



Universidad Central de Venezuela  
Facultad de Ciencias  
Escuela de Física

# ASPECTOS DE MECÁNICA CUÁNTICA RELATIVISTA EN DIMENSIONES BAJAS

Souad María Tabban Sabbagh

Caracas, 10 de julio de 2009

Quienes suscriben, miembros del jurado que examinó el trabajo presentado por la Br. **Souad Tabban** titulado: **Aspectos de Mecánica Cuántica Relativista en dimensiones bajas**, para optar al título de Licenciado en Física, consideramos que dicho trabajo cumple con los requisitos exigidos por los reglamentos respectivos y por lo tanto lo declaramos APROBADO en nombre de la Universidad Central de Venezuela.

---

Abraham Lozada, Tutor

fecha

---

Vidal Alonso

fecha

---

Luigi Mondino

fecha

Caracas 10 de julio de 2009.

# Aspectos de Mecánica Cuántica Relativista en dimensiones bajas

Souad María Tabban Sabbagh

Trabajo especial de grado presentado  
ante la ilustre Facultad de Ciencias de la  
Universidad Central de Venezuela como  
requisito parcial para optar al título de:  
**Licenciado en Física.**

---

Abraham Lozada, Tutor

fecha

## Resumen

### Aspectos de Mecánica Cuántica Relativista en dimensiones bajas

Souad María Tabban Sabbagh

Universidad Central de Venezuela

Abraham Lozada, Tutor

En este trabajo se consideran ciertos aspectos de la mecánica cuántica relativista en  $(1+1)$  y  $(1+2)$  dimensiones. Nuestros objetivos principales han sido el estudio de las consecuencias de la invariancia de Poincaré en estas dimensiones bajas y la construcción de teorías cuánticas de campos que satisfacen los axiomas de Wightman. En particular, verificamos que  $\mathcal{SL}(2, \mathbb{R})$ , contrariamente a su uso, no es simplemente conexo y por lo tanto no es el grupo de recubrimiento universal del grupo de Lorentz en  $(1+2)$ . Además, construimos explícitamente teorías cuánticas de campos libres: (i) Campo escalar neutro y masivo, (ii) Campo escalar cargado y masivo, (iii) Campo de Dirac cargado y masivo, que satisfacen los axiomas de Wightman en  $(1+1)$ . Uno de los resultados de esta construcción es que no se satisface el teorema de espín-estadística en  $(1+1)$ . Este último resultado es consistente con la conocida bosonización en  $(1+1)$ .

---

Abraham Lozada

Tutor

## **Agradecimientos**

A Dios, por bendecirnos.

A mi familia, por su apoyo y comprensión, por saber esperar.

Al profesor Abraham Lozada, por brindarme esta oportunidad junto con sus conocimientos, su tiempo y sus ideas, por ser infinitamente paciente!.

A mis amigos, por procurarme sonrisas.

Y a tí Ling, por estar a mi lado y tener siempre la “razón”, a tí amor, por permitirme crecer contigo.

# Índice general

<b>1. Teoría cuántica de campos</b>	<b>8</b>
1.1. Mecánica cuántica . . . . .	8
1.2. Mecánica cuántica relativista especial . . . . .	9
1.3. Teoría cuántica de campos lagrangiana . . . . .	15
<b>2. Grupo de Lorentz y Poincaré</b>	<b>18</b>
2.1. Grupo de Lorentz y Poincaré en $(1+n)$ dimensiones . . . . .	18
2.1.1. Álgebra de Lie del grupo restringido de Poincaré $\Pi_+^\uparrow(1, n)$ . . . . .	20
2.2. Grupo de Lorentz y Poincaré en $(1+2)$ . . . . .	21
2.2.1. Álgebra de Lie del grupo restringido de Poincaré $\Pi_+^\uparrow(1, 2)$ . . . . .	22
2.2.2. Grupo de recubrimiento universal de $\Pi_+^\uparrow(1, 2)$ . . . . .	23
2.3. Grupo de Lorentz y Poincaré en $(1+1)$ . . . . .	26
2.3.1. Álgebra de Lie del grupo restringido de Poincaré $\Pi_+^\uparrow(1, 1)$ . . . . .	27
2.4. Representaciones del grupo y del álgebra de Lie . . . . .	30
<b>3. Teoría cuántica de campos en la formulación de Wightman en <math>(1+1)</math></b>	<b>33</b>
3.1. Axiomas de Wightman . . . . .	33
<b>4. Campo escalar neutro y masivo libre en <math>(1+1)</math></b>	<b>38</b>
<b>5. Campo escalar cargado y masivo libre en <math>(1+1)</math></b>	<b>46</b>
<b>6. Campo de Dirac cargado y masivo libre en <math>(1+1)</math></b>	<b>49</b>
<b>7. Discusión y conclusiones</b>	<b>58</b>

# Introducción

La mecánica cuántica relativista es la teoría que involucra dos temas mayores en la física moderna: la teoría cuántica y la relatividad especial. Desde el punto de vista de la mecánica cuántica se pueden considerar dos objetos clásicos a cuantizar: la partícula y el campo. Así, la mecánica cuántica relativista involucra un espectro muy grande de fenómenos físicos tal que, de las cuatro interacciones fundamentales, solo excluye a la gravedad.

En particular, la electrodinámica cuántica ha sido una teoría con bastante éxito a nivel fenomenológico. Sin embargo, como toda la teoría cuántica de campos que describe interacciones, ella está llena de contradicciones en la estructura matemática de la teoría (infinitos y teoremas de no interacción [1]). Mas aún, incluso dejando a un lado el rigor matemático, la comprensión de otras teorías (interacciones fuertes o débiles) en (1+3) se dificulta y ha forzado frecuentemente a los físicos teóricos a probar modelos en espacios de dimensiones mas bajas con la finalidad de simplificar la teoría y ver si se puede entender algo de lo que ocurre en (1+3). Por esta razón, uno encuentra en la literatura teorías cuánticas relativistas en (1+2) dimensiones y (1+1) dimensiones (ver, por ejemplo, [2] y [3]).

El concepto de relatividad en mecánica cuántica entra vía los grupos de invariancia relativista. Por lo tanto, uno de los primeros aspectos que uno debe tomar en cuenta es que al bajar la dimensión, a pesar de tener el mismo nombre (por ejemplo Poincaré), el grupo cambia (por ejemplo la dimensión del grupo cambia y por lo tanto, nada mas y nada menos, su topología cambia). Las consecuencias de esto, a nivel de la literatura, a veces no se toman en cuenta adecuadamente. Por ejemplo, en (1+2) se dice (véase, por ejemplo, [2] y [4]) que el grupo de recubrimiento universal de Lorentz es  $\mathcal{SL}(2, \mathbb{R})$ . Este resultado es importante ya que las partículas elementales [como en (1+3)] se definen a través de las representaciones irreducibles de este grupo. Sin embargo, no es cierto que

$\mathcal{SL}(2, \mathbb{R})$  sea el grupo de recubrimiento universal del grupo de Lorentz en (1+2).

Otra consecuencia ocurre en (1+1). En este caso, el grupo de Poincaré es simplemente conexo (topológicamente es  $\mathbb{R}^3$ ). Así la razón topológica por la que aparece el espín en (1+3) y en (1+2) (cuyos grupos de Poincaré no son simplemente conexos) no aparece en (1+1). Entonces el concepto de espinor no tiene cabida en (1+1) [al menos en el sentido usual de (1+2) y (1+3)]. Sin embargo, en la literatura se habla a diestra y siniestra de “espinores” en (1+1) (véase, por ejemplo, [5]-[7]).

Como ya hemos mencionado, la teoría cuántica de campos (la cual es una cuantización de la teoría clásica de campos, una primera y única, no existe segunda cuantización) tiene dificultades en su versión usual (llamada lagrangiana) (ver, por ejemplo, [8]-[11]). Por esta razón, a finales de los años cincuenta, empezaron a surgir formulaciones de la teoría cuántica de campos que pretendían resolver (como en todas las teorías físicas bien establecidas hasta ahora conocidas) los problemas matemáticos y físicos involucrados en la formulación usual. Surgió así, entre otras formulaciones, la llamada axiomática de Wightman [12]. Entre sus bondades, esta teoría, aparte de ser matemáticamente rigurosa, es muy cercana a la formulación lagrangiana de la teoría cuántica de campos.

La formulación de Wightman es una teoría en la cual muchas propiedades físicas de la teoría cuántica de campos han sido rigurosamente probadas. En particular, el teorema PCT [en el que se prueba la invariancia bajo las transformaciones combinadas de paridad, conjugación de la carga y reversibilidad temporal de una teoría cuántica de campos en (1+3)] así como el teorema de espín-estadística (en el que se da una conexión entre el espín de la partícula y la estadística que ellas satisfacen).

Mientras que en (1+3) no se pueden describir interacciones rigurosamente si se sigue la teoría usual (teorema de Haag, ver por ejemplo [1] y [14]), con la formulación de Wightman se ha probado en (1+1) que la teoría es compatible con interacción [3]. Por esta razón es interesante estudiar la formulación de Wightman en (1+1). Lamentablemente, no existe una prueba (un ejemplo concreto) de teoría no trivial (con interacción) en (1+3). Pero es de esperarse que pronto se consiga.

En este trabajo queremos considerar algunos aspectos de la mecánica cuántica relativista en bajas dimensiones, esto es, (1+2) y (1+1). En particular, se revisan las consecuencias del teorema de Wigner [8] en bajas dimensiones con respecto al grupo de Poincaré. En el caso de (1+2), probamos que el grupo de recubrimiento universal

de Lorentz no es  $\mathcal{SL}(2, \mathbb{R})$  y damos una realización concreta del grupo de recubrimiento universal. En el caso de  $(1+1)$  estudiamos, dentro de la formulación de Wightman, varias teorías de campos libres con la construcción explícita del espacio de Hilbert y la representación unitaria proyectiva del grupo de Poincaré en ese espacio.

En lo que sigue de esta introducción describiremos brevemente la organización del trabajo y nuestros resultados. En la sección siguiente, estableceremos la notación y definiciones que serán útiles en el desarrollo posterior del trabajo. En la sección 1, daremos un resumen de la mecánica cuántica usual, que es la que se usa en teoría cuántica de campos, junto con el teorema de Wigner y una breve explicación de la formulación lagrangiana de la teoría cuántica de campos. En la sección 2, se revisan los grupos de Lorentz y de Poincaré en  $(1+2)$  y  $(1+1)$  para poder usar estos resultados posteriormente. Un resultado importante de esta sección es la verificación en la subsección 2.2.2 de que  $\mathcal{SL}(2, \mathbb{R})$  no es simplemente conexo. Se verifica que el álgebra de Lie del grupo de Poincaré en  $(1+1)$  tiene cargas centrales no triviales. Por último, se verifica con un ejemplo que no toda representación de un álgebra de Lie, de un grupo de Lie (aunque sea simplemente conexo), viene de una representación del grupo de Lie. En la sección 3, se exponen los axiomas de la formulación de Wightman. En las secciones 4, 5 y 6 se estudian casos particulares de la formulación de Wightman en  $(1+1)$  dados por: (i) el campo escalar neutro, masivo y libre, (ii) el campo escalar cargado, masivo y libre, (iii) el campo de Dirac cargado, masivo y libre. Finalmente, en la sección 7 se dan algunas conclusiones.

# Notación y definiciones

$c \equiv 1,$	velocidad de la luz.
$\hbar \equiv 1,$	constante de Planck reducida.
$\mathbb{R},$	conjunto de los números reales.
$\mathbb{R}^+,$	conjunto de los números reales positivos.
$\mathbb{R}^-,$	conjunto de los números reales negativos.
$\mathbb{C},$	conjunto de los números complejos.
$\mathbb{R}^n,$	espacio euclídeo n-dimensional.
$\mathbb{R}^{1,n},$	espacio de Minkowski (1+n)-dimensional.
$\mathcal{H},$	espacio de Hilbert.
$\hat{\Psi},$	rayo unitario.
$\Psi,$	vector de estado, con $\Psi \in \mathcal{H}$ y $\Psi \in \hat{\Psi}$ .
$\langle \Psi   \Phi \rangle ,$	producto escalar de $\Psi$ y $\Phi$ , con $\Psi, \Phi \in \mathcal{H}$ un espacio de Hilbert.
$ \lambda  ,$	módulo, con $\lambda \in \mathbb{C}$ .
$ \langle \Psi   \Phi \rangle ^2 ,$	probabilidad de transición de un vector $\Psi \in \hat{\Psi}$ a un vector $\Phi \in \hat{\Phi}$ .
$\mathcal{O}(\mathcal{H}) ,$	conjunto de operadores lineales sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ .
$\mathcal{A},$	operador lineal de un espacio de Hilbert asociado a un observable físico.

$\mathcal{D}(\mathcal{A})$ ,	dominio de un operador $\mathcal{A}$ .
$T$ ,	transformación de simetría en el espacio de los rayos unitarios,
$U$ ,	operador unitario o antiunitario, con $U \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ , asociado a una transformación de simetría $T$ por el teorema de Wigner.
$x$ ,	vector del espacio de Minkowski.
$x^i$ ,	componentes contravariantes de un vector $x$ .
$[\cdot, \cdot]_-$ ,	relación de conmutación, corchete de Lie.
$[\cdot, \cdot]_+$ ,	relación de anticonmutación.
$\times$ ,	producto cartesiano.
$\odot$ ,	producto semidirecto.
$\oplus$ ,	suma directa.
$\otimes$ ,	producto tensorial.
$\mathbf{g}$ ,	$\mathbf{g} = \text{diag}(-1, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_n)$ , tensor métrico del espacio $\mathbb{R}^{1,n}$ .
$L(1, n)$ ,	grupo de Lorentz en $(1+n)$ dimensiones, isomorfo al grupo de matrices ortogonales $O(1, n)$ .
$L_+^\uparrow(1, n)$ ,	grupo restringido de Lorentz en $(1+n)$ dimensiones, isomorfo al grupo especial de matrices ortogonales cuya primera entrada es positiva $SO^\uparrow(1, n)$ .
$\Lambda$ ,	elementos de $L_{(1,n)}$ .
$\Pi(1, n)$ ,	grupo de Poincaré en $(1+n)$ dimensiones.
$\Pi_+^\uparrow(1, n)$ ,	grupo restringido de Poincaré en $(1+n)$ dimensiones.
$\mathbb{R}^{(1+n)}$ ,	grupo conmutativo de las traslaciones en un espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$ .
$(a, \Lambda)$ ,	elementos de $\Pi(1, n)$ con $a \in \mathbb{R}^{1,n}$ .
$\widetilde{M}$ ,	grupo de recubrimiento universal de un grupo $M$ .
$\mathcal{SL}(2, \mathbb{C})$ ,	grupo de Lie de matrices 2x2 con entradas complejas y determinante igual a uno.

$\mathcal{SL}(2, \mathbb{R})$ ,	grupo de Lie de matrices 2x2 con entradas reales y determinante igual a uno.
$\mathcal{SO}(2, \mathbb{C})$ ,	grupo de Lie de matrices ortogonales 2x2 con entradas complejas y determinante igual a uno (grupo de rotaciones).
$H$ ,	grupo de Heisenberg.
$L^2(X, d\mu, Y)$ ,	espacio de Hilbert de funciones definidas sobre $X$ de cuadrado integrable con valores en el espacio $Y$ , siendo $d\mu$ la medida invariante.
$m$ ,	masa.
$V_m^+$ ,	hipérbola de masa, con $p^2 = -(p^0)^2 + (p^1)^2 = -m^2$ y $p^0 \geq 0$ , si $p \in V_m^+$ .
$(dp)$ ,	medida invariante sobre la hipérbola $V_m^+$ , con $(dp) \equiv \frac{dp^1}{p^0}$ .
$\Theta_0$ ,	estado vacío.
$S(\mathbb{R}^n)$ ,	espacio funciones infinitamente diferenciables en que ellas y todas sus derivadas decrecen mas rápido que cualquier potencia de $\ r\ $ , con $r \in \mathbb{R}^n$ , espacio de Schwartz.
$K$ ,	operador de Klein-Gordon.
$D(x)$ ,	función conmutador de Pauli-Jordan.
$f(x), g(x)$ ,	funciones de prueba, con $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$ .
$\tilde{f}(p)$ ,	transformada de Fourier de una función $f(x)$ .
$\vartheta(x)$ ,	campo clásico.
$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ,	derivada parcial con respecto a $x^\mu$ ,
$\mathcal{L}(\vartheta_\alpha, \partial_\mu \vartheta_\alpha)$ ,	densidad lagrangiana.
$\phi(f)$ ,	campo cuántico.
$\phi(x)$ ,	campo cuántico simbólico.
$\mathcal{A}^*$ ,	operador adjunto de $\mathcal{A}$ .
$\bar{u}$ ,	vector complejo conjugado de $u$ .
$\gamma^\mu$ ,	matrices de Dirac 2x2.
$\tilde{u} \equiv (u\gamma^0)^*$ ,	vector complejo conjugado de Dirac de $u$ .
$\varepsilon(p^0)$ ,	función signo de la energía $p^0$ .

# Capítulo 1

## Teoría cuántica de campos

### 1.1. Mecánica cuántica

La teoría cuántica de campos está basada en los mismos postulados fundamentales de la mecánica cuántica usual (vinculados al principio de relatividad de Galileo o de Einstein), los cuales nos permiten caracterizar un sistema físico; en nuestro caso, con infinitos grados de libertad. Algunos de estos postulados son los siguientes (sin reglas de superselección):

- Se proporciona un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , complejo, separable y con dimensión  $\geq 2$  (en nuestro caso es infinito dimensional).

Un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  complejo, es un espacio vectorial complejo provisto de un producto escalar, el cual induce una norma, y que además es completo (toda sucesión de Cauchy converge fuertemente en él) con respecto a esta norma.

- Cada uno de los vectores normalizados de  $\mathcal{H}$  representa un estado físico puro del sistema físico.

Sea  $\Psi \in \mathcal{H}$  y  $\langle .|. \rangle$  el producto escalar en  $\mathcal{H}$ , siempre podemos redefinir los vectores  $\Psi \rightarrow \frac{\Psi}{\|\Psi\|}$  con  $\Psi \neq 0$ ; siendo  $\|\Psi\|^2 = \langle \Psi | \Psi \rangle$  el cuadrado de la norma inducida del producto escalar.

En nuestro caso los estados son representados por rayos unitarios  $\hat{\Psi}$  definidos por:

$$\hat{\Psi} = \{ \lambda \Psi \mid |\lambda| = 1, \langle \Psi | \Psi \rangle = 1, \Psi \in \mathcal{H}, \lambda \in \mathbb{C} \},$$

esto se debe a que todos los vectores de un rayo unitario representan un solo estado físico.

- Los observables o variables dinámicas del sistema físico son representados por operadores lineales autoadjuntos de  $\mathcal{O}(\mathcal{H})$ .

