

*Sobre el colapso gravitacional de nubes
protoestelares enfriadas por radiación*

Br. Ángel Erasmo Rincón Rivero

Tutoras: Dra. Nuri Hurtado
Dra. Carolina Bessega

Trabajo Especial de Grado



Caracas, 4 de Octubre del año 2010



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

SOBRE EL COLAPSO GRAVITACIONAL DE NUBES PROTOESTELARES ENFRIADAS POR RADIACIÓN

Br. Ángel Erasmo Rincón Rivero

Dra. Nuri Hurtado, Tutora
Dra. Carolina Bessega, Tutora

Caracas, 4 de Octubre del año 2010

Sobre el colapso gravitacional de nubes protoestelares enfriadas por radiación

Copyright © 2010

Universidad Central de Venezuela

**SOBRE EL COLAPSO GRAVITACIONAL DE NUBES PROTOESTELARES
ENFRIADAS POR RADIACIÓN**

Br. Ángel Erasmo Rincón Rivero

Trabajo Especial de Grado presentado
ante la ilustre Facultad de Ciencias de la
Universidad Central de Venezuela como
requisito parcial para optar al título de:

Licenciado en Física.

Dra. Nuri Hurtado, Tutora

Quienes suscriben, miembros del Jurado que examinó el trabajo presentado por el Br. Ángel Erasmo Rincón Rivero titulado: **“Sobre el colapso gravitacional de nubes protoestelares enfriadas por radiación”** bajo la tutoría de la Dra. Carolina Bessega y la Dra. Nuri Hurtado para optar al título de Licenciado en Física, consideramos que dicho trabajo cumple con los requisitos exigidos por los reglamentos respectivos y por lo tanto lo declaramos APROBADO en nombre de la Universidad Central de Venezuela.

Dra. Nuri Hurtado (Tutora)

Dr. Jorge Ovalle

Dr. Pío Arias

Fecha

Caracas, 4 de Octubre del año 2010

*Dedico este trabajo a mi abuela quien, hasta en los momentos más difíciles
siempre sonrió y siguió adelante.*

Agradecimientos

Doy gracias a Dios por cuanto él me dio, y me sigue dando, lo necesario para seguir y nunca sucumbir ante la adversidad. Además, he de agradecer a las grandes leyendas que tuve como maestros, en especial al "Profesor" quien me brindó, además de conocimiento, su amistad: siempre estuvo cuando la noche fue más oscura dándome consejo y aliento. Otra leyenda a la cual agradezco (aunque hay muchas) y la cual tuve el honor de tener como profesor es el Dr. Vidal Alonso. Él me enseñó y explicó muchos temas de vital importancia en la física clásica y cuántica, pero más importante aún, me enseñó a ser *profesional*. Realmente el nivel de conocimiento que éste posee sobre la física es algo fuera de serie: mientras que un buen físico analiza la mecánica, el electromagnetismo y la física de partículas por "separado", para él no son más que descripciones diferentes de la naturaleza.

Por otra parte agradezco a Maybemar (La niña), José (marrón), Jorge, Rosmary y Efraín (el evangélico), que junto conmigo constituimos lo que quedó para la historia como "el sexteto", dado que cada uno de ellos contribuyó a su manera en mi trayectoria universitaria de pre grado. Gracias Maybemar por hacer los insostenibles momentos del servicio comunitario, algo tolerable, y por hacerme reír, además de mantener a nuestro grupo siempre humilde (dado que estabas junto a nosotros casi desde los 13 años), gracias José por brindarme tu amistad y ayuda en muchos momentos cuando tenía más problemas de lo usual y el panorama se veía turbio, gracias Jorge por muchas discusiones interesantes de física a lo largo de la carrera y por formar el "Momentum" que gracias a ti dio fruto. Gracias Rosmary por siempre ser fuente de buenos paisajes que quedaron para la historia, gracias Efraín por darme tu amistad y ayuda en su momento y por las noches que intentábamos ser normales jugando juegos de mesa y viendo una que otra película en búsqueda de inspiración. Todos ustedes fueron importantes para mi.

Además, un agradecimiento especial a Astrid que siempre me dio su apoyo in-

condicional y me ayudó en muchos aspectos de mi vida. Me ha dado grandes momentos y le debo mucho: GRACIAS!

Gracias Gabriel (pequeño duende) por cuanto siempre compartiste tu material académico conmigo y diste sin esperar nada a cambio, además, me ofreciste tu amistad lo cual me honra ya que sólo determinas a personas que valen la pena -al menos académicamente-. Agradezco a mi amigo de toda la vida Javier por todo cuanto ha hecho por mi y me ha ofrecido se manera desinteresada.

Finalmente, pero no por eso menos importante, agradezco a la Dr. Carolina Bessega por haber confiado en mi aun sabiendo que la elaboración de este trabajo sería complicada (por razones que se salían de nuestras manos), espero no haberla defraudado. Agradezco al M.Sc. Alberto Bellorín por haberme aceptado como tesista pues, a pesar de no trabajar finalmente juntos, agradezco el gesto que éste tuvo conmigo y con mi tutora principal. Agradezco a la Dra. Nuri Hurtado por haberme aceptado como tesista (luego de saber que no podría trabajar con el el prof. Bellorín) pues me llevó por el buen camino y me enseñó a hacer una investigación de una manera más organizada y metódica. Muchas gracias! También he de mencionar al Dr. Estevan Alvaréz quien dio acertadas sugerencias sobre cómo debía presentar adecuadamente mi trabajo especial de grado.

Gracias a todos. Y gracias a aquellos que no nombro pero que también me han ayudado.

Resumen

Se estudia el problema del colapso de una esfera considerando el efecto gravitacional y difusivo. Para modelar más adecuadamente el efecto difusivo en el problema se hace la suposición más general en cuanto al coeficiente de difusión, es decir, éste depende de la densidad y temperatura. Por otra parte, se emplea un grupo de transformaciones autosimilares para lograr transformar un problema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, a un problema en ecuaciones diferenciales en derivadas ordinarias. Además, dada la complejidad del problema, encontrar una solución analítica es sumamente complejo por lo tanto nos valdremos de métodos numéricos para resolver el problema para lo cual implementaremos una rutina Runge-Kutta de cuarto orden a fin de encontrar las funciones involucradas.

En otro orden de ideas, se estudian algunas propiedades termodinámicas básicas con el objeto de entender qué sucede con la entropía del sistema y cuál es el efecto del término no lineal de la ecuación de la conservación de la energía en la aceleración radial de la esfera.

Finalmente estudiaremos el espacio de solución del grupo de transformaciones de escala que es válida para nuestro problema concreto, es decir, el colapso gravitacional. Con este estudio se logra generalizar las soluciones para los problemas de colapso gravitacional considerados hasta ahora, dado que no se parte de un estado termodinámico particular; además se logra ver, mediante el número de Péclet y la tasa de fuerza debida a la presión respecto de la gravedad, que el sistema se "enfría" a causa de las pérdidas radiativas.

ÍNDICE GENERAL

Índice General	ix
Lista de Figuras	xi
1. Introducción	1
2. Marco teórico	6
2.1. Formación estelar	6
2.1.1. Medio interestelar	6
2.1.2. Nubes moleculares gigantes	7
2.1.3. Gas interestelar	7
2.1.4. Polvo interestelar	9
2.2. Evolución estelar	11
2.3. Autosimilaridad	15
2.4. Métodos numéricos	17

3. Ecuaciones básicas	23
3.1. Ecuaciones hidrodinámicas	23
3.1.1. Ecuación de continuidad	24
3.1.2. Ecuación de conservación del momento	24
3.1.3. Ecuación de Poisson	25
3.1.4. Ecuación de la conservación de la energía	25
3.2. Ecuación de estado	26
3.3. Elección de la dependencia funcional de ν	26
4. Metodología	28
4.1. Grupo de transformaciones de escala	28
4.2. Selección de cambios autosimilares	30
4.3. Obtención de las transformaciones autosimilares	31
4.4. Resolución numérica	35
5. Resultados	36
5.1. Verificación del método numérico	36
5.2. Problema particular estudiado	41
5.3. Propiedades termodinámicas en los límites asintóticos	46
5.4. Elección de K_1 y K_2	49
5.5. Perfil de las soluciones	50
5.6. Espacio de solución	51
6. Discusiones	55
7. Conclusiones	62
A. Derivación detallada de la fórmula dimensional	64

B. Cálculo "detallado" de las ecuaciones autosimilares	66
C. Desarrollo de la ecuación de conservación de energía	72
D. Cálculos de los desarrollos asintóticos	75
D.1. Desarrollo para $\xi \ll 1$	75
D.2. Desarrollo para $\xi \gg 1$	76
Bibliografía	79

LISTA DE FIGURAS

2.1. <i>Nebulosa de Orión</i>	8
2.2. <i>Partículas cargadas que no pueden cruzar fácilmente la líneas de campo magnético ([Stacey, 2002])</i>	13
2.3. <i>Método de Euler. El más simple método de integración de una EDO, la derivada en el punto inicial de cada intervalo, es extrapolada para encontrar el valor de la función siguiente.</i>	19

2.4.	<i>Método de Runge Kutta de segundo orden o método del punto medio. Se obtiene una precisión de segundo orden usando la derivada inicial en cada paso y encontrando el punto intermedio en el intervalo, y la derivada del punto medio para el final del intervalo. Los puntos vacíos corresponden a valores de la función que han sido descartados una vez que hemos calculado y usado las derivadas, mientras que los puntos llenos representan la función final.</i>	21
2.5.	<i>Método de Runge Kutta de cuarto orden. En cada paso la derivada es evaluada cuatro veces: una vez en el punto inicial, dos veces en puntos de medios de prueba, y una vez en el punto final de prueba. De esas derivadas el valor de la función final (se muestra como puntos llenos) es calculada. .</i>	21
5.1.	<i>Evolución de la posición adimensional respecto del tiempo adimensional. .</i>	38
5.2.	<i>Evolución del perfil de velocidad para $x > 0$ y para cinco valores diferentes de A</i>	41
5.3.	<i>Evolución del perfil de velocidad para $x > 0$ y para 6 valores diferentes de A. En esta gráfica solo las líneas sólidas son soluciones válidas del problema del colapso [Shu, 1977]</i>	42
5.4.	<i>Perfil de temperatura en función del perfil de la densidad. Se muestra que en el plano g, τ las funciones satisfacen los criterios establecidos.</i>	50
5.5.	<i>Evolución del perfil de la densidad para un rango de ξ suficientemente grande.</i>	51
5.6.	<i>Evolución del perfil de la temperatura para un rango de ξ suficientemente grande.</i>	52
5.7.	<i>Evolución del perfil de la velocidad para un rango de ξ suficientemente grande.</i>	53
5.8.	<i>Evolución de los perfiles de la velocidad (línea continua), densidad (línea segmentada) y temperatura (cruces) para un rango de ξ suficientemente grande.</i>	53
5.9.	<i>Espacio $\wp(m, n)$ donde se obtiene una implosión. El par de valores (m, n) tomados de referencia está en la zona superior derecha.</i>	54
5.10.	<i>Espacio $\wp(m, n)$ donde se obtiene una explosión. El par de valores (m, n) tomados de referencia está en la zona superior derecha.</i>	54

CAPÍTULO

1

INTRODUCCIÓN

En la Física hay muchas corrientes de trabajo sumamente interesantes, problemas abiertos desde hace décadas -incluso siglos-, que han cautivado a científicos y filósofos de la ciencia (como fueron llamados los físicos tiempo atrás). Dentro de la física, la astrofísica es particularmente interesante; el estudio de la Física del Universo lleva tiempo siendo foco de mucha investigación pues, como es conocido, durante muchos años se estudiaron diversos temas que iniciaron con la consideración de la existencia de planetas, analizando qué tipo de movimiento describen y finalmente reflexionando acerca de si el Universo es o no finito, entre otras cosas.

Aristóteles, por ejemplo, era del pensar que existía un Universo finito (donde no existe el vacío) formado por una serie de esferas concéntricas. Además, la Tierra era también considerada una esfera, no de gran dimensión y se encontraba en el centro del Universo, en reposo. Por otra parte, *Eratóstenes* calculó el radio de la Tierra midiendo la inclinación de los rayos solares y la sombra producida por ellos el mismo día y a la misma hora en dos ciudades distintas, Alejandría y Siena.

Como ellos, grandes astrónomos, físicos e incluso filósofos del pasado invirtieron gran parte de su vida intentando entender los misterios que alberga el Universo: muchos de ellos sentaron las bases para construir una teoría más sólida del Universo y de los procesos que en él ocurren, y otros, por su parte, fortalecieron y mejoraron las contribuciones de sus predecesores científicos.

Ahora bien, se ha dicho que los planetas y el Universo (en general) han sido considerablemente investigados; sin embargo, uno de los muchos problemas que aún resta por resolver es el referente a los procesos evolutivos previos a la formación de una estrella que, a pesar de ser investigados también, sigue siendo un tema abierto, pues es bastante complicado determinar toda la gama de propiedades necesarias para la correcta interpretación y análisis del problema. En las últimas décadas, digamos desde los 70 y hasta los 90 del siglo XX, algunos físicos abordaron el estudio del colapso de una nube molecular debido a la influencia de la gravedad ([Larson, 1969], [Penston, 1969], [Shu, 1977] y [Hunter, 1977] por ejemplo). Tales trabajos fueron pioneros en el desarrollo y entendimiento del problema ya que han dado pie a investigaciones sobre el colapso de nubes moleculares, tomando en cuenta más interacciones, por ejemplo la interacción magnética ([Galli and Shu, 1993]) y la difusiva ([Murakami et al., 2004]). Un trabajo precursor en el estudio del colapso gravitacional es el de Larson [Larson, 1969], en él se hace un estudio del problema obteniendo soluciones numéricas, además de introducir en un apéndice un tratamiento autosimilar a las ecuaciones dinámicas de los gases en cuestión.

Con el fin de acercarse un poco a la solución del problema del colapso de nubes moleculares, muchos autores se han valido del método de soluciones autosimilares para convertir las ecuaciones que intentan resolver, en un sistema de ecuaciones ordinarias y, por lo tanto, han tenido el cuidado de elegir adecuadamente la transformación a usar a fin de eliminar una de las variables independientes del problema, por ejemplo el tiempo. Es claro que las soluciones autosimilares son de vital importancia en los fenómenos hidrodinámicos en astrofísica, por ejemplo [Penston, 1969]

y [Larson, 1969], hicieron los trabajos que facilitaron el estudio del problema del colapso gravitacional para una esfera de gas cuyo estado era isotérmico, dando ciertas explicaciones cualitativas de las primeras etapas de la formación estelar.

Por otra parte, [Shu, 1977] y [Hunter, 1977] llegaron, separadamente, a nuevas soluciones autosimilares extendiendo los resultados obtenidos por [Larson, 1969] y [Penston, 1969]. Hunter ([Hunter, 1977]) supuso una transformación autosimilar algo diferente a lo estandar, aunque seguía siendo relativamente sencilla, y aproximó una solución del perfil de velocidad adimensional.

En contraste con la suposición de comportamiento isotérmico, [Yahil, 1983] encontró otra solución autosimilar para el problema de la implosión de una nube molecular haciendo uso de una ecuación de estado politrópica de la forma $p = k\rho^\gamma$ donde k es una constante de dimensiones adecuadas. Siguiendo la misma tendencia, o mejor dicho, mejorando la contribución antes mencionada, [Suto and Silk, 1988] introdujeron una solución diferente sobre el problema del colapso de una nube molecular, en este caso $p = k\rho^\gamma$, donde $k \equiv k(t)$. Esta solución autosimilar obtenida bajo consideraciones diferentes aumentó nuestro entendimiento de la formación estelar pues, como es evidente, un modelo que describa adecuadamente la formación estelar requiere que en los casos extremos presente un comportamiento isotérmico y adiabático dependiendo del límite estudiado. Una de las contribuciones, desde el punto de vista físico, del trabajo mencionado anteriormente fue tomar que $k \equiv k(t)$ por cuanto es el primer paso para obtener una ecuación de estado que tome en cuenta el hecho de que la energía interna ϵ varía en el tiempo (tengamos en mente que $p/\rho \propto \epsilon$).

Por otra parte, con este trabajo se persigue estudiar el proceso de colapso de una nube molecular sin considerar ningún estado termodinámico particular del sistema, o dicho de otra manera, queremos estudiar el problema sin suponer que el sistema es isotérmico (por ejemplo). Debemos recalcar que el estudio sobre la

implosión de nubes moleculares ha sido poco explorado, incluso desde el enfoque autosimilar, lo cual es comprensible por la complejidad del problema. Además, si consideramos la ecuación de la energía para describir el fenómeno de manera más general, encontramos que el comportamiento altamente no lineal del coeficiente de difusión dificulta considerablemente la resolución del problema, aunque es posible facilitar tal resolución (en primera instancia), haciendo algunas simplificaciones razonables.

En este trabajo nos valdremos de métodos numéricos simples para obtener la solución de nuestro problema (el colapso gravitacional de nubes moleculares enfriadas por radiación). La necesidad de implementar métodos numéricos surge dado que el estudio de la evolución estelar es un problema complicado (porque numerosos procesos complejos toman lugar), y también porque aparecen dificultades matemáticas cuando se intentan solucionar las ecuaciones diferenciales no lineales parciales del problema estudiado. Tales dificultades son parcialmente subsanadas con el uso de las soluciones autosimilares, y con ayuda de códigos hidrodinámicos sofisticados, o haciendo simplificaciones para usar un método numérico mucho más simple, pero igualmente potente. Sin embargo, a pesar de que es posible obtener la solución del problema, la relación entre los fenómenos físicos y sus propiedades es no trivial, esto se debe a que, cuando realizamos las transformaciones autosimilares, se opaca la interpretación física *a priori* del problema.

Con el fin de tener una visión más clara de las propiedades físicas involucradas, hemos de simplificar un tanto el problema considerando solamente los procesos e interacciones más relevantes. Además mostraremos algunas propiedades termodinámicas aplicadas a nuestro problema particular a fin de analizar la contribución de nuestro modelo en el problema planteado.

En el capítulo 2 mencionaremos brevemente la teoría básica asociada a nuestro problema, en el capítulo 3 mostraremos las ecuaciones básicas necesarias para la

correcta descripción del fenómeno estudiado, en el 4 diremos cómo solucionaremos el problema, en el capítulo 5 se verán los perfiles evolutivos de las variables involucradas (velocidad, densidad y temperatura), habiendo verificado previamente nuestro código con los resultados conocidos de otro autor [Shu, 1977]. Además, en el capítulo 6 analizaremos las soluciones obtenidas y estudiaremos algunas propiedades termodinámicas de interés en nuestro problema particular. En 7 resumiremos las conclusiones del presente trabajo. Finalmente en los apéndices A, B, C y D presentamos algunos desarrollos de interés en nuestro trabajo.

CAPÍTULO

2

MARCO TEÓRICO

La Formación estelar se debe a la fragmentación y condensación de gigantescas nubes moleculares de gran masa (alrededor de $10^6 M_{\odot}$ ver [Hartmann, 2009]) y densidad (entre 10^{-25} y $10^{-17} g/cm^3$). Tales nubes contienen polvo interestelar y gas y en ellas es donde se da el proceso de gestación de las estrellas. En la siguiente sección se dará la información teórica básica para el estudio del problema que nos compete que no es otro que estudiar el colapso de una nube molecular considerando la interacción asociada a la gravedad y a la difusión.

