Revista Venezolana de Análisis de Coyuntura, 2004, Vol. X, No. 1 (ene-jun), pp. 91-110
recibido: 27-10-03 / arbitrado: 22-01-04

COMPUTACIÓN EMERGENTE Y SU INFLUENCIA EN LAS CIENCIAS ECONÓMICAS, CASO DE ESTUDIO: ALGORITMOS GENÉTICOS

Rafael Rodríguez Toledo*
ESCUELA DE ECONOMÍA, UCV

Resumen:

Apoyadas bajo las capacidades de los computadores modernos, los algoritmos genéticos se presentan como una técnica aleatoria dirigida, que imita el proceso de formación de las especies y aplica los mismos en problemas de búsqueda y optimización. Este tipo de problema es común en las Ciencias Económicas y Sociales, donde la estructura de espacios de búsqueda y la interdependencia de las variables dificultan el proceso de investigación. En el presente trabajo se realiza una breve introducción a los algoritmos genéticos, presentando algunos ejemplos sencillos donde se comprueba su operatividad en algunos problemas típicos.

Palabras claves: Simulación, computación emergente, algoritmos genéticos, problemas típicos, Ciencias Económicas y Sociales.

COMPUTACIÓN EMERGENTE

Bajo las palabras computación emergente se agrupan un conjunto de técnicas muy especializadas, diseñadas para el manejo de problemas complejos pero con la singularidad de trabajar con operaciones que imitan el comportamiento de la naturaleza. En general, todos los seres vivos que pueblan la tierra han logrado resolver problemas complejos de forma eficiente no sólo en sus asociaciones con otras especies, sino también por la especialización de los órganos que conforman a cada uno de ellos.

Muchos de los problemas que se manejan en distintas disciplinas presentan una complejidad abrumadora, difícil de modelar en muchos casos mediante las ciencias formales; si de alguna manera se estableciera un paralelo entre estos problemas y el funcionamiento de muchos fenómenos naturales, sería posible entonces resolver los mismos, imitando los mecanismos naturales. Quedaría entonces, formalizar el comportamiento de los mecanismos naturales y aplicarlos sobre el fenómeno en estudio.

* correo electrónico: rotoledo@tutopia.com

En este orden de ideas, y gracias a la aparición de ramas científicas asociadas con las ciencias de la computación, se han desarrollado un conjunto de técnicas que, apoyadas en las capacidades de los computadores modernos, logran imitar procesos naturales. Redes Neuronales, Algoritmos Genéticos, Recosido Simulado, etc. son algunas técnicas que desde algunos años se aplican en la solución de problemas importantes, no sólo en las ciencias económicas, sino también en otras ramas como ingeniería.

La economía es una rama difícil del saber humano, no solo por su objeto de estudio, sino también por la dinámica del comportamiento social del ser humano. Un estudio económico se enfrenta en general a un conjunto de variables inciertas, influenciadas por nuestra dinámica biológica y cultural, donde las preferencias humanas parecieran dictar el comportamiento del mercado.

Ante un ambiente tan complejo y dinámico, la formulación de conclusiones y formalizaciones es un trabajo posterior al fenómeno en estudio, quedando entonces relegado al pasado la explicación del mismo. Muy importante para un país en su desenvolvimiento económico, pero tal vez demasiado tarde para una pequeña empresa que trabaja en un ambiente muy competitivo.

Estas mismas condiciones de complejidad, dinamismos y cambios la ha enfrentado la naturaleza en múltiples ocasiones. Muchas especies han logrado evolucionar hasta nuestros días con los mecanismos sencillos descritos por Charles Darwin. El único factor que no poseen los actores de una economía son los millones de años de evolución requerido para la formación de las especies; al menos no naturalmente pero si basados en la velocidad de los computadores modernos.

Los computadores modernos ofrecen actualmente la oportunidad de superar la “barrera del tiempo”, no solo gracias a su velocidad de cálculo, sino también por la posibilidad de “paralelizar” operaciones. Los algoritmos genéticos y otras herramientas propuestas por la computación emergente presentan facilidades para operar en ambientes paralelos y distribuidos, lo cual permite “simular ambientes de evolución”, brindando la oportunidad de estudiar un problema no sólo en sus condiciones presentes, sino también en sus posibles condiciones futuras; además de las respuestas inmediatas o en tiempo real.

