuos.

6 – UNA APLICACIÓN

Se utilizan los datos del ejemplo de Gower & Hand (1996, p. 75) correspondientes a 20 granjas y 4 variables categóricas: nivel de humedad (**h1**, **h2**, **h3**, **h4**), tipo de granja (granja normal **gn**, granja biológica **gb**, granja hobby **gh**, granja conservacionista **gc**), uso de la granja (producción **u1**, uso intermedio **u2**, pasto **u3**) y nivel de abono (ausencia **a0**, bajo **a1**, moderado **a2**, regular **a3**, alto **a4**).

La matriz original fue utilizada por Gower y Hand, para la aplicación de un análisis de correspondencias múltiples, luego para el ajuste de un Biplot Logístico con Información Externa se debe transformar en una matriz indicadora (20x16) constituida por datos dicotómicos de presencia-ausencia, tal como se muestra en la tabla 2.

Tabla 2. Matriz Indicadora de Datos Y (20x16)0

Granja	h1	h2	h3	h4	Gn	Gb	Gh	Gc	U1	u2	U3	A0	A1	A2	A3	A4
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
2	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
3	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
4	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
5	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
6	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
7	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
8	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
9	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
10	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
11	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
12	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
13	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
14	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
15	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
16	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
17	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0
18	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0
19	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0
20	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0

En esta aplicación suponemos con fines únicamente ilustrativos, que se dispone de información externa para las granjas (matriz \mathbf{X}) constituida por el nivel de abono en los suelos: $\mathbf{a0}$, $\mathbf{a1}$, $\mathbf{a2}$, $\mathbf{a3}$, $\mathbf{a4}$, y que no se dispone información externa para las variables por lo que $\mathbf{Z} = \mathbf{I}$, de allí que las últimas 5 columnas de la tabla 2 constituyen la matriz \mathbf{X} (Cárdenas, Noguera, Galindo y Vicente-Villardón, 2002).

Se ajusta a los datos un Biplot Logístico, para cada una de las categorías considerando un término independiente, ya que por tratarse de datos presencia-ausencia su centrado no tiene sentido:

$$g(\mu) = \text{logit}(p) = \log [p / (1-p)] = \mathbf{X} (\mathbf{A}^* \mathbf{B}^*), \quad \text{siendo } p = (e^{\eta} / 1 + e^{\eta})$$

$$\text{de donde: } g(\mu) = \text{logit}(p) = \mathbf{X} (a_{i0} b_{j0} + a_{i1} b_{j1} + a_{i2} b_{j2})$$

A tal efecto, se elaboró un sencillo programa en MATLAB utilizando en la estimación el método expuesto en el apartado 3. Los valores iniciales $\langle \mathbf{A}^{*0} \rangle$ se obtuvieron mediante la ordenación de las filas de la matriz \mathbf{Y} a través de un Análisis de Coordenadas Principales, aplicado a la matriz de similitudes obtenida del coeficiente de Jaccard (Cuadras, 1996, p. 297). Con éstos valores se calculan los iniciales para $\langle \mathbf{B}^{*0} \rangle$ y luego se inicia el proceso iterativo de Newton-Raphson hasta que converja. Los valores estimados se muestran en la tabla 3.

Tabla 3. Parámetros estimados para las matrices A* y B*, Deviance, Bien Clasificados y Calidad de Representación