2.1. Formación estelar

2.1.1. Medio interestelar

El medio interestelar (ISM) no es más que el polvo y gas entre las estrellas. Este medio es visto como las franjas de polvo oscuro en la Vía Láctea (o en otras galaxias), o por sus efectos en las estrellas: el enrojecimiento y la extinción. También se

observa de forma más directa como nebulosas de emisión o reflexión. Aproximadamente el 20 % de la masa de la galaxia es ISM. El ISM absorbe la luz visible, pero al mismo tiempo emite ondas de radio o radiación infrarroja. Así, si bien no podemos hacer un mapa exacto de la galaxia a distancia en luz visible, sí podemos ver zonas distantes de polvo interestelar y gas con bastante facilidad. Ahora bien, el 99 % del ISM es gas, y sólo el 1 % de la masa es polvo. Incluso en las nebulosas, las cuales tienen una densidad bastante alta (ver tabla 2.1), la densidad es menor que en el mejor de los vacíos que podamos lograr en un laboratorio.

2.1.2. Nubes moleculares gigantes

Mucha de la masa en el medio interestelar está agrupada en cúmulos llamados nubes moleculares gigantes o simplemente nubes moleculares (para tamaños más reducidos). Estos cúmulos son más densos que el medio circundante y suficientemente frío que pueden contener hidrógeno molecular (y rastros de otras moléculas). Una nube molecular típica es alrededor de $1pc$ y contiene alrededor de 1×10^6 masas solares. Hay cientos de nubes moleculares gigantes en la Vía láctea. La más cercana es la Nebulosa de Orión que se muestra en la figura 2.1. La nebulosa de Orión está a 450 pc de distancia.

2.1.3. Gas interestelar

El gas interestelar constituyente del ISM está compuesto, en su mayor parte, por hidrógeno. Un 90 % de los átomos (que abarca un 70 % de la masa total) son de este elemento. Del otro 10 % prácticamente todos son átomos de helio. El resto de los elementos pueden considerarse prácticamente despreciables, a pesar de su evidente importancia para nuestra vida cotidiana. Este hidrógeno interestelar puede encontrarse en tres estados: atómico neutro, molecular y atómico ionizado. El último implica que el medio interestelar cuenta con un campo de radiación que procede

Figura 2.1: *Nebulosa de Orión*

de las estrellas, fundamentalmente de aquellas cuya radiación es capaz de excitar o ionizar los átomos constitutivos del gas; es decir, a las estrellas de altas temperaturas.

2.1.3.1. Regiones HII

Estas son usualmente partes de nubes moleculares gigantes: específicamente las partes circundantes calientes de estrellas jóvenes, tales como O ó B (refiérase al diagrama HR). Las estrellas O y B emiten luz ultravioleta, la cual ioniza el hidrógeno en la nebulosa. Cuando los electrones se recombinan con los protones para formar hidrógeno, ellos emiten fotones a longitudes de onda características del espectro de hidrógeno. El color rojo de las regiones HII es debido a 656 nm de la línea espectral de hidrógeno. Las regiones HII pueden ser enormes, particularmente si hay más de una estrella O produciendo radiación ultravioleta en la vecindad. Las estrellas del tipo O son masivas, pero tienen un corto tiempo de vida. En consecuencia, las regiones HII únicamente existen por alrededor de 10 millones de años. Cuando

una estrella tipo O gaste su combustible, la región HII ya no tendrá una fuente de fotones ionizantes y se desvanecerá.

2.1.3.2. Gas interestelar difuso

El gas interestelar difuso ocupa las regiones entre la nebulosa. Es extremadamente poco denso (por eso se le llama "difuso"). El gas interestelar difuso fue descubierto por la observación del espectro de un sistema binario de estrellas. El astrónomo J. Hartmann observó que no había realmente dos líneas espectrales de las binarias (una de cada estrella). Es importante mencionar que muchos átomos se han encontrado en el gas interestelar, desde el calcio, pasando por el hidrógeno neutral (que se identificó observando la línea de 21 cm, la cual resulta de una transición de spin del electrón en el átomo de hidrógeno) hasta llegar a la detección de moléculas tales como CH , CN , y CN^+ continuando con H_2O y NH_3 . Actualmente hay más de 80 moléculas conocidas en el gas interestelar difuso, que componen un 0,002% del gas interestelar. Han sido encontrados incluso aminoácidos [Stacey, 2002]. Por otra parte, las moléculas son fácilmente perturbadas, y aun más, destruidas por la radiación ultravioleta. Finalmente, hemos de destacar que, en su mayor parte, las moléculas sobreviven dentro de las nubes donde son protegidas por las partículas de polvo.

2.1.4. Polvo interestelar

El polvo interestelar está compuesto de pequeñísimos granos de materia sólida (alrededor de $100\mu m$) que habitan en nubes moleculares y contribuyen a absorber la luz. Justamente es en este oscurecimiento donde está su importancia ¹, ya que

¹también actúa como catalizador en la formación de moléculas de hidrógeno, absorbiendo átomos en su superficie

dada esa condición actúa como un escudo protector contra las radiaciones, preservando y favoreciendo con ello a las reacciones químicas que se deben producir en las zonas oscuras para que se formen las moléculas complejas. Ahora bien, hay tres maneras de detectar el polvo interestelar: radiación infrarroja de las partículas calientes, extinción de la luz visible y nebulosas de reflexión.

1. El polvo es calentado por radiación ultravioleta, y por lo tanto emite un espectro de cuerpo negro que llega al máximo en el infrarrojo. El polvo emite en el infrarrojo pero bloquea la luz visible. Por lo tanto, la imagen infrarroja es brillante mientras que la imagen óptica es oscura y viceversa.
2. *Nebulosa oscura*: es la mancha oscura en la Vía Láctea y las nubes oscuras observadas en otros lugares. Estas nebulosas oscuras son frecuentemente llamadas "nubes de polvo", sin embargo, ellas están formadas principalmente de gas. El rango en tamaño de estas nubes va de menos de 1 pc a un poco más de 10 pc. Muchas nebulosas absorben cerca del 75 % de la luz de las estrellas, algunas absorben incluso hasta 95 % en algunos casos.
3. *Nebulosas de reflexión*: éstas brillan por la luz dispersada, en gran parte de la misma manera que el cielo azul brilla por la luz solar dispersa. Estas nebulosas son siempre de color azulado, y son fácilmente distinguibles de las regiones HII dado que éstas siempre son de color rojizo. Las líneas espectrales de estas nebulosas se asemejan más al espectro de las estrellas cuya luz dispersan.

2.1.4.1. Polvo interestelar difuso

De manera análoga al gas interestelar difuso, también existe el polvo interestelar difuso. Este polvo es difícilmente detectado, y únicamente puede ser encontrado observando "clusters" a grandes distancias y comparándolas con "clusters" cercanos. Estos grupos de estrellas distantes aparecerán más rojas y débiles de lo que

deberían para esa distancia. Este es el resultado de dos fenómenos causados por el polvo interestelar difuso: extinción y enrojecimiento.

- *Extinción*: el polvo interestelar difuso oscurece las estrellas: la mayoría de la luz estelar de las estrellas lejanas se ha extinguido antes de llegar a la Tierra. Tal extinción es causada tanto por la dispersión como por la absorción. Determinar qué efecto es más importante es imposible sin un conocimiento detallado de la composición y el tamaño de las partículas de polvo. Como la mayoría del polvo interestelar está en el plano de la Vía Láctea, sólo podemos ver las galaxias que están por encima o por debajo de ésta.
- *Enrojecimiento*: El polvo dispersa la luz azul con mayor eficacia que la luz roja. Como resultado aparecen las estrellas más rojas de lo que serían si no hubiera polvo en la línea de visión. Desde una distancia de $3,000pc$ a través del disco, sólo el 2,5% de la luz azul nos va a alcanzar, mientras que el 6% de la luz roja llega a nosotros. La eficiencia de dispersión disminuye con el decrecimiento de la frecuencia de la luz. Esto significa que podemos ver profundamente en la Vía Láctea mediante ondas de radio o radiación infrarroja, pero no en la radiación ultravioleta.

2.2. Evolución estelar

Los cúmulos en las nubes moleculares gigantes frecuentemente son fuentes de radiación infrarroja, producto del polvo que se ha calentado. Si la nube está colapsando el polvo se calienta porque como éste cae hacia el centro, la energía potencial es liberada en forma de calor. La idea de que se calienta cuando la nube está colapsando es el punto central en la teoría de formación estelar. Ahora bien, los mecanismos que desencadenan el colapso de los cúmulos no se entienden muy bien y la mayoría de los autores proponen dos mecanismos para el colapso: el primero dice

que la nube simplemente comienza siendo turbulenta y luego debido al efecto gravitacional ella empieza a colapsar y por ende aumenta la formación de cúmulos. El segundo mecanismo es que debido a la explosión de una supernova en la vecindad el frente de onda "barre" el polvo y el gas, causando la formación de regiones más densas. De nuevo, la gravedad hace la mayor parte del trabajo para que colapse en cúmulos. Ahora bien, para que un cúmulo colapse debe ser suficientemente grande y denso de tal manera que la velocidad media de las partículas sea mayor que la velocidad de escape. Bajo la influencia *únicamente* de la gravedad, los cúmulos deben tomar aproximadamente 100,000 años para el colapso. Pero se sabe que las estrellas tardan mucho más para su formación, de lo contrario, habrían muchas más de ellas. El campo magnético galáctico, el cual atraviesa la nube, retrasa el colapso. Partículas cargadas como protones, tienen mucha dificultad para atravesar las líneas de campo magnético. Cuando una partícula cargada interactúa con una línea de campo magnético, ésta empieza a orbitar esa línea y puede incluso viajar a lo largo de la línea, pero no cruzarla. Partículas neutras (neutrones) no tienen este problema, y pueden cruzar las líneas de campo a fin de agruparse en el centro del cúmulo. Luego de algunos millones de años la fuerza gravitacional generada en las partículas neutras en el centro vence la resistencia al colapso debido al campo magnético y rápidamente se acumula masa en el núcleo. Ya en este punto de la formación estelar han transcurrido alrededor de 100,000 años.

En el mismo orden de ideas, una **protoestrella** es un cúmulo de una nube molecular gigante que está colapsando rápidamente, pero no lo suficiente para formar una estrella; podemos ver en [Stahler and Palla, 2004] características y discusiones sobre lo que es una protoestrella. Además, recordemos que una protoestrella es una etapa previa a la formación de la estrella.

El estado protoestrella es aquel en el cual la gravedad del cúmulo apenas supera al campo magnético y también cuando empieza a encenderse. Consecuentemente, varios procesos ocurren en la etapa de protoestrella, estos son:

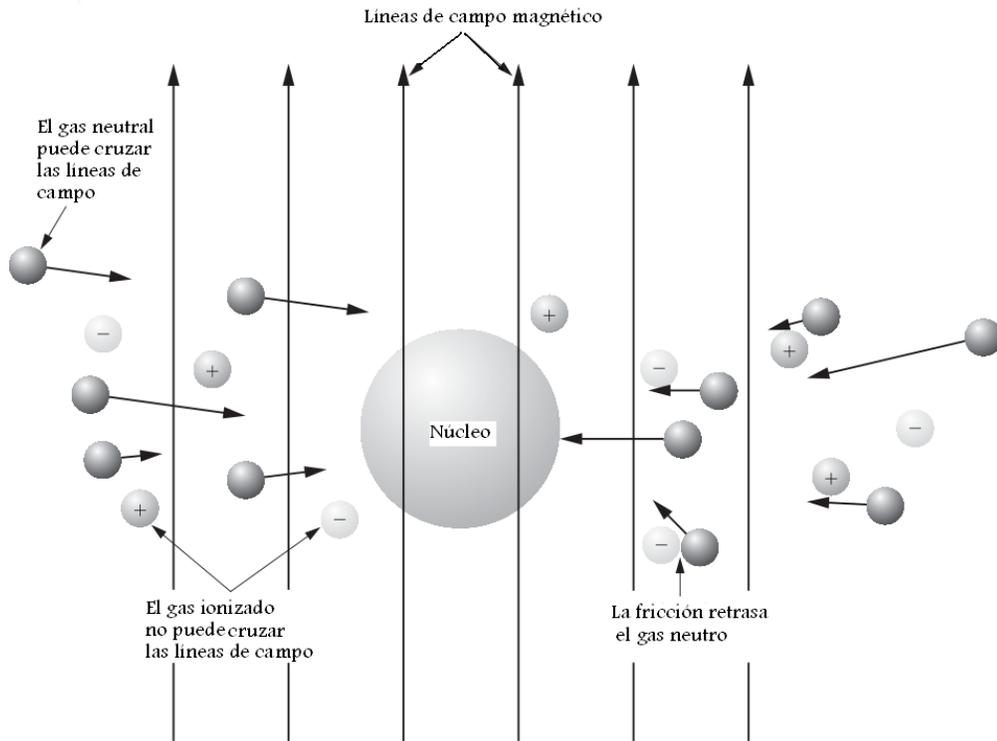


Figura 2.2: Partículas cargadas que no pueden cruzar fácilmente la líneas de campo magnético ([Stacey, 2002])

- **Material que cae dentro de la protoestrella:** como el material que se dirige hacia la protoestrella, ésta empieza a aumentar su densidad y por lo tanto aumenta su opacidad. Como este objeto llega a ser más denso y más opaco, los fotones requieren de mayor tiempo para escapar. Como resultado la temperatura de la protoestrella empieza a aumentar rápidamente.
- **Formación de un disco:** la rotación causa que la nube se aplane con el colapso. Esto se debe, además, a la conservación del momento angular. La rapidez de rotación del disco se incrementa mientras el material cae en espirales hacia el centro. Estos discos pueden desaparecer eventualmente dado que:
 1. *La evaporación a causa de objetos cercanos:* si hay una estrella muy brillante cerca, su calor puede hacer evaporar el material del disco, y dispersarlo

de nuevo al medio interestelar.

2. *La dispersión del viento*: una vez que el viento de la estrella central se inicie, este puede transferir momentum a las partículas del disco y disipar el material de nuevo al medio interestelar.

3. *Formación planetaria*: los planetas se pueden formar de tales discos.

- **Incremento en la temperatura y presión**: una vez que la protoestrella llega a ser opaca, ésta puede radiar una gran cantidad de energía producida por la caída del material en el centro. Esta energía es atrapada en el interior de la protoestrella y causa que la temperatura aumente. Como las partículas caen hacia el centro, la densidad se incrementa. De la ley de los gases ideales se tiene como resultado que se incrementa la presión. Tal presión desacelera un poco, aunque no detiene el colapso gravitacional.
- **Surgimiento de vientos**: los astrónomos no están completamente seguros por qué, pero en este estado de la evolución la protoestrella empieza a desplazar la masa que se encuentra a su alrededor, esto retrasa la "caída" de más masa hacia el centro del núcleo. Los vientos producidos son masivos, alrededor de $10^{-7} M_{\odot}$ por año, y no sólo llevan con ellos energía y masa, sino que, además, disipan momento angular. Si el Sol estuviera perdiendo masa rápidamente, él podría perder toda su masa únicamente en 10 millones de años, un período astronómicamente corto.
- **Fuerte incremento de la presión y la temperatura**: la presión y la temperatura continúan aumentando en la región central de la protoestrella. Eventualmente la fusión del hidrógeno comienza y la protoestrella se mueve hacia la secuencia principal y finalmente termina en una estrella.

Finalmente, una vez que hemos introducido algunos conceptos necesarios para este trabajo, veremos una breve -pero importante- introducción teórica de lo que es la autosimilaridad y algunos conceptos referentes a esta.

2.3. Autosimilaridad

La teoría de dimensionalidad y similaridad es muy importante para modelar varios fenómenos. *Modelar* es la sustitución en la investigación de un fenómeno natural particular por el estudio de otro análogo, en el modelo, a una pequeña o gran escala, usualmente bajo condiciones de laboratorio definidas.

El principal propósito de modelar es obtener las respuestas requeridas, es decir, las características y efectos de varias cantidades relacionadas con el evento estudiado bajo condiciones naturales, en base a experimentos que den la “misma” respuesta que daría en el caso real . En muchos casos, modelar está basado en el análisis de fenómenos físicos similares.

Podemos exponer, sin pérdida de generalidad, la siguiente cita: *Dos objetos son similares si por las características dadas del fenómeno, es posible obtener las características del otro por simple conversión, la cual es análoga a la conversión de un sistema de unidades a otro .*

El factor de escala debe ser conocido si se quiere realizar la conversión. Propiedades numéricas de dos diferentes, pero similares fenómenos, pueden ser tratados como si fueran el mismo fenómeno, expresado en términos de dos diferentes sistemas de unidades. Ahora bien, para una serie de éstos, todas las características adimensionales (combinaciones adimensionales de cantidades dimensionales) tienen el mismo valor numérico.

Asimismo, podemos decir que el *criterio de similaridad* ([Sedov, 1993]) establece que la condición necesaria y suficiente para que dos fenómenos sean similares es que los valores de los coeficientes que forman la base del sistema sean constantes. Si las condiciones de similaridad son satisfechas, entonces para el cálculo de los parámetros reales basados en el modelo, es necesario tener el factor de escala.

Entonces, la ecuación a partir de la cual podemos verificar si dos eventos son similares es llamada *fórmula dimensional* (ver [Sedov, 1993]) y se puede considerar una definición corta y característica que nos permite obtener cantidades derivadas.

Es posible mencionar una dimensión únicamente cuando su aplicación es referida a un sistema de unidades. En el apéndice A se muestra que la forma de la fórmula dimensional es determinada por la siguiente condición física: *la tasa de dos valores de alguna cantidad derivada no debería depender de la elección de las escalas para las unidades de medida.*

Entonces, la fórmula de dimensional (en el caso más simple) sería:

$$\varphi = C\alpha^m. \quad (2.1)$$

Ahora bien, dado que ya se conoce la fórmula dimensional, es necesario decir que para que un fenómeno presente autosimilaridad, es necesario que todas las ecuaciones dependan únicamente de la variable autosimilar. Es común encontrar formas diferentes de ésta, pero en general los autores concuerdan (ver por ejemplo [Zel'dovich, 1968]) en que la variable autosimilar es de la forma:

$$\xi = \frac{r}{R(t)}, \quad (2.2)$$

con $R(t) = A(kt)^\alpha$ donde el valor explícito de α depende del problema particular. Por otra parte, hay varios tipos de similaridad, y varias clases (refiérase a [Landau, 1999], [Zel'dovich, 1968] y [Sachdev, 2009]). Nosotros mencionaremos las que nos parecen relevantes: similaridad de tipo 1 y 2. La primera cubre todos los casos en los que las ecuaciones permiten obtener de manera directa el exponente α (y los demás exponentes involucrados) a partir de las leyes de conservación. El segundo tipo de movimiento -el importante para nuestro caso- es aquel que necesita de la solución del problema para elegir adecuadamente los valores de α ; o dicho de otra manera, la autosimilaridad de tipo 2 es aquella donde no es posible encontrar los exponentes de los factores de escala mediante las leyes de conservación.

