Revista Venezolana de Análisis de Coyuntura, 2004, Vol. X, No. 1 (ene-jun), pp. 61-89
recibido: 01-12-03 / arbitrado: 27-01-04

AGENTE REPRESENTATIVO CON TIEMPO DISCRETO Y HORIZONTE INFINITO: NOCIONES BÁSICAS*

Ronald Balza Guanipa**
ESCUELA DE ECONOMIA, UCV-UCAB

Resumen:

Este trabajo presenta detalladamente un problema de optimización intertemporal (con tiempo discreto y horizonte infinito) para un agente representativo y una empresa, y describe el equilibrio Walrasiano correspondiente. Su propósito es ilustrar la posibilidad de que modelos neoclásicos bien definidos impliquen una gran variedad de comportamientos dinámicos. Así, pueden existir sistemas que tengan uno o varios estados estacionarios, trayectorias de equilibrio simples, periódicas o aun caóticas.

Palabras claves: Dinámica no lineal, equilibrio general, agente representativo, caos.

INTRODUCCIÓN

Parte importante de la discusión actual en macroeconomía, economía internacional y teoría del crecimiento hace uso del concepto de equilibrio intertemporal. Como señalan Mitra y Nishimura (2001), dicho equilibrio implica que: i) dadas sus creencias, los agentes tomen decisiones óptimas según sus preferencias y sus restricciones, ii) los mercados se vacíen en cada momento del tiempo y iii) las acciones de los agentes validen sus creencias, o al menos no las contradigan. Dos marcos analíticos distintos suelen utilizarse para definir economías donde puedan surgir equilibrios intertemporales: agente representativo y generaciones solapadas. En el primer caso, se supone que un agente es modelado como una "dinastía", y que su vida no tiene fecha natural de

---

* Este artículo se ha escrito a partir de distintas secciones del trabajo Introducción a la teoría del equilibrio general, presentado por el autor para ascender a la categoría de profesor Asistente en la UCV. Agradezco los comentarios de los profesores Luis Zambrano Sequín, tutor de dicho trabajo, José Contreras y Maura Vázquez, jurados del trabajo, y de tres árbitros anónimos que revisaron una versión preliminar del presente artículo. Sus recomendaciones bibliográficas y de estilo han sido muy valiosas. Por supuesto, todos los errores no corregidos son de mi exclusiva responsabilidad. Agradezco igualmente a Mirian Ramírez, a Eduardo Quintero y al equipo que trabaja en la Biblioteca del BCV y la Red Venezolana de Conocimiento Económico por la oportuna provisión de algunos de los artículos requeridos para este trabajo.

**Correo electrónico: rbalza@ucab.edu.ve

terminación. Ello puede ser útil al representar a un individuo que se preocupa por todas las generaciones futuras, a un individuo que no sabe cuando su vida acabará, o a una institución que se supone permanente. En el segundo, se supone que las vidas de los agentes transcurren durante un número finito de períodos, y que el primer período de la vida de unos ocurre al mismo tiempo que el último de la vida de otros. Aunque la selección de un tipo de modelo depende de los problemas que deseen estudiarse, debe tenerse en cuenta que sus propiedades no son siempre equivalentes (ver Farmer (1993) para una comparación).

El propósito de este trabajo es explicar detalladamente algunas propiedades de un modelo de agente representativo con horizonte infinito y previsión perfecta, que sigue muy de cerca los propuestos por Mas-Colell *et al* (1995) y Malinvaud (1971). Se utiliza tiempo discreto y se suponen mercados completos, lo que implica suponer que existen infinitos mercados *forward* en $t = 0$, o una sucesión infinita de precios *spot* que puede ser correctamente anticipada. Aun cuando no incluye algunos conceptos importantes, como activos explícitamente definidos que permitan transferir poder de compra de un período al siguiente -ver Farmer (1993)- o la extensión del modelo a economías con varios consumidores –ver Mas-Colell *et al* (1995)-, este modelo permite examinar varios aspectos de gran relevancia: la definición de precios, agentes y mercancías (sección 1), el planteamiento de los problemas de optimización del consumidor (el agente representativo) y la empresa (sección 2), la definición del equilibrio Walrasiano y la demostración de los dos teoremas del bienestar (sección 3) y, por último, algunas de las propiedades de las trayectorias de equilibrio que pueden obtenerse a partir de él (sección 4). Las propiedades consideradas son existencia, unicidad (dependiente de la condición inicial), computabilidad y estabilidad de dichas trayectorias.

El comportamiento dinámico de la economía depende de los supuestos hechos sobre la función de utilidad del consumidor y sobre su paciencia. Según el teorema Boldrin-Montruccio (1986), “cualquier cosa puede pasar”. Bajo algunas premisas, establecidas en los teoremas de peaje (*turnpike teorem*), cualquier trayectoria de equilibrio se encontraría sobre o en camino hacia un único estado estacionario, bien definido. Sin embargo, bajo otras premisas (teoremas anti-peaje), un sistema dinámico podría contar con más de un estado estacionario, las trayectorias de equilibrio podrían aproximarse a un estado estacionario o alejarse de él, o seguir órbitas periódicas o aun caóticas. Este trabajo termina presentando algunos ejemplos de estas posibilidades.

Es necesario concluir esta introducción haciendo una advertencia. Este trabajo no pretende ser una contribución original a la teoría de la dinámica no lineal, ni una revisión de la extensa literatura desarrollada durante los últimos veinticinco años en este campo. Su único objetivo es presentar algunas demostraciones y procedimientos útiles para aproximarse a un cuerpo de conocimientos extraordinariamente complejo, siguiendo el orden propuesto por Mas-Colell *et al* (1995). En esta exposición, se ha privilegiado la generalidad sobre el uso de ejemplos numéricos y gráficos variados. Además, se ha hecho más énfasis en el planteamiento de los problemas de optimización individuales y en la caracterización de los equilibrios Walrasianos que en la obtención de soluciones específicas. Ello con seguridad hará poco provechosa su lectura a quien no tenga conocimientos básicos de topología, análisis real y sistemas de ecuaciones en diferencias. Sin embargo, podría ser útil a quien sí los tenga o desee tenerlos. Libros recomendables para estudiar los conceptos matemáticos son Apostol (1982), Fuente (1999), Mendelson (1975) y Puu (1997).

1. PRECIOS, MERCANCÍAS Y AGENTES EN UNA ECONOMÍA CON TIEMPO

En esta sección se presentan las definiciones de precios, mercancías, preferencias y tecnología utilizadas en este trabajo[1].

a. Precios y mercancías

El vector de precios con horizonte infinito es la lista (p_0, k, p_t, k), donde los componentes de $p_t = (p_{1t}, k, p_{Lt}) \in R^L$ son los valores actuales en $t = 0$ de los precios de los L bienes en t. Al ser cada precio un valor actual, el precio relativo $\frac{p_{l\nu}}{p_{m\tau}}$ debe interpretarse como la cantidad del bien m que debe cederse en la fecha $t = \tau$, según acuerdo realizado en $t = 0$, para obtener una unidad del bien l en $t = \nu$. Si elegimos como numerario el bien 1, en $t = 0$, interpretaremos el precio p_{lt} como la cantidad del bien 1 que debería cederse en $t = 0$ para adquirir el derecho a recibir una unidad del bien l en t.

A partir de los componentes de (p_0, k, p_t, k) podemos definir factores de descuento y tasas de interés correspondientes a cada bien. Así,

---

[1] La notación utilizada combina las de Malinvaud (1971) y Mas-Colell, Whinston y Green (1995).

$$\beta_{lt} = \frac{p_{lt}}{p_{l0}}$$

es el factor de descuento correspondiente al bien l en t, y, a partir de

$$\frac{\beta_{l,t+1}}{\beta_{lt}} = \frac{p_{l,t+1}}{p_{lt}} = \frac{1}{1+r_{lt}}$$

se obtiene la tasa de interés r_{lt} correspondiente al bien l en t, que indica la cantidad de dicho bien que debe pagarse en $t+1$ por un préstamo realizado en t de una unidad del mismo bien. Por esta razón se dice que hay tasas de interés implícitas en $(p_0, \ldots, p_t, \ldots)$.

b. Preferencias

El consumidor debe elegir una trayectoria de consumo en $t = 0$. Cuando el horizonte es infinito, la trayectoria de consumo se escribe como $c = (c_0, \ldots, c_t, \ldots)$.