Esto es, sea  $\mathcal{A} \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$  un observable y de dominio  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  denso en el espacio de Hilbert donde actúa, verifica  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ , donde  $\mathcal{A}^*$  es el operador adjunto de  $\mathcal{A}$ ; así se cumple que:

$$\langle \Phi | \mathcal{A} \Psi \rangle = \langle \mathcal{A} \Phi | \Psi \rangle \quad \forall \Phi, \Psi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^*) = \mathcal{D}(\mathcal{A}) .$$

- Si  $\Psi \in \mathcal{H}$  correspondiente al rayo  $\hat{\Psi}$ , representa un estado del sistema físico y pertenece al dominio de un observable  $\mathcal{A} \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ , el valor medio de  $\mathcal{A}$  para este estado viene dado por:

$$\langle \Psi | \mathcal{A} \Psi \rangle \in \mathbb{R} . \tag{1.1}$$

- Los únicos valores medibles posibles son valores medios de observables.

Observemos que (1.1) tiene el mismo valor para cualquier vector estado correspondiente al rayo unitario  $\hat{\Psi}$ , es decir el mismo valor medible, por esto los estados físicos son representados por rayos unitarios en vez de vectores estado.

En particular, podemos hallar la probabilidad de transición de un estado  $\Psi \in \hat{\Psi}$  a un estado  $\Phi \in \hat{\Phi}$  por

$$P(\hat{\Psi} \rightarrow \hat{\Phi}) = |\langle \Psi | \Phi \rangle|^2 ,$$

la cual es un valor medio de un proyector.

## 1.2. Mecánica cuántica relativista especial

Un observador inercial  $\mathcal{S}$  ve a un sistema físico representado por  $\hat{\Psi}$  o  $\hat{\Phi}$ , otro observador inercial  $\mathcal{S}'$  verá al mismo sistema en otros estados diferentes que pueden ser representados por  $\hat{\Psi}'$  o  $\hat{\Phi}'$ , pero ambos observadores deben medir los mismos valores medios, en particular, las mismas probabilidades de transición:

$$|\langle \Psi | \Phi \rangle|^2 = |\langle \Psi' | \Phi' \rangle|^2 \quad \text{con} \quad \Psi \in \hat{\Psi}, \Phi \in \hat{\Phi}, \Psi' \in \hat{\Psi}', \Phi' \in \hat{\Phi}' . \tag{1.2}$$

Así garantizamos que nuestra teoría sea relativista especial. Las transformaciones que dejen invariante los valores medios, en particular (1.2) serán las transformaciones de simetría de nuestro sistema.

**Teorema de Wigner.** Sean  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}'$  espacios de Hilbert y sea  $T$  una transformación de los rayos unitarios en  $\mathcal{H}$  a los rayos unitarios en  $\mathcal{H}'$ :

$$T : \hat{\Psi} \rightarrow \hat{\Psi}' ,$$

la cual satisface la condición

$$|\langle T\hat{\Psi}|T\hat{\Phi} \rangle|^2 = |\langle \hat{\Psi}'|\hat{\Phi}' \rangle|^2 = |\langle \hat{\Psi}|\hat{\Phi} \rangle|^2 ,$$

entonces existe un operador  $U$ , definido salvo un factor de fase, cuyo dominio son todos los vectores estados  $\Psi$ , tal que si  $\Psi \in \hat{\Psi}$  entonces  $U\Psi \in \hat{\Psi}'$ ; este operador es inducido por  $T$  y debe ser unitario y lineal, esto es:

$$\begin{aligned} \langle U\Psi|U\Phi \rangle &= \langle \Psi|\Phi \rangle , \\ U(\lambda\Psi + \gamma\Phi) &= \lambda U\Psi + \gamma U\Phi , \end{aligned}$$

o antiunitario y antilineal:

$$\begin{aligned} \langle U\Psi|U\Phi \rangle &= \overline{\langle \Psi|\Phi \rangle} , \\ U(\lambda\Psi + \gamma\Phi) &= \bar{\lambda}U\Psi + \bar{\gamma}U\Phi , \end{aligned}$$

donde  $\Psi \in \hat{\Psi}$ ,  $\Phi \in \hat{\Phi}$ ,  $\lambda, \gamma \in \mathbb{C}$ .

La transformación de simetría trivial  $\hat{\Psi} \rightarrow \hat{\Psi}$  se representa con el operador identidad  $U = 1$  salvo una fase.

El conjunto de transformaciones de simetría forman un grupo, siendo el producto su composición.

Sean  $T_1$  y  $T_2$  elementos del grupo de transformaciones de simetría con  $T_1 : \hat{\Psi} \rightarrow \hat{\Psi}'$  y  $T_2 : \hat{\Psi}' \rightarrow \hat{\Psi}''$ , entonces como  $(T_2)(T_1) = (T_2T_1)$ :

$$T_2T_1 : \hat{\Psi} \rightarrow \hat{\Psi}'' .$$

Estas transformaciones  $T_i$  actúan en el espacio de los rayos. Al representarlas en un espacio de Hilbert mediante el operador asociado a ellas (Teorema de Wigner)  $U(T_i)$ , tenemos que:

$$\begin{aligned}
U(T_1) : \Psi &\rightarrow \Psi' & \text{con} & \quad \Psi \in \hat{\Psi} \quad , \quad \Psi' \in \hat{\Psi}' \quad , \\
U(T_2) : \Psi' &\rightarrow \Psi'' & \text{con} & \quad \Psi' \in \hat{\Psi}' \quad , \quad \Psi'' \in \hat{\Psi}'' \quad ,
\end{aligned}$$

entonces

$$U(T_2)U(T_1) : \Psi \rightarrow \Psi'' \in \hat{\Psi}'' \quad , \quad (1.3)$$

$$U(T_2T_1) : \Psi \rightarrow \Psi'' \in \hat{\Psi}'' \quad , \quad (1.4)$$

esto es, tanto (1.3) como (1.4) corresponden al mismo rayo, por ende los vectores asociados a estos difieren solo por una fase  $\alpha(T_2, T_1)$ , quedando el producto:

$$U(T_2)U(T_1) = e^{i\alpha(T_2, T_1)}U(T_2T_1) \quad , \quad \alpha(T_2, T_1) \in \mathbb{R} \quad .$$

Cuando la fase  $\alpha$  se puede escoger igual a cero, tenemos el producto de una representación usual, se dice que la representación es verdadera:

$$U(T_2)U(T_1) = U(T_2T_1) \quad .$$

En general, cuando  $\alpha \neq 0$  o no, se dice que la representación es proyectiva. Por lo tanto, la mecánica cuántica nos da más libertad al representar un grupo de simetrías, debemos buscar representaciones proyectivas.

Se puede probar que si el grupo de transformaciones de simetría es un grupo de Lie conexo; es decir, cualquier elemento puede ser “llevado” a la identidad mediante un cambio continuo de algún parámetro (que pertenece a la variedad asociada a este grupo de Lie); entonces este debe ser representado proyectivamente por operadores unitarios y lineales (en vez de antiunitarios y antilineales).

Al parametrizar los elementos del grupo de simetría ( $T_i$ ), el producto de grupo tiene la forma:

$$T(\bar{\theta}^a)T(\theta^a) = T(f^a(\bar{\theta}, \theta)) \quad ,$$

con  $\bar{\theta}, \theta, f(\bar{\theta}, \theta) \in M$ , donde  $M$  es la variedad asociada al grupo de simetría. Escogiendo  $\theta^a = 0$  como la coordenada de la identidad  $T(0) = 1$ , tenemos la condición:

$$f^a(\theta, 0) = f^a(0, \theta) = \theta^a \quad . \quad (1.5)$$

Al representar esta transformación en un espacio de Hilbert con el operador unitario y lineal  $U(T(\theta))$  y desarrollarlo en serie de potencias en una vecindad de la identidad, tenemos:

$$U(T(\theta^a)) = 1 + i\theta^a t_a + \frac{1}{2}\theta^b \theta^c t_{bc} + \dots, \quad (1.6)$$

donde  $t_a, t_{bc} = t_{cb}, \dots$  son operadores hermíticos que no dependen de  $\theta$ . Los coeficientes  $i = \sqrt{-1}$  se colocan consistentemente con la autoadjunticidad de  $t$ .

Ahora, si tenemos una representación verdadera, esto es:

$$U(T(\bar{\theta}^a))U(T(\theta^a)) = U(T(f^a(\bar{\theta}, \theta))), \quad (1.7)$$

al desarrollar en serie  $f^a(\bar{\theta}, \theta)$ , de la condición (1.5) obtenemos:

$$f^a(\bar{\theta}, \theta) = \theta^a + \bar{\theta}^a + f_{bc}^a \bar{\theta}^b \theta^c + \dots \quad \text{con} \quad f_{bc}^a \in \mathbb{R}. \quad (1.8)$$

Sustituyendo (1.6) y (1.8) en (1.7) y aproximando hasta segundo orden:

$$\begin{aligned} U(T(\bar{\theta}^a))U(T(\theta^a)) &= [1 + i\bar{\theta}^a t_a + \frac{1}{2}\bar{\theta}^b \bar{\theta}^c t_{bc} + \dots][1 + i\theta^a t_a + \frac{1}{2}\theta^b \theta^c t_{bc} + \dots] \\ &\simeq 1 + i\bar{\theta}^a t_a + i\theta^a t_a + \frac{1}{2}\bar{\theta}^b \bar{\theta}^c t_{bc} + \frac{1}{2}\theta^b \theta^c t_{bc} - \bar{\theta}^b \theta^c t_b t_c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(T(f^a(\bar{\theta}, \theta))) &= 1 + i(\theta^a + \bar{\theta}^a + f_{bc}^a \bar{\theta}^b \theta^c + \dots)t_a + \\ &\quad \frac{1}{2}(\theta^b + \bar{\theta}^b + \dots)(\theta^c + \bar{\theta}^c + \dots)t_{bc} + \dots \\ &\simeq 1 + i(\theta^a + \bar{\theta}^a + f_{bc}^a \bar{\theta}^b \theta^c)t_a + \frac{1}{2}\theta^b \theta^c t_{bc} + \frac{1}{2}\bar{\theta}^b \bar{\theta}^c t_{bc} + \\ &\quad \frac{1}{2}\theta^b \bar{\theta}^c t_{bc} + \frac{1}{2}\bar{\theta}^b \theta^c t_{bc}. \end{aligned}$$

Como  $t_{bc} = t_{cb} \Rightarrow \theta^b \bar{\theta}^c t_{bc} = \bar{\theta}^b \theta^c t_{bc}$ , se obtiene la condición:

$$t_{bc} = -t_b t_c - i f_{bc}^a t_a = t_{cb} = -t_c t_b - i f_{cb}^a t_a, \quad (1.9)$$

y de aquí

$$[t_b, t_c]_- \equiv t_b t_c - t_c t_b = i C_{bc}^a t_a, \quad (1.10)$$

donde  $C_{bc}^a \equiv -f_{bc}^a + f_{cb}^a$  es la constante de estructura de este grupo de Lie, y  $t_a$  es el generador de la representación de su álgebra de Lie, definida por el producto (1.10). Entonces, en una vecindad de la identidad,  $U(T(\theta^a))$  estará determinado al conocer los generadores  $t_a$  y la constante de estructura  $C_{bc}^a$ .

Si el grupo de transformaciones de simetría es Abelian, (1.8) se reduce a:

$$f^a(\bar{\theta}, \theta) = \theta^a + \bar{\theta}^a,$$

por ende  $[t_b, t_c]_- = 0$ , pudiendo expresar así los elementos del grupo (en una vecindad de la identidad) como:

$$U(T(\theta^a)) = e^{it_a\theta^a} .$$

En cambio si tenemos una representación proyectiva (la cual incluye las verdaderas para el caso de  $\alpha = 0$ ), esto es:

$$U(T(\theta^a))U(T(\bar{\theta}^a)) = e^{i\alpha(T(\theta^a), T(\bar{\theta}^a))}U(T(\theta^a), T(\bar{\theta}^a)) , \quad (1.11)$$

como el producto de  $U(T)$  es asociativo:

$$U(T_3)(U(T_2)U(T_1)) = (U(T_3)U(T_2))U(T_1) ,$$

al sustituir por la regla de composición (1.11) se obtiene la siguiente condición para la fase:

$$\alpha(T_2, T_1) + \alpha(T_3, T_2T_1) = \alpha(T_3, T_2) + \alpha(T_3T_2, T_1) . \quad (1.12)$$

Se observa que una solución de (1.12) viene dada por:

$$\alpha(T(\theta^a), T(\bar{\theta}^a)) = \gamma(T(\theta^a)T(\bar{\theta}^a)) - \gamma(T(\theta^a)) - \gamma(T(\bar{\theta}^a)) . \quad (1.13)$$

Si tomamos esta solución, podemos redefinir al operador  $U$  como:

$$\tilde{U}(T(\theta^a)) = U(T(\theta^a))e^{i\gamma T(\theta^a)} ,$$

para el cual (1.11) se transforma en:

$$\tilde{U}(T(\theta^a))\tilde{U}(T(\bar{\theta}^a)) = \tilde{U}(T(\theta^a), T(\bar{\theta}^a)) ,$$

obteniendo así una representación verdadera.

Las representaciones que nos interesa estudiar son las intrínsecamente proyectivas, es decir, aquellas en que no podemos eliminar la fase de esta manera, esto es, (1.13) no es la única solución de (1.12).

Regresando a la ecuación (1.11), si  $T(\theta^a)$  o  $T(\bar{\theta}^a)$  es la identidad, la fase  $\alpha$  debe anularse:

$$\alpha(T(\theta^a), 1) = \alpha(1, T(\bar{\theta}^a)) = 0 . \quad (1.14)$$

Desarrollamos en serie de potencias la fase alrededor de  $\theta^a = \bar{\theta}^a = 0$ , y por la condición anterior (1.14) la fase queda expresada como:

$$\alpha(T(\theta^a), T(\bar{\theta}^a)) = f_{ab}\theta^a\bar{\theta}^b + \dots \quad f_{ab} \in \mathbb{R} , \quad (1.15)$$

sustituyendo (1.15) y (1.8) en (1.11), (obteniéndose relaciones similares a las relaciones entre (1.8) y (1.9)), y simplificando se tiene:

$$t_{bc} = -t_b t_c - i f_{bc}^a t_a = t_{cb} = -t_c t_b - i f_{cb}^a t_a + i f_{bc} \mathbb{I} .$$

Como  $t_{bc} = t_{cb}$ , obtenemos la representación del álgebra de Lie del grupo de simetría:

$$[t_b, t_c]_- = i C_{bc}^a t_a + i C_{bc} \mathbb{I} , \quad (1.16)$$

donde las constantes numéricas  $C_{bc} = -f_{bc} + f_{cb}$  son llamadas cargas centrales, las cuales son la contraparte para el álgebra de Lie de la presencia de la fase en una representación proyectiva.

El corchete de Lie (1.16) debe satisfacer la identidad de Jacobi:

$$[t_b, [t_c, t_d]]_- + [t_d, [t_b, t_c]]_- + [t_c, [t_d, t_b]]_- = 0 , \quad (1.17)$$

sustituyendo (1.16) en (1.17) obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$i C_{cd}^a (i C_{ba}^e t_e + i C_{ba} \mathbb{I}) + i C_{bc}^a (i C_{da}^e t_e + i C_{da} \mathbb{I}) + i C_{db}^a (i C_{ca}^e t_e + i C_{ca} \mathbb{I}) = 0 , \quad (1.18)$$

$$(C_{cd}^a C_{ba}^e + C_{bc}^a C_{da}^e + C_{db}^a C_{ca}^e) t_e + (C_{cd}^a C_{ba} + C_{bc}^a C_{da} + C_{db}^a C_{ca}) \mathbb{I} = 0 . \quad (1.19)$$

De (1.18) no se obtiene información adicional acerca de  $C_{ab}$  y  $C_{bc}^a$ , ya que se satisface inmediatamente; pero de (1.19) se consiguen restricciones adicionales que deben cumplir las cargas centrales  $C_{ab}$  y la constante de estructura  $C_{bc}^a$ :

$$C_{cd}^a C_{ba}^e + C_{bc}^a C_{da}^e + C_{db}^a C_{ca}^e = 0 , \quad (1.20)$$

$$C_{cd}^a C_{ba} + C_{bc}^a C_{da} + C_{db}^a C_{ca} = 0 . \quad (1.21)$$

Se observa que la expresión:

$$C_{ba} = C_{ba}^e \tau_e \quad \text{con} \quad \tau_e \in \mathbb{R} , \quad (1.22)$$

satisface (1.21). Para estas soluciones se pueden eliminar las cargas centrales redefiniendo los generadores  $t_i$  como:

$$\tilde{t}_a \equiv t_a + \tau_a , \quad (1.23)$$

cuyo producto viene dado por:

$$[\tilde{t}_b, \tilde{t}_c]_- = i C_{bc}^a \tilde{t}_a ,$$

eliminando con este cambio la presencia de las cargas centrales en el álgebra. La cuestión sería si esta es la única solución de (1.21). En ese caso tenemos el equivalente a nivel del álgebra de Lie de la no presencia de fase en una representación proyectiva.

Otra razón por la cual podrían aparecer representaciones proyectivas es debido a la topología del grupo de Lie (grupo de simetría). La propiedad topológica básica importante aquí es la simple conectividad. Aunque en general no existe una conexión entre simple conectividad y representaciones proyectivas (contrario a lo dicho por [8], pág. 83-84), en el caso del grupo de Poincaré, se puede probar que estos conceptos si están conectados.

### 1.3. Teoría cuántica de campos lagrangiana

Con el objeto de poder comparar con la formulación de Wightman recordaremos las ideas básicas de la formulación usual de la teoría cuántica de campos.

La teoría cuántica de campos lagrangiana parte del formalismo lagrangiano del caso clásico. Adoptando el marco de Heisenberg, se definen los estados como vectores que son autovectores simultáneos de un conjunto completo de observables que conmutan en alguna superficie tipo espacio  $\sigma \in \mathbb{R}^{1,n}$  y la dinámica del sistema queda determinada por la evolución de dichos observables (ver, por ejemplo, [9]).

A la acción clásica asociada al campo libre bajo estudio se le hace corresponder un operador:

$$W = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \mathcal{L}(\phi_\alpha, \partial_\mu \phi_\alpha) d^n x ,$$

donde  $\phi_\alpha(x)$  son los operadores asociados al campo clásico  $\vartheta(x)$  y los índices  $\alpha = 1, \dots, N$ ; representan los grados de libertad internos del sistema,  $x \in \sigma$  y  $\mathcal{L}$  es un operador asociado a la densidad lagrangiana clásica  $\mathcal{L}(\vartheta_\alpha, \partial_\mu \vartheta_\alpha)$ .

Una transformación de simetría nos proporciona una descripción equivalente del sistema, en particular, la dinámica del sistema permanece invariante. Esta transformación es generada por un operador autoadjunto  $F[\sigma]$ . Partiendo de una transformación infinitesimal:

$$\begin{aligned} x^\mu &\longrightarrow x^{\mu'} \equiv x^\mu + \delta x^\mu , \\ \phi_\alpha(x) &\longrightarrow \phi'_\alpha(x) \equiv \phi_\alpha(x) + \delta_0 \phi_\alpha(x) , \end{aligned}$$

con  $\mu = 0, 1$ , por ejemplo, se tiene que la variación infinitesimal del campo será:

$$\delta_0 \phi_\alpha(x) = i [F[\sigma], \phi_\alpha(x)]_- .$$

El generador de la simetría  $F[\sigma]$  viene dado por:

$$F[\sigma] = \int_\sigma f^\mu(x) d\sigma_\mu(x) ,$$

con  $f^\mu(x) \equiv \pi_\alpha^\mu \delta\phi_\alpha - (\pi_\alpha^\mu \partial_\nu \psi_\alpha - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}) \delta x^\nu$  y  $\pi_\alpha^\mu(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_\alpha(x)}$  es la variable dinámica conjugada al campo  $\phi_\alpha(x)$ .