DEFINICIONES

Supóngase que se desea resolver un problema $\Pr o$ formado por un conjunto de funciones $f_i(x) \in F$ y un conjunto $Q = \{x / c_j(x)\}$, donde F es el conjunto de todas las funciones y Q el conjunto de vectores x que cumplen ciertas restricciones, con $i = 1,..,n$ y $j = 1,..,m$. El dominio de cada función esta formado por el vector $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$ el cual podría ser una solución para el problema $\Pr o$. Sobre cada función $f_i(x)$ se imponen una o varias condiciones $H(f_i(x))$, por lo cual el problema a tratar queda caracterizado por $\Pr o = \left\{ x / f_i(x) \in F, x \in Q, H(f_i(x)), i = 1,...,n; j = 1,...,m \right\}$. Un problema típico sería $H(f(x)) = \{\min \quad f(x)\}$, donde $c_j(x) = g_j(x) \leq 0$, $g_j \in \Re$; en el mismo se busca minimizar la función $f(x)$ sujeta a un conjunto de restricciones cuyo punto óptimo es $\bar{x}$. No necesariamente el punto óptimo es único, y es posible que el problema requiera cumplir múltiples objetivos.

Dependiendo de la naturaleza del problema $\Pr o$, se pueden usar muchas estrategias para resolverlos. En el caso particular de los algoritmos genéticos, se debe establecer el paralelo entre los procesos naturales que rigen las especies y el problema $\Pr o$, tal que al aplicar el algoritmo genético, su convergencia sea efectivamente una solución del problema original.

Se denota a $I = \{x\}$, como el conjunto de individuos. Cada individuo $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$ está formado por elementos x_i los cuales representan una variable de decisión para el problema original $\Pr o$. Cada variable de decisión a su vez está constituida por una "carga genética" o grupo de símbolos que la definen. Por ejemplo $x_i = 2$ implica que el símbolo de la variable x_i es dos. El conjunto de símbolos en este caso sería $\mathrm{Sb} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Si x_i se representa en base binaria el conjunto de símbolos sería $Sb = \{0,1\}$.

Una población $P \subseteq I$, es una agrupación de instancias de individuos x, sin importar si cumple o no las condiciones del problema $\Pr o$. Esto significa que en una población posiblemente podrían existir individuos que pertenezcan al conjunto $\Pr o$.

Se define la función de desempeño $D(x): I \to \Re$, como una función que va desde el conjunto de los individuos hasta un valor real. La definición de la función de desempeño tiene una importancia crucial en la preparación de un algoritmo genético, ya que ella es la expresión de adaptación del individuo, o en el contexto del problema, qué tan cerca se encuentra un individuo de la población a la solución del problema o punto óptimo.

La función de desempeño esta asociada con el ambiente sobre el cual opera la población. Usualmente se asume que el ambiente es una versión amplia del problema $\mathrm{Pr}\,o$ de tal forma de cubrir el espectro de soluciones factibles. Es fácil observar que si $P \cap Q \neq \phi$ entonces existirán soluciones factibles en el contexto del problema, si además $P \cap \mathrm{Pr}\,o \neq \phi$, entonces uno o más individuos representan una solución óptima. En el caso que $P \cap Q = \phi$, entonces no existe ninguna solución factible, por lo cual su función de desempeño tendrá un valor muy bajo o cero[1].

Para fijar este conjunto de ideas, supongamos el problema de $\max \quad f(x) = x^2$ con $x \in \Re$. El conjunto de individuos sería entonces $I = \{x / x \in R\}$, el problema $\mathrm{Pr}\,o = \{x / \max \quad f(x) = x^2, x - irrestricta$, $Q = \{x\}$, $H(f(x)) = \{\max \quad f(x)\}$. Dado que no hay restricciones, se puede usar cualquier valor de $x \in \Re$ de la recta real en la población P. Si $|P| = 4$ es una población de tamaño 4, un ejemplo de una población sería $P = \{2.75, -10.45, 1.2, 14.85\}$. Para la codificación de los genes de cada individuo se puede usar su representación binaria o decimal, dependiendo de los operadores de cruce a usar. La función de desempeño en este caso particular será $D(x) = f(x) = x^2$.

La evolución de la población P depende de tres operadores, los cuales son selección, cruce y mutación. El operador de selección $Selección : P \rightarrow IxI$ selecciona dos individuos de la población, con cierta probabilidad asociada con su

---

[1] En muchos casos, y dependiendo del espacio del búsqueda, es mas conveniente usar una función de desempeño que permita incluir a los individuos que no cumplen con ninguna de las restricciones. De esta forma se mantiene un conjunto de símbolos más amplio en la población, a la vez que se evita la convergencia prematura si el espacio de búsqueda es muy restrictivo.

valor de desempeño; mientras mayor sea su función de desempeño, mayor probabilidad de ser seleccionado un individuo[2].

El operador de cruce, Cruce: $IxI \rightarrow I$ toma dos individuos combinando sus símbolos con cierta probabilidad y genera un nuevo individuo cuyos símbolos son la composición de sus progenitores (e. g $cruce(2.75,10.45) = 12.75$).

