Transformada Rápida de Fourier: tres enfoques
Fast Fourier Transform: three approaches

Ebert Brea

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería, Escuela de Ingeniería Eléctrica.
E-mail: ebert.brea@ucv.ve

28 de julio de 2014

Resumen

En este documento se muestra un modo no canónico y canónico de la transformada rápida de Fourier, más conocida por su acrónimo FFT, el cual viene de su significado en inglés *fast Fourier transform*. Es importante aclarar que el primer ejemplo mostrado presenta una manera de aplicar la transformada discreta de Fourier mediante la FFT a una secuencia de $N = 2^3$ datos, y el segundo ejemplo corresponde a la manera canónica de la FFT a una secuencia de datos $N = r_1 r_2$, donde $r_i \in \mathbb{N}_+$ para todo $i \in \{1, 2\}$.Adicionalmente se presenta un enfoque matricial de la transformada discreta de Fourier.

Contenido

1. Definición de la transformada discreta de Fourier

Definición 1 (Transformada discreta de Fourier) *Sea una secuencia finita de datos, la cual define entonces que* $f[n] : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *contentiva de* N *muestras de una señal,*

$$f[n] = \sum_{m=0}^{N-1} f_m \delta[n-m], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{1.1}$$

donde

$$\delta[n-m] = \begin{cases} 1, & \forall n = m; \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases} \tag{1.2}$$

y la función $f[n]$ *corresponde a la toma de muestras a intervalos regulares* h*, definido en el dominio continuo del tiempo de una señal* $f(t)$*. Entonces, la transformada discreta de Fourier (TDF) de la secuencia* $f[n]$ *está dada por*

$$F[k] = \sum_{q=0}^{N-1} F_q \, \delta[k - \Omega_q], \quad \forall k \in \{\kappa | \kappa = \Omega_q, \forall q = 0, \ldots, N-1\}, \tag{1.3}$$

donde $\Omega_q = q\frac{2\pi}{N}$ representa la frecuencia discreta, y

$$F_q = \mathrm{TDF}(f_m) = \sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{-j2\pi mq/N}, \quad \forall q \in \{\hat{q} \in \mathbb{Z} | 0 \leq \hat{q} \leq N-1\}. \tag{1.4}$$

2. El problema de la TDF por FFT

Sea $f[n]$ un secuencia contentiva de N muestras, tal que

$$f[n] = \sum_{m=0}^{N-1} f_m \delta[n-m], \quad \forall n = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{2.1}$$

donde en nuestro caso,

$$f_m = \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}. \tag{2.2}$$

La secuencia mostrada por (2.1), tiene como transformada discreta de Fourier

$$F[k] = \mathrm{TDF}\{f[n]\} = \sum_{q=0}^{N-1} F_q \delta[k-q], \quad \forall k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{2.3}$$

Ahora, la descomposición de f_m en secuencias de posición par e impar, es para el caso bajo estudio

$$f_m = \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}. \tag{2.4a}$$

$$g_m = \{f_0, f_2, f_4, f_6\}, \qquad h_m = \{f_1, f_3, f_5, f_7\}. \tag{2.4b}$$

$$a_m = \{f_0, f_4\}, \qquad b_m = \{f_2, f_6\}, \qquad c_m = \{f_1, f_5\}, \qquad d_m = \{f_3, f_7\}. \tag{2.4c}$$

Este hecho, obliga a denotar que

$$F_q = \mathrm{TDF}\{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}. \tag{2.5a}$$

$$G_q = \mathrm{TDF}\{f_0, f_2, f_4, f_6\}, \qquad h_q = \mathrm{TDF}\{f_1, f_3, f_5, f_7\}. \tag{2.5b}$$

$$A_q = \mathrm{TDF}\{f_0, f_4\}, \qquad B_q = \mathrm{TDF}\{f_2, f_6\}, \qquad C_q = \mathrm{TDF}\{f_1, f_5\}, \qquad D_q = \mathrm{TDF}\{f_3, f_7\}. \tag{2.5c}$$

3. Formulación de la transformada rápida de Fourier

A los efectos de simplificar la notación, Cooley y Tukey (1965) propusieron en su artículo denotar el término $e^{-j2\pi/N}$ como W. No obstante, se definirá como

$$\mathrm{W}_N = e^{-j2\pi/N}, \tag{3.1}$$

donde obviamente $N(>0) \in \mathbb{N}$ es el número de datos contenido en la secuencia de muestras de la señal en tiempo.