En otro orden de ideas, una vez que hemos introducido la variable autosimilar y la teoría indispensable sobre ella (y sus transformaciones), debemos hablar acerca de qué método numérico implementaremos a fin de solucionar nuestro problema. Es claro que a pesar de usar las transformaciones autosimilares para simplificar el problema, sigue siendo complejo encontrar una solución analítica por cuanto sólo nos queda recurrir a técnicas numéricas. Enunciaremos la teoría asociada a tales técnicas en la siguiente sección.

2.4. Métodos numéricos

En la rama del análisis numérico hay diversos métodos que son útiles para resolver ecuaciones diferenciales, dentro de los cuales podemos nombrar: el método de aproximaciones sucesivas, el método de Taylor, el método de Runge Kutta (cualquiera de sus versiones) etc... Hemos hecho uso del método de Runge Kutta y por ende, hablaremos ciertas cosas sobre éste de manera introductoria.

Los métodos de Runge-Kutta (RK) están basados en la fórmula de expansión de Taylor, pero en general da mejores algoritmos para la solución de una ecuación diferencial ordinaria (ODE). La filosofía básica es que proporciona un paso intermedio en el cálculo de y_{n+1} . Veamos esto, consideremos primero las siguientes definiciones:

$$\frac{dy}{dx} = f(t, y), \quad (2.3)$$

y tenemos además:

$$y(t) = \int f(\bar{t}, \bar{y}) d\bar{t}, \quad (2.4)$$

y adicionalmente:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\bar{t}, \bar{y}) d\bar{t}. \quad (2.5)$$

Para demostrar la filosofía detrás de los métodos de RK, vamos a considerar el método RK de segundo orden (RK2). La primera aproximación consiste en expandir $f(t, y)$ alrededor del centro del intervalo de integración $[t_n, t_{n+1}]$, es decir, en $t_n + h/2$, donde h es el paso. Usando la fórmula del punto medio para la integral, y definiendo a $y(t_n + h/2) \equiv y_{n+1/2}$ y $t_n + h/2 \equiv t_{n+1/2}$, obtenemos:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\bar{t}, \bar{y}) d\bar{t} \approx hf(t_{n+1/2}, y_{n+1/2}) + O(h^3) \quad (2.6)$$

Esto significa a su vez que tenemos:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1/2}, y_{n+1/2}) + O(h^3). \quad (2.7)$$

Sin embargo, no conocemos el valor de $y_{n+1/2}$. Aquí haremos una nueva aproximación, es decir, haremos uso del método de Euler para aproximar el valor de $y_{n+1/2}$. Entonces tenemos:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h \frac{dy}{dx} = y(t_n) + \frac{1}{2}hf(t_n, y_n). \quad (2.8)$$

Eso significa que nosotros podemos definir el siguiente algoritmo para el método de Runge-Kutta de segundo orden (RK2):

$$k_1 = hf(t_n, y_n), \quad (2.9)$$

$$k_2 = hf(t_{n+1/2}, y_n + k_1/2), \quad (2.10)$$

con el valor final:

$$y_{n+1} = y_n + k_2 + O(h^3). \quad (2.11)$$

La diferencia entre el método previo de un sólo paso es que ahora se necesita un paso intermedio para la evaluación, es decir $t_n + h/2 = t_{n+1/2}$ donde evaluamos la derivada f . Esto involucra más operaciones, pero la ganancia es una mejor estabilidad en la solución.

Por otra parte, recordemos concretamente la fórmula del método de Euler, esta es:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad (2.12)$$

con un incremento de x_n a $x_{n+1} = x_n + h$. Además, observemos que el error de esta ecuación es de segundo orden. Por otra parte, notemos que hay varias razones para no implementar este método:

- El método no es muy preciso en comparación con otros respecto al mismo paso.
- No es un método muy estable, por lo tanto requiere que h sea pequeño (ver por ejemplo discusión sobre el "stiff" de la integración de ecuaciones diferenciales en [William H. Press and Flannery, 2007]).

Consideremos, sin embargo, usar un paso de prueba del punto medio del intervalo. Entonces, usemos los valores del punto medio tanto para x como para y para calcular el verdadero paso en todo el intervalo. Esto no es más que:

$$k_1 = hf(x_n, y_n), \quad (2.13)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right), \quad (2.14)$$

$$y_{n+1} = y_n + k_2 + O(h^3). \quad (2.15)$$

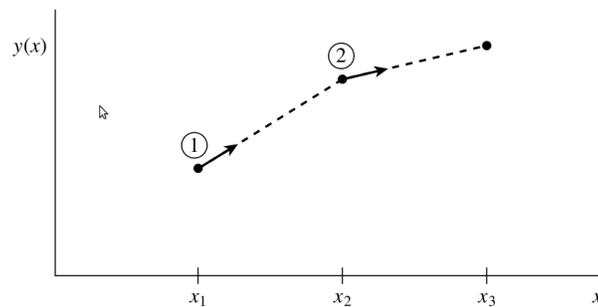


Figura 2.3: Método de Euler. El más simple método de integración de una EDO, la derivada en el punto inicial de cada intervalo, es extrapolada para encontrar el valor de la función siguiente.

Ahora bien, dependiendo de cuan exacto requiera el estudio, necesitaremos disminuir el error obtenido. Con esto claro, es posible obtener relaciones más precisas del método de Runge Kutta donde el error disminuye considerablemente. Uno

de los métodos de Runge Kutta más usado es el de cuarto orden, cuyas relaciones son:

$$k_1 = hf(x_n, y_n), \quad (2.16)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right), \quad (2.17)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right), \quad (2.18)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3), \quad (2.19)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + O(h^5). \quad (2.20)$$

El método de Runge Kutta de cuarto orden requiere cuatro evaluaciones de la parte derecha de la ecuación anterior por paso h . Este método será superior al método del punto medio si al menos es posible doblar el paso y obtener la misma precisión. Destaquemos el hecho que lo anterior es posible casi siempre pero no siempre; además, el método citado trata a cada paso en una secuencia de paso de la misma manera. Ahora bien, antes de concluir esta sección debemos mencionar que para la elaboración del método de RK es necesario usar el método de cuadratura de Gauss (rara vez mencionado en las demostraciones de las diferentes fórmulas de Runge-Kutta) que se basa en "cambiar" la integral por una suma finita (el detalle de este procedimiento y de un panorama mucho más rico sobre los métodos explícitos e implícitos de RK se pueden ver en [Iserles, 1996]).

Podría surgir la duda de por qué hacer uso de fórmulas de cuarto orden y no de orden superior. Bien, los métodos de orden superior tienen un error de truncamiento mejor, pero también requieren más cálculo, esto es, más evaluaciones de $f(\mathbf{y}, t)$. Hay dos opciones: hacer más pasos con un h pequeño usando un método de orden inferior o hacer pocos pasos con un h más grande usando un método de orden superior. Ya que los métodos de Runge-Kutta de órdenes superiores son muy complicados, el esquema de cuarto orden dado anteriormente es muy conveniente. Entre paréntesis, el error de truncamiento local para Runge-Kutta de cuarto orden es $O(h^5)$.

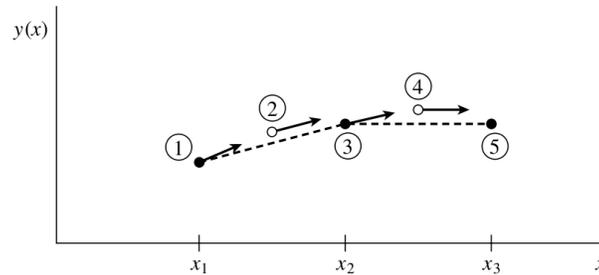


Figura 2.4: Método de Runge Kutta de segundo orden o método del punto medio. Se obtiene una precisión de segundo orden usando la derivada inicial en cada paso y encontrando el punto intermedio en el intervalo, y la derivada del punto medio para el final del intervalo. Los puntos vacíos corresponden a valores de la función que han sido descartados una vez que hemos calculado y usado las derivadas, mientras que los puntos llenos representan la función final.

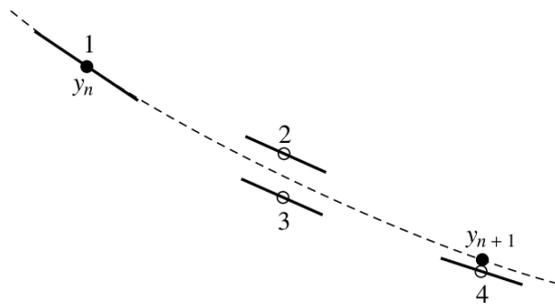


Figura 2.5: Método de Runge Kutta de cuarto orden. En cada paso la derivada es evaluada cuatro veces: una vez en el punto inicial, dos veces en puntos de medios de prueba, y una vez en el punto final de prueba. De esas derivadas el valor de la función final (se muestra como puntos llenos) es calculada.

Tipo de nebulosa	Densidad (g/cm^3)	Temperatura (K)	Tiempo de vida media (años)	Tamaño típico (pc)	Composición
Región HII	$10^{-25} - 10^{-17}$	10,000	10 millones	decenas-100	Principalmente hidrógeno gas
Nube molecular gigante: cúmulos fríos	$10^{-20} - 10^{-18}$	10	Billones	0.1	Hidrógeno Gas molecular polvo
Nube molecular gigante: cúmulos calientes	$10^{-25} - 10^{-17}$	30 - 100	Millones	0.1-3	Hidrógeno Gas molecular
Nebulosa de reflexión	$10^{-25} - 10^{-17}$	< 1,000	Millones -billones	< 1 - 10	Gas y polvo interestelar
Nebulosa de emisión	$10^{-25} - 10^{-17}$	< 1,000 -10,000	pocos miles -100,000	< 0,01 - <i>poco</i>	Gas atómico y molecular
Nebulosa oscura	$10^{-25} - 10^{-17}$	< 1,000	Millones -billones	< 1 - 10	Gas polvoriento
Gas interestelar difuso	10^{-27}	7,000 -10,000	No aplica	No aplica	Hidrógeno

Tabla 2.1: *Propiedades de la composición del medio interestelar. Estos valores son aproximados. Para mayor referencia consulte [Stacey, 2002]*

CAPÍTULO

3

ECUACIONES BÁSICAS

Las ecuaciones que describen el colapso de una nube molecular y su evolución hasta llegar a su fase de protoestrella y finalmente a estrella son las ecuaciones de dinámica de gases. Considerando el efecto gravitacional y difusivo, entonces hemos de considerar sólo 4 ecuaciones: la conservación de la masa, la del momento, la ecuación de Poisson y la ecuación de la energía. Por otra parte, es necesario una relación que vincule las variables termodinámicas (una ecuación de estado) y tomar una forma funcional del valor del coeficiente de difusión a fin de introducir de manera explícita su carácter no lineal.

3.1. Ecuaciones hidrodinámicas

Es de conocimiento común que el estado de un fluido queda completamente determinado por el flujo de velocidades y dos variables termodinámicas, pues cualesquiera de las variables que se requieran es posible calcularlas haciendo uso de la

ecuación de estado. Además, es necesario a fin de modelar el carácter no lineal del coeficiente difusivo introducir su forma funcional.

3.1.1. Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad o la llamada ecuación de conservación de la masa es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{r}, t) + \nabla \cdot (\rho(\vec{r}, t) \vec{u}(\vec{r}, t)) = 0, \quad (3.1)$$

donde debemos destacar que $\rho(\vec{r}, t) \equiv \rho$ y $\vec{u}(\vec{r}, t) \equiv \vec{u}$, donde \vec{u} representa el flujo de velocidad y ρ representa la densidad del fluido. Escribiendo nuevamente la relación 3.1 en forma abreviada:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (3.2)$$

3.1.2. Ecuación de conservación del momento

La ecuación de movimiento o segunda ley de Newton se expresa de la siguiente manera:

$$\rho(\vec{r}, t) \frac{D}{Dt} \vec{u}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \left(-\nabla \phi(\vec{r}, t) \right) - \nabla p(\vec{r}, t). \quad (3.3)$$

Donde $\frac{D}{Dt}$ es lo que se conoce como derivada lagrangiana. $\frac{D\vec{u}}{Dt}$ no debe interpretarse como la tasa de cambio de la velocidad de un fluido en un punto fijo del espacio, pues ésta varía en el espacio. Según [Landau, 1999], el cambio $d\vec{u}$ en la velocidad de una partícula de fluido dada durante el tiempo dt está compuesta de dos partes: el cambio durante dt en la velocidad en un punto fijo en el espacio, y la diferencia entre las velocidades (en el mismo instante de tiempo) de dos puntos distintos $d\vec{r}$ separadas, donde $d\vec{r}$ es la distancia recorrida por la partícula de fluido durante el tiempo dt . Por otra parte, la derivada lagrangiana no es más que:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla. \quad (3.4)$$

Sabiendo esto, y escribiendo sin colocar la dependencia de las funciones, tenemos:

$$\rho \frac{D}{Dt} \vec{u} = \rho(-\nabla\phi) - \nabla p. \quad (3.5)$$

3.1.3. Ecuación de Poisson

Sea ϕ el potencial newtoniano gravitacional del campo debido al fluido, éste debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial:

$$\nabla^2\phi(\vec{r}, t) = 4\pi G\rho(\vec{r}, t), \quad (3.6)$$

donde G es la constante newtoniana de gravitación (ver por ejemplo [Landau, 1999])

3.1.4. Ecuación de la conservación de la energía

La ecuación de la energía puede verse en [Landau, 1999], aunque nosotros hemos tomado otra vía para obtenerla (un poco más simplificada) partiendo de la conocida relación termodinámica:

$$d\epsilon = \delta Q + \delta W, \quad (3.7)$$

Esto se traduce de la manera usual, es decir, el cambio de la energía por unidad de masa ϵ entre dos estados de equilibrio es la suma del incremento en la energía calórica por unidad de masa y el trabajo hecho por unidad de masa sobre el sistema. Al desarrollar la expresión anterior y trabajarla un poco (ver apéndice C) llegamos a:

$$\frac{D}{Dt}\epsilon = \frac{1}{\rho}(-p\delta_{ij})\nabla \cdot \vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot (v(T, \rho)\nabla T) + \frac{1}{\rho\sigma}j^2, \quad (3.8)$$

donde v es el coeficiente de difusión, T es la temperatura, σ es la conductividad eléctrica, j es la densidad de corriente y las demás variables tienen el significado usual. Aunque en la ecuación de la energía está presente un término asociado a

la interacción eléctrica, lo hemos ignorado en nuestro modelo. Por otra, podemos ver un tratamiento detallado de la ecuación de la conservación de la energía en [Boyd and Sanderson, 2003]

3.2. Ecuación de estado

Para vincular las variables termodinámicas del problema nos valdremos de la ecuación de estado del gas ideal:

$$PV = nRT, \quad (3.9)$$

donde n es el número de moles, R es la constante de los gases ($8,314472\text{J/mol}\cdot\text{K}$) y las demás variables tienen el significado usual, esto es: P es la presión, V es el volumen y T la temperatura. Para fines prácticos, reescribiremos la ecuación anterior convenientemente para su uso directo en el futuro, en efecto, al reescribir tenemos:

$$\frac{(Z+1)k_B}{\mu} T(\vec{r}, t) = \frac{p(\vec{r}, t)}{\rho(\vec{r}, t)} = (\gamma - 1)\epsilon(\vec{r}, t), \quad (3.10)$$

escribiendo sin las dependencias tenemos:

$$\frac{(Z+1)k_B}{\mu} T = \frac{p}{\rho} = (\gamma - 1)\epsilon, \quad (3.11)$$

donde k_B es la constante de Boltzmann, μ es la masa atómica media, γ es la tasa de calor específico y Z es el estado de ionización.

3.3. Elección de la dependencia funcional de ν

Primero, recordemos qué es la conductividad térmica. Ésta es una magnitud escalar si el medio es isotrópico (en cuyo caso \vec{q} es colineal a ∇T) o tensorial si el medio es anisótropo (ya no estarán alineados \vec{q} y ∇T). Es conocido que la forma explícita de ν no se sabe con certeza y pocos autores han hecho concretamente trabajos

dándole la importancia que merece su carácter altamente no lineal. Libros básicos como [Dina, 2000] o [Clarke and Carswell, 2007] hablan brevemente sobre esto. En nuestro caso particular, se tomó un vínculo donde relacionamos el coeficiente de difusión con la densidad y la temperatura, y tal vínculo lo escribimos de la siguiente forma:

$$\nu(\rho, T) = \nu_0 \frac{T(\vec{r}, t)^n}{\rho(\vec{r}, t)^m}, \quad (3.12)$$

escribiéndolo de una manera más breve tenemos:

$$\nu = \nu_0 \frac{T^n}{\rho^m}, \quad (3.13)$$

donde $n > 0$ y $m > 0$ son valores físicos normales, pues es usual que el coeficiente de difusión aumente con la temperatura y disminuya a mayor densidad.

Ahora, con todo lo anterior dicho, puede verse que para resolver completamente el problema es necesario resolver un sistema de 5 ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, acopladas y no lineales (es decir 3.1, 3.3, 3.6, 3.8 y 3.10). Por lo tanto, analíticamente es sumamente complicado, lo cual nos lleva a resolver este problema de manera numérica. Por tanto, si bien es cierto que podemos solucionar el problema, aun haciendo uso de herramientas numéricas, sigue siendo difícil tal resolución, por cuanto son ecuaciones en derivadas parciales y altamente no lineales, es por eso que en el siguiente capítulo haremos uso de un método a fin de simplificar considerablemente el problema: las transformaciones autosimilares.

CAPÍTULO

4

METODOLOGÍA

4.1. Grupo de transformaciones de escala

Es necesario elegir un grupo de transformaciones de las variables usadas para encontrar soluciones autosimilares. Tomamos una transformación general de la forma $A \rightarrow \lambda^\gamma \hat{A}$ para cada variable, por lo tanto el grupo de transformaciones estaría dado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}r &= \lambda^s \hat{r}, \\t &= \lambda^a \hat{t}, \\u &= \lambda^b \hat{u}, \\T &= \lambda^c \hat{T}, \\\rho &= \lambda^d \hat{\rho}, \\\phi &= \lambda^e \hat{\phi},\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde las cantidades físicas con "sombbrero" son las funciones adimensionales transformadas de las variables iniciales. Las relaciones entre las constantes a, b, c, d y e se

pueden determinar al introducir los cambios anteriores en las ecuaciones a resolver y teniendo en cuenta el hecho de que las mencionadas transformaciones deben mantener las ecuaciones invariantes. Ahora bien, escogemos "arbitrariamente" el valor de $s = 1$ y, aunque no quede del todo claro, por ahora, es una consideración hecha sólo por simplicidad la cual será explicada en detalle más adelante.

Por otra parte, recordemos que los exponentes m, n están vinculados al coeficiente de difusión (refiérase a 3.13) y éstos pueden variar dependiendo del problema particular, además, en nuestro caso los hemos tomado como $m = 2$ y $n = 13/2$ lo que representa un plasma de hidrógeno completamente ionizado.