Por el principio de mínima acción se tiene que los generadores  $F$  son independientes de la superficie  $\sigma$ ; ya que por el principio de acción de Schwinger  $\delta W = F[\sigma_2] - F[\sigma_1]$ , [9], entonces:

$$\frac{\delta F[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = 0 ,$$

la condición necesaria y suficiente para que se satisfaga esto es que:

$$\partial_\mu f^\mu(x) = 0 ,$$

entonces se tiene que  $f^\mu$  es una densidad de corriente conservada . Esto es consistente con la extensión del teorema de Noether a la mecánica cuántica el cual asocia a cada simetría del sistema una cantidad conservada (observable cuántico). Así, la simetría viene dada por su generador.

También por el principio de mínima acción, a nivel clásico, se obtienen las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange, que se postulan a nivel de operadores:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_\alpha} = 0 .$$

Siguiendo el método usual, hacemos una transformación de Legendre a la densidad lagrangiana:

$$\mathcal{H} = \pi_\alpha^\mu(x) \partial_\mu \psi_\alpha(x) - \mathcal{L} ,$$

donde  $\mathcal{H}$  se conoce como la densidad Hamiltoniana, la cual representa la energía del sistema.

Con argumentos de plausibilidad [9], se obtiene como resultado general que los operadores de campo satisfacen las relaciones de conmutación a tiempos iguales (por

ejemplo  $t = 0$  ):

$$\begin{aligned} [\pi_\alpha(0, x^1), \phi_\beta(0, x^{1'})]_- &= -i \delta_{\alpha\beta} \delta(x^1 - x^{1'}) , \\ [\phi_\alpha(0, x^1), \phi_\beta(0, x^{1'})]_- &= 0 , \\ [\pi_\alpha(0, x^1), \pi_\beta(0, x^{1'})]_- &= 0 , \end{aligned}$$

donde  $[A, B]_- \equiv AB - BA$  denota el conmutador y  $\pi_\alpha \equiv \pi_\alpha^0$ , o satisfacen las relaciones de anticonmutación a tiempos iguales:

$$\begin{aligned} [\pi_\alpha(0, x^1), \phi_\beta(0, x^{1'})]_+ &= -i \delta_{\alpha\beta} \delta(x^1 - x^{1'}) , \\ [\phi_\alpha(0, x^1), \phi_\beta(0, x^{1'})]_+ &= 0 , \\ [\pi_\alpha(0, x^1), \pi_\beta(0, x^{1'})]_+ &= 0 , \end{aligned}$$

donde  $[A, B]_+ \equiv AB + BA$  denota el anticonmutador .

El problema con esta formulación es la especificación del espacio de Hilbert donde estos operadores de campo se realizan. Se puede ver que no pueden existir operadores de campo definidos en un punto arbitrario del espacio-tiempo. Esto es claro de las reglas de conmutación (o anticonmutación). En efecto, si tenemos una delta de Dirac del lado derecho, el lado izquierdo no puede ser una función de los puntos del espacio-tiempo. La construcción de la teoría usa, como hemos dicho, que una transformación de simetría viene especificada por un generador autoadjunto. Sin embargo, esto no es necesariamente cierto, ni siquiera en sistemas con finitos grados de libertad. Así que el fundamento de las simetrías en esta formulación no es claro. En particular, la invariancia Poincaré de la teoría se discute a través de la generación de una representación del álgebra de Lie del grupo de Poincaré, lo cual no es suficiente, como veremos en la sección 2.4 .

# Capítulo 2

## Grupo de Lorentz y Poincaré

Nuestro objetivo es estudiar la mecánica cuántica relativista en bajas dimensiones, por lo tanto, debemos estudiar los respectivos grupos de Lorentz y Poincaré. Consideraremos inicialmente estos grupos en dimensiones arbitrarias.

### 2.1. Grupo de Lorentz y Poincaré en $(1+n)$ dimensiones

El grupo de Lorentz  $\mathcal{L}(1, n)$  está definido como el conjunto de todas las transformaciones lineales reales  $\Lambda$  en  $\mathbb{R}^{1, n}$ , el cual deja invariante la forma bilineal simétrica (producto escalar):

$$\langle \Lambda x | \Lambda y \rangle = \langle x | y \rangle = x^\mu \mathbf{g}_{\mu\nu} y^\nu \quad x, y \in \mathbb{R}^{1, n} \quad ; \quad \mu, \nu = 0, 1, \dots, n . \quad (2.1)$$

Estas transformaciones se pueden representar en una base ortonormal por matrices  $\Lambda_\nu^\mu$  (de entradas reales), las cuales por la condición de invariancia (2.1) satisfacen:

$$\Lambda_\mu^\lambda \mathbf{g}_{\lambda\rho} \Lambda_\nu^\rho = \mathbf{g}_{\mu\nu} \quad \text{o equivalentemente} \quad \Lambda^T \mathbf{g} \Lambda = \mathbf{g} , \quad (2.2)$$

y en esta base el tensor métrico es diagonal:

$$\mathbf{g} = \text{diag}(-1, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_n) .$$

Al hallar el determinante de (2.2) se tiene que:

$$\det(\mathbf{g}) = \det(\Lambda^T \mathbf{g} \Lambda) = \det(\Lambda^T) \det(\mathbf{g}) \det(\Lambda) ,$$

como  $\det(\Lambda^T) = \det(\Lambda)$  y  $\det(\mathbf{g}) = -1$ , entonces tenemos la restricción:

$$\det\Lambda = \pm 1 . \quad (2.3)$$

Ahora si colocamos  $\mu = \nu = 0$  en (2.2):

$$\Lambda_0^\lambda \mathbf{g}_{\lambda\rho} \Lambda_0^\rho = \mathbf{g}_{00} \quad \Rightarrow \quad \Lambda_0^0 \mathbf{g}_{0\rho} \Lambda_0^\rho + \Lambda_0^i \mathbf{g}_{i\rho} \Lambda_0^\rho = -1 ,$$

con  $i = 1, 2, \dots, n$  obtenemos  $-\Lambda_0^0 \Lambda_0^0 + \Lambda_0^i \Lambda_0^i = -1$ . Ya que los elementos de  $\Lambda$  son reales, tenemos la segunda restricción:

$$|\Lambda_0^0| \geq 1 . \quad (2.4)$$

Por (2.2) el grupo de Lorentz en  $(1+n)$  se puede ver como el grupo de Lie matricial  $\mathcal{O}(1, n)$ , por ende sus elementos son funciones continuas de los parámetros del grupo. Como no podemos “pasar” continuamente de  $\det\Lambda = 1$  a  $\det\Lambda = -1$ , ni de  $\Lambda_0^0 \geq 1$  a  $\Lambda_0^0 \leq -1$  (y viceversa), entonces el grupo de Lorentz se puede dividir en cuatro componentes conexas, pero desconexas entre sí:

$$\mathcal{L}_+^\uparrow \equiv \{ \Lambda \in \mathcal{O}(1, n) \mid \Lambda_0^0 \geq 1 \text{ y } \det\Lambda = 1 \} , \quad (2.5)$$

$$\mathcal{L}_+^\downarrow \equiv \{ \Lambda \in \mathcal{O}(1, n) \mid \Lambda_0^0 \leq -1 \text{ y } \det\Lambda = 1 \} , \quad (2.6)$$

$$\mathcal{L}_-^\uparrow \equiv \{ \Lambda \in \mathcal{O}(1, n) \mid \Lambda_0^0 \geq 1 \text{ y } \det\Lambda = -1 \} , \quad (2.7)$$

$$\mathcal{L}_-^\downarrow \equiv \{ \Lambda \in \mathcal{O}(1, n) \mid \Lambda_0^0 \leq -1 \text{ y } \det\Lambda = -1 \} , \quad (2.8)$$

de donde solo  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  (2.5) es un subgrupo de  $\mathcal{L}(1, n)$ , de hecho es la única componente conectada con la identidad.

A  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  se le suele llamar grupo de Lorentz ortocrono propio, o grupo restringido de Lorentz. Este se puede realizar, en una base ortonormal, como grupo de Lie matricial de  $\frac{n(n+1)}{2}$  dimensiones:  $\mathcal{SO}^\uparrow(1, n)$ .

El grupo de Poincaré  $\Pi(1, n)$  se define como el grupo de transformaciones afines de  $\mathbb{R}^{1, n}$ , que preserva la “distancia” de Lorentz (boosts, rotaciones y traslaciones):

$$d_L(x, y) = -(x_0 - y_0)^2 + (x_i - y_i)^2, \quad x, y \in \mathbb{R}^{1, n}; \quad i = 1, 2, \dots, n .$$

Un elemento de  $\Pi(1, n)$  se escribirá como  $(a, \Lambda)$  con  $a \in \mathbb{R}^{1, n}$  y  $\Lambda \in \mathcal{L}$ ; su producto viene dado por:

$$(a, \Lambda)(b, \Gamma) = (a + \Lambda b, \Lambda\Gamma) , \quad (2.9)$$

es decir, es un producto semidirecto (esto se sigue de la acción de Poincaré sobre el espacio-tiempo y de la composición de dos transformaciones es diferente a la de un producto directo). Entonces el grupo de Poincaré se escribe como:

$$\Pi(1, n) = \mathbb{R}^{(1+n)} \odot \mathcal{O}(1, n) ,$$

donde  $\mathbb{R}^{(1+n)}$  es el grupo conmutativo de las traslaciones ,  $\mathcal{O}(1, n)$  es el grupo de Lorentz y el símbolo  $\odot$  denota el producto semidirecto.

El grupo restringido de Poincaré  $\Pi_+^\uparrow(1, n)$  viene dado por:

$$\Pi_+^\uparrow(1, n) = \mathbb{R}^{(1+n)} \odot \mathcal{SO}^\uparrow(1, n) . \quad (2.10)$$

### 2.1.1. Álgebra de Lie del grupo restringido de Poincaré $\Pi_+^\uparrow(1, n)$

El álgebra de Lie del grupo restringido de Poincaré es un espacio vectorial de  $\frac{n(n+3)+2}{2}$  dimensiones, cuyo producto en una base viene dado por:

$$\begin{aligned} i [M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}]_- &= \mathbf{g}^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} - \mathbf{g}^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - \mathbf{g}^{\sigma\mu} M^{\rho\nu} + \mathbf{g}^{\sigma\nu} M^{\rho\mu} , \\ i [M^{\mu\nu}, P^\rho]_- &= \mathbf{g}^{\nu\rho} P^\mu - \mathbf{g}^{\mu\rho} P^\nu , \\ i [P^\mu, P^\nu]_- &= 0 , \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde  $\mu, \nu, \rho, \sigma = 0, 1, \dots, n$ . Los elementos de la base  $M^{\mu\nu}$  son los generadores asociados al momento angular con la propiedad de antisimetría  $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$ , y los elementos de la base  $P^\mu$  son los generadores asociados al momentum lineal. Nótese que el conmutador de estos observables es también un observable, en consecuencia para garantizar la autoadjunticidad del operador de conmutación se introduce la unidad imaginaria  $i$ .

Ahora bien, como ya hemos visto de (1.16) si tenemos una representación proyectiva, esta puede verse reflejada en la representación de su álgebra de Lie mediante la presencia de coeficientes tensoriales con 2, 3 ó 4 índices llamados cargas centrales:

$$\begin{aligned} i [M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}]_- &= \mathbf{g}^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} - \mathbf{g}^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - \mathbf{g}^{\sigma\mu} M^{\rho\nu} + \mathbf{g}^{\sigma\nu} M^{\rho\mu} + C^{\rho\sigma, \mu\nu} , \\ i [M^{\mu\nu}, P^\rho]_- &= \mathbf{g}^{\nu\rho} P^\mu - \mathbf{g}^{\mu\rho} P^\nu + C^{\rho, \mu\nu} , \\ i [P^\mu, P^\nu]_- &= C^{\mu, \nu} , \end{aligned} \quad (2.12)$$

con  $C^{\rho\sigma, \mu\nu} = -C^{\mu\nu, \rho\sigma}$  ;  $C^{\rho, \mu\nu} = -C^{\mu\nu, \rho}$  y  $C^{\mu, \nu} = -C^{\nu, \mu}$ . Estos corchetes deben

satisfacer además la identidad de Jacobi:

$$[M^{\mu\nu}, [P^\rho, P^\sigma]]_- + [P^\sigma, [M^{\mu\nu}, P^\rho]]_- + [P^\rho, [P^\sigma, M^{\mu\nu}]]_- = 0, \quad (2.13)$$

$$[M^{\mu\nu}, [M^{\lambda\sigma}, P^\rho]]_- + [P^\rho, [M^{\mu\nu}, M^{\lambda\sigma}]]_- + [M^{\lambda\sigma}, [P^\rho, M^{\mu\nu}]]_- = 0, \quad (2.14)$$

$$[M^{\mu\nu}, [M^{\lambda\sigma}, M^{\rho\gamma}]]_- + [M^{\rho\gamma}, [M^{\mu\nu}, M^{\lambda\sigma}]]_- + [M^{\lambda\sigma}, [M^{\rho\gamma}, M^{\mu\nu}]]_- = 0, \quad (2.15)$$

$$[P^\mu, [P^\nu, P^\rho]]_- + [P^\rho, [P^\mu, P^\nu]]_- + [P^\nu, [P^\rho, P^\mu]]_- = 0. \quad (2.16)$$

Si queremos averiguar la existencia de representaciones proyectivas no triviales (es decir, intrínsecamente proyectivas), debido al álgebra, debemos ver si se pueden eliminar las cargas centrales (lo cual es conocido en la literatura, de manera más precisa, como cohomología trivial del grupo).

## 2.2. Grupo de Lorentz y Poincaré en (1+2)

En (1+2) el grupo de Lorentz  $\mathcal{L}(1, 2)$  se puede ver como el grupo de Lie matricial  $\mathcal{O}(1, 2)$  cuyos elementos satisfacen (2.2). El tensor métrico viene dado por:

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El grupo  $\mathcal{L}_+^\uparrow(1, 2)$  es un grupo de Lie de dimensión tres  $\equiv \mathcal{SO}^\uparrow(1, 2)$ , este no es compacto ni simplemente conexo, ya que su variedad viene dada por el producto cartesiano:

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2.$$

El grupo restringido de Poincaré  $\Pi_+^\uparrow(1, 2)$ , dado en (2.10) será:

$$\Pi_+^\uparrow = \mathbb{R}^{(3)} \odot \mathcal{SO}^\uparrow(1, 2), \quad (2.17)$$

este es un grupo de Lie de dimensión seis; como variedad es el producto cartesiano de la variedad  $\mathbb{R}^{(3)}$  y  $\mathcal{SO}^\uparrow(1, 2)$ , por lo tanto  $\Pi_+^\uparrow(1, 2)$  no es compacto. Además, como  $\mathbb{R}^{(3)}$  es simplemente conexo y  $\mathcal{SO}^\uparrow(1, 2)$  no lo es, entonces  $\Pi_+^\uparrow(1, 2)$  no será simplemente conexo. Así que pueden existir representaciones proyectivas, no verdaderas, debido a la topología.

### 2.2.1. Álgebra de Lie del grupo restringido de Poincaré $\Pi_+^\uparrow(1, 2)$

El álgebra de Lie de  $\Pi_+^\uparrow(1, 2)$  es un espacio vectorial de dimensión seis (cuyos elementos de la base son:  $P^0, P^1, P^2, M^{01}, M^{02}$  y  $M^{12}$ ) y viene dada por (2.11).

Pero como estamos interesados en las representaciones proyectivas, hay que estudiar la posibilidad de tener cargas centrales no triviales en el álgebra de Lie (2.12).

Al desarrollar la identidad de Jacobi (2.13), obtenemos:

$$\mathbf{g}^{\nu\rho}C^{\sigma,\mu} - \mathbf{g}^{\mu\rho}C^{\sigma,\nu} - \mathbf{g}^{\nu\sigma}C^{\rho,\mu} + \mathbf{g}^{\mu\sigma}C^{\rho,\nu} = 0 \quad \text{con} \quad \mu, \nu, \sigma, \rho = 0, 1, 2 ,$$

multiplicando esta ecuación por  $\mathbf{g}_{\nu\rho}$  y sumando sobre  $\nu, \rho$ , conociendo que  $\mathbf{g}_{\mu\nu}\mathbf{g}^{\mu\rho} = \delta_\nu^\rho$ , nos queda:

$$C^{\sigma,\mu} + \mathbf{g}_{\nu\rho}\mathbf{g}^{\mu\sigma}C^{\rho,\nu} = 0 ,$$

entonces tenemos la condición:

$$C^{\sigma,\mu} = 0 . \tag{2.18}$$

Ahora, al desarrollar la identidad de Jacobi (2.14):

$$\begin{aligned} &\mathbf{g}^{\sigma\rho}[M^{\mu\nu}, P^\lambda]_- - \mathbf{g}^{\lambda\rho}[M^{\mu\nu}, P^\sigma]_- - \mathbf{g}^{\nu\lambda}[M^{\mu\sigma}, P^\rho]_- + \mathbf{g}^{\mu\lambda}[M^{\nu\sigma}, P^\rho]_- \\ &+ \mathbf{g}^{\sigma\mu}[M^{\lambda\nu}, P^\rho]_- - \mathbf{g}^{\sigma\nu}[M^{\lambda\mu}, P^\rho]_- - \mathbf{g}^{\nu\rho}[M^{\lambda\sigma}, P^\mu]_- + \mathbf{g}^{\mu\rho}[M^{\lambda\sigma}, P^\nu]_- = 0 , \end{aligned}$$

y contraer con  $\mathbf{g}_{\nu\rho}$  obtenemos:

$$\begin{aligned} &[M^{\mu\sigma}, P^\lambda]_- - [M^{\mu\lambda}, P^\sigma]_- - [M^{\mu\sigma}, P^\lambda]_- + \mathbf{g}_{\nu\rho}\mathbf{g}^{\mu\lambda}[M^{\nu\sigma}, P^\rho]_- \\ &+ \mathbf{g}_{\nu\rho}\mathbf{g}^{\sigma\mu}[M^{\lambda\nu}, P^\rho]_- - [M^{\lambda\mu}, P^\sigma]_- - 3[M^{\lambda\sigma}, P^\mu]_- + [M^{\lambda\sigma}, P^\mu]_- = 0 , \end{aligned}$$

lo cual se reduce a:

$$2[M^{\lambda\sigma}, P^\mu]_- = \mathbf{g}_{\nu\rho}\mathbf{g}^{\mu\lambda}[M^{\nu\sigma}, P^\rho]_- + \mathbf{g}_{\nu\rho}\mathbf{g}^{\sigma\mu}[M^{\lambda\nu}, P^\rho]_-$$

sustituyendo los corchetes de Lie, se tiene la condición:

$$C^{\mu,\lambda\sigma} = -\mathbf{g}^{\mu\lambda}C^\sigma + \mathbf{g}^{\sigma\mu}C^\lambda \quad \text{con} \quad C^\sigma = \frac{1}{2}\mathbf{g}_{\nu\rho}C^{\rho,\sigma\nu} . \tag{2.19}$$

De la identidad de Jacobi (2.15):

$$\begin{aligned} &\mathbf{g}^{\sigma\rho}[M^{\mu\nu}, M^{\lambda\gamma}]_- - \mathbf{g}^{\lambda\rho}[M^{\mu\nu}, M^{\sigma\gamma}]_- - \mathbf{g}^{\gamma\lambda}[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}]_- + \mathbf{g}^{\gamma\sigma}[M^{\mu\nu}, M^{\rho\lambda}]_- + \\ &\mathbf{g}^{\nu\lambda}[M^{\rho\gamma}, M^{\mu\sigma}]_- - \mathbf{g}^{\mu\lambda}[M^{\rho\gamma}, M^{\nu\sigma}]_- - \mathbf{g}^{\sigma\mu}[M^{\rho\gamma}, M^{\lambda\nu}]_- + \mathbf{g}^{\sigma\nu}[M^{\rho\gamma}, M^{\lambda\mu}]_- + \\ &\mathbf{g}^{\gamma\mu}[M^{\lambda\sigma}, M^{\rho\nu}]_- - \mathbf{g}^{\rho\mu}[M^{\lambda\sigma}, M^{\gamma\nu}]_- - \mathbf{g}^{\nu\rho}[M^{\lambda\sigma}, M^{\mu\gamma}]_- + \mathbf{g}^{\nu\gamma}[M^{\lambda\sigma}, M^{\mu\rho}]_- = 0 , \end{aligned}$$

al multiplicarlo por  $\mathbf{g}_{\nu\rho}$ , contraer y sustituir los corchetes tenemos:

$$C^{\mu\gamma,\lambda\sigma} = -\mathbf{g}^{\gamma\lambda}C^{\mu\sigma} + \mathbf{g}^{\gamma\sigma}C^{\mu\lambda} - \mathbf{g}^{\mu\lambda}C^{\sigma\gamma} + \mathbf{g}^{\sigma\mu}C^{\lambda\gamma}, \quad (2.20)$$

con  $C^{\mu\lambda} \equiv \mathbf{g}_{\nu\rho}C^{\mu\nu,\lambda\rho}$ .