De la Ecuación (1.4) se tiene que

$$F_q = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-j2\pi nq/N}, \quad \forall q \in \{\hat{q} \in \mathbb{Z} | 0 \leq \hat{q} \leq N-1\}. \tag{3.2}$$

Al denotar $W_N = e^{-j2\pi/N}$ y sustituyendo en la Ecuación (3.2), se obtiene que

$$F_q = \sum_{n=0}^{N-1} f_n W_N^{nq}, \quad \forall q \in \{\hat{q} \in \mathbb{Z} | 0 \leq \hat{q} \leq N-1\}. \tag{3.3}$$

Al expresar la Ecuación (3.3) en dos sumas, una para los términos de índice par y otra para los términos de índice impar, que para esto se reemplaza n por $2n$ en la primera sumatoria, y n por $2n+1$ en la segunda sumatoria se consigue que las ecuaciones de la transformada rápida de Fourier, son

$$F_q = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2n} \mathrm{W}_{N/2}^{nq} + \mathrm{W}_N^q \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2n+1} \mathrm{W}_{N/2}^{nq}, \quad \forall q = 0, 1, \ldots, (N/2)-1. \tag{3.4a}$$

Si se emplaza q por $q+\frac{N}{2}$ en la Ecuación (3.4a), se obtiene

$$F_{q+\frac{N}{2}} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2n} \mathrm{W}_{N/2}^{nq} - \mathrm{W}_N^q \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2n+1} \mathrm{W}_{N/2}^{nq}, \quad \forall q = 0, 1, \ldots, (N/2)-1. \tag{3.4b}$$

De acuerdo a (2.4b), (3.4a) y (3.4b) se pueden expresar que

$$G_q = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2n} \mathrm{W}_{N/2}^{nq}, \quad \forall q = 0, 1, \ldots, (N/2)-1. \tag{3.5a}$$

$$H_q = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2n+1} \mathrm{W}_{N/2}^{nq}, \quad \forall q = 0, 1, \ldots, (N/2)-1. \tag{3.5b}$$

Empleando (3.5a) y (3.5b) en (3.4a) y (3.4b), se consigue que

$$F_q = G_q + \mathrm{W}_N^q H_q, \quad \forall q = 0, 1, \ldots, (N/2)-1. \tag{3.6a}$$

$$F_{q+\frac{N}{2}} = G_q - \mathrm{W}_N^q H_q, \quad \forall q = 0, 1, \ldots, (N/2)-1. \tag{3.6b}$$

Aplicando recursivamente (3.6a) y (3.6b), se tiene que

$$G_q = A_q + \mathrm{W}_{N/2}^q B_q, \quad \forall q = 0, 1, \ldots, (N/4)-1. \tag{3.7a}$$

$$G_{q+\frac{N}{4}} = A_q - \mathrm{W}_{N/2}^q B_q, \quad \forall q = 0, 1, \ldots, (N/4)-1. \tag{3.7b}$$

$$H_q = C_q + \mathrm{W}_{N/2}^q D_q, \quad \forall q = 0, 1, \ldots, (N/4)-1. \tag{3.7c}$$

$$H_{q+\frac{N}{4}} = C_q - \mathrm{W}_{N/2}^q D_q, \quad \forall q = 0, 1, \ldots, (N/4)-1. \tag{3.7d}$$

Al aplicar (3.4a) y (3.4b) en la determinación de A_q, B_q, C_q y D_q, se consigue que debido al hecho de que cada una de las secuencias a_m, b_m, c_m y d_m contiene únicamente dos muestras, es decir, $N=2$,

$$\begin{aligned} A_0 &= f_0 + f_4. \\ A_1 &= f_0 - f_4. \end{aligned} \tag{3.8a}$$

$$\begin{aligned} B_0 &= f_2 + f_6. \\ B_1 &= f_2 - f_6. \end{aligned} \tag{3.8b}$$

$$\begin{aligned} C_0 &= f_1 + f_5. \\ C_1 &= f_1 - f_5. \end{aligned} \tag{3.8c}$$

$$\begin{aligned} D_0 &= f_3 + f_7. \\ D_1 &= f_3 - f_7. \end{aligned} \tag{3.8d}$$