El operador de mutación $Mutación : I \rightarrow I$, puede cambiar un símbolo de un individuo con una probabilidad asociada, usualmente la probabilidad[3] de cambio es muy pequeña (e. g $Mutación(2.75) = 2.73$).

De esta forma, con la función de desempeño, los operadores de selección, cruce y mutación, se establece un paralelo entre las operaciones observadas en la naturaleza y los problemas de optimización y búsqueda. En el cuadro1 se puede observar como se combinan los operadores hasta cubrir el criterio de convergencia.

Cuadro 1

Esquema general de los algoritmos genéticos

Establecer P y D
Repetir
$x^1, x^2 \leftarrow Selección(P)$
$x^3 \leftarrow Cruce(x^1, x^2)$
$x^3 \leftarrow Mutacion(x^3)$
$P \leftarrow P \cup \{x^3\}$
Hasta Convergencia

Un punto crucial no tratado en el algoritmo es la cardinalidad de la población. Si la población debe permanecer constante, entonces de debe establecer el criterio para la eliminación de uno o mas individuos de la misma. En el esquema del cuadro 1 se requiere eliminar únicamente un individuo.

---

2 Una función de probabilidad muy común es la selección a manera de ruleta.

3 En los paquetes generalmente se fija como 0.01, pero estos valores pueden modificarse.

El criterio de convergencia por lo general se asocia con la homogenización de la población. Cuando todos los individuos de la población P son iguales, se puede afirmar que el algoritmo ha terminado. Sin embargo, es posible adicionar otros criterios como el máximo número de iteraciones aceptadas o el error relativo entre dos soluciones, etc.

Aun cuando en apariencia el algoritmo genético realiza una búsqueda aleatoria, se puede demostrar que es una "búsqueda aleatoria dirigida", donde si se cumplen ciertas condiciones la población convergerá hacia la solución. Nótese que si la probabilidad de mutación o selección fuera 1, estaríamos ante una búsqueda completamente aleatoria.

Con el tiempo, han aparecido versiones mas elaboradas de los operadores genéticos que aprovechan mejor las características de ciertos problemas. Por ejemplo, si x e y son dos individuos de una población P, y su carga genética corresponde a los símbolos de los números reales ($x \in \Re$, $y \in \Re$), éntones es posible definir un cruce aritmético como:

$$r \sim U(0,1)$$
$$x' = rx + (1-r)y$$
$$y' = (1-r)x + ry$$

Esta operación de cruce permite trabajar con la representación de punto flotante del computador, a la vez que evita el retraso en el algoritmo por la conversión de dígitos a símbolos y viceversa. Otros cruces más específicos como los heurísticos aprovechan las características del espacio de restricciones y las integran en el operador, de esta forma se buscan mantener en el espacio de las restricciones a todos los individuos.

APLICACIONES

Una de las características más interesantes de los algoritmos genéticos es que no hace suposiciones previas sobre el espacio de búsqueda o el objetivo del problema. Esto permite tomar el problema original como "el ambiente" donde se desenvolverán los individuos, sin casi ningún "tratamiento matemático" y empezar a generar soluciones. Tal como se muestra en el cuadro 1, el esquema es muy general, permitiendo tratar una amplia gama de problemas de búsqueda y optimización.

En aquellas situaciones donde un análisis minucioso del fenómeno en estudio no esté al alcance de los investigadores, o donde las formulas involucradas posean estructuras irregulares o difíciles de tratar[4] por las herramientas probadas de las ciencias formales, los algoritmos genéticos pueden dar una respuesta. La respuesta del mismo no debe ser tomada como "la mejor", ya que esta técnica no ofrece una forma de comprobar la óptimalidad del problema tratado.

En las ciencias económicas y sociales los algoritmos genéticos se presentan como una herramienta basada en reglas de transición probabilísticas para abordar problemas muy complejos. La palabra "evolución" presente en esta técnica, ofrece la posibilidad de explorar en alguna medida las posibles soluciones de un problema, sin involucrar, en el caso de los problemas numéricos, toda la complejidad matemática propia del mismo.

Desde el punto de vista de los algoritmos genéticos, el problema se transforma en un "ambiente", y el proceso de búsqueda de la solución es una "evolución" que se genera a partir de soluciones iniciales[5]. Este punto de vista tiene la ventaja de prescindir de cualquier preconcepción inicial sobre el problema, siendo la "adaptación" la mejor expresión de una solución, sin establecer de manera determinística las reglas de cómo llegar a ella.

La expresión simbólica de los individuos a su ambiente, no sólo se limita a los problemas con evaluaciones numéricas[6]. Si bien este ha sido uno de los tipos de problemas con mayor número de aplicaciones, los algoritmos genéticos pueden ser aplicados a un espectro de aplicaciones mas amplia, que puede incluir simulaciones sociales.

