

[ANEXO 1]

FUNDAMENTOS DE RADIACIÓN

1.1. Ecuaciones de Maxwell

El comportamiento de los fenómenos electromagnéticos se puede describir a través de un conjunto de ecuaciones, que resumen a los teoremas fundamentales, este conjunto se denomina ecuaciones de Maxwell y se muestran a continuación

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}\tag{A.1}$$

Donde:

\vec{H} es la intensidad de campo magnético en A/m

\vec{E} es la intensidad de campo eléctrico en V/m

\vec{B} inducción webber/m² = tesla

\vec{D} C/m²

\vec{J} es la densidad de corriente A/m²

ρ es la densidad de carga C/m³

Además de las ecuaciones de Maxwell también es primordial presentar la ecuación de continuidad, que es una manifestación del principio de conservación de la carga

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Los vectores \vec{E} y \vec{D} a su vez \vec{H} y \vec{B} se encuentran relacionados a través de la permitividad eléctrica ϵ y la permeabilidad magnética μ los cuales son parámetros que caracterizan al medio de propagación

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

ϵ_r y μ_r son valores relativos y $\epsilon_0 = (1/36\pi) \cdot 10^{-9} F/m$ y $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H/m$ son los valores en el vacío. En el caso de este trabajo siempre se trabaja en el vacío por lo que todos los desarrollos se realizan sin tomar en cuenta los valores de permeabilidad y permitividad relativos.

Por la forma sinusoidal de las variaciones temporales de las fuentes, se puede aplicar la transformada de Fourier y pasar del espacio temporal al espacio espectral de frecuencia, por lo que las ecuaciones de Maxwell se pueden reescribir de forma fasorial de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + j\omega\epsilon \vec{E} \\ \nabla \times \vec{E} &= -j\omega\mu \vec{H} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

1.2. Fuentes Eléctricas y Magnéticas. Dualidad

En el punto 1.1 se establecieron las ecuaciones de Maxwell generadas por corrientes eléctricas y por cargas eléctricas, sin embargo es posible escribir un sistema de ecuaciones duales donde los campos son generados por fuentes ficticias de corriente eléctrica y de cargas magnéticas, con el fin de simplificar ciertos problemas con configuraciones específicas. El sistema, se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + j\omega\epsilon\vec{E} \\
\nabla \times \vec{E} &= -\vec{M} - j\omega\mu\vec{H} \\
\nabla \cdot \vec{D} &= 0 \\
\nabla \cdot \vec{B} &= \tau
\end{aligned}
\tag{A.5}$$

En un problema general en el que estuvieran presentes ambos tipos de fuentes eléctricas y magnéticas, la solución se obtendría mediante la superposición de las soluciones de ambos sistemas de ecuaciones.

1.3. Funciones Potenciales

Ya sea en el análisis o síntesis de problemas de radiación electromagnética es de gran utilidad introducir un par de funciones auxiliares, que no tienen un significado físico pero que son una herramienta matemática que sirve como paso intermedio en el cálculo entre las fuentes generadoras y el campo o viceversa.

La primera función potencial que se introduce es del tipo vectorial y se denomina vector potencial magnético \mathbf{A} y se define gracias a la siguiente propiedad vectorial

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0
\tag{A.6}$$

El flujo magnético \mathbf{B} es siempre solenoidal; lo cual no es más que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, entonces se puede representar como el rotor de otro vector

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}
\tag{A.7}$$

La segunda función potencial es de tipo escalar y es función de la posición, se denota como ϕ

y se define a través de la siguiente propiedad vectorial aplicada a la ecuación (A.1)

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega B = -j\omega \nabla \times \vec{A} \text{ resulta en}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega B = -j\omega \nabla \times \vec{A} \tag{A. 8}$$

Manipulando ((A. 8), se llega a la siguiente expresión de campo eléctrico en función de los vectores potenciales

$$\vec{E} + j\omega \vec{A} = \nabla \phi \tag{A. 9}$$

Ahora, sustituyendo esta expresión y la definición del vector potencial magnético en la cuarta ecuación de (A.1), se obtiene

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu \vec{J} + j\omega \mu \epsilon (-j\omega \vec{A} - \nabla \phi) \tag{A.10}$$

Utilizando la propiedad $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla \nabla \cdot \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$ en la expresión anterior, se puede escribir

$$\nabla \nabla \cdot \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{A} - j\omega \mu \epsilon \nabla \phi \tag{A.11}$$

