Análisis de Sistemas Lineales: segunda parte

Ebert Brea

5 de junio de 2012

Contenido

1. Análisis de sistemas en el plano S

Problema 1.1. *Sea un sistema eléctrico, el cual de acuerdo a pruebas ejecutadas en un laboratorio, el sistema es LDCID y tiene una respuesta ante un escalón unitario de expresión matemática*

$$y(t)^u = k(1 - e^{-\lambda t})\mathrm{u}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

La Figura 1.1 muestra la respuesta del sistema ante el escalón unitario.

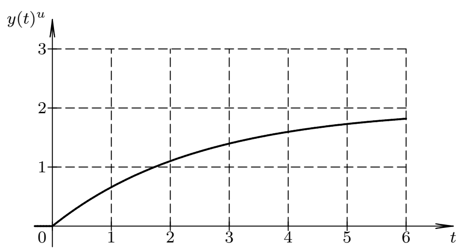

Figura 1.1: Respuesta del sistema del Problema 1.1 ante un escalón unitario

Por otra parte, según registros realizados durante las pruebas de laboratorio, la respuesta del sistema ante el escalón unitario viene dada por la Tabla 1.1

Tabla 1.1: Registros realizados a la respuesta escalón del sistema del Problema 1.1

t [s]	0	1	2	3	4	5	6
$y^u(t)$ [V]	0,0000	0,6594	1,1013	1,3976	1,5962	1,7293	1,8186

Para el sistema descrito determine:

a) respuesta impulsiva del sistema;

b) modelo matemático del sistema.

Problema 1.2. *Sea un sistema físicamente realizable, el cual es definido según el modelo matemático,*

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\,\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

donde $x(t)$ *y* $y(t)$ *son respectivamente las señales de excitación y respuesta del sistema. Si la transformada de Laplace de la señal de excitación está definida por*

$$X(s) = \frac{1}{s+2}, \quad \forall\, \mathrm{Re}\,[s] > -2, \tag{1.3}$$

y las condiciones iniciales del sistema son: $y(t)|_{0^-} = 0$ *y* $\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{0^-} = 1$. *Entonces, la respuesta del sistema para* $t > 0$ *es*

A) $3e^{-t} - 2e^{-3t} - e^{-2t}$

B) $2e^{-t} - e^{-3t} - e^{-2t}$

C) $\frac{7}{15}e^{-t} - \frac{8}{15}e^{-3t} + \frac{1}{15}e^{-2t}$

D) $e^{-t} - e^{-2t}$

Problema 1.3. *Sea un sistema físicamente realizable, el cual es definido según el modelo matemático*[1]*,*

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 4\,\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = x(t), \tag{1.4}$$

donde $x(t)$ *y* $y(t)$ *son respectivamente las señales de excitación y respuesta del sistema. Si la transformada de Laplace de la señal de excitación está definida por*

$$X(s) = \frac{1}{s}, \quad \forall\, \mathrm{Re}\,[s] > 0, \tag{1.5}$$

y las condiciones iniciales del sistema son: $y(t)|_{0^-} = 0$; $\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{0^-} = 0$ *y* $\left.\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right|_{0^-} = 0$. *Entonces, la respuesta del sistema para* $t > 0$ *es*

A) $y(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{68}\,e^{-4t} - \frac{1}{4}\cos(t) - \mathrm{sen}\,(t), \quad \forall t > 0.$

B) $y(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{68}\,e^{-4t} - \frac{4}{17}\cos(t) - \frac{1}{17}\,\mathrm{sen}\,(t), \quad \forall t > 0.$

C) $y(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{68}\,e^{-4t} - \frac{2}{17}\cos(t) - \frac{1}{17}\,\mathrm{sen}\,(t), \quad \forall t > 0.$

D) ninguna de las anteriores.

Problema 1.4. *Sea un sistema LDCID definido por*

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 4\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

[1]Observe que $a^3 + 4a^2 + a + 4 = (a^2+1)(a+4)$.

donde $x(t)$ y $y(t)$ son respectivamente las señales de excitación y respuesta del sistema. Se conoce además que las condiciones iniciales del sistema son: $\left.\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right|_{0^-} = 0$, $\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{0^-} = 0$ y $\left.y(t)\right|_{0^-} = 1$.

a) Hallar la función de transferencia del sistema;

b) Si es sistema es excitado por una señal definida por

$$x(t) = \mathrm{p}_2(t-5), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Determine la respuesta del sistema mediante el método de transformada de Laplace.

c) Determine la respuesta del sistema aplicando los conceptos de función de transferencia, es decir, calculando primero $Y(s) = H(s)X(s)$, para luego determinar la transformada inversa de Laplace.

d) Compare los resultados obtenidos en los Ejercicios 1.4a y 1.4b. Explique los resultados obtenido en cuanto a opinar cuál es correcto y las razones para afirmar.