Algunos detalles sobre cómo obtener los vínculos entre los exponentes de las transformaciones son incluidos en el apéndice B al ver la relación B.18. Al hacer uso del grupo de transformaciones anteriores podemos ver que las ecuaciones se mantienen invariantes si se cumplen ciertas relaciones, estas son:

$$1 - a = b, \quad (4.2)$$

$$b = \frac{1}{2}c, \quad (4.3)$$

$$e = 2 + d, \quad (4.4)$$

$$d - a = nc - md - 2, \quad (4.5)$$

o lo que es lo mismo:

$$1 - a = b = \frac{1}{2}c = 1 + \frac{1}{2}d = \frac{1 + 2m}{3 + 2m - 2n}. \quad (4.6)$$

Dado que hemos tomado para un caso de referencia los valores $m = 2$ y $n = 13/2$ y sustituyendo en la relación 4.6, obtenemos : $a = 11/6$, $b = -5/6$, $c = e = -3/5$ y $d = -11/3$. Como se mencionó recientemente la constante s es elegida "arbitrariamente", lo cual es justificable ya que la variable autosimilar es de la forma:

$$\xi \equiv \frac{r}{R(t)}, \quad (4.7)$$

donde la forma explícita de la función $R(t)$ no es del todo claro (al menos menos su interpretación *a priori*). Más adelante se mostrará cómo se ha de elegir la función mencionada.

Por otra parte, y siendo un poco más específicos respecto de la elección del valor de " s ", se debe notar que hemos tomado el caso más sencillo diferente de cero, lo cual no supone pérdida de generalidad, pues en el caso hipotético en que $s \neq 1$, la única diferencia sería que habría que reescribir los parámetros a, b, c, d, e, m y n , pues es necesario que sólo uno de estos exponentes varíe lo cual se puede ver de la relación B.18. En efecto:

$$\xi = \lambda^{s-\alpha a} \frac{\hat{r}}{A(k\hat{t})^\alpha}, \quad (4.8)$$

de donde se obtendría que para que las ecuaciones se preserven invariantes, α debe ser:

$$\alpha = \frac{s}{a}. \quad (4.9)$$

Veamos que el resultado anterior sustituiría el valor de α usado en nuestro caso, pero sería necesario decir que s , por ejemplo, tiene algún valor concreto o decir que α es una de los exponentes del problema, lo cual no sería un gran problema, pero como no obtenemos ninguna ganancia al permitir que s sea arbitraria, es más apropiado restringir su valor para fines prácticos.

4.2. Selección de cambios autosimilares

Tomando las ecuaciones antes mencionadas (la ecuación de Poisson 3.1.3, del momentum 3.1.2, de conservación de la masa 3.1.1 y de conservación de la energía 3.1.4) y los cambios que mostraremos a continuación, es posible eliminar la dependencia temporal de las ecuaciones básicas. En la siguiente sección implementaremos los cambios autosimilares al problema concreto, pero previamente debemos

introducir las transformaciones de una manera general a fin de tener un panorama más claro de lo que hemos hecho. Definamos la variable autosimilar “ ξ ” de la siguiente manera:

$$\xi = \frac{r}{R(t)}, \quad (4.10)$$

donde $R(t)$ es, por ahora, desconocida, pero más adelante la explicaremos con mayor detalle. Ahora bien, definamos \vec{u} , T , ρ , $\partial_r \phi$ y p en términos de nuevas funciones con prefactores que ajustan la dimensionalidad de las ecuaciones:

$$\rho(r, t) \equiv \rho_0(t)g(\xi), \quad (4.11)$$

$$u(r, t) \equiv \dot{R}(t)v(\xi), \quad (4.12)$$

$$p(r, t) \equiv \rho_0(t)\dot{R}(t)^2g(\xi)\tau(\xi), \quad (4.13)$$

$$T(r, t) \equiv \dot{R}(t)^2\tau(\xi), \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r}(r, t) \equiv GR(t)\rho_0(t)\frac{\Omega(\xi)}{\xi^2}. \quad (4.15)$$

Además, hay que recordar que la cantidad $\Omega(\xi)$ está vinculada con la densidad de la siguiente manera:

$$\Omega(\xi) \equiv 4\pi \int_0^\xi \bar{\xi}^2 g(\bar{\xi}) d\bar{\xi}. \quad (4.16)$$

Debemos destacar que las cantidades $g(\xi)$, $v(\xi)$, $\tau(\xi)$ y $\Omega(\xi)$ son funciones que no tienen dimensiones. Notemos que $R(t)$ es la escala de longitud, $\dot{R}(t)$ puede ser interpretada como la escala de velocidad y $\rho_0(t)$ es la escala de densidad. Por otra parte, destaquemos que hemos elegido a $R(t)$ y a $\rho_0(t)$ como escalas básicas, por esa razón es que las variables \vec{u} , T , ρ , $\partial_r \phi$, p y ϵ están escritas en términos de estas funciones.

4.3. Obtención de las transformaciones autosimilares

Para simplificar el problema planteado, hemos decidido emplear el método de soluciones autosimilares y para aplicarlo, es necesario conocer cómo definir adecuadamente las transformaciones que simplifiquen el problema. Además, hay que

destacar que vamos a trabajar en simetría radial esférica por lo que la parte angular de las ecuaciones no es considerada o dicho de otra manera, es "como si" estuviéramos trabajando en una sola dimensión (que vendría siendo la radial), y recalcamos **como si** pues es claro que esta consideración es consecuencia de la elección de la simetría tratada. En efecto, tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales de coeficientes variables, y las variables involucradas son:

- El vector \vec{r} .
- El tiempo t .
- El flujo de velocidad $\vec{u}(\vec{r}, t)$.
- La temperatura $T(\vec{r}, t)$.
- La densidad $\rho(\vec{r}, t)$.
- La presión $p(\vec{r}, t)$.
- El potencial gravitacional $\phi(\vec{r}, t)$.

Ahora bien, al introducir la relación 4.7 vemos que $R(t)$ no tiene una interpretación clara, pero basta con saber que una correcta elección de tal función es necesaria para que el problema pueda ser simplificado al máximo. Respecto del punto de cómo elegir una cierta función $R(t)$ hay que explicar algunas cosas: la relación trivial (ver B.15) no es una buena elección pues es demasiado restrictiva. Esto se puede observar claramente al aplicar las transformaciones 4.2 y las relaciones 4.11, 4.12, 4.13 4.14 y 4.15 a las ecuaciones de nuestro modelo y al obtener la solución nos damos cuenta de que la constante de separación entre las variables espaciales y temporales es obligatoriamente la unidad. Hecho acerca del cual varios autores han alzado la voz, dentro de los cuales destaca *Stanyukovich* (ver [Zel'dovich, 1968]). De lo anterior, es obvio que una dependencia funcional de $R(t)$ de forma exponencial

no es la más adecuada, sin embargo, es posible tomar una forma de ley de potencia, por ejemplo:

$$R(t) = A(kt)^\alpha. \quad (4.17)$$

Para nuestro caso particular tendríamos que sería:

$$R(t) = A(kt)^{\frac{1}{a}}. \quad (4.18)$$

Una vez seleccionado el valor de $R(t)$, queda elegido también $\rho_o(t)$ como se puede ver detalladamente en el apéndice B en la relación B.13. Entonces, haciendo uso de 4.11, 4.12, 4.13, 4.14, 4.15 y de las funciones temporales, podemos elegir unas transformaciones concretas que eliminen la dependencia temporal en las ecuaciones, en efecto, ellas son:

$$u(r, t) = \frac{A}{a} (kt)^{\frac{b}{a}} v(\xi), \quad (4.19)$$

$$T(r, t) = \left(\frac{A}{a} \right)^2 (kt)^{\frac{c}{a}} \tau(\xi), \quad (4.20)$$

$$\rho(r, t) = B(kt)^{-2} g(\xi), \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r}(r, t) \equiv ABG(kt)^{\frac{e-1}{a}} \frac{\Omega(\xi)}{\xi^2}, \quad (4.22)$$

$$\Omega(\xi) \equiv 4\pi \int_0^\xi \bar{\xi}^2 g(\bar{\xi}) d\bar{\xi}, \quad (4.23)$$

donde A y B son constantes positivas que definen las escalas del radio y la densidad, respectivamente. Por otra parte, usamos la relación $d/a = -2$. Al implementar las relaciones anteriores en las ecuaciones que queremos resolver (es decir, Ec conservación de la masa, del momentum, de Poisson y de la energía) obtenemos:

$$-\left(\xi - v(\xi)\right) \frac{dg}{d\xi} + \left(d + \frac{dv}{d\xi} + 2\frac{v(\xi)}{\xi}\right) g(\xi) = 0 \quad (4.24)$$

$$bv(\xi) - \left(\xi - v(\xi)\right) \frac{dv}{d\xi} + \frac{1}{g(\xi)} \frac{d}{d\xi} \left(g(\xi)\tau(\xi)\right) + K_1 \frac{\Omega(\xi)}{\xi^2} = 0, \quad (4.25)$$

$$\frac{\left(c\tau(\xi) - \left(\xi - v(\xi) \right) \frac{d\tau}{d\xi} \right)}{\gamma - 1} + \left(\frac{dv}{d\xi} + 2\frac{v(\xi)}{\xi} \right) \tau(\xi) = \frac{K_2}{g(\xi)\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left[\xi^2 \frac{\tau(\xi)^n}{g(\xi)^m} \frac{d\tau}{d\xi} \right] \quad (4.26)$$

Ahora, adviértase que se debe ser cuidadoso con los signos en las ecuaciones anteriores: el valor de k es $+1$ si es una expansión o -1 si es un colapso, y por la tanto, las ecuaciones anteriores darían, al considerar el signo de k , lo siguiente:

$$-\left(\pm\xi - v(\xi) \right) \frac{dg}{d\xi} + \left(\pm d + \frac{dv}{d\xi} + 2\frac{v(\xi)}{\xi} \right) g(\xi) = 0 \quad (4.27)$$

$$\pm bv(\xi) - \left(\pm\xi - v(\xi) \right) \frac{dv}{d\xi} + \frac{1}{g(\xi)} \frac{d}{d\xi} \left(g(\xi)\tau(\xi) \right) + K_1 \frac{\Omega(\xi)}{\xi^2} = 0 \quad (4.28)$$

$$\frac{1}{\gamma - 1} \left(\pm c\tau - \left(\pm\xi - v \right) \frac{d\tau}{d\xi} \right) + \left(\frac{dv}{d\xi} + 2\frac{v}{\xi} \right) \tau = \frac{K_2}{g\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left[\xi^2 \frac{\tau^n}{g^{-m}} \frac{d\tau}{d\xi} \right] \quad (4.29)$$

Nuevamente, temiendo ser demasiado obvio, el signo \pm significa que $+$ es para $t > 0$ y $-$ para $t < 0$. Además, la ecuación de Poisson no arroja ningún vínculo adicional, por lo tanto no aparece en las ecuaciones. Se puede ver que 4.28 y 4.29 presenta dos constantes positivas adimensionales, definidas de la siguiente manera:

$$K_1 = a^2 GB, \quad y \quad K_2 = \frac{v_0}{aB^{m+1}} \left(\frac{A}{a} \right)^{2n-2}, \quad (4.30)$$

es de notar que son introducidas por simplicidad. En otro orden de ideas, las relaciones 4.27, 4.28 y 4.29 forman un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden para $g(\xi)$, $v(\xi)$ y $\tau(\xi)$ donde se tienen las condiciones de borde:

$$v(\xi) \Big|_{\xi=0} = 0, \quad g(\xi) \Big|_{\xi=0} = 1, \quad \tau(\xi) \Big|_{\xi=0} = 1, \quad \frac{d}{d\xi} \left(g(\xi)\tau(\xi) \right) \Big|_{\xi=0} = 0. \quad (4.31)$$

4.4. Resolución numérica

Una vez que hemos transformado las variables de nuestro problema particular, debemos utilizar algún método numérico para resolverlo, el cual será explicado en secciones posteriores en detalle, pero para efectos prácticos diremos que será un Runge-Kutta de cuarto orden.

Para implementar métodos de cuarto orden en nuestro problema de colapso gravitacional, usaremos la función F . Esta función toma como datos: el estado actual del sistema, $\vec{x}(\xi)$; el paso de tiempo para ser usado, h ; el parámetro espacial, ξ ; la variable de conteo, i y la función $F(\vec{x}(\xi), \xi; \lambda, i)$; donde λ es una lista de parámetros usada por F . La salida es el nuevo estado del sistema, $\vec{x}(\xi + h)$, calculado por el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Veamos un pseudo código que ilustra el proceso básico de la búsqueda de las soluciones:

- *Entrada:* $\vec{x}(\xi)$, ξ , h , $F(\vec{x}(\xi), \xi; \lambda, i)$, i y λ .
- *Salida:* $\vec{x}(\xi + h)$.
- Evaluación de k_1 , k_2 , k_3 y k_4 en virtud de 2.16, 2.17, 2.18 y 2.19.
- Cálculo de $\vec{x}(\xi + h)$ usando Runge-Kutta de cuarto orden (2.20).

CAPÍTULO

5

RESULTADOS

Una vez que hemos hecho uso de las transformaciones autosimilares a fin de simplificar el problema, es necesario la implementación de alguna rutina computacional para poder llegar a la solución. Con esto en mente, hemos elegido usar el método de Runge-Kutta de cuarto orden escribiendo tal rutina en lenguaje C. Dicho esto, es necesario corroborar que nuestro código funciona adecuadamente, por lo que lo pondremos a prueba frente a un trabajo parecido a este en la siguiente sección.

5.1. Verificación del método numérico

Para resolver las ecuaciones de nuestro problema hemos implementado el método de Runge Kutta de cuarto orden, tal como mencionamos recientemente. Iniciemos la verificación de nuestro código poniéndolo a prueba bajo una situación física conocida: estudiemos el oscilador armónico.

Recordemos la conocida ecuación del oscilador armónico simple:

$$m \frac{d^2 Y}{dt^2} = -kY, \quad (5.1)$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} = -\frac{k}{m} Y, \quad (5.2)$$

donde es usual definir lo siguiente:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (5.3)$$

Además, recordemos que una posible solución a esta ecuación diferencial ordinaria sería:

$$Y(t') = \hat{Y} \sin(\omega t' + \phi), \quad (5.4)$$

donde \hat{Y} es una constante de dimensiones adecuadas y $\phi = 0$ por simplicidad. Asimismo se toma a $\omega = \frac{1}{\hat{t}}$ para preservar la adimensionalidad de la ecuación. Entonces se tendría una función de la forma:

$$Y(t') = \hat{Y} \sin(t'/\hat{t}). \quad (5.5)$$

Definamos las siguientes cantidades adimensionales y escribamos 5.5 en términos de éstas últimas:

$$y(t) = \frac{Y(t')}{\hat{Y}}, \quad (5.6)$$

$$t = \frac{t'}{\hat{t}}, \quad (5.7)$$

por tanto, se tiene finalmente:

$$y(t) = \sin(t). \quad (5.8)$$

Entonces, de 5.8 es claro que se espera una solución sinusoidal, con máximo en $\pi/2$ mínimo en $3\pi/2$ y ceros en $0, \pi$ y 2π en un intervalo de $[0, 2\pi]$. La figura 5.1 muestra la solución obtenida implementando la rutina Runge-Kutta con las condiciones iniciales $y_0 = 0$ y $v_0 = 1$:

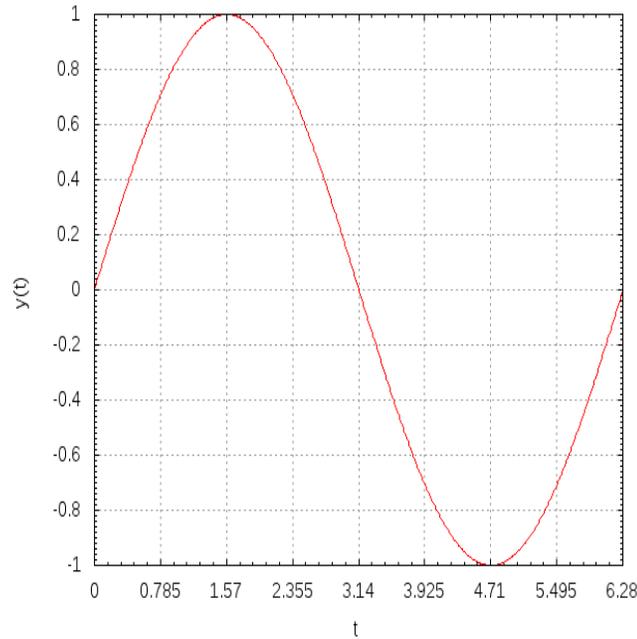


Figura 5.1: Evolución de la posición adimensional respecto del tiempo adimensional.

Se puede ver que la gráfica obtenida se ajusta perfectamente a la solución esperada, lo cual comprueba que nuestra "rutina" funciona adecuadamente.

Ahora bien, a continuación pondremos a prueba nuestra rutina RK4 con un problema de mayor envergadura, esto es, mostraremos la solución numérica de un problema "parecido" al que nos enfrentamos. A manera de referencia, diremos que resolveremos numéricamente el problema de "colapso autosimilar de esferas isotérmicas". Muchos autores han trabajado en esto pero hemos centrado nuestra atención en el artículo de *Frank H. Shu* [Shu, 1977]. En él se muestran las transformaciones usadas para dejar las ecuaciones adimensionales y, además, eliminar una de las variables, que podría ser el espacio o el tiempo. En el caso de este artículo, se ha eliminado el tiempo de las ecuaciones por lo que queda un sistema de ecuaciones diferenciales *ordinarias* acopladas. En el mencionado artículo hacen uso de

la ecuación de la masa y conservación de momentum, la primera sería:

$$\frac{\partial M}{\partial t} + u \frac{\partial M}{\partial r} = 0, \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial M}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho, \quad (5.10)$$

donde $M(r, t)$ es la masa total (núcleo más envoltura) dentro de un radio r a un tiempo t . Las relaciones 5.9 y 5.10 son equivalentes a la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u) = 0. \quad (5.11)$$

Para un flujo isotérmico ideal, la ecuación de conservación del momentum es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{GM}{r^2}, \quad (5.12)$$

donde G es la constante de gravitación universal, a es la rapidez del sonido isotérmica, r es el radio local y t es el tiempo instantáneo. Teniendo en mente las relaciones anteriores y basados en un análisis dimensional podemos obtener las siguientes soluciones autosimilares:

$$\rho(r, t) = \frac{\alpha(x)}{4\pi G t^2}, \quad (5.13)$$

$$M(r, t) = \frac{a^3 t}{G} m(x), \quad (5.14)$$

$$u(r, t) = a v(x), \quad (5.15)$$

Con la variable autosimilar elegida de la siguiente manera:

$$x = \frac{r}{at}, \quad (5.16)$$

donde $t = 0$ define el instante cuando la masa del núcleo $M(0, t) = 0$, además, el instante $t = 0$ corresponde al momento en el cual se formó el núcleo para el problema del colapso. Asimismo, la distribución de densidad será de buen comportamiento cuando $t \rightarrow 0$, lo cual implica que $\alpha(x) \rightarrow 0$ al menos tan rápido como x^{-2} cuando $|x|$ es muy grande. Ahora, sustituyendo los cambios autosimilares en

5.9 y 5.10 se obtiene:

$$m(x) - x \frac{dm}{dx} + v(x) \frac{dm}{dx} = 0, \quad (5.17)$$

$$\frac{dm}{dx} = x^2 \alpha(x), \quad (5.18)$$

al vincular las ecuaciones anteriores tenemos:

$$m = x^2 \alpha(x) (x - v(x)). \quad (5.19)$$

En consecuencia, de la relación anterior 5.19 y de 5.11 y 5.12 podemos obtener un sistema de EDOA (ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas) que las presentamos a continuación:

$$\left[(x - v(x))^2 - 1 \right] \frac{dv}{dx} = \left[\alpha(x) (x - v(x)) - \frac{2}{x} \right] (x - v(x)), \quad (5.20)$$

$$\left[(x - v(x))^2 - 1 \right] \frac{1}{\alpha(x)} \frac{d\alpha}{dx} = \left[\alpha(x) - \frac{2}{x} (x - v(x)) \right] (x - v(x)). \quad (5.21)$$

Ahora, para resolver estas ecuaciones necesitamos ciertos valores iniciales, entonces, al hacer un desarrollo en serie tenemos:

$$\alpha(x) = \frac{A}{x^2} - \frac{A(A-2)}{2x^4} + \dots, \quad (5.22)$$

$$v(x) = -\frac{A-2}{x} - \frac{(1-A/6)(A-2)}{x^3} + \dots, \quad (5.23)$$

para cuando $x > 0$. Mostramos a continuación la gráfica obtenida para cinco valores de A y $x > 0$ que la vemos en la figura 5.2. Ahora, para verificar que nuestro resultado es similar al obtenido por [Shu, 1977] en la figura 5.3: Mostramos las soluciones obtenidas por él, hemos de notar que la discrepancia entre ambas soluciones radica -entre otras cosas- en que no hemos tomado las mismas condiciones iniciales ya que en [Shu, 1977] no quedan muy claros estos detalles; sin embargo, se evidencia que la tendencia de las soluciones es la misma. Todas las funciones decrecen al aumentar x . Por otro lado, vemos que ambas soluciones cumplen que la velocidad debía ser negativa.