Se supone que el consumidor es impaciente, es decir, que prefiere consumir una cierta cantidad de un bien antes que después. Además, que su utilidad en cada período depende sólo de su consumo en dicho período. Una función de utilidad que represente preferencias como las comentadas es, con horizonte infinito,

$$V(\mathbf{c}) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(\mathbf{c}_t).$$

Se supone que la utilidad en cada período es aditiva, y que el factor de descuento por impaciencia del consumidor es la constante $\delta \in (0,1)$. Para garantizar que $V(\mathbf{c}) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(\mathbf{c}_t) < \infty$, se supone que $\sup_t \|\mathbf{c}_t\| < \infty$.

Nótese que una función de este tipo tiene dos propiedades importantes: las preferencias son consistentes en el tiempo y la utilidad es recursiva. La consistencia temporal implica que una trayectoria de consumo que se supone óptima en $t = 0$ no sería subóptima en el futuro. Que la utilidad sea recursiva implica que $V(\mathbf{c}) = u(\mathbf{c}_0) + \delta V(\mathbf{c}^1)$, siendo $u(\mathbf{c}_0)$ la utilidad presente y $V(\mathbf{c}^1)$ la utilidad futura.

c. Tecnología

El conjunto de planes de producción se definirá de modo que, habiendo L bienes en la economía, se especifique cuánto usa la empresa como insumos de cada uno, y cuánto obtiene como productos. A tal fin, escribiremos un plan de producción como

$$\mathbf{y} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in Y \subseteq R^{2L}$$

donde $\mathrm{a} = (\mathrm{a}_1, \mathrm{K}, \mathrm{a}_\mathrm{L}) \in \mathrm{R}^\mathrm{L}$ es un vector de insumos y $\mathrm{b} = (\mathrm{b}_1, \mathrm{K}, \mathrm{b}_\mathrm{L}) \in \mathrm{R}^\mathrm{L}$ es un vector de productos. Aun cuando autores como Mas-Colell *et. al.* (1995) mantienen la convención de signos sobre las componentes de los planes de producción, estableciendo que $a_l \leq 0$ y $b_l \geq 0$ para todo l, nosotros seguiremos a Malinvaud (1971), y estableceremos que $a_l \geq 0$ y $b_l \geq 0$ para todo l.

Supondremos que el conjunto Y es cerrado y convexo. Además, supondremos que

i. si $(\mathbf{0}, \mathbf{b}) \in Y$ entonces $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ (no hay almuerzo gratis)

ii. si $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in Y$, entonces $(\mathbf{a}, \mathbf{0}) \in Y$ (posibilidad de truncamiento)

En un modelo dinámico, esta notación permite considerar explícitamente dos acciones dentro del proceso productivo que ocurren en fechas distintas: la adquisición de insumos, que ocurre primero, y la obtención de productos, que ocurre después. Así, un plan de producción para la fecha t, $\mathbf{y}_t$, según el cual sea tecnológicamente factible obtener el vector de productos $\mathbf{b}_{t+1}$, tiene que indicar el vector de insumos necesarios, $\mathbf{a}_t$, que debieron adquirirse previamente. Ello lo denotaremos como

$$\mathbf{y}_t = (\mathbf{a}_t, \mathbf{b}_{t+1}) \in Y.$$

En este trabajo sólo consideraremos modelos *suaves*, es decir, modelos en los cuales la definición de plan de producción sea compatible con la definición de una función de transformación $g_t : R_+^{2L} \to R_+$ tal que, si $(\mathbf{a}_t, \mathbf{b}_{t+1})$ pertenece a la frontera de Y, se cumpla que,

$$g_t(\mathbf{a}_t, \mathbf{b}_{t+1}) = 0 \ ,$$

con gradiente

$$\nabla g_t(\mathbf{a}_t, \mathbf{b}_{t+1}) = [\mathbf{q}_{\mathbf{a}_t}, \mathbf{q}_{\mathbf{b}_{t+1}}],$$

siendo

$$q_{a_t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_t}{\partial a_{1t}} \\ k \\ \frac{\partial g_t}{\partial a_{Lt}} \end{bmatrix} \qquad q_{b_{t+1}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_t}{\partial b_{1,t+1}} \\ k \\ \frac{\partial g_t}{\partial b_{L,t+1}} \end{bmatrix}$$

con $\frac{\partial g_t}{\partial a_{lt}} < 0$ y $\frac{\partial g_t}{\partial b_{l,t+1}} > 0$. Con estas derivadas se obtienen las tasas marginales de transformación de insumos en insumos, insumos en productos y productos en productos. Como un ejemplo, presentamos la tasa marginal de sustitución de una unidad del insumo a_{lt} por el insumo a_{mt}:

$$TMST_{a_{lt}, a_{mt}} = \left| \frac{da_{mt}}{da_{lt}} \right| = \left| \frac{\partial g_t / \partial a_{lt}}{\partial g_t / \partial a_{mt}} \right|$$

Consideraremos sólo modelos dinámicos con horizonte infinito comenzando en $t = 0$.

Llamaremos trayectoria, o programa, de producción a la lista

$$(y_0, k, y_t, k)$$

siempre que $\mathbf{y}_t \in Y$ para todo t.

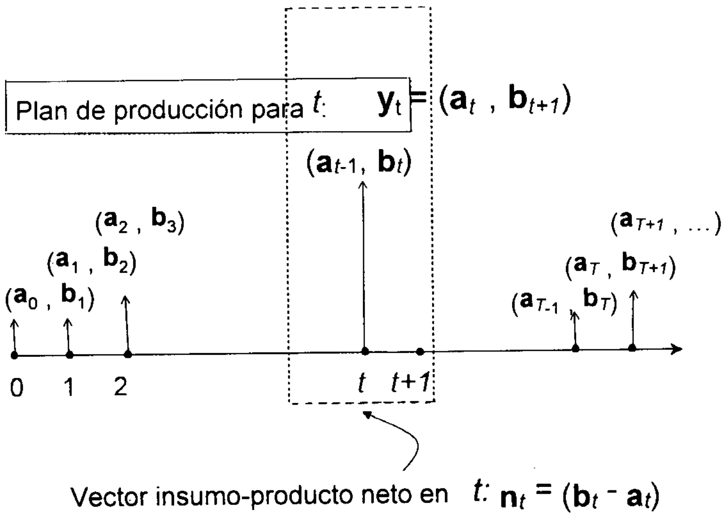
En cada período, componentes de dos planes de producción sucesivos se solapan. Por ello, definimos un vector insumo-producto neto, que llamaremos

$$\mathbf{n}_t = (\mathbf{b}_t - \mathbf{a}_t) \in R^L$$

En él anotamos el vector de insumos $\mathbf{a}_t \in R^L$, necesario para obtener productos en $t+1$, y el vector de productos $\mathbf{b}_t \in R^L$, obtenidos de la transformación de insumos adquiridos en $t-1$.

Puesto que no proponemos la existencia de insumos disponibles antes de $t = 0$, establecemos que $\mathbf{b}_0 = \mathbf{0}$. Frecuentemente, se toma un número natural $T > 0$ como fecha futura de referencia, $t = T$. Para obtener conclusiones con respecto al horizonte infinito, se evalúan las expresiones relevantes cuando $T \to \infty$ Podemos ilustrar los conceptos presentados hasta ahora con la siguiente figura:

Figura No. 1



Diremos que una trayectoria (y_0,k,y_t,k) es eficiente si no existe otra trayectoria, (y'_0,k,y'_t,k) a partir de la cual pueda obtenerse, para todo t, y con desigualdad estricta para al menos un t,

$$\mathbf{n}'_t \geq \mathbf{n}_t$$

siendo $n_t = (b_t - a_t) \in R^L$ el vector insumo-producto neto en t correspondiente a (y_0,k,y_t,k).

2. LOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

En esta sección se consideran los problemas de elección intertemporal de consumidor y empresa, se definen las trayectorias de equilibrio y se indican los supuestos necesarios para probar los teoremas del bienestar.

a. El problema del consumidor

Una trayectoria (c_0,k,c_t,k) maximiza la utilidad miopemente o a corto plazo en un conjunto presupuestario determinado por (p_0,k,p_t,k) y $w < \infty$ si es imposible incrementar la utilidad con una nueva trayectoria que transfiera poder de compra entre dos períodos consecutivos. Llamando w_t al valor presente en t del poder de compra de dos períodos consecutivos, el problema de maximización miope de la utilidad es:

$$\underset{c_t, c_{t+1}}{Max}\, u(c_t) + \delta u(c_{t+1}) \qquad \text{sujeto a} \qquad \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{c}_t + \mathbf{p}_{t+1} \cdot \mathbf{c}_{t+1} = w_t \cdot$$

A partir de la función de Lagrange,

$$L = u(\mathbf{c}_t) + \delta u(\mathbf{c}_{t+1}) + \lambda_t [w_t - (\mathbf{p}_t \cdot \mathbf{c}_t + \mathbf{p}_{t+1} \cdot \mathbf{c}_{t+1})]$$

se obtienen las condiciones de primer orden

$$w_t = \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{c}_t + \mathbf{p}_{t+1} \cdot \mathbf{c}_{t+1}$$

$$\frac{\partial u(\mathbf{c}_t)}{\partial c_{lt}} = \lambda_t p_{lt} \qquad \delta \frac{\partial u(\mathbf{c}_{t+1})}{\partial c_{l,t+1}} = \lambda_t p_{l,t+1} \qquad \begin{array}{l} t = 0,1,\mathrm{k} \\ l = 1,\mathrm{k},L \end{array}$$

De las últimas se deduce que, para $\lambda = \lambda_0$,

$$\delta^t \frac{\partial u(\mathbf{c}_t)}{\partial c_{lt}} = \lambda p_{lt} \qquad \begin{array}{l} t = 0,1,\mathrm{k} \\ l = 1,\mathrm{k},L \end{array},$$

puesto que, siendo

$$\frac{\partial u(\mathbf{c}_t)}{\partial c_{lt}} = \lambda_t p_{lt} \qquad \delta \frac{\partial u(\mathbf{c}_t)}{\partial c_{lt}} = \lambda_{t-1} p_{lt}$$

$$\begin{array}{l} t = 1,2,\mathrm{k} \\ l = 1,\mathrm{k},L \end{array},$$

se cumple que $\lambda_{t-1} = \delta\lambda_t$, se sigue que $\lambda = \lambda_0 = \delta^t \lambda_t$.

Puede demostrarse que una trayectoria $(\mathbf{c}_0,\mathrm{k},\mathbf{c}_t,\mathrm{k})$ que satisface las condiciones

$$\sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{c}_t = w$$

y

$$\delta^t \frac{\partial u(\mathbf{c}_t)}{\partial c_{lt}} = \lambda p_{lt} \qquad \begin{array}{l} t = 0,1,\mathrm{k} \\ l = 1,\mathrm{k},L \end{array},$$

maximiza la utilidad en un conjunto presupuestario determinado por $(\mathbf{p}_0,\mathrm{k},\mathbf{p}_t,\mathrm{k})$ y $w < \infty$.

b. El problema de la empresa

Una trayectoria $(y_0,\ldots,y_t,\ldots)$ maximiza el beneficio miopemente o a corto plazo para $(p_0,\ldots,p_t,\ldots)$ si, para todo t y todo $\mathbf{y}'_t = (\mathbf{a}'_t, \mathbf{b}'_{t+1}) \in Y$, se cumple que

$$\mathbf{p}_{t+1} \cdot \mathbf{b}_{t+1} - \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{a}_t \geq \mathbf{p}_{t+1} \cdot \mathbf{b}'_{t+1} - \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{a}'_t .$$

Utilizando el cálculo diferencial, podemos escribir el problema de la empresa como

$$\max_{\mathbf{a}_t, \mathbf{b}_{t+1}} \pi_t = \mathbf{p}_{t+1} \cdot \mathbf{b}_{t+1} - \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{a}_t$$

sujeto a

$$g_t(\mathbf{a}_t, \mathbf{b}_{t+1}) = 0, \qquad t = 0,\ldots,t,\ldots$$

A partir de la función de Lagrange

$$L = \mathbf{p}_{t+1} \cdot \mathbf{b}_{t+1} - \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{a}_t + \lambda_t \left[0 - g_t(\mathbf{a}_t, \mathbf{b}_{t+1}) \right]$$

podemos obtener las condiciones de primer orden

$$\begin{cases} \mathbf{p}_{t+1} - \lambda_t \mathbf{q}_{\mathbf{b}_{t+1}} = \mathbf{0} \\ -\mathbf{p}_t - \lambda_t \mathbf{q}_{\mathbf{a}_t} = \mathbf{0} \end{cases} \qquad t = 0,1,\ldots$$

que, para cada bien, pueden escribirse como

$$\begin{cases} p_{l,t+1} = \lambda_t \dfrac{\partial g_t}{\partial b_{l,t+1}} > 0 \\ p_{lt} = -\lambda_t \dfrac{\partial g_t}{\partial a_{lt}} > 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} l = 1,\ldots,L \\ t = 0,1,\ldots \end{array}$$

De tales condiciones se deduce un resultado importante: los precios relativos de los bienes deben ser iguales a las tasas marginales de sustitución correspondientes. A continuación consideremos dos ejemplos:

$$TMST_{a_{lt},a_{mt}} = \left|\frac{da_{mt}}{da_{lt}}\right| = \left|\frac{\partial g_t / \partial a_{lt}}{\partial g_t / \partial a_{mt}}\right| = \frac{p_{lt}}{p_{mt}}, \quad TMST_{a_{lt},b_{l,t+1}} = \left|\frac{db_{l,t+1}}{da_{lt}}\right| = \left|\frac{\partial g_t / \partial a_{lt}}{\partial g_t / \partial b_{l,t+1}}\right| = \frac{p_{lt}}{p_{l,t+1}}$$

Recuérdese que cada mercancía se vende al mismo precio sea como producto o como insumo en cada período t. Por ello, también es cierto que:

$$TMST_{b_{lt},b_{mt}} = \left|\frac{db_{mt}}{db_{lt}}\right| = \left|\frac{\partial g_t / \partial b_{lt}}{\partial g_t / \partial b_{mt}}\right| = \frac{p_{lt}}{p_{mt}}, \quad TMST_{b_{lt},a_{l,t+1}} = \left|\frac{da_{l,t+1}}{db_{lt}}\right| = \left|\frac{\partial g_t / \partial b_{lt}}{\partial g_t / \partial a_{l,t+1}}\right| = \frac{p_{lt}}{p_{l,t+1}}$$

La sucesión (p_0,k,p_t,k) para el cual (y_0,k,y_t,k) maximiza el beneficio miopemente es llamada sistema de precios de Malinvaud.

Si una trayectoria (y_0,k,y_t,k) maximiza el beneficio miopemente para (p_0,k,p_t,k), y satisface la llamada condición de transversalidad (a medida que $t \to \infty$ cumpla $\mathbf{p}_{t+1} \cdot \mathbf{b}_{t+1} \to 0$)[2], es eficiente. Probaremos dicha afirmación, por contradicción, en cuatro pasos:

1.- Suponemos dadas las trayectorias (y_0,k,y_t,k) y (p_0,k,p_t,k) tales que (y_0,k,y_t,k) maximiza el beneficio y cumple con la condición de transversalidad, sin ser eficiente, por lo que existe un (y'_0,k,y'_t,k) tal que $\mathbf{n}'_t > \mathbf{n}_t$ y, por tanto, $\mathbf{p}_t \cdot \mathbf{n}'_t > \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{n}_t$.

2.-Para un T lo suficientemente grande podemos hallar un $\varepsilon > 0$ tal que $\sum_{t=0}^{T} \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{n}'_t > \sum_{t=0}^{T} \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{n}_t + \varepsilon$. Puesto que $\mathbf{p}_{t+1} \cdot \mathbf{b}_{t+1} \to 0$ a medida que

[2] La condición de transversalidad exige que el valor presente de la producción obtenida en *t*+1 se haga menor a medida que el tiempo transcurra, es decir, que *t* se haga mayor.

