

Universidad Central de Venezuela  
Facultad de Ingeniería  
Escuela de Ingeniería Eléctrica.

# **ANÁLISIS DE SISTEMAS LINEALES ASISTIDO CON Scilab™**



---

# **ANÁLISIS DE SISTEMAS LINEALES ASISTIDO CON Scilab™**

**un enfoque desde  
la Ingeniería Eléctrica**

---

**Ebert Brea, PhD.**

**Profesor Titular  
Escuela de Ingeniería Eléctrica de  
la Universidad Central de Venezuela**



**Un patrocinio de la Facultad de Ingeniería  
de la Universidad Central de Venezuela**



<http://www.safecreative.org/user/1408151214335>



por Ebert Brea, 2014.

Análisis de Sistemas Lineales Asistido con Scilab™:  
un enfoque desde la Ingeniería Eléctrica por Ebert Brea  
se distribuye bajo una Licencia Creative Commons  
Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional.

Publicado por Ebert Brea, e-mail: [ebert.brea@ucv.ve](mailto:ebert.brea@ucv.ve); Caracas, Venezuela.  
Disponible en <http://saber.ucv.ve/jspui/>.

Ebert Brea. Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ingeniería  
Edif. Escuela de Ingeniería Eléctrica, Caracas 1053, Venezuela.  
Teléfono: ++58-212-605.3162; telefax: ++58-212-605.3105.

***Datos de catálogo - Biblioteca Central de la Universidad Central de Venezuela:***

Ebert Brea  
xxix p. 472 p. 31 cm.—(Serie: Ingeniería Eléctrica)  
236 figuras, 5 tablas.  
“Universidad Central de Venezuela-Facultad de Ingeniería.”  
Scilab™ es un trademark del *Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique* (INRIA)  
1. Sistemas Lineales. 2. Ingeniería Eléctrica. I. Ebert Brea II. Series: Ingeniería Eléctrica.

TK1-9971  
Impreso en Venezuela.

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

*A mi amada esposa,  
Marlene*



# Contenido

---

<b>Contenido</b>	<b>vii</b>
Sobre el Autor	xiii
Agradecimientos	xv
Prefacio	xvii
Acrónimos	xix
Símbolos	xxi
Introducción	xxv
<b>PARTE I ANÁLISIS DE SISTEMAS</b>	
<b>1 Señales y Sistemas</b>	<b>3</b>
1.1 Sistemas	4
1.1.1 Taxonomía de las cantidades de un sistema	5
1.2 Señales	7
1.2.1 Taxonomía de las señales	8
1.3 Modelos matemáticos de señales en el dominio continuo	9
1.4 Modelos matemáticos de señales discretas	11
1.5 Modelos matemáticos de sistemas	19
1.5.1 Taxonomía de los sistemas de acuerdo a su modelo matemático	20
1.5.1.1 Sistema lineal o no lineal	20
	<b>vii</b>

1.5.1.2	Sistema estático o dinámico	21
1.5.1.3	Sistema causal o no causal	22
1.5.1.4	Sistema invariante en el dominio o variante en el dominio	22
1.5.1.5	Sistema en el dominio continuo o en el dominio discreto	23
1.5.1.6	Sistema determinista o estocástico	24
	Problemas	25
	Ejercicios propuestos	26
<b>2</b>	<b>Análisis de Sistemas en el Dominio Continuo</b>	<b>29</b>
2.1	Sistemas Lineales, Dinámicos, Causales, Invariantes en tiempo y Deterministas	30
2.2	Representación matemática de los sistemas LDCID	32
2.2.1	El modelo matemático y sus términos	32
2.2.2	Modelo matemático de primer orden	33
2.2.2.1	Solución de los modelos matemáticos de primer orden	33
2.2.3	Modelo matemático de orden superior	40
2.2.3.1	Respuesta transitoria	41
2.2.3.2	Respuesta permanente	43
2.2.3.3	Respuesta completa	45
2.3	Respuesta impulsiva de sistemas LDCID	47
2.3.1	Respuesta impulsiva de sistemas LDCID de primer orden	48
2.3.2	Respuesta impulsiva de sistemas LDCID de orden superior	49
2.4	Respuesta escalón de sistemas LDCID	51
	Problemas	56
	Ejercicios propuestos	58
<b>3</b>	<b>Análisis de Sistemas en el Dominio Discreto</b>	<b>61</b>
3.1	Sistemas LDCID	62
3.1.1	Modelos matemáticos de sistemas en el dominio discreto	62
3.2	Discretización de modelos matemáticos definidos en el dominio continuo	64
3.2.1	Discretización por integración rectangular	64
3.2.1.1	Sistema de primer orden	64
3.2.1.2	Sistema de segundo orden	65
3.2.2	Discretización por integración trapezoidal	68
3.3	Espacio de estado	69
3.3.1	Discretización de sistemas por espacio de estado	71
3.3.2	Discretización de sistemas por integración de las variables de estado	75
3.3.3	Aplicación de la discretización por variables de estado	76
3.3.4	Simulación de sistemas por espacio de estado	79
3.4	Modelo matemático de primer orden	80
3.4.1	Solución del modelo matemático de primer orden	80
3.5	Forma general de modelos matemáticos en el dominio discreto	81
3.5.1	Respuesta transitoria	82
3.5.2	Respuesta permanente	83
3.5.3	Respuesta completa	84

3.6	Respuesta impulsiva de sistemas LDCID	88
3.7	Respuesta de sistemas LDCID ante un escalón unitario	92
	Problemas	93
	Ejercicios propuestos	95
<b>4</b>	<b>Respuesta de Sistemas por Convolución</b>	<b>97</b>
4.1	Sistema en el dominio discreto	98
4.2	Sistema en el dominio continuo	108
	Problemas	117
	Ejercicios propuestos	118
<b>5</b>	<b>Análisis de Sistemas en el Plano S</b>	<b>121</b>
5.1	Determinación de la respuesta por transformada de Laplace	122
5.2	Función de transferencia	125
5.3	Teorema de valor inicial y valor final	131
5.4	Estabilidad de los sistemas	134
5.5	Modelo dinámico a partir de su función de transferencia	136
	Problemas	137
	Ejercicios propuestos	138
<b>6</b>	<b>Análisis de Sistemas en el Plano Z</b>	<b>141</b>
6.1	La transformada unilateral derecha $\mathcal{Z}$	142
6.1.1	Definición	142
6.1.2	Propiedades relevantes	144
6.1.2.1	Linealidad	144
6.1.2.2	Traslación retardada en el dominio de la función	144
6.1.2.3	Traslación adelantada en el dominio de la función	145
6.1.2.4	Multiplicación por $n^m$	147
6.2	Transformada inversa $\mathcal{Z}$	148
6.3	Determinación de la respuesta por transformada $\mathcal{Z}$	151
6.4	Función de transferencia en el plano Z	157
6.5	Teoremas valor inicial y valor final	160
6.6	Estabilidad de los sistemas	162
6.7	Función de transferencia y modelo matemático	163
6.7.1	Determinación de $H(z)$ a partir de $H(s)$ y viceversa	163
6.7.1.1	Transformación por los núcleos de las transformadas	163
6.7.1.2	Transformación por integración rectangular	165
6.7.1.3	Transformación bilineal	167
	Problemas	168
	Ejercicios propuestos	169
<b>PARTE II ANÁLISIS EN FRECUENCIA</b>		
<b>7</b>	<b>Respuesta en Frecuencia</b>	<b>173</b>
7.1	Función de transferencia de subsistemas interconectados	174
7.2	Respuesta en frecuencia en el dominio continuo	179
7.3	Respuesta en frecuencia en el dominio discreto	188
	Problemas	195

	Ejercicios propuestos	196
<b>8</b>	<b>Diagrama de Bode</b>	<b>197</b>
8.1	Definiciones preliminares	198
8.2	Diagrama en magnitud	200
8.2.1	Factor lineal	200
8.2.1.1	Análisis asintótico	200
8.2.2	Factor cuadrático	202
8.2.2.1	Análisis asintótico	203
8.2.3	Factor cuadrático con raíces imaginarias puras	203
8.2.3.1	Análisis asintótico	204
8.2.4	Factor $G(s) = s^n$	206
8.2.5	Factor $G(s) = s^{1/n}$	206
8.2.6	Método para construcción de diagrama de Bode en magnitud	208
8.3	Diagrama en fase	216
8.3.1	Factor lineal	217
8.3.1.1	Análisis asintótico	219
8.3.2	Factor cuadrático	220
8.3.2.1	Análisis asintótico	220
8.3.3	Factor cuadrático con raíces imaginarias puras	221
8.3.4	Factor $G(s) = s^n$	222
8.3.5	Factor $G(s) = s^{1/n}$	222
8.3.6	Método para construcción de diagrama de Bode en fase	222
8.4	Respuesta permanente de un sistema LDCID ante una excitación sinusoidal	231
	Problemas	234
	Ejercicios propuestos	234
<b>9</b>	<b>Respuesta en Frecuencia en el Dominio Discreto</b>	<b>237</b>
9.1	Transformada de Fourier en el Dominio Discreto	238
9.2	Representación de la respuesta en frecuencia	240
9.3	Respuesta de sistema mediante la respuesta en frecuencia de sistemas	243
	Problemas	244
	Ejercicios propuestos	245
<b>10</b>	<b>Análisis de Señales en el Dominio de la Frecuencia</b>	<b>247</b>
10.1	Preliminar: transformada de Fourier	248
10.2	Taxonomía de señales desde su contenido de energía	250
10.3	Señales periódicas	253
10.4	Simetría de señales periódicas	258
10.4.1	Simetría de onda par	258
10.4.2	Simetría de onda impar	259
10.4.3	Simetría de media onda	259
10.4.4	Simetría de cuarto de onda par	260
10.4.5	Simetría de cuarto de onda impar	260
10.4.6	Simetría oculta	260
10.5	Serie exponencial de Fourier	260

10.5.1	Formulación	260
10.5.2	Propiedades de las series exponenciales	273
10.5.2.1	Derivada m-ésima	273
10.5.2.2	Traslación en el dominio continuo $t$	273
10.6	Serie trigonométrica de Fourier	276
10.7	Convergencia de las series de Fourier	285
10.8	Energía y potencia promedio de una señal	287
	Problemas	293
	Ejercicios propuestos	295
<b>11</b>	<b>Análisis de Sistemas en el Dominio de la Frecuencia</b>	<b>299</b>
11.1	Función de transferencia	300
11.2	Relación de la función de transferencia en el plano $S$ y el dominio $\omega$	303
11.2.1	Impedancia de elementos pasivos	304
11.2.2	Conexión serie y paralelo de arreglos de impedancias	307
	Problemas	311
	Ejercicios propuestos	312
<b>12</b>	<b>Análisis de Sistemas No Lineales</b>	<b>315</b>
12.1	Modelos matemáticos no lineales en el dominio continuo	316
12.1.1	Rectificador de media onda	316
12.1.2	Rectificador onda completa	317
12.1.3	Comparador	318
12.1.4	Función mínimo	319
12.1.5	Función máximo	320
12.1.6	Amplificador con saturación	320
12.2	Modelos matemáticos no lineales en el dominio discreto	324
	Problemas	326
	Ejercicios propuestos	326
<b>13</b>	<b>Aplicaciones de Análisis Espectral</b>	<b>329</b>
13.1	Modulación en amplitud	331
13.1.1	Modulación en amplitud con portadora suprimida	332
13.1.2	Modulación en amplitud con portadora	335
13.1.3	Comparación de la modulación en amplitud con portadora suprimida y con portadora	336
13.2	Demodulación en amplitud	338
13.3	Teorema de Muestreo	339
	Problemas	345
	Ejercicios propuestos	345
<b>14</b>	<b>Filtros Digitales</b>	<b>347</b>
14.1	Conceptos preliminares	348
14.2	Filtros digitales no recursivos en tiempo discreto	350
14.2.1	Filtros pasa bajo no recursivos	353
14.2.2	Filtros pasa alto no recursivos	354
14.3	Filtros digitales recursivos en tiempo discreto	355

14.3.1	Diseño de filtros digitales mediante transformación de filtros analógicos	356
14.3.1.1	Filtro de Butterworth analógico	358
14.3.2	Método directo de diseño de filtros digitales recursivos	361
14.3.2.1	Notación	362
14.3.2.2	Filtro digital Butterworth clásico	362
	Problemas	366
	Ejercicios propuestos	366
<b>15</b>	<b>Transformada Discreta de Fourier</b>	<b>369</b>
15.1	Transformada discreta de Fourier	370
15.1.1	Desarrollo de la transformada discreta de Fourier	370
15.1.2	Definición de la transformada discreta de Fourier	374
15.2	Transformada inversa discreta de Fourier	375
15.2.1	Desarrollo de la transformada inversa discreta de Fourier	375
15.2.2	Definición de la transformada inversa discreta de Fourier	376
15.3	Forma matricial de la transformada discreta de Fourier	376
15.4	Propiedades de la transformada discreta de Fourier	381
15.4.1	Linealidad de la TDF	381
15.4.2	Traslación en tiempo discreto	382
15.4.3	Simetría	383
15.4.4	Traslación en frecuencia discreta	383
15.5	Transformada Rápida de Fourier	383
15.5.1	Transformada rápida de Fourier para $N = r_1 r_2$	384
15.5.2	Transformada rápida de Fourier para $N = r_1 r_2 r_3 r_4$	387
15.5.2.1	Transformada rápida de Fourier para $N = 16$ , base 2	388
15.5.3	Forma no canónica de la FFT base 2	389
15.5.3.1	Formulación de la FFT base 2	390
15.5.4	Ejemplos de cálculos de FFT empleando Scilab™	392
	Problemas	397
	Ejercicios propuestos	397
	Soluciones de los Problemas	399
	Apéndice A: El Scilab™	453
A.1	Scilab™ y sus características	453
A.2	Instalación del Scilab™	453
A.3	Edición en el Scilab™	454
A.4	Principales comandos del Scilab™	454
A.5	Modificación del macro bode	457
	Glosario	461
	<b>Referencias</b>	<b>463</b>
	<b>ÍNDICE</b>	<b>469</b>

## Sobre el Autor

---

Ebert Brea es Catedrático, Profesor Titular, de la Universidad Central de Venezuela (UCV). Ha trabajado en la Escuela de Ingeniería Eléctrica de la UCV por más de 27 años, en el área de matemáticas aplicadas a la Ingeniería Eléctrica. El Profesor Brea obtuvo su Doctor of Philosophy en la Escuela de Matemáticas de la Universidad de Southampton, Inglaterra, su Magister Scientiarum en Investigación de Operaciones y Grado de Ingeniero Electricista en la Facultad de Ingeniería de la UCV.

El Profesor Brea ha impartido veintenas de cursos en el área de Sistemas Lineales en la Escuela de Ingeniería Eléctrica de la UCV, lo que le ha permitido acumular suficiente experiencia en la enseñanza de Sistemas Lineales.

La formación de ingeniero y luego su formación matemática a nivel doctoral le ha proveído de diversas visiones de como debe impartirse las matemáticas en la ingeniería.

En cuanto a su investigación, el Profesor Brea ha trabajado tanto en investigación como en consultorías en el área de simulación de sistemas estáticos y dinámicos de eventos discretos. Además, el Profesor Brea ha brindado aportes en el área de desarrollo de algoritmos de optimización, y también en la optimización por simulación.



## Agradecimientos

---

Deseo expresar mi más profunda gratitud a mi amada esposa, Marlene Jiménez, por todo el apoyo que siempre me ha brindado con su permanente amor en cada una de las etapas que hemos vivido juntos.

También quiero manifestar mi agradecimiento a las autoridades de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Central de Venezuela, por haberme facilitado la realización de esta obra al concederme mi disfrute de año sabático, el cual permitió brindar las condiciones para la redacción y edición de este libro.

E. B.



## Prefacio

---

El análisis de los sistemas lineales así como de las señales que interaccionan con los distintos elementos del sistema y el medio que lo rodea, requiere de un claro conocimiento del análisis matemático y en especial de lo que se conoce como *cálculo operacional*, por cuanto a través del cálculo operacional se puede, en algunos casos, facilitar la búsqueda a las soluciones de los problemas de análisis que son planteados en la investigación de los sistemas representados por modelos matemáticos.

Tanto los modelos matemáticos que representan a los sistemas como a las señales pueden ser definidos en función de variables continuas o discretas, para lo cual cada uno de estos puntos de vistas requiere de su correspondiente modelo, y la determinación de su solución al problema planteado estará basada en el dominio sobre el cual es representado el modelo, bien sea continuo o discreto, así como de los conceptos empleados en el dominio espectral.

El autor supone que el lector tiene un claro conocimiento de transformada de Laplace, de Fourier y  $\mathcal{Z}$ , las cuales son empleadas como herramientas alternas para el análisis de los problemas en el dominio donde sean descritos los modelos matemáticos.

Por otra parte, en este libro son presentadas breves explicaciones de algunos métodos de resolución de ecuaciones diferenciales, las cuales representan las relaciones entre las variables del sistema dinámico definido en el dominio continuo que se esté estudiando. El propósito de introducir las ecuaciones diferenciales es para inducir el método de resolución de ecuaciones en diferencias, las cuales son empleadas como modelos matemáticos de los sistemas dinámicos visto desde una perspectiva del dominio discreto.

Es importante destacar que dentro de los alcances de esta obra no está incluido el análisis de los sistemas lineales desde la perspectiva estocástica, por cuanto este enfoque requiere de un claro conocimiento de las probabilidades y de los procesos estocásticos, y en virtud

de que este material debería conformar el libro texto del curso de pregrado de *Análisis de Sistemas lineales* de la Escuela de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Central de Venezuela, y este curso estudia los sistemas desde el punto de vista determinista.

Debe señalarse que el autor ha empleado, de manera muy cuidadosa, una notación que permite discriminar claramente cuando los modelos matemáticos son referidos al dominio continuo o discreto. Más aún, el autor hace una clara diferencia, en el caso de las señales definidas en el dominio discreto, entre lo que significa una función en el dominio discreto y su correspondiente secuencia de muestras, las cuales ambas son empleadas para la representación de las señales en el ámbito del dominio discreto.

Además, el autor ha tratado hasta donde es posible de referirse al dominio, sin que ello se limite al dominio en el tiempo continuo o discreto, debido a que en opinión del autor, los conceptos, métodos y bases teóricas no deben referirse exclusivamente al dominio del tiempo, sino a cualquier dominio, dejando así la posibilidad de generalizar la aplicación de lo presentado en la obra, aunque en el área de Ingeniería Eléctrica sea muy común ver los modelos y señales definidos en el dominio del tiempo y la frecuencia.

Es oportuno establecer que a todo lo largo de la obra, las señales estudiadas y su empleo en el análisis de los diversos sistemas, tanto en el dominio continuo como discreto, son consideradas reales. Es decir, son señales que representan medidas en el conjunto de los números reales, o en términos matemáticos son señales representadas por funciones cuyos rangos corresponden al conjunto de los números reales. Además, debe tenerse en cuenta que las señales son modeladas mediante funciones definidas en el dominio de los números reales o enteros, dependiendo si las señales representan mediciones en el dominio continuo o discretos, respectivamente.

# Acrónimos

---

**AM** amplitud modulada

**AC** corriente alterna

**DC** corriente directa

**IIR** *infinite impulse response*

**FIR** *finite impulse response*

**FFT** *fast Fourier transform*

**GNU GPL** *General Public License*

**LDCD** lineal, dinámico, causal y determinista

**LDCID** lineal, dinámico, causal, invariante en el dominio y determinista

**LDCID** lineales, dinámicos, causales, invariantes en el dominio y deterministas

**NLECID** no lineal, estático, causal, invariante en el dominio y determinista

**NLECID** no lineales, estáticos, causales, invariantes en el dominio y deterministas

**RAE** Real Academia Española

**RDC** región de convergencia

**RIF** respuesta impulsiva de duración finita

**RII** respuesta impulsiva de duración infinita

**SEF** serie exponencial de Fourier

**STF** serie trigonométrica de Fourier

**SFEF** serie finita exponencial de Fourier

**SFTF** serie finita trigonométrica de Fourier

**TDL** transformada discreta de Laplace

**TF** transformada de Fourier

**TFDD** transformada de Fourier en el dominio discreto

**TIF** transformada inversa de Fourier

**TL** transformada de Laplace

**TIL** transformada inversa de Laplace

**TDF** transformada discreta de Fourier

**TIDF** transformada inversa discreta de Fourier

**TRF** transformada rápida de Fourier

**TZ** transformada  $\mathcal{Z}$

**UTC** *Coordinated Universal Time*

## Símbolos

---

$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_N$  : operador intersección de conjuntos.

$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_N$  : operador unión de conjuntos.

$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_N$  : operador suma de cantidades.

$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \dots a_N$  : operador producto de cantidades.

$*$  : operador convolución de funciones.

$\times$  : operador producto cartesiano.

$:=$  : operación computacional de asignación. También denotada por  $\leftarrow$ .

$\doteq$  :  $a \doteq b$  significa que  $a$  es análogo a  $b$ , y viceversa.

$\mathcal{L}$  : operador de transformada de Laplace.

$\mathcal{F}$  : operador de transformada de Fourier.

$\mathcal{Z}$  : operador de transformada Z.

**xxii** SIMBOLOS

$\forall$  : para todo o para cada.

$\subset$  : subconjunto.

$\subseteq$  : subconjunto propio.

$\cap$  : operación intersección de conjuntos.

$\cup$  : operación unión de conjuntos.

$\bar{A}$  : complemento de  $A$ . Es decir, si  $A \subset U$  y  $\bar{A} \subset U$ . Entonces,  $A \cup \bar{A} = U$  y  $A \cap \bar{A} = \emptyset$ .

$\setminus$  : exclusión. Sea  $A = \{a, b, c, d\} \subset U$ , y sea  $B = \{a, e, f, g\} \subset U$ . Se dice que  $A \setminus B = A \cap \bar{B} = \{b, c, d\}$ .

$\lim_{\varepsilon \downarrow 0}$  : operador límite que significa  $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}}$ .

$\lim_{\varepsilon \uparrow 0}$  : operador límite que significa  $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon < 0}}$ .

$\mathbb{I}$  : conjunto de todos los números imaginarios.

$\mathbb{I}_+$  : conjunto de todos los números imaginarios positivos.

$\mathbb{I}_-$  : conjunto de todos los números imaginarios negativos.

$\mathbb{N}$  : conjunto de todos los números enteros no negativos.

$\mathbb{N}_+$  : conjunto de todos los números enteros positivos.

$\mathbb{Z}$  : conjunto de todos los números enteros.

$\mathbb{Z}_+$  : conjunto de todos los números enteros positivos.

$\mathbb{Z}_-$  : conjunto de todos los números enteros negativos.

$\mathbb{R}$  : conjunto de todos los números reales.

$\mathbb{R}_+$  : conjunto de todos los números reales positivos.

$\mathbb{R}_-$  : conjunto de todos los números reales negativos.

$\mathbb{C}$  : conjunto de todos los números complejos.