Ya con esta comprobación podemos estar seguros de que el código es correcto.

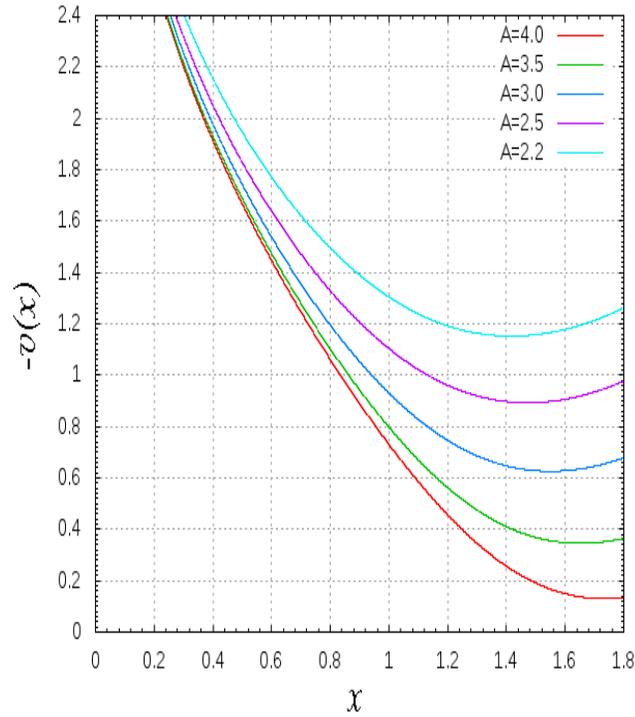


Figura 5.2: Evolución del perfil de velocidad para $x > 0$ y para cinco valores diferentes de A

5.2. Problema particular estudiado

Una vez que hemos verificado nuestro código estamos listos para analizar el problema que motiva este trabajo. En efecto, hemos hecho una extensión del programa usado anteriormente para adaptarlo a nuestros requerimientos. Veamos que para usar el método de RK4 necesitamos escribir las relaciones 4.27, 4.28 y 4.29 de manera que:

$$f^n(\vartheta) = f^{n-1}(\vartheta)\kappa, \quad (5.24)$$

en donde hay que interpretar que ϑ es la variable independiente y κ es una función que involucra, en principio, todas las variables del problema. Una vez que tengamos las ecuaciones de la forma 5.24 necesitamos hacer una reducción de orden a

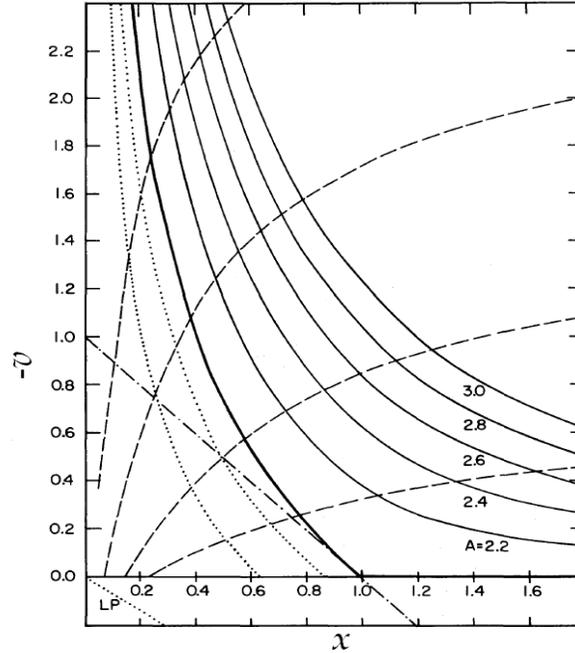


Figura 5.3: Evolución del perfil de velocidad para $x > 0$ y para 6 valores diferentes de A . En esta gráfica solo las líneas sólidas son soluciones válidas del problema del colapso [Shu, 1977]

fin de aplicar el método. En nuestro caso particular tendríamos:

$$F(v(\xi), V(\xi), g(\xi), G(\xi), \tau(\xi), \zeta(\xi), \xi, K_1, K_2, m, n, c, b, d, \gamma, i), \quad (5.25)$$

donde las primeras seis variables son dependientes, ξ es la variable independiente, y el resto son constantes, destacando que i es la variable de conteo. Ahora bien, para aplicar el método de Rk4 necesitamos escribir las ecuaciones 4.27, 4.28 y 4.29 adecuadamente, es decir, escribir una ecuación tal que sea de la forma de 5.24, y hacer los cambios necesarios hasta que tengamos ecuaciones de primer orden. Ahora, hemos de notar antes de continuar que $\Omega \equiv \Omega(\xi)$ y depende de manera integral de $g(\xi)$, por lo que una de las ecuaciones de nuestro modelo es integro-diferencial. Lo anterior, desde el punto de vista numérico, no supone demasiada complicación, este obstáculo podría ser subsanado modelando Ω con "kernels" conocidos. Este método podría ser una buena solución aunque supone una restricción en la forma de $g(\xi)$ y hemos tratado de evitar en la medida de lo posible la aplicación de su-

posiciones adicionales. Dicho esto, a fin de solventar la dificultad antes mencionada, hemos tomado el camino más simple posible: aumentar en un orden la derivada de las funciones $v(\xi)$ y $g(\xi)$. De esta manera es posible escribir las ecuaciones de la forma 5.24 y con esto solucionar el problema de manera más simple. Sin más preámbulo, al derivar 4.27, 4.28 y hacer una manipulación obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2g}{d\xi^2} = & \left[\frac{1}{(\xi + v(\xi))^2 + \tau(\xi)} \right] \left\{ -(\xi + v(\xi)) \left[\left(d - 1 - 2\frac{dv}{d\xi} - \frac{2}{\xi} \right) \frac{dg}{d\xi} + 2\frac{g(\xi)v(\xi)}{\xi^2} \right] \right. \\
& + 2b\frac{g(\xi)v(\xi)}{\xi} + g(\xi)\frac{dv}{d\xi} \left(b - 1 - \frac{dv}{d\xi} \right) + \tau(\xi)\frac{dg}{d\xi} \left[\frac{dLn(g(\xi))}{d\xi} - \frac{dLn(\tau(\xi))}{d\xi} - \frac{2}{\xi} \right] \\
& - \left(\frac{2}{\xi} \frac{d\tau}{d\xi} + 4\pi K_1 g(\xi) \right) g(\xi) - \left[\frac{g(\xi)^{m+2}}{K_2 \tau(\xi)^n} \right] \left(\frac{-c\tau(\xi) + (\xi + v(\xi))\frac{d\tau}{d\xi}}{\gamma - 1} \right. \\
& \left. + \left(\frac{dv}{d\xi} + 2\frac{v(\xi)}{\xi} \right) \tau(\xi) \right) - g(\xi)\frac{d\tau}{d\xi} \left[m\frac{dLn(g(\xi))}{d\xi} - n\frac{dLn(\tau(\xi))}{d\xi} - \frac{2}{\xi} \right] \left. \right\}, \quad (5.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2v}{d\xi^2} = & - \left[\frac{1}{(\xi + v(\xi))^2 + \tau(\xi)} \right] \left[-\frac{g(\xi)^{m+1}}{K_2 \tau(\xi)^n} (\xi + v(\xi)) \left\{ \frac{-c\tau(\xi) + (\xi + v(\xi))\frac{d\tau}{d\xi}}{\gamma - 1} \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{dv}{d\xi} + 2\frac{v(\xi)}{\xi} \right) \tau(\xi) \right\} - \frac{d\tau}{d\xi} (\xi - v(\xi)) \left[m\frac{dLn(g(\xi))}{d\xi} - n\frac{dLn(\tau(\xi))}{d\xi} - \frac{2}{\xi} \right] \right. \\
& + \left(1 + 2\frac{dv}{d\xi} + 2\frac{v(\xi)}{\xi} - d \right) \tau(\xi) \frac{dLn(g(\xi))}{d\xi} + (\xi + v(\xi)) \left\{ 2b\frac{v(\xi)}{\xi} \right. \\
& + \left(b - 1 - \frac{dv}{d\xi} \right) \frac{dv}{d\xi} - \frac{2}{\xi} (\xi + v(\xi)) \frac{dv}{d\xi} - \frac{2}{g(\xi)\xi} \left(\frac{dg}{d\xi} \tau(\xi) + g(\xi) \frac{d\tau}{d\xi} \right) \\
& \left. \left. - \frac{dLn(g(\xi))}{d\xi} \left(\frac{d\tau}{d\xi} - \tau(\xi) \frac{dLn(g(\xi))}{d\xi} \right) - 4\pi K_1 g(\xi) \right\} \right]. \quad (5.27)
\end{aligned}$$

Por otra parte, escribimos de manera explícita la segunda derivada del perfil de temperatura de las ecuaciones originales (véase 4.29):

$$\begin{aligned} \frac{d^2\tau}{d\tilde{\xi}^2} = & \frac{g(\tilde{\xi})^{m+1}}{K_2\tau(\tilde{\xi})^n} \left[\frac{-c\tau(\tilde{\xi}) + (\tilde{\xi} + v(\tilde{\xi}))\frac{d\tau}{d\tilde{\xi}}}{\gamma - 1} + \left(\frac{dv}{d\tilde{\xi}} + 2\frac{v(\tilde{\xi})}{\tilde{\xi}} \right) \tau(\tilde{\xi}) \right] \\ & + \frac{d\tau}{d\tilde{\xi}} \left(m\frac{dLn(g(\tilde{\xi}))}{d\tilde{\xi}} - n\frac{dLn(\tau(\tilde{\xi}))}{d\tilde{\xi}} - \frac{2}{\tilde{\xi}} \right). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Una vez hecho esto, hemos evadido la dificultad antes mencionada (sobre la ecuación integro-diferencial) y ahora podemos aplicar de manera natural el algoritmo de Runge Kutta de cuarto orden, teniendo presente que hay que hacer una reducción de orden hacemos los cambios siguientes:

$$\frac{dv}{d\tilde{\xi}} \equiv V(\tilde{\xi}), \quad (5.29)$$

$$\frac{dg}{d\tilde{\xi}} \equiv G(\tilde{\xi}), \quad (5.30)$$

$$\frac{d\tau}{d\tilde{\xi}} \equiv \varsigma(\tilde{\xi}). \quad (5.31)$$

Las definiciones 5.29, 5.30 y 5.31 las sustituiremos en las ecuaciones 5.26, 5.27 y 5.28, para obtener un sistema de primer orden. Ahora bien, como hemos aumentado en un orden $v(\tilde{\xi})$ y $g(\tilde{\xi})$, es necesario tener condiciones para las derivadas de estas funciones. Hemos realizado un desarrollo asintótico para $\tilde{\xi} \ll 0$ que sería el lugar donde iniciaría la rutina del programa. Tal desarrollo se muestra en el apéndice D. El desarrollo asintótico mencionado no es otro que:

$$g(\tilde{\xi}) = 1 - g_0\tilde{\xi}^2, \quad (5.32)$$

$$\tau(\tilde{\xi}) = 1 - \tau_0\tilde{\xi}^2, \quad (5.33)$$

$$v(\tilde{\xi}) = -v_0\tilde{\xi}. \quad (5.34)$$

De la construcción anterior, y recordando que los valores de m, n son los exponentes del coeficiente de difusión introducidos en la ecuación 3.13, tenemos que los valores

de las constantes introducidas en el desarrollo son:

$$v_0 = \frac{2}{3} \frac{(n-1)}{(n-m-3/2)}, \quad (5.35)$$

$$\tau_0 = \frac{(\gamma-1)n - m - \gamma + 1/2}{3(\gamma-1)(n-m-3/2)K_2}, \quad (5.36)$$

$$g_0 = \frac{2}{3}\pi K_1 - \tau_0 - v_0^2/4, \quad (5.37)$$

donde hemos tomado sólo un término del desarrollo por simplicidad. Por otra parte, mostramos el desarrollo asintótico para $\xi \gg 1$ de las funciones $g(\xi)$, $\tau(\xi)$ y $v(\xi)$ por cuanto pronto serán necesarias para análisis posteriores. En efecto, un desarrollo que satisface nuestro problema es:

$$g(\xi) = g_\infty \xi^{-\alpha}, \quad \tau(\xi) = \tau_\infty \xi^{-\beta}, \quad v(\xi) = -v_\infty \xi, \quad (5.38)$$

donde las constantes asociadas al desarrollo serían:

$$v_\infty = \frac{n-1}{n-m-3/2}, \quad (5.39)$$

$$\alpha = \frac{n-1}{m+1/2}, \quad (5.40)$$

$$\beta = \frac{n(m+1) - 3m - 2}{n(m+1/2)}, \quad (5.41)$$

$$\frac{\tau_\infty^n}{g_\infty^{m+1}} = \frac{(2+\beta)(\gamma-1)^{-1} - 3\alpha}{K_2\beta(\alpha-1)(\alpha+\beta-3)}. \quad (5.42)$$

Ahora bien, el problema -en principio- ya podría ser resuelto numéricamente; sin embargo, debemos mencionar que sólo ciertos valores de K_1 y K_2 arrojan un resultado aceptable al problema, esto era de esperarse pues sólo al darle una mirada a las relaciones 5.36 y 5.37 notamos que en ellas están presentes tales constantes, y como es conocido, los problemas no lineales son muy susceptibles a las condiciones iniciales, por lo que no es de extrañar que sólo algunos valores específicos de K_1 y K_2 resuelvan el problema de manera adecuada, lo cual se discutirá en secciones posteriores. Finalmente, se realiza la integración numérica del problema con un incremento infinitesimal de $\Delta\xi = 10^{-4}$ y considerando un barrido de 0 a 1 de K_1 y K_2 .

5.3. Propiedades termodinámicas en los límites asintóticos

Haciendo uso de los desarrollos asintóticos obtenidos, podemos encontrar formas explícitas de algunas cantidades importantes para nuestro trabajo, comencemos con el flujo de calor, que no es más que:

$$\vec{q} = -\nu \nabla T(\vec{r}, t), \quad (5.43)$$

ahora, como estamos interesados en analizar las propiedades de las variables transformadas, diremos de manera más simple lo siguiente:

$$q \propto \tau^n(\zeta) g^{-m}(\zeta) \frac{d\tau}{d\zeta}. \quad (5.44)$$

Al introducir 5.33, 5.32 y 5.34 en 5.44, obtenemos (para $\zeta \ll 1$) que:

$$q \propto \zeta(1 + \Pi(\zeta)), \quad (5.45)$$

donde $\Pi(\zeta)$ es un polinomio de orden superior que ha sido despreciado. Por otra parte, al repetir el procedimiento anterior, pero tomando el comportamiento de 5.38, obtenemos de manera directa (sin despreciar términos) lo siguiente:

$$q \propto \zeta^{-\frac{2n^2-n-6m-4}{n(2m+1)}}, \quad (5.46)$$

$$q \propto \zeta^{-1,9}, \quad (5.47)$$

lo cual es un comportamiento aceptable pues va a cero rápidamente.

Por otra parte, podemos obtener una cantidad que es común en los trabajos como el nuestro, la tasa de cambio de presión con respecto de la gravedad que surge de analizar la ecuación de conservación del momentum 3.3. Recordemos que esta cantidad (que en adelante llamaremos Ψ) es de suma relevancia por cuanto nos dice si estamos en presencia de un colapso gravitacional o una explosión.

Definamos la mencionada cantidad con la letra Ψ de la siguiente manera:

$$\Psi = \left| \frac{\text{Fuerza debido a la presión}}{\text{Fuerza debido a la gravedad}} \right|, \quad (5.48)$$

$$\Psi = \left| \frac{\frac{1}{\rho} \nabla p}{\nabla \phi} \right|. \quad (5.49)$$

Entonces, físicamente Ψ debe ser menor que 1 para que se establezca el colapso gravitacional, dado que la atracción gravitacional debe vencer la fuerza asociada a la presión, es decir:

$$\frac{|\frac{1}{\rho} \nabla p|}{|\nabla \phi|} < 1. \quad (5.50)$$

Entonces, basta con introducir las ecuaciones de los desarrollos asintóticos en la relación 5.49, tenemos que:

$$\Psi_{\xi \ll 1} = \Psi_0, \quad (5.51)$$

$$\Psi_{\xi \gg 1} = \Psi_\infty \xi^{-\frac{2(n-1)(2+3m-n)}{n(2m+1)}}, \quad (5.52)$$

donde tenemos que tales constantes son:

$$\Psi_0 = 1 - \frac{(n-1)^2}{6\pi(n-m-3/2)} K_1, \quad (5.53)$$

$$\Psi_\infty = \frac{\tau_\infty}{4\pi g_\infty K_1} (3-\alpha)(\alpha+\beta), \quad (5.54)$$

donde Ψ_0 es del orden de la unidad.

Finalmente, hablemos del número de Péclet pues éste es de vital importancia para obtener información de la entropía del sistema. Ahora bien, el número de Péclet es una cantidad adimensional que relaciona la velocidad de advección de un flujo con la de difusión de él ¹.

¹Recordemos brevemente que gracias a este número podemos interpretar en qué régimen termodinámico estamos, he ahí su importancia. Vemos que si $Pe \rightarrow 0$ estamos en un régimen isotérmico, lo cual implica una transferencia de calor máxima, es decir $\nabla \cdot \vec{q} \rightarrow \infty$. Por otra parte, en el régimen adiabático tendríamos que la transferencia de calor sería nula, por lo que $Pe \rightarrow \infty$, lo cual es físicamente consistente por cuanto $\nabla \cdot \vec{q} \rightarrow 0$.

