Relación entre las variables s y z ¿teorema o conjetura?

Ebert Brea

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería.
Escuela de Ingeniería Eléctrica

28 de julio de 2014

Resumen

Esta breve nota técnica tiene por objeto justificar la conjetura sobre la relación que existe entre las variables s y z, las cuales corresponden respectivamente a las variables independientes de la transformada de Laplace y la transformada $\mathscr{Z}$. Esta relación, de acuerdo a la conjetura, viene dada por $s = \frac{2}{h}\frac{z-1}{z+1}$, donde h es el paso de discretización.

Contenido

1. Modelo dinámico de primer orden

Sobre la base de un caso particular, se establecerá la relación entre s y z. Para esto, considere el siguiente modelo matemático de un sistema Lineal, Dinámico, Causal, Invariante en tiempo y Determinista (LDCID) definido en el dominio del tiempo continuo:

$$\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Si al modelo definido por la Ec. (1) se integral entre nh y $(n+1)h$ se tiene

$$\int_{nh}^{(n+1)h} dy(t) + a_0 \int_{nh}^{(n+1)h} y(t)dt = \int_{nh}^{(n+1)h} x(t)dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Al integral por trapecio con un paso h, se tiene

$$y((n+1)h) - y(nh) + a_0 \frac{h}{2}\left[y((n+1)h) + y(nh)\right] = \frac{h}{2}\left[x((n+1)h) + x(nh)\right], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

lo que conduce a

$$y[n+1]-y[n]+a_0\frac{h}{2}\left[y[n+1]+y[n]\right]=\frac{h}{2}\left[x[n+1]+x[n]\right],\quad \forall n\in\mathbb{Z}, \tag{4}$$

que al agrupar los términos se obtiene

$$\left(1+\frac{a_0h}{2}\right)y[n+1]+\left(\frac{a_0h}{2}-1\right)y[n]=\frac{h}{2}\left[x[n+1]+x[n]\right],\quad \forall n\in\mathbb{Z}. \tag{5}$$

Ahora, al determinar la función de transferencia del modelo definido por la Ec. (1) definida en el dominio s, es decir, mediante la transformada de Laplace, se obtiene

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{a_0+s},\quad \forall \mathrm{Re}\left[s\right]>-|a_0|. \tag{6}$$

Por otra parte, la función de transferencia del modelo definido por la Ec. (5) expresada en el dominio de la transformada $\mathscr{Z}$ es

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\frac{h}{2}(z+1)}{\left(1+\frac{a_0h}{2}\right)z+\left(\frac{a_0h}{2}-1\right)},\quad \forall |z|>\left|\frac{2-a_0h}{2+a_0h}\right|. \tag{7}$$

Luego de algunos pasos algebraicos se obtiene que

$$H(z)=\frac{1}{a_0+\frac{2}{h}\frac{z-1}{z+1}},\quad \forall |z|>\left|\frac{2-a_0h}{2+a_0h}\right|. \tag{8}$$

Lo que permite ver la relación entre s y z, la cual está dada por

$$s=\frac{2}{h}\frac{z-1}{z+1}. \tag{9}$$

2. Conclusiones

Conjetura 1 *Basado en la discretización mediante integración trapezoidal, la relación que existe entre las variables s y z correspondiente respectivamente a las variables independientes de la transformada de Laplace y la transformada $\mathscr{Z}$, viene dada por*

$$s=\frac{2}{h}\frac{z-1}{z+1}, \tag{10}$$

donde h representa el paso de discretización.

Queda entonces pendiente la demostración de lo enunciado en la Conjetura 1, para así establecer el teorema.

