



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

MECÁNICA CUÁNTICA EN EL ESPACIO DE LOBACHEVSKI

Ling Alfonso Sequera Marin

Caracas, 26 de junio de 2009

Quienes suscriben, miembros del jurado que examinó el trabajo presentado por el Br. **Ling Sequera** titulado: **Mecánica cuántica en el espacio de Lobachevski**, para optar al título de Licenciado en Física, consideramos que dicho trabajo cumple con los requisitos exigidos por los reglamentos respectivos y por lo tanto lo declaramos APROBADO en nombre de la Universidad Central de Venezuela.

Abraham Lozada, Tutor

fecha

Anamaría Font

fecha

Víctor Villalba

fecha

Caracas 26 de junio de 2009.

Mecánica cuántica en el espacio de Lobachevski

Ling Alfonso Sequera Marin

Trabajo especial de grado presentado
ante la ilustre Facultad de Ciencias de la
Universidad Central de Venezuela como
requisito parcial para optar al título de:
Licenciado en Física.

Abraham Lozada, Tutor

fecha

Resumen

Mecánica cuántica en el espacio de Lobachevski

Ling Alfonso Sequera Marin

Universidad Central de Venezuela

Abraham Lozada, Tutor

En este trabajo se estudian las consecuencias para la mecánica cuántica de suponer que el espacio de configuración no es euclídeo, sino hiperbólico. Nuestro objetivo principal en este trabajo ha sido la obtención de los observables básicos que describen la mecánica cuántica de una partícula en espacio hiperbólico. El procedimiento de cuantización, para obtener estos observables básicos, se realiza de manera geométrica (esto es, independiente de las coordenadas). En este caso, como el euclídeo, los observables se obtienen de propiedades fundamentales de la geometría hiperbólica (los vectores de Killing asociados a la métrica). El modelo de espacio hiperbólico usado es el del hiperboloide en espacio de Minkowski. Se considera, por completitud y para verificar resultados previos, el átomo de hidrógeno y el oscilador armónico en esta geometría.

Abraham Lozada

Tutor

Agradecimientos

A Dios, por mantenerme despierto.

A mis padres y a mis hermanos en Dios, por apoyarme.

Al profesor Abraham Lozada, por compartir sus conocimientos conmigo y disponer en gran medida de su tiempo para la elaboración de este trabajo

A mi novia Souad, por estar siempre conmigo.

Índice general

1. Introducción	3
2. Notación y definiciones	6
3. Geometría Hiperbólica	9
3.1. Historia, geometría Euclídea y no Euclídea	9
3.2. Modelo del Disco Proyectivo (Klein-Beltrami)	11
3.3. Modelo del Disco Conformal (Poincaré)	14
3.4. Modelo del Semi-Plano Superior (Poincaré)	17
3.5. Modelo del Hiperboloide (Minkowski)	19
3.5.1. El espacio de Minkowski	20
3.5.2. Espacio Hiperbólico n-dimensional	23
3.5.3. \mathbb{H}^n como una variedad riemanniana	25
4. Mecánica Cuántica	31
4.1. Postulados de la mecánica cuántica	31
4.2. Cuantización	33
4.3. Problemas de la cuantización canónica	35
5. Mecánica cuántica en el espacio hiperbólico	38
5.1. Movimiento clásico en el hiperboloide	38

5.2. Cuantización en el espacio hiperbólico	41
6. Partícula en un potencial central	47
6.1. Átomo de Hidrógeno	47
6.2. Oscilador Armónico	55
6.3. Partícula confinada entre esferas hiperbólicas concéntricas	60
7. Plano de Lobachevski	63
7.1. Potencial Coulombiano	63
8. Discusión	66
9. Apéndices	69

Capítulo 1

Introducción

La mecánica cuántica usual, sin tomar en cuenta la gravitación, relativista galileana o einsteniana, se formula en un espacio euclídeo. El tiempo es un parámetro. Esto es básico para la obtención de ciertos observables de la teoría como, por ejemplo, posición, momento lineal y momento angular.

Por otro lado, sabemos que el uso de la geometría euclidiana, con respecto a los experimentos físicos, es una aproximación excelentemente buena. Sin embargo, hay un axioma de la geometría euclídea cuya “verdad” no es de manera alguna evidente. Se trata del famoso postulado de la paralela única. El punto importante es que esta afirmación es sobre rectas infinitas y no hay manera de comprobarla, sino con rectas tan grandes como se quieran, pero finitas.

La geometría hiperbólica, la cual es un alternativa a la euclidiana, consiste en mantener todos los postulados de la geometría excepto el quinto axioma (el postulado de las paralelas). La geometría hiperbólica fue establecida en el siglo XIX, históricamente su descubrimiento es atribuido al matemático ruso Nikolai Ivanovich Lobachevski quien publicó sus resultados de geometría no euclidiana en 1830, sin embargo se conoce que el matemático húngaro János Bolyai de manera independiente obtuvo resultados análogos a los de Lobachevski y quizá antes, pero los publicó hacia el año 1832 como un apéndice de un libro escrito por su padre Farkas Bolyai, y la comunidad científica

relegó su aporte solo para reconocerlo hasta 30 años después de su publicación. Se conoce que el matemático alemán Carl Frederich Gauss que era amigo del padre de János Bolyai, mediante correspondencia revela que el había obtenido los mismos resultados que János con anterioridad, pero de Gauss no se conoce ninguna publicación. Bolyai, a quien Gauss califica como genio de primera clase, culmina su trabajo mencionando que no es posible determinar solo a través del razonamiento matemático si la geometría del universo físico es euclidiana o no, que esa es una tarea de las ciencias físicas.

En este trabajo, queremos ver cuales son las consecuencias básicas para la mecánica cuántica de suponer que el espacio de configuración no es euclídeo, sino hiperbólico. Históricamente, estas consecuencias han sido estudiadas a través del átomo de hidrógeno. En particular, el átomo de hidrógeno en una geometría no euclidiana (esférica), fue estudiado por Schrödinger [1] en 1940 y analizado por Infeld [2] y Stevenson [3] al año siguiente, algunos años después (1945) Infeld y Schild [4] obtuvieron el espectro en un “universo abierto de curvatura constante negativa” (espacio hiperbólico tridimensional). Otras referencias que consideran este problema, tanto desde el punto de vista clásico como cuántico, son [5]-[16]. Nosotros queremos considerar, antes que ejemplos particulares (como el átomo de hidrógeno y el oscilador armónico), la construcción de los observables básicos de la teoría. En efecto, ahora el momento lineal (generador de las traslaciones en espacio euclídeo) no es una simetría. ¿Cuál es el sustituto de este observable? En particular queremos construir los observables fundamentales asociados a una partícula libre.

Para obtener estos observables haremos uso del modelo del hiperboloide en el espacio de Minkowski. Como es bien conocido, existen varios modelos de la geometría hiperbólica (esto es, modelos que realizan los axiomas de esta geometría). Uno de ellos es el llamado del hiperboloide. Este modelo es notable porque relaciona en cierta manera, la geometría hiperbólica espacial (no hay tiempo) con la geometría de la relatividad especial. La idea de la cuantización que usaremos esta basada en las simetrías (isometrías de la distancia entre dos puntos en geometría hiperbólica) y los generadores de

esta. De la misma manera que \vec{P} (el trimomento) y \vec{J} (el momento angular) generan las simetrías euclídeas, tenemos otras seis cantidades que son las candidatas a cuantizar, que generan las simetrías hiperbólicas.

Después de construir los observables, incluyendo el hamiltoniano, se aplican los resultados a los casos del átomo de hidrógeno, oscilador armónico y partícula libre entre “esferas” (todo esto en tres dimensiones espaciales).

En lo que sigue de esta introducción describiremos brevemente la organización del trabajo. En la sección 2 estableceremos alguna notación y definiciones que serán útiles en el desarrollo del trabajo. En la sección 3, haremos una revisión de la literatura de la geometría hiperbólica con énfasis en los resultados sobre el hiperboloide que luego usaremos. En la sección 4, recordamos, por completitud, los postulados básicos de la mecánica cuántica ortodoxa. Se plantea el problema de la obtención de los observables de sus respectivos clásicos (cuantización). También se recuerda, a pesar de ser usado frecuentemente, que la llamada cuantización canónica tiene problemas. En la sección 5, construiremos los observables básicos de una partícula libre en geometría hiperbólica tridimensional. Como era de esperarse, el álgebra de Lie de estos observables es diferente a la euclídea. Mas aún, la posición y momentos no tienen las reglas de conmutación de Heisenberg. De estos observables se construye el hamiltoniano exigiendo que conmute con todos los observables del álgebra de Lie (esto es, que sea un operador de Casimir). La cuantización obtenida es geométrica (no depende de coordenadas). En la sección 6, consideraremos el problema del átomo de hidrógeno en espacio hiperbólico. Se resuelve la ecuación diferencial parcial para el espectro de energía negativo (estados ligados). Lo mismo se hace con el oscilador armónico (energía positiva), y con la partícula dentro de “esferas”. En la sección 7, se hacen unas consideraciones sobre la cuantización en el plano de Lobachevski (bidimensional). Se considera el análogo del potencial coulombiano y se plantea la ecuación “radial” (después de la separación de variables) sin resolverla. Finalmente, en la sección 8 algunas conclusiones son elaboradas junto con la discusión de los resultados obtenidos.

Capítulo 2

Notación y definiciones

\mathbb{Z} ,	conjunto de los números enteros.
\mathbb{Z}_+ ,	conjunto de los números enteros positivos.
\mathbb{R} ,	conjunto de los números reales (recta real).
\mathbb{R}_+ ,	conjunto de los números reales positivos.
\mathbb{C}	conjunto de los números complejos.
\mathbb{R}^n ,	espacio real n-dimensional (espacio euclídeo \mathbb{E}^n).
$\mathbb{R}^{n,1}$,	espacio de Minkowski n+1-dimensional.
$\mathbb{R}_\uparrow^{n,1}$,	conjunto de vectores tipo tiempo positivo, subespacio de $\mathbb{R}^{n,1}$.
\mathbb{D}^n ,	espacio hiperbólico n-dimensional (Modelo del disco proyectivo), sección 3.2.
\mathbb{B}^n ,	espacio hiperbólico n-dimensional (Modelo del disco conformal), sección 3.3.
\mathbb{U}^n ,	espacio hiperbólico n-dimensional (Modelo del semiplano superior), sección 3.4.
\mathbb{H}^n ,	espacio hiperbólico n-dimensional (Modelo del hiperboloide), sección 3.5.
\vec{x} ,	vector del espacio euclídeo \mathbb{R}^n .

\mathbf{x} ,	vector del espacio hiperbólico (para cualquier modelo).
$ a $,	módulo, valor absoluto de a , con $a \in \mathbb{C}$.
$\ x\ _N$,	norma de x , con $x \in N$ un espacio normado.
$\vec{x} \cdot \vec{y}$,	producto escalar de \vec{x} y \vec{y} , con $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.
$\langle x, y \rangle$,	producto escalar de x y y , con $x, y \in V$ un espacio de pre-Hilbert.
$\langle \varphi \phi \rangle$,	producto escalar de φ y ϕ , con $\varphi, \phi \in \mathcal{H}$ un espacio de Hilbert.
$\{e_i\}$,	base de un espacio vectorial.
$d_M(x, y)$,	métrica, distancia entre dos puntos, vectores $x, y \in M$ un espacio métrico.
g_x ,	tensor métrico de una variedad riemanniana X (o pseudoriemanniana).
x^i ,	componentes contravariantes de un vector x (coordenadas locales).
ds ,	elemento de línea de una curva en una variedad riemanniana o pseudoriemanniana.
$C(M) = C^1(M)$,	conjunto de funciones al menos una vez derivables en la variedad diferenciable M .
$C^n(M)$,	conjunto de funciones n-veces derivables en la variedad diferenciable M .
$C_0(M)$,	conjunto de funciones de soporte compacto en la variedad diferenciable M .
$T_x(M)$,	espacio vectorial tangente al punto $x \in M$ una variedad diferenciable.
$T(M)$,	fibrado tangente a la variedad diferenciable M .
$T^*(M)$,	fibrado cotangente (dual de $T(M)$) a la variedad diferenciable M .

$\{q^i\}$,	coordenadas generalizadas del espacio de configuraciones de un sistema físico, sección 4.1.
$\dot{\alpha}$,	derivada de $\alpha = \alpha(s)$ respecto del parametro real s que la define, sección 4.1.
$\{p_i\}$,	momentos generalizados del espacio de fase de un sistema físico.
$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q^i, \dot{q}^i, t)$,	función lagrangiana asociada a un sistema físico, sección 4.1.
$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q^i, p_i, t)$,	función hamiltoniano asociado a un sistema físico, sección 4.1.
$\{f, g\}_{PB}$,	corchetes de Poisson de $f, g \in C^1(M)$, sección 4.1.
\hat{A} ,	operador lineal de un espacio de Hilbert asociado a una función \mathcal{A} (observable clásico).
$\mathcal{D}(\hat{A})$,	dominio del operador \hat{A} .
$\mathcal{O}(\mathcal{H})$,	conjunto de operadores lineales sobre el espacio de Hilbert \mathcal{H} .
$[\hat{A}, \hat{B}]$,	corchetes de Lie, operación de conmutación entre los operadores $\hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$.
$L^2(M, dx^n)$,	espacio de Hilbert de las funciones de cuadrado integrable sobre la variedad riemanniana M con medida dx^n (elemento de volumen).
$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$,	derivada respecto de la variable x .
$F(a, b; c; z)$,	función hipergeométrica de parámetros $a, b, c \in \mathbb{C}$ y variable $z \in (0, 1)$.
$M(a; c; z)$,	función hipergeométrica confluyente de parámetros $a, c \in \mathbb{C}$ y variable $z \in (0, \infty)$.

Capítulo 3

Geometría Hiperbólica

3.1. Historia, geometría Euclídea y no Euclídea

“Los elementos” son un tratado de trece libros escritos por el matemático griego Euclides en Alejandría cerca del año 300 A.C., ellos contienen una colección de definiciones, axiomas, teoremas, y sus pruebas matemáticas. Los trece libros comprenden la geometría euclídea y una versión griega antigua de la teoría de números, es en estos libros donde se introduce el tratamiento axiomático deductivo de las matemáticas. El primero de los libros desarrolla la geometría plana comenzando con asunciones básicas consistentes de una lista de 23 “definiciones” de términos geométricos, después los axiomas en 5 “postulados” que detallaremos subsiguientemente, luego un conjunto de 5 conjeturas “las nociones comunes” que tratan acerca del concepto de medida, y por último una serie de teoremas y pruebas en 48 “proposiciones”. Dentro de la lista de definiciones se encuentran desde luego la de punto, línea, línea recta, segmento de línea, superficie, superficie plana, círculo, ángulo y paralelismo entre otras que no serán útiles para los efectos aquí expuestos. Los postulados se disponen a continuación y fundamentan toda una geometría de un espacio bidimensional:

1. *A través de dos puntos diferentes solo pasa una línea recta.*

2. *Un segmento de línea recta puede ser extendida continuamente a una línea recta.*
3. *Para un centro y un radio arbitrarios hay solo una circunferencia.*
4. *Todos los ángulos rectos son iguales.*
5. *Si una línea recta yace sobre dos líneas rectas tales que hacen los ángulos interiores del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos líneas, se encontrarán en el lado en el cual los ángulos son menores que dos ángulos rectos.*

El quinto postulado así enunciado quizá no es tan fácil de entender, para visualizarlo vea la figura 3.1 que lo ilustra. Nótese que la suma de los ángulos interiores $\alpha + \beta$ se aproxima a π .

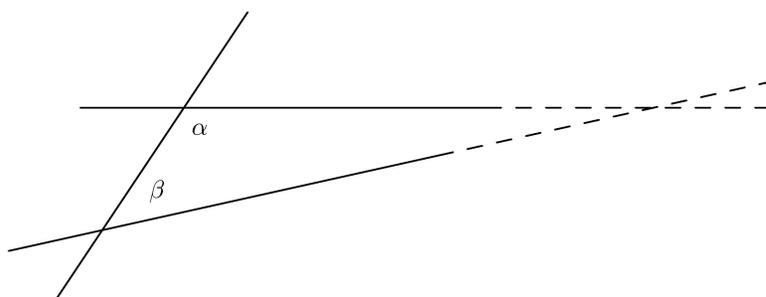


Figura 3.1: *5to postulado en el plano euclídeo*

El matemático escocés John Playfair proporciona una manera alternativa, aunque más intuitiva del enunciado del quinto postulado, es el llamado postulado de las paralelas:

- *A través de un punto exterior a una línea recta dada hay una y solo una recta paralela a esa recta.*

Desde la antigüedad ya se consideraba que el postulado anterior no era tan evidente como los otros cuatro, esto se debe a la construcción mental abstracta que supone admitir

que al prolongar dos segmentos de recta infinitamente estos no se interceptarán. Por cientos de años geómetras perturbados por su complejidad intentaron demostrarlo como un teorema inducido por los primeros cuatro postulados. Muchos trataron de encontrar una prueba usando el método de reducción al absurdo, entre ellos el matemático árabe Ibn al-Haytham en el siglo XI, los matemáticos persas Omar Khayyam y Nasir al-Din al-Tusi en los siglos XII y XIII respectivamente, aunque sin resultados concluyentes en cuanto a la independencia o no del quinto postulado, se podría decir que sus teoremas son los primeros de las geometrías que hoy conocemos como elíptica e hiperbólica.

Fue hasta el siglo XIX cuando de manera independiente el matemático húngaro János Bolyai y el matemático ruso Nikolai Lobachevski encontraron una geometría completamente consistente (la geometría hiperbólica) negando el postulado de las paralelas de Euclides. Se puede verificar que solo hay dos formas posibles de dar como incierto el postulado de las paralelas, una opción sería suponer que a través de un punto exterior a una recta no pasan rectas paralelas a esta, esto es, cualquier recta intercepta a una recta dada, lo que daría lugar a la llamada geometría esférica (elíptica); la otra opción sería admitir que a través de un punto exterior a una línea recta pasan infinitas rectas paralelas a dicha recta, esta suposición da origen a la geometría hiperbólica, aun así, después de los trabajos de Lobachevski, Bolyai y Gauss no había un modelo que concretara esta geometría, en las siguientes secciones de este capítulo se estudiarán los modelos más importantes que han surgido para describir el espacio de Lobachevski.

3.2. Modelo del Disco Proyectivo (Klein-Beltrami)

En 1868 el matemático italiano Eugenio Beltrami construye un primer modelo del plano hiperbólico y prueba así la independencia del postulado de las paralelas de la geometría euclidiana [17]. Los puntos del espacio que constituyen el modelo de Beltrami son todos los puntos interiores a un círculo abierto dentro del plano euclidiano, esto es,

dado un círculo Γ de radio R , el plano hiperbólico será:

$$\mathbb{D}^2 \equiv \text{int}\Gamma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\|_E < R\}, \quad (3.1)$$

donde $\|\mathbf{x}\|_E = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ es la norma sobre el espacio euclideo, en este caso, el plano \mathbb{R}^2 .