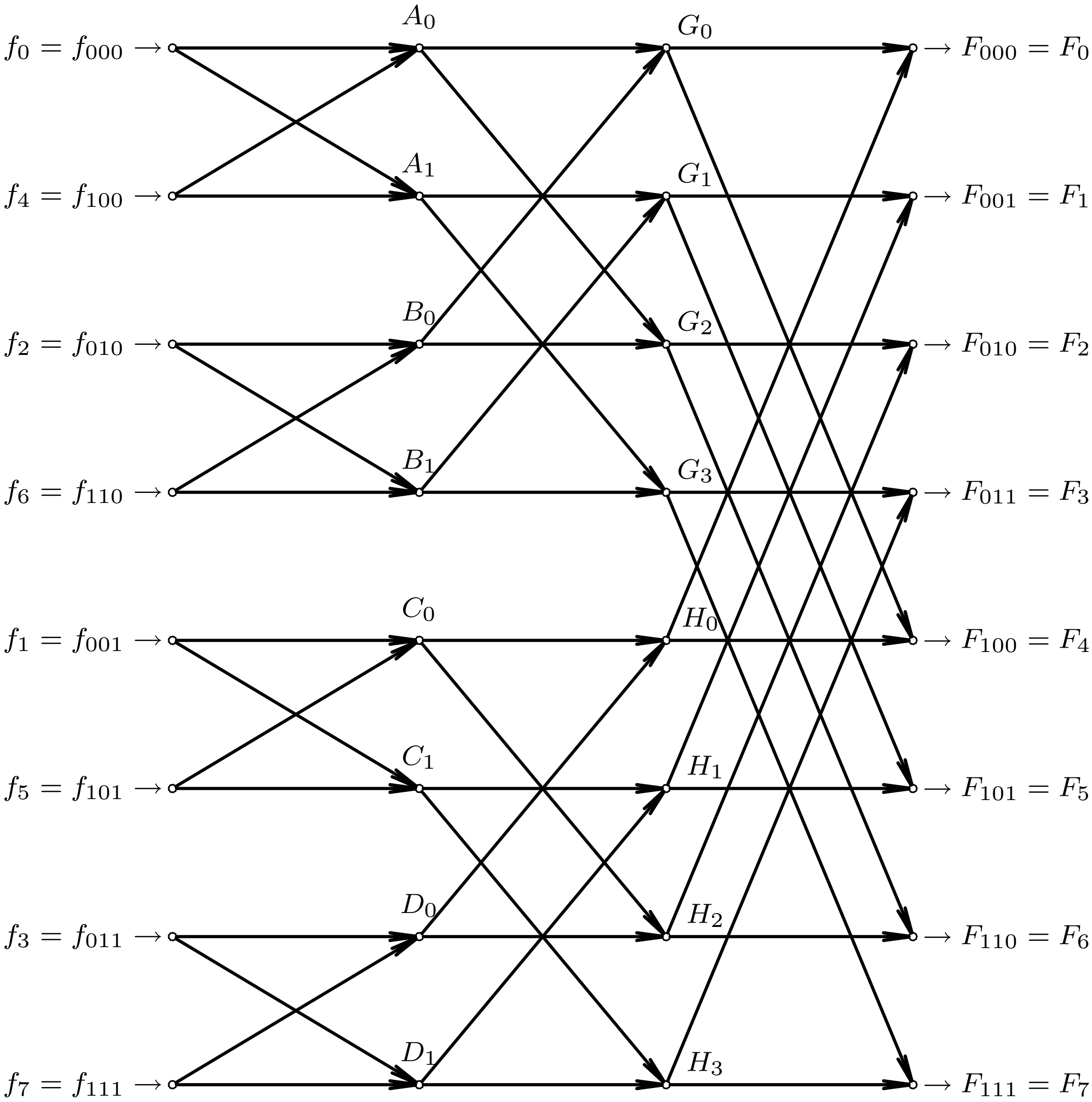

Figura 3.1. Transformada rápida de Fourier para $N = 2^3$

Es importante destacar, que la transformada discreta de Fourier de un dato f es el mismo dato, es decir,

$$\mathrm{TDF}\{f_i\} = f_i \quad , \forall i = 0, \ldots, N-1. \tag{3.9}$$

Lo expresado en (3.9) puede ser fácilmente verificado por el lector.