El mismo, está definido como:

$$Pe \equiv \left| \frac{p \nabla \cdot \vec{u}}{\nabla \cdot \vec{q}} \right|. \quad (5.55)$$

Tal número se traduce en nuestras ecuaciones de la siguiente manera:

$$Pe = \frac{1}{\xi^2 g(\xi) \tau(\xi) \left(\frac{dv}{d\xi} + 2 \frac{v(\xi)}{\xi} \right)} \frac{d}{d\xi} \left[\xi^2 g^{-m}(\xi) \tau^m(\xi) \frac{d\tau}{d\xi} \right]. \quad (5.56)$$

Dado que hemos mostrado la forma de Pe para nuestro caso particular, y se ha explicado la relevancia de éste, mostraremos cómo es su forma funcional para los casos asintóticos, pues -como se ha dicho previamente- una solución analítica del problema es muy complicada. Además, podemos precisar mucho más los valores que deben tener las funciones involucradas en nuestro problema en los límites asintóticos que en la región transitoria entre tales límites.

Recordando nuevamente que m, n son los exponentes del coeficiente de difusión que hemos usado en nuestro problema particular, tenemos que para el caso donde $\xi \gg 1$ se tiene que el valor de Pe es una constante, esta es:

$$Pe_\infty = \frac{1}{1 - \frac{m+2/3}{n(\gamma-1)}}. \quad (5.57)$$

Asimismo, encontramos el valor de Pe haciendo uso de 5.56 y del comportamiento asintótico correspondiente. Al hacer esto resulta:

$$Pe_0 = 4 \frac{(n-1)}{(4n-6m-7)}. \quad (5.58)$$

Con las relaciones anteriores, podemos analizar lo que sucede con la entropía, lo cual se hará, además, con ayuda de la expresión del índice politrópico y se explicará en la sección 6.

5.4. Elección de K_1 y K_2

Al observar las relaciones 4.27, 4.28 y 4.29 y las condiciones de borde 4.31 podemos pensar que el problema es matemáticamente cerrado. Sin embargo, la resolución numérica de las ecuaciones bajo la elección arbitraria de las constantes K_1 y K_2 arroja resultados inaceptables, por lo tanto es necesario analizar detenidamente qué valores de K son útiles. Lo primero que debemos hacer es reflexionar respecto del vínculo que existe entre ambas constantes. En efecto, al manipular las ecuaciones notamos que $K_2 \equiv K_2(K_1)$. Más concretamente, esto no es más que:

$$K_2 = \left[\frac{\nu_0}{Ga^3 B^{m+2}} \left(\frac{A}{a} \right)^{2n-2} \right] K_1, \quad (5.59)$$

donde es claro que para encontrar una solución aceptable, la elección de estas "no puede ser arbitraria". Son necesarias condiciones físicas a fin de encontrar los valores de K aceptables. En efecto, un requerimiento sería que el perfil de densidad y temperatura converjan a cero, esta condición es no trivial, pero razonable y se puede interpretar desde el punto de vista de la entropía y el flujo de calor, pues como ambos disminuyen cuando aumenta ξ , es razonable pensar que en el infinito, los perfiles de densidad y temperatura deben ser cero. Otra condición que nos da las bases para poder encontrar los valores de K es que tanto la densidad como la temperatura deben cambiar suavemente cerca del centro, por lo tanto es posible hallar los valores de K . Hemos hecho un barrido de las posibles K en un intervalo donde $K_w \in (0,1)$ donde K_w es el espacio de las K . Partiendo de un valor de $K_1 = 0,6$, hemos resuelto las ecuaciones para diferentes valores de K_2 donde el valor más aceptable hallado fue para el par $(K_1, K_2) = (0,62319751; 0,96139351)$ y en el cual se muestra que el comportamiento de las soluciones es el esperado por las condiciones antes postuladas. En la figura 5.4 se muestra mejor valor encontrado en la resolución numérica del problema.

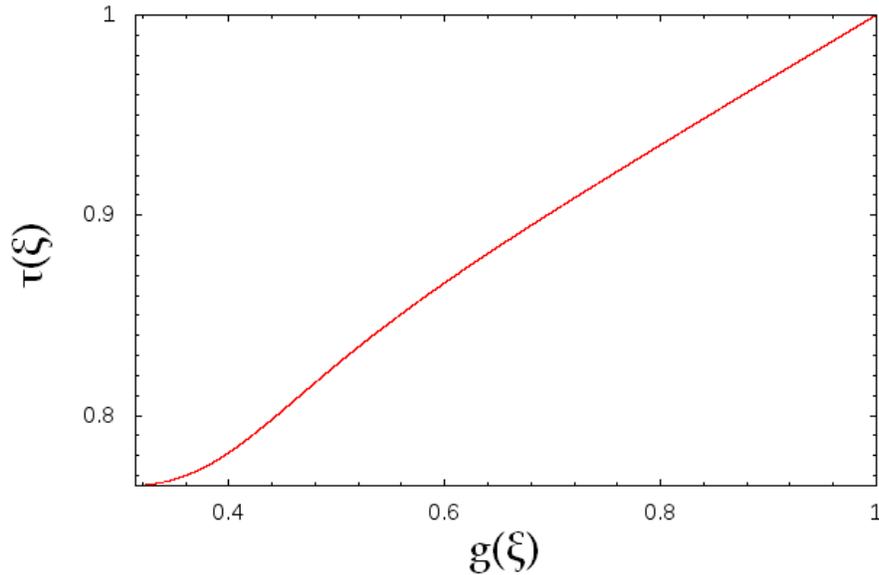


Figura 5.4: Perfil de temperatura en función del perfil de la densidad. Se muestra que en el plano g, τ las funciones satisfacen los criterios establecidos.

5.5. Perfil de las soluciones

A continuación se muestran las gráficas correspondientes a la resolución numérica del problema. La figura 5.5 muestra el perfil adimensional de la densidad, la figura 5.6 muestra el perfil de temperatura y en la figura 5.7 se muestra la velocidad adimensional. Adicionalmente mostramos la figura 5.8 donde están las funciones solución superpuestas en la misma escala.

Por otra parte, es habitual destacar que el perfil adimensional de la densidad y la temperatura $g(\xi)$ y $\tau(\xi)$ son constantes para valores pequeños de x como se ve en la figuras 5.5 y 5.6. Además, se muestra el perfil de la velocidad adimensional en la misma escala.

El comportamiento de $g(\xi)$, $\tau(\xi)$ y $v(\xi)$ lo hemos obtenido tomando los valores de prueba $m = 2$ y $n = 13/2$, asimismo $a = 11/6$, $b = -5/6$, $c = e = -5/3$ y $d = -11/3$. De nuevo mencionemos que los exponentes (m, n) están asociados a la

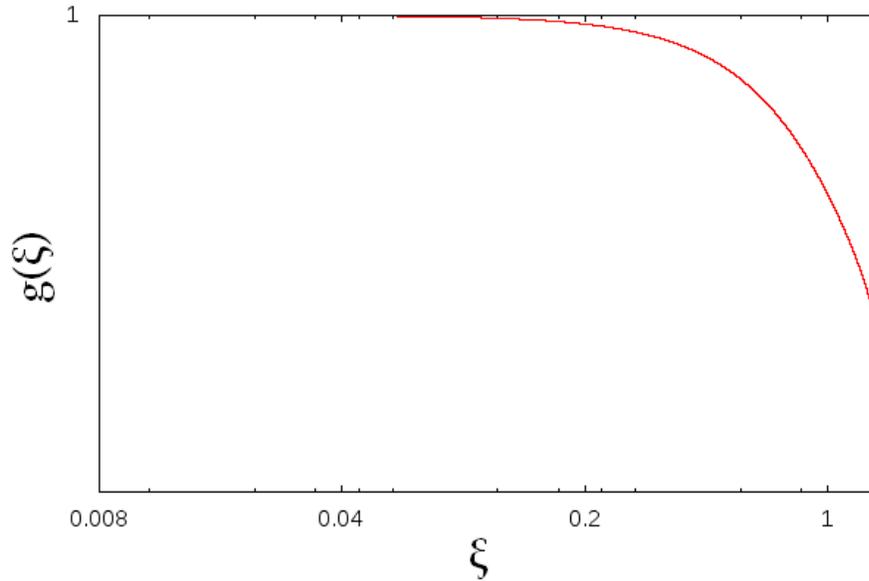


Figura 5.5: Evolución del perfil de la densidad para un rango de ξ suficientemente grande.

elección del coeficiente de difusión y que corresponden a un plasma de hidrógeno completamente ionizado.

5.6. Espacio de solución

Una parte importante de nuestro trabajo es estudiar para cuál combinación de potencias m, n dan soluciones viables, esto es, encontrar un espacio $\wp(m, n)$ que describa adecuadamente el problema planteado. Ahora, es importante recordar que al introducir las transformaciones de escala 4.2 hemos dejado abierta la cuestión acerca de qué valores de m, n describirían adecuadamente el problema dado que no es posible determinar tales exponentes haciendo uso de las ecuaciones de conservación ([Zel'dovich, 1968] o [Sedov, 1993]). Además, hay que hacer la salvedad -antes de continuar- que el problema tal y como lo hemos planteado resuelve el caso de implosión y explosión de una esfera, pero nos hemos enfocado únicamente en el caso de la implosión dado que ése es nuestro objetivo primordial. Hasta ahora hemos encontrado la solución numérica del problema para ciertos valores de

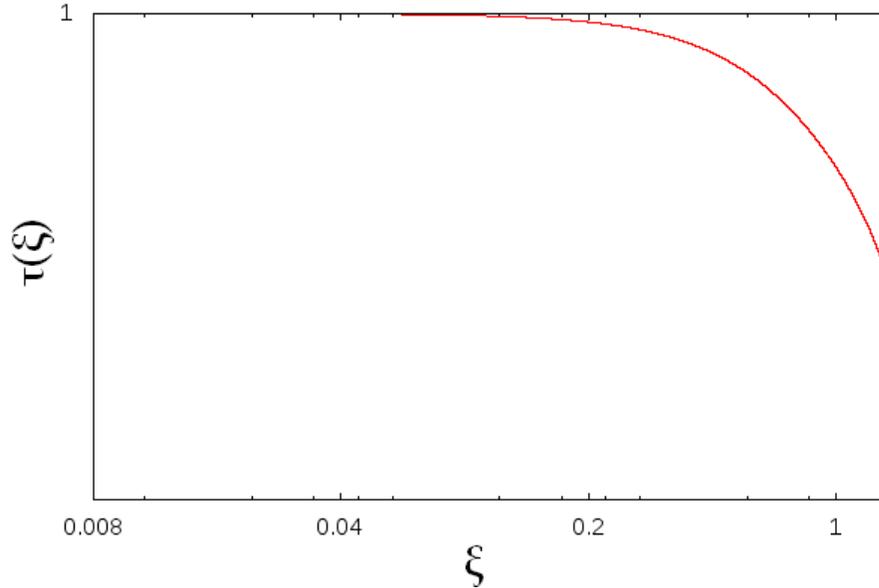


Figura 5.6: Evolución del perfil de la temperatura para un rango de ξ suficientemente grande.

K_1 y K_2 donde destaca que esta solución existe sólo en ciertos lugares del espacio $\wp(m, n)$. Una manera de encontrar un criterio aplicable en este caso sería empleando algunas cosas evidentes en este punto:

- La temperatura del centro debe decrecer con el incremento de radio, por lo tanto $\tau_0 > 0$,
- El valor de K_2 debe ser mayor que cero, es decir que $K_2 > 0$

Con lo anterior en mente, es posible definir una función que diga que valores de m, n describen el caso de implosión o explosión. En efecto tenemos:

$$f(m, n) = \frac{(\gamma - 1)n - m - \gamma + 1/2}{n - m - 3/2} > 0, \quad (5.60)$$

donde se debe notar que 5.60 da la condición de implosión y si se invierte el signo da una relación para los valores de m, n en el caso de explosión. En las figuras 5.9 y 5.10 se implementan los criterios anteriormente dichos.

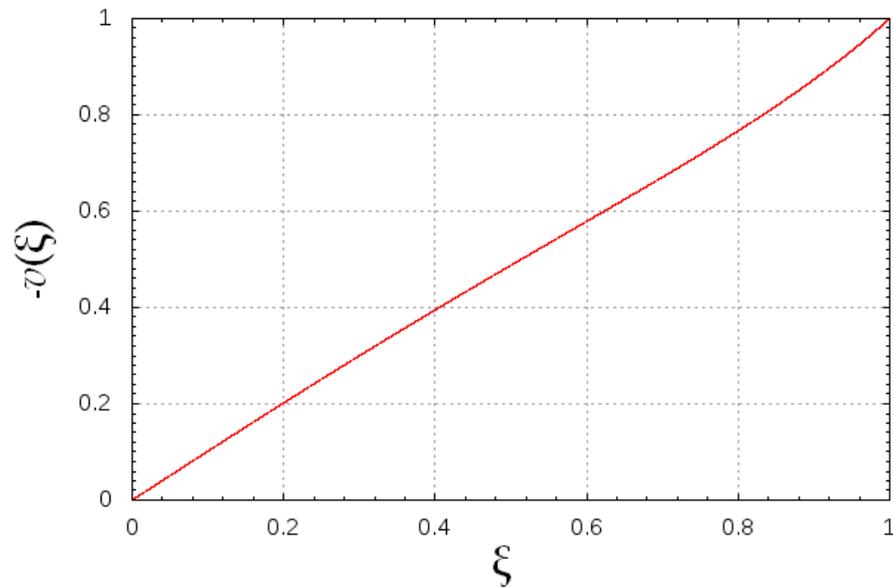


Figura 5.7: Evolución del perfil de la velocidad para un rango de ξ suficientemente grande.

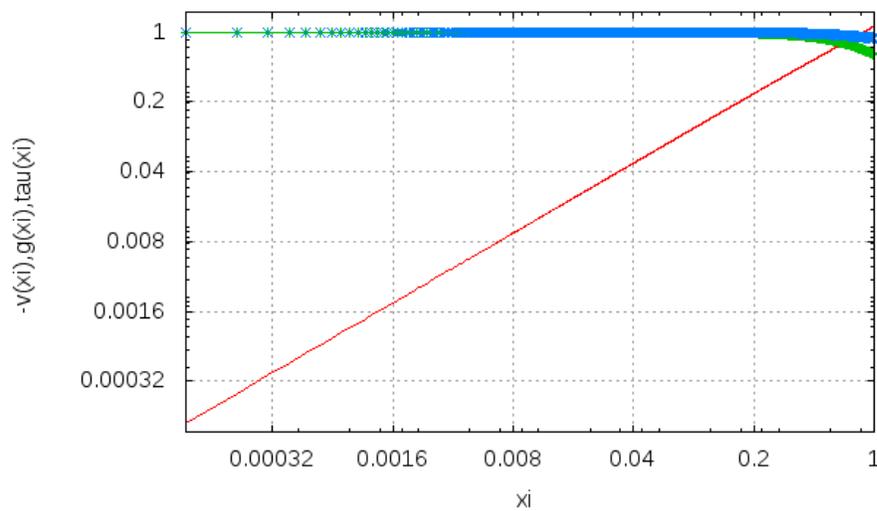


Figura 5.8: Evolución de los perfiles de la velocidad (línea continua), densidad (línea segmentada) y temperatura (cruces) para un rango de ξ suficientemente grande.

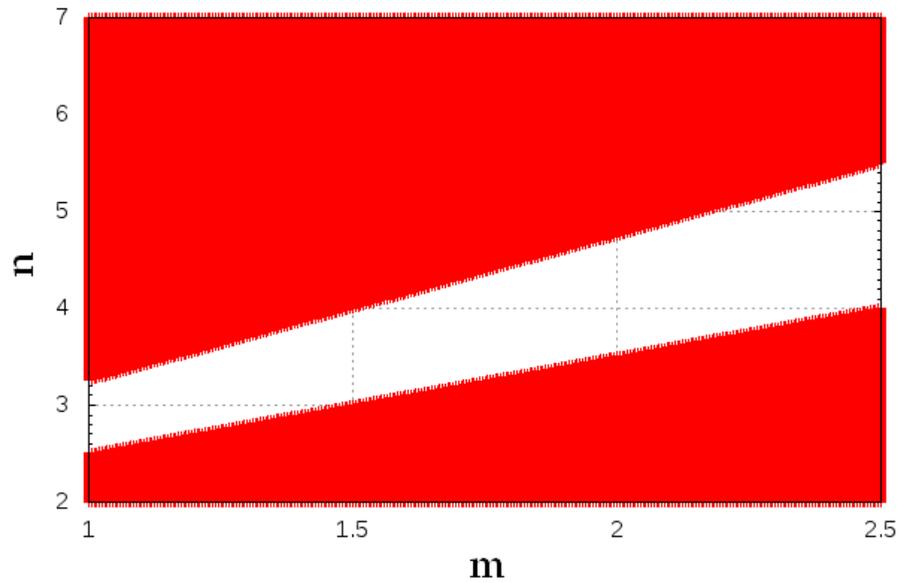


Figura 5.9: Espacio $\wp(m, n)$ donde se obtiene una implosión. El par de valores (m, n) tomados de referencia está en la zona superior derecha.

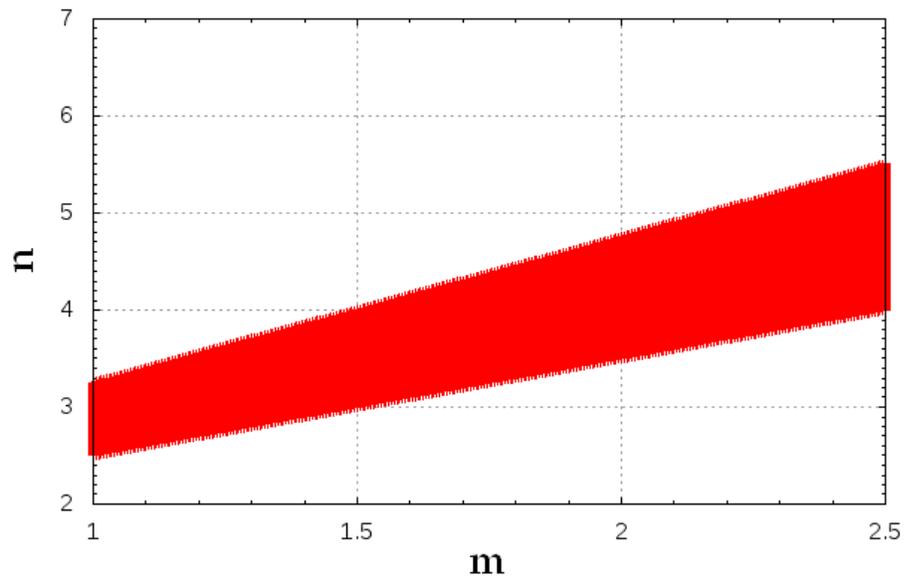


Figura 5.10: Espacio $\wp(m, n)$ donde se obtiene una explosión. El par de valores (m, n) tomados de referencia está en la zona superior derecha.