El primer y segundo postulado de la geometría hiperbólica que permanecen iguales que en la geometría euclidiana exigen que por cada par de puntos del plano pase una y solo una línea recta (geodésica), por lo que Beltrami propone para su modelo como líneas rectas, todas las rectas del espacio euclideo interiores al círculo que constituye el modelo, es decir, el conjunto de cuerdas del interior de Γ en la anterior consideración.

El tercer postulado también es el mismo de la geometría euclidiana y precisa de la idea fundamental de distancia entre dos puntos, que obviamente no puede ser la misma del espacio euclideo. Nótese que por construcción las líneas rectas en este modelo se extienden justo hasta el borde del círculo que constituye el modelo pero sin llegar a él, y está aquí el carácter proyectivo del modelo. Fue Felix Klein en 1871 que interpretó el modelo usando geometría proyectiva, el demostró que las transformaciones isométricas del modelo de Beltrami se corresponden por restricción a las transformaciones proyectivas del plano euclideo que dejan al modelo invariante, siguiendo esto Klein encontró una expresión para la métrica hiperbólica en función de la distancia euclidea entre dos puntos (véase [17] y [19]). Para dos puntos cualesquiera \mathbf{x} e \mathbf{y} del plano hiperbólico \mathbb{D}^2 pasa una y solo una línea recta (una cuerda) cuyos extremos \mathbf{z} y \mathbf{w} están en el borde del círculo y son adyacentes a \mathbf{x} e \mathbf{y} respectivamente (ver figura 3.2), entonces la métrica hiperbólica entre los puntos \mathbf{x} e \mathbf{y} viene dada por:

$$d_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{d_E(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \cdot d_E(\mathbf{y}, \mathbf{z})}{d_E(\mathbf{y}, \mathbf{w}) \cdot d_E(\mathbf{x}, \mathbf{z})} \right). \quad (3.2)$$

Notemos que en el límite en que \mathbf{y} tiende a \mathbf{w} , la distancia euclidea $d_E(\mathbf{y}, \mathbf{w})$ tiende a cero por lo que la distancia hiperbólica $d_D(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ se hace infinita, se puede probar además que la distancia hiperbólica así definida es simétrica, no negativa, no degenerada y

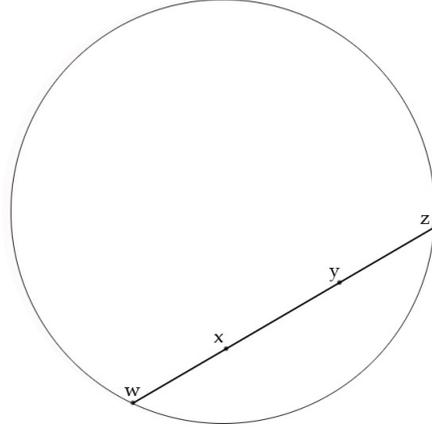


Figura 3.2: *Distancia en el modelo del disco proyectivo*

además cumple con la desigualdad triangular. También se puede hallar un tensor métrico del plano en este modelo usando la geometría proyectiva [21] - [22], será expresado en lo que sigue por el elemento de línea:

$$ds^2 = \frac{1}{(1 - \|\mathbf{x}\|_E^2)^2} [(1 - \|\mathbf{x}\|_E^2)\|\mathbf{d}\mathbf{x}\|_E^2 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{d}\mathbf{x})^2], \quad (3.3)$$

donde $\|\mathbf{x}\|_E$ es la norma euclídea con $\|\mathbf{d}\mathbf{x}\|_E^2 = dx_1^2 + dx_2^2$, al igual que el producto escalar $\mathbf{x} \cdot \mathbf{d}\mathbf{x} = x_1 dx_1 + x_2 dx_2$. Esta notación se empleará en lo que sigue de este capítulo.

Se debe acotar que dado el tensor métrico (3.3), \mathbb{D}^2 se convierte en una variedad riemanniana y se puede definir así un producto escalar sobre \mathbb{R}^2 para los puntos de \mathbb{D}^2 , dando la base no ortogonal $\{e_i\}$ (con $i = 1, 2$) de este espacio como sigue:

$$\langle e_i, e_j \rangle_{\mathbf{x}} = \begin{cases} \frac{1 - \|\mathbf{x}\|_E^2 + x_i^2}{(1 - \|\mathbf{x}\|_E^2)^2} & \text{si } i = j, \\ \frac{x_i x_j}{(1 - \|\mathbf{x}\|_E^2)^2} & \text{si } i \neq j, \end{cases} \quad (3.4)$$

notese que este producto depende del punto \mathbf{x} de la variedad \mathbb{D}^2 sobre el cual se efectúa, por ello se uso la notación $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{x}}$.

El cuarto postulado precisa de otra idea fundamental, la de ángulo, la cual también se ve “distorsionada” en este modelo, pero dado el producto escalar anterior (3.4) se puede

demostrar que para dos líneas geodésicas $\lambda, \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{D}^2$, tales que $\lambda(t_0) = \gamma(t_0) = \mathbf{x}$ y $\mathbf{u} = \lambda'(t_0)$, $\mathbf{v} = \gamma'(t_0)$, el ángulo hiperbólico θ_D entre ellas es:

$$\theta_D = \arccos(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{x}}). \quad (3.5)$$

El quinto y último postulado es desde luego independiente de los demás y es fácil de verificar gráficamente. En efecto, para la recta L (ver figura 3.3) existe un conjunto infinito de rectas que pasan a través del punto P sin interceptarla.

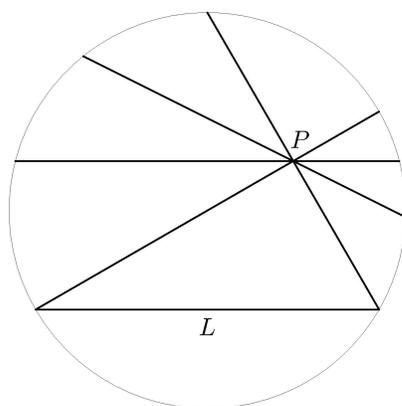


Figura 3.3: 5to postulado en el modelo del disco proyectivo

Desde luego todas estas ideas pueden ser extendidas a 3 o más dimensiones y así realizar el espacio Hiperbólico n -dimensional \mathbb{D}^n según este modelo.

3.3. Modelo del Disco Conformal (Poincaré)

Beltrami también introdujo el modelo del disco conformal y el modelo del semiplano superior en su artículo de 1868 [18], pero Poincaré fue quien identificó las transformaciones fraccionales lineales del semiplano superior complejo con las transformaciones de congruencia (isometrías) sobre el plano hiperbólico en su artículo de 1882 [20], por lo que al modelo también de le suele llamar “Modelo de Poincaré”. Los puntos del plano

hiperbólico en este modelo son los puntos interiores al disco:

$$\mathbb{B}^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\|_E < R\}. \quad (3.6)$$

Cabe acotar que \mathbb{B}^2 es igual al conjunto \mathbb{D}^2 que se introdujo en el modelo del disco proyectivo (sección anterior), la razón fundamental de la distinción es que este modelo plantea una distancia distinta al modelo del disco proyectivo, esto hace que aunque \mathbb{B}^2 y \mathbb{D}^2 sean espacios topológicamente equivalentes son espacios métricos diferentes.

Este modelo establece como líneas (geodésicas) al conjunto de todos los arcos de circunferencia dentro del disco \mathbb{B}^2 y que lo interceptan en ángulo recto junto con el conjunto de todos los diámetros del círculo que constituye dicho espacio, desde luego sin incluir los extremos (ver figura 3.4), nótese que dado dos puntos arbitrarios dentro del disco \mathbb{B}^2 solo hay uno y sólo un arco de circunferencia que intercepte perpendicularmente al disco y pase a través de esos puntos, asegurando así el cumplimiento de los dos primeros postulados.

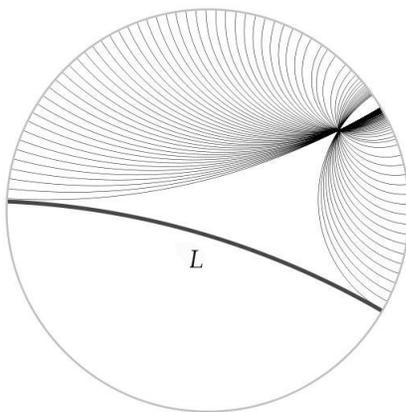


Figura 3.4: 5to postulado en el modelo del disco conformal

En el modelo de Poincaré las distancias también se ven “distorsionadas”, y para hallarlas un método es encontrar la relación que vincula este modelo y el del disco proyectivo, tal cosa no se pretende realizar aquí, pero el fundamento es hacer equivalentes las líneas de cada modelo, algebraicamente esto es igual a hacer equivaler los puntos

del modelo de Klein-Beltrami con el de Poincaré mediante:

$$\mathbf{x} \longrightarrow \frac{\mathbf{x}}{1 + \sqrt{\frac{R^2 - \|\mathbf{x}\|_E^2}{R^2}}}. \quad (3.7)$$

Dada la relación (3.7) se puede calcular la nueva métrica para dos puntos \mathbf{x} y \mathbf{y} del modelo del disco conformal obteniendo:

$$d_B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \operatorname{arccosh} \left(1 + \frac{2\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_E^2}{(1 - \|\mathbf{x}\|_E^2)(1 - \|\mathbf{y}\|_E^2)} \right). \quad (3.8)$$

Debido a la inmersión de \mathbb{B}^2 en el espacio euclídeo \mathbb{R}^2 , al igual que el caso del modelo del disco proyectivo, se puede definir un tensor métrico adecuado a la métrica anterior y con él un producto interno, y concretar así el disco conformal como una variedad riemanniana. El tensor métrico en forma de elemento de línea, eligiendo el sistema coordenado cartesiano viene dado por:

$$ds^2 = \frac{4\|d\mathbf{x}\|_E^2}{(1 - \|\mathbf{x}\|_E^2)^2}. \quad (3.9)$$

Análogamente al modelo del disco proyectivo el tensor métrico permite definir un producto escalar para cada punto de \mathbb{D}^2 , en este caso especificando la base ortogonal $\{e_i\}$ con $i = 1, 2$ como:

$$\langle e_i, e_j \rangle_{\mathbf{x}} = \begin{cases} \frac{4}{(1 - \|\mathbf{x}\|_E^2)^2} & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (3.10)$$

De la misma manera y usando el producto interno dado por (3.10) se obtienen el ángulo hiperbólico θ_B entre dos líneas geodésicas $\gamma(t)$ y $\lambda(t)$ que se intersectan en $\gamma(t_0) = \lambda(t_0) = \mathbf{x}$, tales que $\gamma'(t_0) = \mathbf{u}$ y $\lambda'(t_0) = \mathbf{v}$:

$$\theta_B = \arccos(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{x}}). \quad (3.11)$$

Es de notar que salvo un factor de escala la idea de ángulo anteriormente planteada congrue con la idea de ángulo euclídeo.

Para el postulado de las paralelas se presenta la prueba gráfica dada en la figura 3.4. Notemos que para la recta L existe un conjunto indeterminado de rectas (arcos),

que pasan a través de un punto exterior a ella (punto de intersección del conjunto de rectas), y que no la interceptan, es decir son paralelas a L .

Como dato curioso este modelo ha sido usado por el artista holandés Maurits Cornelis Escher en muchas de sus obras, entre ellas la que se muestra en la figura 3.5, Círculo Límite IV:

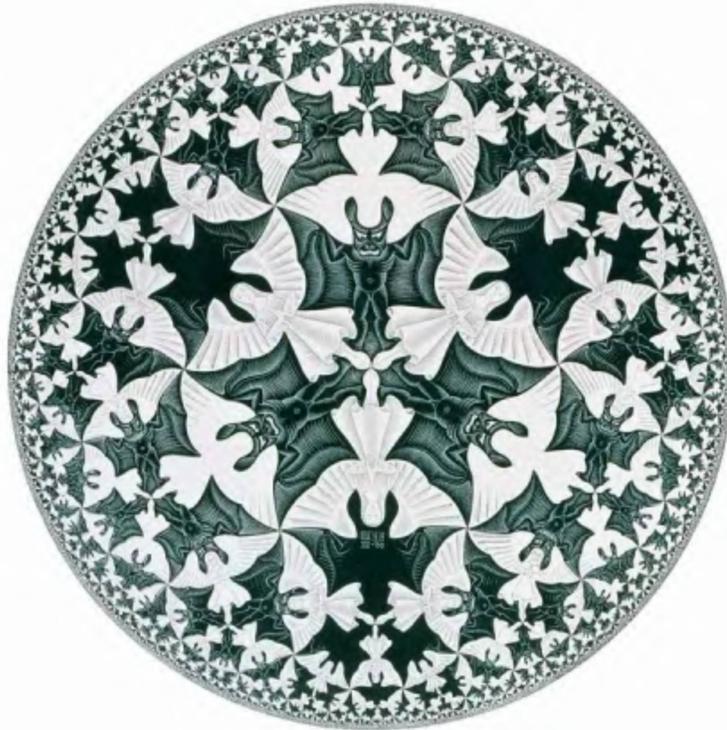


Figura 3.5: *Circle Limit IV* (1960)

3.4. Modelo del Semi-Plano Superior (Poincaré)

Como se mencionó anteriormente fue Beltrami quien introdujo este modelo en un artículo en 1868 [18], y Poincaré encontró las isometrías del espacio en este modelo al identificarlas con las transformaciones conformes del plano complejo, en este caso las

del semi-plano superior complejo en él mismo. El modelo consiste de todos los puntos del plano euclídeo \mathbb{R}^2 que se encuentran en uno de los lados de una línea recta (euclídea) al que llamaremos eje. Si se identifica el plano euclídeo \mathbb{R}^2 con el plano complejo \mathbb{C} el modelo equivaldría al conjunto:

$$\mathbb{U}^2 = \{x + iy : y > 0; x, y \in \mathbb{R}\}. \quad (3.12)$$

Las líneas (geodésicas) en el modelo del semi-plano de Poincaré son todos los arcos de circunferencia dentro del semi-plano que interceptan al eje haciendo ángulos rectos y los segmentos de línea recta perpendiculares al eje y que por supuesto yacen en el semi-plano, se puede verificar que la suposición anterior asegura el cumplimiento de los 2 primeros postulados.

La distancia hiperbólica según este modelo se puede hallar mediante una transformación de Möbius que identifique los puntos del disco conformal con los puntos del semiplano superior, dicha transformación viene dada por la siguiente expresión:

$$(x, y) \longrightarrow \frac{2}{x^2 + (y + 1)^2} \cdot (x, y + 1). \quad (3.13)$$

En consecuencia la métrica hiperbólica para dos puntos $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ de \mathbb{U}^2 (coordenadas cartesianas) estará determinada por:

$$d_B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \operatorname{arccosh} \left(1 + \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_E^2}{2x_2y_2} \right). \quad (3.14)$$

Las isometrías entonces vienen dadas por el conjunto de transformaciones fraccionales lineales del semiplano superior en el que preservan la forma anterior. Este modelo también puede ser tratado como una variedad riemanniana si se introduce la siguiente forma diferencial (eligiendo el sistema cartesiano de coordenadas):

$$ds^2 = \frac{\|d\mathbf{x}\|_E^2}{(x_2)^2}. \quad (3.15)$$

Dicha forma diferencial define un longitud de arco y determina el tensor métrico de la variedad, dotando a cada punto un producto escalar en el espacio tangente, este

producto escalar depende del punto de la variedad y mediante la base ortonormal $\{e_i\}$ con $i = 1, 2$ puede expresarse como sigue :

$$\langle e_i, e_j \rangle_{\mathbf{x}} = \begin{cases} \frac{1}{(x_2)^2} & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (3.16)$$

De manera análoga al modelo del disco conformal los ángulos pueden determinarse mediante el producto escalar, de manera que para dos líneas geodésicas $\gamma(t)$ y $\lambda(t)$ que se intersectan en $\gamma(t_0) = \lambda(t_0) = \mathbf{x}$, tales que $\gamma'(t_0) = \mathbf{u}$ y $\lambda'(t_0) = \mathbf{v}$, pero en esta ocasión con $\gamma(t)$ y $\lambda(t)$ en \mathbb{U}^2 , el ángulo θ_U

$$\theta_U = \arccos(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{x}}). \quad (3.17)$$

También se proporciona otra prueba gráfica del postulado de las paralelas para este modelo (figura 3.6).

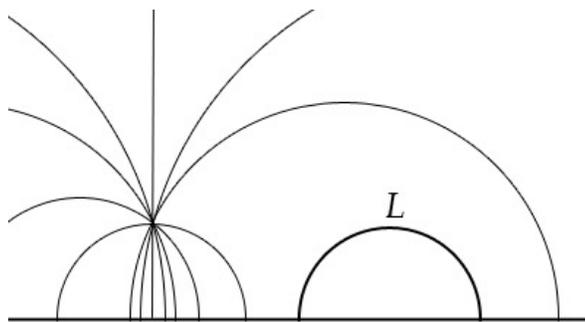


Figura 3.6: 5to postulado en el modelo del semiplano superior

Analogamente al caso del modelo del disco conformal, para la línea recta L existe un conjunto infinito de rectas que pasan a través de un punto exterior a ella (el de su intersección) y que no la cortan.

3.5. Modelo del Hiperboloide (Minkowski)

El modelo del hiperboloide o modelo de Minkowski es generalmente acreditado a Poincaré, aunque William Reynolds [23] menciona que Wilhelm Killing [24] y Karl

Weierstrass usaron este modelo hacia 1892. El modelo consiste en suponer los puntos del plano hiperbólico como la hoja positiva de un hiperboloide de revolución de dos hojas inmerso en el espacio de Minkowski, y sus líneas geodésicas como las intersecciones de ese hiperboloide con los planos que atraviesan el origen del espacio de Minkowski, dichas líneas son ramas de hipérbolas. Desde luego la supocición anterior puede ser extendida a 3 o más dimensiones como se verá posteriormente con detalle.

La exigencia de que el hiperboloide este embebido en el espacio de Minkowski y no en \mathbb{R}^n verifica un importante teorema propuesto por David Hilbert en 1901 [25] el cual establece que no existen superficies regulares completas de curvatura constante negativa que puedan ser inmersas isométricamente en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 . Además, esto supone una ventaja desde el punto de vista físico, en el caso del espacio Hiperbólico tridimensional, ya que como se sabe el espacio de Minkowski esta asociado al modelo del espacio-tiempo en el marco de la relatividad especial de Einstein.

Como ya se ha mencionado el espacio hiperbólico es un espacio métrico, por ende se establecen perfectamente la noción de distancia y ángulo, además, debido a su inmersión en el espacio de Minkowski, dichas nociones quedan determinadas por las propiedades métricas de Minkowski, por esta razón se iniciará el estudio de este modelo retomando los conocimientos básicos de Minkowski.