Las ciencias sociales poseen una especial dificultad en el campo de investigación científica, ya que al evaluar el comportamiento de una sociedad se reúnen variables cuantitativas y cualitativas, mucha de ellas interdependientes,

---

[4] Ver ejemplo 1.

[5] En muchos algoritmos genéticos se usan individuos escogidos al azar, con la esperanza de que los mismos contengan la solución en una expresión genética (conjunto de símbolos), distribuida en la población.

[6] Los símbolos con los cuales se expresan a los números en cualquier base, son candidatos ideales para la representación simbólica de la carga genética de un individuo; en especial y dado que los computadores modernos funcionan en la mayoría de los casos con números binarios, usualmente se representan los individuos de un problema matemático con el conjunto de símbolos {0,1}.

cuyas relaciones son complejas de analizar. Muchos de los datos extraídos de las comunidades pueden ser expresiones parciales de las preferencias, costumbres o situaciones coyunturales de un subconjunto de ellas, que no refleja al promedio o una parte importante de la misma. Al evaluar las variables económicas en las sociedades se puede notar que los valores de las mismas no solamente corresponden a las actividades económicas, sino que se funden con un conjunto de factores políticos, culturales, geográficos, etc.

Ante la interdependencia de las variables, y el riesgo que implica la "simplificación"[7] de las mismas, los algoritmos genéticos ofrecen la alternativa de "adaptación". Al igual que en las funciones o modelos matemáticos, se debe elegir el conjunto de símbolos del espacio de búsqueda del problema a la vez que se debe escoger de forma adecuada la representación del "ambiente social". La dinámica social podría ser evaluada entonces en tiempo real, adaptándose los individuos a cada cambio de manera progresiva. Inclusive un comportamiento atípico de una economía (e. g caída de un mercado) puede ser considerado como una "catástrofe ambiental", la cual podrá ser evaluada por los individuos de la población de acuerdo a su adaptación a la misma[8].

EJEMPLOS

En la evacuación de los ejemplos mediante algoritmos genéticos se usó el toolbox Goat, de libre distribución y disponible en Internet. El mismo posee en su implementación todos los elementos relacionados con la búsqueda y optimización de esta técnica, a la vez, que al operar en el ambiente de Matlab permite independencia del sistema operativo.

---

[7] Evidentemente, inclusive los algoritmos genéticos presentarán simplificaciones, sin embargo, las restricciones propias de las ciencias formales (funciones diferenciables, continuos, convexas, etc.) para asegurar una solución pueden ser flexibilizadas mediante esta técnica.

[8] La simulación de estos eventos sociales es un área de aplicación muy atractiva ya que permite tomar previsiones en caso de incertidumbre a condiciones futuras del mercado.

1.) Minimización de una función no diferenciable y discontinua con dos mínimos locales. Considere una función $z(x,y)$ definida como:

$$z(x,y)=\begin{cases} 5\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2} & Si \quad (x-2)^2+(y-2)^2 \leq 4 \\ 3|x-5|+|y-5|+3 & Otro \end{cases}$$

La mayoría de las técnicas clásicas de optimización fallarán en la localización de los puntos mínimos de esta función debido a que la misma no es continua ni diferenciable. Una alternativa es el método de la bisección[9], la cual requiere la estimación del punto donde la función se hace cero. Otro método alternativo es una búsqueda aleatoria adaptativa (ARS[10]), la cual es una versión simplificada del método de recosido simulado. En ambos métodos se logra ubicar el punto mínimo como $z(2,2)=0$ (ver figura 1).

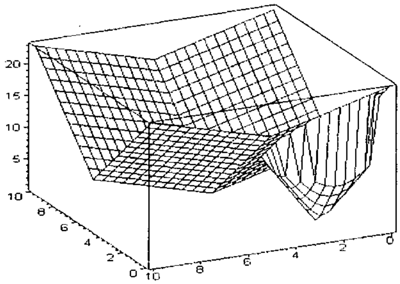
Otro método alternativo es una búsqueda aleatoria adaptativa (ARS[11]), la cual es una versión simplificada del método de recosido simulado. En ambos métodos se logra ubicar el punto mínimo como $z(2,2)=0$ (ver figura 1).

[9] El método de Newton y Secante no pueden ser usados en este problema, ya que requieren por lo menos una derivada.

[10] Adaptive random search.

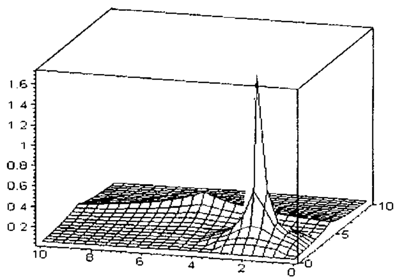
[11] Adaptive random search.