$j$  : unidad imaginaria pura, también denotada como  $i$ .

$\lfloor \cdot \rfloor$  : aproxima una cantidad al próximo inferior entero.

$\lceil \cdot \rceil$  : aproxima una cantidad al próximo superior entero.

$\text{Re}[\cdot]$  : parte real de una cantidad.

$\text{Im}[\cdot]$  : parte imaginaria de una cantidad.

$|\cdot|$  : magnitud de una cantidad compleja.

$\arg[\cdot]$  : argumento genérico o expresión general de la fase de una cantidad.

$\text{Arg}[\cdot]$  : argumento principal de una cantidad.

$\bar{\cdot}$  : conjugado de una cantidad, en general una cantidad compleja.

$\log(\cdot) = \log_{10}(\cdot)$  : logaritmo decimal de una cantidad.

$\ln(\cdot) = \log_e(\cdot)$  : logaritmo natural o neperiano de una cantidad.

$\text{sgn}(\cdot)$  : función signo de una cantidad.

$\text{sgnz}(\cdot)$  : función signo de una cantidad, en la cual se define  $\text{sgnz}(0) = 0$ .  
Véase página 326.



# Introducción

---

 El análisis de los sistemas requiere por parte del analista, un claro entendimiento de los elementos que conforman el sistema, su interconexión, su interrelación con el medio, entre otros conceptos. Para esto, el analista debe observar cuidadosamente el sistema para así enunciar los supuestos que le permitirán hacer las consideraciones necesarias, y basado en el conjunto de supuestos plantear el modelo matemático que le permitirá estudiar el sistema, y de esta forma tener la capacidad de obtener respuestas a los diferentes problemas que sean planteados.

Estos supuestos exigen al analista un claro entendimiento de los sistemas, su taxonomía y las leyes físicas que permitan describir los fenómenos presentes en el sistema bajo estudio, y de esta forma buscar el modelo matemático más apropiado al sistema, el cual una vez modelado podrá estudiarlo. Un aspecto que todo analista debe tener en cuenta en el desarrollo del modelo matemático es el propósito para el cual ha de ser concebido, así como la factibilidad en la obtención de resultados analíticos ante situaciones que plantee en el estudio del desempeño del sistema, a través del modelo matemático obtenido.

En esta obra se estudiará tanto los modelos matemáticos como las soluciones analíticas que pueden proporcionar los mismos, bien sea en el dominio continuo, cuando se trate de un modelo matemático expresado en términos del dominio de los números reales, o en el dominio discreto, cuando el sistema es considerado en términos de un dominio discreto, los cuales normalmente corresponden al dominio de los números enteros. Además, el estudio de los sistemas en el dominio de la frecuencia es objeto de estudio en muchos campos de la ingeniería eléctrica, bien sea: potencia eléctrica, telecomunicaciones y electrónica, los cuales exigen un claro conocimiento del llamado *Cálculo Operacional*.

En este libro se desarrollan distintos enfoques para el estudio y análisis de los sistemas lineales, a través de su estudio en el apropiado dominio o incluso en los dominios de las transformadas de Laplace, Fourier o  $\mathcal{L}$ .

Por otra parte, la obra además de mostrar soluciones a problemas propuestos por el autor, muestras, en algunos casos, la obtención de soluciones mediante un “software” gratuito y abierto llamado<sup>1</sup> Scilab™, el cual el lector puede obtener sin costo alguno de la página [www.scilab.org](http://www.scilab.org) de donde puede conseguirse suficiente información para su instalación en diversos sistemas operativos y manuales de uso.

Además, el autor ha incluido, en la resolución de algunos problemas planteados, el empleo de comandos Scilab™ para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, raíces de polinomios, operaciones sobre matrices, entre otros cálculos elementales, requeridos en la determinación de respuestas a preguntas formuladas en el estudio de los sistemas lineales.

Este libro está compuesto de dos partes, las cuales contienen quince capítulos. Además, el autor ha incluido un apéndice sobre una breve introducción al Scilab™ e índice alfabético.

La Primera Parte denominada *Análisis de Sistemas* contiene: en el Capítulo 1, el estudio de los modelos matemáticos empleados para la descripción de señales definidas en el dominio continuo y discreto. Además el capítulo presenta un conjunto de definiciones para la clasificación de los sistemas, así como definiciones empleadas para el modelo matemático de señales en el dominio continuo y discreto; en el Capítulo 2 se introducen los modelos matemáticos que permiten definir los sistemas lineales, dinámicos, causales, invariantes en el dominio y deterministas (LDCID) y el método de resolución de estos modelos, los cuales están representados por medio de ecuaciones diferenciales. Por otra parte, se estudian los métodos de discretización de modelos matemáticos de sistemas dinámicos definidos por ecuaciones diferenciales. Además, se estudia la respuesta impulsiva y escalón de los sistemas LDCID; en el Capítulo 3 se presenta un análisis semejante al mostrado en el Capítulo 2, pero en el ámbito del dominio discreto, y en el cual se introduce el concepto de ecuación en diferencias como modelo dinámico que permite representar la dinámica de un sistema lineal, dinámico, causal, invariante en el dominio y determinista (LDCID) definido en el dominio discreto; en el Capítulo 4 se muestra el método basado en la convolución para la determinación de la respuesta de un sistema ante una señal de excitación. Este estudio se desarrolla en el capítulo tanto para sistemas definidos en el dominio continuo como discreto; en el Capítulo 5 se presenta como herramienta para el análisis de los sistemas LDCID definidos en el dominio continuo, la transformada de Laplace para el cálculo de la respuesta de los sistemas representados por ecuaciones diferenciales; en el Capítulo 6 es empleada la transformada  $\mathcal{L}$  en la resolución de problemas de sistemas LDCID definidos en el dominio discreto.

La Segunda Parte del libro y que ha sido intitulada *Análisis en Frecuencia* presenta lo siguiente: en el Capítulo 7 se introduce el concepto de análisis de sistemas desde la perspectiva de la frecuencia, tanto para sistemas LDCID definidos en el dominio continuo como discreto; en el Capítulo 8 se estudia el ampliamente conocido diagrama de Bode tanto en magnitud como en fase, así como su utilización en la determinación de la respuesta permanentes de los sistemas LDCID definidos en el dominio continuo, cuando éstos son sometidos a señales sinusoidales; en el Capítulo 9 se presenta un estudio de la respuesta en frecuencia de los sistemas LDCID definidos en el dominio discreto, además de su

<sup>1</sup>Scilab™ INRIA es un software libre (gratuito) y abierto, y sus condiciones de uso están disponibles en [www.scilab.org/products/scilab/license](http://www.scilab.org/products/scilab/license)

aplicación para el estudio de la respuesta LDCID definidos en el dominio discreto ante señales discretas sinusoidales; en el Capítulo 10 se estudia las señales periódicas definidas en el dominio continuo desde la óptica de la frecuencia, y para esto se ha definido la conocida serie de Fourier. Además en el capítulo se introduce un criterio adicional para la clasificación de las señales basándose en los conceptos de contenido de energía y potencia normalizada de las señales; en el Capítulo 11 se estudian los sistemas desde el punto de vista de la frecuencia, tanto en el ámbito del dominio continuo como discreto; en el Capítulo 12 se presenta una breve introducción a los sistemas no lineales, estáticos, causales, invariantes en el dominio y deterministas tanto en el dominio continuo como discreto; en el Capítulo 13 se muestra algunas aplicaciones que tiene el análisis de los sistemas y sus señales cuando son estudiados en el dominio de la frecuencia; en el Capítulo 14 se hace un breve estudio a los filtros digitales en virtud de su importancia en el tratamiento de señales; y finalmente, en el Capítulo 15 se estudia la transformada discreta de Fourier, así como el algoritmo de transformada rápida de Fourier más conocido por su acrónimo en inglés *fast Fourier transform* (FFT).

Además, al final del libro se presentan las soluciones a los problemas planteados en cada capítulo.

Referencias bibliográficas y un breve glosario de términos son también incluidos en el libro.



**PARTE I**

---

**ANÁLISIS DE SISTEMAS**

---



# CAPÍTULO 1

---

## SEÑALES Y SISTEMAS

---

Las luces de las estrellas que vemos hoy en el firmamento, es la colección de infinitas señales lumínicas, que fueron todas originadas en distintos momentos pasados, ofreciendo en cada instante una celebración del pasado en el presente.

—Ebert Brea

El estudio cuidadoso de las señales y los sistemas constituye el preámbulo que todo analista debe considerar antes de pretender expresar el modelo matemático que desea desarrollar. Es por esta razón que se ha incluido este primer capítulo, el cual proporcionará los puntos de vistas requeridos para el desarrollo del modelo matemático asociado al sistema bajo estudio.

Un punto de vista muy empleado en la ingeniería es el concerniente a las señales, las cuales son tratadas matemáticamente mediante funciones, es decir, las señales constituyen la medición de alguna cantidad presente en un sistema y que ellas son modeladas a través de expresiones matemáticas que conforman funciones. Es por tal motivo que en la ingeniería es común el empleo del término señales, en lugar de funciones, las cuales, estas últimas están más asociadas a conceptos abstractos.

Es oportuno señalar que el término cantidad de un sistema se refiere a una forma abstracta y genérica de denominar las variables o parámetros que son empleados para modelar matemáticamente los sistemas y las señales que interaccionan con el sistema y sus elementos.

En este capítulo se introducirán algunas definiciones asociadas al concepto de señales y sistemas, así como algunas definiciones que son empleadas para el estudio taxonómico de las señales y los sistemas.

El capítulo está estructurado como sigue: en la Sección 1.1 se presenta lo que será un sistema desde el punto de vista de la ingeniería eléctrica, así como las cantidades que podrían definirlo; en la Sección 1.2 se definen y clasifican las señales de acuerdo a diversos criterios, los cuales están basados en un conjunto de definiciones presentadas en la obra; en la Sección 1.3 se establecen conceptos de algunas señales básicas definidas en el dominio continuo, es decir, los números reales, mediante sus correspondientes funciones matemáticas; en la Sección 1.4 se presenta un método que permite modelar las señales definidas en el dominio discreto, a partir del modelo matemático de las señales definidas en el dominio continuo; en la Sección 1.5 se establece el significado de los modelos matemáticos de los sistemas así como su taxonomía. Finalmente, problemas y ejercicios propuestos para que el lector mida sus conocimientos adquiridos.

## 1.1 SISTEMAS

El estudio de los sistemas de modo abstracto ha sido tema de discusión de vieja data, en donde los matemáticos, físicos, químicos, ingenieros y profesionales de las ciencias sociales ha tratado de definir lo que entienden por sistema.

Al respecto, son incontables los intentos en la búsqueda de una definición abstracta que se ajuste a las necesidades de todas las disciplinas. Klir (1980) muestra diversos enfoques para definir lo que podría entenderse por sistemas. No obstante, más allá de pretender enunciar una definición que satisfaga todas las necesidades, se presentará una definición que de alguna manera ha permitido contextualizarla en el ámbito de la ingeniería.

**Definición 1.1 (Sistema)** *Un sistema puede ser definido como un conjunto de elementos, que al interactuar entre ellos son capaces de producir una respuesta ante cambios provenientes del ambiente, buscando satisfacer el objetivo para la cual fue concebido.*

De la Definición 1.1 se debería inferir que la respuesta del sistema debe obedecer a algún objetivo, al menos así son los sistemas diseñados en el campo de las ciencias de la ingeniería. Los sistemas en ingeniería buscan un propósito específico que puede ser visto como un objetivo.

Por otra parte, se debe tener claro el concepto de ambiente y fronteras del sistema para así poder construir una definición en el contexto de la ingeniería.

**Definición 1.2 (Ambiente)** *El ambiente o entorno de un sistema puede decirse que es todo el conjunto de elementos que lo rodean, y que pudiera influir o no en sus respuestas.*

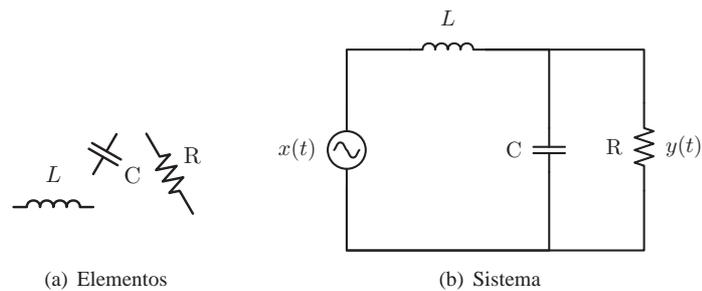
**Definición 1.3 (Frontera)** *La frontera de un sistema puede ser definida como la hipersuperficie que limita al sistema del ambiente.*

Con las Definiciones 1.1, 1.2 y 1.3 se podría ofrecer una definición de sistema en el contexto de la ingeniería, la cual es:

**Definición 1.4 (Sistema ingenieril)** *Un sistema ingenieril puede decirse que es un conjunto de elementos que al estar conectados de acuerdo a unas reglas que persigan un objetivo, ofrece respuestas esperadas ante estímulos provenientes de su ambiente y los mismos traspasan su frontera.*

Es oportuno aclarar que pudieran existir ejemplos de sistemas que no satisfagan completamente la definición presentada en esta obra. No obstante, lo importante es tener un concepto que permita definir lo que se entiende por sistema. Al respecto, véase el siguiente ejemplo:

### ■ EJEMPLO 1.1



**Figura 1.1.** Ejemplo de: (a) una colección de elementos eléctrico y (b) un sistema eléctrico

La Figura 1.1 muestra tres elementos eléctricos de un sistema. A decir, una resistencia, un inductor y un capacitor. Note que los elementos representados en la Figura 1.1(a) no constituyen un sistema debido al hecho de que estos no están interactuando entre sí y no muestran algún propósito desde el punto de vista de la ingeniería eléctrica, mientras la Figura 1.1(b), sí representa un sistema eléctrico debido a que los elementos están conectados y ellos tienen un propósito en cuanto al tratamiento que deben hacerle a la señal o entrada indicada por la fuente de tensión eléctrica  $x(t)$ , si ésta no es considerada parte del sistema, y cuya respuesta es medida por medio de la diferencia de potencial o caída de tensión eléctrica sobre la resistencia R, la cual es simbolizada por la variable  $y(t)$ .

#### 1.1.1 Taxonomía de las cantidades de un sistema

Ahora bien, los sistemas poseen cantidades, que por lo general son medibles, bien sea de modo directo o indirecto, y que son clasificadas en primera instancia como variables o parámetros. Este aspecto es de gran importancia al momento de construir un modelo matemático que represente al sistema bajo estudio.

El concepto de variable o parámetro no tiene relación alguna con la variación de su medida con respecto al tiempo, el espacio o cualquier otro dominio. Es decir, existen tanto variables como parámetros que pueden o no verse alterados en su medida en función de la variable independiente que define su dominio, sea ésta tiempo o posición, por citar algunas variables independientes.

Para dar una explicación en el contexto de la ingeniería eléctrica, imagínese un sistema integrado por tan sólo una resistencia  $r$ , y cuyo modelo matemático está dado por la ampliamente conocida Ley de Ohm,

$$v = ir, \quad (1.1)$$

donde  $v$  representa la caída de tensión en la resistencia de valor óhmico  $r$ , y esa cantidad, la tensión, está determinada por el producto de la corriente  $i$  que atraviesa la resistencia  $r$  y su valor resistivo. Es apropiado destacar que el sistema bajo estudio es considerado de parámetros concentrado, es decir, el valor resistivo del elemento está concentrado en un punto del sistema.

Al analizar la Ecuación (1.1) se tiene que de acuerdo al modelo matemático resulta realmente difícil precisar las variables y los parámetros del modelo matemático, que representa este elemental sistema. No obstante, antes de continuar con la discusión, se definirá lo que puede entenderse por modelo matemático.

**Definición 1.5 (Modelo matemático)** *Un modelo matemático puede decirse que es una representación soportada de símbolos, que cumple con leyes lógicas matemáticas para poder describirlo, y el mismo debe estar definido en un dominio.*

De acuerdo a la Definición 1.5, se tiene que el modelo matemático representado por la Ecuación (1.1), está dado por los símbolos  $v$ ,  $i$  y  $r$ , los cuales de acuerdo a las operaciones matemáticas indica que la cantidad  $v$  puede ser determinada mediante la multiplicación de las cantidades  $i$  y  $r$ . Ahora, si bien es cierto que son cantidades, se debe determinar cuales son variables y cuales son parámetros.

Para esto, es reexpresada nuevamente la Ecuación (1.1), pero haciendo ver al lector el punto de vista del modelador.

$$v(i) = ir \quad \forall i \in \mathbb{R} \quad (1.2a)$$

$$v(r) = ir \quad \forall r \in \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\} \quad (1.2b)$$

$$v(i, r) = ir \quad \forall (i, r) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -\infty < x < \infty, y \geq 0\} \quad (1.2c)$$

El modelo matemático definido por la Ecuación (1.2a), establece que las variables son  $v$  e  $i$  y su parámetro es  $r$ . Mientras, el modelo matemático dado por la Ecuación (1.2b) las variables son  $v$  y  $r$ , y su parámetro es  $i$ . Sin embargo, el modelo matemático representado por la Ecuación (1.2c), además de ser representado por una función  $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , sólo está definido por tres variables, de las cuales dos de ellas son independientes. En consecuencia, el modelador, debe en todo momento definir lo que él considera como dominio para así poder establecer de manera apropiada el modelo matemático del sistema.

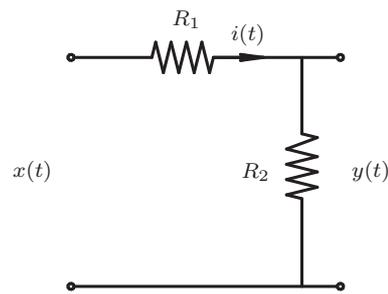
Por otra parte, las variables pueden ser clasificadas en variables externas o internas, y su naturaleza va a depender si son cantidades que traspasan la frontera, en el caso de las variables externas, o no traspasan la frontera, que en cuyo caso son consideradas variables internas.

**Observación 1.1 (Dominio)** *Para que un modelo matemático esté completamente definido, debe indicarse el dominio de validez del modelo.*

A objeto de aclarar algunas de las definiciones presentadas anteriormente, se analizará el siguiente sistema compuesto por un par de resistencias  $R_1$  y  $R_2$ .

La Figura 1.2 muestra un sistema en donde las cantidades  $x(t)$  e  $y(t)$  son variables externas, mientras la cantidad  $i(t)$  es una variable interna del sistema.

Por otra parte, tanto  $R_1$  como  $R_2$  son cantidades, las cuales constituyen parámetros internos del sistema. Note además que si, por ejemplo, la variable  $x(t) = A \sin(\omega_o t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , entonces las cantidades  $A$  y  $\omega_o$  representan parámetros externos del sistema, mientras la cantidad  $t$  es una variable independiente.



**Figura 1.2.** Sistema compuesto por dos resistencias

A objeto de acordar una convención que ayude a diferenciar si una cantidad de un sistema determinista<sup>2</sup> es una variable o un parámetro, se establecerá que las variables serán denotadas en minúsculas, mientras los parámetros se denotarán en mayúsculas. Es decir, cuando, por ejemplo, se requiera hacer referencia al parámetro resistencia, éste deberá denotarse como  $R$ . Sin embargo, al referirse como variable deberá escribirse como  $r$ . Esta convención eventualmente no será tomada en cuenta en los casos en que la definición de los modelos matemáticos establezcan claramente el dominio de definición.

**Observación 1.2** *Los parámetros de un sistema pueden estar sometidos a variaciones o alteraciones como consecuencia de su envejecimiento o debido a dependencias de alguna cantidad del sistema.*

## 1.2 SEÑALES

El término señal es atribuido a cada una de las variables, internas o externas de un sistema, en donde son representadas a través de expresiones matemáticas, que comúnmente son llamadas funciones. Sin embargo, en áreas de conocimientos como las que se está abordando, el término función tiene un significado diferente al que se le da en el análisis de sistemas.

La definición de función en el dominio continuo y en el dominio discreto son presentadas por Brea (2006, Capítulo 2). Estas definiciones pueden ser apropiadas para el caso de señales, siempre y cuando se tenga en cuenta la definición de señal.

**Definición 1.6 (Señal)** *Se dice que una señal es un conjunto de observaciones que de manera cuantitativa conforman un conjunto de mediciones, el cual normalmente dispone de un modelo matemático que lo represente.*

Ahora bien, el sentido de la Definición 1.6 obedece más al sentido físico que al matemático, debido a que las señales son manifestaciones de las variables de los sistemas y su ambiente o entorno, las cuales son representadas matemáticamente por funciones. No obstante, el análisis de los sistemas exige, en buena medida, de expresiones matemáticas que representen las señales, las cuales se denominan en el contexto matemático como funciones.

<sup>2</sup>Sistemas cuyos parámetros están dados por variables deterministas.

### 1.2.1 Taxonomía de las señales

Las señales, dependiendo de su naturaleza, pueden ser clasificadas en continuas o discretas, y éstas a su vez pueden ser aleatorias o deterministas. Además, las señales pueden ser clasificadas según su interacción con el medio, es decir, en señales internas o externas. Estas últimas pueden ser consideradas señales de excitación o de entrada, y señales de respuesta o de salida.

**Definición 1.7 (Señal determinista)** *Se dice que una señal es determinista si ésta puede ser cuantificada para cada valor de su dominio de manera exacta.*

**Definición 1.8 (Señal estocástica)** *Una señal es considerada estocástica cuando su medida no puede ser determinada de manera exacta, para cada elemento de su dominio. A lo sumo podrá estimarse a través de métodos basados en la estadística o en las probabilidades.*

**Definición 1.9 (Señal continua)** *Se dice que una señal es continua, si ella está representada en el dominio de alguna variable independiente continua, tal como el tiempo, la distancia, la temperatura, entre otras. Las señales continuas son también denominadas señales analógicas.*

**Definición 1.10 (Señal discreta)** *Se dice que una señal es discreta, si ésta es representada en el dominio de alguna variable independiente discreta, tal como el instante regular definido por cada minuto, la medida representada por cada número entero de distancia, entre otros. Es oportuno indicar que las señales discretas son llamadas señales digitales cuando su rango está definido en el conjunto contable de números, como por ejemplo los números enteros.*

**Observación 1.3** *El término continuo no debe confundirse con el concepto de continuidad estudiado en el cálculo matemático. Este término es atribuido al hecho de que el dominio que define la función que representa la señal corresponde a los números reales.*

**Definición 1.11 (Señal interna)** *Una señal se dice ser interna si ella no interactúa con el medio, es decir, si ella sólo existe dentro del sistema y no se ve afectada directamente por el ambiente o ella no altera de modo directo el medio como consecuencia de una respuesta o cambio.*

**Definición 1.12 (Señal externa)** *Se dice que una señal es externa si ella atraviesa la frontera para modificar el desempeño del sistema o para alterar el ambiente.*

**Definición 1.13 (Señal de excitación)** *Se dice que una señal es de excitación si ella es una señal externa y proviene del medio.*

**Definición 1.14 (Señal de respuesta)** *Una señal se dice ser de respuesta si ésta es externa y es consecuencia de su tratamiento por parte del sistema, produciendo eventualmente una alteración al medio.*

La Figura 1.3 muestra un posible esquema taxonómico de las señales que pueden ser consideradas en un sistema de acuerdo a las definiciones presentadas en este apartado. Es oportuno indicar que las señales que serán estudiadas en este libro, son las correspondientes a las señales deterministas.