3.5.1. El espacio de Minkowski

El espacio de Minkowski n -dimensional $\mathbb{R}^{n,1}$ es una variedad pseudoriemanniana (Lorentziana) de métrica indefinida (1,n) (ó (n,1)) y de curvatura nula ($\kappa = 0$), cuyo tensor métrico puede escribirse eligiendo un sistema de coordenadas cartesiano como (signatura (1,n)):

$$g = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1), \quad (3.18)$$

o bien en su forma de elemento de línea:

$$ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2. \quad (3.19)$$

Dado el tensor métrico se puede definir el producto interno en el espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{n,1}$ (producto interno Minkowskiano) como:

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = g^{ij} x_i y_j = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n. \quad (3.20)$$

Es de notar que la base $\{e_i\}$ de $\mathbb{R}^{n,1}$ tal que $e_0 \circ e_0 = -1$ y $e_i \circ e_j = \delta_{ij}$ de cualquier otra forma donde $(i, j = 0, 1, 2, \dots, n)$, es una base ortonormal del espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{n,1}$.

Definición 1 *Dos vectores \mathbf{x} y \mathbf{y} de $\mathbb{R}^{n,1}$ son ortogonales si y sólo si $\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = 0$.*

Análogamente al espacio real \mathbb{R}^n se puede definir una norma Minkowskiana inducida del producto interno anteriormente definido, dada por el número complejo:

$$\|\mathbf{x}\|_M^2 = \mathbf{x} \circ \mathbf{x} = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2. \quad (3.21)$$

Si definimos al vector del espacio euclídeo \mathbb{R}^n como $\vec{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$, la norma Minkowskiana (3.21) puede ser escrita como:

$$\|\mathbf{x}\|_M^2 = -x_0^2 + \|\vec{x}\|_E^2. \quad (3.22)$$

Definición 2 *Dos vectores \mathbf{x} y \mathbf{y} de $\mathbb{R}^{n,1}$ son ortonormales si y solo si son ortogonales y además $\|\mathbf{x}\|_M^2 = -1$ y $\|\mathbf{y}\|_M^2 = 1$.*

Se suele clasificar a los cuadvectores (elementos del espacio de Minkowski) según el valor de su norma como:

- **Tipo Luz** para los vectores que tienen norma Minkowskiana igual a cero $\|\mathbf{x}\|_M^2 = 0$.
- **Tipo Espacio** para los vectores que tienen el cuadrado de la norma Minkowskiana real positiva $\|\mathbf{x}\|_M^2 > 0$.
- **Tipo Tiempo** para los vectores que tienen el cuadrado de norma Minkowskiana real negativa $\|\mathbf{x}\|_M^2 < 0$.

Un vector tipo tiempo se dice positivo si su primera componente es positiva $x_0 > 0$.

Teorema 1 Sean \mathbf{x} y \mathbf{y} vectores tipo tiempo positivos (o negativos) de $\mathbb{R}^{n,1}$, entonces $\mathbf{x} \circ \mathbf{y} \leq \|\mathbf{x}\|_M \|\mathbf{y}\|_M$, con igualdad si y solo si \mathbf{x} y \mathbf{y} son linealmente dependientes.

Sean \mathbf{x} y \mathbf{y} vectores tipo tiempo positivos (o negativos) de $\mathbb{R}^{n,1}$, por el teorema (1) existe una única constante real positiva $\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tal que

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|_M \|\mathbf{y}\|_M \cosh \eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (3.23)$$

Así definimos a $\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ como el ángulo Minkowskiano tipo tiempo entre los vectores \mathbf{x} y \mathbf{y} .

Otro aspecto importante a señalar en el estudio del espacio de Minkowski son sus isometrías, y para ello se definirán las transformaciones congruentes sobre dicho espacio.

Definición 3 Una función $\phi : \mathbb{R}^{n,1} \rightarrow \mathbb{R}^{n,1}$ es una transformación de Lorentz si y solo si

$$\phi(\mathbf{x}) \circ \phi(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \circ \mathbf{y} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n,1}.$$

Teorema 2 Sea e_i una base ortonormal de $\mathbb{R}^{n,1}$. Una función $\phi : \mathbb{R}^{n,1} \rightarrow \mathbb{R}^{n,1}$ es una transformación de Lorentz si y solo si ϕ es lineal y $\{\phi(e_0), \phi(e_1), \dots, \phi(e_n)\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^{n,1}$.

Una matriz $\mathbf{A}_{(n+1) \times (n+1)}$ a valores reales es Lorentziana si y solo si la transformación lineal $\phi : \mathbb{R}^{n,1} \rightarrow \mathbb{R}^{n,1}$ asociada a ella y definida por $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ es una transformación de Lorentz. El conjunto de todas las matrices Lorentzianas $(n+1) \times (n+1)$ junto con la multiplicación usual de matrices forman un grupo $\mathbf{O}(1, n)$, al cual llamamos grupo de Lorentz. Se puede verificar que las matrices del grupo de Lorentz $\mathbf{O}(1, n)$ satisfacen la ecuación:

$$\mathbf{A}^t g \mathbf{A} = g. \quad (3.24)$$

De la ecuación (3.24) tenemos que $(\det \mathbf{A})^2 = 1$, así $\det \mathbf{A} = \pm 1$. El subconjunto de todas las matrices del grupo de Lorentz ($\mathbf{A} \in \mathbf{O}(1, n)$) tales que $\det \mathbf{A} = 1$ forman

un subgrupo de índice dos $\mathbf{SO}(1, n)$ en $\mathbf{O}(1, n)$, al que llamamos grupo especial de Lorentz. Una matriz del grupo de Lorentz se dice positiva si no cambia la paridad del vector sobre el cual actúa, es decir, transforma vectores tipo tiempo positivos en positivos (ó negativos en negativos). El subconjunto de todas las matrices Lorentzianas positivas forman también un subgrupo $\mathbf{PO}(1, n)$ de $\mathbf{O}(1, n)$ y es llamado grupo positivo de Lorentz. De igual manera el subconjunto de todas las matrices positivas de $\mathbf{SO}(1, n)$ forman en él un subgrupo de índice dos $\mathbf{PSO}(1, n)$ que recibe el nombre de grupo especial positivo de Lorentz (grupo ortocrono propio L_+^\uparrow). Para ver las pruebas de los teoremas 1 y 2 refiérase a [21].

3.5.2. Espacio Hiperbólico n-dimensional

En el espacio euclídeo n -dimensional la esfera de radio R ($\|\vec{x}\|_E^2 = R^2; \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$) es una superficie de curvatura constante $\kappa = \frac{1}{R^2}$. En analogía con el caso anterior pero tomando en cuenta el teorema de Hilbert [25] se propone como modelo del n -espacio Hiperbólico al subconjunto del espacio de Minkowski:

$$\mathbb{H}^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1} : \|\mathbf{x}\|_M^2 = -R^2, x_0 > 0\}.$$

Esto es el conjunto de vectores tipo tiempo del espacio de Minkowski con norma constante (compleja) y primera componente mayor que cero (vectores tipo tiempo positivos), lo que equivaldría a la hoja positiva de un hiperboloide de dos hojas en $\mathbb{R}^{n,1}$, en la figura 3.7 se muestra el plano hiperbólico \mathbb{H}^2 en este modelo.

Sean \mathbf{x} , \mathbf{y} y \mathbf{z} vectores en \mathbb{H}^n y $\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ el ángulo tipo tiempo entre \mathbf{x} y \mathbf{y} , se puede verificar que además de ser η un número real positivo ($\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$), es cero si y sólo si \mathbf{x} y \mathbf{y} son iguales ($\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$), es simétrico respecto de \mathbf{x} y \mathbf{y} ($\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \eta(\mathbf{y}, \mathbf{x})$), y cumple con la desigualdad triangular [$\eta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq \eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \eta(\mathbf{y}, \mathbf{z})$] [21], por lo que definimos la métrica hiperbólica para dospuntos \mathbf{x} y \mathbf{y} de Hn como:

$$d_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{3.25}$$

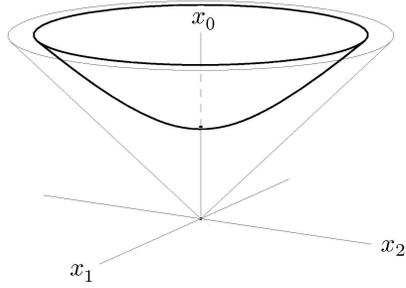


Figura 3.7: *Modelo del hiperboloide*

Por la ecuación (3.23), se tiene que:

$$\cosh d_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -R^2(\mathbf{x} \circ \mathbf{y}). \quad (3.26)$$

El espacio métrico consistente de \mathbb{H}^n junto con su métrica hiperbólica d_H es llamado *n-espacio hiperbólico*, y desde ahora \mathbb{H}^n denotará al espacio hiperbólico n-dimensional, en el caso de \mathbb{H}^2 , este es un modelo de la geometría de Lobachevski. Una isometría de \mathbb{H}^n sobre si mismo es llamada isometría hiperbólica.

Teorema 3 *Cada transformación de Lorentz positiva en $\mathbb{R}^{n,1}$ se restringe a una isometría de \mathbb{H}^n , y cada isometría de \mathbb{H}^n extiende a una única transformación de $\mathbb{R}^{n,1}$.*

No se pretende dar una prueba del teorema (una prueba rigurosa puede verse en [21]), pero, considerando la ecuación (3.26) se puede observar que una transformación de \mathbb{H}^n preserva la distancia hiperbólica, si y solo si se asocia a ella una transformación de $\mathbb{R}^{n,1}$ que preserve el producto interno Minkowskiano, esto es, una transformación de Lorentz. La restricción sobre dicha transformación a ser positiva recae en el hecho de que una transformación negativa enviaría un punto de \mathbb{H}^n fuera de él. Como corolario se puede agregar que el grupo de isometrías Hiperbólicas $\mathbf{I}(\mathbb{H}^n)$ es isomorfo al grupo positivo de Lorentz $\mathbf{PO}(1, n)$.

Definición 4 *Una línea hiperbólica de \mathbb{H}^n es la intersección de \mathbb{H}^n con un subespacio vectorial 2-dimensional tipo tiempo de $\mathbb{R}^{n,1}$.*

Sean \mathbf{x} y \mathbf{y} puntos de \mathbb{H}^n y vectores de $\mathbb{R}^{n,1}$. Entonces \mathbf{x} y \mathbf{y} expanden un subespacio vectorial 2-dimensional tipo tiempo $V(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de $\mathbb{R}^{n,1}$, y así:

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbb{H}^n \cap V(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

es la única línea hiperbólica que contiene a \mathbf{x} y \mathbf{y} . Nótese que $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es una rama de una hipérbola.

Teorema 4 Una función $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n$ es una línea geodésica si y solo si existen vectores ortonormales \mathbf{x} y \mathbf{y} de $\mathbb{R}^{n,1}$, con \mathbf{x} tipo tiempo, tales que:

$$\gamma(t) = R \cosh(t)\mathbf{x} + R \sinh(t)\mathbf{y}.$$

Por el teorema 4 se puede probar que las geodésicas de \mathbb{H}^n son sus líneas hiperbólicas (ver figura 3.8)

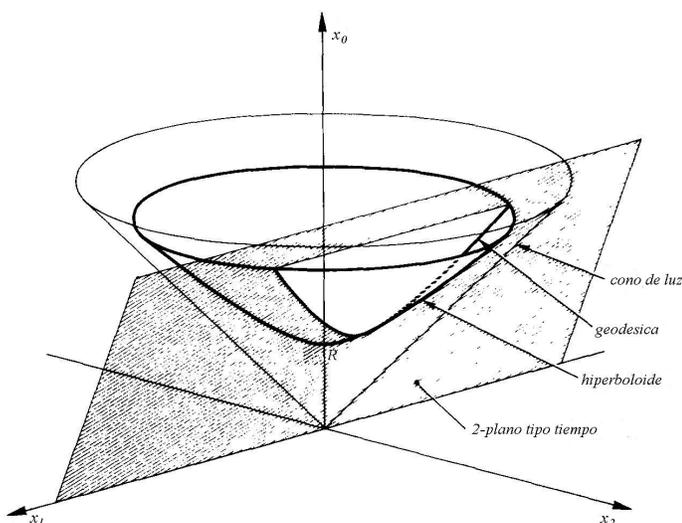


Figura 3.8: Geodésica hiperbólica

3.5.3. \mathbb{H}^n como una variedad riemanniana

El espacio hiperbólico \mathbb{H}^n es un espacio métrico y por lo tanto un espacio topológico. Además es geodésicamente convexo, todo esto permite establecer formalmente las ideas

de continuidad, convergencia y conectividad. Más aun este espacio es geodésicamente completo.

Sea $\phi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\phi(\mathbf{x}) = \vec{x}$, con \vec{x} como en la expresión (3.22), entonces ϕ es una biyección y define un isomorfismo entre el espacio hiperbólico \mathbb{H}^n y el espacio euclídeo \mathbb{R}^n . En particular dada la biyección anterior se puede identificar el entorno de cada punto de \mathbb{H}^n con un subconjunto abierto del espacio euclídeo, esto es, para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n$ existe un entorno abierto $U_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{H}^n$ homeomorfo a un subconjunto de \mathbb{R}^n mediante $\phi : U_{\mathbf{x}} \rightarrow V_{\vec{x}} \subset \mathbb{R}^n$, considerando además que los entornos de cada par de puntos de \mathbb{H}^n son disjuntos (espacio de Hausdorff), y que toda base de este espacio es finita o numerable (verifica el segundo axioma de numerabilidad), podemos admitir al espacio Hiperbólico \mathbb{H}^n como una variedad topológica. Es pertinente acotar que el par $(U_{\mathbf{x}}, \phi)$ define una carta o sistema coordenado sobre \mathbb{H}^n para \mathbf{x} , la aplicación coordenada puede ser proporcionada explícitamente si se elige representarla mediante $\phi(\mathbf{x}) = (\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n)$, y se define como sigue:

$$\begin{aligned} x_0 &= \sqrt{R^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}, \\ \vartheta_i &= x_i \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{3.27}$$

El sistema coordenado así definido es una carta global, vale decir, cubre todos los puntos de la variedad, además dota al espacio hiperbólico de una estructura diferenciable C^∞ (atlas), y por lo tanto \mathbb{H}^n es una variedad diferenciable, en lo que sigue nos referiremos a este sistema coordenado como “cartesiano” por su obtención del análogo Minkowskiano. A continuación se explicarán, por completitud, algunos resultados elementales de variedades diferenciables y se aplicarán a \mathbb{H}^n .

Sea f una función en el espacio hiperbólico $f : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $\phi : U_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{H}^n \rightarrow V_{\vec{x}} \subset \mathbb{R}^n$ una carta local con $\mathbf{x} \in U_{\mathbf{x}}$, la función f es diferenciable en \mathbf{x} si la composición $f \circ \phi^{-1} : \phi(U_{\mathbf{x}}) \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $\phi(\mathbf{x})$. Luego la función f es diferenciable si lo es para cada punto de \mathbb{H}^n , y llamaremos $C(\mathbb{H}^n)$ al conjunto de todas la funciones diferenciables en \mathbb{H}^n .

Definición 5 *Sea \mathbf{x} un punto de \mathbb{H}^n , el vector tangente $v_{\mathbf{x}}$ sobre \mathbb{H}^n al punto \mathbf{x} es una*

aplicación lineal $v_{\mathbf{x}} : C(\mathbb{H}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, que cumple con la propiedad de Leibniz, esto es:

- $v_{\mathbf{x}}(f + \lambda g) = v_{\mathbf{x}}(f) + \lambda v_{\mathbf{x}}(g) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}; \quad \forall f, g \in C(\mathbb{H}^n).$
- $v_{\mathbf{x}}(f \cdot g) = v_{\mathbf{x}}(f)g(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})v_{\mathbf{x}}(g) \quad \forall f, g \in C(\mathbb{H}^n).$

El conjunto de todos los vectores tangentes a un punto \mathbf{x} de \mathbb{H}^n forman un espacio vectorial y es llamado espacio tangente $T_{\mathbf{x}}(\mathbb{H}^n)$ a ese punto. y el conjunto de todos los espacios tangentes sobre \mathbb{H}^n forma una variedad $2n$ -dimensional y es llamada fibrado tangente $T(\mathbb{H}^n)$.

Teorema 5 *Cualquier derivada direccional en $C^\infty(\mathbb{H}^n)$ es un campo vectorial de $T(\mathbb{H}^n)$.*

Sea $f : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable del espacio hiperbólico ($f \in C^\infty(\mathbb{H}^n)$), y $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n$ una curva sobre \mathbb{H}^n , tal que $\gamma(t_0) = \mathbf{x}$ y $\gamma'(t_0) = \mathbf{v}$, entonces la derivada usual en la dirección dada por la curva $\gamma(t)$ en el punto \mathbf{x} viene dada por:

$$D_{\mathbf{v}}f = \frac{d}{dt}(f(\gamma))|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \Big|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}, \quad (3.28)$$

donde v_i son las componentes de \mathbf{v} el vector tangente a la curva γ en t_0 , nótese que para una dirección arbitraria cualquier derivación sobre $C^\infty(\mathbb{H}^n)$ puede ser escrita como:

$$D_{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (3.29)$$

Es fácil ver que la aplicación a valores reales dada por la derivación en la expresión anterior es lineal y verifica la identidad de Leibniz, por lo que para cada punto \mathbf{x} del espacio hiperbólico, $D_{\mathbf{v}}$ es un elemento del espacio tangente $T_{\mathbf{x}}(\mathbb{H}^n)$, de este modo si definimos a la derivada direccional como una aplicación general sobre todos los puntos de \mathbb{H}^n su imagen será una sección del fibrado tangente $T(\mathbb{H}^n)$.

Es importante acotar que el conjunto $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ con $i = 1, 2, \dots, n$, define una base sobre el espacio tangente a cada punto de \mathbb{H}^n .

Dada la inmersión de \mathbb{H}^n en el espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{n,1}$, utilizando las coordenadas cartesianas de \mathbb{H}^n y el vínculo impuesto sobre \mathbf{x}_0 (ecuación (3.27)), se puede encontrar

una expresión para el tensor métrico Minkowskiano en función de los puntos del hiperboloide \mathbb{H}^n , esto permite definir un elemento de línea global heredado del tensor métrico Minkowskiano, pero restringido al espacio Hiperbólico \mathbb{H}^n formalmente como:

$$ds^2 = \frac{1}{(R^2 + \|\mathbf{x}\|_E^2)} [(R^2 + \|\mathbf{x}\|_E^2)\|d\vec{x}\|_E^2 - (\vec{x} \cdot d\vec{x})^2]. \quad (3.30)$$

Mediante la expresión anterior se pueden encontrar las componentes del tensor métrico para el espacio de Lobachevski y así definir un producto escalar sobre el espacio tangente a cada punto eligiendo la base no ortogonal $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ con $i = 1, 2, \dots, n$, como sigue:

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle_{\mathbf{x}} = \begin{cases} \frac{T(\vec{x}) - x_i^2}{T(\vec{x})} & \text{si } i = j, \\ \frac{x_i x_j}{T(\vec{x})} & \text{si } i \neq j, \end{cases}, \quad (3.31)$$

con $T(\vec{x}) = R^2 + \|\vec{x}\|_E^2$, y con $i, j = 1, 2, \dots, n$. Se puede verificar fácilmente que $g_{ij} : T_{\mathbf{x}}(\mathbb{H}^n) \times T_{\mathbf{x}}(\mathbb{H}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{H}^n$ es definido positivo, y visto como una aplicación $g : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable, esto convierte a \mathbb{H}^n en una variedad riemanniana.