Esto arroja que la transformada rápida de Fourier puede ser representada a través del conocido diagrama de mariposa, el cual es mostrado en la Figura 3.1 de la página 4. Por otra parte, en la Figura 3.1 no son mostrados los factores W_M, para los casos $M \in \{2, 4, 8\}$. No obstante, son mostradas las dependencias entre las relaciones desarrolladas para el caso de $N = 8$.

4. Transformada rápida de Fourier para $N = r_1 r_2$

De la Definición 1, se tiene que la Ecuación (1.4) puede ser reexpresada como

$$F_q = \mathrm{TDF}(f_m) = \sum_{m=0}^{N-1} f_m \mathrm{W}_N^{mq}, \quad \forall q \in \{\hat{q} \in \mathbb{Z} | 0 \leq \hat{q} \leq N-1\}, \tag{4.1}$$

donde $\mathrm{W}_N = e^{-j2\pi/N}$.

Note que tanto n como q pertenecen ambos al conjunto $\{i \in \mathbb{N} | 0 \leq i \leq N-1\}$.

En este apartado se estudiará la FFT para un número de datos $N = r_1 r_2$, donde obviamente r_1 y r_1 son dos número entero positivos. En este caso se estudiará el algoritmo de FFT base $r_1 + r_2$.

En esta caso,

$$q = q_1 r_1 + q_0, \quad q_0 = 0,1,\ldots,r_1-1, \quad q_1 = 0,1,\ldots,r_2-1. \tag{4.2a}$$

$$m = m_1 r_2 + m_0, \quad m_0 = 0,1,\ldots,r_2-1, \quad m_1 = 0,1,\ldots,r_1-1. \tag{4.2b}$$

Empleando la Ecuación (4.2a) en la Ecuación (4.1), se consigue que

$$F_{(q_1,q_0)} = \sum_{m_0=0}^{r_2-1} \sum_{m_1=0}^{r_1-1} f_{(m_1,m_0)}^{[0]} \mathrm{W}_N^{q(m_1 r_2 + m_0)}, \quad \forall q_0 = 0,1,\ldots,r_1-1, \;\; q_1 = 0,1,\ldots,r_2-1, \tag{4.3}$$

la cual puede ser reescrita como

$$F_{(q_1,q_0)} = \sum_{m_0=0}^{r_2-1} \left[\sum_{m_1=0}^{r_1-1} f_{(m_1,m_0)}^{[0]} \mathrm{W}_N^{q m_1 r_2} \right] \mathrm{W}_N^{q m_0}, \quad \forall q_0 = 0,1,\ldots,r_1-1, \;\; q_1 = 0,1,\ldots,r_2-1, \tag{4.4}$$

Al estudiar el factor $\mathrm{W}_N^{m r_2 q_1}$, se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{W}_N^{q m_1 r_2} &= \mathrm{W}_N^{(q_1 r_1 + q_0) m_1 r_2} \\ &= \mathrm{W}_N^{r_1 r_2 q_1 m_1} \mathrm{W}_N^{q_0 m_1 r_2} \\ &= \mathrm{W}_N^{q_0 m_1 r_2} \end{aligned}$$

debido al hecho de que $\mathrm{W}_N^{r_1 r_2} = \mathrm{W}_N^N = 1$.

Aplicando estas relaciones a la Ecuación (4.4), se obtiene que

$$f_{(q_0,m_0)}^{[1]} = \sum_{m_1=0}^{r_1-1} f_{(m_1,m_0)}^{[0]} \mathrm{W}_N^{q_0 m_1 r_2}, \quad \forall q_0 = 0,1,\ldots,r_1-1, \;\; m_0 = 0,1,\ldots,r_2-1. \tag{4.5a}$$

$$f_{(q_0,q_1)}^{[2]} = \sum_{m_0=0}^{r_2-1} F_{(m_0,q_0)}^{[1]} \mathrm{W}_N^{(q_1 r_1 + q_0) m_0}, \quad \forall q_0 = 0,1,\ldots,r_1-1, \;\; q_1 = 0,1,\ldots,r_2-1, \tag{4.5b}$$

donde $F_{(m_0,q_0)}^{[1]} = f_{(q_0,m_0)}^{[1]}$ para todo $q_0 = 0,1,\ldots,r_1-1$ y $m_0 = 0,1,\ldots,r_2-1$.