Como ejemplo de aplicación para el caso mostrado en la Figura 1.2 de la página 7, las cantidades  $x(t)$  e  $y(t)$  son señales: deterministas, continuas, externas, y de excitación y de

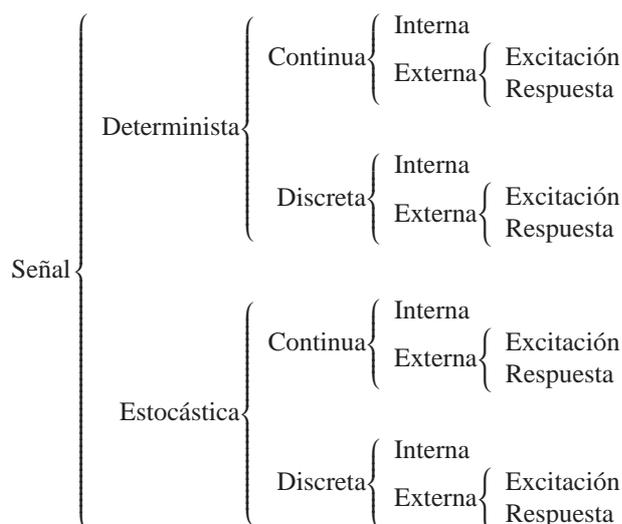


Figura 1.3. Esquema taxonómico de señales

respuesta, respectivamente. Mientras la cantidad  $i(t)$  es una señal: determinista, continua e interna.

No obstante, una clasificación parecida, exceptuando su característica discreta, se habría concluido del ejemplo ilustrado en la Figura 1.2, si las señales fuesen consideradas en el dominio discreto y habrían sido representadas como  $x[n]$ ,  $y[n]$  y  $i[n]$  para<sup>3</sup> todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

### 1.3 MODELOS MATEMÁTICOS DE SEÑALES EN EL DOMINIO CONTINUO

En esta sección se establecerán algunas señales a través de funciones matemáticas definidas en el dominio continuo, en virtud de su importancia en el empleo de las mismas en el estudio de los sistemas.

**Definición 1.15 (Función impulso en el dominio continuo)** Sea  $\delta(t)$  la función impulso o también conocida como la función delta de Dirac, la cual es una función tal que para un valor positivo de  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  y  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\delta(t) = 0, \quad |t| > \varepsilon, \tag{1.3}$$

Además, debe satisfacer que<sup>4</sup>

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1. \tag{1.4}$$

<sup>3</sup>Note que la variable independiente en las señales definidas en el dominio continuo son indicadas entre paréntesis, por ejemplo  $x(t)$ , mientras que para el caso del dominio discreto, la variable independiente es denotada entre corchetes, como por ejemplo  $x[n]$ .

<sup>4</sup>Observe que la notación  $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\cdot)$  significa  $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} (\cdot)$ .

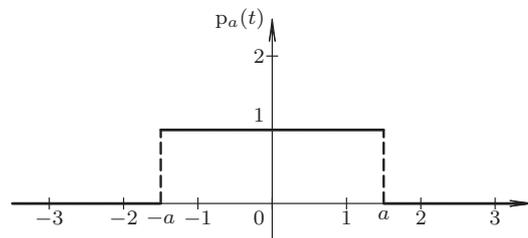
**Definición 1.16 (Función escalón en el dominio continuo)** Denote a  $u(t)$  como la función escalón definida en algún dominio continuo, tal que

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \forall t < 0; \\ 1, & \forall t > 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

**Definición 1.17 (Función pulso rectangular en el dominio continuo)** Denote a  $p_a(t)$  a una función definida en algún dominio continuo, tal que

$$p_a(t) = \begin{cases} 1, & \forall |t| < a; \\ 0, & \forall |t| > a, \end{cases} \quad (1.6)$$

donde  $a \in \mathbb{R}_+$  representa el semiancho del pulso rectangular.



**Figura 1.4.** Señal pulso rectangular  $p_a(t)$  definida en el dominio continuo

La Figura 1.4 ilustra un ejemplo de una señal definida en el dominio continuo y cuyo modelo matemático corresponde a la función pulso rectangular con semiancho  $a = 1,5$ .

**Definición 1.18 (Función pulso triangular en el dominio continuo)** Denote a  $q_a(t)$  la función pulso triangular definida en algún dominio continuo, la cual viene dada por

$$q_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a}, & \forall |t| < a; \\ 0, & \forall |t| \geq a, \end{cases} \quad (1.7)$$

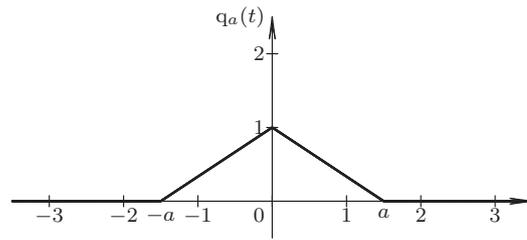
donde  $a \in \mathbb{R}_+$  significa el semiancho del pulso triangular.

La Figura 1.5 muestra una señal definida en el dominio continuo con expresión matemática dada por la función pulso triangular de semiancho  $a = 1,5$ .

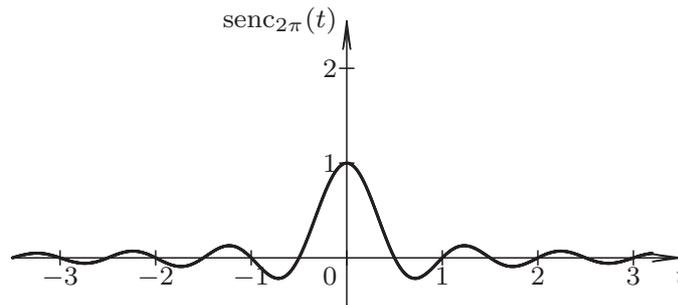
**Definición 1.19 (Función  $\text{senc}_a(t)$ )** Denote a  $\text{senc}_a(t)$  la función  $\text{senc}$  definida en algún dominio continuo, tal que cumple con

$$\text{senc}_a(t) = \begin{cases} 1, & \forall t = 0; \\ \frac{\text{sen}(at)}{at}, & \forall t \neq 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

donde  $a \in \mathbb{R}_+$ .



**Figura 1.5.** Señal pulso triangular  $q_a(t)$  definida en el dominio continuo



**Figura 1.6.** Señal  $\text{sinc}_{2\pi}(t)$  definida en el dominio continuo

La Figura 1.6 presenta un ejemplo de la función  $\text{sinc}_{2\pi}(t)$ . Note que a consecuencia de que el parámetro  $a = 2\pi$ , se produce valores de rango iguales a cero en cada  $0,5k$ , donde  $k$  toma los valores de  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

### 1.4 MODELOS MATEMÁTICOS DE SEÑALES DISCRETAS

Los modelos matemáticos empleados para la representación de una señal están basados en expresiones matemáticas de funciones, los cuales deberán tomar en cuenta la naturaleza de las señales a modelar.

Estos modelos matemáticos pueden representar tanto señales periódicas como aperiódicas, además de las consideraciones taxonómicas estudiadas en la Sección 1.2.

En el caso de señales definidas en el dominio continuo, éstas son representadas a través de expresiones matemáticas cuyo dominio está definido en el campo de los números reales, mientras las señales deterministas definidas en el dominio discreto, su dominio suele ser definido en el campo de los números enteros.

En esta apartado se estudiará, a los efectos de mostrar un enfoque, la forma como serán representadas la señales deterministas definidas en el dominio discreto, bien sea tiempo, espacio, o cualquier otro dominio que permite representar variables de un sistema en términos de un dominio discreto (Brea, 2006, Capítulo 2).

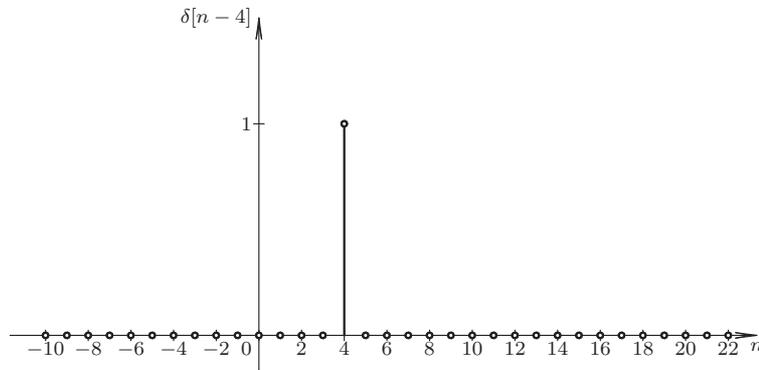
Para esto, se verán algunas definiciones empleadas en el ámbito del análisis de señales.

**Definición 1.20 (Función impulso discreto desplazado)** Sea  $\delta[n - d]$  una función definida en términos de la variable discreta independiente  $n \in \mathbb{Z}$ , y cuya definición viene dada

por

$$\delta[n-d] = \begin{cases} 1, & \forall n = d; \\ 0, & \forall n \neq d, \end{cases} \quad (1.9)$$

donde  $d \in \mathbb{Z}$  es el parámetro que indica el desplazamiento.



**Figura 1.7.** Función impulso discreto desplazado, con  $d = 4$

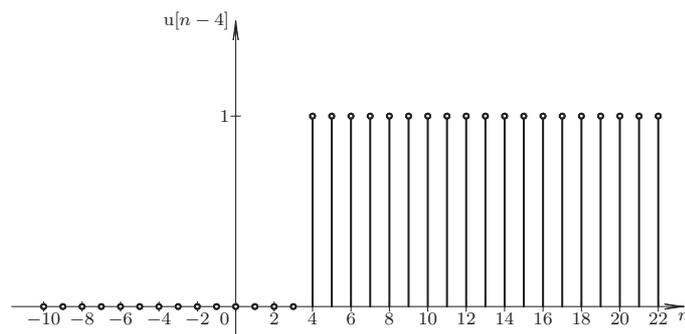
La Figura 1.7 muestra un ejemplo de la función impulso discreto desplazado, para el caso en  $d = 4$ .

**Definición 1.21 (Función escalón discreto desplazado)** La función escalón discreto desplazado denotada por  $u[n-d]$ , es una función definida en términos de la variable discreta independiente  $n \in \mathbb{Z}$ , y cuya definición viene dada por

$$u[n-d] = \begin{cases} 0, & \forall n < d; \\ 1, & \forall n \geq d, \end{cases} \quad (1.10)$$

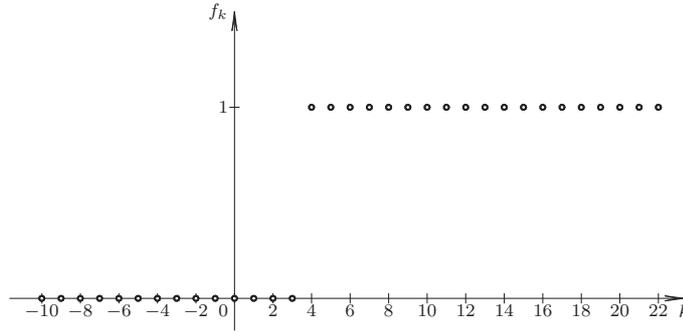
donde  $d \in \mathbb{Z}$  es el parámetro que indica el desplazamiento de la función con respecto al origen de coordenadas.

La Figura 1.8 muestra un ejemplo de la función escalón definido en el dominio discreto para el caso de un desplazamiento de  $d = 4$ .



**Figura 1.8.** Función escalón discreto con desplazamiento  $d = 4$

Por otra parte, la Figura 1.9 ilustra la secuencia de muestras correspondiente a la función escalón  $u[n-4]$  definido en el dominio discreto.



**Figura 1.9.** Secuencias de muestras de la función escalón discreto con desplazamiento  $d = 4$

Es importante diferenciar el significado de una función en el dominio discreto, la cual se denota como  $f[n]$  y la secuencias de muestras de la función denotada como  $f_k$ , lo que constituye la expresión matemática:

$$f[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (1.11)$$

donde, para el caso de la función escalón  $u[n-d]$ ,  $f_k$  está dado por

$$f_k = \begin{cases} 0, & \forall k < d; \\ 1, & \forall k \geq d. \end{cases} \quad (1.12)$$

De acuerdo a la Definición 1.20, la función escalón discreto desplazada puede ser representada por

$$u[n-d] = \sum_{i=d}^{\infty} \delta[n-i], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (1.13)$$

**Teorema 1.1** Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal en el dominio continuo. Si se toman muestras de la señal  $f(t)$  a intervalos regulares  $h \in \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ . Entonces, la señal en el dominio discreto, proveniente de las muestras extraídas de la señal  $f(t)$  puede ser representada por

$$f[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \delta[n-kh] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \delta[n-k] \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (1.14)$$

donde  $f(kh)$  es el rango de la función  $f(t)$  en cada instante  $kh$ , y  $k \in \mathbb{Z}$  es el contador de la muestra.

**Demostración.** La discretización de una señal definida en el dominio continuo debe interpretarse como la colección ordenada de muestras de la señal, la cual su valor es el rango de la señal continua en cada instante, y que está separada una muestra de la siguiente en  $h$ .

Este hecho, permite ver el muestreo como el producto de la señal continua por lo que se conoce como tren de impulsos unitarios, es decir,

$$\hat{f}(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kh), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (1.15)$$

donde  $\delta(\cdot)$  denota la función delta de Dirac (Brea, 2006; Bäumer *et al.*, 2004; Gel'fand y Shilov, 1964).

Ahora, de la Ecuación (1.15), se tiene que

$$\hat{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - kh), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.16)$$

Por otra parte, se sabe que si  $f(t)$  es una función continua para todo  $t \in \mathbb{R}$ , entonces

$$f(t) \delta(t - t_o) = f(t_o) \delta(t - t_o), \quad (1.17)$$

donde  $t_o \in \mathbb{R}$  representa el desplazamiento con respecto a  $t = 0$ .

Empleando la Ecuación (1.17) en la Ecuación (1.16), se tiene que

$$\hat{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \delta(t - kh), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (1.18)$$

la cual al ser representada en el dominio discreto, se obtiene

$$f[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \delta[n - k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (1.19)$$

debido al reemplazo de  $t$  por  $n$ , y sabiendo que la separación real entre una muestra y su vecina es  $h$ . ■

**Observación 1.4** Note que  $\delta(x)$  denota la función delta de Dirac definida en el dominio continuo  $x \in \mathbb{R}$ . Mientras  $\delta[n]$  representa la función impulso discreto definida en el dominio de los números enteros  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Observación 1.5** Los valores de rangos que adquiere la función  $f(kh)$  para cada valor entero de  $k$  serán denotados  $f_k$ . En consecuencia la señal discreta  $f[n]$  es representada por

$$f[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \delta[n - k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (1.20)$$

**Observación 1.6 (Definición de  $u(t - T_o)|_{t=T_o}$  para su discretización)** Aun cuando la función escalón unitario, desplazada en  $T_o \in \mathbb{R}$ , definida en el dominio  $t \in \mathbb{R}$ , denotada en general como  $u(t - T_o)$ , no está definida en  $t = T_o$ , su valor de rango en  $t = T_o$  podría definirse a los efectos de su discretización con un valor de rango igual a uno. No obstante, existen muchos otros criterios como por ejemplo:  $u(t - T_o)|_{t=T_o} = 0$ ,  $u(t - T_o)|_{t=T_o} = 1/2$ , entre otros.

Basado en estas definiciones se desarrollarán un conjuntos de ejemplos que permitirán inducir el método de discretización de señales, los cuales podrán ser empleados para su generalización.

■ EJEMPLO 1.2

Suponga que se cuenta con la siguiente información definida en algún dominio discreto, a través de la siguiente tabla:

**Tabla 1.1.** Valores medidos

$k$	-1	0	1	2	3
$f_k$	5	4	3	2	-5

Obtenga una expresión matemática que permita representar los valores mostrados en la Table 1.1.

**Solución**

Los datos de la Tabla 1.1 pueden ser representado mediante el empleo de la función impulso discreto.

Es decir,

$$f[n] = 5\delta[n+1] + 4\delta[n] + 3\delta[n-1] + 2\delta[n-2] - 5\delta[n-3], \quad \forall n \in A, \quad (1.21)$$

donde  $A = \{q \in \mathbb{Z} : -1 \leq q \leq -5\}$ .

El lector podrá interpretar rápidamente el significado de los desplazamientos de la función impulso discreto definida por la Ecuación (1.21) a través de la Definición 1.20, y los valores mostrados en la Tabla 1.1.

Por ejemplo,  $f[1]$  está dado por

$$f[1] = 5\delta[1+1] + 4\delta[1] + 3\delta[1-1] + 2\delta[1-2] - 5\delta[1-3] = 3, \quad (1.22)$$

al evaluar la Ecuación (1.22) para  $n = 1$ .

El Ejemplo 1.2 muestra la interpretación y uso de la función impulso discreto.

Por otra parte, si los datos mostrados en la Tabla 1.1 son interpretados como parte de la información, en donde

$$f[n] = 0, \quad \forall n \notin \{q \in \mathbb{Z} : -1 \leq q \leq -5\}, \quad (1.23)$$

modelo matemático debe ser entonces,

$$f[n] = 5\delta[n+1] + 4\delta[n] + 3\delta[n-1] + 2\delta[n-2] - 5\delta[n-3], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (1.24)$$

■ EJEMPLO 1.3

Sea una señal continua  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , la cual está definida como

$$f(t) = e^{\alpha(t-T_o)}u(t-T_o), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.25)$$

Determine la correspondiente expresión matemática de la señal en el dominio discreto, si ésta es discretizada a intervalos regulares de  $h \in \mathbb{R}_+$ , donde se denota a  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ .

**Solución**

Para esto, primero se debe evaluar la expresión matemática definida por la Ecuación (1.25) para el caso  $t = kh$  a los fines de aplicar el Teorema 1.1, quedando

$$f(kh) = e^{\alpha(kh - T_o)} u(kh - T_o), \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (1.26)$$

Reordenando los términos en la Ecuación (1.26), se tiene que

$$f(kh) = e^{\alpha h(k - \frac{T_o}{h})} u[h(k - \frac{T_o}{h})], \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (1.27)$$

De la Ecuación (1.27), se tiene que

$$f[n] = \sum_{k=\lceil \frac{T_o}{h} \rceil}^{\infty} e^{\alpha h(k - \frac{T_o}{h})} \delta[n - k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (1.28)$$

donde el operador  $\lceil \cdot \rceil$  aproxima al próximo entero superior.

A objeto de hacer una representación gráfica, suponga que  $\alpha = -2$ ,  $T_o = 0,3$  s y  $h = 0,1$  s; lo cual al sustituir en la Ecuación (1.28), se obtiene

$$f[n] = \sum_{k=3}^{\infty} e^{-2(0,1)(k - \frac{0,3}{0,1})} \delta[n - k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (1.29)$$

resultando

$$f[n] = \sum_{k=3}^{\infty} e^{-0,2(k-3)} \delta[n - k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (1.30)$$

la cual, al denotar a  $r = e^{-0,2}$  se obtiene que

$$f[n] = \sum_{k=3}^{\infty} r^{k-3} \delta[n - k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (1.31)$$

La expresión mostrada por la Ecuación (1.31) es lo que se denomina como exponencial discreta, o más apropiada decir, exponencial en el dominio discreto.

La Figura 1.10 de la página 17 representa la función exponencial desplazada definida en el dominio discreto  $n$ , para un desplazamiento con respecto al origen de coordenadas de  $d = 3$  y un intervalo de discretización de  $h = 0,1$  s.

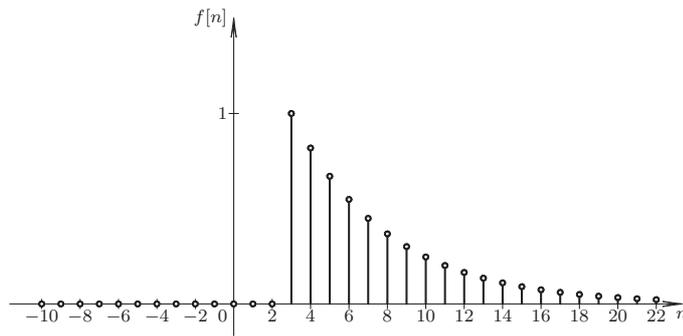
Por su parte, la Figura 1.11 de la 17 ilustra la secuencia de muestras  $f_k$  correspondiente a la función exponencial discreta estudiada en el ejemplo.

Note que la secuencia discreta está definida por

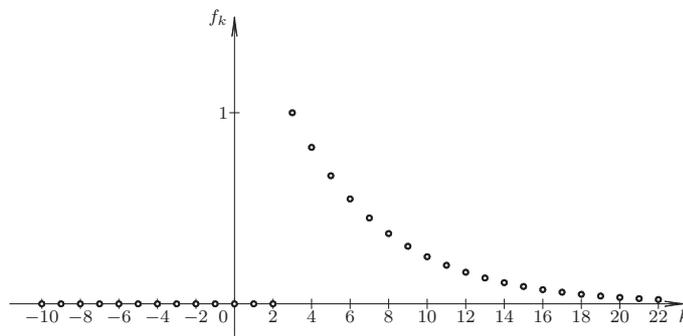
$$f_k = \begin{cases} 0, & \forall k < 3; \\ r^{k-3}, & \forall k \geq 3, \end{cases} \quad (1.32)$$

donde el subíndice  $k \in \mathbb{Z}$  representa la posición de la secuencia.

El lector debe tomar en cuenta que se ha considerado que el rango de la función escalón se ha representado con un valor de uno, justo en su discontinuidad (véase Observación 1.6 de la página 14).



**Figura 1.10.** Función exponencial desplazada definida en el dominio discreto, con  $d = 3$  y  $h = 0,1$  s



**Figura 1.11.** Secuencia de muestras de la función exponencial desplazada definida en el dominio discreto, con  $d = 3$  y  $h = 0,1$  s

■ **EJEMPLO 1.4**

Sea una señal continua  $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , la cual es definida como

$$f(t) = \text{sen}(\pi t)u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.33}$$

Determine la expresión matemática de la correspondiente señal definida en el dominio discreto, si la señal es discretizada a intervalos regulares  $h = 0,1$  s.