Figura 1
Función no diferenciable y discontinua con dos mínimos locales
$z(2,2)=0$ y $z(5,5)=3$



Al usar los algoritmos genéticos, se debe definir de manera conveniente la función de desempeño. En este caso, y verificado que la función no puede tomar valores negativos, se puede definir la función de desempeño como $D(x,y)=1.0/z(x,y)$. El "ambiente" sobre el cual operaran los individuos x e y es la definición de problema original.

Figura 2
Gráfica de la función de desempeño $D(x,y)=1.0/z(x,y)$



Nótese en la figura 2 que la función de desempeño tiene el máximo global exactamente en $D(2,2)=\infty$, pero también un máximo local $D(5,5)=1/3$. Los resultados generados por los algoritmos genéticos en 14 pruebas, para este problema se pueden observar en la tabla 1.

Tabla 1. 14 pruebas de un algoritmo genético y sus resultados

Prueba	*Valor de x*	*Valor de y*
1	2	2
2	1.9998	1.9995
3	5	4.9999
4	2	2
5	2	2
6	2	2
7	5	5
8	2	1.9997
9	2	2
10	1.9995	2
11	2	2
12	2	1.997
13	2.0024	1.9998
14	5	4.9995

Una observación importante en el ejemplo se presenta en la prueba 3, 7 y 14 (ver tabla 1). En estos puntos los algoritmos genéticos convergen a un mínimo local[12] (ver figura 1) en el punto $D(5,5)=1/3$. En este caso, el algoritmo genético convergió prematuramente a una solución no óptima, o lo que es equivalente, quedo atrapado en un mínimo local.

El problema de la convergencia prematura se puede evitar generando una población más amplia[13], aumentando la probabilidad de mutación o ampliando el rango de evolución y criterios de convergencia. En cualquiera de los casos, es

[12] Máximo local en la función de desempeño.

[13] Amplitud para este problema significa distribuir de manera uniforme a los individuos (x,y) en el plano. Esta posibilidad se logra ampliando el número de individuos de la población, pero el criterio también aumenta la necesidad de cálculos además de aumentar el tiempo de convergencia.

conveniente realizar varios ensayos, para asegurar la confiabilidad de los datos o verificar las peculiaridades del problema en estudio.

En cualquier caso, el método ARS también tiene la posibilidad de quedar atrapado en un mínimo local, y el método de la bisección requiere un intervalo aproximado de localización del cero de la función. Esto le da ventaja a la utilización del algoritmo genético sobre el método de bisección, pero queda a la par del método ARS en este ejemplo.

2.) Selección de portafolio. Supóngase que se desea invertir 10000 unidades monetarias en dos mercados. Se asume que W_i es el retorno por invertir en el mercado i con $i = 1,2$. Los datos del portafolio son: $E(W_1) = 0.10$, $E(W_2) = 0.05$, $Var(W_1) = 0.15$, $Var(W_2) = 0.06$, $\operatorname{cov}(W_1, W_2) = 0.07$. Donde $E(.)$ es la esperanza matemática, $Var(.)$ es la varianza y $\operatorname{cov}(.,.)$ es la covarianza. Se espera un retorno anual de por lo menos 9%.

Para resolver este problema usualmente definiríamos 2 variables de decisión x_i, definiéndolas como el monto invertido en el mercado. Esto nos llevaría a un retorno de $\frac{E(W_1)x_1 + E(W_2)x_2}{10000} = \frac{0.10x_1 + 0.05x_2}{10000}$. Como se espera un retorno de al menos 9% tenemos $0.10x_1 + 0.05x_2 \geq 900$.

La varianza del portafolio se definiría como $Var(W_1x_1 + W_2x_2) = Var(W_1)x_1^2 + Var(W_2)x_2^2 + 2\operatorname{cov}(W_1, W_2)x_1x_2$. Finalmente $Var(W_1x_1 + W_2x_2) = 0.15x_1^2 + 0.06x_2^2 + 0.15x_1x_2$. Podemos entonces expresar el problema de portafolio como:

$$\min f(x_1, x_2) = 0.15x_1^2 + 0.06x_2^2 + 0.14x_1x_2$$
$$900 - 0.10x_1 - 0.05x_2 \leq 0$$
$$10000 - x_1 - x_2 = 0$$

Se puede demostrar que este problema cumple con las condiciones de Kuhn-Tucker, por lo cual si definimos como $g(x_1, x_2) = 900 - 0.10x_1 - 0.05x_2$ y $h(x_1, x_2) = 900 - 0.10x_1 - 0.05x_2$, podemos expresar el problema como:

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i \nabla h_i(\bar{x}) = 0$$

$$\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0 \quad i = 1,\dots,m$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad i = 1,\dots,m$$

$$g_i(\bar{x}) \leq 0 \quad i = 1,\dots,m$$

$$h_i(\bar{x}) = 0 \quad i = 1,\dots,p$$

La solución del problema de portafolio mediante multiplicadores de Lagrange nos permite verificar que $x_1 = 8000$, $x_2 = 2000$, $\lambda = 26400$ y $\mu = 40$.