$t \to \infty$, para un T lo suficientemente grande podemos hallar $\mathbf{p}_{T+1} \cdot \mathbf{b}_{T+1} < \varepsilon$, con lo que

$$\sum_{t=0}^{T} \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{n}'_t > \sum_{t=0}^{T} \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{n}_t + \mathbf{p}_{T+1} \cdot \mathbf{b}_{T+1} .$$

3.- Puesto que, con $\mathbf{n}_t = (\mathbf{b}_t - \mathbf{a}_t)$, $\pi_t = (\mathbf{p}_{t+1} \cdot \mathbf{b}_{t+1} - \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{a}_t)$ y $\mathbf{b}_0 = 0$, se cumple que

$$\sum_{t=0}^{T} \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{n}_t = \mathbf{p}_T \cdot \mathbf{a}_T + \sum_{t=0}^{T-1} \pi_t ,$$

podemos reescribir la desigualdad anterior como

$$\mathbf{p}_T \cdot \mathbf{a}'_T + \sum_{t=0}^{T-1} \pi'_t > \sum_{t=0}^{T} \pi_t .$$

4.- La última desigualdad viola el supuesto de maximización miope del beneficio: al menos debe cumplirse una de la siguientes desigualdades: o $\pi'_t > \pi_t$ para algún $t = 0, \mathrm{K}, T -$, o $\mathbf{p}_T \cdot \mathbf{a}'_T > \pi_T$

3. EQUILIBRIO WALRASIANO Y TEOREMAS DEL BIENESTAR

El equilibrio Walrasiano es una trayectoria de planes de producción y una sucesión de precios tales que todos los mercados se vacían en cada período y ambos agentes resuelven sus problemas de maximización restringida. Para el modelo propuesto, puede probarse que todo equilibrio es un óptimo de Pareto, y que para todo óptimo de Pareto puede definirse un vector de precios que lo soporte, y que con él forme un equilibrio Walrasiano. Estos son los dos teoremas del bienestar. Expondremos con detalle estas ideas a continuación.

a. Equilibrio Walrasiano

Un equilibrio Walrasiano es un par formado por una trayectoria $(y_0^*, \mathrm{K}, y_t^*, \mathrm{K})$ y una sucesión $(p_0, \mathrm{K}, p_t, \mathrm{K})$, ambas acotadas, tales que:

i. $\forall t$ $\qquad \mathbf{c}_t^* = \mathbf{n}_t^* + \omega_t \geq \mathbf{0}$

ii. $\forall t, \forall \mathbf{y} \in Y \qquad \pi_t^* \geq \pi_t$

iii. la trayectoria $(\mathrm{c}_0^*, \mathrm{k}, \mathrm{c}_t^*, \mathrm{k})$ es una solución del problema del consumidor,

$$\underset{\{\mathbf{c}_t\}_{t=0}^{t=\infty}}{\text{Max}} \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(\mathbf{c}_t) \quad \text{sujeto a} \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{c}_t = w$$

donde $\mathbf{n}_t^* = (\mathbf{b}_t^* - \mathbf{a}_t^*)$, $\pi_t^* = (\mathbf{p}_{t+1} \cdot \mathbf{b}_{t+1}^* - \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{a}_t^*)$ y $w = \sum_{t=0}^{\infty} (\pi_t^* + \mathbf{p}_t \cdot \omega_t) < \infty$.

b. Primer teorema del bienestar

Para que un equilibrio Walrasiano sea óptimo de Pareto, a partir de la trayectoria $(\mathbf{y}_0^*, \ldots, \mathbf{y}_t^*, \ldots)$ debe obtenerse una trayectoria $(\mathrm{c}_0^*, \mathrm{k}, \mathrm{c}_t^*, \mathrm{k})$ que resuelva el siguiente problema, llamado problema de planeación:

$$\underset{\{\mathbf{c}_t\}_{t=0}^{t=\infty}}{\text{Max}} \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(\mathbf{c}_t) \quad \text{sujeto a } \mathbf{c}_t = \mathbf{n}_t + \omega_t \geq \mathbf{0}$$

siendo $\mathbf{n}_t = (\mathbf{b}_t - \mathbf{a}_t) \in R^L$.

Según la definición del equilibrio, la trayectoria $(\mathbf{c}_0^*, \ldots, \mathbf{c}_t^*, \ldots)$ resuelve el problema

$$\underset{\{\mathbf{c}_t\}_{t=0}^{t=\infty}}{\text{Max}} \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(\mathbf{c}_t) \quad \text{sujeto a} \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{c}_t = w$$

con $w = \sum_{t=0}^{\infty} (\pi_t^* + \mathbf{p}_t \cdot \omega_t) < \infty$ y $\pi_t^* = (\mathbf{p}_{t+1} \cdot \mathbf{b}_{t+1}^* - \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{a}_t^*)$, por lo que basta con probar que ambos conjuntos de alternativas accesibles son iguales. Probaremos esto al probar que la condición de transversalidad se cumple siempre que (y_0^*, k, y_t^*, k) y (p_0, k, p_t, k) constituyen un equilibrio Walrasiano. Demostramos dicha afirmación a continuación:

De la restricción de factibilidad $\mathbf{c}_t^* = \mathbf{n}_t^* + \omega_t \geq \mathbf{0}$ se deducen $\mathbf{p}_t . \mathbf{c}_t^* = \mathbf{p}_t . (\mathbf{n}_t^* + \omega_t)$ y $\sum_{t=0}^{T} \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{c}_t = \sum_{t=0}^{T} (\pi_t + \mathbf{p}_t \cdot \omega_t) - \mathbf{p}_{T+1} \cdot \mathbf{b}_{T+1}$.

Puesto que los valores presentes de gasto y riqueza se igualan en el límite, $\sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{c}_t = \sum_{t=0}^{\infty} (\pi_t + \mathbf{p}_t \cdot \omega_t) = w$, se cumple que $\mathbf{p}_{T+1} \cdot \mathbf{b}_{T+1} \to 0$ a medida que $T \to \infty$.

Ello implica que la trayectoria (y_0^*, k, y_t^*, k) es eficiente. Con esto probamos el primer teorema, puesto que las trayectorias (y_0^*, k, y_t^*, k) y (p_0, k, p_t, k) que definen el equilibrio son compatibles con la trayectoria (c_0^*, k, c_t^*, k) que resuelve el problema de planeación.

c. Segundo teorema del bienestar

Una trayectoria (y_0^*, k, y_t^*, k) óptimo de Pareto constituye un equilibrio Walrasiano junto con una sucesión (p_0, k, p_t, k) convenientemente definida. Presentamos la prueba a continuación, en dos partes. En primer lugar, demostramos que a partir de la trayectoria de consumo factible (c_0^*, k, c_t^*, k) puede definirse una sucesión de precios para la cual (c_0^*, k, c_t^*, k) maximice la utilidad del consumidor sujeto al conjunto presupuestario definido por (p_0, k, p_t, k).

Utilizando las condiciones de primer orden del problema de optimización del consumidor sujeto a un conjunto presupuestario y una trayectoria (c_0^*, k, c_t^*, k), que resuelva el problema de planeación, puede proponerse una sucesión (p_0, k, p_t, k) que soporte la trayectoria (c_0^*, k, c_t^*, k) como elegida por el consumidor en un equilibrio Walrasiano. El precio propuesto para cada bien l en cada t es $p_{lt} = \delta^t \dfrac{\partial u(\mathbf{c}_t)}{\partial c_{lt}}$.

Puesto que (c_0^*,k,c_t^*,k) es acotada, $\sum_{t=0}^{\infty} \|\mathbf{p}_t\| < \infty$, y la condición de transversalidad se cumple, por lo que $\sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{c}_t = \sum_{t=0}^{\infty} (\pi_t + \mathbf{p}_t \cdot \omega_t) = w$. Ello implica que la trayectoria (c_0^*,k,c_t^*,k) pertenece al conjunto presupuestario definido por (p_0,k,p_t,k), y que en él maximiza la utilidad del consumidor.

En segundo lugar, probamos que si la trayectoria (c_0^*,k,c_t^*,k) resuelve el problema de planeación, y los precios se definen por medio de $p_{lt} = \delta^t \dfrac{\partial u(\mathbf{c}_t)}{\partial c_{lt}}$, la trayectoria (y_0^*,k,y_t^*,k) maximiza el beneficio miopemente para (p_0,k,p_t,k). La prueba se realiza demostrando que es contradictorio suponer lo contrario.

Comenzamos por definir la trayectoria (y_0',k,y_t',k), tal que $\mathbf{y}_t' \neq \mathbf{y}_t^*$ si $t = T$ y $\mathbf{y}_t' = \mathbf{y}_t^*$ si $t \neq T$. La trayectoria de consumo asociada es (c_0',k,c_t',k) Si (y_0^*,k,y_t^*,k) óptimo de Pareto, entonces $\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t (u(\mathbf{c}_t^*) - u(\mathbf{c}_t')) \geq 0$.