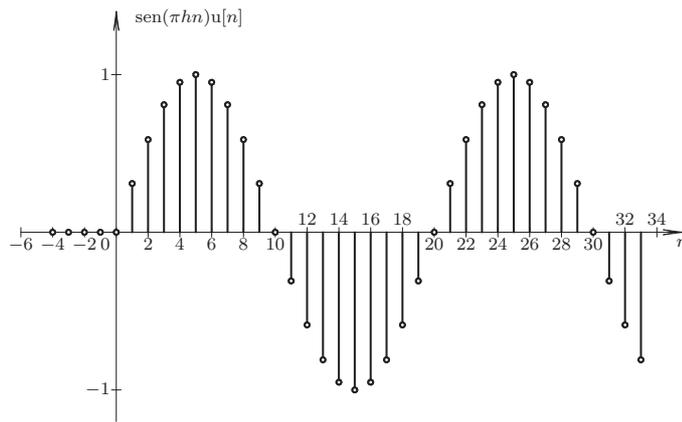
**Solución**

Aplicando nuevamente el Teorema 1.1, se tiene que

$$f(kh) = \text{sen}(\pi kh)u(kh), \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{1.34}$$

Empleando la Ecuación (1.34), se obtiene que

$$f[n] = \text{sen}(\pi hn)u[n] = \begin{cases} 0, & \forall n < 0; \\ \sum_{k=0}^{\infty} \text{sen}(\pi hk)\delta[n-k], & \forall n \geq 0. \end{cases} \tag{1.35}$$

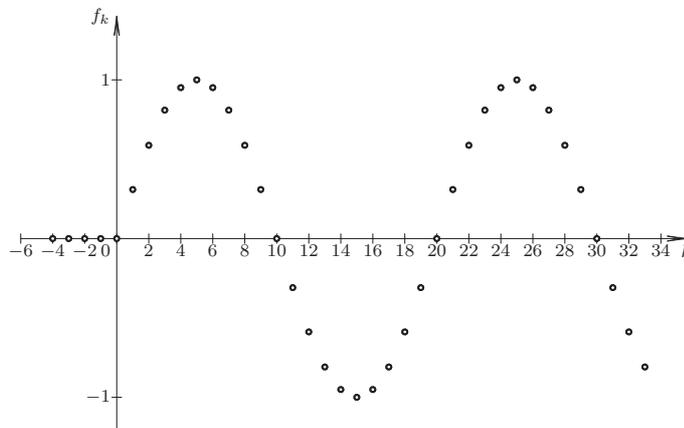


**Figura 1.12.** Función seno definida en el dominio discreto, con  $h = 0,1$  s

La Figura 1.12 muestra una representación gráfica de la señal seno definida en el dominio discreto, cuando el paso de discretización es  $h = 0,1$  s, la cual es expresada por la Ecuación (1.35).

A partir de la Ecuación (1.35) se tiene que la secuencia de muestras correspondiente está definida por

$$f_k = \begin{cases} 0, & \forall k < 0; \\ \text{sen}(\pi hk), & \forall k \geq 0. \end{cases} \quad (1.36)$$



**Figura 1.13.** Secuencia seno definida en el dominio discreto, con  $h = 0,1$  s

Por otra parte, la Figura 1.13 presenta la secuencia de muestras  $f_k$  correspondiente a la función definida en el ejemplo.

A través de los ejemplos presentados, el lector debe poder entonces apreciar la diferencia que existe entre una función definida en el dominio discreto y su correspondiente secuencia de muestras.

### 1.5 MODELOS MATEMÁTICOS DE SISTEMAS

Uno de los aspectos que deben considerarse en todo modelo matemático de una sistema, es explicar a través de él, las diversas cantidades que definen el sistema, es decir, sus señales y parámetros. En el caso de las señales, los modelos deben poder mostrar de manera explícita cuales son las señales de excitación y cuales son las señales de respuesta.

Para poder lograr determinar cual o cuales son las señales de respuesta, el modelo matemático debe ser expresado de modo explícito, en virtud de que al estar en modo implícito no se podrá especificar la naturaleza de las variables desde el punto de vista de su causa y efecto. Como ejemplo, considere el modelos dado por

$$y(t) = m(t)x(t) + b(t). \tag{1.37}$$

De acuerdo a la Ecuación (1.37), lo único conocido es que  $y(t)$  es una cantidad (parámetro o señal) que es respuesta de  $m(t)$ ,  $x(t)$  y  $b(t)$ . Sin embargo, al reexpresarla como

$$y(t) - m(t)x(t) - b(t) = 0. \tag{1.38}$$

La Ecuación (1.38) no suministra suficiente información de la naturaleza de las cantidades desde el punto de vista de su causa y efecto. Es por tal motivo que al momento de expresar un modelo matemático de un sistema debe indicarse la naturaleza de cada una de las cantidades expresadas en el modelo matemático.

Un ejemplo de esto es:

**Modelo 1.1** Sean  $x(t)$  e  $y(t)$  las señales de excitación y respuesta, respectivamente. Entonces, el modelo matemático del sistema representado por

$$y(t) = m(t)x(t) + b(t), \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}, \tag{1.39}$$

donde  $m(t)$  y  $b(t)$  constituyen parámetros del sistema, y muestra la relación entre las señales antes descritas.

Por otra parte, dado que en este material no serán tratado las cantidades estocásticas, los parámetros pueden diferenciarse de las señales mediante el empleo de mayúsculas, para así poder distinguirlos fácilmente en el modelo matemático. En consecuencia el Modelo 1.1 puede ser definido por:

$$y(t) = M(t)x(t) + B(t), \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}, \tag{1.40}$$

donde claramente queda establecido que  $x(t)$  e  $y(t)$  son respectivamente las señales de excitación y respuesta, y  $M(t)$  y  $B(t)$  representan los parámetros del sistema.

Sin embargo, los parámetros pueden ser representado con letras minúsculas siempre y cuando se le indique al lector que ellos son parámetros.

Es oportuno señalar que la mayor parte de los sistemas que son estudiados en la ingeniería eléctrica corresponden a sistemas que describen las relaciones dinámicas de su excitación y respuesta. Estos sistemas tienen asociado normalmente un modelo matemático

que corresponde a una ecuación diferencial, la cual puede ser de parámetros constantes o variables. Además, los modelos matemáticos que son empleados en el estudio de los sistemas pudieran obedecer a modelos definidos por ecuaciones diferenciales de primer grado. Ciertamente existe una gran variedad de tipos de sistemas los cuales deben ser analizados desde la óptica que ocupe en un esquema taxonómico, y es por tal motivo que deben clasificarse los sistemas según el modelo matemático que haya adoptado el analista del sistema.

### 1.5.1 Taxonomía de los sistemas de acuerdo a su modelo matemático

A través de los modelos matemáticos de los sistemas, estos pueden ser clasificados en concordancia con un conjunto de definiciones las cuales serán estudiadas en este apartado.

Para poder establecer una estructura taxonómica, se verán en primera instancia un conjunto de definiciones que permitirán clasificar los sistemas en términos de los siguientes enfoques, los cuales algunos de ellos son presentados por Oppenheim *et al.* (1998).

Con el propósito de establecer las definiciones se empleará la siguiente notación:  $x(t)$  o  $x[n]$  representan la señal de excitación en el dominio continuo o discreto, respectivamente, que por lo general se establecerá que será el tiempo;  $y(t)$  o  $y[n]$  representan respectivamente la señal de respuesta en el dominio continuo o discreto; y el símbolo  $\mathcal{T}$  significará el operador que causa la transformación de la señal de excitación. Es decir, al expresar

$$y(t) = \mathcal{T}[x(t)], \quad (1.41)$$

ésta representa en términos generales el modelo matemático del sistema.

Es importante puntualizar que el desarrollo de esta sección se denotará como dominio la variable  $t$ . Sin embargo, las conclusiones aportadas podrán ser extrapoladas fácilmente al dominio  $n$ , el cual se ha reservado para denotar el dominio discreto espaciado uniformemente.

**1.5.1.1 Sistema lineal o no lineal** Para estudiar esta característica considerada en algunos sistemas se enunciará y estudiará la definición de sistema lineal.

**Definición 1.22 (Sistema lineal)** *Un sistema se dice ser lineal si satisface las propiedades de:*

- a) *Homogeneidad o también denominado proporcionalidad.*
- b) *Superposición.*

**Propiedad 1.1 (Homogeneidad)** *Se establece que un sistema, con modelo matemático dado por  $y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$ , cuenta con la propiedad de homogeneidad, si al alterar la excitación en  $k$  veces, es decir, si su nueva excitación es  $kx(t)$ , donde  $k$  es una constante sin restricción de signo, entonces la respuesta del sistema deberá ser  $ky(t)$ .*

**Propiedad 1.2 (Superposición)** *Sea un sistema con modelo matemático definido por  $y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$ , y además sea  $y_i(t)$  la respuesta individual ante cada una de las excitaciones  $x_i(t)$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , es decir,*

$$y_i(t) = \mathcal{T}[x_i(t)], \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Entonces, la respuesta del sistema ante una excitación definida por la suma ponderada de las excitaciones  $x_i(t)$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , es decir,

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=1}^n a_i x_i(t),$$

donde  $a_i \in \mathbb{R}$  es cada una de las constantes sin restricción de signo, viene dada por

$$\tilde{y}(t) = \mathcal{T}[\tilde{x}(t)] = \sum_{i=1}^n a_i y_i(t).$$

**Observación 1.7** El sistema definido por  $y(t) = \mathcal{T}[x(t)] = Ax(t) + B$ , donde  $A$  y  $B$  son constantes reales distintas de cero, aun cuando su modelo matemático es lineal, no satisface la propiedad de homogeneidad.

Para comprobar la aseveración enunciada en la Observación 1.7, suponga que el sistema definido por  $y(t) = \mathcal{T}[x(t)] = Ax(t) + B$  es excitado por la señal  $x(t)$ , la cual obviamente produce la respuesta  $y(t) = Ax(t) + B$ . Ahora, si el sistema fuese excitado nuevamente por una señal  $kx(t)$ , entonces, de ser lineal, el sistema deberá satisfacer la Propiedad 1.1, y cuya respuesta debería ser  $y(t) = k[Ax(t) + B]$ . No obstante, la respuesta del sistema realmente es  $y(t) = kAx(t) + B$ .

**Propiedad 1.3 (Sistema linealmente incremental)** Sea un sistema definido por la expresión matemática  $y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$ . Se dice que el sistema es linealmente incremental si para las excitaciones  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ , el sistema produce respectivamente las respuestas  $y_1(t) = \mathcal{T}[x_1(t)]$  y  $y_2(t) = \mathcal{T}[x_2(t)]$ . Entonces, la diferencia de las respuestas  $y_1(t) - y_2(t)$ , conforma un sistema lineal en el sentido de la Definición 1.22.

#### ■ EJEMPLO 1.5

Sea un sistema definido por

$$y(t) = \mathcal{T}[x(t)] = Ax(t) + B,$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes reales distintas de cero.

Si el sistema es excitado por las señales  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ , el sistema produce respectivamente las respuestas,

$$y_1(t) = \mathcal{T}[x_1(t)] = Ax_1(t) + B. \quad (1.42a)$$

$$y_2(t) = \mathcal{T}[x_2(t)] = Ax_2(t) + B. \quad (1.42b)$$

Ahora, el sistema definido por la diferencias de las respuesta  $y_1(t) - y_2(t)$ , las cuales son definidas respectivamente por la Ecuaciones (1.42a) y (1.42b), se obtiene

$$y_1(t) - y_2(t) = [Ax_1(t) + B] - [Ax_2(t) + B] = A[x_1(t) - x_2(t)],$$

la cual satisface las Propiedades 1.1 y 1.2.

**1.5.1.2 Sistema estático o dinámico** Una característica importante en los sistemas es en relación a la memoria que los mismos contengan, lo cual permitirá definir si son o no dinámicos.

**Definición 1.23 (Sistema estático)** *Un sistema se dice ser estático o también sin memoria, si su respuesta es consecuencia exclusiva del valor presente de su excitación. Es decir, su respuesta en el instante  $t$  es sólo debido al valor de la excitación en ese mismo instante  $t$ , y esto se cumple para cada instante  $t \in \mathbb{R}$ .*

**Definición 1.24 (Sistema dinámico)** *Un sistema se considera dinámico o llamado también con memoria, si su respuesta puede deberse, además del valor presente en su entrada, a los valores de su excitación en el pasado o incluso de valores futuros que pueda tomar la señal de excitación.*

### ■ EJEMPLO 1.6

Sean los sistemas definidos por

$$y(t) = \mathcal{T}[x(t)] = A x(t) + B. \quad (1.43a)$$

$$y(t) = \mathcal{T}[x(t)] = A [x(t) - x(t - \Delta t)] + B \quad (1.43b)$$

donde  $A$ ,  $B$  y  $\Delta t$  son constantes reales distintas de cero.

El modelo dado por la Ecuación (1.43a) es considerado estático por cuanto su respuesta depende únicamente del valor presente de la excitación  $x(t)$ . Mientras, el modelo matemático definido por la Ecuación (1.43b), además de depender del valor presente de la excitación, depende del valor adquirido por la excitación  $\Delta t$  tiempo atrás, en el caso de considerar  $\Delta t > 0$ , o del valor que pueda tener la excitación al cabo de  $\Delta t$  unidades de tiempo, para el caso en donde  $\Delta t < 0$ .

#### 1.5.1.3 Sistema causal o no causal

**Definición 1.25 (Sistema causal)** *Se dice que un sistema es causal si el mismo podría producir cambios en su respuesta, únicamente después de cambios presente en la excitación.*

*Matemáticamente, se puede decir que para un sistema definido por  $y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$ , si*

$$x(t) = \begin{cases} x(t) & \forall t < T_0, \\ x(t) + \Delta(t) & \forall t > T_0. \end{cases}$$

*Entonces,*

$$y(t) = \begin{cases} y(t) & \forall t < T_0, \\ \tilde{y}(t) + \mathcal{T}[\Delta(t)] & \forall t > T_0, \end{cases}$$

*donde  $\tilde{y}(t)$  podría ser o no  $y(t)$ , dependiendo si el sistema es o no lineal.*

**Definición 1.26 (Sistema No causal)** *Un sistema es considerado no causal o también conocido como anticipatorios, si él puede producir cambios en su respuesta, antes de que se produzcan eventuales cambios en su excitación.*

**1.5.1.4 Sistema invariante en el dominio o variante en el dominio** Un aspecto relevante en el estudio de los sistemas es suponer que ellos son invariante en tiempo, lo cual simplifica considerablemente los métodos empleados en la determinación de su respuesta ante una señal de excitación.

**Definición 1.27 (Sistema invariante en el dominio)** Sea un sistema definido por su modelo  $y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$ . Se dice que el sistema es invariante en el dominio, si su respuesta ante una excitación  $x(t - t_0)$ , corresponde únicamente a la respuesta  $y(t)$  pero trasladada en  $t_0$ , es decir, su respuesta estará dada por  $y(t - t_0)$ .

**Definición 1.28 (Sistema variante en el dominio)** Un sistema cuyo modelo corresponde a  $y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$  es variante en el dominio, si su respuesta ante una excitación  $x(t - t_0)$ , no corresponde a la respuesta  $y(t - t_0)$ .

■ EJEMPLO 1.7

Sea un sistema, el cual ante una excitación  $x(t) = u(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  produce la respuesta  $y(t) = e^{-\lambda t}u(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Si el sistema es invariante en tiempo, entonces, puede afirmarse que ante una excitación definida por  $\hat{x}(t) = u(t - t_0)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , su respuesta deberá ser  $\hat{y}(t) = e^{-\lambda(t-t_0)}u(t - t_0)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**1.5.1.5 Sistema en el dominio continuo o en el dominio discreto** Este enfoque taxonómico es sólo una abstracción que obedece a las consideraciones que hace el modelador del sistema o el analista, debido al hecho de que tanto el tiempo como el espacio son continuos. Sin embargo, el tratamiento de la continuidad del dominio puede o no conllevar a simplificaciones deseables en la representación del modelo matemático del sistema.

**Definición 1.29 (Sistema en el dominio continuo)** Un modelo matemático de un sistema se dice estar representado en el dominio continuo, si sus variable independiente están definidas como continua o para cada número real perteneciente al dominio.

**Definición 1.30 (Sistema en el dominio discreto)** Un modelo matemático de un sistema se dice estar representado en el dominio discreto, si sus variable independiente está representada por cantidades discretas, las cuales suelen ser distribuidas uniformemente, es decir, a intervalos regulares.

■ EJEMPLO 1.8

Considera un red eléctrica compuesta por un conjunto de  $N$  divisores de tensión resistivos conectados en escalera, y cuyas resistencias eléctricas son todas iguales y de valor  $R$ .

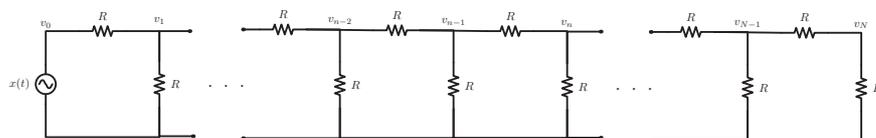


Figura 1.14. Red eléctrica de  $N$  divisores de tensión resistivos

La Figura 1.14 muestra la red eléctrica descrita anteriormente, en donde se denota por  $v_n$  la tensión con respecto al neutro de la fuente para el  $n$ -ésimo nudo.

El modelo matemático asociado a los valores de tensiones eléctricas, con respecto a terminal negativo de una fuente  $x(t)$  voltios, corresponde a un modelo discreto

de dominio definido por la enumeración de los nudos, los cuales son fácilmente obtenidos al calcular las sumas de las corrientes en los  $n$ -ésimos nudos (nodos).

Al igualar la suma de corrientes que entran en el nudo  $n-1$  con la suma de corrientes que sale de ese mismo nudo, fácilmente se obtiene

$$\frac{v_{n-2} - v_{n-1}}{R} = \frac{v_{n-1}}{R} + \frac{v_{n-1} - v_n}{R}. \quad (1.44)$$

Al despejar el término  $v_n$  de la Ecuación (1.44), se tiene

$$v_n = 3v_{n-1} - v_{n-2}. \quad (1.45)$$

Reexpresando la Ecuación (1.45) de acuerdo a la convención empleada en este texto, se obtiene que

$$v[n] = 3v[n-1] - v[n-2], \quad \forall 2 \leq n \leq N. \quad (1.46)$$

Es importante agregar que el modelo representado por la Ecuación (1.46) es un modelo matemático cuyo dominio viene a significar la posición del nudo, es decir, el modelo arroja la tensión eléctrica del  $n$ -ésimo nudo, con respecto al terminal negativo de la fuente o excitación.

**1.5.1.6 Sistema determinista o estocástico** Un punto de vista importante en la clasificación de los sistemas es en relación a su naturaleza determinista o aleatoria. Desde esta óptica se tiene que estas consideraciones dependen significativamente del nivel de resolución adoptado por el observados del sistema. Es decir, el hecho de considerar un sistema determinista o estocástico depende de la resolución con que se midan las cantidades del sistema, lo cual al considerar sus alteraciones aleatorias o no, es lo que determinará si el sistema bajo estudio es considerado determinista o estocástico.

**Definición 1.31 (Sistema determinista)** *Se dice que un sistema es determinista, si sus cantidades internas son determinista, es decir, tanto sus variables internas como parámetros son deterministas.*

**Definición 1.32 (Sistema estocástico)** *Un sistema es considerado estocástico si al menos una de sus cantidades internas está asociada a una variable aleatoria.*

La Figura 1.15 de la página 25 muestra un esquema de clasificación de los sistemas desde la óptica presentada en esta obra. Como puede apreciarse de la figura, de acuerdo con punto de vista expuesto anteriormente, existen 24 diferentes tipos de sistemas, todos ellos dependiendo de las cinco parejas de definiciones enunciadas.

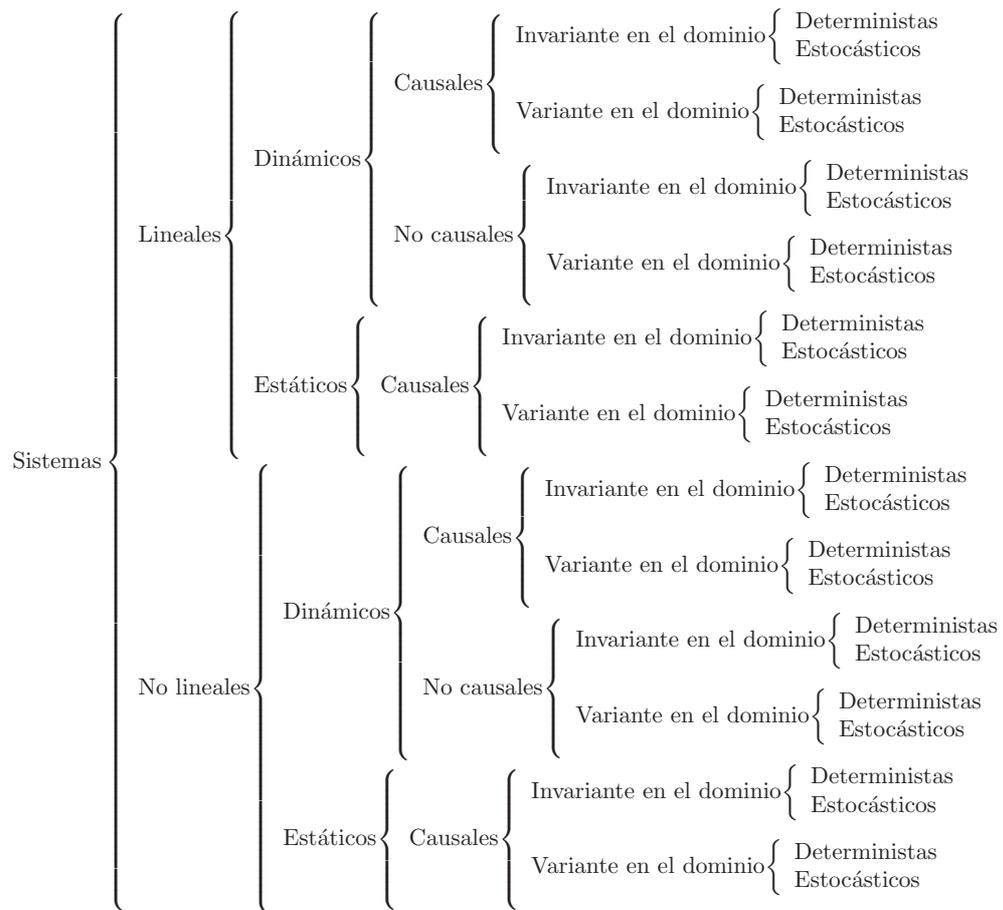


Figura 1.15. Esquema taxonómico de sistemas

**PROBLEMAS**

1.1 Sea una señal  $x(t)$  definida por

$$x(t) = e^{-5t}u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.47}$$

Si a la señal dada por la Ecuación (1.47) se le toman muestras a intervalos regulares  $h = \frac{1}{10}$  s. Determine el modelo matemático de la señal discreta  $x[n]$  que represente la secuencia de las muestras extraídas a la señal  $x(t)$ .