Observamos que la identidad de Jacobi (2.16) se satisface directamente, por ende, no nos proporciona información adicional acerca de nuevas restricciones que cumplen las cargas centrales.

Entonces, por (2.18), (2.19) y (2.20) podemos hacer una redefinición de los generadores  $P^\mu$  y  $M^{\mu\nu}$  del grupo de Poincaré restringido con  $\mu, \nu = 0, 1, 2$ :

$$\begin{aligned} \tilde{P}^\mu &\equiv P^\mu - C^\mu, \\ \tilde{M}^{\mu\nu} &\equiv M^{\mu\nu} - C^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

con la cual recuperamos las relaciones de conmutación (2.11) correspondientes a una representación sin cargas centrales, es decir verdadera:

$$\begin{aligned} i \left[ \tilde{M}^{\mu\nu}, \tilde{M}^{\rho\sigma} \right]_- &= \mathbf{g}^{\nu\rho} \tilde{M}^{\mu\sigma} - \mathbf{g}^{\mu\rho} \tilde{M}^{\nu\sigma} - \mathbf{g}^{\sigma\mu} \tilde{M}^{\rho\nu} + \mathbf{g}^{\sigma\nu} \tilde{M}^{\rho\mu}, \\ i \left[ \tilde{M}^{\mu\nu}, \tilde{P}^\rho \right]_- &= \mathbf{g}^{\nu\rho} \tilde{P}^\mu - \mathbf{g}^{\mu\rho} \tilde{P}^\nu, \\ i \left[ \tilde{P}^\mu, \tilde{P}^\nu \right]_- &= 0. \end{aligned}$$

Hemos podido eliminar las cargas centrales del álgebra de Lie redefiniendo los generadores, por lo tanto no existen razones algebraicas para que el grupo de Poincaré  $\Pi_+^\uparrow(1, 2)$  tenga representaciones intrínsecamente proyectivas y por lo tanto, las representaciones intrínsecamente proyectivas, si aparecen, son debido a la topología. Esto es, la misma situación que en (1+3). Este resultado fue derivado por Bargmann [15]. Aquí lo hemos reobtenido usando el método de [8] donde solo estudian el caso de (1+3).

Así, como se hace en (1+3), la técnica para encontrar las representaciones proyectivas es buscar el grupo de recubrimiento universal de  $\Pi_+^\uparrow(1, 2)$ , ya que las representaciones verdaderas de este, serán todas las proyectivas de  $\Pi_+^\uparrow(1, 2)$  (ver, por ejemplo, [8]).

### 2.2.2. Grupo de recubrimiento universal de $\Pi_+^\uparrow(1, 2)$

El grupo de recubrimiento universal de  $\Pi_+^\uparrow(1, 2)$ , por (2.17) será  $\mathbb{R}^{(3)} \odot \widetilde{\mathcal{SO}}^\uparrow(1, 2)$ , con  $\widetilde{\mathcal{SO}}^\uparrow(1, 2)$  el grupo de recubrimiento universal de  $\mathcal{SO}^\uparrow(1, 2)$ .

En la literatura (ver, por ejemplo, [2] y [4] ) suelen usar  $\mathcal{SL}(2, \mathbb{R})$  como el análogo para (1+2) de  $\mathcal{SL}(2, \mathbb{C})$  ( $\mathcal{SL}(2, \mathbb{C})$  es el grupo de recubrimiento universal de  $\mathcal{SO}^\uparrow(1, 3)$ , esto es, del grupo restringido de Lorentz en (1+3)), pero todo grupo de recubrimiento universal es simplemente conexo y como demostraremos a continuación  $\mathcal{SL}(2, \mathbb{R})$  no lo es. Ahora bien:

$$\mathcal{SL}(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; a, b, c, d \in \mathbb{R} ; ad - bc = 1 \right\}$$

es un grupo de Lie matricial. Localmente,  $\mathcal{SL}(2, \mathbb{R})$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^3$ . Queremos probar que globalmente no es simplemente conexo. Para ello vamos a construir un homeomorfismo con un espacio que no es simplemente conexo.

En efecto, dado un vector arbitrario de  $\mathbb{R}^2$ , diferente de cero, siempre existe una y solo una rotación  $M \in \mathcal{SO}(2, \mathbb{R})$ , tal que:

$$M \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix},$$

con  $e > 0$  y  $a, c \in \mathbb{R}$ ; es decir, si  $M \neq \mathbb{I}$ , existe un único  $\theta$ , con  $0 < \theta < 2\pi$ , tal que:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e > 0.$$

Sea  $A \in \mathcal{SL}(2, \mathbb{R})$ , tenemos que:

$$MA = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & g \end{pmatrix},$$

con

$$\begin{aligned} f &= b \cos \theta + d \sin \theta, \\ g &= d \cos \theta - b \sin \theta, \end{aligned}$$

pero como  $\det(MA) = \det(M)\det(A) = 1 \cdot 1 = 1$ , se tiene la condición:

$$\det \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & g \end{pmatrix} = eg = 1 \quad \text{y como } e \neq 0 (e > 0) \Rightarrow g = \frac{1}{e},$$

reescribiendo obtenemos:

$$MA = \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & 1/e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1/e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{con } h = \frac{f}{e} \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, toda matriz  $A \in \mathcal{SL}(2, \mathbb{R})$  se puede escribir de manera única como:  $A = RBC$ , donde  $R = M^{-1}$  es una matriz de rotación, y

$$B \equiv \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1/e \end{pmatrix}, e > 0; \quad C \equiv \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, h \in \mathbb{R}.$$

Pero obviamente, el conjunto de las matrices de la forma general dada por  $B$  es un grupo de Lie cuya variedad es  $\mathbb{R}^+$ , por ende es simplemente conexo; y el conjunto de las matrices de la forma general dada por  $C$  también es un grupo de Lie cuya variedad es  $\mathbb{R}$ , por ende, simplemente conexo.

Entonces  $\mathcal{SL}(2, \mathbb{R})$  es un grupo cuya variedad es homeomorfa al producto cartesiano:

$$\mathcal{SO}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$$

Como  $\mathcal{SO}(2, \mathbb{R})$  no es un grupo simplemente conexo (su variedad es el círculo  $S^1$ ), y como  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  es simplemente conexo, por un teorema conocido del producto cartesiano de variedades,  $\mathcal{SL}(2, \mathbb{R})$  no será simplemente conexo.

Como información, (ver, por ejemplo, [17]), el grupo de recubrimiento universal de  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  en  $(1+2)$  se puede realizar como un grupo de Lie, cuya variedad viene dada por:

$$G = \mathbb{R} \times D, \quad D = \{u \in \mathbb{C} \mid |u| < 1\},$$

la cual es obviamente simplemente conexa. La ley de composición para este grupo es:

$$(x, u)(y, v) = \left( x + y + \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \left( \frac{1 + e^{-2iy} u \bar{v}}{1 + e^{2iy} v \bar{u}} \right), \frac{u + e^{2iy} v}{e^{2iy} + u \bar{v}} \right), \quad (2.22)$$

con  $x, y \in \mathbb{R}$  y  $u, v \in D$ . Notemos que si escribimos  $z = e^{-2iy} u \bar{v}$ , entonces  $z \in D$  lo que implica que  $\frac{1+z}{1+\bar{z}} \in S^1 - \{-1\}$  (la circunferencia de radio uno sin el -1). Una parametrización de  $S^1 - \{-1\}$  sería  $e^{2it}$  con  $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , de lo que se sigue que:

$$t = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \left( \frac{1 + e^{-2iy} u \bar{v}}{1 + e^{2iy} v \bar{u}} \right) \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$$

Notemos que el dar este grupo y ser diferente a  $\mathcal{SL}(2, \mathbb{R})$  no garantiza que ellos no sean isomorfos como grupo de Lie. Lo que asegura que este isomorfismo no existe es la prueba de que  $\mathcal{SL}(2, \mathbb{R})$  no es simplemente conexo. Más aún, este grupo de

Lie no es matricial, esto es, no existe una representación fiel con matrices finito dimensionales de este grupo [16]. Esto último garantiza (consistentemente con nuestra demostración) que  $G$  no es isomorfo, en particular, a  $\mathcal{SL}(2, \mathbb{R})$ .

Análogamente al caso (1+3), las partículas elementales serán representaciones proyectivas irreducibles del grupo  $\Pi_+^\uparrow(1, 2)$ . Estas representaciones proyectivas, vendrán dadas por las representaciones unitarias irreducibles del grupo de recubrimiento universal de  $\Pi_+^\uparrow(1, 2)$  (el cual es el producto semidirecto  $\mathbb{R}^{(3)} \odot G$ ). Por lo tanto, este grupo de recubrimiento genera más representaciones que las incluidas cuando se toma, equivocadamente,  $\mathcal{SL}(2, \mathbb{R})$  como el grupo de recubrimiento universal de Lorentz. Esto es claro ya que el grupo  $G$  cubre a  $\mathcal{SL}(2, \mathbb{R})$  de la misma manera como  $\mathcal{SL}(2, \mathbb{C})$  cubre a  $\mathcal{SO}^\uparrow(1 + 3)$  y genera nuevas representaciones [precisamente las espinoriales en (1+3)].

### 2.3. Grupo de Lorentz y Poincaré en (1+1)

El grupo de Lorentz en (1+1),  $\mathcal{L}(1, 1)$  se puede ver como el grupo de Lie matricial  $\mathcal{O}(1, 1)$  cuyos elementos satisfacen (2.2).

El tensor métrico, en una base ortonormal, viene dado por:

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cada componente del grupo de Lorentz ((2.5) - (2.8)) se identifica con la variedad  $\mathbb{R}$  a través de los difeomorfismos:

$$w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{L}_+^\uparrow \ni \Lambda(w) = \begin{pmatrix} \cosh w & \sinh w \\ \sinh w & \cosh w \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

$$w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{L}_+^\downarrow \ni \Lambda(w) = \begin{pmatrix} -\cosh w & \sinh w \\ \sinh w & -\cosh w \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

$$w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{L}_-^\uparrow \ni \Lambda(w) = \begin{pmatrix} \cosh w & -\sinh w \\ \sinh w & -\cosh w \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

$$w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{L}_-^\downarrow \ni \Lambda(w) = \begin{pmatrix} -\cosh w & -\sinh w \\ \sinh w & \cosh w \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

El grupo  $\mathcal{L}_+^\uparrow(1, 1)$  es un grupo de Lie conmutativo, unidimensional, cuya variedad asociada es  $\mathbb{R}$  y por ende es un grupo no compacto y simplemente conexo. La simplicidad de  $\mathcal{L}_+^\uparrow(1, 1)$  en comparación con (1+3) no solo radica en la simpleconectividad sino también en ser conmutativo. La relación (2.23) es un isomorfismo de grupos de Lie entre el grupo aditivo de los reales y  $\mathcal{L}_+^\uparrow(1, 1) \equiv \mathcal{SO}^\uparrow(1, 1)$ . Conociendo solo  $\mathcal{L}_+^\uparrow(1, 1)$  podemos obtener cualquier elemento del grupo de Lorentz  $\mathcal{L}(1, 1)$  mediante un producto de  $\mathcal{L}_+^\uparrow(1, 1)$  con  $\mathbf{P}$  (inversión espacial o paridad) y  $\mathbf{T}$  (inversión temporal):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_+^\uparrow &= \mathbb{I}_{2 \times 2} \mathcal{L}_+^\uparrow \quad , \\
\mathcal{L}_-^\uparrow &= \mathbf{P} \mathcal{L}_+^\uparrow \quad , \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \\
\mathcal{L}_-^\downarrow &= \mathbf{T} \mathcal{L}_+^\uparrow \quad , \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \\
\mathcal{L}_-^\downarrow &= \mathbf{PT} \mathcal{L}_+^\uparrow \quad , \quad \mathbf{PT} = \mathbf{TP} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .
\end{aligned} \tag{2.27}$$

El grupo restringido de Poincaré  $\Pi_+^\uparrow(1, 1)$  por (2.10) viene dado por:

$$\Pi_+^\uparrow = \mathbb{R}^{(2)} \odot \mathcal{SO}^\uparrow(1, 1) .$$

Este es un grupo de Lie de dimensión tres difeomorfo (globalmente como variedad) a  $\mathbb{R}^3$ , y por lo tanto simplemente conexo, a diferencia del caso en (1+3) y (1+2), por ello no hay razones topológicas para la existencia de representaciones intrínsecamente proyectivas. Debemos examinar ahora si hay razones algebraicas.

### 2.3.1. Álgebra de Lie del grupo restringido de Poincaré $\Pi_+^\uparrow(1, 1)$

El álgebra de Lie de  $\Pi_+^\uparrow(1, 1)$  es un espacio vectorial de dimensión tres (en una base sus elementos independientes son  $P^0, P^1$  y  $M^{01}$ ) que satisface (2.11), y viene dada explícitamente por:

$$\begin{aligned}
i[P^0, P^1]_- &= 0 , \\
i[M^{01}, P^1]_- &= P^0 , \\
i[M^{01}, P^0]_- &= P^1 .
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Como buscamos representaciones proyectivas, el álgebra de Lie debe satisfacer entonces (2.12). Al desarrollar la identidad de Jacobi (2.13), sustituir los corchetes de Lie

y contraer con  $g_{\nu\rho}$  obtenemos:

$$C^{\sigma,\mu} + g_{\nu\rho}g^{\mu\sigma}C^{\rho,\nu} = 0 ,$$

ya que  $\mathbf{g}^{01} = \mathbf{g}^{10} = 0$ , entonces se tiene la condición:

$$C^{\sigma,\mu} = 0 .$$

Repetiendo el paso anterior con la identidad (2.14), se llega a la expresión:

$$C^{\lambda,\mu\sigma} - C^{\sigma,\mu\lambda} - C^{\mu,\lambda\sigma} = 0 ,$$

la cual no nos proporciona información adicional acerca de las cargas centrales.

Las identidades (2.15) y (2.16) se satisfacen automáticamente, (nótese que la carga central  $C^{01,01} = 0$ ), por ende no tenemos ninguna restricción adicional sobre las cargas centrales; y así no podemos redefinir los generadores para eliminar las cargas centrales del álgebra de Lie como lo hicimos en (2.21).

Entonces  $\Pi_+^\uparrow(1, 1)$  debido a su álgebra tendrá representaciones intrínsecamente proyectivas. En este caso la técnica para encontrarlas consiste en extender el grupo  $\Pi_+^\uparrow(1, 1)$  [18], ya que todas las representaciones verdaderas del grupo extendido serán todas las representaciones proyectivas de  $\Pi_+^\uparrow(1, 1)$ .

Como las partículas elementales serán representaciones proyectivas irreducibles del grupo  $\Pi_+^\uparrow(1, 1)$ , queremos conocer todas las representaciones unitarias irreducibles del grupo extendido de  $\Pi_+^\uparrow(1, 1)$ . En vista, de que queremos considerar la teoría cuántica de campos en (1+1) y suponemos que esta describe también partículas, vamos a exponer explícitamente estas representaciones ya calculadas en [18].

Estas representaciones unitarias irreducibles vienen dadas (en la representación de momentum) por la acción de grupo:

$$[U(a, \Lambda)\Psi](p) = e^{i\langle p|a\rangle}\Psi(\Lambda^{-1}p) , \quad (2.29)$$

y son las siguientes (asignadas a cada órbita):

- $\hat{\mathcal{O}}_1 = \{p \in \mathbb{R}^{1,1} \mid \langle p|p\rangle = -\mu^2, p^0 > 0\}$

siendo  $p$  el autovalor del operador momentum cuya primera componente  $p^0$  es la energía y  $\mu$  es la masa.

El espacio de Hilbert donde actúa esta representación es  $L^2(\mathbb{R}, \frac{dp^1}{|p^0|}, \mathbb{C})$ , donde  $\frac{dp^1}{|p^0|}$  con  $|p^0| = \sqrt{(p^1)^2 + \mu^2}$  es la medida invariante Lorentz. El producto escalar está definido por:

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1^*(p^1) \Psi_2(p^1) \frac{dp^1}{(\sqrt{(p^1)^2 + \mu^2}} .$$

Sus representaciones asociadas describen las propiedades de transformación de partículas con masa en reposo  $m = \mu$  y  $p^0 > 0$  (energía positiva).

- $\hat{\mathcal{O}}_2 = \{p \in \mathbb{R}^{1,1} | \langle p | p \rangle = 0, p^1 = p^0 > 0\}$

El espacio de Hilbert donde actúa es  $L^2(\mathbb{R}^+, \frac{dp^1}{p^1}, \mathbb{C})$ , con producto escalar definido por:

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int_0^{\infty} \Psi_1^*(p^1) \Psi_2(p^1) \frac{dp^1}{p^1} .$$

Sus representaciones asociadas describen las propiedades de transformación de partículas con masa cero, con  $p^0 > 0$  (energía positiva) y  $p^1 > 0$  (momentum lineal hacia la derecha). Esta partícula podría interpretarse, por ejemplo, como un “fotón” hacia la derecha.