CAPÍTULO

6

DISCUSIONES

Primeramente destaquemos que fuimos capaces de modelar la implosión de una esfera tomando en cuenta dos efectos: el gravitacional y el radiativo. Esto fue posible mediante la técnica de soluciones autosimilares con la cual logramos desacoplar las ecuaciones a resolver, simplificando considerablemente el problema. Asimismo, el modelo que hemos planteado nos ofrece una ventaja respecto a trabajos previos en este género, pues hace uso de la ecuación de la energía donde, en nuestro caso, surge una problemática respecto del carácter altamente no lineal del coeficiente de difusión, debido al hecho de no ser elegido constante como lo es en la mayoría de los casos en los que se incluye este término. En tal sentido, se solucionó el problema de manera numérica y luego se analizó para que valores de m, n (los cuales son exponentes asociados al coeficiente de difusión 3.13) era posible una implosión, basándonos en las suposiciones razonables antes mencionadas.

De la misma forma, notemos el hecho que este modelo que nos hemos planteado en más general que los casos habituales, pues no parte de ninguna suposición del estado termodinámico de la esfera tratada (esto es, no suponemos que está en

un estado adiabático ni isotérmico, ni cualquiera otro) por lo que las soluciones son más generales que las obtenidas por otros autores. Una manera alternativa de estudiar este modelo, es analizando el número de Péclet, ya que dependiendo de él, es posible saber si estamos en presencia de un colapso isotérmico o adiabático sin suponerlo *a priori* (por ejemplo), así como analizar la entropía de nuestro sistema. En tal sentido, el hecho de que el número de Péclet sea constante quiere decir que el índice politrópico Γ ¹ puede ser escrito como:

$$\Gamma \equiv \frac{d(\text{Ln}(p(\xi, t)))}{d(\text{Ln}(\rho(\xi, t)))}, \quad (6.1)$$

lo cual, al reescribirlo de una manera más familiar quedaría de la siguiente manera:

$$p(\xi, t) = \bar{A}\rho^\Gamma(\xi, t). \quad (6.2)$$

Ahora bien, podemos escribir el índice politrópico en función del número de Péclet y de la tasa de calor específico, esto vendría siendo:

$$\Gamma = \gamma - \frac{\gamma - 1}{Pe}. \quad (6.3)$$

Una manera más clara de entender 6.3 es haciendo uso de la conocida relación termodinámica 3.7 y recordar que el número de Péclet no es más que la tasa de trabajo de enfriamiento $p dV$ que caracteriza la ecuación de energía, en otras palabras:

$$d\epsilon = \delta Q + \delta W, \quad (6.4)$$

$$d\epsilon + p dV = \delta Q, \quad (6.5)$$

$$\therefore \delta Q = \frac{p dV}{Pe}, \quad (6.6)$$

al hacer uso de la ecuación de estado y de la definición del índice politrópico obtenemos 6.3. Con lo anterior en mente, es posible analizar dos casos muy tratados,

¹No es llamado con el valor de n , pues n está siendo usado como constante en el grupo de transformaciones

el caso isotérmico y el adiabático. Notemos que si queremos describir un régimen adiabático, es necesario que:

$$\lim_{Pe \rightarrow \infty} \Gamma = \gamma. \quad (6.7)$$

Aquí, es claro que $\delta Q = 0$ para que corresponda a un régimen adiabático.

Por otra parte, si analizamos 6.3 para el caso isotérmico, notamos que se debe cumplir que:

$$\lim_{Pe \rightarrow 1} \Gamma = 1. \quad (6.8)$$

Se puede verificar por sustitución directa que la condición anterior implica que $d\epsilon = 0$.

Como se ha observado en la sección de resultados 5, el número de Péclet es constante y depende de m, n , por lo que claramente es una solución más general que los casos termodinámicos antes citados.

Otra afirmación destacable es el hecho que al ser el número de péclet (Pe) una constante, significa que el calor y la entropía son emitidos constantemente de nuestro sistema de estudio. Asimismo, hemos de ser cuidadosos en la interpretación de la afirmación anterior, ya que el hecho de que el sistema esté perdiendo calor no quiere decir que lo irradie todo (aunque pudiera ser), por lo que la solución en cuestión trata un caso diferente a los usuales (isotérmico y adiabático) tal como lo hemos dicho anteriormente.

Entre tanto, es importante discutir el término asociado a la tasa de presión de gas respecto a la gravedad, él caracteriza la ecuación de movimiento y tal como se mostró en la sección de resultados, Ψ es constante o variable dependiendo de el valor de ζ es pequeño o grande respectivamente.

Denotemos a Ψ_{cl} como la tasa de cambio entre la presión y la gravedad en caída libre (cl), Ψ_{ns} es el resultado que hemos obtenido (ns) y Ψ_{LP} que simboliza la tasa

obtenida en los trabajos de Larson-Penston (*LP*) ([Penston, 1969] y [Larson, 1969])². En efecto:

$$\Psi_{cl} : \Psi_{LP} : \Psi_{ns} = 0 : 0,60 : 0,71. \quad (6.9)$$

Esto puede ser interpretado de la siguiente manera, el sistema presenta una resistencia fuerte al colapso gravitacional, lo cual era algo de esperarse por cuanto al radiar, se establece una presión que contrarresta el efecto gravitacional desacelerando la implosión de la esfera. Es claro que la aceleración que sienten las capas de la protoestrella es menor que en el caso ideal de caída libre, lo cual se acerca más a obtener una solución que modele adecuadamente el proceso de implosión de una protoestrella.

En otro orden de ideas, no podemos evitar discutir el efecto del término no lineal en la ecuación de la energía, tal como vimos en la sección de resultados 5. El flujo de calor se ve altamente alterado por nuestra elección del coeficiente de conductividad térmico que, como dice claramente [Landau, 1999] en su capítulo de *thermal conduction in fluids*, el valor de ν más general es aquel que dependa explícitamente de la temperatura y la presión. Vimos además su forma funcional para los casos asintóticos y podríamos comparar este resultado con el supuesto caso de elegir un ν que sea constante, en efecto, veamos brevemente que:

$$q = -\nu \frac{d\tau}{d\bar{\xi}}. \quad (6.10)$$

Tomando los mismos valores asintóticos vemos que:

$$q_{\bar{\xi} \ll 1} \propto \bar{\xi}, \quad (6.11)$$

$$q_{\bar{\xi} \gg 1} \propto \bar{\xi}^{\frac{2m(2n-3)+3n-4}{n(2m+1)}}. \quad (6.12)$$

Ahora bien, vemos que para el comportamiento cercano a cero, ambos casos (suponiendo ν contante y suponiendo una forma que dependa de la presión y la temperatura) se comportan de la misma manera, mientras que para el caso que tiende al

²Se trae esta referencia pues el autor es uno de los pioneros en trabajos acerca de autosimilar en colapsos de esferas

infinito no es así: se aprecia que en el caso obtenido en este trabajo la función es $q_{\xi \gg 1} \propto \xi^{-1,9}$, mientras que en el caso hipotético donde $\nu = cte$, la función sería $q_{\xi \gg 1} \propto \xi^{-1,7}$, las cuales a pesar de ser diferentes son soluciones aceptadas, sólo que la mostrada aquí es más general ³

Por otra parte, hablemos de las regiones de implosión y explosión. Es claro que dado el carácter de nuestra solución, no todos los valores (aunque admisibles) eran solución a nuestro problema (en este caso hablamos de el par $(m, n) \in \wp$), pues sólo hemos estado interesados en buscar la solución asociada al problema del colapso ⁴ y por lo tanto nuestro espacio de soluciones se muestra en la figura 5.9. Notemos además que hemos seleccionado valores de m, n positivos pues son valores físicos normales. Por otra parte, hay que mencionar que no toda la región del espacio $\wp(m, n)$ es estable y a pesar de que el tratamiento de este punto no era un objetivo de nuestro trabajo, lo mencionaremos (al menos de manera introductoria) a fin de sentar bases de análisis futuros basados en modelos similares a éste. El análisis se basa en el criterio de inestabilidad de Schwarzschild generalizado que vendría siendo:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho^\Gamma} \right) < 0, \quad (6.13)$$

donde la principal diferencia con el criterio de Schwarzschild es que se reemplaza el valor de γ por el de Γ y, aunque no se dé su demostración, es de vital importancia para saber cuando hay o no inestabilidad convectiva. Al manipular la relación 6.13 combinándola con las variables transformadas de nuestro sistema (es decir, el perfil adimensional de densidad y temperatura) y recordando que este criterio debe ser

³Es claro que si el valor de ν es constante, entonces las relaciones con (m, n) no serían necesarias, pues el problema podría resolverse analizando las ecuaciones de conservación del momentum y de conservación de la masa, a pesar de esto, hemos hecho esta presentación sólo como referencia.

⁴Sin embargo, las ecuaciones que obtuvimos son completamente generales, para el caso de la explosión bastaría con tomar el signo positivo en nuestras ecuaciones

independiente de ξ obtenemos que:

$$\frac{\tau_0}{g_0} < \Gamma - 1. \quad (6.14)$$

Con esta condición podemos encontrar tales regiones de inestabilidad convectiva y superponerlas en nuestra solución.

En otro orden de ideas, nos vemos en la obligación de mencionar que la "pseudolinealidad" de la velocidad es una consecuencia de resolver el problema con el requerimiento que sea autosimilar en el espacio. Es razonable que el valor de $|v(\xi)|$ decrezca, pero nuestro planteamiento inicial no conduce a tal resultado, incluso, si supusiéramos que $|v|$ disminuye cuando ξ aumenta, el perfil autosimilar no puede ser sostenido, esto es por la falta de compresión debido al trabajo mecánico (pdV) y la transferencia de calor.

Constatemos que nuestros resultados y análisis son consistentes con otros trabajos, sin embargo nuestra solución da una visión más general acerca del problema del colapso gravitacional que las soluciones planteadas por otros autores. [Shu, 1977] y [Blottiau et al., 1988] resolvieron el problema desde dos puntos de vista diferentes. El primero lo enfoca como un colapso isotérmico donde la variable autosimilar es sólo la espacial, mientras que en el segundo trabajo considera un estado termodinámico adiabático y hace uso de una transformación autosimilar tanto en espacio como en tiempo. De estas dos referencias podemos verificar que se obtienen resultados consistentes con el nuestro lo cual se puede ver "a priori" pues el perfil de densidad presenta la misma tendencia.

Es importante resaltar que debido a la carencia de autores que tomen en consideración el carácter no lineal de la ecuación de la conservación de la energía, es difícil realizar una comparación de las soluciones con otros autores. Uno de los pocos que podemos mencionar es [Murakami et al., 2004], el cual trabaja el mismo problema que aquí hemos resuelto, pero desde una perspectiva diferente, primero implementa el método del álgebra de Lie para encontrar las transformaciones de las

variables involucradas y hace un estudio introductorio de la naturaleza de los puntos singulares del problema (un estudio más profundo se puede ver en el artículo de [Whitworth and Summers, 1985]). Ahora, podemos verificar que nuestra solución coincide con la de [Murakami et al., 2004] a pesar de haber tomado caminos diferentes, lo cual es un resultado importante.

En cuanto a los fundamentos físicos, hay que mencionar que el perfil del densidad y de temperatura son perfectamente consistentes con otros trabajos, tal y como se mencionó con anterioridad. Era de esperarse que los perfiles de densidad y temperatura decrecieran mientras mas alejados del centro se encontraran. Un punto que fue inesperado es sobre el hecho que el perfil de la velocidad es negativa, pero esto no es más que una consecuencia de la elección de la transformación autosimilar tomada.

CAPÍTULO

7

CONCLUSIONES

- Se logró modelar adecuadamente el colapso gravitacional de una esfera considerando el efecto radiativo mediante el uso de soluciones autosimilares lo cual es poco tratado por otros autores dado la complejidad que supone tomar en cuenta el término no lineal de la ecuación de la conservación de la energía.
- La consideración que el coeficiente de difusión es una función que depende de la temperatura y la densidad nos da un panorama más general que el usado por los autores en los casos comunes por cuanto no supone ningún estado termodinámico inicial del sistema.
- El número de Pécelet permanece constante lo cual indica que la entropía es "emitida" del sistema dado que la radiación generada se atraviesa las capas de la esfera y por lo tanto se enfría.
- La tasa de cambio de la fuerza debido a la presión del gas respecto a la fuerza de gravedad al compararla con otros modelos nos dice que hay una desaceleración en nuestro problema (comparado con el caso isotérmico [Larson, 1969]),

que se atribuye al flujo de entropía emitido desde el sistema.

- Se encontraron los valores solución del espacio $\wp(m, n)$, que describen el problema de implosión basados en las suposiciones de los valores de K_2 y τ_0 lo cual nos permite elegir otro posible escenario de solución con sólo tomar otros valores de los parámetros m, n . En nuestro caso particular hemos tomado $m = 2$ y $n = 13/2$ para un plasma completamente ionizado.

APÉNDICE

A

DERIVACIÓN DETALLADA DE LA FÓRMULA DIMENSIONAL

Consideremos una cierta cantidad derivada y . Por simplicidad, estamos asumiendo que y es una cantidad geométrica, y por lo tanto, depende únicamente de la longitud. En consecuencia:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n); \quad (\text{A.1})$$

donde x_1, x_2, \dots, x_n son ciertas distancias. Denotemos por y' el valor de y que corresponde a los valores de los argumentos x'_1, x'_2, \dots, x'_n . El valor de y y el valor de y' dependen de la unidad de medida para las distancias x_1, x_2, \dots, x_n . Denotemos la unidad o escala de longitud por un factor α . Entonces, para ser consistentes con la condición formulada antes, debemos tener que:

$$\frac{y'}{y} = \frac{f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)}{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{f(x'_1\alpha, x'_2\alpha, \dots, x'_n\alpha)}{f(x_1\alpha, x_2\alpha, \dots, x_n\alpha)}, \quad (\text{A.2})$$

donde la razón $\frac{y'}{y}$ debe ser idéntica al valor α de la escala de longitud. De la ecuación anterior obtenemos:

$$\frac{f(x_1\alpha, x_2\alpha, \dots, x_n\alpha)}{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{f(x'_1\alpha, x'_2\alpha, \dots, x'_n\alpha)}{f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)}, \quad (\text{A.3})$$

o, reescrito por comodidad:

$$\frac{y(\alpha)}{y(1)} = \frac{y'(\alpha)}{y'(1)} = \varphi(\alpha). \quad (\text{A.4})$$

De ello se deduce que la razón de los valores numéricos de la cantidad geométrica derivada, medida en diferentes escalas de longitud, depende únicamente de la razón de las escalas de longitud.

De la ecuación anterior, es fácil encontrar la forma de la función $\varphi(a)$. En efecto, se tiene que:

$$\frac{y(\alpha_1)}{y(1)} = \varphi(\alpha_1); \quad \frac{y(\alpha_2)}{y(1)} = \varphi(\alpha_2). \quad (\text{A.5})$$

Por lo tanto se sigue que:

$$\frac{\varphi(\alpha_1)}{\varphi(\alpha_2)} = \varphi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right). \quad (\text{A.6})$$

Como para todo $x'_1 = x_1\alpha_2$, $x'_2 = x_2\alpha_2$, ..., $x'_n = x_n\alpha_2$ Diferenciando la ecuación anterior con respecto a α_1 y asumiendo que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, obtenemos:

$$\frac{1}{\varphi(\alpha)} \frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} \right) = \frac{m}{\alpha}. \quad (\text{A.7})$$

Finalmente al integrar se obtiene que:

$$\varphi = C\alpha^m. \quad (\text{A.8})$$

Esta conclusión puede ser generalizada aumentando el número de factores de escala en la función.

APÉNDICE

B

CÁLCULO "DETALLADO" DE LAS ECUACIONES AUTOSIMILARES

En este trabajo nos hemos valido de cuatro ecuaciones diferenciales en derivadas parciales: la ecuación de Conservación de la masa 3.1.1, la ecuación de conservación del momento 3.1.2, la ecuación de Poisson 3.1.3 y la ecuación de conservación de la energía 3.1.4, además, hemos hecho uso de una ecuación de estado de gases ideales y además, hemos supuesto una cierta forma del coeficiente de difusión. Ahora bien, teniendo esto en mente, a continuación mostraremos cómo reducir las ecuaciones del problema original, a las ecuaciones diferenciales ordinarias de nuestro problema.

Lo primero que hay que hacer es elegir una forma explícita de $R(t)$, tal como se ha venido diciendo. Una vez hecho esto, hay que elegir otra función que caracterice el sistema, en nuestro caso tomamos la función $\rho_0(t)$, estas son las funciones que caracterizarán los cambios de las funciones originales, a las funciones adimensionales. Ahora, debemos notar que hay que elegir qué funciones vamos a tomar

como características del sistema (ahora espacialmente): hay que decidir si tomar por ejemplo una función $P(\xi)$ que pudiéramos llamarla "perfil de presión adimensional", o quizá $U(\xi)$ que, análogamente sería la "energía interna adimensional". En nuestro caso, hemos elegido las funciones $v(\xi)$, $g(\xi)$ y $\tau(\xi)$ como los perfiles de velocidad, densidad y temperatura respectivamente. Finalmente, hay que notar que para lograr que las ecuaciones sean adimensionales, debemos tomar algunas constantes de manera conveniente, en este trabajo, hemos hecho la construcción de las soluciones usando la constante de gravitación universal G y el coeficiente de difusión ν_0 .