1.2 Determine los correspondientes modelos matemáticos en el dominio discreto, que representen las secuencias de muestras extraídas de las siguientes señales definidas mediante los modelos matemáticos continuos, si las muestras son tomadas a intervalos regulares de valor  $h = \frac{1}{5}$  s

- a)  $x(t) = \text{sen}(2t)u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$
- b)  $x(t) = e^{-t} \text{sen}(2t)u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$
- c)  $x(t) = p_2(t-4), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

$$\mathbf{d)} \quad x(t) = q_2(t+4), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

**1.3** Sean los modelos matemáticos definidos en el dominio continuo, en donde  $x(t)$  e  $y(t)$  representan respectivamente las señales de excitación y respuesta del sistema objeto de estudio, y las cuales ambas señales dependen de la variable independiente continua  $t \in \mathbb{R}$ . Entonces, a qué tipo de sistema corresponde cada modelo matemático definido a continuación:

$$\mathbf{a)} \quad y(t) = x^2(t), \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{b)} \quad y(t) = \text{sen}(2t)x(t), \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{c)} \quad y(t) = \text{máx}(x(t), 0), \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{d)} \quad y(t) = x(t+1), \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}.$$

**1.4** Sean los modelos matemáticos definidos en el dominio discreto, en donde  $x[n]$  e  $y[n]$  representan respectivamente las señales de excitación y respuesta del sistema objeto de estudio, y las cuales ambas señales dependen de la variable independiente discreta  $n \in \mathbb{Z}$ . Entonces, a qué tipo de sistema corresponde cada modelo matemático definido a continuación:

$$\mathbf{a)} \quad y[n] = a^n x[n-2], \quad \forall x[n] \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{b)} \quad y[n] = x[n+1] - x[n], \quad \forall x[n] \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{c)} \quad y[n] = x[n]x[n-2], \quad \forall x[n] \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{d)} \quad y[n] = 1 + x[n-1], \quad \forall x[n] \in \mathbb{R}.$$

**1.5** Sea un sistema definido en el dominio continuo, y cuyo modelo matemático viene dado por

$$16 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 20 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 8 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) + u(t), \quad \forall t > 0, \quad (1.48)$$

donde  $x(t)$  e  $y(t)$  representan respectivamente las señales de excitación y respuesta del sistema, y  $u(t)$  es la señal escalón unitario.

Entonces, la forma más completa de clasificar el sistema definido por la Ecuación (1.48) es como un sistema:

- A) lineal, dinámico, causal, variante en tiempo y determinista;
- B) lineal, dinámico, causal, invariante en tiempo y determinista;
- C) no lineal, dinámico, causal, invariante en tiempo y determinista;
- D) incrementalmente lineal, dinámico, causal, variante en tiempo y determinista.

## EJERCICIOS PROPUESTOS

**1.6** Grafique las siguientes señales descritas a continuación.

$$\mathbf{a)} \quad x(t) = \text{máx}(0, \text{sen}(2t))u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{b)} \quad x(t) = \text{mín}(0, \text{sen}(2t))u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{c)} \quad x(t) = u(\text{sen}(2t))u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{d)} \quad x(t) = 1 - q_4(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

**1.7** Determine los correspondientes modelos matemáticos en el dominio discreto, que representen las secuencias de muestras extraídas de las siguientes señales definidas mediante los modelos matemáticos descritos a continuación, si las muestras son tomadas a intervalos regulares de valor  $h = \frac{1}{20}$  s

- a)  $x(t) = \max(0, \sin(2t))u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$
- b)  $x(t) = \min(0, \sin(2t))u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$
- c)  $x(t) = u(\sin(2t))u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$
- d)  $x(t) = 1 - q_4(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

**1.8** Sean los modelos matemáticos definidos en el dominio continuo, en donde  $x(t)$  e  $y(t)$  representan respectivamente las señales de excitación y respuesta del sistema objeto de estudio, y las cuales ambas señales dependen de la variable independiente continua  $t \in \mathbb{R}$ . Entonces, a qué tipo de sistema corresponde cada modelo matemático definido a continuación:

- a)  $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}.$
- b)  $y(t) = t \frac{dx(t)}{dt}.$
- c)  $\frac{dy(t)}{dt} = x(t) + 1.$
- d)  $\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 = x(t).$

**1.9** Sean los modelos matemáticos definidos en el dominio discreto, en donde  $x[n]$  e  $y[n]$  representan respectivamente las señales de excitación y respuesta del sistema objeto de estudio, y las cuales ambas señales dependen de la variable independiente discreta  $n \in \mathbb{Z}$ . Entonces, a qué tipo de sistema corresponde cada modelo matemático del sistema definido a continuación:

- a)  $y[n] = x[n] - x[n - 1].$
- b)  $y[n] - y[n - 1] = x[n].$
- c)  $y[n] - y[n - 1] = x[n + 1].$
- d)  $y[n] - y[n - 1] = n x[n].$



## CAPÍTULO 2

---

# ANÁLISIS DE SISTEMAS EN EL DOMINIO CONTINUO

---

Los modelos matemáticos son aproximaciones de nuestro bello universo. ¿Y es qué todo este universo maravilloso ha sido creado mediante modelos o es realmente un modelo?

—Ebert Brea

El estudio de la respuesta de los sistemas lineales, dinámicos, causales, invariantes en el dominio y deterministas (LDCID) en el dominio continuo, además de mostrar algunos elementos metodológicos que serán abordados, servirá de base para el entendimiento de la respuesta de sistemas LDCID en el dominio discreto, los cuales serán ampliamente mostrados en el siguiente capítulo de este libro.

Este capítulo está estructurado de acuerdo a las siguientes secciones: en la Sección 2.1 se presenta brevemente las principales características de los sistemas LDCID, a fin de identificar los principales elementos que deben ser considerados en la definición de un modelo matemático, además de como puede influir los puntos de vista en el modelaje de los sistemas; en la Sección 2.2 son estudiados los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales tanto para sistemas de primer orden como de orden superior, cuando el sistema es considerado lineal, dinámico, causal, invariante en el dominio y determinista (LDCID). Un concepto muy importante en el campo de la ingeniería eléctrica y que tiene amplias aplicaciones en el estudio de los sistemas de control es el concepto de respuesta impulsiva, el cual es tratado en la Sección 2.3 para el caso de sistemas LDCID, así como su respuesta a un escalón unitario, la cual es estudiada en la Sección 2.4. Finalmente, el lector dispondrá

de una sección de problemas y ejercicios propuestos a fin de reforzar los conocimientos adquiridos en el capítulo mediante la resolución de problemas y ejercicios.

## 2.1 SISTEMAS LINEALES, DINÁMICOS, CAUSALES, INVARIANTES EN TIEMPO Y DETERMINISTAS

Los sistemas lineales, dinámicos, causales, invariantes en el dominio y deterministas (LDCID) definidos en el dominio del tiempo continuo constituyen parte importante en el estudio de los sistemas eléctricos, debido al hecho de sus innumerables aplicaciones dentro de la ingeniería eléctrica.

En general podría decirse que los sistemas lineales son el resultado de aproximaciones en el modelaje de sistemas. No obstante, aun cuando los sistemas eléctricos forman parte de los llamados sistemas no lineales, su tratamiento como sistemas lineales permiten dar respuestas acertadas a las preguntas que pudiera requerir los profesionales del área. Es por esta razón que el estudio de los sistemas lineales ha abarcado una parte importante en la bibliografía especializada.

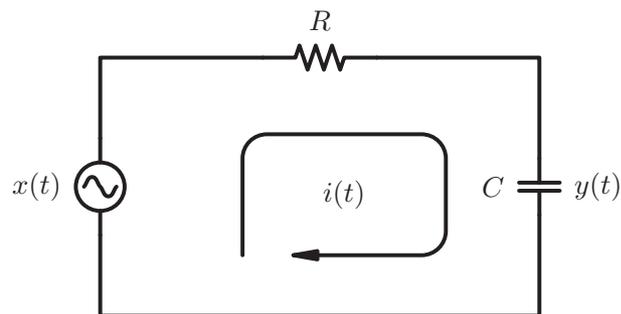
Por otra parte, los modelos matemáticos de sistemas dinámicos definidos en el dominio continuo presentan términos asociados a operaciones de derivadas de las cantidades externas con respecto a la variable independiente, que por lo general será el tiempo. Estos modelos matemáticos se denominan ecuaciones diferenciales, y sus respectivas respuestas son totalmente definidas por las condiciones de cada sistema representado por el modelo matemático.

Un aspecto que debe ser considerado en el modelaje de los sistemas es el propósito del modelo matemático, el cual debe reunir tanto su simplicidad como la exactitud de las respuestas que ofrezca a las preguntas que puede plantear el analista del sistema.

Al respecto, véase el siguiente ejemplo, el cual permite mostrar al menos dos puntos de vista que conducen a dos modelos matemáticos absolutamente diferentes.

### ■ EJEMPLO 2.1

Sea el sistema mostrado en la Figura 2.1, el cual corresponde a un sistema lineal, dinámico, causal y determinista (LDCD), donde  $x(t)$  representa la señal de excitación del sistema y la señal de respuesta corresponde a la diferencia de potencial eléctrico sobre el condensador, denotada como  $y(t)$ .



**Figura 2.1.** Diagrama esquemático de un sistema LDCID conformado por una resistencia y un condensador

Para el sistema descrito, determine su modelo matemático.

### Solución

De acuerdo a las leyes físicas, se conoce que

$$x(t) = v_R(t) + y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

donde  $x(t)$  es representa la señal de excitación,  $v_R(t)$  es la caída de la tensión eléctrica sobre la resistencia de valor  $R$ , y la señal de respuesta del sistema es denotada como  $y(t)$ , la cual mide la caída de tensión eléctrica en el capacitor de valor  $C$ .

Ahora se sabe que la cantidad de carga eléctrica  $q(t)$  que almacena el condensador viene dada por

$$q(t) = c(t)y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

donde  $c(t)$  denota la capacidad del condensador como función del tiempo.

Al derivar la Ecuación (2.2) en función del tiempo, se obtiene

$$\frac{dq(t)}{dt} = i(t) = c(t)\frac{dy(t)}{dt} + y(t)\frac{dc(t)}{dt}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

De acuerdo con la ley de Ohm, la caída de la tensión eléctrica sobre la resistencia es

$$v_R(t) = Ri(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Sustituyendo la Ecuación (2.3) en la Ecuación (2.4), se consigue

$$v_R(t) = Rc(t)\frac{dy(t)}{dt} + Ry(t)\frac{dc(t)}{dt}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Al sustituir la Ecuación (2.5) en la Ecuación (2.1), se obtiene

$$y(t) + Rc(t)\frac{dy(t)}{dt} + Ry(t)\frac{dc(t)}{dt} = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Reordenando los términos y suponiendo que tanto  $R > 0$  como  $c(t) > 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , se tiene que

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1 + R\frac{dc(t)}{dt}}{Rc(t)}y(t) = \frac{1}{Rc(t)}x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

Ahora, si se considera que la capacidad del condensador es constante, es decir,  $c(t) = C$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , la Ecuación (2.7) se simplifica a

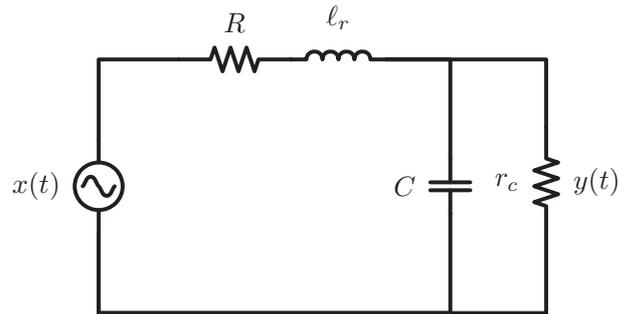
$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

Note que el modelo matemático definido por la Ecuación (2.8) es sustancialmente más simple que el modelo matemático dado por la Ecuación (2.7), debido al hecho de haber supuesto que la capacitancia del condensador es constante.

Es claro que ambos modelos matemáticos son válidos dentro del nivel de resolución con que son vistos. Sin embargo, la validez de los modelos matemáticos dependerá de las necesidades del analista del sistema.

Es oportuno mencionar que el modelo matemático definido por la Ecuación (2.7) corresponde a un modelo matemático de un sistema variante en tiempo, debido a que posee parámetros variables en el tiempo, mientras el modelo matemático expresado por la Ecuación (2.8) es invariante en tiempo, por contener parámetros constantes.

El lector podría estudiar el sistema de la Figura 2.1 bajo el supuesto de que la resistencia  $R$  contiene una inductancia parásita en serie de valor  $\ell_r$ , el capacitor  $C$  posee una resistencia en paralelo de valor  $r_c$ , la cual representa las pérdidas de carga eléctrica en el condensador, y este valor es medido en corriente directa (DC). Además, suponga que la capacitancia del condensador es variante en tiempo. La pregunta sería: ¿Cómo sería el modelo matemático del sistema?



**Figura 2.2.** Diagrama esquemático del sistema conformado por la resistencia y el condensador de la Figura 2.1, considerando elementos intrínsecos a la resistencia y el capacitor

La Figura 2.2 muestra el sistema RC de la Figura 2.1, bajo la óptica de que la resistencia contiene una inductancia parásita de valor  $\ell_r$  en serie a la resistencia de valor  $R$ ; y una resistencia parásita  $r_c$  en paralelo al condensador de valor  $C$ . Esta resistencia parásita produce una corriente de fuga en el condensador, y por tal motivo éste se descarga al estar incluso desconectado del sistema.

## 2.2 REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA DE LOS SISTEMAS LDCID

Los sistemas LDCID representados en el dominio continuo constituyen los más frecuentes sistemas con memoria, y es por eso que su representación matemática está dada por las ampliamente conocidas ecuaciones diferenciales. Ciertamente, los modelos matemáticos asociados a los sistemas dinámicos deben obedecer las leyes físicas o en general las leyes de la naturaleza, las cuales han sido estudiadas en diversos campos de las ciencias.

En esta sección se estudian los modelos matemáticos así como la resolución de ellos.

### 2.2.1 El modelo matemático y sus términos

Un aspecto importante a estudiar en la representación de un sistema a través de su modelo matemático es la identificación de los términos que son expresados en el modelo matemático de un sistema LDCID, el cual es representado por una ecuación diferencial ordinaria de orden  $m$ -ésimo en relación a la señal de excitación  $x(t)$ , y de orden  $n$ -ésimo con respecto a su señal de respuesta  $y(t)$ , es decir, en general un modelo matemático asociado a un sistema

LDCID viene dado por

$$\sum_{k=0}^n a_{n-k} \frac{d^{n-k} y(t)}{dt^{n-k}} = \sum_{k=0}^m b_{m-k} \frac{d^{m-k} x(t)}{dt^{m-k}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.9)$$

donde  $y(t)$  representa la señal de respuesta también denominada señal de salida,  $x(t)$  representa la señal de excitación o de entrada, y los coeficientes  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  y  $b_m, b_{m-1}, \dots, b_0$  representan los parámetros del sistema, que alteran respectivamente la señal de excitación y la señal de respuesta, así como sus derivadas ordinarias, y la variable independiente  $t$ , en este caso puede significar el tiempo, con el propósito de contextualizar el dominio en el cual está definido el modelo matemático. No obstante, la variable independiente puede representar cualquier otra variable continua, tal como el desplazamiento lineal, el desplazamiento angular cuando se refiere a la posición sobre un eje de giro, entre otras variables.

Por convención, la variable asociada a la señal de respuesta en esta obra es denotada por  $y(t)$ , y es expresada al lado izquierdo de la ecuación diferencial, mientras la señal de excitación es representada por  $x(t)$ , y es representada al lado derecho de la ecuación diferencial ordinaria.

## 2.2.2 Modelo matemático de primer orden

Un sistema LDCID en el dominio continuo de primer orden es representado mediante una ecuación diferencial dada por

$$\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

Note que el modelo debe ser de primer orden en lo que respecta a los operadores  $\frac{d^n y}{dt^n}$ , es decir, en mayor orden de derivadas de la señal de respuesta  $y(t)$  debe ser  $n = 1$ . Sin embargo, podría ser de cualquier orden con relación a los operadores de la excitación  $\frac{d^n x}{dt^n}$  para  $n \geq 0$ , debido al hecho de que las operaciones de derivadas sobre la señal de excitación no son consideradas parte del sistema. Por otra parte, los modelos matemáticos estudiados en esta obra serán de primer grado con relación a la señal de respuesta del sistema, debido al hecho de que se trata de sistemas LDCID.

Note que las operaciones definidas sobre la señal de excitación no forman parte del sistema, por cuanto las operaciones matemáticas definidas sobre la excitación constituyen el modelo matemático de la señal de excitación.

**2.2.2.1 Solución de los modelos matemáticos de primer orden** Como consecuencia de conocer la señal de excitación  $x(t)$ , las operaciones definidas al lado derecho de la Ecuación (2.10), siempre podrá ser determinada, proporcionando una nueva señal de excitación representada por

$$\tilde{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.11)$$

donde  $\tilde{x}(t)$  vendría a representar la nueva excitación.

Además, otra forma de ver el problema es aplicando la propiedad de superposición (véase Propiedad 1.2 en página 20), en virtud de que la respuesta del sistema puede ser

estudia ante una excitación dada por  $\frac{dx(t)}{dt}$ , luego ante una excitación  $b_0x(t)$ , para finalmente sumar la contribución de ambas respuestas como respuesta ante la excitación  $\tilde{x}(t)$ .

Sin embargo, por razones de simplificación en la nomenclatura y más teniendo en cuenta el recurso empleado a través de la Ecuación (2.11) o mediante la propiedad de superposición, se estudiará la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} + a_0y(t) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

Note que para obtener la solución del sistema debe conocerse al menos una condición de la respuesta del sistema, la cual usualmente es especificada a través de su condición inicial,  $y(0)$ .

Para obtener la solución de la ecuación diferencial dada por la Ecuación (2.12), se multiplicará ambos lados de la Ecuación (2.12) por una función  $f(t)$ , obteniéndose

$$f(t)\frac{dy(t)}{dt} + a_0f(t)y(t) = f(t)x(t), \quad \forall (t \geq 0) \in \mathbb{R}. \quad (2.13)$$

Por otra parte, se conoce que

$$f(t)\frac{dy(t)}{dt} + y(t)\frac{df(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[f(t)y(t)], \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.14)$$

Al comparar los lados izquierdos de las Ecuaciones (2.13) y (2.14), se tiene que sólo podrá afirmarse su equivalencia si se cumple que

$$y(t)\frac{df(t)}{dt} = a_0f(t)y(t), \quad \forall (t \geq 0) \in \mathbb{R}, \quad (2.15)$$

cuya solución es obtenida por integración entre 0 y  $t$  de la Ecuación (2.15), quedando entonces

$$\int_0^t \frac{df(\tau)}{f(\tau)} = a_0 \int_0^t d\tau,$$

la cual claramente tiene como solución

$$\ln[f(\tau)] \Big|_0^t = \ln[f(t)] - \ln[f(0)] = a_0t. \quad (2.16)$$

Al despejar el término  $f(t)$  de la Ecuación (2.16), se tiene

$$f(t) = f(0)e^{a_0t}, \quad (2.17)$$

donde  $f(0)$  puede tomar cualquier valor real.

Por otra parte, al comparar los lados derechos de las Ecuaciones (2.13) y (2.14), se tiene

$$\frac{d}{dt}[f(t)y(t)] = f(t)x(t) \quad (2.18)$$

Al aplicar la integral entre 0 y  $t$  a la Ecuación (2.18), se consigue

$$\int_0^t d[f(\tau)y(\tau)] = \int_0^t f(\tau)x(\tau)d\tau, \quad \forall t \geq 0,$$

cuya solución está dada por

$$f(t)y(t)\Big|_0^t = \int_0^t f(\tau)x(\tau)d\tau, \quad \forall t \geq 0, \quad (2.19)$$

donde  $f(t) = f(0)e^{a_0 t}$  es determinada por la Ecuación (2.17).

Reexpresando la Ecuación (2.19), se concluye que la solución a la ecuación diferencial representada por la Ecuación (2.12) viene dada por

$$y(t) = f(0)y(0)\frac{1}{f(t)} + \frac{1}{f(t)} \int_0^t f(\tau)x(\tau)d\tau, \quad \forall t \geq 0, \quad (2.20)$$

en donde al aplicar que  $f(t) = f(0)e^{a_0 t}$ , se tiene

$$y(t) = y(0)e^{-a_0 t} + e^{-a_0 t} \int_0^t e^{a_0 \tau} x(\tau)d\tau, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.21)$$

Es oportuno establecer una discusión del resultado mostrado por la Ecuación (2.21) en cuanto a sus principales componentes, y las cuales serán denotadas como:

a) respuesta transitoria

$$y_n(t) = y(0)e^{-a_0 t} \quad \forall t \geq 0, \quad (2.22a)$$

b) respuesta permanente

$$y_f(t) = e^{-a_0 t} \int_0^t e^{a_0 \tau} x(\tau)d\tau \quad \forall t \geq 0. \quad (2.22b)$$

Note que la respuesta transitoria o denominada también respuesta natural está influenciada por la condición inicial en la cual se encuentra el sistema, es decir,  $y(0)$ , y además no depende de la señal de excitación  $x(t)$ ; mientras la respuesta permanente o llamada en ocasiones respuesta forzada no es afectada por la condición inicial y depende de la señal de excitación.

Otra forma de expresar la Ecuación (2.21) es:

$$y(t) = y(0)e^{-a_0 t} + \int_0^t e^{-a_0(t-\tau)} x(\tau)d\tau, \quad \forall t \geq 0, \quad (2.23)$$

la cual tendrá un especial significado desde el punto de vista de la respuesta impulsiva de un sistema. Tema que será ampliamente tratado en la Sección 2.3.

### ■ EJEMPLO 2.2

La Figura 2.3 de la página 36 muestra un sistema compuesto por una resistencia y un capacitor, y cuyos valores son representados respectivamente por  $R$  y  $C$ . Además, la figura muestra que el sistema eléctrico es excitado por una señal  $x(t) = u(t)$  y su respuesta es medida a través de la tensión sobre el capacitor, donde  $u(t)$  representa la función escalón unitario.

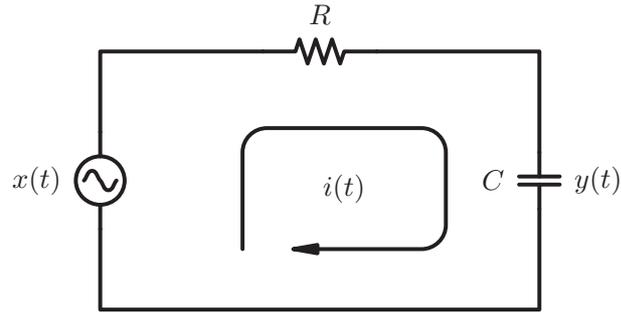


Figura 2.3. Sistema eléctrico RC

Para el sistema descrito, determine la respuesta del sistema representado por la figura.