Dado que \mathbb{H}^3 es una variedad riemanniana se puede calcular el tensor de Riemann y con este el escalar de Ricci, que está asociado a la curvatura de la variedad. Usando el software Mathematica v6.0 con las coordenadas cartesianas se calcularon los símbolos de Christoffel distintos de cero, las componentes distintas de cero del tensor de Riemann y con estas las del tensor de Ricci, para finalmente encontrar el escalar de Ricci S (vea apéndice):

$$S = -\frac{6}{R^2}. \quad (3.32)$$

Nótese que esta cantidad es siempre negativa. Como se mencionó anteriormente una esfera tridimensional S^3 de radio R posee una curvatura seccional $\kappa = \frac{1}{R^2}$, una regla general para variedades m-dimensionales, de curvatura constante, inmersas en el espacio euclídeo \mathbb{R}^n relaciona a la curvatura seccional con el escalar de Ricci mediante $S = 2m\kappa$, como dato curioso esta regla pareciera extenderse a las variedades del espacio de Minkowski, con el caso específico de \mathbb{H}^3 ya que la curvatura seccional de este espacio va como $\kappa = -\frac{1}{R^2}$.

Se puede definir un sistema coordenado local $h : \mathbb{R}_\uparrow^{n,1} \rightarrow (0, \infty)^2 \times (0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi)$ sobre el espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{n,1}$, siendo $\{e_\mu\}$ con $\mu = 0, 1, 2, \dots, n$ la base ortogonal usual de $\mathbb{R}^{n,1}$, entonces cualquier vector tipo tiempo positivo del espacio de Minkowski $\mathbb{R}_\uparrow^{n,1}$ se puede coordinar mediante:

$$\begin{aligned} \rho &= |||\mathbf{x}||_M|, \\ \eta_i &= \eta \left(e_{i-1}, \sum_{\mu=i-1}^n x_\mu e_\mu \right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Se puede evidenciar que esta carta coordenada satisface el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = \rho \cosh \eta_1, \\ x_1 = \rho \sinh \eta_1 \cos \eta_2, \\ \vdots \\ x_{n-1} = \rho \sinh \eta_1 \sin \eta_2 \cdots \sin \eta_{n-1} \cos \eta_n, \\ x_n = \rho \sinh \eta_1 \sin \eta_2 \cdots \sin \eta_{n-1} \sin \eta_n. \end{array} \right. \quad (3.34)$$

Se puede demostrar fácilmente que las coordenadas así definidas verifican la siguiente identidad equivalente a la definición de norma Mikowskiana:

$$-x_0^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2 = -\rho^2. \quad (3.35)$$

Notemos que si ρ es una constante real positiva R , el subconjunto definido se restringe al Hiperboloide de curvatura seccional $\kappa = -\frac{1}{R^2}$, de esta manera se puede definir otra carta coordenada $\varphi : \mathbb{H}^n \rightarrow (0, \infty) \times (0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi)$, igual a la carta h , pero con $\rho = R$, en virtud de la analogía con las coordenadas esféricas del espacio euclídeo se hará referencia de ahora en lo que sigue en cuanto a este sistema coordenado como coordenadas *pseudoesféricas*.

El determinante de la matriz jacobiana para la transformación inversa de esta carta coordenada $J(\varphi^{-1})$ da como resultado:

$$R^n \sinh^{n-1} \eta_1 \sin^{n-2} \eta_2 \cdots \sin \eta_{n-1}. \quad (3.36)$$

Por lo que la medida $d^n x$ sobre el Hiperboloide \mathbb{H}^n viene dada por:

$$d^n x = R^n \sinh^{n-1} \eta_1 \sin^{n-2} \eta_2 \cdots \sin \eta_{n-1} d\eta_1 d\eta_2 \cdots d\eta_n. \quad (3.37)$$

Devolviendo el cambio a las coordenadas locales (cartesianas) se puede verificar que la medida queda expresada como:

$$d^n x = \frac{dx_1 \cdots dx_n}{x_0}. \quad (3.38)$$

Capítulo 4

Mecánica Cuántica

4.1. Postulados de la mecánica cuántica

En mecánica clásica de partículas, el estado de una partícula está caracterizado por la posición $\vec{r}(x, y, z)$, y el momento $\vec{p}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ respecto a un sistema de referencia en el espacio real \mathbb{R}^3 (espacio euclídeo), conocer estas variables como funciones del tiempo son suficientes para determinar por completo la evolución del sistema. Si el espacio de configuración no es \mathbb{R}^3 , o por razones de conveniencia, se introducen coordenadas generalizadas $q_i(t)$ con ($i = 1, 2, 3 \dots N$; N grados de libertad), cuyas derivadas temporales $\dot{q}_i(t)$ son las velocidades generalizadas, especificar $q_i(t)$ y $\dot{q}_i(t)$ permite calcular, en cualquier instante, la posición y el momento de cada punto del sistema. Usando el Lagrangiano $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ se pueden definir los momentos conjugados $p_i(t)$ de cada coordenada generalizada $q_i(t)$:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}.$$

Las variables $q_i(t)$ y $p_i(t)$ son llamadas variables dinámicas fundamentales (variables canónicas), así todas las cantidades asociadas al sistema (energía, momentum angular, etc.) pueden ser expresadas en función de estas variables. Para un sistema cerrado, la energía total está dada por el hamiltoniano clásico $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$ y la evolución total del

sistema quedaría determinada por las ecuaciones de Hamilton-Jacobi:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}.$$

Las llamadas ecuaciones canónicas de Hamilton y Jacobi pueden ser reformuladas en término de la entidad conocida como corchete de Poisson, para obtener:

$$\frac{dq_i}{dt} = \{q_i, \mathcal{H}\}_{PB}, \quad \frac{dp_i}{dt} = \{p_i, \mathcal{H}\}_{PB}.$$

El corchete de Poisson es una aplicación que actúa sobre las funciones diferenciables del espacio de fase, es decir las funciones suaves sobre el fibrado cotangente (en este caso $C^\infty(T^*X)$ con X el espacio de configuración) y actúa localmente:

$$\{f, g\}_{PB} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_i}. \quad (4.1)$$

La operación dada por los corchetes de Poisson define un producto (aparte del producto conmutativo usual de funciones) en el fibrado cotangente, y es antisimétrica y bilineal, además también verifica la identidad de Jacobi, por lo que le confiere una estructura de un álgebra de Lie. Para las variables canónicas q_i y p_j el corchete de Poisson resulta ser la identidad:

$$\{q_i, p_j\}_{PB} = \delta_{ij}. \quad (4.2)$$

La mecánica cuántica usual pretende bajo un esquema “similar” (salvo que el análogo del producto usual de funciones en clásica ahora es no conmutativo) modelar y describir los sistemas físicos vinculados al principio de relatividad de Galileo o al de Einstein, para ello se vale de un número de postulados que se disponen a continuación:

- (a) Se proporciona un espacio de Hilbert \mathcal{H} ; complejo, separable y con $\dim \mathcal{H} \geq 2$.
- (b) Cada uno de los vectores normalizados de \mathcal{H} representa un estado físico puro del sistema físico.

- (c) Las variables dinámicas del sistema físico: energía, posición, momento, momento angular, etc.; vienen representadas por operadores autoadjuntos del conjunto de operadores lineales $\mathcal{O}(\mathcal{H})$. Se suele referir a ellos como observables.
- (d) Si $\psi \in \mathcal{H}$ representa un estado del sistema físico y $\psi \in \mathcal{D}(\hat{A})$ para un observable $\hat{A} \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$, el valor medio de \hat{A} para ese estado viene dada por: $\langle \psi | \hat{A} \psi \rangle \in \mathbb{R}$.
- (e) Los únicos valores medibles posibles son valores medios de observables.

Tomando estos postulados como fundamento, obtenemos la descripción ortodoxa de mecánica cuántica. Así para definir un sistema cuántico necesitamos el espacio de Hilbert que modela los estados posibles del sistema. Entonces, el problema se reduce a encontrar algunos observables, es decir, algunos operadores lineales autoadjuntos sobre el espacio Hilbert, y con ellos sus valores medibles. Entre estos, destacan, la posición y el momento. Por ello el problema es algo análogo al problema clásico, salvo que en este caso las variables dinámicas de posición y momento son sustituidas por sus respectivos operadores de posición y momento que no conmutan.

4.2. Cuantización

La mecánica cuántica usual plantea entonces el problema de cómo hacer corresponder los sistemas clásicos con los sistemas cuánticos. Es razonable considerar que las leyes de la física no dependen del tamaño de los objetos, y en función de esto el principio de correspondencia establece que la mecánica clásica debe surgir como una aproximación de la mecánica cuántica en el límite en el cual la extensión física del sistema estudiado se incrementa al punto de no ser considerado parte del micromundo, pero el sentido inverso de esta aseveración no es cierto, la mecánica clásica en ninguna manera proporciona información acerca del micromundo (no se puede derivar la cuántica de la clásica), y es ahí donde yace el problema. Se han planteado diversos enfoques al abordar esta cuestión, en física es usual considerar un método conocido como “cuantización canónica”.

Queremos demostrar que este método da resultados malos en general.

La cuantización consiste entonces en relacionar un sistema clásico generalmente descrito por el par $\{M, \mathcal{O}\}$ donde M es una variedad simpléctica, y \mathcal{O} es un conjunto de funciones suaves, observables, definidas sobre la variedad ($\mathcal{O} \subset \mathbb{C}^\infty(M)$), con un sistema cuántico perfectamente descrito por el par $\{\mathcal{H}, \mathcal{A}\}$ donde \mathcal{H} es un espacio del Hilbert que verifica el primer postulado de la mecánica cuántica, y \mathcal{A} un subconjunto de operadores lineales autoadjuntos definido sobre \mathcal{H} que representan los observables relevantes del problema. En general, la variedad M de la mecánica clásica es el espacio de fase, es decir el fibrado cotangente T^*X al espacio de configuración X , aquí, como sabemos, juega un papel relevante el hamiltoniano clásico al cual le asociamos el operador Hamiltoniano cuántico que genera la dinámica cuántica similar al caso clásico. Este, junto con la posición y el momento, serían de los observables relevantes.

La metodología planteada por el esquema de cuantización canónica esta fundamentada en la conocida regla de conmutación de Heisenberg. Una representación de estas reglas establece, en particular, que para el espacio de fase $T^*(\mathbb{R}^n)$, representado mediante un sistema coordenado $\{q^i, p_i\}$, la correspondencia entre este sistema y su análogo cuántico viene dada por la sustitución de estas coordenadas por sus respectivos operadores, \hat{q}^i que actúa de forma multiplicativa y \hat{p}_i que actúa de forma derivativa sobre el espacio de Hilbert, esto es:

$$\begin{aligned} q^i &\rightarrow \hat{q}^i = q^i, \\ p_i &\rightarrow \hat{p}_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^i}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Se puede definir la operación de conmutación sobre el conjunto de los operadores lineales en el espacio de Hilbert $\mathcal{O}(\mathcal{H})$ que viene dada por la expresión:

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}, \tag{4.4}$$

donde $\hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$. A la operación de conmutación se le suele llamar corchetes de Lie, en efecto, los corchetes de Lie verifican la propiedad de bilinealidad, antisimetría y no

degeneración, además de la identidad de Jacobi, dotando al espacio $\mathcal{O}(\mathcal{H})$ de un álgebra de Lie.

Es fácil demostrar que la relación de conmutación de las variables dinámicas dadas por los operadores \hat{q}^i y \hat{p}_i (definidos por (4.3)) es, de hecho, proporcional a la identidad del espacio de los operadores lineales ($\mathbb{I} \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$):

$$[\hat{q}^i, \hat{p}_i] = i\hbar\mathbb{I} \quad (4.5)$$

Por esta razón, el esquema de cuantización canónica relaciona los sistemas cuánticos con sus análogos clásicos mediante la identificación:

$$[\hat{q}^i, \hat{p}_i] \Leftrightarrow i\hbar \{q_i, p_i\}_{PB} \quad (4.6)$$

4.3. Problemas de la cuantización canónica

El esquema de cuantización canónica posee una “pequeña” fisura, la formulación Lagrangiana y por ende la Hamiltoniana no dependen de la carta o cartas coordenadas usadas para cubrir la variedad o espacio del sistema físico tratado. Sin embargo, como veremos a continuación, la cuantización canónica sí, dando resultados físicamente distintos. El aparentemente “correcto” funcionamiento de la cuantización canónica se debe a que este problema no se evidencia si se usa el sistema coordenado cartesiano en una variedad “plana” (curvatura seccional cero). Para ilustrar el problema vamos a estudiar el caso de una partícula de masa μ en el espacio euclídeo tridimensional \mathbb{R}^3 con interacción del tipo central $\mathcal{V}(r)$, de manera que la configuración es tal que el sistema posee simetría esférica, en consecuencia es conveniente equipar la variedad con el sistema de coordenadas esféricas, de este modo nuestras variables canónicas son $(r, \theta, \phi, p_r, p_\theta, p_\phi)$. Es apropiado recordar que el elemento de línea en coordenadas esféricas viene dado por:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.7)$$

Teniendo el elemento de línea de la variedad, se puede obtener el Lagrangiano \mathcal{L}

clásico del sistema:

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - \mathcal{V}(r). \quad (4.8)$$

El anterior lagrangiano permite calcular los momentos canónicos asociados a las coordenadas generalizadas:

$$p_r = \mu \dot{r} \quad p_\theta = \mu r^2 \dot{\theta} \quad p_\phi = \mu r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}. \quad (4.9)$$

De esta manera mediante la transformación de Legendre el hamiltoniano asociado a sistema viene dado por:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\mu} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} p_\phi^2 \right) + \mathcal{V}(r). \quad (4.10)$$

Siguiendo el esquema propuesto por la cuantización canónica, se hacen corresponder las variables canónicas con sus respectivos operadores asociados, esto es

$$p_r \rightarrow \hat{p}_r = -i\hbar \frac{\partial}{\partial r}, \quad p_\theta \rightarrow \hat{p}_\theta = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad p_\phi \rightarrow \hat{p}_\phi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (4.11)$$

La interacción que solo depende de la variable canónica r también debe corresponderse con su respectivo operador cuántico:

$$\mathcal{V}(r) \rightarrow \hat{V}(\hat{r}). \quad (4.12)$$

El hamiltoniano cuántico debe ser representado por el operador \hat{H} , y siguiendo el esquema de cuantización canónica vendría expresado como:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] + \hat{V}(r). \quad (4.13)$$

Sin embargo, esto está mal. En efecto, como sabemos, el hamiltoniano cuántico de una partícula en una interacción central viene dado por el operador laplaciano más el operador potencial asociado a la interacción:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + \hat{V}(r). \quad (4.14)$$

Obviamente, el operador diferencial laplaciano del espacio euclídeo es un objeto geométrico independiente del sistema coordenado elegido para representarlo, eligiendo el sistema coordenado esférico se puede escribir el operador hamiltoniano asociado a (4.14) como:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] + \hat{V}(r). \quad (4.15)$$

Sin duda alguna la acción de los operadores dados por las expresiones (4.13) y (4.15) es distinta, más aún, el primero de ellos no puede representar la acción de un hamiltoniano cuántico, tomando al espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^3)$ como el conjunto de funciones de cuadrado integrable sobre el espacio euclídeo, ya que este operador no es autoadjunto.

También se puede ver que el operador \hat{p}_r con dominio el conjunto de todas las funciones al menos una vez derivables en los reales positivos extendidos, esto es $f(r) \in C^1(0, \infty)$, no es autoadjunto. El caso es análogo para el operador \hat{p}_θ con dominio el conjunto de todas las funciones al menos una vez derivables en el subconjunto real $(0, \pi)$, esto es $f(r) \in C^1(0, \pi)$, este operador tampoco es autoadjunto en $L^2(0, \pi)$. Por lo tanto, ninguno de estos operadores definiría un observable.

Para finalizar, aunque este problema en \mathbb{R}^3 se puede evitar usando la cuantización canónica en coordenadas cartesianas y después transformando, si estamos en un sistema con vínculos, en general, no existirán coordenadas cartesianas, y la cuantización canónica no garantiza ningún buen resultado. En el fondo de esto se encuentra un hecho insatisfactorio: que mientras la mecánica clásica no depende de coordenadas la cuantización si depende. Luego es necesario un método de cuantización independiente de coordenadas.