Las transformaciones triviales que se realizaron fueron sugeridas de un análisis dimensional y se presentan a continuación:

$$u(r, t) = \dot{R}(t)v(\xi), \quad (\text{B.1})$$

$$\rho(r, t) = \rho_0(t)g(\xi), \quad (\text{B.2})$$

$$T(r, t) = \dot{R}(t)^2\tau(\xi). \quad (\text{B.3})$$

Con la variable autosimilar definida de la manera usual, es decir:

$$\xi = \frac{r}{R(t)}. \quad (\text{B.4})$$

Ahora, apliquemos estos cambios a las ecuaciones que queremos reducir, iniciemos con la ecuación de conservación de la masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u) = 0. \quad (\text{B.5})$$

Claramente, tomando B.1, B.2, B.3 y recordando que ξ depende implícitamente del tiempo, llegamos a:

$$-\left(\xi - v(\xi)\right) \frac{dg}{d\xi} + \left(\frac{\dot{\rho}_0(t) R(t)}{\rho_0(t) \dot{R}(t)} + \frac{dv}{d\xi} + 2\frac{v(\xi)}{\xi}\right) g(\xi) = 0. \quad (\text{B.6})$$

De la ecuación anterior podemos encontrar una relación importante, pues se muestra de manera clara:

$$\frac{\dot{\rho}_0(t) R(t)}{\rho_0(t) \dot{R}(t)} \equiv \chi = \text{ctte}, \quad (\text{B.7})$$

para que la ecuación se pueda desacoplar. Continuando con el estudio de las ecuaciones, apliquemos los cambios a la ecuación de conservación del momentum:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad (\text{B.8})$$

Recalquemos lo siguiente: en la relación anterior vemos que aparece explícitamente la presión $p(r, t)$ y la derivada del potencial gravitacional $\partial_r \phi(r, t)$, y hay que expresar tales cantidades en términos de las funciones que caracterizan el sistema, esto es, en función de $R(t)$ y $\rho_0(t)$, y de $v(\xi)$, $g(\xi)$ o $\tau(\xi)$. De la ecuación de estado es inmediato tomar el perfil de presión adimensional de la siguiente manera:

$$p(r, t) = \rho_0(t) \dot{R}(t)^2 g(\xi) \tau(\xi). \quad (\text{B.9})$$

Por otra parte, si tenemos en mente que $F_r = -\partial_r \phi$ también es clara la construcción $\partial_r \phi$, en efecto tenemos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r}(r, t) = GR(t) \rho_0(t) \frac{\Omega(\xi)}{\xi^2}. \quad (\text{B.10})$$

Al tener las relaciones B.9 y B.10 y haciendo uso del perfil de velocidad y presión adimensional, la ecuación queda de la siguiente forma:

$$\frac{\dot{R}(t) R(t)}{\dot{R}(t)^2} v(\xi) + \left(v(\xi) - \xi\right) \frac{dv}{d\xi} + \frac{1}{g(\xi)} \frac{d}{d\xi} \left(g(\xi) \tau(\xi)\right) + G \frac{R(t)^2 \rho_0(t)}{\dot{R}(t)^2} \frac{\Omega(\xi)}{\xi^2} = 0. \quad (\text{B.11})$$

De la ecuación anterior podemos notar que para que las variables sean separables, es necesario que:

$$\frac{\ddot{R}(t)R(t)}{\dot{R}(t)^2} = \omega \frac{R(t)^2 \rho_0(t)}{\dot{R}(t)^2}, \quad (\text{B.12})$$

donde $\omega \equiv ctte$. Ahora, antes de continuar, podemos encontrar una relación entre la escala de longitud característica $R(t)$ y el perfil de densidad $\rho_0(t)$, en efecto, al simplificar la relación B.12 llegamos a lo siguiente:

$$\rho_0(t) = B \frac{\ddot{R}(t)}{R(t)}. \quad (\text{B.13})$$

Si recordamos B.7 y B.13 nos damos cuenta que al vincularlas obtenemos:

$$\frac{\ddot{R}(t)R(t)}{\dot{R}(t)\ddot{R}(t)} = \eta, \quad (\text{B.14})$$

donde $\eta = ctte$. De aquí es posible "elegir" una forma de $R(t)$, una prueba preliminar nos dice que la elección trivial no es buena, pues es demasiado restrictiva respecto de la constante η . La solución a la cual hacemos referencia es

$$R(t) = \bar{A}e^{\bar{m}t}, \quad (\text{B.15})$$

e implica que la constante de separación $\eta = 1$, lo cual corresponde a un caso sumamente particular. Una solución aceptable (y es del tipo standar) sería elegir la función de la forma:

$$R(t) = A(kt)^\alpha, \quad (\text{B.16})$$

donde A es una cantidad dimensional, $\alpha = ctte$ sin dimensiones y k es 1 o -1 dependiendo del caso (si $t > 0$ o $t < 0$ respectivamente). Ahora bien, dadas las transformaciones que hemos tomado, el valor de α queda determinado de manera única, siempre que tomemos $s = 1$, esto es claro si se tiene en mente que las transformaciones tomadas deben cumplir con la condición que las ecuaciones permanezcan invariantes. Veamos:

$$\xi = \frac{r}{R(t)}. \quad (\text{B.17})$$

Al aplicar las transformaciones de escala tenemos que,

$$\xi = \lambda^{1-\alpha a} \frac{\hat{r}}{A(k\hat{t})^\alpha} \quad (\text{B.18})$$

de donde es claro:

$$\alpha = \frac{1}{a}. \quad (\text{B.19})$$

Una vez hecho esto, podemos continuar con la implementación de las transformaciones en las ecuaciones a resolver: es el turno de la ecuación de Poisson:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 4\pi G\rho. \quad (\text{B.20})$$

De la ecuación anterior, basta con multiplicar por r^2 e integrar respecto a r , haciendo uso del teorema fundamental del cálculo y dividiendo por r^2 se obtiene la función $\partial_r \phi$ y al hacer uso de B.4 y B.2, y al definir un perfil de masa adimensional $\Omega(\xi)$ tenemos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r}(r, t) \equiv GR(t)\rho_0(t) \frac{\Omega(\xi)}{\xi^2}. \quad (\text{B.21})$$

Entonces, hemos definido a $\Omega(\xi)$ de la siguiente manera:

$$\Omega(\xi) \equiv 4\pi \int_0^\xi \bar{\xi}^2 g(\bar{\xi}) d\bar{\xi}. \quad (\text{B.22})$$

Si no es claro cómo se obtuvo $\partial_r \phi$ en la ecuación de conservación del momentum, en B.21 es evidente. Finalmente -y no por eso menos importante- queda la ecuación de conservación de la energía que no es otra:

$$\rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \right) + \frac{p}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 v \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (\text{B.23})$$

Ahora, para obtener la combinación de funciones que describen a ϵ hacemos uso de la ecuación de estado de los gases ideales:

$$\frac{p}{\rho} = (\gamma - 1)\epsilon. \quad (\text{B.24})$$

Por lo tanto, ϵ sería:

$$\epsilon = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}. \quad (\text{B.25})$$

Por otra parte, debemos elegir la ley de potencia del coeficiente de difusión ν , en nuestro caso la hemos tomado de la siguiente forma:

$$\nu \equiv \nu_0 \frac{T^n}{\rho^m}. \quad (\text{B.26})$$

Con las dos relaciones anteriores y las ecuaciones B.4, B.1, B.2 y B.9, podemos transformar y simplificar la ecuación, en efecto, al aplicar los cambios, hacer una manipulación algebraica breve y escribiendo de manera más abreviada tenemos:

$$\frac{1}{\gamma - 1} \left(2 \frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} \tau - (\xi - \nu) \frac{d\tau}{d\xi} \right) + \left(\frac{d\nu}{d\xi} + 2 \frac{\nu}{\xi} \right) \tau = \nu_0 \frac{\dot{R}^{2n-1}}{\rho_0^{m+1} R} \frac{1}{g \xi^2} \frac{d}{d\xi} \left[\xi^2 g^{-m} \tau^n \frac{d\tau}{d\xi} \right]. \quad (\text{B.27})$$

APÉNDICE

C

DESARROLLO DE LA ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE ENERGÍA

De la primera ley de la termodinámica tenemos que:

$$d\epsilon = \delta Q + \delta W, \quad (\text{C.1})$$

esto se traduce en que el cambio de energía interna por unidad de masa $\epsilon(\vec{r}, t) \equiv \epsilon$ entre dos estados de equilibrio es la suma del incremento en la energía calórica por unidad de masa y el trabajo hecho por unidad de masa sobre el sistema. En nuestro caso el elemento de fluido no está en equilibrio, tiene una velocidad \vec{u} . Debemos ser cuidadosos, por lo tanto resolveremos por separado. Se sabe que la segunda ley de Newton se puede escribir como:

$$\rho(\vec{r}, t) \frac{D}{Dt} \vec{u}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{F}(\vec{r}, t) + \nabla \cdot \Phi(\vec{r}, t), \quad (\text{C.2})$$

donde $\vec{F}(\vec{r}, t)$ es la fuerza por unidad de masa, y $\Phi(\vec{r}, t)$ es el tensor de presión. Escribiendo en notación indicial y obviando las dependencias funcionales tenemos:

$$\rho \frac{D}{Dt} u_i = \rho F_i + \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial r_j}. \quad (\text{C.3})$$

Ahora bien, si el fluido es neutral, el tensor de presión es isotrópico (es decir, no hay una dirección preferencial) y se obtiene:

$$\Phi_{ij} = -p\delta_{ij}. \quad (\text{C.4})$$

Multiplicamos escalarmente \vec{u} y la ecuación C.2 y tenemos:

$$\vec{u} \cdot \frac{D}{Dt} \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{F} + \frac{1}{\rho} \vec{u} \cdot (\nabla \cdot \Phi), \quad (\text{C.5})$$

entonces, tenemos:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{u}^2}{2} \right) = \vec{u} \cdot \vec{F} + \frac{1}{\rho} \vec{u} \cdot (\nabla \cdot \Phi), \quad (\text{C.6})$$

o reescrito en notación indicial tenemos que el cambio de energía cinética por unidad de masa es:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{u_i^2}{2} \right) = u_i F_i + \frac{1}{\rho} u_i \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial r_j}. \quad (\text{C.7})$$

Ahora, el trabajo total hecho por el elemento del fluido debido a la fuerza del cuerpo es:

$$\int_{\delta\tau} \rho \vec{u} \cdot \vec{F} d\tau, \quad (\text{C.8})$$

y además

$$\int_{\delta S} (\vec{u} \cdot \Phi) \cdot \hat{n} dS = \int_{\delta\tau} \nabla \cdot (\vec{u} \cdot \Phi) d\tau, \quad (\text{C.9})$$

debido a las fuerzas en la superficie. Aquí la tasa de cambio por unidad de masa es:

$$u_i F_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r_j} (u_i \Phi_{ij}) = \frac{1}{\rho} u_i \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial r_j} + \frac{1}{\rho} \Phi_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial r_j}. \quad (\text{C.10})$$

Comparando la tasa de trabajo total por unidad de masa C.10 con la tasa de cambio de la energía cinética por unidad de masa C.7 podemos ver que la tasa de trabajo empleada en la energía interna por unidad de masa es el último término de la relación C.10, por lo tanto tenemos:

$$\frac{DW}{Dt} = \frac{1}{\rho} \Phi \cdot (\nabla \cdot \vec{u}) = \frac{1}{\rho} \Phi_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial r_j}. \quad (\text{C.11})$$

Ahora bien, la energía calorica surge de dos maneras, debido al "calor de Joule"

$$\int_{\delta\tau} \frac{j^2}{\sigma} d\tau, \quad (\text{C.12})$$

donde \vec{j} es la densidad de corriente y σ es la conductividad eléctrica. La otra manera que surga energía calórica se debe a la conducción de calor a través de la superficie del elemento de fluido dado por:

$$\int_{\delta S} k \nabla T \cdot \hat{n} dS = \int_{\delta\tau} \nabla \cdot (k \nabla T) d\tau, \quad (\text{C.13})$$

donde $k \equiv k(\rho, T)$ es asumido generalmente como una constante por simplicidad, pero en general, depende de la densidad y la temperatura. Así, la tasa de cambio de calor por unidad de masa no es otra que:

$$\frac{DQ}{Dt} = \frac{1}{\rho\sigma} j^2 + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (k \nabla T). \quad (\text{C.14})$$

Finalmente al agrupar los resultados tenemos que:

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{1}{\rho} \Phi \cdot (\nabla \cdot \vec{u}) + \frac{1}{\rho\sigma} j^2 + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (k \nabla T). \quad (\text{C.15})$$

APÉNDICE

D

CÁLCULOS DE LOS DESARROLLOS ASINTÓTICOS

D.1. Desarrollo para $\zeta \ll 1$

A fin de modelar el comportamiento cerca del origen, introducimos las soluciones por medio de un desarrollo en serie tomando sólo hasta el segundo término del desarrollo (en el caso de la velocidad sólo hasta el primero) teniendo presente que debe satisfacer, además las condiciones triviales 4.31, por lo tanto, un desarrollo aceptable es:

$$g(\zeta) = 1 - g_0\zeta^2, \quad (\text{D.1})$$

$$\tau(\zeta) = 1 - \tau_0\zeta^2, \quad (\text{D.2})$$

$$v(\zeta) = -v_0\zeta. \quad (\text{D.3})$$

Asimismo, al introducir D.2 y D.3 en 4.27 (naturalmente tomando el signo negativo) es posible encontrar el valor de v_0 , recordando que hemos despreciado los términos

cuadráticos. En efecto, al hacer lo mencionado antes obtenemos:

$$d = -3v_0, \quad (D.4)$$

$$\therefore v_0 = \frac{2}{3} \frac{(n-1)}{(n-m-3/2)}. \quad (D.5)$$

Siguiendo con la obtención de las constantes asociadas a este desarrollo, a continuación hallaremos el valor de g_0 . Al hacer uso de D.1, D.2, D.3 y en virtud de 4.23 tenemos:

$$g_0 = \frac{2}{3}\pi K_1 - \tau_0 + \frac{1}{2}v_0^2 + \left(\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}\right), \quad (D.6)$$

$$g_0 = \frac{2}{3}\pi K_1 - \tau_0 - \frac{1}{4}v_0^2. \quad (D.7)$$

Para determinar g_0 busquemos τ_0 haciendo uso de 4.29, de D.1, D.2, D.3 y recordando lo siguiente:

$$(1-x)^n \cong 1 - nx \quad (D.8)$$

se obtiene (luego de simplificar un poco y despreciar los términos de orden superior):

$$-\frac{1}{\gamma-1}c - 3v_0 - 6\tau_0 K_2 = 0, \quad (D.9)$$

$$\tau_0 = \frac{1}{6K_2} \left(3v_0 + \frac{2-3v_0}{\gamma-1} \right). \quad (D.10)$$

Al hacer uso de 4.6 y trabajar un poco la expresión llegamos finalmente a:

$$\tau_0 = \frac{(\gamma-1)n - m - \gamma + 1/2}{3(\gamma-1)(n-m-3/2)K_2}. \quad (D.11)$$

D.2. Desarrollo para $\xi \gg 1$

Para modelar el comportamiento de las funciones involucradas en nuestro problema, hay que recordar que una condición física de éstas es que en el infinito ellas

se anulan, este es un requerimiento usual, es decir:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} v(\zeta) = 0, \quad (\text{D.12})$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} g(\zeta) = 0, \quad (\text{D.13})$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \tau(\zeta) = 0. \quad (\text{D.14})$$

Ahora bien, la velocidad -sin embargo- no puede satisfacer este requerimiento (ver sección de discusiones 6) por lo que es necesario que $v(\zeta)$ sea una función "lineal" en el espacio. Por otra parte, el perfil adimensional de la densidad y la temperatura sí pueden satisfacer D.13 y D.14, por lo tanto, un desarrollo adecuado podría ser el siguiente:

$$g(\zeta) = g_\infty \zeta^{-\alpha}, \quad \tau(\zeta) = \tau_\infty \zeta^{-\beta}, \quad v(\zeta) = -v_\infty \zeta. \quad (\text{D.15})$$

Entonces, al sustituir las relaciones D.15 en 4.28 podemos obtener dos soluciones para v_∞ (teniendo presente que α y β son ambos mayores que cero), en efecto:

$$v_\infty = 0, \quad (\text{D.16})$$

$$v_\infty = \frac{n-1}{n-m-3/2}, \quad (\text{D.17})$$

donde la solución aceptable sería D.17 pues, como se dijo anteriormente, en este caso no es admisible que $v_\infty = 0$. Por otra parte, al sustituir D.15 en 4.27 es posible obtener una expresión para la constante α , esto no es más que:

$$\alpha = \frac{d+3v_\infty}{v_\infty-1}, \quad (\text{D.18})$$

$$\therefore \alpha = \frac{n-1}{m+1/2}. \quad (\text{D.19})$$

Finalmente, de la ecuación 4.29 podemos encontrar los valores de β , τ_∞ y g_∞ . Nótese que τ_∞ y g_∞ sólo pueden obtenerse de manera implícita y que al ser constantes no deben depender de ζ , con esto es mente, se puede obtener que el valor de β es simplemente:

$$\beta = \frac{n(m+1) - 3m - 2}{n(m+1/2)}. \quad (\text{D.20})$$

Luego de un una reescritura no tan despreciable se obtiene que la relación entre τ_∞ y g_∞ es:

$$\frac{\tau_\infty^n}{g_\infty^{m+1}} = \frac{(2 + \beta)(\gamma - 1)^{-1} - 3\alpha}{K_2\beta(\alpha - 1)(\alpha + \beta - 3)}. \quad (\text{D.21})$$

BIBLIOGRAFÍA

- [Bakulin, 1987] Bakulin, P. (1987). *Curso de astronomía general*. MIR, 1 edition.
- [Blottiau et al., 1988] Blottiau, P., Chieze, J. P., and Bouquet, S. (1988). An asymptotic self-similar solution for the gravitational collapse. , 207:24–36.
- [Boyd and Sanderson, 2003] Boyd, T. and Sanderson, J. (2003). *The physics of plasmas*. Cambridge University Press, 1 edition.
- [Clarke and Carswell, 2007] Clarke, C. and Carswell, B. (2007). *Principles of Astrophysical Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1 edition.
- [Dina, 2000] Dina, P. (2000). *An introduction to the theory of stellar structure and evolution*. Cambridge University Press, 1 edition.
- [Galli and Shu, 1993] Galli, D. and Shu, F. H. (1993). Collapse of Magnetized Molecular Cloud Cores. I. Semianalytical Solution. , 417:220–+.
- [Hartmann, 2009] Hartmann, L. (2009). *Accretion processes in star formation*. Cambridge University Press, 2 edition.

- [Hunter, 1977] Hunter, C. (1977). The collapse of unstable isothermal spheres. , 218:834–845.
- [Iserles, 1996] Iserles, A. (1996). *A first course in the numerical analysis of differential equations*. Cambridge University Press, 1 edition.
- [Landau, 1999] Landau, L. . L. E. (1999). *Fluid Mechanics*. Butterworth Heinemann, 2 edition.
- [Larson, 1969] Larson, R. B. (1969). Numerical calculations of the dynamics of collapsing proto-star. , 145:271–+.
- [Larson, 1973] Larson, R. B. (1973). Processes in Collapsing Interstellar Clouds. , 11:219–+.
- [Murakami et al., 2004] Murakami, M., Nishihara, K., and Hanawa, T. (2004). Self-Similar Gravitational Collapse of Radiatively Cooling Spheres. , 607:879–889.
- [Penston, 1969] Penston, M. V. (1969). Dynamics of self-gravitating gaseous spheres-III. Analytical results in the free-fall of isothermal cases. , 144:425–+.
- [Sachdev, 2009] Sachdev, P. (2009). *Nonlinear diffusive waves*. Cambridge University Press, 2 edition.
- [Sedov, 1993] Sedov, L. (1993). *Similarity and dimensional methods in mechanics*. CRC Press, 10 edition.
- [Shu, 1977] Shu, F. H. (1977). Self-similar collapse of isothermal spheres and star formation. , 214:488–497.
- [Stacey, 2002] Stacey, P. (2002). *Theory and Problems of ASTRONOMY*. McGraw-Hill, 1 edition.
- [Stahler and Palla, 2004] Stahler, S. W. and Palla, F. (2004). *The formation of stars*. WILEY-VCH, 2 edition.

[Suto and Silk, 1988] Suto, Y. and Silk, J. (1988). Self-similar dynamics of polytropic gaseous spheres. , 326:527–538.

[Whitworth and Summers, 1985] Whitworth, A. and Summers, D. (1985). Self-similar condensation of spherically symmetric self-gravitating isothermal gas clouds. , 214:1–25.

[William H. Press and Flannery, 2007] William H. Press, Saul A. Teukolsky, W. T. V. and Flannery, B. P. (2007). *Numerical recipes*. Cambridge University Press, 3 edition.

[Yahil, 1983] Yahil, A. (1983). Self-similar stellar collapse. , 265:1047–1055.

[Zel'dovich, 1968] Zel'dovich, Ya. B., y. R. Y. P. (1968). *Physics of Shock Waves and High Temperature Hydrodynamic Phenomena*. Academic Press, 2 edition.