La solución del problema de portafolio mediante Multiplicadores de Lagrange implica calcular la matriz Hessiana del problema $H = \begin{bmatrix} 3/10 & 7/50 \\ 7/50 & 3/25 \end{bmatrix}$ y comprobar que es positiva[14] definida $x^t H x > 0 \quad \forall x$, además que $f(x_1, x_2)$, $g(x_1, x_2)$ y $h(x_1, x_2)$ sean continuas y diferenciables en el punto $\bar{x}$ de soluciones factibles.

La solución mediante algoritmos genéticos difiere notablemente del método de Multiplicadores de Lagrange. En él, se debe definir el ambiente sobre el cual se operará, además de las variables que representaran los individuos. Manipulando el problema original tenemos:

$$\min f(x_1, x_2) = 0.15x_1^2 + 0.06x_2^2 + 0.14x_1x_2$$

$$900 - 0.10x_1 - 0.05x_2 \leq 0$$

$$10000 - x_1 = x_2$$

De esta forma, la variable x_2 queda en función de la variable x_1, siendo la misma la representación de los individuos que conformarán la población. El am-

[14] Equivalente a demostrar que la función es convexa.

biente sobre el cual se desenvolverán los individuos x_1 queda caracterizado por el problema original, pero es necesario definir una función de desempeño, la cual indicará que tan bien adaptados se encuentran cada una de las instancias de x_1 a su ambiente, en este caso el problema original.

La función de desempeño en muchos casos es la parte más difícil de definir en un algoritmo genético. Una elección obvia para el problema de minimización sería $D_1(x_1,x_2)=1/f(x_1,x_2)$, sin embargo, es necesario expresar en la función de desempeño la condición $g(x_1,x_2)\leq 0$. Aplicar la función D_1 nos llevará a un valor $x=(0{,}10000)$, donde $g(x)=400>0$.

Otra forma de establecer la función objetivo es estudiar las propiedades del problema, y en base a las condiciones de la misma, formar la función de desempeño. Una observación rápida del problema nos muestra que la función es creciente en el intervalo de valores donde $g(x_1,x_2)=900-0.10x_1-0.05x_2\leq 0$. Dado que $10000-x_1=x_2$, tenemos que $g(x_1,x_2)=400-\frac{1}{20}x_1$. La función $g(x_1,x_2)\leq 0$ en el intervalo $x_1=[8000,\infty)$, por lo tanto es en ese intervalo que se encuentra el mínimo de $f(x_1,x_2)$. Escogiendo como intervalo $x_1\in[8000{,}10000]$, se logra una convergencia muy rápida[15] para la función de desempeño $D=1.0/f(x_1,x_2)$. El valor establecido por los algoritmos genéticos fue $x_1=8000$, la solución exacta generada por los multiplicadores de Lagrange.

3.) Condiciones de Kuhn-Tucker no satisfechas. Vamos a evaluar un problema no lineal donde las condiciones de Kuhn-Tucke no se satisfacen.

$$\begin{aligned}&\min \quad f(x,y)=-x\\&\textit{sujeto}\quad g_1(x,y)=-(1-x)^\wedge 3+y\leq 0\\&g_2(x,y)=-y\leq 0\end{aligned}$$

[15] Tres iteraciones del algoritmo genético.

Una solución analítica por el método de los multiplicadores de Lagrange fallará en este caso, debido a que no existe independencia lineal entre los vectores gradientes $\nabla g_i(\bar{x})$ en el punto $\bar{x} = (1,0)$.

En la figura 3 se aprecia que la región factible corresponde a los intervalos $x = [-\infty,1]$ e $y = [0,\infty]$.