Obteniéndose, como resultado final que

$$F_{(q_1,q_0)} = f_{(q_0,q_1)}^{[2]} \tag{4.6}$$

Ejemplo 1 *Exprese las ecuaciones necesarias para determinar la FFT de una secuencia de $N = 12$ datos, empleando para eso una base 3+4.*

Solución

Debido al número de datos de $N = 12$ con $r_1 = 3$ y $r_2 = 4$, para este particular caso, las Ecuaciones (4.2), quedan como

$$\begin{aligned} q &= q_1 3 + q_0, \qquad q_0 = 0,1,2, \qquad q_1 = 0,1,2,3. \\ m &= m_1 4 + m_0, \quad m_0 = 0,1,2,3, \quad m_1 = 0,1,2. \end{aligned}$$

Sustituyendo m en la Ecuación (4.1), se tiene que

$$F_{(q_1,q_0)} = \sum_{m_0=0}^{3} \sum_{m_1=0}^{2} f^{[0]}_{(m_1,m_0)} \mathrm{W}_{12}^{q(m_1 4+m_0)}, \quad \forall q_0 = 0,1,2, \qquad q_1 = 0,1,2,3, \tag{4.7}$$

quedando como

$$F_{(q_1,q_0)} = \sum_{m_0=0}^{3} \left[\sum_{m_1=0}^{2} f^{[0]}_{(m_1,m_0)} \mathrm{W}_{12}^{4qm_1} \right] \mathrm{W}_{12}^{qm_0}, \quad \forall q_0 = 0,1,2, \qquad q_1 = 0,1,2,3, \tag{4.8}$$

donde el núcleo $\mathrm{W}_{12}^{4qm_1}$ es

$$\begin{aligned} \mathrm{W}_{12}^{4qm_1} &= \mathrm{W}_{12}^{4(3q_1+q_0)m_1} \\ &= \mathrm{W}_{12}^{3\cdot 4q_1m_1} \mathrm{W}_{12}^{4q_0m_1} \\ &= \mathrm{W}_{12}^{4q_0m_1} \end{aligned}$$

debido al hecho de que $\mathrm{W}_{12}^{3\cdot 4} = \mathrm{W}_{12}^{12} = 1$.

Entonces, la Ecuación (4.8) es reescrita como

$$F_{(q_1,q_0)} = \sum_{m_0=0}^{3} \left[\sum_{m_1=0}^{2} f^{[0]}_{(m_1,m_0)} \mathrm{W}_{12}^{4q_0m_1} \right] \mathrm{W}_{12}^{qm_0}, \quad \forall q_0 = 0,1,2, \qquad q_1 = 0,1,2,3. \tag{4.9}$$

Aplicando estas relaciones a la Ecuación (4.9), se obtiene que

$$f^{[1]}_{(q_0,m_0)} = \sum_{m_1=0}^{2} f^{[0]}_{(m_1,m_0)} \mathrm{W}_{12}^{4q_0m_1}, \quad \forall q_0 = 0,1,2, \;\; m_0 = 0,1,2,3. \tag{4.10a}$$

$$f^{[2]}_{(q_0,q_1)} = \sum_{m_0=0}^{3} F^{[1]}_{(m_0,q_0)} \mathrm{W}_{12}^{(3q_1+q_0)m_0}, \quad \forall q_0 = 0,1,2, \;\; q_1 = 0,1,2,3. \tag{4.10b}$$

Las Ecuaciones (4.10) permiten calcular la FFT con base 3+4, arrojando finalmente que

$$F_q = F_{(q_1,q_0)} = f^{[2]}_{(q_0,q_1)}, \quad \forall q_0 = 0,1,2, \;\; q_1 = 0,1,2,3, \tag{4.11}$$

teniendo en cuenta que $q = 3q_1 + q_0$.

La Figura 4.1 muestra la dependencia de las variables a través de un grafo, el cual por su simetría es conocido como diagrama de mariposa del algoritmo FFT para el caso de $N = 12$ con $r_1 = 3$ y $r_2 = 4$. Note que en el gráfico no se muestran los factores W_{12} que multiplican las variables.