Problema 1.5. *Repita el Problema 1.4, pero en este caso con la condiciones iniciales: $\left.\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right|_{0^-} = 0$, $\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{0^-} = 0$ y $\left.y(t)\right|_{0^-} = 0$, a los efectos de establecer una comparación entre ambos ejercicios.*

2. Análisis de sistemas en el plano Z

Problema 2.1. *Considere un sistema LDCID definido en el dominio discreto del tiempo, y cuyo modelo matemático es*

$$y[n+2] - y[n+1] + \tfrac{1}{2}y[n] = x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

Si el sistema es excitado por una señal escalón unitaria definida en el dominio del tiempo discreto, es decir, $x[n] = \mathrm{u}[n]$, y en sistema se encuentra inicialmente en reposo, lo que significa que $y[n] = 0$ para todo $n \leq 0$. Determine:

a) respuesta del sistema empleando los conceptos de transformada $\mathscr{Z}$;

b) función de transferencia del sistema;

c) respuesta del sistema ante el escalón unitario a partir de su respuesta impulsiva, considerando que la secuencia de condiciones iniciales del sistema son cero;

d) la estabilidad del sistema a partir de los criterios establecidos;

Problema 2.2. *Sea un sistema LDCID definido en el dominio del tiempo discreto con modelo matemático*

$$y[n+2] + \tfrac{1}{4}y[n] = x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{2.2}$$

donde $y[n]$ es la señal de respuesta del sistema y $x[n]$ es la señal de excitación del sistema. Si es sistema se encuentra inicialmente en reposo, es decir, $y[n] = 0$ para todo n entero no positivo, y el sistema es excitado por una señal escalón de amplitud uno. Determine:

a) función de transferencia del sistema;

b) respuesta del sistema ante la señal escalón unitario;

c) valor final de la respuesta del sistema verificando el teorema de valor final.

3. Respuesta en frecuencia

Problema 3.1. *El estudio y análisis de las series de tiempo ha constituido ser uno de los campos de conocimientos que hoy por hoy ha tenido una gran importancia, debido al hecho de la necesidades que el mundo actual requiere del pronóstico de variables ambientales, económicas, sociales, entre otras.*
Uno de los más básicos modelos matemáticos empleados en el pronóstico es el conocido modelo de promedios móviles, y cuyo modelo matemático es:

$$y[n+1] = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{N-1} x[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{3.1}$$

donde el parámetro N representa el número de datos presente y pasados a emplear para poder brindar un pronóstico del próximo período, $x[n-k]$ para todo $0 \leq k \leq$ N-1 representa los datos presenta y pasados de la variable registrada, e $y[n+1]$ es la respuesta del modelo que constituye el pronóstico de la variable en el próximo período.
El modelo matemático mostrado por la Ecuación (3.1) es lo que se conoce como un sistema LDCID definido en el domino discreto, el cual puede ser analizado desde la perspectiva de los sistemas lineales.
Para el sistema mostrado, determine:

a) función de transferencia del sistema;

b) respuesta en frecuencia del sistema, considerando a N impar;

c) respuesta en frecuencia del sistema y su representación gráfica, para el caso particular $N = 5$;

Problema 3.2. *Sea el sistema LDCID definido en el dominio del tiempo continuo mostrado en la Figura 3.1. Si considera a la constante $k \in \mathbb{R}$ y positiva. Entonces, para el sistema de la figura determine:*

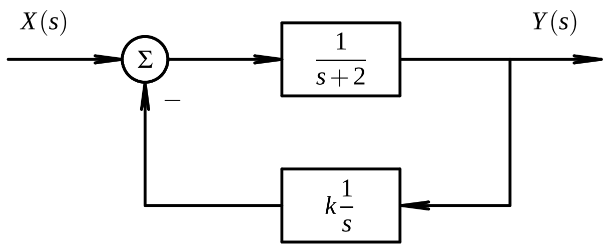

Figura 3.1: Sistema con realimentación negativa

a) función de transferencia del sistema;

b) rango de valores de k que garanticen la estabilidad del sistema;