Anteriormente se definió el rotor de \vec{A} , ahora se define su divergencia, como las funciones potenciales \vec{A} y ϕ que como poseen comportamiento ondulatorio deben ir a la misma velocidad de grupo de \vec{E} y \vec{H} (Condición de Lorentz)

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{A} + j\omega \mu \epsilon \phi) - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J} + k^2 \vec{A} \tag{A.12}$$

Donde k es una constante que depende de la frecuencia y se denomina número de onda

$$\nabla \cdot \vec{A} + j\omega\mu\epsilon\phi = 0 \quad (\text{A.13})$$

Por lo que la ecuación de Onda para el vector potencial magnético se muestra a continuación

$$\nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad (\text{A.14})$$

Adicionalmente, el campo eléctrico se puede expresar en función del vector potencial magnético, al sustituir la condición de Lorentz en la ecuación (A.9)

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} - j\frac{1}{\omega\mu\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) \quad (\text{A.15})$$

Todo este desarrollo también puede hacerse para el caso de corrientes magnéticas de formal dual, para un vector potencial eléctrico, si se desea consultar (ver Balanis. Antenna Theory, Analysis and Design. Segunda edición. Capítulo 3, pp 119)

1.4. Solución de la ecuación de onda no homogénea para el vector potencial magnético

La solución de la ecuación (A.14) para un elemento infinitesimal de corriente $\vec{J}(x', y', z') = \vec{J}(r')$ localizado en el punto x', y', z' especificado con el vector $r' = a_x x' + a_y y' + a_z z'$, es

$$\vec{A}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\mu}{4\pi} \vec{J}(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') \quad (\text{A.16})$$

$$\vec{G}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-jkR}}{R} \quad (\text{A.17})$$

Donde $\vec{G}(\vec{r}, \vec{r}')$ es la función de Green escalar para espacio libre, $R = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ es la magnitud de la distancia de la fuente al punto en donde se evaluará \vec{A} y $k = \frac{2\pi \cdot \text{freq}}{c_o}$, freq es la frecuencia de operación del sistema en (Hz) y C_o es la velocidad de la luz en el vacío (m/s). En la figura 1 se muestra un esquema en donde se muestra el sistema coordenado fuente (primado) y el sistema coordenado asociado al punto de observación (sin primar) a los que se hace referencia

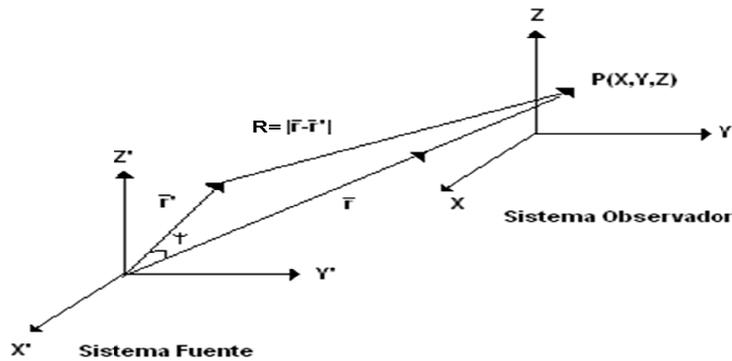


Figura 1. Sistemas coordenados, asociados a la fuente y al observador.

En términos de la solución fundamental, el vector potencial de una distribución general de corriente se obtiene por superposición. Entonces, sumando todas las contribuciones infinitesimales de corriente, se tiene

$$\vec{A}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\mu}{4\pi} \int_{v'} \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} dv' \quad (\text{A.18})$$

Donde la integración se realiza sobre el volumen total ocupado por la densidad de corriente. Se puede notar que la solución de \mathbf{A} viene dada en ondas esféricas que se propagan radialmente hacia fuera de la fuente, disminuyendo su amplitud proporcionalmente a $\frac{1}{R}$. La solución general es una superposición de ondas esféricas elementales.

[ANEXO 2]

ZONAS DE RADIACIÓN¹

La distribución del campo eléctrico alrededor de una antena es función de la distancia a la misma. Se distinguen tres zonas de campo con características diferentes. En la zona más próxima a la antena la intensidad de campo eléctrico puede incluir una parte significativa de campo reactivo no radiante, en otras palabras, la mayor parte de la energía en esa zona en un ciclo es entregada al ambiente y en el siguiente ciclo es absorbido por el sistema, la intensidad del campo reactivo decae rápidamente con la distancia. Esta zona es denominada región de campo cercano reactivo. El tamaño de esta zona varía para diferentes antenas. Para la mayoría el límite exterior está en el orden de unas pocas longitudes de onda o menos. En el caso particular de un dipolo eléctricamente pequeño, la zona reactiva predomina hasta una distancia de aproximadamente $\lambda/2\pi$ donde los campos radiados y los reactivos son iguales.