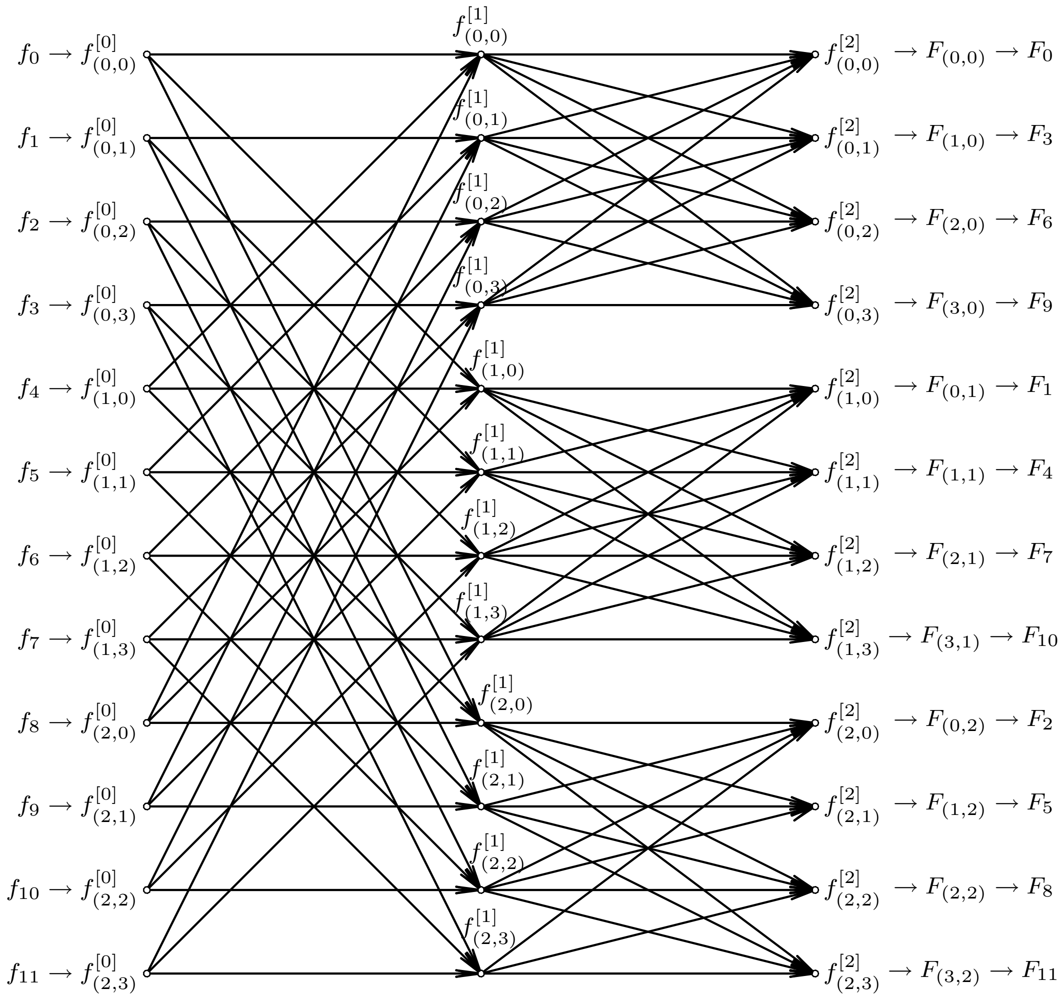

Figura 4.1. Transformada rápida de Fourier, base 3+4.

5. Definición de la transformada inversa discreta de Fourier

Definición 2 (Transformada inversa discreta de Fourier) *Sea una función definida en el dominio discreto tal que $F[k]:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ contiene N datos correspondientes a la transformada discreta de Fourier de una función $f[n]$,*

$$F[k]=\sum_{q=0}^{N-1}F_q\delta[k-\Omega_q],\quad \forall k\in\{\kappa|\kappa=\Omega_q,\forall q=0,\ldots,N-1\},\tag{5.1}$$

donde $\Omega_q=q\frac{2\pi}{N}$ representa la frecuencia discreta. Entonces, la TIDF de la función $F[k]$ viene definida por

$$f[n]=\sum_{m=0}^{N-1}f_m\delta[n-m],\quad \forall n\in\mathbb{Z},\tag{5.2}$$

donde

$$f_m=\mathrm{TIDF}(F_k)=\frac{1}{N}\sum_{q=0}^{N-1}F_q e^{j2\pi mq/N},\quad \forall m\in\{\hat{m}\in\mathbb{N}|0\le\hat{m}\le N-1\},\tag{5.3}$$

6. Forma matricial de la transformada discreta de Fourier

Una forma alterna de expresar la TDF es en su forma matricial, para lo cual se tiene la siguiente proposición, y cuyo enfoque es mostrado por Brigham (1988).