Capítulo 5

Mecánica cuántica en el espacio hiperbólico

5.1. Movimiento clásico en el hiperboloide

Como se estudió anteriormente, el modelo del hiperboloide \mathbb{H}^n es una variedad riemanniana, de este modo se puede caracterizar el movimiento clásico de una partícula siguiendo el esquema usual de la mecánica clásica suponiendo como su espacio de configuración el espacio hiperbólico. Por consideraciones generales de geometría, el movimiento de la partícula se hará en una geodésica (véase [28]) las cuales conocemos de la sección 1.5.2, no obstante, por completitud, se estudiará a continuación el caso de una partícula de masa μ sin interacciones en el espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 . Sean x^i con $i = 1, 2, 3$ las coordenadas locales de \mathbb{H}^3 , se representarán las coordenadas generalizadas de esta partícula mediante este sistema coordenado, así es posible escribir la función Lagrangiana del sistema como:

$$\mathcal{L}(x^i, \dot{x}^i, t) = \frac{\mu}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j, \quad (5.1)$$

en la cual se ha usado la convención de suma de Einstein y la asociación $\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}$. Por conveniencia, puesto que se usará en las próximas secciones, escogemos el sistema

coordenado pseudo esférico renombrando las coordenadas $\{\eta_i\}$ de \mathbb{H}^3 , por simplicidad y en analogía con las coordenadas ortogonales esféricas del espacio euclídeo, como: $\eta_1 = \tau$, $\eta_2 = \theta$, $\eta_3 = \phi$, en consecuencia las coordenadas verifican el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^0 = R \cosh \tau, \\ x^1 = R \sinh \tau \sin \phi \sin \theta, \\ x^2 = R \sinh \tau \cos \phi \sin \theta, \\ x^3 = R \sinh \tau \cos \theta, \end{cases} \quad (5.2)$$

con $\tau \in (0, \infty)$, $\theta \in (0, \pi)$, y $\phi \in (0, 2\pi)$. Como consecuencia el tensor métrico se puede expresar en sus componentes mediante el elemento de línea:

$$ds^2 = R^2 d\tau^2 + R^2 \sinh^2 \tau d\theta^2 + R^2 \sinh^2 \tau \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (5.3)$$

Así, eligiendo un parámetro real t que defina las curvas sobre \mathbb{H}^3 , el Lagrangiano queda expresado por:

$$\mathcal{L} = \frac{\mu R^2}{2} \left(\dot{\tau}^2 + \sinh^2 \tau \dot{\theta}^2 + \sinh^2 \tau \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right). \quad (5.4)$$

Usando el principio variacional se encuentran las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\begin{cases} \ddot{\tau} - \sinh \tau \cosh \tau \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) = 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{2}{\tanh \tau} \dot{\tau} \dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = 0 \\ \ddot{\phi} + \frac{2}{\tanh \tau} \dot{\tau} \dot{\phi} + \frac{2}{\tan \theta} \dot{\theta} \dot{\phi} = 0 \end{cases}. \quad (5.5)$$

La tercera ecuación del sistema revela una cantidad conservada y puede ser escrita de forma simple al renombrar la cantidad $l_\phi = \mu R^2 \sinh^2 \tau \sin^2 \theta \dot{\phi}$, así la ecuación queda:

$$\frac{dl_\phi}{dt} = 0. \quad (5.6)$$

Esta cantidad es el análogo del momento angular de la partícula respecto de un eje que coincide, en el sistema coordenado local, con rotaciones alrededor de la dirección de la tercera coordenada $x^3 = z$. También, puesto que \mathcal{L} no depende explícitamente de t la función energía es una constante de movimiento (también conocida como integral de

Jacobi, véase [29]). Por lo tanto estas cantidades conservadas restringen el movimiento, así, es posible seguir un método análogo al del espacio euclídeo y eliminar coordenadas hasta resolver las ecuaciones de movimiento para la partícula libre. Un método más sencillo es considerar la inmersión del modelo del espacio hiperbólico en el espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{n,1}$, de esta forma la función lagrangiana de la partícula libre en el espacio hiperbólico será la de una partícula libre de igual masa en el espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{n,1}$ pero sujeta a la restricción de pertenecer al Hiperboloide, es pertinente acotar que este método funciona en general para cualquier dimensión n del espacio \mathbb{H}^n . El elemento de línea del espacio de Minkowski, se puede expresar usando las componentes $g_{\rho\nu}$ del tensor métrico g en (3.18) con $\rho, \nu = 0, 1, 2, \dots, n$:

$$ds^2 = g_{\rho\nu} dx^\rho dx^\nu. \quad (5.7)$$

Escogemos como parámetro real a s el cual define las curvas sobre la variedad (en este caso $\mathbb{R}^{n,1}$), entonces el Lagrangiano de la partícula libre sujeta al vínculo holonómico de pertenecer al hiperboloide viene dado por la expresión:

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2} g_{\rho\nu} \dot{x}^\rho \dot{x}^\nu + \lambda (g_{\rho\nu} x^\rho x^\nu + R^2), \quad (5.8)$$

donde los índices $\rho, \nu = 0, 1, 2, \dots, n$ y el factor λ es un parámetro real y con las dimensiones adecuadas conocido como multiplicador de Lagrange. Las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenidas de \mathcal{L} en los $(n + 1)$ grados de libertad pueden ser expresadas en forma compacta, para las x^μ como:

$$\ddot{x}^\nu - \alpha x^\nu = 0, \quad (5.9)$$

donde la constante α está definida por $\alpha(\lambda) \equiv \frac{2\lambda}{\mu}$. La solución general de esta ecuación puede ser escrita como:

$$x^\nu(s) = a^\nu \cosh(t) - b^\nu \sinh(t), \quad (5.10)$$

donde t es un nuevo parámetro real relacionado directamente con s por $t = \sqrt{\alpha} s$, lo cual coincide con las líneas “rectas” discutidas en la sección 1.5.2 (como esperábamos).

5.2. Cuantización en el espacio hiperbólico

Queremos construir, ahora, la mecánica cuántica de una partícula de masa μ libre en el espacio Hiperbólico \mathbb{H}^3 . El primer postulado de la mecánica cuántica exige el establecimiento de un espacio de Hilbert complejo y separable. Por analogía con el caso euclídeo proponemos como espacio de Hilbert el conjunto de todas las funciones a valores complejos definidas sobre el espacio hiperbólico \mathbb{H}^n y de cuadrado integrable respecto de la medida (invariante frente isometrías) dx^n dada por la expresión (3.37), esto es:

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{H}^n, dx^n) = \left\{ \psi(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in \mathbb{H}^n : \int |\psi(\mathbf{x})|^2 dx^n < \infty \right\}. \quad (5.11)$$

Nótese que este espacio de Hilbert es de dimensión infinita y que su producto escalar esta definido por la siguiente suma continua:

$$\langle \varphi | \psi \rangle \equiv \int \varphi^*(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) dx^n \quad \forall \varphi, \psi \in L^2(\mathbb{H}^n, dx^n). \quad (5.12)$$

De esta forma un estado puro estará representado por una función $\psi(\mathbf{x}) \in L^2(\mathbb{H}^n, dx^n)$ tal que:

$$\|\psi(\mathbf{x})\|^2 = \int |\psi(\mathbf{x})|^2 dx^n = 1. \quad (5.13)$$

Los observables serían desde luego algunos operadores lineales autoadjuntos que actúan sobre $L^2(\mathbb{H}^n, dx^n)$ y sus valores medios calculados mediante el producto interno anteriormente definido representan los valores medibles del sistema, por ejemplo, sea \hat{A} un observable, entonces su valor medio viene dado por:

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} \psi \rangle = \int \psi^*(\mathbf{x}) \hat{A} \psi(\mathbf{x}) dx^n \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\hat{A}). \quad (5.14)$$

Por lo tanto, necesitamos construir los observables para una partícula libre de masa μ en \mathbb{H}^3 . El procedimiento estándar de cuantización canónica, partiendo del lagrangiano (5.1) y construyendo la formulación hamiltoniana no garantiza una cuantización correcta como vimos en la sección 2.3. Queremos un procedimiento de cuantización que sea independiente de coordenadas, obteniendo no solo el hamiltoniano, sino algunos

observables generadores de las isometrías de \mathbb{H}^3 que vendrían a jugar el papel de los "momentos". El observable de posición sería el operador de multiplicación en $L^2(\mathbb{H}^3)$.

Como se mencionó anteriormente el hamiltoniano clásico es una función escalar sobre el espacio fibrado cotangente, y determina la evolución temporal del sistema (4.1), en consecuencia permite encontrar y estudiar las leyes de conservación. El conocido teorema de Noether establece, en particular, que cada cantidad física conservada surge como consecuencia de una simetría en el espacio de configuraciones, esto se traduce en que cada transformación sobre la variedad que deja invariante el Lagrangiano o el hamiltoniano, está asociada a una cantidad conservada del espacio fibrado cotangente. Se puede verificar que el generador v de un grupo monoparamétrico de isometrías sobre una variedad riemannianna X es un campo vectorial completo en dicha variedad, de esta forma se asocia una cantidad conservada al generador v de la simetría y por lo tanto:

$$\frac{dv}{dt} = \{v, \mathcal{H}\}_{PB} = 0, \quad (5.15)$$

esto es, el corchete de Poisson de v con \mathcal{H} es cero.

Los generadores de isometrías se van a corresponder con observables momentos en mecánica cuántica. El hamiltoniano clásico se debe corresponder con el hamiltoniano cuántico. Puesto que el hamiltoniano cuántico genera la evolución temporal del sistema la cuantización de (5.15) nos dice que el generador v cuántico conmuta con el hamiltoniano cuántico.

$$[\hat{v}, \hat{H}] = 0. \quad (5.16)$$

Por esta razón el operador hamiltoniano \hat{H} debe conmutar con el álgebra de Lie formada por los generadores de la simetría. Por otra parte un resultado general de geometría diferencial muestra que los generadores de las isometrías en una variedad riemanniana o pseudoriemanniana son los llamados campos vectoriales de Killing. En lo que sigue recordaremos algunas propiedades de estos campos vectoriales.

Definición 6 *Sea X una variedad riemannianna de tensor métrico g y K un campo vectorial definido sobre la variedad X , K es un campo vectorial de Killing, o simplemente*

vector de Killing, si la derivada de Lie de la métrica en la dirección dada por él es anulada, esto es:

$$\mathcal{L}_K g = 0, \quad (5.17)$$

donde \mathcal{L}_K es la derivada de Lie en la dirección de K , para un tensor T_{ab} en general viene dada explícitamente por:

$$\mathcal{L}_K T_{ab} = \partial_b T_{ad} K^d + \partial_a T_{db} K^d. \quad (5.18)$$

La ecuación (5.17) es llamada ecuación de Killing y puede ser expresada en forma covariante como:

$$\partial_\mu K_\nu + \partial_\nu K_\mu - 2\Gamma_{\mu\nu}^\rho K_\rho = 0, \quad (5.19)$$

donde $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho} \{\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}\}$ son las conexiones (símbolos de Christoffel).

Obviamente los vectores de Killing son entes geométricos independientes de su representación, por otra parte es posible verificar que son campos vectoriales completos, además mediante la operación de conmutación (corchetes de Lie) forman un álgebra de Lie:

$$[K_\mu, K_\nu] = \alpha_{\mu\nu} K_\lambda. \quad (5.20)$$

En efecto, los campos vectoriales de Killing son una representación del álgebra de Lie del grupo de isometrías de la variedad, por lo cual también se les suele llamar isometrías infinitesimales.

El esquema de cuantización que usaremos consiste, en asociar el vector posición con su respectivo operador, el cual actúa, como ya se mencionó, de forma multiplicativa sobre el espacio de Hilbert:

$$x^\mu \rightarrow \hat{X}^\mu, \quad \hat{X}^\mu \psi(\mathbf{x}) = x^\mu \psi(\mathbf{x}) \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\hat{X}^\mu). \quad (5.21)$$

Las otras variables dinámicas, esto es, los momentos, se construyen de los vectores de Killing. En efecto, puesto que K_μ define un operador diferencial sobre $C^\infty(X)$ (ya que es un campo vectorial), este está definido sobre $C_0^\infty(X) \subset C^\infty(X)$. Además $C_0^\infty(X) \subset$

$L^2(\mathbb{H}^n, d^n x)$ y es denso. No es difícil chequear que el operador $-i\hbar K_\mu$ es hermítico, por lo tanto, es simétrico. Por un teorema conocido, ya que K_μ es completo, se tiene que existe un dominio **único** al cual se extiende $C_0^\infty(X)$ de manera que $-i\hbar K_\mu$ es autoadjunto. Así la cuantización viene dada por:

$$p_\mu \rightarrow \hat{P}_\mu = -i\hbar K_\mu. \quad (5.22)$$

Vamos a realizar concretamente los operadores K_μ , lo cual es un cálculo estándar. Utilizando el software matemático Maple 12 calculamos los vectores de Killing para el espacio Hiperbólico tridimensional \mathbb{H}^3 en el modelo de Minkowski, dicho cálculo se realizó en las coordenadas cartesianas, mediante el tensor métrico dado por (3.30), y se obtuvieron seis campos vectoriales de Killing independientes:

$$\begin{aligned} K_1 &= \sqrt{R^2 + x^2 + y^2 + z^2} \partial_x, \\ K_2 &= \sqrt{R^2 + x^2 + y^2 + z^2} \partial_y, \\ K_3 &= \sqrt{R^2 + x^2 + y^2 + z^2} \partial_z, \\ K_4 &= y \partial_z - z \partial_y, \\ K_5 &= z \partial_x - x \partial_z, \\ K_6 &= x \partial_y - y \partial_x. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Nótese que los vectores de Killing se corresponden con generadores de una representación del grupo de Lorentz $\mathbf{PSO}(1, 3)$ del espacio de Minkowski \mathbb{R}^{3+1} , ya que este grupo es el grupo de isometrías (ver sección 3.5). Ver, también, ecuación 5.25 en esta misma sección (donde se verifica el algebra de Lie de Lorentz). Es posible expresar estos vectores de Killing de manera equivalente bajo cualquier cambio del sistema coordenado, en específico en las coordenadas pseudoesféricas dadas por (5.2):

$$\begin{aligned} K_1 &= \sin \theta \cos \phi \partial_\tau + \frac{\cos \theta \cos \phi}{\tanh \tau} \partial_\theta - \frac{\sin \phi}{\tanh \tau \sin \theta} \partial_\phi, \\ K_2 &= \sin \theta \sin \phi \partial_\tau + \frac{\cos \theta \sin \phi}{\tanh \tau} \partial_\theta + \frac{\cos \phi}{\tanh \tau \sin \theta} \partial_\phi, \\ K_3 &= \cos \theta \partial_\tau - \frac{\sin \phi}{\tanh \tau} \partial_\theta, \\ K_4 &= -\sin \phi \partial_\theta - \frac{\cos \phi}{\tan \theta} \partial_\phi, \\ K_5 &= \cos \phi \partial_\theta - \frac{\sin \phi}{\tan \theta} \partial_\phi, \\ K_6 &= \partial_\phi. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Siguiendo el método asociemos ahora los vectores con los operadores según: $\hat{P}_\mu = -i\hbar K_\mu$ con $\mu = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, es fácil verificar que los momentos $\hat{P}_4, \hat{P}_5, \hat{P}_6$ se corresponden con los operadores de momento angular del espacio euclídeo. Esto se debe a que son los generadores del grupo de rotaciones sobre el espacio Hiperbólico el cual se demostró que es isomorfo al grupo de rotaciones que actúa sobre el espacio euclídeo, esto es $\mathbf{SO}(3)$. En efecto verifican la misma álgebra, para verificarlo se introducirá el siguiente renombramiento $\hat{M}_1 = \hat{P}_4, \hat{M}_2 = \hat{P}_5, \hat{M}_3 = \hat{P}_6$. Los tres primeros momentos se corresponden a los generadores de los boost para ellos se dispondrá la asignación $\hat{N}_1 = \hat{P}_1, \hat{N}_2 = \hat{P}_2, \hat{N}_3 = \hat{P}_3$, en consecuencia el álgebra de los momentos puede ser resumida por las siguientes relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} [\hat{N}_i, \hat{N}_j] &= -i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{M}_k, \\ [\hat{M}_i, \hat{M}_j] &= i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{M}_k, \\ [\hat{M}_i, \hat{N}_j] &= i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{N}_k. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Una vez conocida el álgebra de Lie de los operadores momento se puede entonces calcular el operador hamiltoniano para una partícula libre de masa μ . Para ello tomamos como base el hecho de que este operador debe conmutar con todos los elementos del álgebra por (5.16), además de ser una forma cuadrática general de esos elementos, es decir, el hamiltoniano debe ser un operador de Casimir. Es bien conocido que un operador de Casimir del grupo de Lorentz es:

$$\hat{K} = \sum_{i=1}^3 (\hat{N}_i^2 - \hat{M}_i^2). \quad (5.26)$$

El otro operador de Casimir para el grupo de Lorentz es $\sum_{i=1}^3 \hat{N}_i \hat{M}_i$ el cual si se calcula explícitamente da cero. Por lo tanto, nos queda que el hamiltoniano debe ser proporcional al operador \hat{K} , la constante de proporcionalidad por razones dimensionales nos lleva a:

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu R^2} \hat{K}. \quad (5.27)$$

Utilizando el sistema coordenado pseudoesférico se puede escribir el operador hamiltoniano de la partícula libre como:

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2\mu R^2} \left[\frac{1}{\sinh^2 \tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\sinh^2 \tau \frac{\partial}{\partial \tau} \right) + \frac{1}{\sinh^2 \tau} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sinh^2 \tau \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (5.28)$$

Nótese que este operador salvo la constante $-\frac{\hbar^2}{2\mu R^2}$ coincide con el operador de Laplace-Beltrami que es una generalización del operador Laplaciano para variedades riemannianas y pseudoriemannianas, este hecho puede verificarse además para cualquier sistema coordenado sobre \mathbb{H}^n . Para una variedad M de tensor métrico g y en la carta $\{x^i\}$, el operador de Laplace Beltrami viene dado por la expresión:

$$\nabla_M^2 = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \right), \quad (5.29)$$

donde $|g|$ es el determinante de la matriz asociada al tensor métrico y g^{ij} son las componentes del tensor métrico inverso.

Capítulo 6

Partícula en un potencial central

6.1. Átomo de Hidrógeno

Uno de los problemas más importantes de la mecánica cuántica en espacio euclídeo es el de una partícula en un potencial central. En esta sección, queremos estudiar el problema análogo al electrón del átomo de hidrógeno, es decir, una partícula en un potencial Coulombiano pero en el espacio hiperbólico. Siguiendo el procedimiento de la mecánica cuántica usual el problema se reduce a encontrar los autovalores y autofunciones para el operador hamiltoniano asociado al sistema, es decir, la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu R^2}\nabla_H^2\psi(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) = E\psi(\mathbf{x}), \quad (6.1)$$

donde ∇_H^2 es el operador de Laplace-Beltrami en el espacio de Lobachevski, el cual es el hamiltoniano de la partícula libre en este espacio (de acuerdo a los resultados de la sección 3.2), y $V(\mathbf{x})$ es el operador potencial asociado a la interacción, en este caso el potencial coulombiano en el espacio hiperbólico, para hallar este potencial se hará uso del hecho de que el modelo del espacio está inmerso en el espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$. Nos concentraremos únicamente en el espectro discreto. Como mencionamos en la introducción este problema ha sido estudiado, ver, por ejemplo, [4] y [16]. Lo hacemos

aquí, por completitud, viendo que, al igual que en espacio euclídeo, una partícula en un campo externo puede ser considerada en el espacio hiperbólico. Además, se realizan los cálculos por un camino distinto al de las referencias [4] y [16], para verificar sus resultados.

El potencial coulombiano se escoje en la literatura [4] como:

$$V(\tau) = -\frac{kq^2}{R}(\coth \tau - 1), \quad (6.2)$$

donde, hemos usado nuestra notación. Este potencial se justifica al ser $(\coth \tau - 1)$ una función de Green en espacio hiperbólico para el operador de Laplace-Beltrami. Así representando el "potencial eléctrico" del protón en reposo (salvo constantes). Esto es, se postula que Poisson se satisface en espacio hiperbólico también. Luego se construye $U(\tau)$ al multiplicar por la carga del electrón $-q$ (postulando que la energía de interacción es como en triespacio euclídeo).

La covariantización de la electrostática implícita en la definición (6.2), aparte de la adopción del concepto de energía potencial euclídea, se ve como necesaria ya que el espacio hiperbólico es un triespacio y como hemos dicho no está necesariamente incluido en un espacio-tiempo. Sin embargo, puesto que en el modelo del hiperboloide, \mathbb{H}^3 , este está en Minkowski podemos entender el potencial coulombiano como lo explicamos a continuación. Usaremos una de las ventajas del modelo del hiperboloide, que es estar encajado en Minkowski y este corresponderse con una física que es la de nuestro mundo real en el espacio-tiempo.