- $\hat{\mathcal{O}}_3 = \{p \in \mathbb{R}^{1,1} | \langle p | p \rangle = 0, -p^1 = p^0 > 0\}$

El espacio de Hilbert donde actúa es  $L^2(\mathbb{R}^-, \frac{dp^1}{|p^1|}, \mathbb{C})$ , con el producto escalar:

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int_{-\infty}^0 \Psi_1^*(p^1) \Psi_2(p^1) \frac{dp^1}{|p^1|} .$$

Sus representaciones asociadas describen partículas de masa cero, con energía positiva ( $p^0 > 0$ ) y momentum lineal hacia la izquierda ( $p^1 < 0$ ), pudiendo interpretarse, por ejemplo, como un “fotón” hacia la izquierda.

- $\hat{\mathcal{O}}_4 = \{p = 0\}$

El espacio de Hilbert será el de los números complejos, y la acción de grupo vendrá dada por:

$$[U(a, \Lambda)Z] = e^{ilw} Z ,$$

donde  $Z \in \mathbb{C}$ ,  $l \in \mathbb{R}$  es la etiqueta que define la representación del grupo de Lorentz y  $w$  es el parámetro del grupo de Lorentz en (1+1). Sus representaciones asociadas

describen estados invariantes frente al grupo de Poincaré. Todas las representaciones de esta clase son unidimensionales y podrían interpretarse como el espacio vacío o el vacío. Tomaremos, como en (1+3), la representación trivial ( $l = 0$ ) como la que transforma al estado vacío.

Existen otras representaciones [18], sin embargo, puesto que estamos interesados en campos libres, solo deben aparecer representaciones asociadas a partículas libres y esas son, precisamente, las que hemos expuesto. Las otras representaciones podrían ser útiles en teorías con interacción. Finalmente, notemos que estas representaciones asociadas a partículas libres en (1+1) son representaciones verdaderas de  $\Pi_+^\uparrow(1, 1)$ .

## 2.4. Representaciones del grupo y del álgebra de Lie

Como hemos mencionado en la formulación usual de la teoría cuántica de campos (ver sección 1.3), la covariancia de la teoría se prueba, usualmente, a través de la existencia de una representación del álgebra de Lie del grupo de Poincaré en el espacio de Hilbert de la teoría cuántica de campos. Sin embargo, por el teorema de Wigner (ver sección 1.2), cada simetría viene dada por un operador unitario (en este caso) y el problema de la covariancia tiene que discutirse a nivel del grupo de Lie y no del álgebra de Lie. Por supuesto, toda representación del grupo de Lie lleva a una del álgebra de Lie. La cuestión es si lo inverso es cierto. Si este último fuese el caso, la formulación usual sería equivalente con lo exigido por las consecuencias del teorema de Wigner. Sin embargo, esto no es necesariamente cierto.

Queremos demostrar que no toda representación de un álgebra de Lie, de un grupo de Lie, lleva a (o viene de) una representación del grupo de Lie. Aunque sería mejor hacerlo en el caso particular del grupo de Poincaré (el cual es nuestro interés), tendríamos que introducir conceptos técnicos que podrían oscurecer el objetivo (ver, por ejemplo, [19]). Así que, consideraremos otro grupo de Lie con representaciones conocidas que nos permiten aclarar el punto.

Para ver esto, daremos un ejemplo usando el grupo tridimensional [como el de

Poincaré en (1+1)]  $H$  de Heisenberg [16] (con variedad  $\mathbb{R}^3$ ), dado por:

$$H = \left\{ \left( \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; a, b, c \in \mathbb{R} \right) \right\}, \quad (2.30)$$

y con álgebra de Lie  $\mathfrak{h}$  :

$$\mathfrak{h} = \left\{ \left( \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right) \right\}, \quad (2.31)$$

que en una base particular tiene como generadores:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

que lleva a las reglas de conmutación:

$$\begin{aligned} [Q, P]_- &= E, \\ [Q, E]_- &= [P, E]_- = 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Notemos que estas reglas de conmutación son tales que tanto en la mecánica clásica (de un grado de libertad) con el corchete de Poisson, como en la mecánica cuántica con el conmutador, son una representación del álgebra de Lie del grupo de Heisenberg con la posición, el momentum y la identidad como generadores del álgebra. En el caso de la mecánica cuántica, como es usual, se introduce la unidad imaginaria para tener generadores autoadjuntos.

Por lo dicho en el párrafo anterior, una representación infinito dimensional e irreducible de esta álgebra de Lie, en mecánica cuántica básica, es la representación de Schrödinger [20]:

$$\begin{aligned} Q\psi(x) &= x\psi(x) & \forall \psi \in \mathcal{D}(Q) \subset L^2(\mathbb{R}), \\ P\psi(x) &= -i\frac{d\psi(x)}{dx} & \forall \psi \in \mathcal{D}(P) \subset L^2(\mathbb{R}), \\ E &= i\mathbb{I} & \mathbb{I}\psi(x) = \psi(x) \quad \forall \psi \in L^2(\mathbb{R}) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Esta representación del álgebra de Lie viene de una representación unitaria infinito dimensional del grupo  $H$ . Por otra parte, del teorema de Stone-Von Neumann [21] se

sabe que salvo equivalencias unitarias, esta representación del grupo de Heisenberg es única. Sin embargo, en el espacio de Hilbert  $L^2(0, 1)$ , una representación del álgebra de Lie del grupo  $H$  está dada por [20]:

$$\begin{aligned}
 Q\psi(x) &= x\psi(x) & \forall \psi \in L^2(0, 1) , \\
 P\psi(x) &= -i\frac{d\psi(x)}{dx} & \forall \psi \in \mathcal{D}(P) , \\
 E &= i\mathbb{I} & \mathbb{I}\psi(x) = \psi(x) \quad \forall \psi \in L^2(\mathbb{R}) .
 \end{aligned}
 \tag{2.35}$$

Aunque no hemos especificado el dominio del generador de las traslaciones este se puede escoger autoadjunto sin problema [20]. Evidentemente, esta representación no es unitariamente equivalente a la de Schrödinger, porque en  $L^2(\mathbb{R})$ ,  $Q$  no es acotado (su espectro es  $\mathbb{R}$ ) y en  $L^2(0, 1)$ ,  $Q$  es acotado (su espectro es  $[0, 1]$ ). Por lo tanto, la representación en  $L^2(0, 1)$  no viene de una representación unitaria del grupo de Heisenberg.

Vemos así que no es suficiente, en general, el tener una representación del álgebra de Lie del grupo de Poincaré para que se realice la invariancia a nivel cuántico. Condiciones de suficiencia para que esto sea cierto están discutidas, por ejemplo, en la referencia [19].

# Capítulo 3

## Teoría cuántica de campos en la formulación de Wightman en $(1+1)$

Como vimos en la sección 1.3, la formulación lagrangiana de la teoría cuántica de campos es insatisfactoria, física y matemáticamente, por ello históricamente han surgido diversas formulaciones que proporcionan un modelo más acertado de la teoría. A continuación introduciremos la teoría axiomática de Wightman, la cual es matemáticamente rigurosa y tiene unas reglas interpretativas relativamente simples en comparación con otras formulaciones rigurosas (ver, por ejemplo, [13] y [14]). Uno de los problemas de la formulación lagrangiana es que no se especifica qué es demostrable (y qué no lo es). En la teoría de Wightman este problema no existe ya que los axiomas están claramente establecidos. Estos axiomas surgen de una mezcla de la precisión matemática con ideas de la formulación lagrangiana. Wightman formuló sus axiomas para el caso de  $(1+3)$ , nosotros presentamos aquí una extrapolación, obvia, de ellos para el caso de  $(1+1)$ .

### 3.1. Axiomas de Wightman

I.- Los estados de un sistema físico son descritos por rayos unitarios en un espacio de Hilbert  $\mathbb{H}$ .

A cada observable “ $a$ ” se le asocia un operador autoadjunto  $\mathcal{A}$ , y al observable  $f(a)$  se le asocia el operador  $f(\mathcal{A})$  para cualquier función  $f$ . La probabilidad de encontrar el valor del observable “ $a$ ” en un intervalo  $\Delta$  cuando el sistema está en el estado  $\Psi$ ,

viene dado por:

$$W_{\Psi}(a \in \Delta) = \langle \Psi | E_{\mathcal{A}}(\Delta) \Psi \rangle ,$$

donde  $E_{\mathcal{A}}(x)$  es la función espectral asociada a  $\mathcal{A}$ . Esta probabilidad de transición no depende de la representación  $\Psi \in \hat{\Psi}$  (rayo).

II.- Los vectores estado se transforman de acuerdo a una representación unitaria continua y proyectiva (verdadera o intrínsecamente proyectiva) del grupo de Poincaré restringido  $\Pi_+^{\uparrow}(1, 1)$ .

IIIa.- El espectro del operador de energía-momentum  $P^{\mu}$ , pertenece al cono de luz futuro ( $\{ p \mid -p^2 = (p^0)^2 - (p^1)^2 \geq 0, p^0 \geq 0 \}$ ). En particular, para un estado de una partícula el autovalor de  $P^{\mu}$ , pertenece a la hipérbola de masa  $V_m^+$ , es decir,  $V_m^+ = \{ p \mid p^2 = -(p^0)^2 + (p^1)^2 = -m^2, p^0 \geq 0 \}$ . Esto quiere decir, que tenemos energías positivas y masas positivas o cero.

IIIb.-  $p = 0$  es un autovalor no degenerado y discreto del operador  $P$ ; esto es, existe un estado único  $\Theta_0 \in \mathcal{H}$  llamado vacío, para el cual  $P\Theta_0 = 0$ . Este estado es también invariante bajo transformaciones de Poincaré  $\{a, \Lambda\}$ :

$$U(a, \Lambda)\Theta_0 = \Theta_0 \quad \forall \quad \{a, \Lambda\} \in \Pi_+^{\uparrow} .$$

IIIc.- Existe a lo sumo un número finito de autovalores positivos discretos  $m_j$  del operador de masa  $\sqrt{-P^2}$  ( $0 < m_1 = m < m_2 < \dots$ ) correspondiente a los estados que tienen una sola partícula (estable) y un espectro continuo para  $\sqrt{-P^2} \geq 2m$ .

Los axiomas precedentes son muy generales. Necesitamos concretar la teoría a través del concepto de campo cuántico. Por lo mencionado en la sección 1.3, al contrario de la versión clásica, los campos cuánticos no pueden ser funciones de los puntos del espacio-tiempo. Se define un campo cuántico como una distribución a valor operadores. Tal definición se corresponde mejor a la situación física real en comparación con la definición usual de un campo definido en cada punto del espacio-tiempo. En realidad en un experimento el campo es siempre medido en una región del espacio y en un intervalo finito de tiempo (no en un punto del espacio-tiempo). En la formulación de

Wightman en (1+1) se define un campo cuántico como una distribución a valor operador con índices que se transforman de acuerdo a una representación de  $\mathcal{SO}^\uparrow(1, 1)$ ,  $V(\Lambda)$ .

Así un campo es una cantidad tensorial de varias componentes  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_r)$ , las cuales se transforman bajo el grupo  $\mathcal{SO}^\uparrow(1, 1)$ . En lugar de considerar el tensor  $\phi$  como un conjunto de  $r$  distribuciones definidas sobre el espacio de Schwartz  $S(\mathbb{R}^2)$ , es conveniente considerar al campo como un funcional definido sobre el espacio de funciones de prueba “vectoriales”  $\vec{f} = (f_1(x), \dots, f_r(x)) \in S_r(\mathbb{R}^2)$ , donde  $f_j(x) \in S(\mathbb{R}^2)$ :

$$\phi(\vec{f}) = \sum_{j=1}^r \phi_j(f_j) .$$

Estos dos puntos de vista son equivalentes.

Ahora bien, un operador lineal  $\phi(\vec{f})$  en el espacio  $\mathcal{H}$  de vectores de estado, definido para todo  $\vec{f} \in S_r(\mathbb{R}^2)$ , es llamado un campo cuántico, si satisface los siguientes axiomas:

IVa.- Todos los operadores  $\phi(\vec{f})$  y  $\phi^*(\vec{f})$  tienen un dominio invariante común  $\Omega$  (independiente de  $\vec{f} = (f_1(x), \dots, f_r(x)) \in S_r(\mathbb{R}^2)$ ), el cual es una variedad lineal, denso en  $\mathcal{H}$ , que contiene al vector vacío  $\Theta_0 \in \Omega$

$$\phi(\vec{f})\Omega, \phi^*(\vec{f})\Omega \subset \Omega \quad \forall \quad \vec{f} \in S_r(\mathbb{R}^2) .$$

IVb.- El operador  $\phi(\vec{f})$  es lineal en  $\vec{f}$ :

$$\phi(\alpha\vec{f} + \beta\vec{g}) = \alpha\phi(\vec{f}) + \beta\phi(\vec{g}) ,$$

por esta propiedad podemos usar la notación simbólica:

$$\phi(\vec{f}) = \sum_{j=1}^r \phi_j(f_j) = \sum_{j=1}^r \int \phi_j(x) f_j(x) d^2x . \quad (3.1)$$

IVc.- El operador  $\phi(\vec{f})$ , como función de  $\vec{f}$  satisface la condición de continuidad débil; esto es si  $\Phi$  y  $\Psi$  son vectores en  $\Omega$ , entonces  $\langle \Phi | \phi(\vec{f}) \Psi \rangle$  es una distribución (a valor complejo) en  $S_r^*(\mathbb{R}^2)$  .

Como queremos que la teoría sea relativista especial, se debe realizar una representación proyectiva del grupo de Poincaré, según lo discutido en la sección 1.2 . Así, los campos deben cumplir además con el siguiente axioma:

V.- Sea  $U(a, \Lambda)$  una representación proyectiva unitaria del grupo de Poincaré que actúa en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Entonces los operadores  $U(a, \Lambda)$  dejan invariante el dominio común  $\Omega$  de los campos:

$$U(a, \Lambda) \Omega \subset \Omega .$$

Los campos obedecen la ley de transformación:

$$\phi \left( \vec{f}_{\{a, \Lambda\}} \right) = U(a, \Lambda) \phi(\vec{f}) U^{-1}(a, \Lambda) ,$$

donde

$$\left( \vec{f}_{\{a, \Lambda\}}(x) \right)_i \equiv \sum_{j=1}^r V_{ji}(\Lambda^{-1}) f_j(\Lambda^{-1}(x - a)) ,$$

siendo  $V(\Lambda)$  una representación r-dimensional del grupo restringido de Lorentz. Esto significa que el campo cuantizado se transforma con  $U(a, \Lambda)$  consistente con las leyes de transformación del campo clásico que se cuantiza. En particular, la dinámica está incluida en la relatividad vía el  $U(a, \mathbb{I})$  con  $a = (t, 0)$ .

VI.- Si los soportes de las funciones vectoriales  $\vec{f}$  y  $\vec{g}$  están separados por un intervalo tipo espacio, esto es:

$$f_i(x)g_j(y) = 0 \quad \text{si} \quad (x - y)^2 > 0 , \quad i, j = 1, \dots, r ,$$

entonces los operadores  $\phi(\vec{f})$  y  $\phi(\vec{g})$  aplicados sobre vectores en  $\Omega$ , conmutan o anticonmutan:

$$\left[ \phi(\vec{f}), \phi(\vec{g}) \right]_{\mp} = \left[ \phi(\vec{f}), \phi^*(\vec{g}) \right]_{\mp} = 0 ,$$

donde:

$$\begin{aligned} [\phi(\vec{f}), \phi(\vec{g})]_- &\equiv \phi(\vec{f})\phi(\vec{g}) - \phi(\vec{g})\phi(\vec{f}) , \\ [\phi(\vec{f}), \phi(\vec{g})]_+ &\equiv \phi(\vec{f})\phi(\vec{g}) + \phi(\vec{g})\phi(\vec{f}) . \end{aligned}$$

Simbólicamente se tendría:

$$[\phi_j(x), \phi_k(y)]_{\mp} = [\phi_j(x), \phi_k^*(y)]_{\mp} = 0 \quad \text{si} \quad (x - y)^2 > 0 . \quad (3.2)$$

Como se sabe para el caso de (1+3), para la consistencia de los axiomas el conmutador se corresponde con campos tensoriales (bosones), los cuales se transforman con una representación univaluada (verdadera) de  $\mathcal{SO}_+^{\uparrow}$ , y el anticonmutador con el campo espinorial (fermiones). Este es uno de los éxitos de la formulación axiomática (el teorema de espín-estadística) de Wightman. En nuestro caso de (1+1) el grupo de Lorentz no tiene representaciones espinoriales como ya hemos comentado. De manera que no se puede formular un teorema de espín-estadística en (1+1) como en el caso de (1+3) ( lo cual no descarta otras posibles interpretaciones para recuperar una “especie” de espín-estadística [22] ).

El último axioma tiene que ver con que los campos formen un conjunto completo de operadores en el espacio de vectores de estado. Esto se puede ver como que el álgebra generada por los polinomios finitos (pero arbitrarios) de los operadores de campos y sus adjuntos, a este conjunto lo denotaremos  $\mathcal{P}(\phi; \vec{f})$ , al actuar sobre el estado vacío  $\Theta_0$  (definido en el axioma III) genera un subespacio denso de  $\mathcal{H}$ , esto es, tenemos un conjunto completo de vectores a partir de  $\mathcal{P}(\phi; \vec{f})$  actuando sobre  $\Theta_0$ . Como último axioma tenemos:

VII.- El conjunto de vectores de la forma:

$$\mathcal{P}(\phi; \vec{f})\Theta_0 \quad , \quad \vec{f} \in S_r(\mathbb{R}^2) \quad ,$$

donde el vector  $\Theta_0$  es el vacío, es denso en  $\mathcal{H}$ .

En los capítulos 6, 7 y 8 se aplica la teoría de Wightman para varios tipos de campo en (1+1) dimensiones con la finalidad de verificar su coherencia.

## Capítulo 4

# Campo escalar neutro y masivo libre en (1+1)

Un campo escalar neutro  $\phi(f)$  es un campo hermítico libre de masa  $m$  que para todo  $f, g \in S(\mathbb{R}^2)$  obedece la ecuación:

$$\phi(Kf) = 0, \quad (4.1)$$

con  $K = \square^2 - m^2 \equiv -\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - m^2$  el operador de Klein-Gordon; y la relación de conmutación:

$$[\phi(f), \phi(g)]_- = -i \int \int f(x) D(x-y) g(y) dx^2 dy^2, \quad (4.2)$$

donde  $D(x) = D(x^0 = t, x^1)$  es la función conmutador de Pauli-Jordan, la cual satisface:

$$KD(x) = 0 \quad \text{y} \quad D(0, x^1) = 0; \quad \left[ \frac{\partial}{\partial t} D(t, x^1) \right]_{t=0} = \delta(x^1),$$

entonces la función conmutador viene dado de manera integral por:

$$D(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{V_m^+} \sin(p^0 x^0) e^{-ip^1 \cdot x^1} (dp) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{V_m^+} \sin(\langle p|x \rangle) (dp), \quad (4.3)$$

con  $(dp) = \frac{dp^1}{p^0}$  la medida invariante sobre la hipérbola  $V_m^+$ .