Proposición 1 *Sea f_m un secuencia de datos adquiridos a intervalos regulares de una señal $f(t)$. Entonces, la TDF de la secuencia puede ser definida mediante su representación matricial como*

$$\mathbf{F} = \mathbf{W}_N \, \mathbf{f}, \tag{6.1}$$

donde en general $\mathbf{F} \in \mathbb{C}^{N\times 1}$ es el vector contentivo de la TDF; $\mathbf{W}_N \in \mathbb{C}^{N\times N}$ es la matriz de núcleos $[\mathrm{W}_N^{mq}]_{N\times N}$; y $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^{N\times 1}$ es el vector de datos provenientes del muestreo de la señal $f(t)$.

Demostración.

Aplicando lo denotado por la Ecuación (3.1) en la Ecuación (1.4), se obtiene que

$$F_q = \mathrm{TDF}(f_m) = \sum_{m=0}^{N-1} f_m \mathrm{W}_N^{mq}, \quad \forall q \in \{\hat{q} \in \mathbb{Z} | 0 \leq \hat{q} \leq N-1\}. \tag{6.2}$$

Ahora, al evaluar la Ecuación (6.2), para $q = 0, 1, \ldots, N-2, N-1$, se obtiene

$$F_0 = f_0\mathrm{W}_N^0 + f_1\mathrm{W}_N^0 + f_2\mathrm{W}_N^0 + \cdots + f_{N-2}\mathrm{W}_N^0 + f_{N-1}\mathrm{W}_N^0. \tag{6.3a}$$

$$F_1 = f_0\mathrm{W}_N^0 + f_1\mathrm{W}_N^1 + f_2\mathrm{W}_N^2 + \cdots + f_{N-2}\mathrm{W}_N^{N-2} + f_{N-1}\mathrm{W}_N^{N-1}. \tag{6.3b}$$

$$F_2 = f_0\mathrm{W}_N^0 + f_1\mathrm{W}_N^2 + f_2\mathrm{W}_N^4 + \cdots + f_{N-2}\mathrm{W}_N^{2(N-2)} + f_{N-1}\mathrm{W}_N^{2(N-1)}. \tag{6.3c}$$

$$F_{N-2} = f_0\mathrm{W}_N^0 + f_1\mathrm{W}_N^{(N-2)} + f_2\mathrm{W}_N^{2(N-2)} + \cdots + f_{N-2}\mathrm{W}_N^{(N-2)(N-2)} + f_{N-1}\mathrm{W}_N^{(N-2)(N-1)}. \tag{6.3d}$$

$$F_{N-1} = f_0\mathrm{W}_N^0 + f_2\mathrm{W}_N^{(N-1)} + f_2\mathrm{W}_N^{2(N-1)} + \cdots + f_{N-2}\mathrm{W}_N^{(N-1)(N-2)} + f_{N-1}\mathrm{W}_N^{(N-1)(N-1)}. \tag{6.3e}$$

Las Ecuaciones (6.3) pueden ser reescritas como

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{N-2} \\ F_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{W}_N^0 & \mathrm{W}_N^0 & \mathrm{W}_N^0 & \cdots & \mathrm{W}_N^0 & \mathrm{W}_N^0 \\ \mathrm{W}_N^0 & \mathrm{W}_N^1 & \mathrm{W}_N^2 & \cdots & \mathrm{W}_N^{N-2} & \mathrm{W}_N^{N-1} \\ \mathrm{W}_N^0 & \mathrm{W}_N^2 & \mathrm{W}_N^4 & \cdots & \mathrm{W}_N^{2(N-1)} & \mathrm{W}_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{W}_N^0 & \mathrm{W}_N^{N-2} & \mathrm{W}_N^{2(N-2)} & \vdots & \mathrm{W}_N^{(N-2)(N-2)} & \mathrm{W}_N^{(N-2)(N-1)} \\ \mathrm{W}_N^0 & \mathrm{W}_N^{N-1} & \mathrm{W}_N^{2(N-1)} & \vdots & \mathrm{W}_N^{(N-2)(N-1)} & \mathrm{W}_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