Gr.	a_{10}	a_{11}	a_{12}	Var	b_{10}	b_{11}	b_{12}	Dev	BC	CR
1	1	3.88	-0.24	H1	-0.08	-0.02	0.46	25.19	65	80
2	1	5.04	-0.84	H2	-3.15	0.49	-0.52	16.59	85	337
3	1	8.35	-0.5	H3	-0.09	-0.40	1.72	11.16	90	299
4	1	10.35	0.62	H4	-1.01	-2.29	-1.51	14.07	85	995
5	1	1.04	-0.62	GN	-1.45	0.14	-0.05	22.04	75	260
6	1	3.75	0.18	GB	-0.91	-0.03	0.86	15.78	85	134
7	1	0.42	-0.2	GH	1.05	-0.22	2.14	18.04	75	145
8	1	0.09	0.47	GC	-45.49	3.59	-24.64	0.00	70	999
9	1	0.14	-1.49	U1	-1.57	-0.37	-1.08	19.38	65	996
10	1	0.14	-1.49	U2	-2.36	1.72	0.14	15.37	60	899
11	1	0.44	-0.82	U3	2.06	-2.39	1.02	14.99	75	993
12	1	2.18	-0.06							
13	1	1.11	-1.96							
14	1	-0.58	-2.24							
15	1	0.99	-1.98							
16	1	0.51	-1.79							
17	1	4.12	-4.57							
18	1	0.37	-3.42							
19	1	0.52	-2.91							
20		0.52	-2.91							

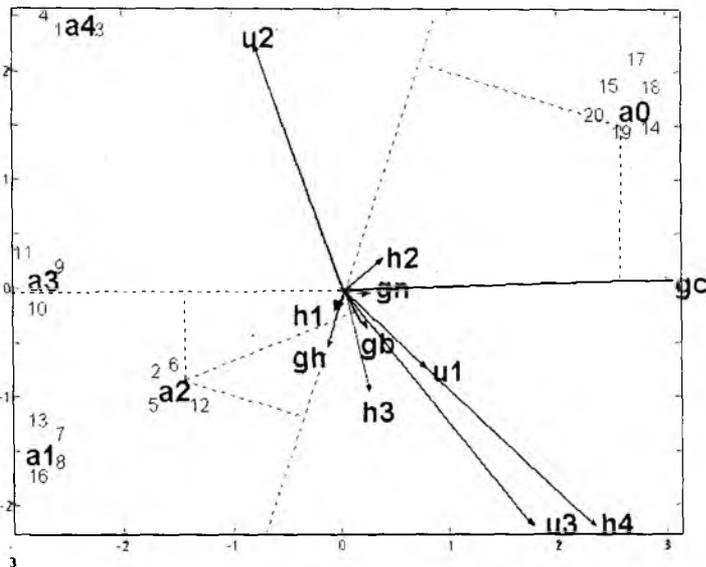
Gr= granja, Var= variable, Dev= Deviance,

BC= Porcentaje de granjas bien clasificadas,

CR= (CRx1000)= Calidad de Representación acumulada para los ejes 1 y 2.

Para medir la bondad del ajuste se puede usar la Deviance, observando en la tabla 3 que la misma no es significativa (p valor > 0.10) para las variables **h1**, **h2**, **h3**, **gn**, **gb**, **gh**, **gc**, lo que es indicador de un mal ajuste. De acuerdo a las calidades de representación sobre el Biplot las variables **h1**, **h3**, **gb**, **gh** y **gn** tienen baja calidad de representación en el plano constituido por los ejes 1 y 2. Paralelamente también se usan los porcentajes de granjas bien clasificados, los cuales son relativamente altos para todas las variables, por lo que la predicción de presencia-ausencia de cada variable para cada una de las granjas, es bastante aproximada.

Figura 1. Representación del Biplot Logístico (ejes 1 y 2)



La siguiente figura corresponde a la representación SQRT- Biplot de la matriz de parámetros estimada ($\hat{A} * \hat{D}'$) cuando $Z = I$. La dirección de los ejes biplot está determinada por los parámetros b_{jk} cuyas estimaciones se muestran en la tabla 3.

La asociación entre las distintas variables, puede aproximarse a través del ángulo que forman entre sí observando:

- Fuerte asociación positiva entre los grupos de variables (**gb**, **h1**, **h4**, **u1**, **u3**), (**gh**, **h3**) y (**gn**, **gc**, **u1**, **h2**, **h4**) por lo que las predicciones se realizan en el mismo sentido.

- Fuerte asociación negativa entre las variables (**u1, u2**), (**gh, h2**) y (**h1, u3, u2**) por lo que las predicciones se realizan en sentido inverso.
- Ausencia de asociación entre las variables (**gn, gh, h4**), (**gc, h3, u2**) y (**h2, h4, u1**) luego sus predicciones son independientes.