Nótese que la relación (4.2) se anula cuando  $f$  y  $g$  están separados por un intervalo tipo espacio, verificando así el axioma VI.

Los operadores  $\phi(f)$  que satisfacen (4.1) y (4.2) existen, como veremos a continuación definiendo el espacio de Hilbert de vectores de estado, esto es,  $\mathcal{H}$  de acuerdo al axioma I y el dominio  $\Omega$  común de estos operadores (según el axioma IVa).

Los vectores de estado  $\Psi$ , están representados como una sucesión de funciones:

$$\Psi = \{\Psi_0, \dots, \Psi_n(p_1, \dots, p_n), \dots\}, \quad (4.4)$$

cada una de ellas definida sobre un producto de hipérbolas  $V_m^+$  :

$$V_m^{+(n)} = V_m^+ \times V_m^+ \times \dots .$$

El vector :

$$\Psi = \{0, \dots, 0, \Psi_n(p_1, \dots, p_n), 0, \dots, 0, \dots\}$$

describe un estado con  $n$  partículas.

El producto escalar de vectores estado  $\Psi$  en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  es:

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \overline{\Psi}_0 \Phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \int_{V_m^+} (dp_1) \dots \int_{V_m^+} (dp_n) \overline{\Psi}_n(p_1, \dots, p_n) \Phi_n(p_1, \dots, p_n) . \quad (4.5)$$

Por ende, el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  es la suma directa de espacios de Hilbert ortogonales  $\mathcal{H}_n$  de estados de  $n$  partículas ( $n = 0, 1, \dots$ ) (conocido popularmente como espacio de Fock).

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n \oplus \dots \quad (4.6)$$

y  $\mathcal{H}_n$  esta definido como el producto tensorial simetrizado de  $\mathcal{H}_1$ :

$$\mathcal{H}_n = \text{sim} \mathcal{H}_1^{\otimes n} . \quad (4.7)$$

Por esto la función  $\Psi_n(p_1, \dots, p_n)$  tiene que ser completamente simétrica:

$$\Psi_n(p_1, \dots, p_i, \dots, p_j, \dots, p_n) = \Psi_n(p_1, \dots, p_j, \dots, p_i, \dots, p_n) . \quad (4.8)$$

Necesitamos construir una representación unitaria de  $\Pi_+^\uparrow(1, 1)$ . La ley de transformaciones de los vectores  $\Psi$  bajo una transformación de Poincaré  $\{a, \Lambda\} \in \Pi_+^\uparrow(1, 1)$  la definimos como [para cada  $\mathcal{H}_n$ , es un producto tensorial de la representación (2.29) de una partícula]:

$$U(a, \Lambda)\Psi = \{\Psi_0, e^{i\langle p_1 | a \rangle} \Psi_1(\Lambda^{-1} p_1), \dots, e^{i\langle (p_1 + \dots + p_n) | a \rangle} \Psi_n(\Lambda^{-1} p_1, \dots, \Lambda^{-1} p_n), \dots\} . \quad (4.9)$$

Esta acción está definida para todo  $\Psi \in \mathcal{H}$ . Es fácil verificar que:

$$\langle U(a, \Lambda)\Psi | U(a, \Lambda)\Phi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle ,$$

para todo  $\Psi, \Phi \in \mathcal{H}$ . Esto es,  $U(a, \Lambda)$  es una isometría. Faltaría por demostrar que su rango es todo  $\mathcal{H}$ , pero evidentemente los vectores de la forma del lado derecho de (4.9) son de la forma (4.4) y representan un conjunto denso en  $\mathcal{H}$ . Por lo tanto tenemos que se satisface el axioma II de la teoría.

La acción del operador de campo  $\phi(f)$  la vamos a definir sobre un conjunto  $\Omega$  (su dominio común del axioma IVa) a través de operadores de creación y destrucción de partículas.

Definamos un operador de campo en función de los operadores de “creación” y “destrucción”,  $a^*(u)$  y  $a(u)$ , con  $u(p^1) \in S(\mathbb{R})$  como (por analogía con el oscilador armónico) :

$$\phi(f) = \sqrt{2\pi} \left[ a^*(\tilde{f}(-p)) + a(\tilde{f}(p)) \right], \quad (4.10)$$

donde  $\tilde{f}(p)$  es la transformada de Fourier de  $f(x)$ :

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{2\pi} \int f(x) e^{-i\langle p|x \rangle} d^2x .$$

Estos operadores obedecen las siguientes relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} [a(u), a(v)]_- &= 0 \\ [a(u), a^*(\bar{v})]_- &= \frac{1}{2} \int \overline{v(p^1)} u(p^1) (dp), \end{aligned}$$

y actúan sobre los vectores estados  $\Psi \in \Omega$ :

$$(a^*(u)\Psi)_n(p_1, \dots, p_n) = \sum_{j=1}^n u(p^1_j) \Psi_{n-1}(p_1, \dots, \hat{p}_j, \dots, p_n),$$

$$(a(u)\Psi)_n(p_1, \dots, p_n) = \frac{1}{2} \int_{V_m^+} u(p^1) \Psi_{n+1}(p, p_1, \dots, p_n) (dp),$$

esto define una acción sobre un subespacio  $\Omega$  de  $\mathcal{H}$ . La forma explícita de  $\Omega$  y sus propiedades (densidad en  $\mathcal{H}$ ) no la vamos a considerar debido a las complicaciones técnicas involucradas. Sin embargo, el hecho de que estos operadores tienen un dominio denso en  $\mathcal{H}$  se inspira en el caso de operadores de creación y destrucción para el oscilador armónico unidimensional de mecánica cuántica elemental. Allí es claro que estos operadores actúan sobre un subespacio de  $\mathcal{H}$ , que es un dominio común a la posición y el momentum. No entraremos en más detalles sobre  $\Omega$ , aunque esto es muy importante, lo ignoraremos de ahora en adelante.

De aquí observamos que  $a^*(u)$  actúa como un operador de creación de partículas y  $a(u)$  como un operador de destrucción de partículas. De hecho, sea el estado vacío  $\Psi = \Theta_0 = (1, 0, \dots, 0, \dots)$ , entonces:

$$\begin{aligned} a^*(u)\Theta_0 &= (0, u(p^1), 0, \dots, 0) , \\ a(u)\Theta_0 &= 0 . \end{aligned} \tag{4.11}$$

También podemos definirlos de manera simbólica , ya que:

$$a(u) = \frac{1}{2} \int a(p^1)u(p^1)(dp) ,$$

y estos obedecen las relaciones de conmutación (simbólicas):

$$\begin{aligned} [a(p^1), a(q^1)] &= 0 , \\ [a(p^1), a^*(q^1)] &= 2p^0\delta(p^1 - q^1) , \end{aligned}$$

como es estándar en la formulación lagrangiana.

Por ende, el campo simbólico equivalente a la relación (4.10) y que satisface la ecuación  $K\phi(x) \equiv (\square^2 + m^2)\phi(x) = 0$ , quedaría expresado como:

$$\phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{V_m^+} [a(p^1)e^{-i\langle p|x\rangle} + a^*(p^1)e^{i\langle p|x\rangle}] (dp) .$$

La acción del operador de campo  $\phi(f)$  sobre los vectores del dominio común viene dada por:

$$\phi(f)\Psi \equiv \chi , \tag{4.12}$$

de manera tal que:

$$\begin{aligned} \chi_n(p_1, \dots, p_n) &\equiv \\ (\phi(f)\Psi)_n(p_1, \dots, p_n) &= \sqrt{2\pi} \left[ \int \frac{1}{2} \tilde{f}(p) \Psi_{n+1}(p, p_1, \dots, p_n)(dp) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^n \tilde{f}(-p_j) \Psi_{n-1}(p_1, \dots, \hat{p}_j, \dots, p_n) \right] , \end{aligned} \tag{4.13}$$

donde el símbolo  $\hat{\phantom{p}}$  sobre  $p_j$  indica que esa variable debe ser omitida y  $\tilde{f}(p)$  es la transformada de Fourier de  $f(x)$ .

En particular, sea el estado vacío  $\Psi \equiv \Theta_0 = (1, 0, \dots, 0, \dots)$ , entonces:

$$\phi(f)\Theta_0 = \sqrt{2\pi}(0, \tilde{f}(-p_1), 0, \dots) .$$

Para verificar que (4.13) satisface (4.1) hallamos la transformada de Fourier de  $Kf(x)$ , esto es:

$$\widetilde{Kf}(p) = \frac{1}{2\pi} \int (Kf(x))e^{-i\langle p|x \rangle} d^2x = \frac{-1}{2\pi}(p^2 + m^2)\tilde{f}(p) = 0 ,$$

ya que  $p^2 + m^2 = 0$  . Entonces por (4.13):

$$(\phi(Kf)\Psi)_n(p_1, \dots, p_n) = \sqrt{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \int \widetilde{Kf}(p)\Psi_{n+1}(p, p_1, \dots, p_n)(dp) + \sum_{j=1}^n \widetilde{Kf}(-p_j)\Psi_{n-1}(p_1, \dots, \hat{p}_j, \dots, p_n) \right] = 0 , \quad (4.14)$$

esto es, se satisface (4.1).

Observamos que los campos también satisfacen la relación de conmutación (4.2):

$$\Gamma_n(p_1, \dots, p_n) \equiv (\phi(f)\Psi)_n(p_1, \dots, p_n) = \sqrt{2\pi} \left[ \int \frac{1}{2}\tilde{f}(p)\Psi_{n+1}(p, p_1, \dots, p_n)(dp) + \sum_{j=1}^n \tilde{f}(-p_j)\Psi_{n-1}(p_1, \dots, \hat{p}_j, \dots, p_n) \right] ,$$

$$(\phi(g)\Gamma)_n(p_1, \dots, p_n) = \sqrt{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \int \tilde{g}(q)\Gamma_{n+1}(q, p_1, \dots, p_n)(dp) + \sum_{k=1}^n \tilde{g}(-p_k)\Gamma_{n-1}(p_1, \dots, \hat{p}_k, \dots, p_n) \right] ,$$

al sustituir se tiene :

$$\begin{aligned} & (\phi(g)\phi(f)\Psi)_n(p_1, \dots, p_n) = \\ & 2\pi \left[ \frac{1}{4} \int \int (dq)(dp)\tilde{g}(q)\tilde{f}(p)\Psi_{n+2}(q, p, p_1, \dots, p_n) \right. \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \int (dq)\tilde{g}(q)\tilde{f}(-p_j)\Psi_n(q \equiv p_0, \dots, \hat{p}_j, \dots, p_n) \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int (dp)\tilde{f}(p)\tilde{g}(-p_k)\Psi_n(p, p_1, \dots, \hat{p}_k, \dots, p_n) \\ & \quad \left. + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1, j \neq k}^{n-1} \tilde{g}(-p_k)\tilde{f}(-p_j)\Psi_{n-2}(p_1, \dots, \hat{p}_k, \dots, \hat{p}_j, \dots, p_n) \right] . \end{aligned}$$

Procediendo de manera similar se obtiene:

$$\begin{aligned} & -(\phi(f)\phi(g)\Psi)_n(p_1, \dots, p_n) = \\ & -2\pi \left[ \frac{1}{4} \int \int (dq)(dp)\tilde{f}(q)\tilde{g}(p)\Psi_{n+2}(q, p, p_1, \dots, p_n) \right. \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \int (dq)\tilde{f}(q)\tilde{g}(-p_j)\Psi_n(q \equiv p_0, \dots, \hat{p}_j, \dots, p_n) \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int (dp)\tilde{g}(p)\tilde{f}(-p_k)\Psi_n(p, p_1, \dots, \hat{p}_k, \dots, p_n) \\ & \quad \left. + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1, j \neq k}^{n-1} \tilde{f}(-p_k)\tilde{g}(-p_j)\Psi_{n-2}(p_1, \dots, \hat{p}_k, \dots, \hat{p}_j, \dots, p_n) \right] . \end{aligned}$$

Al sumar y simplificar se verifica la relación de conmutación (4.2):

$$\begin{aligned}
([\phi(g), \phi(f)]_- \Psi)_n(p_1, \dots, p_n) &= \int (dq) \Psi_n(p_1, \dots, p_n) \left[ \tilde{g}(q) \tilde{f}(-q) - \tilde{f}(q) \tilde{g}(q) \right] \\
&= \frac{\pi}{(2\pi)^2} \int \int \int_{V_m^+} g(x) f(y) [e^{i\zeta} - e^{-i\zeta}] d^2x d^2y (dq) , \\
&= -i \int \int f(x) D(x-y) g(y) d^2x d^2y
\end{aligned}$$

con  $\zeta \equiv \zeta(x, y, q) = \langle q | (x - y) \rangle$ .

Falta comprobar el axioma V de la teoría. En particular debemos probar que:

$$U(a, \Lambda) \phi(\vec{f}) U^{-1}(a, \Lambda) = \phi\left(\vec{f}_{\{a, \Lambda\}}\right) , \quad (4.15)$$

donde  $U(a, \Lambda)$  ya la hemos definido por (4.9). Para ello hacemos actuar esta relación sobre un vector  $\Psi$ , desarrollando el lado derecho paso por paso obtenemos:

$$\zeta_n(p_1, \dots, p_n) \equiv (U^{-1}(a, \Lambda) \Psi)_n(p_1, \dots, p_n) = e^{-i\langle p_1 + \dots + p_n | \Lambda^{-1} a \rangle} \Psi_n(\Lambda p_1, \dots, \Lambda p_n) ,$$

ya que  $U^{-1}(a, \Lambda) = U(-\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1})$ .

$$\begin{aligned}
\eta_n(p_1, \dots, p_n) &\equiv (\phi(f) \zeta)_n(p_1, \dots, p_n) = \\
&\sqrt{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \int (dp) \tilde{f}(p) e^{-i\langle p + p_1 + \dots + p_n | \Lambda^{-1} a \rangle} \Psi_{n+1}(\Lambda p, \Lambda p_1, \dots, \Lambda p_n) \right. \\
&\quad \left. \sum_{j=1}^n \tilde{f}(-p_j) e^{-i\langle p_1 + \dots + \hat{p}_j + \dots + p_n | \Lambda^{-1} a \rangle} \Psi_{n-1}(\Lambda p_1, \dots, \widehat{\Lambda p_j}, \dots, \Lambda p_n) \right] ,
\end{aligned}$$

por último:

$$\begin{aligned}
\xi_n(p_1, \dots, p_n) &\equiv (U(a, \Lambda) \eta)_n(p_1, \dots, p_n) = \\
&e^{i\langle p_1 + \dots + p_n | a \rangle} \sqrt{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \int (dp) \tilde{f}(p) e^{-i\langle p + \Lambda^{-1} p_1 + \dots + \Lambda^{-1} p_n | \Lambda^{-1} a \rangle} \Psi_{n+1}(\Lambda p, p_1, \dots, p_n) \right. \\
&\quad \left. \sum_{j=1}^n \tilde{f}(-p_j) e^{-i\langle \Lambda^{-1} p_1 + \dots + \Lambda^{-1} \hat{p}_j + \dots + \Lambda^{-1} p_n | \Lambda^{-1} a \rangle} \Psi_{n-1}(p_1, \dots, \hat{p}_j, \dots, p_n) \right] ,
\end{aligned}$$

al simplificar, usando la invariancia Lorentz de la medida  $(dp)$  y del producto escalar, se obtiene :

$$\begin{aligned}
\xi_n(p_1, \dots, p_n) &\equiv (U(a, \Lambda) \phi(f) U^{-1}(a, \Lambda) \Psi)_n(p_1, \dots, p_n) = \\
&\sqrt{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \int (dp) \tilde{f}(p) e^{-i\langle p | a \rangle} \Psi_{n+1}(p, p_1, \dots, p_n) \right. \\
&\quad \left. \sum_{j=1}^n \tilde{f}(-p_j) e^{i\langle p_j | a \rangle} \Psi_{n-1}(p_1, \dots, \hat{p}_j, \dots, p_n) \right] .
\end{aligned}$$

Por otro lado, al hacer actuar el lado derecho de la ecuación (4.15) a un vector de estado, y observando que para el campo escalar  $g(x) \equiv f_{\{a,\Lambda\}}(x) = f(\Lambda^{-1}(x - a))$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \tau_n(p_1, \dots, p_n) \equiv (\phi(g)\Psi)_n(p_1, \dots, p_n) = \\ \sqrt{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \int (dp) \tilde{g}(p) \Psi_{n+1}(p, p_1, \dots, p_n) \right. \\ \left. \sum_{j=1}^n \tilde{g}(-p_j) \Psi_{n-1}(p_1, \dots, \hat{p}_j, \dots, p_n) \right], \end{aligned}$$

ahora bien, al calcular la transformada de Fourier de  $g(x)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{g}(p) = \frac{1}{2\pi} \int f(\Lambda^{-1}(x - a)) e^{-i\langle p|x \rangle} dx^2 = \\ \frac{1}{2\pi} \int f(x) e^{-i\langle \Lambda^{-1}p|x \rangle} e^{-i\langle p|a \rangle} dx^2 = e^{-i\langle p|a \rangle} \tilde{f}(\Lambda^{-1}p), \end{aligned}$$

y sustituir en la relación anterior, tenemos que  $\xi_n = \tau_n$ , por ende se satisface (4.15) y así el axioma V de la teoría.

Finalmente, haciendo uso de los operadores simbólicos  $a^*(p^1)$  y  $a(p^1)$  (ya “definidos”), y con el objeto de entender en qué sentido se puede interpretar la forma usual de estos operadores (en la formulación lagrangiana), notemos que el operador  $a^*(p^1)$  puede reescribirse como:

$$a^*(p^1) = \int p^0 \delta(p^1 - q^1) a^*(q^1) (dq) = a^*[p^0 \delta(p^1 - q^1)].$$

Así, a la distribución  $p^0 \delta(p^1 - q^1)$  ( $p^0 = \sqrt{(p^1)^2 + m^2}$ , con  $p^1$  dado), se le asocia el operador  $a^*(p^1)$ . Entonces al aplicar este operador sobre el estado vacío, por (4.11) obtenemos:

$$a^*(p^1)\Theta_0 = [0, p^0 \delta(p^1 - q^1), 0, \dots].$$

Podemos denotar los estados generalizados con momenta definidos para todas las partículas como:

$$|p^1_1 \dots p^1_n \rangle = p^0_1 \dots p^0_n \sum_{\{i\}} \delta(q^1_1 - p^1_{i_1}) \dots \delta(q^1_n - p^1_{i_n}), \quad (4.16)$$

donde la suma se extiende sobre todas las permutaciones  $\{i\} = \{i_1, \dots, i_n\}$  de los números  $(1, \dots, n)$ , y  $p^0_j = \sqrt{(p_j)^2 + m^2}$  y el “producto escalar” de dos estados de esta

forma viene dado por:

$$\langle p_1' \dots p_r' | p_1 \dots p_n \rangle = \delta_{rn} p_1^0 \dots p_n^0 \sum_{\{i\}} \delta(p_1^1 - p_{i_1}^1) \dots \delta(p_n^1 - p_{i_n}^1) .$$

Así, haciendo corresponder al vacío  $\Theta_0$  con  $|0\rangle$ , obtenemos (4.16) aplicando el operador  $a^*(p^1)$  al vacío:

$$|p_1^1 \dots p_n^1 \rangle = a^*(p_1^1) \dots a^*(p_n^1) |0\rangle = p_1^0 \dots p_n^0 \sum_{\{i\}} \delta(p_1^1 - q_{i_1}^1) \dots \delta(p_n^1 - q_{i_n}^1) .$$

Lo cual se corresponde de manera no rigurosa con el axioma VII.