La Ecuación (6.4) puede ser expresada en su forma matricial como

$$\mathbf{F} = \mathbf{W}_N \, \mathbf{f}, \tag{6.5}$$

■

Observación 1 *Cada uno de los elementos w_{mq} de la matriz $\mathbf{W}_N$ ubicado en la m-ésina fila y q-ésina columna viene dado por*

$$w_{mq} = \mathrm{W}_N^{(m-1)(q-1)} = e^{-j2\pi(m-1)(q-1)/N}, \tag{6.6}$$

quedando entonces definida la matriz $\mathbf{W}_N$ como

$$\mathbf{W}_N = \left[\mathrm{W}_N^{(m-1)(q-1)}\right]_{N\times N}. \tag{6.7}$$

Ejemplo 2 *Considere f_m para todo $m = 0, 1, 2, 3$ una secuencia de 4 datos adquiridos de una señal $f(t)$. Exprese en su forma matricial la TDF.*

Solución

Según la definición de W_N*,*

$$\mathrm{W}_4 = e^{j2\pi/4} = e^{-j\pi/2} = -j. \tag{6.8}$$

Aplicando la Ecuación (6.4)*, se obtiene que*

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{W}_4^0 & \mathrm{W}_4^0 & \mathrm{W}_4^0 & \mathrm{W}_4^0 \\ \mathrm{W}_4^0 & \mathrm{W}_4^1 & \mathrm{W}_4^2 & \mathrm{W}_4^3 \\ \mathrm{W}_4^0 & \mathrm{W}_4^2 & \mathrm{W}_4^4 & \mathrm{W}_4^6 \\ \mathrm{W}_4^0 & \mathrm{W}_4^3 & \mathrm{W}_4^6 & \mathrm{W}_4^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \tag{6.9}$$

Al sustituir W_4 *por* j *en la Ecuación* (6.9)*, se tiene que*

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \tag{6.10}$$

Observación 2 *La definición de TIDF puede ser expresada también en su forma matricial, quedando entonces*

$$\mathbf{f} = \frac{1}{N}\overline{\mathbf{W}}_N \mathbf{F}, \tag{6.11}$$

donde

$$\overline{\mathbf{W}}_N = \left[e^{j2\pi(m-1)(q-1)/N} \right]_{N\times N} \in \mathbb{C}^{N\times N}, \tag{6.12}$$

es decir, $\overline{\mathbf{W}}_N$ *es la matriz formada por los elementos* $\overline{\mathrm{W}}_N^{mq}$*, donde*

$$\overline{\mathrm{W}}_N = e^{j2\pi/N}. \tag{6.13}$$

Además, de la Ecuación (6.1) *de la página 8, se puede afirmar que*

$$\mathbf{f} = \mathbf{W}_N^{-1} \mathbf{F}, \tag{6.14}$$

donde $\mathbf{W}_N^{-1}$ *denota la matriz inversa de* $\mathbf{W}_N$*, lo que al comparar las Ecuaciones* (6.11) *y* (6.14)*, se puede afirmar que*

$$\mathbf{W}_N^{-1} = \frac{1}{N}\overline{\mathbf{W}}_N. \tag{6.15}$$

Ejemplo 3 *Sea F_q para todo $q = 0, 1, 2, 3$ una secuencia de 4 datos proveniente de la TDF de $f[n]$. Exprese en su forma matricial la TIDF de la función $F[k]$.*

Solución

De lo Observación 2, se tiene que

$$\mathbf{f} = \frac{1}{4}\overline{\mathbf{W}}_4 \mathbf{F}, \tag{6.16}$$

lo que arroja que

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}, \tag{6.17}$$

debido a que $\overline{\mathrm{W}}_4 = e^{j2\pi/4} = j$.

Referencias

Brigham, E. O. 1988. *The fast Fourier transform and its applications*. Prentice-Hall signal processing series. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

Cooley, J. W. y Tukey, J. W. 1965. An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. *Mathematics of Computation*, 19(90):297–301. American Mathematical Society.