Problema 3.3. *Sea un sistema LDCID definido en el dominio discreto y físicamente realizable, es decir, con respuesta impulsiva $h[n]$ de rango real, es decir, $h[n] : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, y con función de transferencia $H(z)$ conocida. Demuestre que la magnitud de la respuesta en frecuencia de es una función par de la variable independiente Ω, y la fase de la respuesta en frecuencia es una función impar de Ω.*

4. Diagrama de Bode

Problema 4.1. *Sea un sistema LDCID en el dominio continuo, con respuesta en frecuencia dada por su correspondiente diagrama de Bode. Si para las frecuencia* $\omega_1 = 3\,\mathrm{rad/s}$ *y* $\omega_2 = 10\,\mathrm{rad/s}$ *las correspondientes magnitudes en* dB *están definidas en el diagrama asintótico en magnitud de Bode a través de una recta de pendiente* $18\,\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{oct}}$*, y la magnitud de la función de transferencia para* ω_1 *es de* $20\,\mathrm{dB}$*. Entonces, la magnitud del diagrama de Bode para* ω_2 *es*

A) $18 \log_2\left(\frac{10}{3}\right) \mathrm{dB}$ *B)* $\left[20 + 18 \dfrac{\log_2 10}{\log_2 3}\right] \mathrm{dB}$

C) $\left[20 + 18 \log_2\left(\frac{10}{3}\right)\right] \mathrm{dB}$ *D)* $\left[20 + 18 \log_{10}\left(\frac{10}{3}\right)\right] \mathrm{dB}$

Problema 4.2. *Sea un sistema LDCID en el dominio continuo, el cual está definido por su función de transferencia*

$$H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s^2+400)} \tag{4.1}$$

Entonces, de acuerdo a su diagrama asintótico de Bode en magnitud y diagrama asintótico de Bode en fase, sus respectivos valores de magnitud y fase para $\omega = 100\,\mathrm{rad/s}$ *son*

A) $-80\,\mathrm{dB};\ 0$ *B)* $-40\log_{10}(5)\,\mathrm{dB};\ -\pi$

C) $-80\,\mathrm{dB};\ -\pi$ *D) ninguna de las anteriores.*

Problema 4.3. *Sea un sistema LDCID en el dominio continuo, el cual está definido por su función de transferencia*

$$H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(100^2+50s+s^2)} \tag{4.2}$$

Si la frecuencia ω_1 *está ubicada justo a* $0{,}5\,\mathrm{dec}$ *por encima de* $\omega_0 = 100\,\mathrm{rad/s}$*. Entonces, de acuerdo al diagrama asintótico de Bode en magnitud y diagrama asintótico de Bode en fase, sus respectivos valores de magnitud y fase para* ω_1 *son*

A) $-100\,\mathrm{dB};\ -7\pi/4$ *B)* $-20\,\mathrm{dB};\ -3\pi/4$

C) $-100\,\mathrm{dB};\ -3\pi/4$ *D) ninguna de las anteriores.*

Problema 4.4. *Sea un sistema LDCID definido en el dominio continuo, con función de transferencia*

$$H(s) = 10\frac{s-10}{s+100}, \quad \forall \mathrm{Re}\,[s] > -100. \tag{4.3}$$

Para el sistema descrito, determine:

a) diagrama de Bode del sistema empleando el Scilab^{TM}*;*

b) respuesta del sistema en régimen permanente basándose en el diagrama de Bode arrojado por el Scilab^{TM}*, si el sistema es excitado con una señal* $x(t)$ *con expresión matemática o modelo matemático*

$$x(t) = \cos^2(100t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Problema 4.5. *Sea un sistema LDCID definido en el dominio continuo, con función de transferencia*

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 90000}, \quad \forall \mathrm{Re}\,[s] > 0. \tag{4.5}$$

Para el sistema descrito, determine:

a) diagrama de Bode asintótico en magnitud y fase;

b) diagrama de Bode real en magnitud y fase;

c) respuesta del sistema en régimen permanente ante una excitación dada por

$$x(t) = 2\cos(400t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4.6}$$

Problema 4.6. *Sea un sistema LDCID definido en el dominio continuo, con función de transferencia*

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + 90000}, \quad \forall \mathrm{Re}\,[s] > 0. \tag{4.7}$$

Para el sistema descrito, determine:

a) diagrama de Bode asintótico en magnitud y fase;

b) diagrama de Bode real en magnitud y fase;

c) respuesta del sistema en régimen permanente ante una excitación dada por

$$x(t) = 2\cos(400t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4.8}$$