Es de notar que al aplicar el producto normal  $a^*(p^1)a(p^1)$  a un vector de estado:

$$(a^*(p^1)a(p^1)\Psi)_n(p_1, \dots, p_n) = 2p^0 \sum_{j=1}^n \delta(p^1 - p_j^1) \Psi_n(p_1, \dots, p_n) , \quad (4.17)$$

lo cual puede interpretarse como la densidad de número de partículas, entonces podemos definir el operador de número de partículas mediante:

$$N = \frac{1}{2} \int a^*(p^1)a(p^1)(dp) . \quad (4.18)$$

Esta última relación nos permite identificar algunas de las variables dinámicas del sistema, como lo es el operador momentum total con:

$$P^\mu = \frac{1}{2} \int a^*(p^1)a(p^1)p^\mu(dp) .$$

Es claro, por construcción de  $\mathcal{H}$ , que el espectro de  $P^\mu$  satisface los axiomas III. En particular IIIc se satisface con un solo autovalor  $m$  discreto para  $\sqrt{-P^2}$  y espectro continuo [que empieza cuando tenemos estados de dos partículas:  $p = p_1 + p_2 \Rightarrow p^2 \leq -(m+m)^2$ ] en el intervalo  $[2m, \infty)$ .

Se puede ver que los axiomas del tipo IV y VII son satisfechos si se sigue la construcción hecha en (1+3) (ver, por ejemplo, [1]. Esto no lo consideraremos aquí ya que envuelve aspectos técnicos que superan los objetivos de este trabajo).

## Capítulo 5

# Campo escalar cargado y masivo libre en (1+1)

Un campo escalar cargado es descrito por operadores no hermíticos, a diferencia del campo escalar neutro (definido en la sección anterior). Así, tenemos un campo escalar libre y complejo definido por una distribución a valor operador  $\phi(f)$  que obedece tanto la ecuación de Klein-Gordon (4.1) como las siguientes relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} [\phi(f), \phi(g)]_- &= [\phi^*(f), \phi^*(g)]_- = 0, \\ [\phi^*(f), \phi(g)]_- &= [\phi(f), \phi^*(g)]_- = -i \int \int f(x) D(x-y) g(y) dx^2 dy^2. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Como las relaciones (5.1) son invariantes bajo una transformación de fase (lo cual no ocurre en el caso del campo escalar neutro):

$$\begin{aligned} \phi(f) &\rightarrow e^{i\lambda} \phi(f), \\ \phi^*(f) &\rightarrow e^{-i\lambda} \phi^*(f), \end{aligned}$$

podemos asociar con el campo  $\phi(f)$  una carga conservada “ $e$ ”. Así, un estado de una partícula en  $\mathcal{H}$  consiste en nuestro caso de funciones  $\Psi(p, e)$  definidas sobre la hipérbola  $V_m^+$ , donde la carga puede ser positiva o negativa  $e = \pm$ . Por definición las funciones de diferente carga son ortogonales entre sí. Además una suma de funciones con cargas totales de diferente signo no es un estado físico realizable, ya que la carga define una regla de superselección. Por construcción el espacio  $\mathcal{H}_1$  se descompone en una suma directa de dos subespacios irreducibles:

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_{1+} \oplus \mathcal{H}_{1-}.$$

El espacio de estados de  $n$  partículas de una misma carga total viene dado por (4.7). Entonces el vector de estado  $\Psi \in \mathcal{H}$  será:

$$\Psi = \{ \Psi_0, \dots, \Psi_n(p_1, e_1; \dots; p_n, e_n), \dots \},$$

y la función  $\Psi_n(p_1, e_1; \dots; p_n, e_n)$  es simétrica con respecto a la permutación de los argumentos  $(p_j, e_j)$ .

La acción de  $\phi(f)$  sobre este vector estado viene dada por:

$$(\phi^*(f)\Psi)_n(p_1, e_1; \dots; p_n, e_n) = \sqrt{2\pi} \left[ \int \frac{1}{2} \tilde{f}(p) \Psi_{n+1}(p, +; p_1, e_1, \dots, p_n, e_n)(dp) + \sum_{j=1}^n \delta_{+,e_j} \tilde{f}(-p_j) \Psi_{n-1}(p_1, e_1; \dots; \widehat{p_j, e_j}; \dots; p_n, e_n) \right],$$

$$(\phi(f)\Psi)_n(p_1, e_1; \dots; p_n, e_n) = \sqrt{2\pi} \left[ \int \frac{1}{2} \tilde{f}(p) \Psi_{n+1}(p, -; p_1, e_1; \dots; p_n, e_n)(dp) + \sum_{j=1}^n \delta_{-,e_j} \tilde{f}(-p_j) \Psi_{n-1}(p_1, e_1; \dots; \widehat{p_j, e_j}; \dots; p_n, e_n) \right],$$

donde por definición, el operador  $\phi^*$  incrementa la carga del sistema y  $\phi$  la disminuye. Se puede demostrar de manera análoga a la sección anterior, que estos operadores de campo satisfacen la ecuación de Klein-Gordon (4.1) y las relaciones de conmutación (5.1).

En particular, sea el estado vacío  $\Psi = \Theta_0 = (1, 0, \dots, 0, \dots)$ , entonces el campo actúa como:

$$\begin{aligned} \phi^*(f)\Theta_0 &= \sqrt{2\pi}(0, \tilde{f}(-p_1)\delta_{+,e}, 0, \dots), \\ \phi(f)\Theta_0 &= \sqrt{2\pi}(0, \tilde{f}(-p_1)\delta_{-,e}, 0, \dots). \end{aligned}$$

De manera simbólica, el campo se expresa:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{V_m^+} [a^{(+)}(p^1)e^{-i\langle p|x\rangle} + a^{*(-)}(p^1)e^{i\langle p|x\rangle}] (dp), \\ \phi^*(x) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{V_m^+} [a^{*(+)}(p^1)e^{i\langle p|x\rangle} + a^{(-)}(p^1)e^{-i\langle p|x\rangle}] (dp), \end{aligned}$$

donde  $a^{*(+)}$  y  $a^{(+)}$  son los operadores de creación y aniquilación de partículas con carga positiva; mientras que  $a^{*(-)}$  y  $a^{(-)}$  son los operadores de creación y aniquilación de partículas con carga negativa.

Con esto podemos definir el operador de número de partícula:

$$N = \frac{1}{2} \int [a^{*(+)}(p^1)a^{(+)}(p^1) + a^{*(-)}(p^1)a^{(-)}(p^1)] (dp) ,$$

y así obtenemos el operador de momentum total  $P^\mu$  y el operador de carga  $Q$  :

$$P^\mu = \frac{1}{2} \int p^\mu [a^{*(+)}(p^1)a^{(+)}(p^1) + a^{*(-)}(p^1)a^{(-)}(p^1)] (dp) ,$$

$$Q = \frac{1}{2} \int [a^{*(+)}(p^1)a^{(+)}(p^1) - a^{*(-)}(p^1)a^{(-)}(p^1)] (dp) .$$

La representación unitaria  $U(a, \Lambda)$  se define, análogamente a (4.9) actuando sobre los vectores de  $\mathcal{H}$  independientemente de los índices de la carga. Por lo que la consistencia con los axiomas de covariancia es clara. La verificación de los otros axiomas es clara de la teoría del campo escalar neutro por extensión.

## Capítulo 6

# Campo de Dirac cargado y masivo libre en $(1+1)$

El campo espinorial cargado en  $(1+3)$  aparece debido a que el grupo de Poincaré tiene representaciones proyectivas no verdaderas asociadas a partículas o campos. Concretamente estas representaciones usualmente están conectadas con la representación irreducible de masa  $m$  y espín  $\frac{1}{2}$  (aunque son posibles otros valores de masa y espín). En  $(1+1)$ , como hemos visto en la sección 2.3.1, no aparecen representaciones proyectivas no verdaderas conectadas con partículas. No hay manera de hablar de espinores en  $(1+1)$ , al menos en el mismo sentido que en  $(1+3)$  [es decir, a través de representaciones que no son verdaderas del grupo de Poincaré].

En este capítulo queremos estudiar lo que sería el “análogo” al bajar la dimensión del espacio-tiempo del campo espinorial (de verdad) en  $(1+3)$ . Hemos adoptado la convención de llamarlo campo de Dirac [a veces llamado campo espinorial en  $(1+1)$ ] ya que, como hemos dicho, no existen espinores, esto es, objetos que se transforman como una representación proyectiva no verdadera, del grupo de Poincaré en  $(1+1)$ . Para estudiar el campo de Dirac adoptaremos, en este capítulo, que la métrica es la negativa que la métrica que hemos usado hasta ahora. Esto es, **de ahora en adelante**  $\mathbf{g}_{00} = 1$  y  $\mathbf{g}_{11} = -1$ . Se puede hacer todo en nuestra métrica inicial, pero lo hacemos en esta otra métrica para tener las propiedades usuales de las matrices  $\gamma$  y así no tener que hacer cálculos que están en la literatura en la métrica que usaremos ahora.

La teoría clásica del campo de Dirac en  $(1+1)$  sería entonces definida por la ecuación

de Dirac:

$$\left( i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right) \vartheta(x) = 0, \quad (6.1)$$

donde  $\mu = 0, 1$  y  $\gamma^\mu$  son matrices  $2 \times 2$  que satisfacen  $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2\mathbf{g}^{\mu\nu}$  y la relación de hermiticidad  $\gamma^{\mu*} = \mathbf{g}^{\mu\mu}\gamma^\mu$  con  $\mu, \nu = 0, 1$  para garantizar la hermiticidad de los observables.

El campo  $\vartheta(x)$  se transforma frente a una representación bidimensional del grupo de Lorentz. Esta representación es la generada por las matrices del álgebra de Lie:

$$s^{\mu\nu} = \frac{i}{4} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu),$$

con  $\mu, \nu = 0, 1$ , que solo dan un término independiente (como debe ser, ya que el grupo de Lorentz es unidimensional). Así que si escribimos  $V_{jk}(\Lambda(w)) = (\exp(-iws^{01}))_{jk}$  el campo transformado será:

$$\tilde{\vartheta}_j(x) = \sum_{k=1}^2 V_{jk}^{-1}(\Lambda) \vartheta_k(\Lambda x + a), \quad (6.2)$$

bajo una transformación de Poincaré  $(a, \Lambda)$ .

Un campo Dirac cuántico libre de masa  $m$  es una distribución a valor operador  $\phi(x) = \phi_\alpha(x)$  con  $\alpha = 0, 1$  la cual obedece la ecuación del campo de Dirac:

$$\left( i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right) \phi(x) = 0, \quad (6.3)$$

y la siguiente relación de anticonmutación a igual tiempo :

$$\begin{aligned} [\phi_\alpha(t, x^1), \phi_\beta(t, y^1)]_+ &= [\phi_\alpha^*(t, x^1), \phi_\beta^*(t, y^1)]_+ = 0, \\ [\phi_\alpha(t, x^1), \phi_\beta^*(t, y^1)]_+ &= \delta_{\alpha\beta}(x^1 - y^1), \end{aligned} \quad (6.4)$$

donde  $\alpha, \beta = 0, 1$ .

La ecuación de Dirac (6.1) en el espacio de los momenta  $p$  tiene la forma:

$$\begin{aligned} (\not{p} - m) u(p) &= 0, \\ \tilde{u}(p) (\not{p} - m) &= 0, \end{aligned} \quad (6.5)$$

donde  $\tilde{u}$  es el campo conjugado de Dirac, definido como  $\tilde{u} \equiv (\gamma^0 u)^* = \bar{u}\gamma^0$ , y  $\not{p} \equiv p^\mu \gamma_\mu$  es un operador lineal en el espacio complejo bidimensional (asociado al vector  $p$  del

espacio de Minkowski) el cual satisface:

$$\begin{aligned} (\cancel{p} + \cancel{q}) &= \cancel{p} + \cancel{q} , \\ (\alpha \cancel{p}) &= \alpha \cancel{p} , \\ \cancel{p}\cancel{q} + \cancel{q}\cancel{p} &= 2(p^0 q^0 - p^1 \cdot q^1) . \end{aligned}$$

Ahora bien, (6.5) es considerada como un problema de autovalores para la energía  $p^0$ , cuyos valores posibles están determinados por la condición  $\det(\cancel{p} - m) \equiv (p^2 - m^2) = 0$ . Esta ecuación tiene dos raíces  $p^0 = \pm\sqrt{(p^1)^2 + m^2}$ , por ende podemos denotar a las soluciones de (6.5) por  $u^{(\pm)}(p^1)$ , donde  $(\pm)$  corresponde al signo de la energía.

En vez de normalizar estas soluciones a uno, como es usual, por conveniencia las normalizaremos de manera tal que cumplan:

$$\bar{u}u = 2\omega \quad \text{o} \quad \text{equivalentemente} \quad \tilde{u}u = 2m\varepsilon(p^0) , \quad (6.6)$$

donde  $\bar{u}$  es el complejo conjugado de  $u$ ,  $p^0 = \pm\omega = \pm\sqrt{(p^1)^2 + m^2}$  y  $\varepsilon(p^0)$  representa a la función signo de la energía.

Al multiplicar la primera ecuación de (6.5) por  $\gamma_0$ , obtenemos que  $u^{(\pm)}(p^1)$  son autovectores del operador hermítico  $H = m\gamma^0 + p^1 \cdot \gamma^0\gamma^1$ , el Hamiltoniano, cuyos autovalores son la energía  $p^0$ . Como tienen autovalores diferentes,  $\pm\omega$ , entonces ellos son ortogonales:

$$\bar{u}^{(\pm)}(p^1)u^{(\mp)}(p^1) = 0 . \quad (6.7)$$

Además las soluciones de (6.5) satisfacen las relaciones de completitud:

$$\begin{aligned} u_\alpha^{(+)}(p^1)\bar{u}_\beta^{(+)}(p^1) + u_\alpha^{(-)}(p^1)\bar{u}_\beta^{(-)}(p^1) &= 2\omega\delta_{\alpha\beta} , \\ u_\alpha^{(+)}(p^1)\tilde{u}_\beta^{(+)}(p^1) - u_\alpha^{(-)}(-p^1)\tilde{u}_\beta^{(-)}(-p^1) &= 2m\delta_{\alpha\beta} , \end{aligned} \quad (6.8)$$

así como la condición de suma:

$$u_\alpha^{(+)}(p^1)\tilde{u}_\beta^{(+)}(p^1) + u_\alpha^{(-)}(-p^1)\tilde{u}_\beta^{(-)}(-p^1) = 2\cancel{p}_{\alpha\beta} . \quad (6.9)$$

Análogo al caso del campo escalar, el espacio de Hilbert se construye como una suma directa de espacios de Hilbert (ver (4.6)), donde identificamos al espacio  $\mathcal{H}_1$  con el espacio  $\mathcal{H}_m$ . Este consiste de todas las funciones  $\Psi = \Psi_\alpha$  definidas sobre la hipérbola  $V_m^+$  para las cuales la integral invariante converge:

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \frac{1}{2} \int_{V_m^+} \tilde{\Psi} \frac{1}{m} \cancel{p} \Psi (dp) . \quad (6.10)$$

Esta relación define un producto escalar, ya que para  $p \in V_m^+$  la matriz  $\gamma^0 \not{p}$  es definida positiva.

La representación del grupo  $\Pi_+^\uparrow$  actúa en  $\mathcal{H}_m$  de acuerdo a:

$$[U(a, \Lambda)\Psi](p) = e^{i\langle p|a\rangle} V(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}p), \quad (6.11)$$

donde  $V(\Lambda)$  es la representación finito dimensional de  $L_+^\uparrow(1+1)$  dada por (6.2). Es fácil ver que (6.11) es unitaria, ya que:

$$V^*(\Lambda)\gamma^0 = \gamma^0 V^{-1}(\Lambda).$$

La representación (6.11) en el espacio  $\mathcal{H}_m$  es reducible. Esto se demuestra de la identidad:

$$U^{-1}(a, \Lambda)\not{p}U(a, \Lambda) = \not{p},$$

donde  $\not{p}\Psi(p) = p\Psi(p)$ , es decir tenemos un operador hermítico que conmuta con todos los elementos de la representación que no es múltiplo de la identidad.

El operador  $\not{p}$  tiene dos autovalores infinitamente degenerados in  $\mathcal{H}_m$ :  $+m$  y  $-m$ . Entonces el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_m$  se puede descomponer en una suma directa de dos subespacios ortogonales :

$$\mathcal{H}_m = \mathcal{H}_m^+ \oplus \mathcal{H}_m^-,$$

y son invariantes bajo la representación  $U(a, \Lambda)$ . Las proyecciones  $\Upsilon_m^\pm$  sobre  $\mathcal{H}_\pm$  vienen dadas por:

$$\Upsilon_m^\pm = \frac{m \pm \not{p}}{2m}.$$

y así:

$$\begin{aligned} \text{si } \Psi(p) \in \mathcal{H}_m^+ &\longrightarrow \not{p}\Psi(p) = m\Psi(p), \\ \text{si } \Psi(p) \in \mathcal{H}_m^- &\longrightarrow \not{p}\Psi(p) = -m\Psi(p). \end{aligned}$$

Los espacios  $\mathcal{H}_m^\pm$  no contienen ningún subespacio invariante no trivial con respecto a  $\Pi_+^\uparrow(1, 1)$ , esto es, en cada uno de ellos la representación (6.11) es irreducible.

El producto escalar (6.10) en estos espacios  $\mathcal{H}_m^\pm$  toma la forma:

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \pm \frac{1}{2} \int_{V_m^+} \tilde{\Phi} \Psi(dp) \quad \Phi, \Psi \in \mathcal{H}_m^\pm.$$

En toda esta discusión precedente,  $p \in V_m^+$ , esto es  $p^0 > 0$ , todas las partículas tienen energía positiva. Puesto que  $\mathcal{H}_m^\pm$  son invariantes y de energía positiva, no hay partículas

de energía negativa de acuerdo con el sentido común y el axioma III. El operador  $\frac{\not{p}}{m}$  es autoadjunto y así es una involución unitaria, sus autovalores los interpretaremos como el signo de la carga. Entonces, por definición, los vectores correspondientes a  $\mathcal{H}_m^+$  describen estados de partículas con carga positiva (partícula), mientras que los vectores pertenecientes a  $\mathcal{H}_m^-$  describen estados de partículas con carga negativa (antipartícula).