Más allá de la zona de campo cercano reactivo predomina el campo radiado. La zona de radiación se divide en dos subregiones: zona de campo radiado cercano y la zona de campo radiado lejano. La primera región existe para la mayoría de las antenas eléctricamente largas, pero no para las eléctricamente pequeñas. La segunda región existe para todas las antenas.

En la zona de campo cercano radiado la distribución angular relativa del campo (usualmente patrón de radiación) es dependiente de la distancia del punto de observación a la antena. Las razones de este comportamiento son:

¹ Tomado de IEEE Standard Test Procedures for Antennas. 1979. Annex A Field regions pp 125,126

- La relación de la fase relativa de las contribuciones de campo de los diferentes elementos de la antena cambian con la distancia.
- Las amplitudes relativas de las contribuciones de campo también cambian con la distancia.

Para una antena enfocada al infinito, la región de campo cercano radiado es llamada zona de Fresnel de manera análoga a la terminología de la óptica.

En la zona de campo lejano la distribución angular relativa del campo es independiente de la distancia de observación. La amplitud del campo es dado, en el límite, por el recíproco de la primera potencia de la distancia. La razón de este comportamiento es que las relaciones de las fases y las amplitudes relativas entre las contribuciones de los diferentes elementos de la antena se aproximan a una relación de ajuste entre ellas. Además en esta zona es posible describir matemáticamente de manera más sencilla los campos electromagnéticos, gracias a unas simplificaciones que se muestran en el Anexo 3.

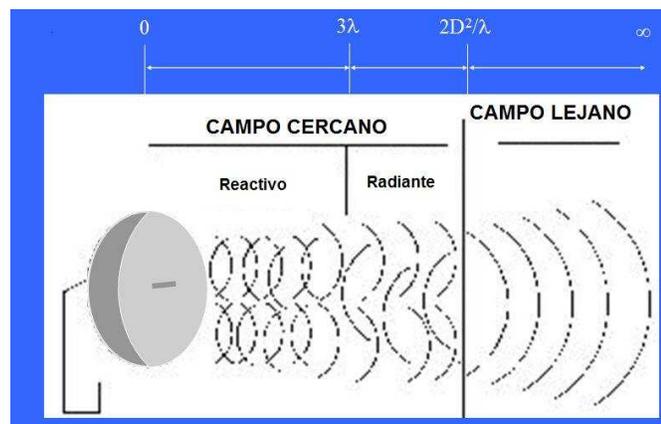


Figura 2. Zonas de campo electromagnético

[ANEXO 3]

RADIACIÓN EN CAMPO LEJANO

En campo lejano, se pueden realizar ciertas aproximaciones, para llegar a expresiones mucho más simplificadas, la primera aproximación implica que como el punto de observación esta muy lejos de la fuente de radiación se puede decir que, en amplitud:

$$\begin{aligned} R &= |\vec{r} - \vec{r}'| \\ R &\approx |\vec{r}| \end{aligned} \quad |\vec{r}| \gg \gg |\vec{r}'| \quad (\text{A.19})$$

En fase no se puede realizar la misma aproximación directamente, ya que el resultado es erróneo, por lo que es necesario realizar el siguiente procedimiento

$$\begin{aligned} R &= |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} \\ &= \sqrt{|\vec{r}|^2 - 2\vec{r}\vec{r}' + |\vec{r}'|^2} \\ |\vec{r}| \gg \gg |\vec{r}'| \quad |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{\left[1 - \frac{2\vec{r}\vec{r}'}{|\vec{r}|^2} + \frac{|\vec{r}'|^2}{|\vec{r}|^2}\right]} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Si se realiza una expansión en series de Taylor el término $-\frac{2\vec{r}\vec{r}'}{|\vec{r}|^2} + \frac{|\vec{r}'|^2}{|\vec{r}|^2}$ debe ser

menor que 1, y además se toma el término $\frac{|\vec{r}'|^2}{|\vec{r}|^2}$ como error de la expansión y aplicando

la propiedad $(1+x)^M \approx (1+Mx)$ nos queda

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \approx |\vec{r}| - \frac{\vec{r}\vec{r}'}{|\vec{r}|} \quad (\text{A.21})$$