Para solucionar este problema mediante algoritmos genéticos se tomará como el ambiente la definición original del problema. La función de desempeño queda definida como:

$$D(x,y) = \begin{cases} 0 & g_1(x,y), g_2(x,y) > 0 \\ 1.0/(f(x,y)+\beta) & g_1(x,y), g_2(x,y) \leq 0 \end{cases}$$

De esta forma, la función de desempeño rechaza las soluciones que no forman parte del dominó de las soluciones factibles. Por otro lado, y evitando evaluar de manera incorrecta la función en el punto $x = 0$ (donde $D(x,y) = \infty$), se agrega una unidad al divisor $\beta = 1$. En este punto debemos aclarar que se puede colocar cualquier valor de beta en el intervalo $[0,a)$; es también posible usar cualquier otra función de desempeño continua que penalice o mantenga valores mínimos cuando las soluciones no sean factibles. Un valor muy alto[16] de beta ocasionaría que $D(x,y)$=0, por lo cual y a pesar que $a \in R^+$, es recomendable escoger valores no muy altos.

A diferencia del método de los Multiplicadores de Lagrange, los algoritmos genéticos si ofrecen una respuesta cercana al valor óptimo del problema. En la figura 4 podemos observar la tendencia de los individuos que representan la variable x, los cuales comienzan con un valor aleatorio en el intervalo $(0,1)$ y luego se desplazan hacia un valor cercano al 1. De hecho la mejor selección fue $x = 0.97385$ e $y = 1.5952\text{e-}005$ entre todos los individuos en la convergencia del algoritmo.

---

[16] La palabra "alto" queda condicionada a las propiedades del problema en estudio.

Figura 3

Gráficas de $g_1(x,y) = -(1-x)^{\wedge}3 + y$ y $f(x,y) = -x$.

Nótese que la solución óptima al problema es $x = 1$

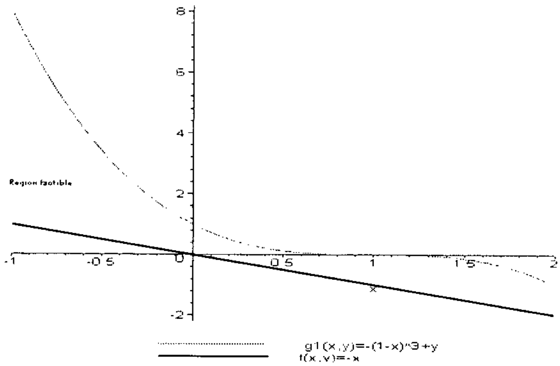
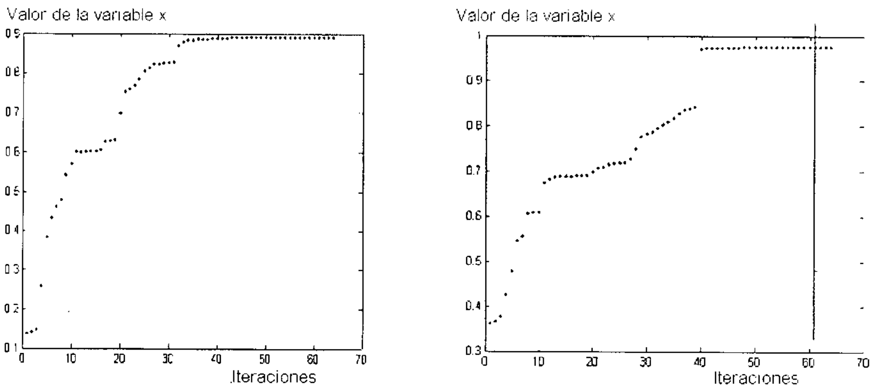


Figura 4

Valores de la variable x en dos pruebas distintas con algoritmos genéticos



4.) Sistemas lineales y costos cuadráticos. Los modelos lineales y de costos cuadráticos a pesar de ser ejemplos muy simples, han mostrado en su generalización aplicaciones importantes en las ciencias económicas; vamos a tratar un caso sencillo en este ejemplo dada la importancia de este tipo de problemas.

Sea la función de costo $f(x,u) = \sum_{t=0}^{2}(x_t^2 + u_t^2) + x_3^2$, y el sistema de ecuaciones $x_{t+1} = x_t + u_t$, $t = 0,1,2$ y $x_0 = 1$.

Una forma de resolver este tipo de problema es aplicar programación dinámica, mediante la cual se formarían el sistema de ecuaciones[17]:

$$V_t(x_t) = \min_{u_t}[x_t^2 + u_t^2 + V_{t+1}(x_t + u_t)]$$

$$V_3(x_3) = x_3^2$$

Con $t = 0,1,2$.

El resultado generado al resolver el problema mediante técnicas de programación dinámica fue $u_0 = -0.615$, $u_1 = -0.231$ y $u_2 = -0.077$.