Supondremos que $\mathbf{y}_T'$ se encuentra lo suficientemente cerca de $\mathbf{y}_T^*$, de modo que, haciendo uso del teorema del valor medio, podamos determinar el signo de

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t (u(\mathbf{c}_t^*) - u(\mathbf{c}_t')) = \delta^T (u(\mathbf{c}_T^*) - u(\mathbf{c}_T')) + \delta^{T+1} (u(\mathbf{c}_{T+1}^*) - u(\mathbf{c}_{T+1}'))$$

por medio del signo de

$$\delta^T \nabla u(\mathbf{c}_T^*) \cdot (\mathbf{c}_T^* - \mathbf{c}_T') + \delta^{T+1} \nabla u(\mathbf{c}_{T+1}^*) \cdot (\mathbf{c}_{T+1}^* - \mathbf{c}_{T+1}')$$

Recordemos, antes de continuar, que $\nabla u(\mathbf{c}_t) = \left(\frac{\partial u(\mathbf{c}_t)}{\partial c_{1t}}, \ldots, \frac{\partial u(\mathbf{c}_t)}{\partial c_{Lt}} \right)$, y que, según el teorema del valor medio, para cada δ^t existe un $\hat{\mathbf{c}}_t$ tal que $\delta^t \left[u(\mathbf{c}_t^*) - u(\mathbf{c}_t') \right] = \delta^t \nabla u(\hat{\mathbf{c}}_t) \cdot (\mathbf{c}_t^* - \mathbf{c}_t')$.

Si adoptamos $\mathbf{p}_t = \delta^t \nabla u(\mathbf{c}_t^*)$, y recordamos que $\mathbf{c}_t = (\mathbf{b}_t - \mathbf{a}_t) + \omega_t$ y $\mathbf{y}_t = (\mathbf{a}_t, \mathbf{b}_{t+1}) \in Y$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\delta^T \nabla u(\mathbf{c}_T^*) \cdot (\mathbf{c}_T^* - \mathbf{c}_T') + \delta^{T+1} \nabla u(\mathbf{c}_{T+1}^*) \cdot (\mathbf{c}_{T+1}^* - \mathbf{c}_{T+1}') \\
&\quad = \mathbf{p}_T \cdot (-\mathbf{a}_T^* + \mathbf{a}_T') + \mathbf{p}_{T+1} \cdot (\mathbf{b}_{T+1}^* - \mathbf{b}_{T+1}') \\
&\quad = (\mathbf{p}_{T+1} \cdot \mathbf{b}_{T+1}^* - \mathbf{p}_T \cdot \mathbf{a}_T^*) - (\mathbf{p}_{T+1} \cdot \mathbf{b}_{T+1}' - \mathbf{p}_T \cdot \mathbf{a}_T') \\
&\quad = \pi_T^* - \pi_T'
\end{aligned}
$$

Notemos que sólo puede cumplirse $\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t (u(\mathbf{c}_t^*) - u(\mathbf{c}_t')) \geq 0$ si $\pi_T^* \geq \pi_T'$. Ello debe cumplirse para cualquier T, por lo que (c_0^*, k, c_t^*, k) es óptimo de Pareto sólo si (y_0^*, k, y_t^*, k) maximiza el beneficio miopemente para (p_0, k, p_t, k), siendo $\mathbf{p}_t = \delta^t \nabla u(\mathbf{c}_t^*)$

Con esto hemos probado que podemos definir un vector de precios que soporte una trayectoria de planes de producción para la cual los mercados se vacíen y consumidor y empresa resuelvan sus problemas de optimización, a partir de una trayectoria de consumo que resuelva el problema de planeación.

4. PROPIEDADES DE LAS TRAYECTORIAS DE EQUILIBRIO EN UNA ECONOMÍA CON UN CONSUMIDOR Y HORIZONTE INFINITO

A continuación, se comentan las propiedades de existencia, unicidad, computabilidad y estabilidad de las trayectorias de equilibrio.

a. Existencia

Gracias al segundo teorema del bienestar pueden establecerse las condiciones para la existencia del equilibrio Walrasiano. Si la función objetivo del problema de planeación de dimensión infinita es continua, y el conjunto restricción es compacto, el problema tiene solución y existe una trayectoria de consumo compatible con un equilibrio Walrasiano.

b. Unicidad

Si se supone que la función $u(\mathbf{c}_t)$ es estrictamente cóncava, es imposible que dos trayectorias de consumo (c_0', k, c_t', k) y (c_0'', k, c_t'', k) distintas resuelvan el mismo problema de planeación. A partir de ambas trayectorias, la convexidad de Y permite obtener una nueva trayectoria formada por $\mathbf{c}_t''' = \frac{1}{2}\mathbf{c}_t' + \frac{1}{2}\mathbf{c}_t''$. Obsérvese que

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(\mathbf{c}_t''') > \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(\mathbf{c}_t') = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(\mathbf{c}_t''),$$

por lo que no más de una trayectoria de consumo conduce a una trayectoria (y_0^*, k, y_t^*, k) óptimo de Pareto. Por nuestra discusión precedente, esto implica que el equilibrio Walrasiano es único.

c. Computabilidad

Resolver el problema de planeación permite hallar las trayectorias (c_0^*, k, c_t^*, k) y (y_0^*, k, y_t^*, k). Definiendo una sucesión de precios por medio de $\mathbf{p}_t = \delta^t \nabla u(\mathbf{c}_t^*)$ para $t \geq 0$, obtenemos el equilibrio Walrasiano. El equilibrio Walrasiano es, por tanto, computable.

c.1. Estado estacionario

Un tipo de trayectoria de producción merece especial atención, puesto que supone el modo más sencillo de computar un equilibrio. Se dice que la trayectoria (y_0, k, y_t, k) es estacionaria, o un estado estacionario, si para todo t se cumple que $\mathbf{y}_t = \overline{\mathbf{y}} = (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) \in Y$. Si la trayectoria estacionaria es eficiente, existen un $\mathbf{p}_0 \in R^L$ y un $\beta \in R^{\backprime}$ tales que es posible construir un vector de precios $(p_0, \beta p_0, k, \beta^t p_0, k)$ que dé soporte a $(\bar{y}, k, \bar{y}, k)$. Podemos demostrar esta afirmación recurriendo a las condiciones de primer orden del problema de la empresa, ya comentadas. Recordando que las coordenadas de los vectores $\mathbf{q}_{a_t}$ y $\mathbf{q}_{b_{t+1}}$ no varían en el tiempo, escribiremos $\overline{\mathbf{q}}_a$ y $\overline{\mathbf{q}}_b$, de modo que las condiciones son

$$\begin{cases} \mathbf{p}_{t+1} - \lambda_t \overline{\mathbf{q}}_b = \mathbf{0} \\ -\mathbf{p}_t - \lambda_t \overline{\mathbf{q}}_a = \mathbf{0} \end{cases} \qquad t = 0,1,k$$

Puesto que se cumple que

$$\mathbf{p}_t - \lambda_{t-1} \overline{\mathbf{q}}_b = \mathbf{0} \qquad t = 1,2,k$$

$$-\mathbf{p}_{t+1} - \lambda_{t+1} \overline{\mathbf{q}}_a = \mathbf{0} \qquad t = -1,0,k$$

también se cumple que

$$\mathbf{p}_{t+1} = \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \mathbf{p}_t = \frac{\lambda_t}{\lambda_{t-1}} \mathbf{p}_t$$

Con $\beta = \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}$, podemos verificar que

$$\mathbf{p}_{t+1} = \beta \mathbf{p}_t = \beta^2 \mathbf{p}_{t-1} = \ldots = \beta^{t+1} \mathbf{p}_0,$$

con lo que probamos la afirmación anterior. Para este caso, podemos obtener una única tasa de interés r implícita en el vector $(p_0, \beta p_0, k, \beta^t p_0, k)$, puesto que, como presentamos antes, $\beta = \frac{1}{1+r}$. Recordando que $\mathbf{p}_t = \delta^t \nabla u(\mathbf{c}_t^*)$, es posible computar un vector de precios suponiendo $\beta = \delta$.