Esta aproximación es llamada **Aproximación Dipolar** y el término $\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}|}$ proporciona información sobre la distancia de la fuente. Entonces se puede reescribir la expresión para el vector Potencial Magnético **A**, como

$$\vec{A}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\mu}{4\pi} \left[\int_{v'} \vec{J}(\vec{r}') e^{-jk \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{|\vec{r}|}} dv' \right] \frac{e^{-jk|\vec{r}|}}{|\vec{r}|} \quad (\text{A.22})$$

El término que se encuentra dentro de la integral se denomina Función de dirección espacial o modulación espacial y el término que se encuentra $\frac{e^{-jk|\vec{r}|}}{|\vec{r}|}$ es lo que da la forma esférica, por eso se llama frente de onda esférica.

Se define $L = \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}|}$, se desarrolla el producto y se cambia el sistema observador a coordenadas esféricas, mientras que el sistema fuente permanece en cartesianas

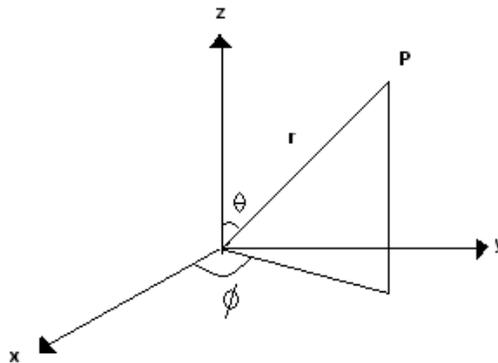


Figura 3. Sistema coordenado esférico, utilizado en campo lejano

$$L = \frac{r \sin \theta \cos \phi \cdot x' + r \sin \theta \sin \phi \cdot y' + r \cos \theta \cdot z}{r} \quad (\text{A.23})$$

Por lo que al simplificar y sustituyendo en la ecuación ((A.22)

$$\vec{A}(r, r') = \frac{\mu}{4\pi} \left[\int_{V'} \vec{J}(r') e^{-jk[\sin \theta \cos \phi x' + \sin \theta \sin \phi y' + \cos \theta z]} dV' \right] \frac{e^{-jk|\vec{r}|}}{|\vec{r}|} \quad (\text{A.24})$$

Al sustituir la ecuación (A.18) en la ecuación (A.15) y desarrollando las expresiones de la divergencia y el gradiente en coordenadas cilíndricas se llega a una expresión bastante compleja, pero en campo lejano se pueden despreciar todos los términos del inverso del cuadrado (o mayor) de la distancia, y tomando en cuenta que el vector potencial magnético se puede escribir como la combinación de sus componentes en coordenadas esféricas tal como se muestra en la ecuación (A.25) se puede llegar a unas expresiones simplificadas de los campos eléctricos y magnéticos, que se muestran a continuación:

$$\vec{A} = A_r(r, \theta, \phi) \hat{a}_r + A_\theta(r, \theta, \phi) \hat{a}_\theta + A_\phi(r, \theta, \phi) \hat{a}_\phi \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_r &\approx 0 \\ \vec{E}_\theta &\approx -j\omega \vec{A}_\theta \\ \vec{E}_\phi &\approx -j\omega \vec{A}_\phi \end{aligned} \quad \vec{E} = -j\omega \vec{A}_t \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_r &\approx 0 \\ \vec{H}_\theta &\approx +j \frac{\omega}{\eta} \vec{A}_\phi \approx -\frac{\vec{E}_\phi}{\eta} \\ \vec{H}_\phi &\approx -j \frac{\omega}{\eta} \vec{A}_\theta \approx +\frac{\vec{E}_\theta}{\eta} \end{aligned} \quad \vec{H} = \frac{\hat{a}_r}{\eta} \times \vec{E} = -j \frac{\omega}{\eta} \hat{a}_r \times \vec{A}_t \quad (\text{A.27})$$

Como se puede ver los términos radiales no contribuyen energéticamente en la zona lejana, sólo contribuyen los términos tangenciales \mathbf{A}_t

[ANEXO 4]