En el espacio-tiempo de Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$ la interacción electromagnética de una partícula cargada en un campo externo queda determinada por el cuadvivector potencial $A^\mu = A^\mu(x^\mu)$ asociado al campo externo, eligiendo el sistema coordenado cartesiano sobre Minkowski el potencial se escribe como:

$$A_\mu = (\Phi, \vec{A}), \quad (6.3)$$

donde ϕ es el potencial escalar asociado el campo eléctrico y \vec{A} es el potencial vector asociado al campo magnético. Tomando en cuenta lo anterior y la inmersión del modelo

del hiperboloide en el espacio de Minkowski, entonces la interacción electromagnética “Hiperbólica” vendrá dada por la restricción del cuadvivector potencial a los puntos del hiperboloide \mathbb{H}^3 , esto es, $A^\mu = A^\mu(\mathbf{x})$ con $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^3$.

Si el potencial externo viene dado por una partícula de carga q (protón) en reposo respecto de un sistema de referencia inercial en el espacio de Minkowski, el cuadvivector potencial viene dado por:

$$A^\mu = \left(\frac{kq}{r}, 0, 0, 0 \right), \quad (6.4)$$

donde k es la constante de Coulomb, y $r = |\vec{x}|$. En el caso del espacio euclídeo la energía potencial $V(\vec{x})$ para una carga Q en el campo externo es igual a:

$$V(\vec{x}) = -QA^\mu \eta_\mu = \frac{kqQ}{r}, \quad (6.5)$$

donde $\eta^\mu = (1, 0, 0, 0)$, que representa la cuadvivivlocidad de una carga en reposo (electrón), es el cuadvivector ortogonal a la superficie del espacio de Minkowski con x^0 igual a una constante.

Para el caso de espacio hiperbólico, lo que tenemos es que tomar en cuenta que ahora: $\eta^\mu = \frac{x^\mu}{R}$, el vector normal al hiperboloide, así representando a una partícula en reposo allí (electrón), por lo tanto la energía potencial vendría dada por:

$$\Phi = \frac{kqQ}{r} \frac{\sqrt{R^2 + r^2}}{R}. \quad (6.6)$$

Notemos que en el límite de la curvatura tendiendo a cero ($R \rightarrow \infty$) se reobtiene la energía potencial del espacio euclídeo. Además, teniendo de fondo A^μ (que es una cantidad geométrica, la covariancia es en el espacio-tiempo) nos da el análogo del potencial de Coulomb en forma alternativa a la definición dada por [4]. Los resultados coinciden salvo una constante aditiva (irrelevante).

Es conveniente reescribir la interacción en coordenadas pseudoesféricas, además de simplificar en gran medida el cálculo, se verifica así la simetría del sistema. Tenemos que en este sistema coordenado $r = R \sinh \tau$. Por lo tanto la interacción se escribe como:

$$\Phi = \Phi(\tau) = \frac{kqQ}{R \sinh \tau} \cosh \tau = \frac{kqQ}{R \tanh \tau}. \quad (6.7)$$

Nótese que si tomamos la carga externa $Q = -q$, para $r \rightarrow \infty$ ($\tau \rightarrow \infty$), el cual es el caso limite para la partícula libre, el potencial va como $\Phi = -\frac{kq^2}{R}$, así la energía para el caso estudiado (partícula ligada al potencial) está acotada superiormente por este valor del potencial.

Escribiendo el operador de Laplace Beltrami en coordenadas pseudoesféricas, la ecuación de Schrödinger viene dada por la siguiente expresión:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu R^2} \left[\frac{1}{\sinh^2 \tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\sinh^2 \tau \frac{\partial}{\partial \tau} \right) + \frac{1}{\sinh^2 \tau} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sinh^2 \tau \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \psi(\mathbf{x}) + \frac{kq^2}{R \tanh \tau} \psi(\mathbf{x}) = E \psi(\mathbf{x}), \quad (6.8)$$

con $\tau \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$ y $\phi \in [0, 2\pi]$.

No es difícil verificar que la ecuación es separable, para ello se propone como solución la forma:

$$\psi(\mathbf{x}) = G(\tau)H(\theta)Q(\phi). \quad (6.9)$$

De la cual se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias independientes:

$$\frac{d^2 Q(\phi)}{d\phi^2} = -m^2 Q(\phi); \quad m \in \mathbb{C}. \quad (6.10)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dH(\theta)}{d\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] H(\theta) = 0; \quad l \in \mathbb{C}. \quad (6.11)$$

$$\frac{1}{\sinh^2 \tau} \frac{d}{d\tau} \left(\sinh^2 \tau \frac{dG(\tau)}{d\tau} \right) + \left[\frac{\beta}{\tanh \tau} - \frac{l(l+1)}{\sinh^2 \tau} + \lambda \right] G(\tau) = 0, \quad (6.12)$$

donde se han definido las constantes:

$$\beta = \frac{2\mu kq^2 R}{\hbar^2}, \quad \lambda = \frac{2\mu R^2 E}{\hbar^2}. \quad (6.13)$$

Las dos primeras ecuaciones al imponer condiciones de contorno periódicas en los extremos de los intervalos nos llevan a los armónicos esféricos, esto es:

$$H(\theta)Q(\phi) = Y_m^l(\theta, \phi). \quad (6.14)$$

Estos armónicos esféricos manifiestan la simetría rotacional del potencial, y estos aparecen naturalmente debido a que la parte que depende de θ y ϕ en la ecuación es idéntica a la representación del operador momento angular al cuadrado (salvo una constante):

$$\sum_{i=1}^3 M_i^2 = \widehat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]. \quad (6.15)$$

En la ecuación (6.12) podemos hacer el cambio de variable dependiente usual $G(\tau) = \frac{U(\tau)}{\sinh \tau}$ que elimina el término de la primera derivada:

$$\frac{d^2 U(\tau)}{d\tau^2} + \left[\frac{\beta}{\tanh \tau} - \frac{l(l+1)}{\sinh^2 \tau} + \epsilon \right] U(\tau) = 0, \quad (6.16)$$

donde $\epsilon = \lambda - 1$.

Esta ecuación diferencial ordinaria lineal tiene infinitas singularidades sobre el plano complejo \mathbb{C} en los puntos $\tau = in\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$, luego no tiene un número finito de puntos singulares por lo que no podemos usar los análisis usuales. Para solucionar este problema se propone un cambio de variable independiente $\omega = \tanh \tau$ con $\omega \in (0, 1)$ para $\tau \in (0, \infty)$, puesto que $\frac{d\omega(\tau)}{d\tau} = \text{sech}^2 \tau$, se tiene que $\omega(\tau)$ es una biyección, definiendo $U(\tau) = g(\omega)$ la ecuación se transforma en:

$$\frac{d^2 g(\omega)}{d\omega^2} - \frac{2\omega}{1-\omega^2} \frac{dg(\omega)}{d\omega} + \left[\frac{\beta + \epsilon\omega}{\omega(1-\omega^2)^2} - \frac{l(l+1)}{\omega^2(1-\omega^2)} \right] g(\omega) = 0. \quad (6.17)$$

La ecuación (6.17) sobre el plano complejo \mathbb{C} posee ahora solo tres puntos singulares regulares, estos puntos son $\omega = \pm 1$ y $\omega = 0$ [la complejificación de esta ecuación no es equivalente a la de (6.16)], esta ecuación es del tipo conocido como ecuación de Riemann-Papperitz (refiérase a [26]), resulta conveniente redistribuir las singularidades, el cambio de variable definido por la transformación de Möbius $z(\omega) = \frac{2\omega}{\omega+1}$ es una biyección y mapea las singularidades sobre los puntos $z = 0, 1, \infty$, de nuevo la fidelidad del cambio es clara puesto que $\frac{dz}{d\omega} = \frac{2}{(\omega+1)^2}$, definiendo $g(\omega) = f(z)$ la ecuación se reescribe como:

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} + \frac{1}{z-1} \frac{df(z)}{dz} + \left[\frac{l(l+1)}{z} - \frac{\beta - \epsilon}{4} + \frac{\beta + \epsilon}{4(z-1)} \right] \frac{f(z)}{z(z-1)} = 0. \quad (6.18)$$

Seguendo la referencia ([26]), la ecuación de Riemann-Papperitz con singularidades en los puntos $z = 0, 1, \infty$ queda expresada como

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} - \left[\frac{\alpha + \alpha' - 1}{z} + \frac{\mu + \mu' - 1}{z - 1} \right] \frac{df(z)}{dz} - \left[\frac{\alpha\alpha'}{z} - \frac{\mu\mu'}{z - 1} + \nu(\alpha + \alpha' + \mu + \mu' + \nu - 1) \right] \frac{f(z)}{z(z - 1)} = 0. \quad (6.19)$$

La solución general a la ecuación en términos de la función Hipergeométrica F puede escribirse de la siguiente forma:

$$Az^\alpha(z - 1)^\mu F(\alpha + \mu + \nu, 1 - \nu - \alpha' - \mu'; \alpha - \alpha' + 1; z) + Bz^{\alpha'}(z - 1)^\mu F(\alpha' + \mu + \nu, 1 - \nu - \alpha - \mu'; \alpha' - \alpha + 1; z), \quad (6.20)$$

donde, se supone que $\alpha' - \alpha$ no es un entero.

Comparando directamente las ecuaciones (6.18) y (6.19), se pueden determinar los parámetros $(\alpha, \alpha', \mu, \mu', \nu)$ en función de las constantes del problema, obteniendo así:

$$\begin{aligned} \alpha &= l + 1, & \alpha' &= -l, \\ \mu &= \sqrt{\frac{-(\beta + \epsilon)}{4}}, & \mu' &= -\sqrt{\frac{-(\beta + \epsilon)}{4}}, \\ \nu &= \sqrt{\frac{\beta - \epsilon}{4}}, \end{aligned} \quad (6.21)$$

donde, vemos que $\alpha' - \alpha$ es un entero.

Entonces, identificados todos los parámetros, se puede escribir la solución general para (6.18) como:

$$f(z) = Az^\alpha(z - 1)^\mu F(a, b; c; z) + Bz^{\alpha'}(z - 1)^\mu \varphi_2(z), \quad (6.22)$$

donde $\varphi_2(z)$ es una segunda solución linealmente independiente de la ecuación hipergeométrica y las constantes a, b, c al comparar con (6.20) quedan determinadas por:

$$\begin{aligned} a &= \alpha + \mu + \nu = l + 1 + \sqrt{\frac{\beta - \epsilon}{4}} + \sqrt{\frac{-(\beta + \epsilon)}{4}}, \\ b &= 1 - \nu - \alpha' - \mu' = l + 1 - \sqrt{\frac{\beta - \epsilon}{4}} + \sqrt{\frac{-(\beta + \epsilon)}{4}}, \\ c &= 1 + \alpha - \alpha' = 2l + 2. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Esta solución general debe ser particularizada imponiendo las condiciones de contorno usuales en los problemas de autovalores, primero consideraremos la condición de regularidad en el origen, esto es, cuando $\tau = 0$, $G(0)$ es finita, por lo cual se impone que en $z = 0$, $f(0) = 0$. Del comportamiento asintótico de la segunda solución en $z = 0$ (ver, por ejemplo, [30]) se sigue que $\varphi_2(z)$ diverge en $z = 0$ y por lo tanto $B = 0$. Tomando en cuenta este hecho y realizando los cambios de variables inversos pertinentes, puede escribirse la solución como:

$$G(\tau) = C \frac{1}{\sinh \tau} \left(\frac{2 \tanh \tau}{\tanh \tau + 1} \right)^{l+1} \left(\frac{\tanh \tau - 1}{\tanh \tau + 1} \right)^{\sqrt{-\frac{\beta+\epsilon}{4}}} F \left(a, b; c; \frac{2 \tanh \tau}{\tanh \tau + 1} \right). \quad (6.24)$$

Esta solución puede ser escrita en forma más compacta como:

$$G(\tau) = C e^{-(l+1+\sqrt{-(\epsilon+\beta)})\tau} \sinh^l \tau F(a, b; c; 2e^{-\tau} \sinh \tau). \quad (6.25)$$

Para asegurar que las soluciones pertenezcan al espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{H}^3, d^3x)$, se debe imponer la condición de finitud para la norma de la solución, esto es:

$$\int_0^\infty |G(\tau)|^2 \sinh^2 \tau d\tau < \infty. \quad (6.26)$$

Usando el cambio de variable $z = \frac{2 \tanh \tau}{\tanh \tau + 1}$, se puede escribir explícitamente la ecuación anterior como:

$$C \int_0^1 z^{2l} (1-z)^{\sqrt{-(\beta+\epsilon)}-1} |F(a, b; c; z)|^2 dz < \infty. \quad (6.27)$$

Resulta útil estudiar el comportamiento asintótico de la función hipergeométrica, el cual viene dado por (ver, por ejemplo [30]):

$$F(a, b; c; z) \underset{z \rightarrow 1}{\sim} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (z-1)^{c-a-b}, \quad (6.28)$$

para $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a, b, c \neq 0, -1, -2, \dots$ y $b+a > c$ (valores que son posibles en nuestro caso).

Entonces, en el límite en el cual $\tau \rightarrow \infty$, la integral de la condición (6.27) diverge:

$$\lim_{\delta \rightarrow 1} \int_0^\delta z^{2(l+1)} (1-z)^{-(1+\sqrt{-(\epsilon+\beta)})} dz \rightarrow \infty, \quad (6.29)$$

si se cumplen las condiciones que llevan a (6.29).

Por lo tanto, dado que siempre $c = 2(l + 1) > 0$, y que $a > 0$ estamos obligados a escoger el parámetro $b = -n_r$, con $n_r = 0, 1, 2, \dots$, un entero negativo. Se puede verificar que con esta elección la función hipergeométrica es siempre una serie de potencias finita, es decir un polinomio (refiérase a [30]). Esta imposición además de garantizar que la solución pertenece al espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{H}^3, d^3x)$, nos permita hallar los autovalores:

$$E = \frac{\mu k^2 q^4}{2\hbar^2} \left(-\frac{1}{n^2} - (n^2 - 1) \frac{\hbar^4}{\mu^2 k^2 q^4 R^2} \right), \quad (6.30)$$

donde $n = n_r + l + 1$, así para n dado, $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$. Obteniéndose que para derivar (6.30): $2n^2 < \beta$. Esto es, el espectro ligado es finito.

Estos autovalores coinciden con los obtenidos en la referencia [16]. Allí usaron unos cambios de variables diferentes a los nuestros (singulares inclusive). Estos autovalores coinciden con los encontrados por [4], salvo por una constante, debido a la escogencia del potencial coulombiano. Sin embargo, [16] no obtiene la finitud del conjunto de autovalores que si aparece en [4] (en este sentido, nuestros resultados coinciden plenamente con [4]). Esta finitud es físicamente importante si interpretamos al hamiltoniano como una especie de energía ya que tendríamos un estado base de mínima energía.

Un aspecto importante es la verificación del modelo en el límite en el que la curvatura $\kappa = -\frac{1}{R^2}$ se hace cero, es decir se recupera la idea del espacio euclídeo en este caso \mathbb{R}^3 , para ello se debe notar que hacer tender la curvatura a cero $\kappa \rightarrow 0$ implica hacer tender el radio de curvatura R a infinito debido a la relación cuadrática inversa de estos parámetros. Es fácil verificar que se recupera el espectro de energías:

$$E \underset{\kappa \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\mu k^2 q^4}{2\hbar^2 n^2}, \quad (6.31)$$

esto implica que la constante λ se restringe también a otra constante dada por:

$$\lambda_0 = \frac{\mu^2 R^2 k^2 q^4}{\hbar^4 n^2}. \quad (6.32)$$

Nótese que en el límite $R \rightarrow \infty$ el parámetro b también tiende a infinito, este límite es bien conocido con respecto al comportamiento de la función hipergeométrica, en efecto

el límite es llamado confluencia y origina la función conocida como hipergeométrica confluyente:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} F(a, b; c; \frac{z}{b}) = M(a, c; z). \quad (6.33)$$

Las constantes μ y ν así como el parámetro b de la solución pueden verse como funciones de la curvatura y estudiar así el límite en el cual $\kappa \rightarrow 0$, y así obtener:

$$\mu(\kappa) \underset{\kappa \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{-\lambda_0}}{\sqrt{-\kappa}} - \frac{\beta}{2\sqrt{-\lambda_0}} \right), \quad (6.34)$$

$$\nu(\kappa) \underset{\kappa \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{-\lambda_0}}{\sqrt{-\kappa}} + \frac{\beta}{2\sqrt{-\lambda_0}} \right), \quad (6.35)$$

$$b \underset{\kappa \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sqrt{-\lambda}}{\sqrt{-\kappa}} = R\sqrt{-\lambda_0}. \quad (6.36)$$

Por otra parte la variable independiente τ tiende a $\frac{r}{R}$ donde $r = \|\vec{x}\|_E$ es la coordenada radial de un vector \vec{x} del espacio euclídeo \mathbb{R}^3 , así el termino $e^{-\tau} \sinh \tau$ también tiende a $\frac{r}{R}$, en consecuencia podemos escribir la solución como:

$$G(\tau) \rightarrow R(r) = C' r^l e^{-\sqrt{-\lambda_0} r} M(-n; 2(l+2); 2\sqrt{-\lambda_0} r). \quad (6.37)$$

Que es la función de onda radial para un átomo hidrogenoide en el espacio euclídeo [30], con C' una constante de normalización, esta quizá no es la forma mas usual de expresar la solución, pero existe una conocida propiedad que relaciona la función hipergeométrica confluyente de parámetro a o b entero negativo, con los polinomios de Laguerre $M(-n, c, z) \propto L_n^c(z)$ de este modo la solución quedaria como:

$$G(\tau) \rightarrow R(r) = C' r^l e^{-\sqrt{-\lambda_0} r} L_n^{2(l+1)}(2\sqrt{-\lambda_0} r). \quad (6.38)$$

6.2. Oscilador Armónico

Otro problema usual de interacción central es el conocido como oscilador armónico cuántico, en espacio euclídeo este tipo de interacciones viene dada por el potencial $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$, se debe en consecuencia hallar su análogo en espacio hiperbólico, tomando

en cuenta el precedente del problema anterior, se puede suponer como distancia de acción de la interacción " $R \tanh \tau$ " y así establecer como potencial $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}kR^2 \tanh^2 \tau$, entonces la ecuación de Schrödinger para esta problema será:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu R^2} \left[\frac{1}{\sinh^2 \tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\sinh^2 \tau \frac{\partial}{\partial \tau} \right) + \frac{1}{\sinh^2 \tau} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sinh^2 \tau \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \psi(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}kR^2 \tanh^2 \tau \psi(\mathbf{x}) = E\psi(\mathbf{x}). \quad (6.39)$$

Este problema también ha sido considerado en la literatura [31] y la escogencia del potencial es usual aunque en este caso la justificación no es clara. De igual forma y por las mismas razones al problema del átomo de hidrógeno se puede separar la ecuación.