Así mismo la proyección de los marcadores fila (**mf_i**) sobre los marcadores columna (**mc_j**), aproxima salvo un factor de escala, la probabilidad (p_{ij}) de presencia-ausencia de las variables externas (nivel de abono) para cada una de las 20 granjas, permitiendo así la ordenación y agrupación de las mismas de acuerdo al nivel de abono en 5 grupos:

- Grupo **a0** (ausencia de abono) conformado por las granjas 14, 15, 17, 18, 19 y 20.
- Grupo **a1** (bajo nivel de abono) conformado por las granjas 9, 10 y 11.
- Grupo **a2** (moderado nivel de abono) conformado por las granjas 2, 5, 6 y 12.
- Grupo **a3** (regular nivel de abono) conformado por las granjas 7, 8, 13 y 16
- Grupo **a4** (alto nivel de abono) conformado por las granjas 1, 3 y 4.

De la interpretación de los marcadores fila y columna para una factorización SQRT- Biplot de la matriz ($\hat{\mathbf{A}} * \hat{\mathbf{D}}'$), correspondientes en la tabla 1 a la raíz cuadrada de los marcadores fila tipo 2 (**MF₂**) y columna tipo 1 (**MC₁**), se puede concluir en líneas generales (interpretando con precaución las variables con Deviance no significativa y mal clasificadas), que los resultados obtenidos de la figura 1 son aproximados a los obtenidos por Gower & Hand (1996), Vicente-Villardón y Galindo (1998), Cárdenas (2000) y Cárdenas, Galindo y Vicente-Villardón (2001), reflejando aproximadamente la estructura de la matriz de datos original, o sea:

- Las granjas normales **gn** presentan fuerte asociación positiva con las variables **u1, u3, h1** y **h4**. Las proyecciones de los puntos granjas sobre **gn** revelan fuerte correlación con Ausencia de abono **a0** y muy poca con altos niveles de abono **a4**.
- Las granjas biológicas **gb** presentan fuerte asociación positiva con las variables humedad baja y moderada **h1** y **h3** y usos **u1** y **u3**. Las proyecciones de

los puntos granjas sobre **gb** revelan mayor correlación con niveles de abono moderados **a1** y **a2** y muy poca con **a4**.

- Las granjas para hobby **gh** presentan fuerte asociación positiva con las variables humedad baja y moderada (**h1** y **h3**). Las proyecciones de los puntos granjas sobre **gh** revelan mayor correlación con niveles de abono moderados **a1** y **a2** y muy poca con **a4** y **a0**.
- Las granjas conservacionistas **gc** presentan fuerte asociación positiva con **h2**. Las proyecciones de los puntos granjas sobre **gc** revelan mayor correlación con la ausencia de abono **a0** y muy poca con **a4**.

7 - DISCUSION

A través del desarrollo de este trabajo se ha demostrado que es posible realizar el ajuste de un Biplot con Información Externa a través de modelos bilineales generalizados, siendo su geometría similar a la de un ajuste de regresión, mientras que su interpretación depende de la función link utilizada en el ajuste.

La aplicabilidad del método de estimación propuesto puede ser de gran utilidad en el campo de la psicología, educación, economía, biología, política, etc., ya que permite ordenar los individuos y/o variables de acuerdo a ciertas variables externas.

Aunque la aplicación aquí realizada se hace utilizando un sencillo programa en MATLAB, en la actualidad trabajamos en la elaboración de un software que permita a los investigadores interesados, aplicarlo al análisis de datos de su interés con variables cuya distribución pertenezca a la familia exponencial.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Blázquez, A. (1998), *Análisis Biplot basado en Modelos Lineales Generalizados*, Tesis Doctoral, Universidad de Salamanca, España.
- Baker, F. (1992), *Item Response Theory*, Marcel Dekker, Inc. New York.
- Bradu, D. & Gabriel, K. R. (1978), "The Biplot as a Diagnostic Tool for Models of Two-Way Tables", *Technometrics* 20, (1): 47-68.
- Cárdenas, O. C. (2000), *Biplot con Información Externa basado en Modelos Lineales Generalizados*, Tesis Doctoral, Universidad de Salamanca, España.