### Solución

El modelo matemático asociado al sistema representado por la Figura 2.3 puede obtenerse empleando elementales ecuación de redes eléctricas. Es decir, al igualar la corriente  $i(t)$  que atraviesa la resistencia de valor  $R$  con la misma corriente que atraviesa el capacitor de magnitud  $C$ .

$$i(t) = \frac{x(t) - y(t)}{R} = C \frac{dy(t)}{dt}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.24)$$

Reordenando los términos de la Ecuación (2.24), se puede establecer que el modelo matemático asociado al sistema está dado por

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t), \quad \forall t \geq 0,$$

el cual al ser dividido por el factor  $RC$ , se tiene

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{1}{RC} x(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.25)$$

Entonces, al comparar el modelo matemático definido por la Ecuación (2.12) con el modelo obtenido, se tiene que el coeficiente  $a_0 = \frac{1}{RC}$  y la señal de excitación es  $\tilde{x}(t) = \frac{1}{RC} x(t)$ .

Al aplicar la solución expresada por medio de la Ecuación (2.21), se puede afirmar que

$$y(t) = y(0)e^{-t/RC} + \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \int_0^t e^{\tau/RC} u(\tau) d\tau, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.26)$$

Al operar la Ecuación (2.26) se tiene que la respuesta del sistema es dada por

$$y(t) = y(0)e^{-t/RC} + (1 - e^{-t/RC})u(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (2.27)$$

Note que

$$y(0^+) = \lim_{t \downarrow 0} y(t) = y(0), \quad (2.28)$$

por cuanto el elemento de memoria representado por el capacitor no permite cambios bruscos y por tal motivo  $y(0^-) = y(0) = y(0^+)$ . Además, para buscar una respuesta a la pregunta debe tomarse en cuenta que la excitación tiene un valor de cero y ella ha permanecido en cero desde mucho tiempo atrás, es decir, desde menos infinito, obviamente  $y(0) = 0$ .

Por otra parte, al determinar el límite de  $y(t)$  cuando  $t$  tiende a infinito se puede afirmar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [y(0)e^{-t/RC} + (1 - e^{-t/RC})u(t)] = 1.$$

### ■ EJEMPLO 2.3

Para el sistema representado por la Figura 2.3, suponga que el sistema es excitado por una señal escalón unitario desplazada en  $t_0$  unidades de tiempo, es decir,  $x(t) = u(t - t_0)$ .

#### Solución

A objeto de encontrar la solución al problema planteado, debe analizarse la Ecuación (2.18) de la página 34, la cual al ser integrada entre 0 y  $t$ , y considerando que la señal de excitación es  $\tilde{x}(t) = \frac{1}{RC}x(t)$ , se tienen dos posibles casos.

#### Caso 1: $t \leq t_0$

$$\int_0^t d[f(\tau)y(\tau)] = \int_0^t f(\tau)\tilde{x}(\tau)d\tau, \quad (2.29)$$

donde  $f(t) = f(0)e^{a_0 t}$ .

De la Ecuación (2.29) se tiene

$$f(t)y(t) = f(0)y(0) + \int_0^t f(\tau)\tilde{x}(\tau)d\tau,$$

la cual su solución se obtiene fácilmente debido al hecho de que  $x(t) = 0$  para  $0 < t < t_0$ , y en consecuencia

$$y(t) = y(0)e^{-a_0 t}, \quad (2.30)$$

donde  $a_0 = \frac{1}{RC}$ , y si el condensador está descargado como consecuencia de estar la señal  $\tilde{x}(t)$  en cero desde menos infinito, entonces  $y(t) = 0$  para  $0 \leq t \leq t_0$ .

#### Caso 2: $t > t_0$

De la Ecuación (2.15), se obtiene que al integrarla entre  $t_0^+$  y  $t$

$$\int_{t_0^+}^t \frac{df(t)}{f(t)} = \int_{t_0^+}^t a_0 dt. \quad (2.31)$$

$$\ln[f(\tau)] \Big|_{t_0^+}^t = \ln[f(t)] - \ln[f(t_0^+)] = a_0(t - t_0^+). \quad (2.32)$$

Al despejar  $f(t)$  de la Ecuación (2.32)

$$f(t) = f(t_0^+)e^{a_0(t-t_0^+)}. \quad (2.33)$$

Por otra parte, de la Ecuación (2.30) se puede asegurar que

$$y(t_o^+) = y(0) e^{-a_0 t_o^+}. \quad (2.34)$$

Aplicando la Ecuación (2.18) y considerando que  $x(t) = \tilde{x}(t)$ , se obtiene que para el caso bajo estudio

$$f(t)y(t) = f(t_o^+)y(t_o^+) + \int_{t_o^+}^t f(\tau)\tilde{x}(\tau)d\tau, \quad (2.35)$$

Aplicando las Ecuaciones (2.33) y (2.34) en la Ecuación (2.35) se consigue que

$$y(t) = y(0)e^{-a_0 t} + e^{-a_0(t-t_o^+)} \int_{t_o^+}^t e^{a_0(\tau-t_o^+)} \tilde{x}(\tau)d\tau, \quad (2.36)$$

donde  $\tilde{x}(\tau) = 1/RC$  en virtud que se está analizando en intervalo  $t > t_o$ .

Como resultado de los casos analizados se tiene que

$$y(t) = \begin{cases} y(0)e^{-t/RC} & \forall 0 < t < t_o, \\ y(0)e^{-t_o/RC} & \forall t = t_o, \\ y(0)e^{-t/RC} + \frac{1}{RC} e^{-(t-t_o^+)/RC} \int_{t_o^+}^t e^{(\tau-t_o^+)/RC} d\tau & \forall t > t_o. \end{cases} \quad (2.37)$$

Quedando finalmente de la Ecuación (2.37) que

$$y(t) = \begin{cases} y(0)e^{-t/RC} & \forall 0 < t < t_o, \\ y(0)e^{-t_o/RC} & \forall t = t_o, \\ y(0)e^{-t/RC} + (1 - e^{-(t-t_o)/RC}) & \forall t > t_o. \end{cases} \quad (2.38)$$

Note que la Ecuación (2.38) puede ser reexpresada como

$$y(t) = y(0)e^{-t/RC} + [1 - e^{-(t-t_o)/RC}]u(t-t_o), \quad \forall t > 0. \quad (2.39)$$

#### ■ EJEMPLO 2.4

Para el sistema representado por la Figura 2.3, suponga nuevamente que el sistema es excitado por una señal escalón unitario desplazada en  $t_o = 5$  s, es decir,  $x(t) = u(t-5)$ , y suponga además un valor de  $R = 1 \text{ M}\Omega$ , y un valor de  $C = 4,7 \text{ }\mu\text{F}$ .

Para esto emplee el Scilab™ con el propósito de representar gráficamente la respuesta del sistema (Campbell *et al.*, 2006).

#### Solución

La solución a través del Scilab™ se obtiene mediante los siguientes comandos editados sobre la consola del Scilab™:

La Figura 2.4 de la página 39 muestra los comandos en Scilab™ empleados para obtener las representaciones gráficas de la respuesta del sistema ante una excitación  $u(t-t_o)$ . Note que al asignar a  $t_0$  los valores de 0 y 5, se obtienen las respuestas respectivamente ante  $u(t)$  y  $u(t-5)$ . Además, observe que la función escalón unitario

```

-->a=1/(1e6*4.7e-6);
-->t0=5;
-->tf=t0+25;
-->function ydot=f(t,y),
-->ydot=-1*a*y+a*0.5*(1+sign(t-t0)),
-->endfunction
-->y0=0;ti=t0;t=t0:0.1:tf;
-->y=ode(y0,ti,t,f);
-->plot(t,y);
-->a=get("current_axes");
-->a.x_label.text="t";
-->a.y_label.text="y(t)";
    
```

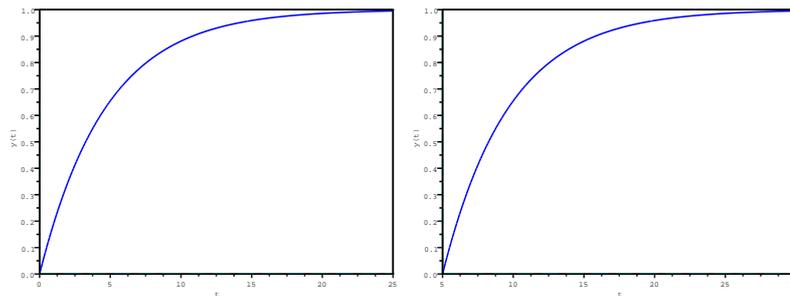
**Figura 2.4.** Comandos Scilab™ para para la solución del Ejemplo 2.4

se modeló mediante,

$$u(t) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn}(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.40)$$

donde

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & \forall t > 0; \\ -1, & \forall t < 0. \end{cases} \quad (2.41)$$



(a) Respuesta ante  $u(t)$

(b) Respuesta ante  $u(t-5)$

**Figura 2.5.** Respuesta del sistema ante:(a)  $u(t)$  y (b)  $u(t-5)$

La Figura 2.5 muestra ambas respuestas, las cuales corroboran que el sistema es invariante en tiempo. Además, la respuesta mostrada por la Ecuación (2.39), la

cual fue obtenida por medios analíticos, verifica la correcta solución reportada por el Scilab™.

Nótese que la forma de la señal de respuesta correspondiente a la producida como consecuencia de la excitación  $u(t-5)$  mostrada en la Figura 2.5(b), es la misma forma a la respuesta generada por la excitación  $u(t)$ , y cuya respuesta es representada por la Figura 2.5(a), con la excepción del desplazamiento de una respuesta con relación a la otra. Este hecho es debido a que el sistema es invariante en tiempo, en el sentido de la Definición 1.27 de la página 22.

### 2.2.3 Modelo matemático de orden superior

En este apartado se introducirá el operador  $p$ , el cual será empleado para representar el orden de la derivada que está operando en cada término de la ecuación diferencial ordinaria bajo estudio.

**Definición 2.1 (Operador  $p$ )** Se define el operador  $p^n$  al operador diferencial que representa la derivada  $n$ -ésima con respecto a la variable del dominio continuo. Es decir,

$$p^n = \frac{d^n}{dt^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.42)$$

Por otra parte, se debe introducir dos definiciones que conforman la solución completa de una ecuación diferencial ordinaria.

**Definición 2.2 (Respuesta transitoria)** La respuesta transitoria o, también denominada natural o solución homogénea, es la solución de toda ecuación diferencial ordinaria cuando su señal de excitación viene definida por la función nula, es decir, la función cuyo valor de rango es cero para todo su dominio, la cual al denotarla como  $N(t)$ , ésta viene definida por

$$N(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.43)$$

**Definición 2.3 (Respuesta permanente)** La respuesta permanente o, también denominada forzada o solución particular, es la solución de la ecuación diferencial ordinaria ante una señal de excitación que actúa sobre el sistema.

**Observación 2.1** La respuesta transitoria, natural u homogénea es intrínseca del sistema y no de la excitación, a diferencia de que la respuesta permanente, forzada o particular, que además de depender del sistema, depende de la excitación.

Un aspecto semántico que es oportuno mencionar son los calificativos de transitoria, natural u homogénea y, permanente, forzada o particular, los cuales forman parte del léxico empleado en la ingeniería, la física y las matemáticas, respectivamente. En esta obra serán empleados los diferentes términos con el propósito de emplear las diversas denominaciones empleadas en las ciencias, incluyendo a la ingeniería en ella.

**Definición 2.4 (Respuesta completa o solución completa)** Es la conformada por la suma de la respuesta transitoria y la respuesta permanente.

El problema es planteado en los siguientes términos:

**Problema 2.1** Sea un sistema LDCID, el cual cuenta con un modelo matemático definido por la ecuación diferencial ordinaria

$$\sum_{k=0}^n a_{n-k} \frac{d^{n-k} y(t)}{dt^{n-k}} = \sum_{k=0}^m b_{m-k} \frac{d^{m-k} x(t)}{dt^{m-k}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.44)$$

donde  $y(t)$  representa la señal de respuesta del sistema o también llamada señal de salida;  $x(t)$  significa la señal de excitación o denominada alternativamente señal de entrada; los coeficientes  $a_i$  para todo  $i = 1, \dots, n-1$  conforman los parámetros del sistema y los coeficientes  $b_i$  para todo  $i = 1, \dots, m-1$  representan los parámetros asociados a la señal de excitación. Es importante indicar que usualmente el coeficiente  $a_n$  es igual a uno.

Además, se conoce  $n$  condiciones del sistema, bien sean condiciones iniciales a través del valor de la respuesta  $y(t)$  para  $t = 0$  y sus primeras  $n-1$  derivadas para  $t = 0$ , o  $n$  valores conocidos de la respuesta completa  $y(t)$  en  $n$  distintos instantes de  $t$ , o combinación de lo anterior.

Para emplear los métodos que serán descritos a continuación, se debe aplicar el operador  $p$  introducido en la Definición 2.1, en donde al ser aplicado a la Ecuación (2.44), se tiene que

$$\sum_{k=0}^n a_{n-k} p^{n-k} y(t) = \sum_{k=0}^m b_{m-k} p^{n-k} x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.45)$$

donde el coeficiente o también denominado parámetro  $a_n = 1$ .

$$D(p) = \sum_{k=0}^n a_{n-k} p^{n-k}. \quad (2.46a)$$

$$N(p) = \sum_{k=0}^m b_{m-k} p^{n-k}. \quad (2.46b)$$

Aplicando las Ecuaciones (2.46), se puede escribir el modelo matemático definido por la Ecuación (2.45) como:

$$D(p)y(t) = N(p)x(t), \quad (2.47)$$

donde  $D(p)$  es el ampliamente conocido polinomio característico del sistema.

**2.2.3.1 Respuesta transitoria** Existen diversos métodos para determinar la respuesta de un modelo matemático asociado a un sistema LDCID en el dominio continuo, el cual es representado por una ecuación diferencial ordinaria (Varona Malumbres, 1996). El estudio de la solución al Problema 2.1 será introducido a través del siguiente método, donde su fundamento es ampliamente estudiado en la literatura asociada a las ecuaciones diferenciales ordinarias (Thomas, 1976, Capítulo 20).

**Método 2.1 (Determinación de la Respuesta Transitoria)** Dada la ecuación diferencial ordinaria definida por la Ecuación (2.44), ejecute:

*Paso 1.* Asegúrese de que el término  $a_n$  de la ecuación diferencial sea igual a uno. Si no es así, divida toda la ecuación diferencial entre  $a_n$ .

*Paso 2.* Aplique el operador “ $p$ ” a la ecuación diferencial.

*Paso 3. Determine las  $n$  raíces que anulen el polinomio  $D(p)$  y denote las raíces reales como  $r_i$  para cada  $i = 1, \dots, n_r$ , y las raíces complejas conjugadas<sup>5</sup> como  $z_i = \alpha_i \pm j\beta_i$  para cada  $i = n_r + 1, \dots, n$ , donde  $0 \leq n_r \leq n$ , tomando en cuenta la multiplicidad de cada una de las raíces denotada como  $m_i$ .*

*Paso 4. Para cada raíz obtenida, construya la solución homogénea del problema de acuerdo a la siguiente regla:*

- para cada  $i$ -ésima raíz real simple  $r_i$ , asocie una solución de la forma  $y_i(t) = e^{r_i t}$ ;*
- para cada  $i$ -ésima raíz real  $r_i$  de multiplicidad  $m_i$ , asocie un conjunto de soluciones dada por  $y_{i,m_i}(t) = t^{m_i - k_i} e^{r_i t}$  para todo  $k_i = 1, \dots, m_i$ ;*
- para cada  $i$ -ésimo par de raíces complejas conjugadas simples  $z_i = \alpha_i \pm j\beta_i$ , asocie un par de soluciones  $y_i^{[c]}(t) = e^{\alpha_i t} \cos(\beta_i t)$  y  $\bar{y}_i^{[c]}(t) = e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t)$ ;*
- para cada  $i$ -ésimo par de raíces complejas conjugadas  $z_i = \alpha_i \pm j\beta_i$  de multiplicidad  $m_i$ , asocie un conjunto de parejas de soluciones definidas por  $y_{i,m_i}^{[c]}(t) = t^{m_i - k_i} e^{\alpha_i t} \cos(\beta_i t)$  y  $\bar{y}_{i,m_i}^{[c]}(t) = t^{m_i - k_i} e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t)$  para todo  $k_i = 1, \dots, m_i$ .*

*Paso 5. Expresé la suma ponderada de las soluciones obtenidas en el Paso 4, es decir,*

$$y_h(t) = \sum_{i \in \arg(r_i)} c_i y_i(t) + \sum_{i \in \arg(r_i^{[m_i]})} c_i y_{i,m_i}(t) + \sum_{i \in \arg(z_i)} c_i y_i^{[c]}(t) + \sum_{i \in \arg(z_i)} c_i \bar{y}_i^{[c]}(t) + \sum_{i \in \arg(z_i^{[m_i]})} c_i y_{i,m_i}^{[c]}(t) + \sum_{i \in \arg(z_i^{[m_i]})} c_i \bar{y}_{i,m_i}^{[c]}(t),$$

donde  $i \in \arg(\cdot)$  representa los subíndices que están asociados a las raíces: reales simples ( $r_i$ ), reales de multiplicidad  $m_i$  ( $r_i^{[m_i]}$ ), complejas conjugadas simples ( $z_i$ ) y complejas conjugadas de multiplicidad  $m_i$  ( $z_i^{[m_i]}$ ).

### ■ EJEMPLO 2.5 Respuesta transitoria de un sistema de quinto orden

Suponga el modelo matemático de un sistema LDCID en tiempo continuo definido por

$$2 \frac{d^5 y(t)}{dt^5} + 20 \frac{d^4 y(t)}{dt^4} + 78 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 152 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 156 \frac{dy(t)}{dt} + 72y(t) = x(t), \quad (2.48)$$

donde  $y(t)$  es la señal de respuesta del sistema, y  $x(t)$  representa la señal de excitación. Para el modelo matemático definido mediante la Ecuación (2.48), determine la solución homogénea del sistema aplicando el Método 2.1.

<sup>5</sup>El símbolo  $j$  representa la unidad imaginaria.

**Solución**

Debido a que el término  $a_5 \neq 1$ , se debe dividir toda la ecuación diferencial entre  $a_5$ , para luego aplicar el operador  $p$ , obteniéndose

$$D(p) = p^5 + 10p^4 + 39p^3 + 76p^2 + 78p + 36.$$

Al calcular las cinco raíces que anulan  $D(p)$ , se tiene que sus raíces son:  $r_1 = -2$ ,  $r_2^{[2]} = -3$  y  $z_3 = -1 \pm j$ . Entonces, se puede afirmar que las soluciones asociadas a cada raíz viene dada por

$$y_h(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + c_3 t e^{-3t} + c_4 e^{-t} \cos(t) + c_5 e^{-t} \sin(t).$$

Observe que empleando el Scilab™ se puede corroborar las raíces del polinomio  $N(p)$  a través de los comandos mostrados en la Figura 2.6, los cuales son indicados por la señal de espera de comando -->.

```
-->D=poly([36 78 76 39 10 1], 'p', 'c')
D =
      2      3      4      5
      36 + 78p + 76p + 39p + 10p + p

-->z=roots(D)
z =
- 1. + i
- 1. - i
- 2.
- 3. + 9.483D-08i
- 3. - 9.483D-08i
```

**Figura 2.6.** Comandos Scilab™ para el cálculo de las raíces para un polinomio de quinto grado

Note que en la Figura 2.6 se muestra un reporte Scilab™, en el cual las raíces complejas  $-3. + 9.483D-08i$  y  $-3. - 9.483D-08i$ , pueden ser consideradas como  $-3.$  y  $-3.$ , por cuanto el resultado Scilab™  $9.483D-08$  representa  $9,483 \times 10^{-8}$  lo que puede ser interpretado como 0, si se compara con la parte real de la raíz. Por otra parte, al hacer la consideración anterior, se tiene entonces una raíz real doble.

**2.2.3.2 Respuesta permanente** Considere nuevamente el Problema 2.1 de la página 40, cuya representación mediante el operador  $p$  es mostrado por la Ecuación (2.47) de la página 41.

Al despejar  $y(t)$  de la Ecuación (2.47) se tiene que

$$y(t) = \frac{N(p)}{D(p)} x(t), \quad (2.49)$$

donde la fracción  $\frac{N(p)}{D(p)}$  representa el operador del sistema  $L(p)$ .

A fin de estudiar el caso más general de las señales de excitaciones más comúnmente presente en los sistemas eléctricos, se analizará cuando la señal de excitación es considerada una exponencial definida por

$$x(t) = B e^{st}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.50)$$

donde en general  $s \in \mathbb{C}$  es un parámetro o coeficiente complejo, y cuyo valor es  $s = \sigma + j\omega$ , y  $B \in \mathbb{R}$  es un parámetro constante de la señal de excitación.

Por otra parte, los casos en los cuales pueden ser aplicado el método que será descrito en este punto, corresponden a aquellos en donde  $D(s) \neq 0$ .

La Ecuación (2.50) permite representar diversas situaciones para la señal de excitación  $x(t)$  cuando  $D(s) \neq 0$ , y cuyos casos son mostrados a continuación mediante la Tabla 2.1 de la página 44.

**Tabla 2.1.** Operaciones a ejecutar sobre  $L(s)Be^{st}$

Caso de $x(t)$	Valores de $s$ y operación		
	$\sigma$	$\omega$	$y_f(t)$
$e^{\sigma t}u(t)$	-	0	$L(p)Be^{pt} _{p=s}u(t)$
$\cos(\omega t)u(t)$	0	-	$\text{Re} [L(p)Be^{pt} _{p=s}]u(t)$
$\text{sen}(\omega t)u(t)$	0	-	$\text{Im} [L(p)Be^{pt} _{p=s}]u(t)$
$e^{\sigma t} \cos(\omega t)u(t)$	-	-	$\text{Re} [L(p)Be^{pt} _{p=s}]u(t)$
$e^{\sigma t} \text{sen}(\omega t)u(t)$	-	-	$\text{Im} [L(p)Be^{pt} _{p=s}]u(t)$

Es importante hacer notar que la operación  $L(p)Be^{pt}|_s$  se ejecuta mediante la operación límite, es decir,

$$L(p)Be^{pt}|_s = \lim_{p \rightarrow s} L(p)Be^{pt}.$$

En el caso en que  $D(s) = 0$ , la respuesta permanente se basará en el mismo principio definido por la Tabla 2.1, con la particularidad de que,  $L(p)Be^{pt}$  debe evaluarse a través de

$$L(p)Be^{pt}|_{p=s} = \lim_{p \rightarrow s} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{(m-1)}}{dp^{(m-1)}} [(p-s)^m L(p)Be^{pt}], \quad (2.51)$$

donde  $m$  es el grado de multiplicidad de la raíz  $s$ , para luego extraer la parte real o imaginaria, o su valor en sí, dependiendo de los casos definido por el tipo de señal de excitación. No obstante, este caso será ampliamente explicado en el estudio de respuesta de sistema por transformada de Laplace, en el cual se emplea el método de residuos para la determinación de la transformada inversa de Laplace.