La solución propuesta tomaría la forma $\psi(\mathbf{x}) = G(\tau)Y_m^l(\theta, \phi)$, y en consecuencia el problema se ve reducido a estudiar solo la ecuación en la variable τ :

$$\frac{1}{\sinh^2 \tau} \frac{d}{d\tau} \left(\sinh^2 \tau \frac{dG(\tau)}{d\tau} \right) + \left[\lambda - \frac{l(l+1)}{\sinh^2 \tau} - \sigma \tanh^2 \tau \right] G(\tau) = 0. \quad (6.40)$$

En esta ocasión las constantes están definidas como:

$$\sigma = \frac{\mu R^4 k}{\hbar^2}, \quad \lambda = \frac{2\mu R^2 E}{\hbar^2}. \quad (6.41)$$

Resulta conveniente valerse de nuevo del renombramiento $U(\tau) = \frac{G(\tau)}{\sinh \tau}$, y de la propiedad algebraica $\text{sech}^2 \tau + \tanh^2 \tau = 1$, para reescribir la ecuación como:

$$\frac{d^2 U(\tau)}{d\tau^2} + \left[\frac{\sigma}{\cosh^2 \tau} - \frac{l(l+1)}{\sinh^2 \tau} + \tilde{\epsilon} \right] U(\tau) = 0, \quad (6.42)$$

donde la nueva constante viene dada por:

$$\tilde{\epsilon} = \lambda - \sigma - 1. \quad (6.43)$$

Esta ecuación también tiene infinitos puntos singulares regulares sobre el plano complejo, cuando $\tau = i\pi n$ con $n \in \mathbb{Z}$, de nuevo se usará un cambio de variable independiente para disminuir y redistribuir las singularidades, pero en esta ocasión el cambio viene dado por la biyección $z = \tanh^2 \tau$ así $z \in (0, 1)$, entonces $U(\tau) = f(z)$, así la ecuación puede ser rescrita como:

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} + \left(\frac{1}{2z} + \frac{1}{z-1} \right) \frac{df(z)}{dz} + \left[\frac{l(l+1)}{4z} + \frac{\tilde{\epsilon}}{4(z-1)} - \frac{\sigma}{4} \right] \frac{f(z)}{z(z-1)} = 0. \quad (6.44)$$

De nuevo esta es la ecuación de Riemann-Papperitz con las singularidades directamente en $z = 0, 1, \infty$, análogamente al problema del átomo de hidrógeno se pueden identificar los parámetros de la ecuación con nuestras constantes mediante:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2}(l+1), & \alpha' &= -\frac{l}{2}, \\ \mu &= \sqrt{\frac{-\tilde{\epsilon}}{4}}, & \mu' &= -\sqrt{\frac{-\tilde{\epsilon}}{4}}, \\ \nu &= \frac{1}{4}(1 - \sqrt{1+4\sigma}).\end{aligned}\tag{6.45}$$

Entonces la solución general a esta ecuación se puede escribir como:

$$f(z) = Az^\alpha(z-1)^\mu {}_2F_1(a, b; c; z) + Bz^{\alpha'}(z-1)^{\mu'} {}_2F_1(a', b'; c'; z).\tag{6.46}$$

Las nuevas constantes están relacionadas con las otras mediante:

$$\begin{aligned}a &= \nu + \alpha + \mu = \frac{1}{2}\left(l + \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{-\tilde{\epsilon}} - \frac{1}{4}\sqrt{1+4\sigma}, \\ b &= 1 - \nu - \alpha' - \mu' = \frac{1}{2}\left(l + \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{-\tilde{\epsilon}} + \frac{1}{4}\sqrt{1+4\sigma}, \\ c &= 1 + \alpha - \alpha' = l + \frac{3}{2}.\end{aligned}\tag{6.47}$$

Los valores de las constantes a', b', c' están dados por (6.23) (la parte que depende de $\alpha, \alpha', \mu, \mu'$ y 4ν), al imponer la condición de regularidad en el origen, esto es, cuando $z = 0$, se puede ver que la parte que depende de estos parámetros diverge haciendo imposible que forme parte de la solución, vale decir $B = 0$, esto se debe a que el parámetro α' siempre tiene valores negativos. En consecuencia devolviendo los cambios de variables y renombramientos de la función la solución puede escribirse como:

$$G(\tau) = C(\tanh \tau)^l (\operatorname{sech} \tau)^{1+\sqrt{-\tilde{\epsilon}}} F(a, b; c; \tanh^2 \tau).\tag{6.48}$$

Se debe imponer otra condición para asegurar que la solución pertenezca al espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{H}^3, d^3x)$, así la función debe tener norma finita, esto es:

$$\int_0^\infty |G(\tau)|^2 \sinh^2 \tau \, d\tau < \infty.\tag{6.49}$$

Mediante el cambio de variable $z = \tanh^2 \tau$ la condición puede escribirse explícitamente como:

$$A' \int_0^1 z^{l+\frac{1}{2}} (z-1)^{\sqrt{-\tilde{\epsilon}}-1} |F(a, b; c; z)|^2 dz < \infty \quad (6.50)$$

Nótese que para asegurar el cumplimiento de esta condición es necesario estudiar el comportamiento asintótico del integrando. Es fácil verificar que cuando $\tau \rightarrow 0 \Rightarrow z \rightarrow 0$, el integrando tiende a cero. La otra tendencia se encuentra en el límite en el cual $\tau \rightarrow \infty \Rightarrow z \rightarrow 1$, se estudia el comportamiento de $F(a, b; c; z)$, ya que el de los dos primeros factores del integrando es conocido. Puede referirse a [30] para verificar que :

$$F(a, b; c; z) \underset{z \rightarrow 1}{\sim} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (z-1)^{c-a-b}, \quad (6.51)$$

para $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a, b, c \neq 0, -1, -2, \dots$ y $b+a > c$.

En este caso $c-a-b = -\sqrt{-\tilde{\epsilon}}$, lo que implica que $b+a > c$, y siempre $c > \frac{3}{2}$, por lo cual:

$$|F(a, b; c; z)|^2 \underset{z \rightarrow 1}{\sim} (z-1)^{2(c-a-b)}. \quad (6.52)$$

Entonces la integral dada por la condición (6.50) diverge:

$$C \lim_{\delta \rightarrow 1} \int_0^\delta z^{l+\frac{1}{2}} (z-1)^{-(\sqrt{\tilde{\epsilon}})} dz \rightarrow \infty, \quad (6.53)$$

ya que $c-b-a-1 = -(1+\sqrt{-\tilde{\epsilon}}) < 0$.

Por esto se escoge $a = -n_r$, con $n_r = 0, 1, 2, \dots$ y mediante él se puede obtener la energía E que viene expresada de la forma:

$$E = \left(\sqrt{\left(\frac{\hbar^2}{2\mu R^2} \right)^2 + \frac{\hbar^2 k}{\mu}} \right) m + \frac{\hbar^2}{2\mu R^2} \left(\frac{3}{2} - m^2 \right), \quad (6.54)$$

donde $m = 2n_r + 1 + \frac{3}{2}$ es un semientero positivo mayor a 1 ($m = \frac{2n+1}{2}$ con $n = 1, 2, \dots$), es pertinente resaltar el hecho de que para un valor de m muy grande, el termino negativo que posee una potencia cuadratica de m puede resultar mayor al resto de terminos en la expresión de la energía (6.54) haciendo que el autovalor fuera negativo, y la energía debe ser positiva, esto nos dice que el semientero m es acotado, haciendo el

espectro de energías finito, a diferencia del espectro de energías del oscilador armónico del espacio euclídeo (ver discusiones), aun así el caso límite para la curvatura teniendo a cero ($\kappa \rightarrow 0 \Rightarrow R \rightarrow \infty$) se obtienen, como era de esperarse los autovalores para el espectro de energías del oscilador armónico del caso euclídeo:

$$E = \hbar\omega_0 \left(2n_r + l + \frac{3}{2} \right); \quad n, l = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.55)$$

donde $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$ es la frecuencia natural del sistema.

De la misma forma que en el problema del átomo de hidrógeno, vemos como funciones de la curvatura las constantes del problema, y así verificar el límite $\kappa \rightarrow 0$:

$$\mu \underset{\kappa \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sqrt{\varsigma}}{2\kappa} + \frac{\iota}{4\sqrt{\varsigma}}, \quad (6.56)$$

$$\nu \underset{\kappa \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{\varsigma}}{2\kappa}, \quad (6.57)$$

$$b \underset{\kappa \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sqrt{\varsigma}}{\kappa}. \quad (6.58)$$

En estas ecuaciones las constantes vienen dadas por las relaciones:

$$\varsigma = \frac{\sigma}{\kappa^2}, \quad \iota = \frac{\lambda}{\kappa}. \quad (6.59)$$

Como vimos en la sección 4.1 en el límite $\kappa \rightarrow 0$ la variable independiente τ tiende a $\frac{r}{R}$, como recurso podemos notar que las funciones $\text{sech}\tau$ y $e^{-\frac{\tau^2}{2}}$ poseen igual expansión en serie para los primeros términos:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \text{sech}\tau = \lim_{\tau \rightarrow 0} e^{-\frac{\tau^2}{2}} = 1 - \frac{\tau^2}{2} + O(\tau)^4. \quad (6.60)$$

En consecuencia podemos expresar la función de onda asociada al oscilador armónico cuántico en el límite $\kappa \rightarrow 0$ como:

$$G(\tau) \rightarrow R(r) = r^l e^{-\frac{\sqrt{\varsigma}r^2}{2}} M \left(-n_r, l + \frac{3}{2}, \sqrt{\varsigma}r^2 \right). \quad (6.61)$$

Refierase a [30]. También se puede expresar la solución en términos de los polinomios de Laguerre:

$$G(\tau) \rightarrow R(r) = r^l e^{-\frac{\sqrt{\varsigma}r^2}{2}} L_n^{l+\frac{3}{2}}(\sqrt{\varsigma}r^2). \quad (6.62)$$

6.3. Partícula confinada entre esferas hiperbólicas concéntricas

En esta sección se estudiará el caso de una partícula masiva confinada en el volumen dispuesto por dos esferas concéntricas del espacio hiperbólico de radio A y B , aunque el problema guarda también “simetría esférica”, la interacción no se expresará como una de tipo central, en este caso al igual que el problema análogo del espacio euclídeo, la interacción queda determinada por las condiciones de contorno. De este modo, la ecuación de Schrödinger se reduce al Hamiltoniano independiente del tiempo de una partícula libre en una región finita del espacio, esto es:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu R^2} \left[\frac{1}{\sinh^2 \tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\sinh^2 \tau \frac{\partial}{\partial \tau} \right) + \frac{1}{\sinh^2 \tau} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sinh^2 \tau \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \psi(\mathbf{x}) = E\psi(\mathbf{x}), \quad (6.63)$$

con condiciones de contorno $\psi(a, \theta, \phi) = 0$ y $\psi(b, \theta, \phi) = 0$, con $a = \sinh^{-1}(\frac{A}{R})$ y $b = \sinh^{-1}(\frac{B}{R})$. Es fácil verificar que esta ecuación es separable, análogamente a los problemas anteriores se propone una solución del tipo $\psi(\mathbf{x}) = G(\tau)Y_m^l(\theta, \phi)$, lo cual simplifica el problema a la ecuación:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu R^2} \left[\frac{1}{\sinh^2 \tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\sinh^2 \tau \frac{\partial}{\partial \tau} \right) - \frac{1}{\hbar^2} \frac{1}{\sinh^2 \tau} \hat{L}^2 \right] \psi(\mathbf{x}) = E\psi(\mathbf{x}). \quad (6.64)$$

De nuevo, realizando el cambio $G(\tau) = \frac{U(\tau)}{\sinh \tau}$, se puede expresar esta ecuación como:

$$\frac{d^2 U(\tau)}{d\tau^2} + \left[\epsilon - \frac{l(l+1)}{\sinh^2 \tau} \right] U(\tau) = 0, \quad (6.65)$$

donde $\epsilon = \lambda - 1$ y $\lambda = \frac{2\mu R^2 E}{\hbar^2}$. Realizando el cambio de variable independiente $z = \tanh^2 \tau$, se puede escribir el problema en la forma de la ecuación de Riemann-Papperitz:

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} + \left[\frac{1}{2z} + \frac{1}{z-1} \right] \frac{df(z)}{dz} + \left[\frac{l(l+1)}{4z} + \frac{\epsilon}{4(z-1)} \right] \frac{f(z)}{z(z-1)} = 0. \quad (6.66)$$

Siguiendo el procedimiento análogo a los problemas anteriores, se encuentran por

identificación los parámetros:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2}(l+1), & \alpha' &= -\frac{l}{2}, \\ \mu &= \sqrt{\frac{-\epsilon}{4}}, & \mu' &= -\sqrt{\frac{-\epsilon}{4}}, \\ \nu &= \frac{1}{2}, & \nu' &= 0.\end{aligned}\tag{6.67}$$

La solución puede ser escrita como:

$$f(z) = Cz^\alpha(z-1)^\mu F(a, b; c; z) + Dz^{\alpha'}(z-1)^{\mu'} F(a', b'; c'; z),\tag{6.68}$$

En esta ocasión los parámetros a , b y c están determinados por:

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{2}(l+2+\sqrt{-\epsilon}) & a' &= \frac{1}{2}(1-l+\sqrt{-\epsilon}), \\ b &= \frac{1}{2}(l+1+\sqrt{-\epsilon}) & b' &= \frac{1}{2}(-l+\sqrt{-\epsilon}), \\ c &= l + \frac{3}{2} & c' &= -l + \frac{1}{2}.\end{aligned}\tag{6.69}$$

Devolviendo todos los cambios, la solución general viene dada por:

$$\begin{aligned}G(\tau) &= C \tanh^l \tau \operatorname{sech}^{\sqrt{-\epsilon}+1} \tau F(a, b; c; \tanh^2 \tau) \\ &\quad + D \tanh^{-(l+1)} \tau \operatorname{sech}^{\sqrt{-\epsilon}+1} \tau F(a', b'; c'; \tanh^2 \tau).\end{aligned}\tag{6.70}$$

Las constantes C y D pueden escribirse una en función de la otra, imponiendo las condiciones de contorno, esto es cuando $R \sinh \tau = A$ y $R \sinh \tau = B$:

$$\begin{aligned}C \left(\frac{A^2}{A^2 + R^2} \right)^{\frac{l}{2}} \left(\frac{R^2}{A^2 + R^2} \right)^{\frac{\sqrt{-\epsilon}+1}{2}} F \left(a, b; c; \frac{A^2}{A^2 + R^2} \right) \\ + D \left(\frac{A^2}{A^2 + R^2} \right)^{-\frac{(l+1)}{2}} \left(\frac{A^2}{A^2 + R^2} \right)^{\frac{\sqrt{-\epsilon}+1}{2}} F \left(a', b'; c'; \frac{A^2}{A^2 + R^2} \right) = 0,\end{aligned}\tag{6.71}$$

$$\begin{aligned}C \left(\frac{B^2}{B^2 + R^2} \right)^{\frac{l}{2}} \left(\frac{R^2}{B^2 + R^2} \right)^{\frac{\sqrt{-\epsilon}+1}{2}} F \left(a, b; c; \frac{B^2}{B^2 + R^2} \right) \\ + D \left(\frac{B^2}{B^2 + R^2} \right)^{-\frac{(l+1)}{2}} \left(\frac{B^2}{B^2 + R^2} \right)^{\frac{\sqrt{-\epsilon}+1}{2}} F \left(a', b'; c'; \frac{B^2}{B^2 + R^2} \right) = 0.\end{aligned}\tag{6.72}$$

De la ecuación 6.71 obtenemos una de las constantes de la combinación lineal. De la 6.72 se obtiene una ecuación para los autovalores ϵ al sustituir la constante determinada por 6.71. Resultados generales acerca de problemas de autovalores del tipo Sturm-Liouville regular garantizan que para condiciones de frontera no mixtas y homogéneas (como es en nuestro caso) las autofunciones son no degeneradas y vienen determinadas salvo una constante, los infinitos autovalores (en nuestro caso los ϵ), forman una sucesión monótona creciente que tiende a hacerse infinitamente positiva $\{\epsilon_n\}_{n \rightarrow \infty} \sim \infty$, más aun, la autofunción correspondiente a un autovalor ϵ_n tiene exactamente n ceros en el intervalo del problema $n = 0, 1, 2, \dots$. Por lo tanto, la existencia de los autovalores está asegurada y es cuestión de resolver la ecuación obtenida.

Capítulo 7

Plano de Lobachevski

7.1. Potencial Coulombiano

En lo que sigue se considerará el espacio Hiperbólico bidimensional \mathbb{H}^2 . Como se expresó en el capítulo 1, el modelo del Hiperboloide puede verificarse como una variedad riemanniana, en particular también para el caso 2-dimensional en el cual el tensor métrico, expresado en forma de elemento de línea eligiendo las coordenadas esféricas, viene dado por:

$$ds^2 = R^2 d\tau^2 + R^2 \sinh^2 \tau d\theta^2. \quad (7.1)$$

Mediante las componentes del tensor métrico se pueden calcular nuevamente los vectores de Killing:

$$\begin{aligned} K_1 &= -\frac{\sin \theta \cosh \tau}{\sinh \tau} \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial \tau}, \\ K_2 &= \frac{\cos \theta \cosh \tau}{\sinh \tau} \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \tau}, \\ K_3 &= \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Entonces los operadores momento vienen dados por:

$$\begin{aligned} \hat{P}_1 &= i\hbar \left(\frac{\sin \theta}{\tanh \tau} \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial \tau} \right), \\ \hat{P}_2 &= -i\hbar \left(\frac{\cos \theta}{\tanh \tau} \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \tau} \right), \\ \hat{P}_3 &= -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Por lo que el Hamiltoniano de la partícula libre toma la forma:

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu R^2} [P_1^2 + P_2^2 - P_3^2], \quad (7.4)$$

lo cual, explícitamente en las coordenadas pseudoesféricas se reduce a:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu R^2} \left(\frac{1}{\sinh \tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\sinh \tau \frac{\partial}{\partial \tau} \right) + \frac{1}{\sinh^2 \tau} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right). \quad (7.5)$$

Es importante resaltar que de nuevo este operador se corresponde con el operador de Laplace-Beltrami para el espacio hiperbólico \mathbb{H}^2 , $\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_H^2$, y así el problema se reduce a resolver:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_H^2 \psi(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) = E\psi(\mathbf{x}). \quad (7.6)$$

Siendo $V(\mathbf{x})$ el potencial asociado a la interacción Coulombiana. En analogía a la primera sección del capítulo anterior se usará el hecho de que el modelo está inmerso en el espacio de Minkowski \mathbb{R}^{2+1} en el cual se conoce la interacción electromagnética generada por una partícula con carga q . Esta interacción viene dada por el trivector potencial $A_\mu(\mathbf{x})$, en el caso electrostático es:

$$A^\mu = (kq \ln(r), 0, 0), \quad (7.7)$$

donde k es la constante de Coulomb, y $r = \|\vec{x}\|_E$, de nuevo resulta conveniente utilizar el sistema coordenado pseudoesférico y así restringir la interacción electromagnética al potencial escalar sobre el Hiperboloide y así obtener:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\tau) = kq^2 \ln(\sinh \tau) \cosh \tau. \quad (7.8)$$

La ecuación de Schrödinger de este problema puede entonces escribirse:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu R^2} \left[\frac{1}{\sinh \tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\sinh \tau \frac{\partial}{\partial \tau} \right) + \frac{1}{\sinh^2 \tau} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \psi(\mathbf{x}) + [kq^2 \ln(\sinh \tau) \cosh \tau] \psi(\mathbf{x}) = E\psi(\mathbf{x}). \quad (7.9)$$

Esta ecuación también es separable y para verificarlo se propondrá la siguiente solución $\psi(\mathbf{x}) = G(\tau)H(\theta)$, en consecuencia de (7.9) se obtienen las siguientes ecuaciones

independientes:

$$\frac{d^2 H(\theta)}{d\theta^2} = -m^2 H(\theta); \quad m \in \mathbb{C}, \quad (7.10)$$

$$\frac{1}{\sinh \tau} \frac{d}{d\tau} \left(\sinh \tau \frac{dG(\tau)}{d\tau} \right) + \left[kq \ln(\sinh \tau) \cosh \tau - \frac{m^2}{\sinh \tau} + \lambda \right] G(\tau) = 0, \quad (7.11)$$

donde $\lambda = \frac{2\mu E}{\hbar^2}$. La primera ecuación es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con un punto singular regular en el infinito, como (6.10), por lo cual tiene solución la forma:

$$H(\theta) = e^{im\theta}; \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (7.12)$$

La segunda ecuación es una ecuación diferencial lineal homogénea con infinitas singularidades irregulares $\tau = in\pi$ en el plano complejo, esta ecuación parece ser difícil de resolver analíticamente y se propone como un problema para estudios posteriores.