Debe notarse que la teoría de los estados estacionarios requiere suponer que el ambiente donde se toman las decisiones de producción no varía en el tiempo.

c.2. Ecuación de Bellman y ecuación de Euler[3]

Consideraremos un caso particular para ilustrar el modo de plantear y resolver el problema de planeación utilizando programación dinámica. En este caso, supondremos una economía con $(N+1)$ sectores, en la cual existen N bienes de capital y un único bien de consumo. En términos del problema matemático no hay diferencia entre no incluir una dotación de trabajo y suponer que la cantidad de trabajo es constante en cada período. Nosotros no incluiremos el trabajo en la dotación del consumidor. Ni el bien de consumo. Sólo una cantidad de cada bien de capital en $t=0$. Por tanto,

$$\omega_0 = (\mathbf{k}_0, 0)$$

$$\omega_t = \mathbf{0} \qquad\qquad t = 1,2,\ldots$$

Denotando el vector de bienes de capital en t como $\mathbf{k}_t \in R^N$, supondremos que $\mathbf{k}_0$ se utiliza para producir $\mathbf{k}_1$, y, conjuntamente con $\mathbf{k}_1$, para producir el bien de consumo $c(\mathbf{k}_0,\mathbf{k}_1)$. Del mismo modo, $\mathbf{k}_1$ se utilizará para producir $\mathbf{k}_2$ y $c(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)$. Y así sucesivamente. El plan de producción $\mathbf{y}_t = (\mathbf{a}_t, \mathbf{b}_{t+1}) \in Y$ para este caso está formado por

$$\mathbf{a}_t = (\mathbf{k}_t, 0)$$

$$\mathbf{b}_{t+1} = (\mathbf{k}_{t+1}, c(\mathbf{k}_t, \mathbf{k}_{t+1})), \qquad\qquad \text{para } t = 0,1,\ldots$$

y la trayectoria de consumo por

$$\mathbf{c}_t = (\mathbf{0}, c(\mathbf{k}_{t-1}, \mathbf{k}_t)) = \mathbf{b}_t - \mathbf{a}_t \qquad\qquad \text{para } t = 1,2,\ldots$$

Por comodidad, escribiremos $u(\mathbf{c}_t) = u((\mathbf{0}, c(\mathbf{k}_{t-1}, \mathbf{k}_t)) \equiv u(\mathbf{k}_{t-1}, \mathbf{k}_t)$ y, por convención, haremos $u(\mathbf{k}_{-1}, \mathbf{k}_0) = 0$. El problema de planeación del consumidor es

---

[3] Son recomendables Fuente (1999) y Ljungqvist, L. y T. Sargent (2000).

$$\underset{\{\mathbf{k}_t\}_{t=1}^{t=\infty}}{\text{Max}} \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(\mathbf{k}_{t-1}, \mathbf{k}_t)$$

sujeto a

$$\mathbf{k}_0 = \overline{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{k}_t \geq 0$$

$$c_t(\mathbf{k}_{t-1}, \mathbf{k}_t) \geq 0 .$$

Los pares consecutivos que satisfacen las restricciones impuestas forman el conjunto A, que supondremos convexo. Las trayectorias formadas de modo que $(\mathbf{k}_{t-1}, \mathbf{k}_t) \in A \subset R^{2N}$ son llamadas admisibles.

Resolver el problema implica determinar una sucesión (k_0, k_1, k_2, k) admisible (es decir, que satisfaga las restricciones) tal que el valor $\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(\mathbf{k}_{t-1}, \mathbf{k}_t)$ sea máximo. Para intentar hacerlo, se recurre a la programación dinámica, que permite convertir este problema en otro que acepte soluciones recursivas.

Comenzamos definiendo la función de valor del planeador,

$$V(\overline{\mathbf{k}}) = \underset{\{\mathbf{k}_t\}_{t=1}^{t=\infty}}{\text{Max}} \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t u(\mathbf{k}_{t-1}, \mathbf{k}_t)$$

que expresa el valor óptimo del problema original, comenzando con una condición inicial arbitraria, $\mathbf{k}_0 = \overline{\mathbf{k}}$. Mientras el problema no se resuelva, la función valor es desconocida. Aun así, es posible probar que, si una trayectoria (k_0, k_1, k_2, k) resuelve el problema, cualquier porción de la trayectoria es óptima para un problema apropiado definido a partir del original y utilizando la misma, y aun desconocida, función de valor. Esta afirmación, conocida como principio del óptimo de Bellman, justifica utilizar la función $V(\cdot)$ a partir de $\mathbf{k}_1$, de modo que

$$V(\mathbf{k}_1) = \underset{\{\mathbf{k}_t\}_{t=2}^{t=\infty}}{\text{Max}} \sum_{t=2}^{\infty} \delta^t u(\mathbf{k}_{t-1}, \mathbf{k}_t) \,.$$

Haciendo uso del principio de óptimo, afirmamos que

$$\underset{\{\mathbf{k}_t\}_{t=1}^{t=\infty}}{\text{Max}} \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t u(\mathbf{k}_{t-1}, \mathbf{k}_t) = \underset{\mathbf{k}_1}{\text{Max}} \left[\delta u(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1) + \underset{\{\mathbf{k}_t\}_{t=2}^{t=\infty}}{\text{Max}} \sum_{t=2}^{\infty} \delta^t u(\mathbf{k}_{t-1}, \mathbf{k}_t) \right],$$

y, utilizando la función valor, podemos escribir

$$V(\bar{\mathbf{k}}) = \underset{\mathbf{k}_1}{\text{Max}} \left[\delta u(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1) + V(\mathbf{k}_1) \right] \cdot$$

En general, debe cumplirse que

$$V(\mathbf{k}_{t-1}) = \underset{\mathbf{k}_t}{\text{Max}} \left[\delta^t u(\mathbf{k}_{t-1}, \mathbf{k}_t) + V(\mathbf{k}_t) \right] .$$

Esta ecuación, conocida como ecuación de Bellman, puede escribirse de un modo más general (y más frecuentemente utilizado) si expresa en valores corrientes en t. Para ello, se define la función de valor corriente en t, con condición inicial $\mathbf{k}_{t-1}$ como

$$v(\mathbf{k}_{t-1}) = \frac{V(\mathbf{k}_{t-1})}{\delta^t}$$

obteniéndose la ecuación

$$v(\mathbf{k}_{t-1}) = \underset{\mathbf{k}_t}{\text{Max}} \left[u(\mathbf{k}_{t-1}, \mathbf{k}_t) + \delta v(\mathbf{k}_t) \right] \cdot$$

Es frecuente evitar el uso de subíndices. Así se enfatiza que la función $V(\cdot)$ es invariante con respecto al tiempo. Por ello, escribimos la ecuación de Bellman en valores corrientes como

$$v(\mathbf{k}) = \underset{\mathbf{k}'}{\text{Max}} \left[u(\mathbf{k}, \mathbf{k}') + \delta v(\mathbf{k}') \right] \cdot$$

siendo el punto $(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \geq \mathbf{0}$ elemento de un conjunto convexo que satisface la condición $c(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \geq 0$.

Como hemos indicado previamente, la función $v(\cdot)$ es desconocida. Sin embargo, es posible establecer condiciones para garantizar su existencia y unicidad. A pesar de no detenernos en el argumento, observemos que si es posible definir un operador T tal que

$$Tv(\mathbf{k}) = \underset{\mathbf{k}'}{\text{Max}}\left[u(\mathbf{k},\mathbf{k}') + \delta v(\mathbf{k}')\right]$$

la función v resuelve la ecuación de Bellman sí y sólo sí es un punto fijo de T, esto es, si $v = Tv$. Bajo algunos supuestos, T puede ser una contracción, y su punto fijo existe y es único.

Para resolver la ecuación debe determinarse otra función desconocida, llamada función de política $\psi(\cdot)$, por medio de la cual se determina el vector óptimo $\mathbf{k}'$ a partir de $\mathbf{k}$. Por ser función de funciones, la ecuación de Bellman es una ecuación funcional: su solución requiere un par de funciones $v(\cdot)$ y $\psi(\cdot)$ tales que

$$v(\mathbf{k}) = u[\mathbf{k},\psi(\mathbf{k})] + \delta v[\psi(\mathbf{k})]$$

donde $\mathbf{k}' = \psi(\mathbf{k})$.