**Observación 2.2 (Respuesta particular ante un escalón unitario)** *En el caso que la excitación sea considerada la señal escalón unitario, la respuesta permanente puede ser obtenida aplicando una señal de excitación dada por  $x(t) = e^{\sigma t}u(t)$ , y luego determinar el límite de la respuesta permanente cuando  $\sigma$  tiende a cero, dado que*

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} e^{\sigma t}u(t) = u(t).$$

*No obstante, la respuesta permanente ante una señal escalón unitaria puede ser calculada mediante la obtención de la respuesta particular o permanente de la ecuación diferencial cuando la excitación  $x(t) = 1$ , para todo  $t > 0$ .*

■ EJEMPLO 2.6

Considere un sistema LDCID con modelo matemático definido por

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 8\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 19\frac{dy(t)}{dt} + 12y(t) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.52)$$

Para el sistema representado por la Ecuación (2.52), determine la respuesta permanente del sistema si la señal de excitación  $x(t) = 4e^{-5t}u(t)$ .

**Solución**

Dado que el coeficiente  $a_3$  es igual a uno, se puede aplicar el operador  $p$  a la Ecuación (2.52) obteniéndose

$$[p^3 + 8p^2 + 19p + 12]y(t) = 4e^{-5t}u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Aplicando el caso cuando la señal de excitación es  $e^{\sigma t}u(t)$  de la Tabla 2.1, se obtiene

$$y_f(t) = \frac{1}{p^3 + 8p^2 + 19p + 12} \Big|_{-5} 4e^{-5t}u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$y_f(t) = \frac{1}{-8} 4e^{-5t}u(t) = -\frac{1}{2}e^{-5t}u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.53)$$

**2.2.3.3 Respuesta completa** La respuesta completa del sistema se consigue sumando la respuesta transitoria u homogénea con la respuesta permanente o solución particular, es decir

$$y(t) = y_h(t) + y_f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.54)$$

donde los coeficientes  $c_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$  se obtiene de  $n$  condiciones conocidas, en concordancia con el grado de la ecuación característica  $N(p)$ , es decir, los coeficientes  $c_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$  son determinados por el conocimiento de

$$\frac{d^i y(t)}{dt^i} \Big|_{t_i}, \quad \forall i = 0, \dots, (n-1), \quad (2.55)$$

donde  $t_i$  es usualmente cero por la derecha ( $0^+$ ) para todo  $i = 1, \dots, n$ .

No obstante, los coeficientes  $c_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$  también pueden determinarse a través del conocimiento de la señal de respuesta en  $n$  diferentes valores de  $t$ . Es decir,

$$y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_n), \quad (2.56)$$

donde  $t_1 \neq t_2 \neq \dots \neq t_n$ .

De las condiciones dadas por la Ecuación (2.55) o la Ecuación (2.56), puede formularse un sistema de  $n$  ecuaciones lineales simultáneas, cuya solución aporta los coeficientes  $c_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

■ EJEMPLO 2.7

Considere nuevamente el Ejemplo 2.6 y cuyo modelo matemático del sistema LDCID viene definido por la Ecuación (2.52). El problema ahora es hallar la respuesta com-

pleta del sistema, bajo las condiciones:  $y(t)|_0 = 0$ ,  $\frac{dy(t)}{dt}|_0 = 0$  y  $\frac{d^2y(t)}{dt^2}|_0 = 1$ .

### Solución

Claramente se tiene que el término  $a_3 = 1$ , hecho que permite aplicar el operado  $p$  directamente a la Ecuación (2.52), arrojando el polinomio característico  $D(p) = p^3 + 8p^2 + 19p + 12$ , y cuyas raíces que lo anulan son  $r_1 = -1$ ,  $r_2 = -3$  y  $r_3 = -4$ .

Este cálculo puede ser también realizado mediante el Scilab™, y cuyos comandos son presentados en la Figura 2.7.

```
-->D1=poly([12 19 8 1], 'p', 'c')
D1 =
      2      3
    12 + 19p + 8p + p

-->z=roots(D1)
z =
- 1.
- 3.
- 4.
```

**Figura 2.7.** Comandos Scilab™ para el cálculo de las raíces para un polinomio de tercer grado

Como consecuencia del análisis hecho, se tiene que la solución homogénea está dada por

$$y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} + c_3 e^{-4t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.57)$$

De las Ecuaciones (2.53) y (2.57) se puede afirmar que la solución completa es

$$y(t) = \left[ c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} + c_3 e^{-4t} - \frac{1}{2} e^{-5t} \right] u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.58)$$

Ahora, al calcular  $y(t)|_0$ ,  $\frac{dy(t)}{dt}|_0$  y  $\frac{d^2y(t)}{dt^2}|_0$  a través de la Ecuación (2.58), e igualando cada expresión de acuerdo a las condiciones dadas se tiene

$$y(t)|_0 = c_1 + c_2 + c_3 - \frac{1}{2} = 0. \quad (2.59a)$$

$$\frac{dy(t)}{dt}|_0 = -c_1 - 3c_2 - 4c_3 + \frac{5}{2} = 0. \quad (2.59b)$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}|_0 = c_1 + 9c_2 + 16c_3 - \frac{25}{2} = 1. \quad (2.59c)$$

De la Ecuaciones (2.59) se puede expresar el sistema de ecuaciones lineales en su forma implícita

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -4 \\ 1 & 9 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 5/2 \\ -27/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

Al resolver el sistema de ecuaciones lineales definido por la Ecuación (2.60) se obtiene que  $c_1 = 1/3$ ,  $c_2 = -3/2$  y  $c_3 = 5/3$ , los cuales al ser sustituido en la Ecuación (2.58) se llega a

$$y(t) = \left[ \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-3t} + \frac{5}{3}e^{-4t} - \frac{1}{2}e^{-5t} \right] u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.61)$$

Note que la Ecuación (2.61) satisfacen las condiciones establecidas en el ejemplo, es decir, los valores de  $y(t)|_0$ ,  $\frac{dy(t)}{dt}|_0$  y  $\frac{d^2y(t)}{dt^2}|_0$ .

Es importante destacar que el Scilab™ define el sistema de ecuaciones lineales de manera implícita, es decir,

$$\mathbf{A}\mathbf{c} + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (2.62)$$

donde  $\mathbf{A}$  es la matriz cuadrada del sistema de ecuaciones;  $\mathbf{c}$  es el vector solución que debe satisfacer el sistema de ecuaciones;  $\mathbf{b}$  representa el vector de términos independientes; y  $\mathbf{0}$  es el vector nulo.

De acuerdo a esto, entonces el sistema de ecuaciones dado por la Ecuación (2.60) es introducido en el Scilab™ según lo mostrado en la Figura 2.8.

```
-->A=[1, 1, 1; -1, -3, -4; 1, 9, 16];
-->b=[-1/2; 5/2; -27/2];
-->[c, kerA]=linsolve(A, b)
kerA =
[]
c =
0.3333333
- 1.5
1.6666667
```

**Figura 2.8.** Comandos Scilab™ para la resolución del sistemas de ecuaciones lineales

### 2.3 RESPUESTA IMPULSIVA DE SISTEMAS LDCID

Una de las características más relevante de los sistemas LDCID definidos en el dominio continuo es su denominada respuesta impulsiva, la cual representa la respuesta de un sistema ante una excitación definida por un impulso unitario<sup>6</sup> o también conocida función delta de Dirac (Brea, 2006, Capítulo 1), bajo el supuesto de que el sistema está en condiciones iniciales de cero justo antes de aplicar el impulso unitario. En esta sección se estudiará la respuesta impulsiva para sistemas LDCID definidos en el dominio continuo de primer orden y de orden superior.

<sup>6</sup>Un impulso en el dominio continuo se dice ser unitario o de magnitud unitaria si su área es igual a uno, es decir, si  $\int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$ .

No obstante, antes de introducir el tema, se enunciará una definición formal de lo que significa respuesta impulsiva de un sistema LDCID en el dominio continuo.

**Definición 2.5 (Respuesta impulsiva)** *Sea un sistema LDCID definido en el dominio continuo y de orden  $n$  descrito por*

$$\sum_{k=0}^n a_{n-k} \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} y(t) = b_0 x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.63)$$

donde  $x(t)$  e  $y(t)$  representan respectivamente las señales de excitación y respuesta del sistema.

Se denomina respuesta impulsiva del sistema LDCID en el dominio continuo de orden  $n$ , la cual se denotará como  $h(t)$ , a la respuesta del sistema ante una señal excitación  $x(t)$  dada por un impulso unitario y bajo el supuesto de que las condiciones iniciales del sistema justo antes de aplicar el impulso  $\delta(t)$ , es decir, en  $t = 0^-$  son todas iguales a cero. En términos matemáticos, cuando las condiciones  $\left. \frac{d^{n-k}[y(t)]}{dt^{n-k}} \right|_{0^-} = 0$  para todo  $k = 1, \dots, n$ .

### 2.3.1 Respuesta impulsiva de sistemas LDCID de primer orden

Sea un sistema LDCID definido en el dominio continuo de primer orden, el cual cuenta el modelo matemático

$$\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.64)$$

donde  $x(t)$  e  $y(t)$  son respectivamente las señales de excitación y respuesta del sistema.

Suponga que para los efectos del estudio de la respuesta impulsiva, las condiciones del sistema en  $0^-$ , es decir, para el instante justo antes de  $t = 0$ , es conocida y será denotada por

$$y_{0^-} = y(0^-) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} y(-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \uparrow 0} y(\varepsilon)$$

A objeto de estudiar la respuesta impulsiva del sistema debe determinarse las condiciones del sistema en el instante justo después de cero, es decir, la respuesta del sistema ante un impulso unitario para  $t = 0^+$ , y con esta condición determinar la respuesta del sistema para  $t > 0$ , en cuyo caso la excitación es igual a cero y su respuesta sería dada por la respuesta natural, transitoria u homogénea del sistema.

#### Caso 1: $0^- < t < 0^+$

En virtud de que se considera que el sistema es excitado por un impulso unitario, se tiene que

$$\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 \delta(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.65)$$

donde  $\delta(t)$  es la función impulso unitario o función delta de Dirac de magnitud tal que su área es uno.

Al multiplicar la Ecuación (2.65) por  $dt$  e integrarla entre  $0^-$  y  $0^+$ , se tiene

$$\int_{0^-}^{0^+} \underset{(A)}{d[y(t)]} + a_0 \int_{0^-}^{0^+} \underset{(B)}{y(t)dt} = b_0 \int_{0^-}^{0^+} \underset{(C)}{\delta(t)dt}. \quad (2.66)$$

Al estudiar los términos denotadas como (A), (B) y (C) de la Ecuación (2.66), se tiene que el término (A) arroja como resultado  $y(0^+) - y(0^-)$ , el término (B) converge a cero,

aun cuando la señal  $y(t)$  pueda presentar discontinuidad en  $y = 0$  por cuanto el sistema es físicamente realizable y su respuesta no debe contener términos impulsivos, y finalmente el término (C) converge a  $b_0$  debido al hecho de que  $\int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$  (Brea, 2006, Capítulo 1).

En consecuencia,

$$y(0^+) = y(0^-) + b_0. \quad (2.67)$$

Ahora, como el sistema se supone que está en condiciones iniciales de cero en el instante  $t = 0^-$ , se tiene que de la Ecuación (2.67)

$$y(0^+) = b_0. \quad (2.68)$$

### Caso 2: $t > 0$

Para este caso, el modelo matemático asociado es

$$\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

el cual obviamente la solución se obtiene al multiplicar la ecuación por  $dt$ , integrándola entre  $0^+$  y  $t$ , y reemplazando la variable nuda  $t$  por  $\tau$ .

$$\int_{0^+}^t \frac{d[y(\tau)]}{y(\tau)} = -a_0 \int_{0^+}^t d\tau,$$

la cual arroja

$$\ln[y(t)] - \ln[y(0^+)] = -a_0 t, \quad (2.69)$$

y al despejar  $y(t)$  de la Ecuación (2.69), y al emplear la Ecuación (2.68) se tiene que

$$h(t) = y(t) = b_0 e^{-a_0 t} u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.70)$$

donde  $h(t)$  denote la respuesta impulsiva del sistema.

### 2.3.2 Respuesta impulsiva de sistemas LDCID de orden superior

Considere el sistema LDCID definido en el dominio continuo de orden superior definido por la Ecuación (2.63), es decir,

$$\sum_{k=0}^n a_{n-k} \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} y(t) = b_0 x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.71)$$

donde  $x(t)$  e  $y(t)$  representan respectivamente las señales de excitación y respuesta del sistema, y el coeficiente  $a_n = 1$ , sin que este último hecho no haga perder la generalidad de lo que se estudiará.

De acuerdo con la Definición 2.3.1, las condiciones iniciales del sistema, a los efectos de obtener su respuesta impulsiva, en el instante justo antes de cero, son todas iguales a cero, esto es,  $\left. \frac{d^{n-k}[y(t)]}{dt^{n-k}} \right|_{0^-} = y^{[n]}(0^-) = 0$  para todo  $k = 0, \dots, n-1$ .

**Caso 1:**  $0^- < t < 0^+$ 

Al multiplicar la Ecuación (2.71) por  $dt$ , sustituir la excitación  $x(t)$  por la función delta de Dirac  $\delta(t)$  y al integrarla entre  $0^-$  y  $0^+$ , se obtiene

$$\int_{0^-}^{0^+} d \left[ \frac{d^{n-1}[y(t)]}{dt^{n-1}} \right] + \sum_{k=1}^n a_{n-k} \int_{0^-}^{0^+} \frac{d^{n-k}[y(t)]}{dt^{n-k}} dt = b_0 \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt. \quad (2.72)$$

(A) (B) (C)

Del estudio de los términos se tiene que el término (A) converge a  $y^{[n-1]}(0^+) - y^{[n-1]}(0^-)$ ; cada una de las integrales que conforman el término (B) converge a cero, por cuanto se supone que el sistema representado es físicamente realizable y en consecuencia no deben existir términos impulsivos y derivadas de impulsos en las derivadas de orden  $n - k$ -ésimo, desde  $k = 1$  hasta  $k = n$ ; y el término (C) obviamente converge a  $b_0$ . Como resultado del análisis se puede afirmar que debido a las condiciones iniciales del sistema en el instante justo antes de cero,

$$y^{[i]}(0^+) = \begin{cases} 0, & \forall i = 0, \dots, n-2; \\ b_0, & \forall i = n-1. \end{cases} \quad (2.73)$$

**Observación 2.3** Debido a que para el caso  $k = n$  del término (B), es decir,

$$\int_{0^-}^{0^+} \frac{d^{n-k}[y(t)]}{dt^{n-k}} dt \Big|_{k=n} = \int_{0^-}^{0^+} y(t) dt = 0,$$

se puede afirmar que  $y(0^+) = y(0^-)$  y en consecuencia la señal  $y(t)$  es continua en  $t = 0$ , lo cual obliga a pensar que la función definida por  $y^{[i]}(t) = \frac{d^i[y(t)]}{dt^i}$  para cada caso  $i = 1, \dots, n-2$  es también continua, y por tal razón  $y^{[i]}(0^+) = y^{[i]}(0^-)$  para cada  $i = 1, \dots, n-2$ .

**Caso 2:**  $t > 0$ 

Debido al hecho de que la señal impulso unitario es nula para todo  $t > 0$ , se tiene que la respuesta del sistema está definida por la respuesta natural u homogénea del sistema, la cual deberá tomarse en cuenta las condiciones en  $t = 0^+$  dada por la Ecuación (2.73).

En consecuencia, la respuesta impulsiva del sistema viene dada por

$$h(t) = y_h(t),$$

bajo condiciones en  $t = 0^+$  dadas por  $y^{[i]}(0^+) = 0$  para todo  $i = 0, \dots, n-2$  y además  $y^{[n-1]}(0^+) = b_0$ .

■ **EJEMPLO 2.8**

Sea el sistema del Ejemplo 2.6 de la página 45, donde  $b_0 = 1$ . Determine la respuesta impulsiva del sistema.

**Solución**

Del análisis de la solución obtenida en el Ejemplo 2.7 de la página 45, se tiene que la respuesta homogénea del sistema según la Ecuación (2.57) está dada por

$$h(t) = y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} + c_3 e^{-4t}, \quad \forall t > 0, \quad (2.74)$$

donde  $y(0^+) = 0$ ,  $y^{[1]}(0^+) = 0$  y  $y^{[2]}(0^+) = 1$ .

Al determinar  $y(t)|_0$ ,  $\frac{dy(t)}{dt}|_0$  y además  $\frac{d^2y(t)}{dt^2}|_0$ , se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -4 \\ 1 & 9 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.75)$$

De la solución del sistema de ecuaciones lineales simultaneas mostrado por la Ecuación (2.75), se tiene que  $c_1 = 1/6$ ,  $c_2 = -1/2$  y  $c_3 = 1/3$ , los cuales al ser sustituidos en la Ecuación (2.74) se obtiene que la respuesta impulsiva es

$$h(t) = \left[ \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{3}e^{-4t} \right] u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.76)$$

Note que la Ecuación (2.76) claramente satisface las condiciones  $h(0^+) = 0$ ,  $h^{[1]}(0^+) = 0$  y  $h^{[2]}(0^+) = 1$ .

La solución del sistema de ecuaciones lineales dada por la Ecuación (2.75), fue calculada a través del Scilab™. Para esto se emplearon los comandos Scilab™ mostrado en la Figura 2.9.

```
-->A=[1, 1, 1; -1, -3, -4; 1, 9, 16];
-->b=[0; 0; -1];
-->[c, kerA]=linsolve(A, b)
kerA =
 []
c =
 0.1666667
 - 0.5
 0.3333333
```

**Figura 2.9.** Comandos Scilab™ para el cálculo de los coeficientes  $c_i$  del Ejemplo 2.8

## 2.4 RESPUESTA ESCALÓN DE SISTEMAS LDCID

Antes de estudiar los métodos para determinar la respuesta de un sistema cuando éste es excitado por un escalón unitario, debe definirse su significado.

**Definición 2.6 (Respuesta Escalón)** *Se denomina respuesta escalón  $y^u(t)$ , a la respuesta que ofrece un sistema ante un escalón unitario y éste está en condiciones iniciales en  $t = 0^-$  iguales a cero.*

Note que la Definición 2.6 no restringe el tipo de sistema. Sin embargo, en el contexto de esta obra se hará referencia a los sistemas LDCID.

En función de esta contextualización se tiene que si el sistema es LDCID y en tiempo continuo, se puede determinar la respuesta escalón a través de cualquiera de los siguientes métodos:

**Método 2.2 (Solución del sistema ante  $u(t)$ )** En este método debe aplicarse los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales cuando las condiciones iniciales en  $t = 0^-$  iguales a cero. Obviamente, la excitación del sistema para  $t > 0$  es igual a uno.

**Método 2.3 (Solución del sistema ante  $e^{\sigma t}u(t)$ )** Este método, además de tomar en cuenta la condiciones iniciales cero para  $t = 0^-$ , se debe determinar la solución completa o respuesta del sistema del sistema ante una excitación  $x(t) = e^{\sigma t}u(t)$ , para luego aplicar el límite a la respuesta cuando  $\sigma$  tiende a cero por la derecha, es decir,  $\lim_{\sigma \downarrow 0} y(t)$ .

**Método 2.4 (Integración de la respuesta impulsiva  $h(t)$ )** El método por integración de la respuesta impulsiva se fundamenta en el hecho de que (Brea, 2006, Capítulo 1)

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.77)$$

En consecuencia, debido a que el sistema es LDCID y en tiempo continuo,

$$y''(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.78)$$

La demostración de la Ecuación (2.78) está basada en el estudio de la respuesta de sistemas LDCID y en el dominio continuo, por integral de convolución, la cual será tratada en otro capítulo de este material.

### ■ EJEMPLO 2.9

Para el sistema definido en el Ejemplo 2.6 de la página 45. Determine la respuesta escalón.

#### Solución

A los efectos de ilustrar un método alternativo al de la determinación de la respuesta por solución homogénea y particular, se empleará la respuesta impulsiva del Ejemplo 2.8 para luego integrarla, tal como se propone en el Método 2.4.

De la solución obtenida del Ejemplo 2.8, se tiene que la respuesta impulsiva es

$$h(t) = \left[ \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{3}e^{-4t} \right] u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.79)$$

Aplicando la Ecuación (2.78) del Método 2.4, se tiene que

$$y''(t) = \begin{cases} 0, & \forall t \leq 0; \\ \int_0^t \left[ \frac{1}{6}e^{-\tau} - \frac{1}{2}e^{-3\tau} + \frac{1}{3}e^{-4\tau} \right] d\tau, & \forall t > 0. \end{cases} \quad (2.80)$$

Al resolver la Ecuación (2.80), se llega a

$$y''(t) = \begin{cases} 0, & \forall t \leq 0; \\ \frac{1}{12} - \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} - \frac{1}{12}e^{-4t}, & \forall t > 0. \end{cases} \quad (2.81)$$

Ahora, aplicando el Método 2.2 a fin de corroborar los métodos, se tiene que de acuerdo al modelo matemático del sistema y aplicando el operador  $p$ ,

$$(p^3 + 8p^2 + 19p + 12)y(t) = x(t) \quad (2.82)$$

Se conoce que las raíces que anulan el polinomio característico son:  $r_1 = -1$ ,  $r_2 = -3$  y  $r_3 = -4$ , lo cual implica que la respuesta transitoria o solución homogénea es

$$y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} + c_3 e^{-4t}, \quad \forall t > 0. \quad (2.83)$$

Por otra parte, la solución forzada o solución particular ante un escalón unitario está dada por

$$y_p(t) = \frac{1}{p^3 + 8p^2 + 19p + 12} \Big|_{0^+} = \frac{1}{12}, \quad \forall t > 0. \quad (2.84)$$

Aplicando las Ecuaciones (2.83) y (2.84), se tiene que la solución completa está dada por

$$y''(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} + c_3 e^{-4t} + \frac{1}{12}, \quad \forall t > 0. \quad (2.85)$$

Al aplicar el concepto de respuesta escalón, la cual establece que las condiciones iniciales en  $t = 0^-$  son todas iguales a cero, y estas condiciones se mantienen para  $t = 0^+$ , se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -4 \\ 1 & 9 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.86)$$

Aplicando los comandos Scilab™ para el cálculo de los coeficiente  $c_i$  para todo  $i = 1, 2, 3$ , mostrados en la Figura 2.10.

```
-->A=[1, 1, 1; -1, -3, -4; 1, 9, 16];
-->b=[1/12; 0; 0];
-->[c, kerA]=linsolve(A, b)
kerA =
[]
c =
- 0.1666667
 0.1666667
- 0.0833333
```

**Figura 2.10.** Comandos Scilab™ para el cálculo del sistema de ecuaciones lineales del Ejemplo 2.9

De los resultados mostrados en la Figura 2.10, se concluye que  $c_1 = -\frac{1}{6}$ ,  $c_2 = \frac{1}{6}$  y  $c_3 = -\frac{1}{12}$ , en consecuencia la solución completa es

$$y''(t) = \frac{1}{12} - \frac{1}{6} e^{-t} + \frac{1}{6} e^{-3t} - \frac{1}{12} e^{-4t}, \quad \forall t > 0. \quad (2.87)$$

Por otra parte, debido a que para  $t < 0$  el sistema es excitado por la señal nula, es decir,  $x(t) = 0$ , y el sistema está en reposo,  $y''(t) = 0$ , lo cual permite asegurar que

$$y''(t) = \begin{cases} 0, & \forall t \leq 0; \\ \frac{1}{12} - \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} - \frac{1}{12}e^{-4t}, & \forall t > 0. \end{cases} \quad (2.88)$$

Al comparar el resultado mostrado por la Ecuación (2.81) y la Ecuación (2.88), se puede observar que ambos métodos condujeron al mismo resultado.