Notemos que en el caso de dos dimensiones nuestra definición del potencial coulombiano como restricción al hiperboloide del potencial coulombiano de Minkowski, no es equivalente a la de satisfacer una ecuación tipo Poisson con una carga puntual [4] (se puede verificar que (7.8) no es solución de Laplace para $\tau \neq 0$). Vemos que el modelo del hiperboloide agrega a la discusión una posibilidad de entender la interacción coulombiana en \mathbb{H}^n diferente a [4] (al menos para $n = 2$).

Si tomamos la definición alternativa de [4] la ecuación diferencial radial cambia, pero igualmente no es obvia la solución al tener, como en (7.11), términos sin logaritmo y términos con logaritmo.

Capítulo 8

Discusión

En este trabajo hemos estudiado el problema de formular la mecánica cuántica en el espacio de Lobachevski para el sistema de una partícula, el cual es la base para construir otros sistemas cuánticos más complicados en esta geometría.

Hemos usado el modelo del Hiperboloide inmerso en el espacio de Minkowski. Es bueno hacer unas precisiones. Se pensaría que la relatividad especial está involucrada desde el punto de vista físico. Sin embargo, la estructura de la relatividad (grupo de Lorentz) es técnica ya que el espacio hiperbólico no involucra al tiempo. No obstante, involucrando el espacio de Minkowski en la discusión nos permite hacer interpretaciones que de otra manera no son claras. De hecho, esto fue lo que inspiró la definición de la interacción coulombiana en espacio hiperbólico tridimensional diferente a la usual (ver p.e. [4]). Puesto que la invariancia reside en el espacio tiempo, la gran desventaja de algunos modelos de espacio hiperbólico es que no poseen un espacio tiempo en el cual ellos viven.

Aunque el modelo de el hiperboloide es bien conocido [21], la formulación del problema del átomo de hidrógeno en este modelo, nos permite introducir otra interpretación de la energía potencial asociada a la interacción coulombiana. La energía potencial, en otros trabajos (ver, p.e. [4]), se propone como una solución de la ecuación de Poisson, con el operador de Laplace-Beltrami, con una fuente puntual. La razón de esto es una

generalización del caso euclidiano y sería una especie de covariancia de la electrostática ya que no se tiene un espacio tiempo. Como sabemos, el término de la energía potencial de Coulomb viene de la interacción de dos cargas puntuales en reposo. El que esto sea una solución de la ecuación de Poisson tiene que ver con la definición de trabajo y su relación con la energía en espacio euclídeo. En espacio hiperbólico el análogo de esto no es claro. Con el modelo del Hiperboloide en Minkowski proponemos una interpretación física alternativa del potencial Coulombiano. Primero consideramos el cuadvivector potencial A^μ producido por una carga en reposo (el núcleo) y después consideramos otra carga en reposo en el Hiperboloide $v^\mu = \frac{x^\mu}{R}$ de la misma manera como en espacio euclídeo una carga en reposo tiene una cuadvivivlocidad de Minkowski $v^\mu = (1, 0, 0, 0)$ (el potencial se obtiene de $A^\mu v_\mu$). En el caso tridimensional, nuestro resultado para espacio hiperbólico, coincide (salvo una constante irrelevante) con el de la referencia [4]. Sin embargo, en dos dimensiones las definiciones no son equivalentes. Notemos que esta discrepancia podría aclararse haciendo un estudio de las ecuaciones de Maxwell reducidas al hiperboloide (lo cual se puede hacer ya que este modelo de geometría hiperbólica esta encajado en un espacio tiempo) definiendo una especie de fuerza hiperbólica, además de trabajo hiperbólico para tener un análogo del potencial hiperbólico de interacción de dos cargas puntuales en reposo.

Nuestro objetivo principal en este trabajo ha sido la obtención de los observables básicos que describen la mecánica cuántica de una partícula en espacio hiperbólico. El procedimiento de cuantización, para obtener estos observables básicos, se realiza de manera geométrica (esto es, independiente de las coordenadas). En este caso, como el euclídeo, los observables se obtienen de propiedades fundamentales de la geometría hiperbólica (los vectores de Killing asociados a la métrica).

La obtención de los resultados para el átomo de hidrógeno confirman, totalmente, cálculos previos [4] y [31]. Es bueno señalar que [4] usa un método diferente al nuestro (factorización) y [31] hace un cambio de variable que lleva a un problema tipo oscilador armónico. Por otra parte, [16] usa un método similar al nuestro con otros cambios de

variable (inclusive uno singular) y obtiene los autovalores pero arroja dudas con la obtención de un espectro ligado finito. Nuestros cálculos son las herramientas usuales que se usan en física para analizar este tipo de problemas y nos han permitido verificar este resultado importante obtenido en [4] y en [31].

Finalmente, hemos visto que se puede estudiar una partícula en un potencial externo, en espacio hiperbólico, con las mismas facilidades que en espacio euclídeo. Más aún, si la curvatura del espacio es muy pequeña (tan pequeña como se quiera) y negativa no es posible distinguir los átomos de hidrógeno en ambos espacios. Así, en este sentido, los experimentos no descartan la geometría hiperbólica. En el caso del oscilador armónico la finitud del espectro hace una gran diferencia, ya que las autofunciones no son completas (tenemos espectro discreto y continuo) contrariamente al caso euclídeo, pero como este es un potencial efectivo (no una fuerza fundamental) esto no es significativo. Notemos que en el caso del átomo de hidrógeno tridimensional el espectro ligado es finito en Lobachevski también pero en este caso las autofunciones del caso euclídeo (infinitas) no son completas igualmente (en ambos casos tenemos espectro discreto y continuo).

Capítulo 9

Apéndices

Cálculo de la curvatura con Mathematica 6.0

Coordenadas Pseudoesféricas

Limpiando las variables:

```
In[1] = Clear[coord, metric, inversemetric, affine, riemann, ricci, scalar, einstein, r,  $\theta$ ,  $\phi$ ]
```

Definiendo dimensión y coordenadas:

```
In[2] = n = 3; coord = { $\tau$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ }
```

Definiendo tensor métrico:

```
In[3] = metric = {{1, 0, 0}, {0,  $R^2 \text{Sinh}[\tau]^2$ , 0}, {0, 0,  $R^2 \text{Sin}[\theta]^2 \text{Sinh}[\tau]^2$ }}
```

Visualizar como matriz:

```
In[4] = metric // MatrixForm
```

```
Out[5] = 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 \text{Sinh}[\tau]^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \text{Sin}[\theta]^2 \text{Sinh}[\tau]^2 \end{pmatrix}$$

```

Calculando y definiendo tensor métrico inverso

In[6] = inversemetric = Simplify[Inverse[metric]]

$$\text{Out[7]} = \left\{ \left\{ 1, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, \frac{\text{Csch}[\tau]^2}{R^2}, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, \frac{\text{Csc}[\theta]^2 \text{Csch}[\tau]^2}{R^2} \right\} \right\}$$

Visualizar como matriz

In[8] = inversemetric // MatrixForm

$$\text{Out[5]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\text{Csch}[\tau]^2}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\text{Csc}[\theta]^2 \text{Csch}[\tau]^2}{R^2} \end{pmatrix}$$

Calculando las conecciones (símbolos de Christoffel distintos de cero):

In[9] = affine := affine = Simplify[Table[(1/2) * Sum[(inversemetric[[i, s]]) *

(D[metric[[s, j]], coord[[k]] + D[metric[[s, k]], coord[[j]]] - D[metric[[j, k]],
coord[[s]]), {s, 1, 3}], {i, 1, 3}], {j, 1, 3}], {k, 1, 3}]]

listaffine := Table[If[UnsameQ[affine[[i, j, k]], 0], {ToString[Gamma[i, j, k]], affine[[i, j, k]]}],

{i, 1, 3}], {j, 1, 3}], {k, 1, 3}] TableForm[Partition[DeleteCases[Flatten[listaffine],
Null], 2], TableSpacing -> {2, 2}]

$$\begin{array}{ll} \Gamma[1, 2, 2] & -\text{Cosh}[\tau] \text{Sinh}[\tau] \\ \Gamma[1, 3, 3] & -\text{Cosh}[\tau] \text{Sin}[\theta]^2 \text{Sinh}[\tau] \\ \Gamma[2, 1, 2] & \text{Coth}[\tau] \\ \Gamma[2, 2, 1] & \text{Coth}[\tau] \\ \text{Out[10]} = \Gamma[2, 3, 3] & -\text{Cos}[\theta] \text{Sin}[\theta] \\ \Gamma[3, 1, 3] & \text{Coth}[\tau] \\ \Gamma[3, 2, 3] & \text{Cot}[\theta] \\ \Gamma[3, 3, 1] & \text{Coth}[\tau] \\ \Gamma[3, 3, 2] & \text{Cot}[\theta] \end{array}$$

Calculando el tensor de Riemann (componentes distintas de cero)

```
In[11] = riemann:=riemann = Simplify[Table[D[affine[[i, j, l]], coord[[k]] -
      D[affine[[i, j, k]], coord[[l]]] + Sum[affine[[m, j, l]]affine[[i, k, m]] -
      affine[[m, j, k]]affine[[i, l, m]], {m, 1, 3}], {i, 1, 3}, {j, 1, 3}, {k, 1, 3}, {l, 1, 3}]]
listriemann:=Table[If[UnsameQ[riemann[[i, j, k, l]], 0], {ToString[R[i, j, k, l]],
      riemann[[i, j, k, l]]}, {i, 1, 3}, {j, 1, 3}, {k, 1, 3}, {l, 1, k - 1}]
TableForm[Partition[DeleteCases[Flatten[listriemann], Null], 2],
      TableSpacing -> {2, 2}]
```

```
Out[12] =
      R[1, 2, 2, 1]      Sinh[τ]2
      R[1, 3, 3, 1]    Sin[θ]2Sinh[τ]2
      R[2, 1, 2, 1]      -1
      R[2, 3, 3, 2]    Sin[θ]2Sinh[τ]2
      R[3, 1, 3, 1]      -1
      R[3, 2, 3, 2]    -Sinh[τ]2
```

Calculando el tensor de Ricci (componentes distintas de cero):

```
In[13] = ricci:=ricci = Simplify[Table[Sum[riemann[[i, j, i, l]], {i, 1, 3}],
      {j, 1, 3}, {l, 1, 3}]]
listricci:=Table[If[UnsameQ[ricci[[j, l]], 0], {ToString[R[j, l]], ricci[[j, l]]},
      {j, 1, 3}, {l, 1, j}]
TableForm[Partition[DeleteCases[Flatten[listricci], Null], 2],
      TableSpacing -> {2, 2}]
```

```
Out[14] =
      R[1, 1]      -2
      R[2, 2]    -2Sinh[τ]2
      R[3, 3]  -2Sin[θ]2Sinh[τ]2
```

Calculando el escalar de Ricci:

```
In[15] = scalar = Simplify[Sum[inversemetric[[i, j]]ricci[[i, j]], {i, 1, 3}, {j, 1, 3}]]
```

$$\text{Out}[16] = -\frac{6}{R^2}$$

El procedimiento es análogo para las coordenadas cartesianas y se obtiene desde luego el mismo resultado, pero en ese caso todas las conexiones son distintas de cero, de manera que el cálculo solo resulta mas largo.

Cálculo de los vectores de Killing con Maple 12

Coordenadas cartesianas

Cargando paquetes esenciales para el cálculo:

```
[> with(DifferentialGeometry); with(Tensor); with(Killing); with(LieAlgebras):
```

Definiendo el marco

```
[> DGsetup([x, y, z], H);
```

frame name:H

Definiendo el tensor métrico

$$[H > g := \text{evalDG} \left(\frac{1}{R^2 + y^2 + z^2} \cdot ((R^2 + y^2 + z^2) \cdot (dx \& t dx) - xy(dx \& t dy) \right. \\ \left. - xz(dx \& t dz) - yx(dy \& t dx) + (R^2 + x^2 + z^2) \cdot (dy \& t dy) - yz(dy \& t dz) \right. \\ \left. - zx(dz \& t dx) - zy(dz \& t dy) + (R^2 + x^2 + y^2)(dz \& t dz) \right)$$

Calculando los vectores de Killing:

```
[H > K := KillingVectors(g);
```

$$K := \left[\sqrt{R^2 + x^2 + y^2 + z^2} D_z, -z D_x + x D_z, \sqrt{R^2 + x^2 + y^2 + z^2} D_y, \right. \\ \left. -y D_x + x D_y, \sqrt{R^2 + x^2 + y^2 + z^2} D_x, -z D_y + y D_z \right].$$

Bibliografia

- [1] Schrödinger E., A Method of Determining Quantum-Mechanical Eigenvalues and Eigenfunctions, *Proc. R.I.A.*, A 46 (1940), 9-16.
- [2] Infeld L., On a New Treatment of Some Eigenvalue Problems, *Phys. Rev.*, 59 (1941), 737-747
- [3] Stevenson A. F., Note on the “Kepler Problem” in a Spherical Space, and the Factorization Method of Solving Eigenvalue Problems *Phys. Rev.*, 59 (1941), 842-843.
- [4] Infeld L. & Schild A., A Note on the Kepler Problem in a Space of Constant Negative Curvature, *Phys. Rev.*, 67 (1945), 121-122.
- [5] Higgs P.W., Dynamical symmetries in a spherical geometry, *J. Phys. A* 12 (1979), 309-323
- [6] Kalnins E.G., Miller W. & Winternitz P., The Group $O(4)$, Separation of Variables and the Hydrogen Atom, *SIAM J. Appl. Math.* 30 (1976), 630-664.
- [7] Barut A.O. & Wilson R., On the dynamical group of the Kepler problem in a curved space of constant curvature, *Phys. Lett. A* 110 (1985), 351-354.
- [8] Barut A.O., Inomata and Junger G. Path Integral Treatment of the Hydrogen Atom in a Curved Space of Constant Curvature, *J. Phys. A* 20 (1987), 6271-6280.
- [9] Grosche C., The Path Integral for the Kepler Problem on the Pseudosphere, *Ann. Phys.*, 204 (1990), 208-222.

- [10] Grosche C., On the path integral in imaginary Lobachevsky space, *J. Phys.*, A 27 (1994), 3475-3489.
- [11] Bonatsos D., Daskaloyannis C. & Kokkotas K., Deformed oscillator algebras for two-dimensional quantum superintegrable systems, *Phys. Rev.*, A 50 (1994), 3700-3709.
- [12] Rañada M.F. & Santander M., Superintegrable systems on the two-dimensional sphere \mathbb{S}^2 and the hyperbolic plane \mathbb{H}^2 , *J. Math. Phys.*, 40 (1999), 5026-5057.
- [13] Kalnins E.G., Kress J.M., Pogosyan G.S. & Miller W., Completeness of superintegrability in two-dimensional constant curvature spaces, *J. Phys. A* 34 (2001), 4705-4720.
- [14] Rañada M.F. & Santander M., On harmonic oscillators on the two-dimensional sphere \mathbb{S}^2 and the hyperbolic plane \mathbb{H}^2 , *J. Math. Phys.*, 43 (2002), 431-451.
- [15] Kalnins E.G., Kress J.M. & Miller W., Superintegrability in a two-dimensional space of non-constant curvature, *J. Math. Phys.*, 43 (2002), 970-983
- [16] Nieto L. M., Rosu H. C. & Santander M., Hydrogen atom as an eigenvalue problem in 3D spaces of constant curvature and minimal length. *Mod. Phys. Lett.*, A 14 (1999), 2463-2469
- [17] Beltrami E., Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea, *Giorn. Mat.*, 6 (1868), 248-312.
- [18] Beltrami E., Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante, *Annali di Mat.*, 2 (1868), 232-255.
- [19] Klein F., Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, *Mathematische Annalen*, 4 (1871), 573-625.
- [20] Poincaré H., Théorie des groupes fuchsien, *Acta Math.*, 1 (1882), 1-62

- [21] Ratcliffe John G., *Foundations of hyperbolic manifolds*, New York, Berlin, Springer-Verlag, 1994.
- [22] Alekseevskij D.V., Vinberg E.B. & Solodovnikov A.S., Geometry of Spaces of Constant Curvature, *Enciclopedia of Mathematical Sciences*, 29 (1993), 29-36.
- [23] Reynolds William F., Hyperbolic Geometry on a Hyperboloid, *American Mathematical Monthly*, 100 (1993), 442-455.
- [24] Killing W., Über zwei Raumformen mit constanter positiver Krümmung, *J. Reine Angew. Math.*, 86 (1878), 72-83.
- [25] Hilbert D., Über Flächen von konstanter Krümmung, *Transaction of America Mathematical Society*, 2 (1901), 87-89.
- [26] Morse Phillip M. & Feshbach Herman, *Methods of Theoretical Physics*, New York, Mc Graw Hill, 1953.
- [27] Akhiezer N. I. & I. M. Glazman, *Theory of Linear Operator in Hilbert Space* (Two volumes), Dover Publications, New York, 1993
- [28] Synge J. L. & Schild A., *Tensor Calculus*, Dover Publications, Canada, 1949
- [29] Goldstein H. , Poole C. & Safko J. *Classical Mechanics*, Addison Wesley, 3rd Ed., 2000
- [30] Torres P. , *Curso en métodos de la física teórica*, Caracas, 2006.
- [31] Kalnins E.G., Pogosyan G.S. & Miller W., The Coulomb-oscillator relation on n-dimensional spheres and hyperboloids, *Physics of Atomic Nuclei*, 65 (2002), 1086-1094.