Nótese que el problema original era hallar una trayectoria admisible (k_0, k_1, k_2, k) que resolviese el problema $\underset{\{\mathbf{k}_t\}_{t=1}^{t=\infty}}{\text{Max}} \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(\mathbf{k}_{t-1}, \mathbf{k}_t)$. El nuevo problema exige hallar dos funciones desconocidas, $v(\cdot)$ y $\psi(\cdot)$, que satisfagan la ecuación de Bellman. Si ello se logra, puede obtenerse la trayectoria (k_0, k_1, k_2, k) recursivamente: si $\mathbf{k}_0 = \overline{\mathbf{k}}$, entonces

$$(k_0, k_1, k_2, k) = (\overline{k}, \psi(\overline{k}), \psi(\psi(\overline{k})), k).$$

Uno de los métodos utilizados para resolver la ecuación de Bellman que hemos presentado requiere definir las correspondientes ecuaciones de Euler. Para ello, seguimos los siguientes pasos:

Se supone que el problema ya ha sido resuelto. Se dispone de una trayectoria admisible $(\hat{k}_0, \hat{k}_1, \hat{k}_2, k)$, estrictamente interior a A, para la cual la función $\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(\mathbf{k}_{t-1}, \mathbf{k}_t)$ alcanza su máximo. Para hallar el vector $\mathbf{k}_t$ suponiendo conocidos todos los demás elementos de la trayectoria óptima, debe resolverse el problema

$$\operatorname*{Max}_{\mathbf{k}_t} \ \delta^t u(\hat{\mathbf{k}}_{t-1}, \mathbf{k}_t) + \delta^{t+1} u(\mathbf{k}_t, \hat{\mathbf{k}}_{t+1})$$

cuyas condiciones de primer orden son

$$\frac{\partial u(\hat{\mathbf{k}}_{t-1}, \hat{\mathbf{k}}_t)}{\partial k_{n+N,t}} + \delta \frac{\partial u(\hat{\mathbf{k}}_t, \hat{\mathbf{k}}_{t+1})}{\partial k_{n,t}} = 0 \qquad \text{para} \quad \begin{array}{l} t = 1,2,k \\ 1 \leq n \leq N \end{array}$$

La trayectoria óptima debe satisfacer estas condiciones. A partir de ellas, podemos buscar la trayectoria óptima. Comenzamos con $t = 1$. Dado el vector $\hat{\mathbf{k}}_0 = \overline{\mathbf{k}}$, las condiciones de primer orden forman un sistema de N ecuaciones con $2N$ incógnitas, constituidas por el par $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$. Fijando arbitrariamente un vector $\mathbf{k}_1$, obtenemos un sistema de N ecuaciones con N incógnitas, que puede resolverse para $\mathbf{k}_2$. Con $t = 2$, disponiendo de un sistema de N ecuaciones con N incógnitas, y del par $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$, podemos obtener $\mathbf{k}_3$. Y así sucesivamente: las ecuaciones de Euler inducen un sistema de ecuaciones en diferencias cuya condición inicial es $(\overline{\mathbf{k}}, \mathbf{k}_1)$.

Notemos que el punto clave en este método de solución es la elección de $\mathbf{k}_1$. Luego de resolver el sistema de ecuaciones en diferencias con condición inicial es $(\overline{\mathbf{k}}, \mathbf{k}_1)$, y manteniendo fijo $\overline{\mathbf{k}}$, se elige un $\mathbf{k}_1$ que permita generar una sucesión acotada e infinita tal que $(\mathbf{k}_{t-1}, \mathbf{k}_t) \in A \subset R^{2N}$. De hallarse tal sucesión, hemos determinado la función de política $\psi(\cdot)$.

d. Estados estacionarios, estabilidad y caos

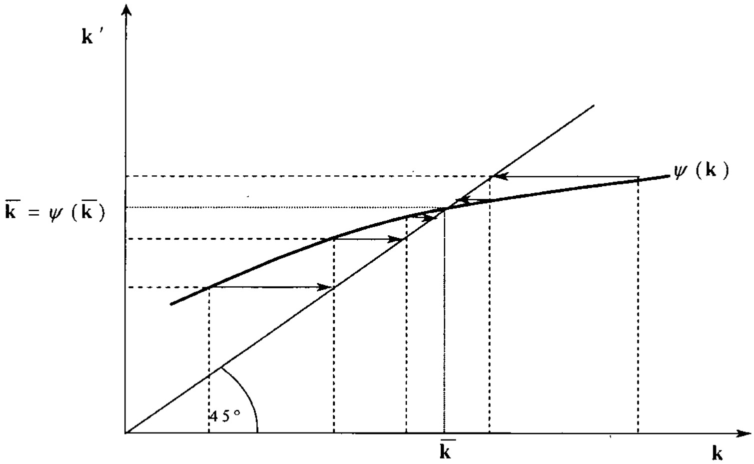
Ahora bien, ¿cómo puede ser la función $\psi(\cdot)$? Según el teorema Boldrin-Montruccio (1986), *cualquier* función $\psi(\cdot)$ puede generarse a partir de algún $u(\mathbf{k}_{t-1}, \mathbf{k}_t)$ y algún $\delta > 0$. Como comentan Brock *et al* (1991:31), este teorema demuestra "... que cualquier dinámica, aun una dinámica caótica, puede ser generada por la solución óptima de un modelo de crecimiento con horizonte infinito". Por ello, el teorema es un resultado "análogo para la economía dinámica recursiva al resultado de Sonneschein, Mantel y Debreu para la teoría del equilibrio general".

Consideraremos cuatro casos. Aun cuando para las representaciones gráficas utilizaremos $: R \supset K \to R$, continuaremos utilizando la notación vectorial.

En primer lugar, supongamos que $\bar{\mathbf{k}} = \psi(\bar{\mathbf{k}})$, con $\mathbf{k}_0 = \bar{\mathbf{k}}$. En este caso, la trayectoria de producción es estacionaria, $(\bar{y}, k, \bar{y}, k)$. Podemos llamar dicha trayectoria regla de oro si, dado $\mathbf{p}_0$, es miopemente soportada por precios constantes, $\mathbf{p}_t = \mathbf{p}_0$. La llamaremos regla de oro modificada si el sistema de precios que la soporta miopemente es $\mathbf{p}_t = \beta' \mathbf{p}_0$, y $\beta = \delta$. Esta última igualdad utiliza la condición de primer orden para maximizar la utilidad del consumidor dentro de su conjunto presupuestario, $\mathbf{p}_t = \delta' \nabla u(\bar{\mathbf{k}}, \bar{\mathbf{k}})$. Si las sucesiones de precios (normalizadas) se definen de este modo, las soluciones de los problemas de optimización de la empresa y el consumidor son consistentes.

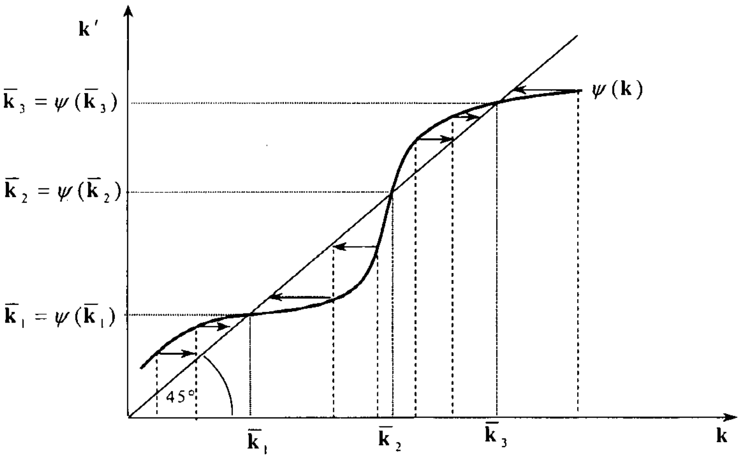
En segundo lugar, supondremos que una función $\psi(\cdot)$ tiene un punto fijo, $\bar{\mathbf{k}}$, donde $\bar{\mathbf{k}} = \psi(\bar{\mathbf{k}})$, pero que también puede generar valores $\mathbf{k}' = \psi(\mathbf{k})$ tales que $\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}$. En este caso, existen varias trayectorias óptimas, y, entre ellas, una única trayectoria estacionaria regla de oro modificada. Según el teorema del peaje (*turnpike theorem*), si la función $u(\cdot,\cdot)$ es estrictamente cóncava y el consumidor es lo suficientemente paciente (δ se encuentra lo suficientemente cerca de 1), la función $\psi(\cdot)$ es una contracción. Ello implica que la única trayectoria estacionaria que existe atrae cualquier trayectoria óptima posible desde cualquier posición inicial. En este caso, se dice que el estado estacionario es globalmente estable, puesto que $\mathbf{k}_t \to \bar{\mathbf{k}}$ desde cualquier $\mathbf{k}_0$. Podemos apreciar dicho resultado en el siguiente gráfico:

Figura No. 2



Por el teorema Boldrin-Montruccio, sabemos que podemos generar cualquier $\psi(\cdot)$ a partir de una función $u(\cdot,\cdot)$ es cóncava y un $\delta > 0$, por lo que una trayectoria estacionaria no necesariamente es globalmente estable. Ilustremos un caso en el cual la función $\psi(\cdot)$ tiene más de un punto fijo, y uno de ellos es inestable:

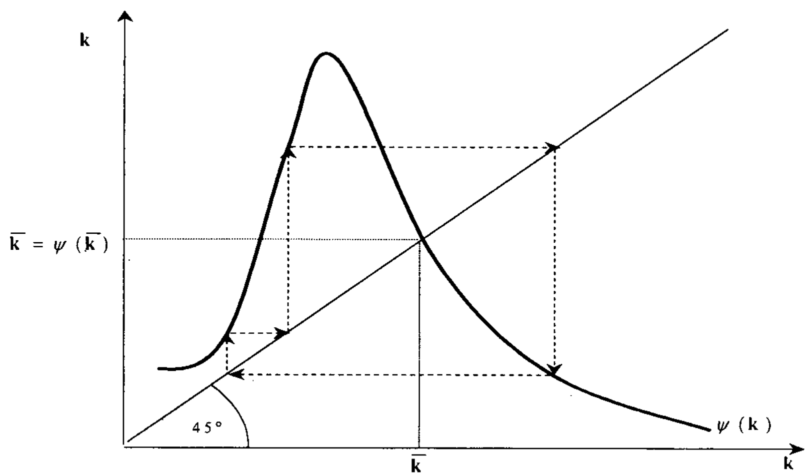
Figura No. 3



En este caso, el tercero, los puntos fijos $\bar{k}_1$ y $\bar{k}_3$ implican dos trayectorias de estado estacionario localmente estables, y el punto $\bar{k}_2$ implica una trayectoria localmente inestable. En este caso, aun es cierto que desde cualquier k_0 el sistema tiende hacia algún estado estacionario.

En cuarto lugar, presentamos uno de los casos más interesantes que podemos considerar con lo visto hasta ahora. Aparte de tener un punto fijo, existe un ciclo de período 3 para la función $\psi(\cdot)$, por lo que el sistema ilustrado presenta un comportamiento caótico.

Figura No. 4



El comportamiento de las trayectorias definidas por $\psi(\cdot)$ puede ser muy simple, o extraordinariamente complejo. Dependerá de las condiciones iniciales. Si la condición inicial es $k_0 = \bar{k}$, la trayectoria correspondería a un estado estacionario. Si fuese alguno de los tres valores de $\mathbf{k}$ que forman el ciclo de período 3, la trayectoria se limitaría a repetir dichos tres valores. Dos teoremas son muy importantes para describir los posibles comportamientos dinámicos del sistema[4]. Por el teorema de Sarkovskii sabemos que para cualquier número natural *n* podemos hallar una condición inicial que defina un ciclo de período *n*.

[4] Ambos teoremas se encuentran expuestos en Holmgren (1996), Alligood, Sauer y Yorke (1997) y Balza (2003).

Y, por el teorema de Li-Yorke sabemos también que para algunas condiciones iniciales, la trayectoria puede ser caótica. Ello implica, en términos muy simples, que puede tener cambios agudos de comportamiento indistinguibles de los aleatorios y que nunca podría regresar a un punto en donde previamente se hubiese encontrado[5]. Ello implica que la trayectoria de equilibrio puede ser compleja, y dependiente de las condiciones iniciales de un modo difícilmente calculable.

CONCLUSIONES

Parte importante del trabajo realizado por muchos economistas durante el siglo XX partió de suponer, implícita o explícitamente, que la mejor aproximación a la dinámica de los sistemas económicos podía lograrse a partir de sistemas lineales, dentro de los cuales pudiera definirse un único estado estacionario asintóticamente estable. Según este enfoque, los sistemas económicos se regularían a sí mismos, y únicamente se separarían de sus trayectorias de equilibrio como consecuencia de perturbaciones aleatorias exógenas a dichos sistemas. La preferencia de muchos autores por esta aproximación dejaba de lado la investigación de la dinámica no lineal, que podría explicar equilibrios múltiples y fluctuaciones endógenas periódicas, o, peor aun, caóticas, en modelos determinísticos[6].

Aparte de la simpatía que los autores neoclásicos sentían por un sistema inherentemente estable, los modelos lineales eran analítica y econométricamente menos difíciles de construir, y tenían aparentes soportes teóricos y empíricos. Uno de los apoyos teóricos fundamentales era la creencia de que comportamientos no lineales requerían supuestos de comportamiento que eran contrarios al requisito de racionalidad de los agentes, que debía manifestarse en la definición y solución de problemas de optimización. Sin embargo, los avances en los conocimientos matemáticos entre los economistas permitieron construir modelos de equilibrio rigurosamente formulados en los cuales los agentes optimizan con previsión perfecta y, sin embargo, pueden persistir fluctuaciones endógenas (periódicas o caóticas), sin incorporar shocks aleatorios exógenos, ni premisas implausibles o patológicas. Modelos determinísticos relativamente simples, con agentes racionales, mercados que se vacían, información perfecta y previsión perfecta pueden producir trayectorias

---

[5] Aunque en algunos casos pueda desplegarse (oscilatoria y muy desordenadamente) en una región acotada.

[6] Esta sección se basa principalmente en los artículos de Baumol y Benhabib (1989), Boldrin y Woodford (1990) y Brock *et al* (1991).

muy complejas de precios y cantidades, tanto que podrían pasar la mayoría de las pruebas típicas de aleatoriedad. El único objetivo de este trabajo ha sido presentar un ejemplo de tales modelos, indicando algunos de los conceptos matemáticos relevantes en la discusión de sus características.

Luego de describir los problemas de optimización intertemporal del agente y la empresa dentro de un modelo específico, y de definir y caracterizar el correspondiente equilibrio Walrasiano, hemos ilustrado la posibilidad de que la interacción de un consumidor y una empresa optimizadores produzca trayectorias de equilibrio muy simples, o, por el contrario, muy complejas, incluso caóticas. En ello radica la importancia del teorema Boldrin-Montruccio (1986), que forma parte de un extraordinario conjunto de trabajos dedicados al estudio de las propiedades dinámicas de los equilibrios temporales. Referencias recientes sobre estos temas pueden encontrarse en Boldrin *et al* (2001) y en Mitra y Nishimura (2001).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alligood, K; Sauer, T. y Yorke, J. (1997), *Chaos, An Introduction to Dynamical Systems,* Editorial Springer-Verlag, New York.

Apostol, T. (1982), *Análisis matemático,* segunda edición, Editorial Reverte, S.A., España.

Balza Ronald (2003), *Introducción a la teoría del equilibrio general,* Trabajo de ascenso presentado en la Escuela de Economía de la UCV para ascender a la categoría de Asistente, Caracas.

Baumol, W. y J. Benhabib (1989) "Chaos: significance, mechanism, and economic applications" en *The Journal of Economic Perspectives,* No.3.

Becker, R. y J. Boyd (1997), *Capital theory, equilibrium analysis and recursive utility,* Blackwell Publishers Inc, USA.

Berge, C. (1997), *Topological spaces*, Dover Publications, Inc., USA.

Boldrin, M. y L. Montruccio (1986), "On the indeterminacy of capital accumulation paths" en *Journal of Economic Theory,* No.40.

—, K. Nishimura, T. Shigoka, y M. Yano (2001), "Chaotic equilibium dynamics in endogenous growth models" en *Journal of Economic Theory,* No.96.

—, y M. Woodford (1990), "Equilibrium models displaying endogenous fluctuations and chaos. A survey" en *Journal of Monetary Economics,* No.25.

Brock, W., D. Hsieh y B. LeBaron (1991), *Nonlinear dynamics, chaos, and instability: statistical theory and economic evidence*, The MIT Press, USA.

Farmer, R. (1993), *The Macroeconomics of Self-Fulfilling Prophecies*, MIT, USA.

Fuente, A. (1999), *Mathematical Methods and Models for Economists*, Cambridge University Press, USA.

Holmgren, R. (1996), *A First Course In Discrete Dynamical Systems,* Editorial Springer-Verlag, New York.

Ljungqvist, L. y T. Sargent (2000), *Recursive Macroeconomic Theory*, MIT Press, USA.

Malinvaud, E. (1971), *Leçons de Théorie Microéconomique*, Paris, Dunod.

Mas-Colell, A., M. Whinston and J. Green (1995), *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, New York.

Mendelson, B . (1975), *Introduction to Topology*, Dover Publications, Inc., USA.

Mitra, T. y K. Nishimura (2001), "Introduction to intertemporal equilibrium theory: indeterminacy, bifurcations, and stability" en *Journal of Economic Theory*.

Puu, T. (1997), *Nonlinear economic dynamics*, Springer, Alemania.