La evaluación mediante algoritmos genéticos requiere un estudio previo de la función objetivo antes de definir la función de desempeño. En una observación inicial se puede apreciar que para cualquier valor de x_t y u_t la función es siempre positiva. Esto garantiza que el menor valor de la misma posiblemente será 0 por lo cual se puede definir la función de desempeño como:

$$D(x_t, u_t) = 1 / \sum_{t=0}^{2}(x_t^2 + u_t^2) + x_3^2$$

$$x_{t+1} = x_t + u_t$$

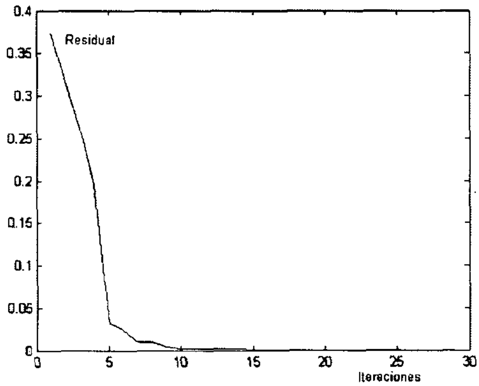
$t = 0,1,2$ y $x_0 = 1$ Dado que la condición $x_{t+1} = x_t + u_t$ son operaciones de suma y resta, el impacto en tiempo no será alto, siendo necesario evaluar por cada individuo la función original y luego realizar la división.

[17] Otro método consiste en usar multiplicadores de Lagrange

Los resultados generados por el algoritmo genético fueron $u_0 = -0.61535$, $u_1 = -0.23074$ y $u_2 = -0.077014$, los mismos son iguales a los generados por las técnicas de programación dinámica.

En la figura 5 se puede observar el residual en valor absoluto de la función objetivo $|f(x,u) - f(x^*,u^*)|$ por cada iteración, donde x e u son los vectores que aproximan a la solución y $\{x^*,u^*\}$ es el par de vectores de la solución exacta[18]

Figura 5
Iteraciones vs Valor residual en 29 iteraciones de una prueba del algoritmo genético (mejor individuo por población)



CONCLUSIONES

Las palabras algoritmos genéticos albergan una técnica de búsqueda y optimización que, basada en los procesos naturales que formaron las especies, constituye un tipo de búsqueda "aleatoria dirigida". Apoyada en la velocidad computador para representar el tiempo de evolución de las especies, los individuos de una población convergen de manera efectiva hacia una o varias soluciones de un problema. Es posible abordar mediante ellos una amplia variedad

[18] Se considera como solución exacta la generada por el método de programación dinámica.

de situaciones siempre que se posea una adecuada representación simbólica, siendo un subconjunto de los mismos una posible solución, expresada en la figura de "individuo".

Los algoritmos genéticos no representan una herramienta "universal" aplicable a todo tipo de situaciones ni están exentos de inconvenientes. La convergencia prematura puede desviar al investigador de la solución óptima de un problema, siendo necesario muchas pruebas con los mismos para asegurar que se está ante un buen resultado. Por otro lado, la función de desempeño requiere especial cuidado por parte del investigador, ya que ella es la expresión o medida de bondad de la solución. En todo caso, el diseño de la función de desempeño es una tarea difícil, que requiere cierta experticia por parte del investigador.

TÉRMINOS

- Evolución. Proceso contínuo de transformación de las especies a través de cambios producidos en sucesivas generaciones. Cambios generados en la población de un algoritmo genético.

- Geográfica. Conjunto de instancias de variables de decisión.

- Heurística. Forma de búsqueda no rigurosa, donde se puede incluir tanteo, reglas empíricas, etc.

- Iteración. Paso o cambio de estado de una variable generada por un conjunto de pasos. En el caso de los algoritmos genéticos se considera como iteración la aplicación del proceso de selección, cruce y mutación a una población.

- Instancia. Ejemplo o caso particular de un tipo de dato o conjunto.

- Población. Conjunto de individuos de la misma especie que ocupan una misma área.

- Prueba. Corrida completa de un algoritmo genético.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Golberg, David E. (1989), *Genetic Algorithms in Search, Optimization & Machine Learning*, Addison Wesley.

González Martel, Christian, y Fernández Rodríguez, Fernando, "La creación de nuevas reglas técnicas en el IGBM mediante la Programación Genética".

Holland, J. H. (1962), "Outline for a logical theory of adaptive systems", *Journal of the Association for Computing Machinery* 3, pp. 297-314.

— (1975), "Adaptation in natural and artificial systems", University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan.

Kincaid, David y Ward Cheney (1994), "Análisis Numérico, Las Matemáticas del Calculo Científico", Addison-Wesley.

Mahmut, Parlar (2000), "Interactive Operations Research with Maple, Methos and Models", Birkhäuer Boston,

Marimon, Ramon y Scott, Andrew, "Computacional Methods for the Study of Dinamic Economies", Oxford University press.

Stephen Wolfram (1994), "Computer in Science and Mathematics", *Collected Papers*, Wetview Press.