- Cárdenas, Galindo y Vicente-Villardón (2001), "Estimación máximo verosímil en aproximaciones Biplot", *Revista Venezolana de Análisis de Coyuntura* VII: (2): 333-347, Facultad de Ciencias Económicas y Sociales, Universidad Central de Venezuela.
- Cárdenas, Noguera, Galindo y Vicente-Villardón (2002), "El uso de información Externa en Aproximaciones Biplot", LII Convención Anual de AsoVAC, Acta Científica Venezolana, 53 (Sup. 1), Tomo II, Barquisimeto, 386.
- Cuadras, C. (1996), *Métodos de Análisis Multivariante*, EUB, S. L., Barcelona, España.
- Choulakian, V. (1996), "Generalized Bilinear Models", *Psychometrika* 61, (2), 271- 283.
- Denis, J. B (1991), "Ajustements de Modelles Lineaires et Bilineaires sous Contraintes Lineaires avec Donnes Manquantes". *Statistique Applique*, XXXIX (2), 5-24.
- Falguerolles, A. (1995). "Generalized Bilinear Models and Generalized Biplots: Some Examples". *Publications du Laboratoire de Statistique et Probabilites*. Université Paul Sabatier. Toulouse.
- Gabriel, K. R (1971). "The Biplot-graphic display of matrices with applications to principal component analysis". *Biometrika* 58, 453-467.
- Gabriel, K. R. (1998). "Generalised Bilinear Regression". *Biometrika*, 85, 3, 689-700.
- Gabriel, K. R.; Galindo, M. P. y Vicente-Villardón, J. L. (1998). "Use of Biplots to diagnose Independence Models in Three-Way Contingency Tables". (M. Greenacre and J. Blasius, eds.). *Visualization of Categorical Data*. Academic Press. London
- Galindo, M. P. (1986). "Una alternativa de representación simultanea: HJ-Biplot". *Questiio* 10, 1, 13-23.
- Gollob, H. (1968). "A statistical model wich combines features of factor analytic and analysis of variance techniques". *Psichometrika*, 33: 73-115.
- Gower, J. C. (1992). "Generalized Biplots". *Biometrika* 79, 475-493.
- Gower, J. C. & Harding, S. (1988). "Nonlinear Biplots". *Biometrika*, 75, 445-455.
- Gower, J. C. & Hand, D. J. (1996). *Biplots*. Chapman & Hall. London.
- Householder, A. S. & Young, G. (1938). "Matrix Approximation and Latent Roots". *American Mathematics Monthly*, 45: 165-171.
- Greenacre, M. J. (1984). *Theory and applications of correspondence analysis*. Academic Press. London.

- Nelder, J. A., & Wedderburn, R. W. (1972). "Generalized Linear Models". *Journal of the Royal Statistical Society A*, 135, 370-384.
- Ter Braak, C. J. F. (1986). "Canonical Correspondence Analysis: a new eigenvector technique for Multivariate Direct Gradient Analysis". *Ecology* 67 (5), 1167-1179.
- Ter Braak, C. J. F. (1990). "Interpreting Canonical Correlation Analysis through Biplots of Structure Correlation and Weight". *Psychometrika* 55 (3), 516-531.
- Van Eeuwijk, F. (1995). "Multiplicative Interaction in Generalized Linear Models". *Biometrics*, 51, 1017-32
- Vásquez, M. (1995). *Aportaciones al Análisis Biplot: Un enfoque algebraico*. Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca.
- Vicente-Villardón, J. L. & Galindo, M. P. (1998). Biplot Externo para datos presencia-ausencia basado en superficies logísticas de respuesta. Dpto. de Estadística. Universidad de Salamanca.
- Vicente-Villardón, J. L., Galindo, M. P. y Cárdenas, O. (2000). "Biplot para Datos Binarios basado en Modelos Logísticos de Respuesta". XXV Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa. Servicio de Publicaciones, Universidad de Vigo, 269-270.