ECUACIONES DEL DIAGRAMA DE FLUJO DE LA GENERACIÓN DE LA MATRIZ Ω

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{xx} & \Omega_{xy} & \Omega_{xz} \\ \Omega_{yx} & \Omega_{yy} & \Omega_{yz} \\ \Omega_{zx} & \Omega_{zy} & \Omega_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{A.28})$$

$$\Omega_{xx} = \frac{1}{4\pi} \left[-j\omega\mu \frac{e^{-jk|\bar{x}_{fila} - \bar{x}'_{columna}|}}{|\bar{x}_{fila} - \bar{x}'_{columna}|} + \frac{1}{4\pi j\omega\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{e^{-jk|\bar{x}_{fila} - \bar{x}'_{columna}|}}{|\bar{x}_{fila} - \bar{x}'_{columna}|} \right) \right] \quad (\text{A.29})$$

$$\Omega_{xy} = \frac{1}{16\pi^2 j\omega\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{e^{-jk|\bar{x}_{fila} - \bar{x}'_{columna}|}}{|\bar{x}_{fila} - \bar{x}'_{columna}|} \right) \quad (\text{A.30})$$

$$\Omega_{xz} = \frac{1}{16\pi^2 j\omega\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{e^{-jk|\bar{x}_{fila} - \bar{x}'_{columna}|}}{|\bar{x}_{fila} - \bar{x}'_{columna}|} \right) \quad (\text{A.31})$$

$$\Omega_{yx} = \frac{1}{16\pi^2 j\omega\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left(\frac{e^{-jk|\bar{x}_{fila} - \bar{x}'_{columna}|}}{|\bar{x}_{fila} - \bar{x}'_{columna}|} \right) \quad (\text{A.32})$$

$$\Omega_{yy} = \frac{1}{4\pi} \left[-j\omega\mu \frac{e^{-jk|\bar{x}_{fila} - \bar{x}'_{columna}|}}{|\bar{x}_{fila} - \bar{x}'_{columna}|} + \frac{1}{4\pi j\omega\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{e^{-jk|\bar{x}_{fila} - \bar{x}'_{columna}|}}{|\bar{x}_{fila} - \bar{x}'_{columna}|} \right) \right] \quad (\text{A.33})$$

$$\Omega_{yz} = \frac{1}{16\pi^2 j\omega\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{e^{-jk|\bar{x}_{fila} - \bar{x}'_{columna}|}}{|\bar{x}_{fila} - \bar{x}'_{columna}|} \right) \quad (\text{A.34})$$

$$\Omega_{zx} = \frac{1}{16\pi^2 j\omega\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \left(\frac{e^{-jk|\bar{x}_{fila} - \bar{x}'_{columna}|}}{|\bar{x}_{fila} - \bar{x}'_{columna}|} \right) \quad (\text{A.35})$$

$$\Omega_{zy} = \frac{1}{16\pi^2 j\omega\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \left(\frac{e^{-jk|\bar{x}_{fila} - \bar{x}'_{columna}|}}{|\bar{x}_{fila} - \bar{x}'_{columna}|} \right) \quad (\text{A.36})$$

$$\Omega_{zz} = \frac{1}{4\pi} \left[-j\omega\mu \frac{e^{-jk|\bar{x}_{fila} - \bar{x}'_{columna}|}}{|\bar{x}_{fila} - \bar{x}'_{columna}|} + \frac{1}{4\pi j\omega\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{e^{-jk|\bar{x}_{fila} - \bar{x}'_{columna}|}}{|\bar{x}_{fila} - \bar{x}'_{columna}|} \right) \right] \quad (\text{A.37})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{e^{-jk|\bar{x}_{fila} - \bar{x}'_{columna}|}}{|\bar{x}_{fila} - \bar{x}'_{columna}|} \right) &= e^{-jk|\bar{x}_{fila} - \bar{x}'_{columna}|} \left[\frac{3(x-x')^2}{\left((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right)^2} + \right. \\ &+ \frac{3jk(x-x')^2}{\left((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right)^2} - \frac{1}{\left((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right)^{3/2}} - \\ &\left. - \frac{k^2(x-x')^2}{\left((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right)^{3/2}} - \frac{jk}{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \right] \quad 8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{e^{-jk|\bar{x}_{fila} - \bar{x}'_{columna}|}}{|\bar{x}_{fila} - \bar{x}'_{columna}|} \right) &= e^{-jk|\bar{x}_{fila} - \bar{x}'_{columna}|} (x-x')(y-y') \left[\frac{3}{\left((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right)^{5/2}} + \right. \\ &\left. + \frac{3jk}{\left((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right)^2} - \frac{k^2}{\left((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right)^{3/2}} \right] \quad (\text{A.39}) \end{aligned}$$