A diferencia del campo escalar, el espacio  $\mathcal{H}_n$  (n partículas) se define como una potencia antisimétrica de  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_m$ :

$$\mathcal{H}_n = \text{ant } \mathcal{H}_m^{\otimes n} . \quad (6.12)$$

Por las reglas de superselección de la carga, el espacio  $\mathcal{H}_n$  se descompone en una suma de (n+1) subespacios coherentes ortogonales:

$$\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_n^{(-n)} \oplus \mathcal{H}_n^{(-n+2)} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n^{(n-2)} \oplus \mathcal{H}_n^{(n)} , \quad (6.13)$$

donde  $\mathcal{H}_n^{(k)}$  (para  $\frac{n-k}{2}$  entero) es el subespacio de estados de n-partículas de carga total  $k$ . El espacio  $\mathcal{H}$  será una suma directa de estos  $\mathcal{H}_n$ . Por lo tanto, el producto escalar en  $\mathcal{H}$  es el usual en estos casos (ver, por ejemplo, [21]).

Usando la base  $\Psi^{(e)}(p) \in \mathcal{H}_m$ , donde el operador  $\frac{\not{p}}{m}$  es diagonal, podemos representar los elementos de  $\mathcal{H}_n$  en la forma:

$$\Psi_n(p_1 e_1; \dots; p_n e_n) \quad e_j = \pm e , \quad (6.14)$$

donde  $e$  la asociamos a la carga de la partícula y  $-e$  a la carga de la antipartícula. Por (6.12), los elementos de  $\mathcal{H}_n$  (6.14), son antisimétricas bajo la permutación de dos dupletes  $(p_i e_i)$ :

$$\Psi_n(p_1 e_1; \dots; p_i e_i; \dots; p_j e_j; \dots; p_n e_n) = -\Psi_n(p_1 e_1; \dots; p_j e_j; \dots; p_i e_i; \dots; p_n e_n) . \quad (6.15)$$

La representación unitaria del grupo de Poincaré restringido  $U(a, \Lambda)$ , viene dada por productos tensoriales de la representación (6.11) y sobre un vector de estado  $\Psi \in \mathcal{H}$ :

$$\Psi = (\Psi_0, \Psi_1(p_1 e_1), \dots, \Psi_n(p_1 e_1; p_2 e_2; \dots; p_n e_n), \dots) ,$$

viene especificada por:

$$U(a, \Lambda)\Psi = \{ \Psi_0, \dots, e^{i\langle (p_1 + \dots + p_n) | a \rangle} \tilde{V}(\Lambda)\Psi_n(\Lambda^{-1} p_1 e_1; \dots; \Lambda^{-1} p_n e_n), \dots \} , \quad (6.16)$$

donde  $\tilde{V}(\Lambda)$  la explicamos a continuación.  $\tilde{V}(\Lambda)$  es una representación de  $2^n$  dimensiones que actúa sobre  $\mathbb{C}^{2^n} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2$  de acuerdo con el producto tensorial de representaciones:

$$\tilde{V}(\Lambda) = \underbrace{V(\Lambda) \otimes V(\Lambda) \otimes \dots \otimes V(\Lambda)}_n, \quad (6.17)$$

donde  $V(\Lambda)$  viene dado por (6.2) y el significado de (6.17), es usual [21], lo recordaremos a continuación.

Si  $\xi \in \mathbb{C}^{2^n}$  y  $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \dots \otimes \xi_n$  entonces:

$$\tilde{V}(\Lambda)\xi = V(\Lambda)\xi_1 \otimes V(\Lambda)\xi_2 \otimes \dots \otimes V(\Lambda)\xi_n. \quad (6.18)$$

La transformación  $\tilde{V}(\Lambda)$  sobre vectores generales de  $\mathbb{C}^{2^n}$  se obtiene por linealidad definiendo así un operador único para cada  $\Lambda$  que lleva a una representación de  $2^n$  dimensiones del grupo de Lorentz. Finalmente, recordemos que todo esto ( $V(\Lambda)$  en particular) debe ser expresado, de acuerdo con (6.14), en la base donde  $\frac{\not{p}}{m}$  es diagonal.

Una forma explícita del producto escalar en el espacio  $\mathcal{H}$ , en términos de (6.15), se obtiene si introducimos concretamente la base  $v^{(e)}(p^1) \in \mathcal{H}_m$ , la cual definimos por:

$$v^{(e)}(p^1) \equiv u^{(e)}(ep^1).$$

Los elementos de esta base satisfacen  $\not{p}v^{(e)}(p^1) = emv^{(e)}(p^1)$ , es decir, son autofunciones del operador hermítico  $\not{p}$  con diferente autovalor, entonces son ortogonales:

$$\tilde{v}^{(e)}(p^1)v^{(e')}(p^1) = 2me\delta_{ee'}. \quad (6.19)$$

[donde hemos supuesto la normalización (6.6)].

Las relaciones (6.8), (6.7) y (6.9) para la base  $v^{(e)}(p^1)$  serán:

$$\begin{aligned} \bar{v}^{(\pm)}(p^1)v^{(\mp)}(-p^1) &= 0, \\ v_{\alpha}^{(\pm)}(p^1)\tilde{v}_{\beta}^{(\pm)}(p^1) &= \not{p}_{\alpha\beta} \pm m\delta_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Entonces podemos definir  $\Psi_{\alpha}(p) \in \mathcal{H}$  en esta base como:

$$\Psi_{\alpha}(p) = \sum_e v_{\alpha}^{(e)}(p^1)\Psi(p, e), \quad (6.20)$$

y así, con (6.10) y (6.20) podemos expresar el producto escalar en términos de (6.15), como:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \Phi \rangle &= \bar{\Psi}_0 \Phi_0 \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{e_j} \int \cdots \int_{V_m^+} \overline{\Psi_n(p_1, e_1; \dots; p_n, e_n)} \Phi_n(p_1, e_1; \dots; p_n, e_n) (dp_1) \cdots (dp_n) . \end{aligned}$$

Volviendo a los campos cuánticos simbólicos  $\phi(x)$ , la solución general de (6.1) representada como una integral de Fourier viene dada por:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int [b^{(+)}(p^1)v^{(+)}(p^1)e^{-i\langle p|x\rangle} + b^{*(-)}(p^1)v^{(-)}(p^1)e^{i\langle p|x\rangle}] (dp) , \\ \tilde{\phi}(x) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int [b^{*(+)}(p^1)\tilde{v}^{(+)}(p^1)e^{i\langle p|x\rangle} + b^{(-)}(p^1)\tilde{v}^{(-)}(p^1)e^{-i\langle p|x\rangle}] (dp) . \end{aligned} \quad (6.21)$$

Y obedecen las siguientes relaciones de anticonmutación:

$$\begin{aligned} [\phi_\alpha(x), \phi_\beta(y)]_+ &= [\tilde{\phi}_\alpha(x), \tilde{\phi}_\beta(y)]_+ = 0 , \\ [\phi_\alpha(x), \tilde{\phi}_\beta(y)]_+ &= -iS_{\alpha\beta}(x-y) , \end{aligned} \quad (6.22)$$

donde :

$$\begin{aligned} S(x) = (i\not{\partial} + m)D(x) &= \frac{i}{4\pi} \int_{V_m^+} (dp) [e^{-i\langle p|x\rangle}(\not{p} + m) + e^{i\langle p|x\rangle}(\not{p} - m)] \\ &= \frac{i}{2\pi} \int d^2p \varepsilon(p^0) \delta(p^2 - m^2) (\not{p} + m) e^{-i\langle p|x\rangle} , \end{aligned}$$

con  $D(x)$  el conmutador de Pauli-Jordan (4.3) y  $\varepsilon(p^0)$  es el signo de la energía.

Mediante (6.19) y (6.21) podemos definir las reglas de conmutación de los operadores  $b^\pm$  y  $b^{*\pm}$ :

$$\begin{aligned} [b^{(\pm)}(p^1), b^{(\pm)}(q^1)]_+ &= [b^{(\mp)}(p^1), b^{(\pm)}(q^1)]_+ = 0 , \\ [b^{*(\pm)}(p^1), b^{*(\pm)}(q^1)]_+ &= [b^{*(\pm)}(p^1), b^{(\mp)}(q^1)]_+ = 0 , \\ [b^{*(\pm)}(p^1), b^{(\pm)}(q^1)]_+ &= 2p^0 \delta(p^1 - q^1) . \end{aligned} \quad (6.23)$$

Estos operadores son definidos de manera análoga a los operadores  $a^\pm(p^1)$  del campo escalar cargado, permitiéndonos interpretar a  $b^{*(+)}(p^1)$  y  $b^{(+)}(p^1)$  como operadores de creación y aniquilación de partículas, respectivamente; y a  $b^{*(-)}(p^1)$  y  $b^{(-)}(p^1)$  como operadores de creación y aniquilación de antipartículas.

Definimos el operador promediado (ver (3.1)) como:

$$b^{(e)}(f) = \frac{1}{2} \int b^{(e)}(p^1) f(p^1) (dp) , \quad (6.24)$$

donde  $e$  es la carga de la partícula( el “electrón ” , con  $e=-1$  ), y  $-e$  de la antipartícula ( el “positrón” ).

Los operadores (6.24) y sus adjuntos actúan sobre los vectores de estado (6.14) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} [b^{(e)}(f)\Psi]_n(p_1e_1; \dots; p_n e_n) &= \frac{1}{2} \int_{V_m^+} f(p^1) \Psi_{n+1}(pe; p_1e_1; \dots; p_n e_n)(dp) , \\ [b^{*(e)}(f)\Psi]_n(p_1e_1; \dots; p_n e_n) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \Psi_{n-1}(p_1e_1; \dots; \widehat{p_j e_j} \dots; p_n e_n) f(p_j) \delta_{ee_j} , \end{aligned}$$

y obedecen las relaciones de conmutación, las cuales se siguen de (6.23) y (6.24):

$$\begin{aligned} [b^{(e)}(f), b^{(e')}(g)]_+ &= [b^{*(e)}(f), b^{*(e')}(g)]_+ = 0 , \\ [b^{(e)}(f), b^{*(e')}(g)]_+ &= \frac{1}{2} \delta_{ee'} \int_{V_m^+} \bar{g}(p) f(p)(dp) . \end{aligned} \quad (6.25)$$

Entonces construimos el campo cuántico a partir de (6.21), mediante la relación:

$$\phi(\vec{g}) = \sqrt{2\pi m} (b^{(+)}(f^+) + b^{*(-)}(f^-)) , \quad (6.26)$$

donde  $f^\pm(p^1) = v_\alpha^{(\pm)}(p^1) g^\alpha(\mp p)$ .

En analogía a (4.17), se observa que el operador de densidad de número de partículas vendrá dado por:

$$[b^{*(e)}(p^1)b^{(e)}(p^1)\Psi]_n(p_1e_1; \dots; p_n e_n) = \Psi_n(p_1e_1; \dots; p_n e_n) 2p^0 \sum_{j=1}^n \delta_{ee_j} \delta(p^1 - p^1_j) .$$

Por ende podemos definir el operador de número de partículas como:

$$N = \frac{1}{2} \sum_{e=\pm} \int b^{*(e)}(p^1)b^{(e)}(p^1)(dp) , \quad (6.27)$$

y las demás variables dinámicas, como el operador de carga eléctrica  $Q$ , y el de momentum lineal  $P^\mu$ :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} \sum_{e=\pm} e \int b^{*(e)}(p^1)b^{(e)}(p^1)(dp) , \\ P^\mu &= \frac{1}{2} \sum_{e=\pm} e \int p^\mu b^{*(e)}(p^1)b^{(e)}(p^1)(dp) . \end{aligned} \quad (6.28)$$

Finalmente, quisiéramos señalar que al construir el campo de Dirac tenemos un campo que satisface reglas de anticonmutación. Ahora, puesto que el grupo de Poincaré

es completamente reducible (esto es, toda representación unitaria puede descomponerse en integral directa de sus irreducibles) [23], la representación (8.16) será descompuesta en representaciones de partículas sin espín. Por lo tanto, tenemos una teoría sin espín con campos que anticonmutan. Esto no es una contradicción ya que el teorema de espín-estadística está demostrado en (1+3). Más aún, esto está de acuerdo con los teoremas de bosonización en (1+1) [24].

# Capítulo 7

## Discusión y conclusiones

En este trabajo hemos considerado ciertos aspectos de la mecánica cuántica relativista en  $(1+2)$  y  $(1+1)$ . Hemos verificado que  $\mathcal{SL}(2, \mathbb{R})$ , contrariamente a lo dicho por ejemplo, en las referencias [2] y [4], no es simplemente conexo. Se ha construido los espacios de Hilbert correspondientes y se ha mostrado la existencia de las representaciones proyectivas y unitarias que realizan el grupo de Poincaré en  $(1+1)$  para varias teorías de campos libres. Estas teorías satisfacen reglas de anticonmutación (campo de Dirac) o reglas de conmutación (campos escalares cargados y no cargados). Además [consistentemente con que el grupo de Poincaré en  $(1+1)$  es un grupo completamente reducible] se obtiene que las partículas descritas por estos campos, por construcción, no tienen espín y por lo tanto no hay conexión entre espín y estadística. Esto está de acuerdo con la conocida bosonización en  $(1+1)$ .

Uno de los objetivos de este trabajo fue presentar la formulación de Wightman de la teoría cuántica de campos, debido a que ella presenta una versión matemáticamente rigurosa de esta teoría. El considerarla en  $(1+1)$  nos permite trabajar, matemáticamente, de manera más simple los campos. Sin embargo, algunas precisiones matemáticas fueron dejadas de lado. Por ejemplo, todo lo relacionado con el dominio de los operadores de campo (la densidad del dominio común y la ciclicidad del vacío). Aunque como hemos dicho esto no presentaría mayor dificultad, nuestra presentación es útil ya que ayuda a ver lo que se debe hacer en la formulación de Wightman (aparte de mostrar, por defecto, las “lagunas” de la formulación lagrangiana).

El reconocimiento a la formulación de Wightman ha llegado inclusive a ser consi-

derada como parte fundamental en la demostración de uno de los famosos problemas del milenio (1 millón de dólares de premio aparte de la fama) que consiste en probar la existencia (rigurosa) de una teoría de Yang-Mills con brecha en la masa [25], [26]. La axiomática de Wightman es un contexto que reúne varias teorías cuánticas de campo y no una teoría en particular. Los axiomas de esta teoría no deberían verse como algo rígido sino como hipótesis de lo que debería ser una teoría cuántica de campos. Si los axiomas llevasen irreversiblemente a situaciones no físicas deberían ser cambiados. Esta es una de las bondades del método axiomático, donde las hipótesis están claramente establecidas, ya que se pueden ver los culpables de un mal resultado.

El ejemplo dado en la subsección 2.4, de una representación del álgebra de Lie del grupo de Heisenberg ( $\mathbb{R}^3$  con un producto no conmutativo), plantea claramente que la covariancia de una teoría cuántica relativista no se puede discutir a nivel del álgebra de Lie en general. Como vimos allí, una representación del álgebra de Lie no necesariamente viene de una representación del grupo de Lie. Por esta razón, la manera usual de explicar la covariancia Poincaré en la formulación lagrangiana, vía una representación del álgebra de Lie del grupo de Poincaré, no garantiza el cumplimiento del teorema de Wigner.

Finalmente, de los resultados en la referencia [18] donde se prueba que el espinor no tiene lugar en (1+1) [recordemos que entendemos el espinor a través de ciertas representaciones que no son verdaderas, como en (1+3), y de los resultados de [18] solo tenemos representaciones verdaderas que describen partículas libres], las complicaciones con el grupo de recubrimiento universal en (1+2) y la no satisfacción del teorema de espín-estadística en (1+1), nos muestran que la esperanza de tener un “sabor” de lo que pasa en (1+3) al conocer lo que pasa en (1+1) es bastante lejana. Sin embargo, como modelo para entrenarse en ciertos conceptos puede ser muy útil.

# Bibliografía

- [1] Bogolubov Nikolai, Logunov Anatolii & Todorov Ivan, *Introduction to axiomatic quantum field theory*. W. A. Benjamin, Inc. ,1975.
- [2] Binegar Birne, *Relativistic field theories in three dimensions*. J. Math. Phys. **23**, 1511 (1982).
- [3] Glimm James & Jaffe Arthur, *Quantum Physics*. Springer-Verlag, 1981.
- [4] Gates James, Grisaru Marcus, Roček Martin & Siegel Warren, *Superspace or one thousand and one lessons in supersymetry*. Addison-Wesley, 1983.
- [5] Cavaglià Marco, Fatibene Lorenzo & Francaviglia Mauro, *Two-dimensional dilaton gravity coupled to massless spinors*. Class. Quant.Grav. **15**, 3627 (1998)
- [6] De Castro Antonio, *Bound states by a pseudoscalar Coulomb potential in 1+1 dimensions*. Phys.Lett. **A318**, 40 (2003)
- [7] De Castro Antonio, *Comment on "Fun and frustration with quarkonium in a 1+1 dimension", by R. S. Bhalerao and B. Ram [Am. J. Phys. **69** , 817 (2001)]* . Am.J.Phys. **70**, 450 (2002).
- [8] Weinberg Steven, *The quantum theory of fields*. Cambridge University Press , volumen 1, 1995.
- [9] Roman Paul, *Introduction to quantum field theory*. John Wiley and sons, Inc., 1969.
- [10] Bogolubov Nikolai & Shirkov Dmitry, *Introduction to the theory oh quantized fields*. Wiley-Interscience, 1980.
- [11] Itzykson Claude & Zuber Jean, *Quantum field theory*. McGraw-Hill, 1980.

- [12] Streater Ray & Wightman Arthur, *PCT, Spin and Statistics, and All That*. W. A. Benjamin, Inc. , 1964.
- [13] Osterwalder R. & Schrader R., *Axioms for Euclidean Green's functions*. Comm. Math. Phys. **31**, 83-112 (1973); **42**, 281-305 (1975).
- [14] Haag R. , *Local quantum physics: fields, particles, algebras*. Springer-Verlag, 1992.
- [15] Bargmann Valentine, *On unitary ray representations of continuous groups*. Ann. Math. **59**, 1 (1954).
- [16] Hall Brian, *An elementary introduction to groups and representations*. Springer-Verlag, 2000.
- [17] Grigore D. R., *The Projective Unitary Irreducible Representations of the Poincaré Group in 1+2 Dimensions*. J. Math. Phys. **34**, 4172 (1993).
- [18] Martinez William, *Representaciones proyectivas del grupo de Poincaré en (1+1)*. Trabajo de grado de Maestría, Universidad Central de Venezuela, 2007.
- [19] Thaller Bernd, *The Dirac Equation*. Springer-Verlag, 1992.
- [20] Torres Pedro , *Curso en métodos de la física teórica*. Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela, Caracas, 2006.
- [21] Prugovečki Eduard, *Quantum Mechanics in Hilbert Space*. Academic Press, Inc., 2da edición, 1981.
- [22] Yip Ping, *Spinors in two dimensions*. J. Math. Phys. **24**, 1206 (1982).
- [23] R.de Mello and V. Rivelles, *The irreducible unitary representations of the extended Poincaré group in (1 + 1) dimensions*. J. Math. Phys. **45**, 1156 (2004).
- [24] Tomonaga S. , Prog.Theor. Phys **5**, 544 (1965). Luttinger J., J. Math. Phys. **4**, 1154 (1963). Mattis D. & Lieb E., J. Math. Phys. **6**, 304 (1965). Sawada K., Phys. Rev. **106**, 372 (1957).
- [25] Jaffe Arthur. Notices of the AMS **53**, 652 (2006).
- [26] Clay Mathematics Institute, (<http://www.claymath.org> ).