### ■ EJEMPLO 2.10

Sea un sistema LDCID definido en el dominio continuo con modelo matemático

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.89)$$

donde  $x(t)$  es la señal de excitación e  $y(t)$  es la señal de respuesta del sistema.

Si la señal de excitación del sistema está definida por

$$x(t) = u(t) + \delta(t-1), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.90)$$

y el sistema se encuentra inicialmente en reposo, es decir,  $\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0$  e  $y(t)|_{t=0} = 0$ .

Determine entonces la respuesta del sistema para todo  $t > 0$ .

### Solución

Existen diversas maneras de determinar la solución al problema. Sin embargo, será empleado un enfoque muy conceptual a objeto de repasar los conceptos impartidos en el capítulo.

Si se aplica el operador  $p$  a la Ecuación (2.89) se obtiene que

$$(p^2 + 5p + 6)y(t) = x(t). \quad (2.91)$$

Al determinar las raíces que anulan al polinomio característico  $p^2 + 5p + 6$ , se tiene que  $p = -2$  y  $p = -3$ , lo que permite asegurar que la solución homogénea es

$$y_h(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.92)$$

En cuanto a la solución particular se tiene que

$$y_p(t) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma^2 + 5\sigma + 6} e^{\sigma t} u(t) = \frac{1}{6} u(t), \quad \forall t < 1. \quad (2.93)$$

Al sumar las soluciones definidas por las Ecuaciones (2.92) y (2.93), se tiene que la solución completa es

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{6}, \quad \forall 0 < t < 1. \quad (2.94)$$

Tomando en cuenta las condiciones para  $t = 0$ , se obtiene que debido a que tanto  $y(t)$  como su primera derivada  $\frac{dy(t)}{dt}$  son ambas continuas en  $t = 0$ , se tiene que

$$c_1 + c_2 + \frac{1}{6} = 0; \quad (2.95a)$$

$$-2c_1 - 3c_2 = 0. \quad (2.95b)$$

Al solucionar el sistema de ecuaciones definida por las Ecuaciones (2.95), se obtiene que  $c_1 = -\frac{1}{2}$  y  $c_2 = \frac{1}{3}$ .

Al sustituir por los coeficientes, se tiene que

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{1}{6}, \quad \forall 0 < t < 1. \quad (2.96)$$

Note que la Ecuación (2.96) proporciona únicamente la respuesta del sistema en el intervalo  $0 < t < 1$ , por cuanto justo en  $t = 1$ , actúa el impulso  $\delta(t - 1)$ , lo que produce una alteración en la respuesta del sistema, la cual debe determinarse mediante la resolución de la ecuación diferencial para el intervalo desde  $t = 1^-$  hasta  $t = 1^+$ , a los fines de hallar las condiciones del sistema en el instante  $t = 1^+$ .

Considere nuevamente el modelo matemático, tomando en cuenta que la excitación del sistema está definida por el impulso  $\delta(t - 1)$ , teniendo entonces que

$$\int_{t=1^-}^{1^+} d\left(\frac{dy(t)}{dt}\right) + 5 \int_{t=1^-}^{1^+} dy(t) + 6 \int_{t=1^-}^{1^+} y(t)dt = \int_{t=1^-}^{1^+} \delta(t - 1)dt \quad (2.97)$$

Debido al hecho de que el sistema representado por el modelo matemático es físicamente realizable, se tiene que  $y(t)$  es una función continua y además no presenta términos asociados a funciones impulsivas, en consecuencia se puede asegurar bajo el supuesto de que el sistema es físicamente realizable que

$$\int_{t=1^-}^{1^+} dy(t) = 0 \quad (2.98a)$$

$$\int_{t=1^-}^{1^+} y(t)dt = 0 \quad (2.98b)$$

Note que la Ecuación (2.98a) es válida por cuanto para que exista derivada de segundo orden, debe existir derivada de primer orden, y este hecho sólo puede darse si la función  $y(t)$  es continua.

Por otra parte, debido a que se tiene que el sistema es físicamente realizable, entonces se puede asegurar que la respuesta del sistema no contiene términos impulsivos y en consecuencia la Ecuación (2.98b) es cierta.

Esto quiere decir que al emplear las Ecuaciones (2.98) en la Ecuación (2.97), se obtiene que

$$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=1^-}^{1^+} = \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=1^+} - \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=1^-} = 1 \quad (2.99)$$

Finalmente, entonces las condiciones del sistema para el instante  $t = 1^+$  son:

$$y(t)|_{t=1^+} = y(t)|_{t=1^-}. \quad (2.100a)$$

$$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=1^+} = 1 + \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=1^-}. \quad (2.100b)$$

De la Ecuación (2.96), se puede asegurar que

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{1}{6}, \quad \forall 0 < t < 1. \quad (2.101a)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = e^{-2t} - e^{-3t}, \quad \forall 0 < t < 1. \quad (2.101b)$$

Al evaluar las Ecuaciones (2.101) en  $t = 1^-$ , sustituir sus resultados en la Ecuaciones (2.100), se consigue que

$$y(t)|_{t=1^+} = -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{3}e^{-3} + \frac{1}{6}. \quad (2.102a)$$

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=1^+} = 1 + e^{-2} - e^{-3}. \quad (2.102b)$$

Ahora, la respuesta del sistema para  $t > 1$  se obtiene tomando en cuenta que la respuesta del sistema está definida por  $y(t)$ , cuya expresión está dada por la Ecuación (2.94), en donde sus coeficiente deberán satisfacer las condiciones mostradas por las Ecuaciones (2.102).

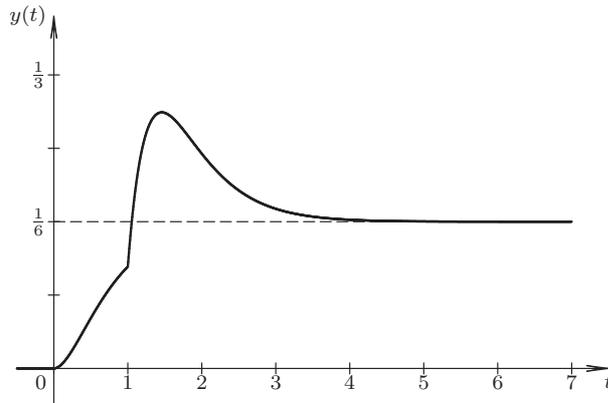
Es decir,

$$c_1 e^{-2} + c_2 e^{-3} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{3}e^{-3} + \frac{1}{6}; \quad (2.103a)$$

$$-2c_1 e^{-2} - 3c_2 e^{-3} = 1 + e^{-2} - e^{-3}. \quad (2.103b)$$

Al resolver el sistema de ecuaciones dado por las Ecuaciones (2.103), se obtiene que  $c_1 = e^2 - \frac{1}{2}$  y  $c_2 = \frac{1}{3} - e^3$ , las cuales al ser sustituidas en la Ecuación (2.94), se consigue que

$$y(t) = \left[ e^2 - \frac{1}{2} \right] e^{-2t} + \left[ \frac{1}{3} - e^3 \right] e^{-3t} + \frac{1}{6}, \quad \forall t > 1. \quad (2.104)$$

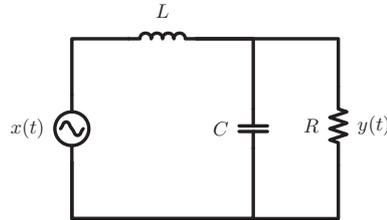


**Figura 2.11.** Respuesta  $y(t)$  del sistema ante la excitación  $x(t) = u(t) + \delta(t-1)$  del Ejemplo 2.10

La Figura 2.11 ilustra la respuesta del sistema ante la excitación  $x(t)$ , la cual está definida por  $u(t) + \delta(t-1)$ . En la gráfica se puede observar la continuidad de la señal  $y(t)$ . Sin embargo, también puede observarse el cambio abrupto que sufre la pendiente de la señal  $y(t)$  justo en  $t = 1$ , lo que representa una discontinuidad de  $\frac{dy(t)}{dt}$  para  $t = 1$ .

**PROBLEMAS**

**2.1** Sea el sistema descrito por la Figura 2.12 formado por los elementos: resistencia, inductancia y capacitancia.



**Figura 2.12.** Sistema eléctrico RCL.

Si el sistema es excitado por una señal de tensión eléctrica  $x(t)$  y su respuesta  $y(t)$  es medida a través de la caída de tensión sobre la resistencia. Entonces, su modelo matemático en el dominio del tiempo continuo, y en términos de sus variables externas está dado por

- A)  $LC \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$
- B)  $\frac{L}{R} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$
- C)  $L \frac{di_L(t)}{dt} + y(t) = x(t)$
- D)  $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{LC} y(t) = x(t)$

**2.2** Sea un sistema LDCID definido en el dominio continuo, y cuyo modelo matemático<sup>7</sup> viene dado por

$$16 \frac{d^3y(t)}{dt^3} + 20 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 8 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 32x^2(t), \quad (2.105)$$

donde  $y(t)$  y  $x(t)$  representan respectivamente la señal de respuesta y la señal de excitación del sistema.

Si el sistema es excitado por una señal  $x(t) = e^{-2t}u(t)$ , donde  $u(t)$  representa la función escalón unitaria, entonces, la expresión matemática correspondiente a la respuesta del sistema para todo  $t > 0$ , es decir,  $y(t)$  viene dada por

- A)  $y(t) = -\frac{32}{735} e^{-4t}$
- B)  $y(t) = A_1 e^{-t/4} + A_2 t e^{-t/2} + A_3 e^{-t/2} - \frac{32}{735} e^{-4t}$
- C)  $y(t) = A_1 e^{-t/4} + A_2 e^{-t/2} - \frac{32}{735} e^{-4t}$
- D)  $y(t) = A_1 e^{-t/4} + A_2 t e^{-t/2} + A_3 e^{-t/2} - \frac{32}{63} e^{-2t}$

**2.3** Sea un sistema LDCID definido en el dominio continuo, y cuyo modelo matemático corresponde a

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} + x(t), \quad (2.106)$$

donde  $y(t)$  y  $x(t)$  representan respectivamente la señal de respuesta y la señal de excitación del sistema. Si el sistema es excitado por una señal  $x(t) = e^{-t}u(t)$ , donde  $u(t)$  representa la función escalón unitaria, entonces, para un  $A_1 \neq 0$  y un  $A_2 \neq 0$  la expresión matemática correspondiente a la respuesta del sistema para todo  $t > 0$ , es decir,  $y(t)$  viene dada por

<sup>7</sup>Note que  $16a^3 + 20a^2 + 8a + 1 = 16(a + \frac{1}{4})(a^2 + a + \frac{1}{4})$ .

- A)  $y(t) = A_1 + e^{-t}$   
 B)  $y(t) = A_1 e^{-t}$   
 C)  $y(t) = A_1 + A_2 e^{-t}$   
 D) No puede ser determinada

**2.4** Sea un sistema LDCID definido en el dominio del tiempo continuo, y cuyo modelo matemático viene dado por

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} = 4 \frac{dx(t)}{dt}, \quad \forall t > 0, \quad (2.107)$$

donde  $y(t)$  y  $x(t)$  representan respectivamente las señales de respuesta y de excitación del sistema.

Si el sistema es excitado por una señal  $x(t) = e^{-2t}u(t)$ , donde  $u(t)$  representa la función escalón unitaria. Entonces, la expresión matemática correspondiente a la respuesta del sistema ante la señal  $x(t)$  para todo  $t > 0$ , es decir,  $y(t)$  viene dada por

- A)  $y(t) = A_1 e^{-t} \sin(t) + A_2 e^{-t} \cos(t) + 2 e^{-2t}, \quad \forall t > 0.$   
 B)  $y(t) = A_1 + A_2 e^{-t} \sin(t) + A_3 e^{-t} \cos(t) + 2 e^{-2t}, \quad \forall t > 0.$   
 C)  $y(t) = A_1 + A_2 e^{-\sqrt{2}t} \sin(t + \frac{3\pi}{4}) + A_3 e^{-\sqrt{2}t} \cos(t + \frac{3\pi}{4}) + 2 e^{-2t}, \quad \forall t > 0.$   
 D)  $y(t) = 2 e^{-2t}, \quad \forall t > 0.$

**2.5** Sea un sistema LDCID en el dominio continuo, el cual está definido por

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = 6x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.108)$$

Si la señal de excitación  $x(t)$  está dada por<sup>8</sup>

$$x(t) = \operatorname{sgn}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

y además  $y(t)|_{t=0} = -1; \frac{dy(t)}{dt}|_{t=0} = 0$ . Entonces, la respuesta del sistema para  $t > 0$  es

- A)  $-9e^{-2t} + 6e^{-3t} + 2$   
 B)  $-\frac{9}{2}e^{-2t} + 3e^{-3t} + \frac{1}{2}$   
 C)  $-21e^{-2t} + 14e^{-3t} + 6$   
 D)  $-6e^{-2t} + 4e^{-3t} + 1$

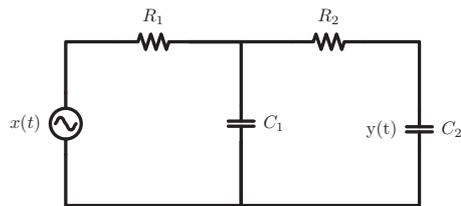
## EJERCICIOS PROPUESTOS

**2.6** Sea el sistema descrito por la Figura 2.13 formado por resistencias y capacitancias.

Si el sistema es excitado por una señal de tensión eléctrica  $x(t)$  y su respuesta  $y(t)$  es medida a través de la caída de tensión sobre la capacitancia  $C_2$ . Entonces, determine:

- a) modelo matemático en el dominio del tiempo continuo, y en términos de sus variables externas definidas;  
 b) respuesta del sistema si éste es excitado por un señal  $x(t) = u(t)$  y el sistema se encuentra en condiciones iniciales de cero;

<sup>8</sup>Note que  $\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & \forall t > 0; \\ -1, & \forall t < 0. \end{cases}$



**Figura 2.13.** Sistema eléctrico doble RC.

- c) respuesta del sistema si es excitado por una señal<sup>9</sup>  $x(t) = p_2(t - 4)$ . Para esto suponga que  $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$  y  $C_1 = C_2 = 470 \text{ }\mu\text{F}$  y el sistema se encuentra en condiciones iniciales  $y(0^-) = 1$  y  $\frac{dy(t)}{dt}|_{t=0^-} = 0$ .

**2.7** Sea un sistema LDCID definido en el dominio del tiempo continuo, y cuyo modelo matemático viene dado por

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 6 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 11 \frac{dy(t)}{dt} + 6 = x(t), \quad \forall t > 0, \quad (2.109)$$

donde  $y(t)$  y  $x(t)$  representan respectivamente las señales de respuesta y de excitación del sistema. Entonces, determine:

- respuesta impulsiva del sistema;
- respuesta escalón del sistema empleando el Método 2.2;
- respuesta escalón del sistema empleando el Método 2.3;
- respuesta escalón del sistema empleando el Método 2.4;
- compare los resultados obtenidos de acuerdo a cada método.

<sup>9</sup>Considere que los parámetros 2 y 4 que definen la señal están expresados en segundos, (s).



## CAPÍTULO 3

---

# ANÁLISIS DE SISTEMAS EN EL DOMINIO DISCRETO

---

Al observar la naturaleza, me percaté que ella es la más sabia maestra de la vida. Nunca pierdas sus lecciones a través de la observación, porque siempre tendrás algo que aprender de sus cátedras.

—Ebert Brea

Un punto de vista que en diversas oportunidades puede adoptarse para el análisis de los sistemas, es el análisis de ellos desde una óptica discreta. Este enfoque exige por parte del analista del sistema, una concepción de las relaciones de las cantidades del sistema desde la perspectiva del dominio discreto, para así obtener un modelo matemático desde esa perspectiva. Para lograr formular un modelo matemático definido en el dominio discreto, el analista del sistema puede hacerlo a través de la relación existente de la respuesta del sistema y su excitación desde su concepción discreta, o mediante la discretización del modelo matemático obtenido en el dominio continuo.

En este capítulo se estudiará tanto el desarrollo de modelos discretos, los cuales usualmente serán expresados en el tiempo discreto, como la resolución de ellos en ese dominio.

Es oportuno indicar que los modelos matemáticos de sistemas en el dominio discreto estudiados en esta obra, son los representados en intervalos regulares del dominio y no los llamados sistemas de eventos discretos, los cuales corresponden a los ampliamente conocidos sistemas con cambios de estados del sistema a intervalos aleatorios.

Este capítulo está estructurado de acuerdo a las siguientes secciones: en la Sección 3.1 se introducen los modelos matemáticos de sistemas dinámicos definidos en el dominio discreto, para lo cual se plantean modelos que obedecen a relaciones de las variables del

sistema y sus eventuales desplazamientos, los cuales conforman la llamada ecuaciones en diferencias; en la Sección 3.2 se presentan algunos métodos que son empleados para la obtención de la ecuación en diferencias a partir del correspondiente modelo matemático en el dominio continuo, en específicos, modelos matemáticos correspondientes a sistemas lineales, dinámicos, causales, invariantes en el dominio y deterministas (LDCID). Un método alternativo al desarrollado en la Sección 3.2 es el método basado en variables de estado, el cual es brevemente introducido en la Sección 3.3 debido a sus bondades en la resolución de problemas de modelos matemáticos de orden superior. En la Sección 3.4 se formulará y se estudiará la solución de sistemas LDCID de primer orden definido en el dominio discreto, mediante un método basado en la ecuación recurrente del sistema, para así comparar su solución con la solución obtenida de los sistemas LDCID de primer orden definido en el dominio continuo. De forma semejante al tratado en la resolución de ecuaciones diferenciales, es estudiado en la Sección 3.5 la solución de los modelos matemáticos de sistemas LDCID definido en el dominio discreto. Tanto la respuesta ante un impulso unitario como la respuesta de los sistemas LDCID ante un escalón unitario, cuando en ambos casos el sistema se encuentran inicialmente en reposo son ampliamente estudiados respectivamente en las Secciones 3.6 y 3.7. Finalmente, un conjunto de problemas son planteados, los cuales sus soluciones son presentadas al final del libro, así como problemas propuestos para que el lector pueda revisar los conocimientos adquiridos en el capítulo.

### 3.1 SISTEMAS LDCID

Un ejemplo de este tipo de sistemas fue mostrado en el Ejemplo 1.8 de la página 23, en donde, la variable a medir como respuesta viene dada por la tensión eléctrica de cada nudo. Note, que el modelo matemático desarrollado en el ejemplo está definido en un dominio discreto regular y éste representa la posición del nudo.

Debido a la naturaleza que suelen presentarse en el campo de la ingeniería eléctrica, los sistemas comúnmente son representados a través de modelos matemáticos en el dominio continuo, y con mayor frecuencia en el dominio del tiempo continuo. Sin embargo, como ejemplo se tiene que el estudio de la máquina eléctrica rotativa exige la formulación de un modelo matemático definido en el dominio de la variable independiente ángulo de giro, para así representar el campo magnético rotante en los elementos que la integran. Este hecho obliga al analista del sistema realizar la correspondiente discretización del modelo a objeto de estudiarlo en el ámbito del dominio discreto. No obstante, hoy en día existen incontables sistemas que por su naturaleza son representados directamente a través de modelos matemáticos definidos en el dominio discreto.

#### 3.1.1 Modelos matemáticos de sistemas en el dominio discreto

En ocasiones la representación de los sistemas induce a una representación en el dominio discreto, dada su naturaleza. Un ejemplo de estos sistemas cuya representación matemática es por su naturaleza discreta es el modelo matemático de un instrumento financiero, el cual los intereses son abonados en el instrumento financiero a intervalos regulares, bien sea diario, mensual, trimestral, por nombrar algunos lapsos.

A tal efecto, considere el siguiente ejemplo basado en un instrumento financiero.

### ■ EJEMPLO 3.1

Sea un instrumento financiero, el cual tiene una tasa pasiva diaria  $i$  de valor fijo o variable, es decir, el interés que otorga la institución financiera al cliente, y en cuyo caso será denotada por  $i_k$ , donde  $k$  representa cada  $k$ -ésimo día. Suponga que una persona cuenta con un capital  $C_0$  y desea invertirlo en el instrumento financiero, y la persona no realizará ni depósitos ni retiros durante el período de inversión. Entonces, ¿Cuál es el modelo matemático que le permita calcular la cantidad de dinero en depósito al final de cada día, por concepto de interés?

#### Solución

Se conoce que la cantidad de dinero disponible en depósito, denotada por  $d_k$  para todo  $k = 0, 1, \dots$ , está dada por

$$\begin{aligned} d_0 &= C_0 \\ d_1 &= C_0(1+i_1) \\ d_2 &= C_0(1+i_1)(1+i_2) \\ &\vdots \\ d_n &= C_0(1+i_1)(1+i_2)\cdots(1+i_n) \end{aligned} \quad (3.1)$$

De la Ecuación (3.1) se tiene que

$$d_n = C_0 \prod_{k=0}^n (1+i_k), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3.2)$$

donde  $C_0$  es el capital inicial y  $i_k$  representa la tasa de interés para cada  $k$ -ésimo día en que la persona hace la inversión, y se define a  $i_0 = 0$ , lo cual conduce a que  $\prod_{k=0}^0 (1+i_k) = 1$

Ahora, si  $i_k = i$ , es decir, es constante para cada  $k = 1, 2, \dots, n$ , entonces al hacer  $i_k = i$  para todo los  $k > 0$ , se obtiene de la Ecuación (3.2)

$$d[n] = C_0(1+i)^n u[n], \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.3)$$

lo que puede ser modelado por

$$d[n] = C_0 \sum_{k=0}^{\infty} (1+i)^k \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.4)$$

Note que tanto la Ecuación (3.3) como la Ecuación (3.4) describen la cantidad de dinero en el instrumento financiero para cada final de día, la cual es fácilmente verificable a través de la Ecuación (3.1). Al mismo tiempo, ambas ecuaciones representan el modelo matemático en tiempo discreto del instrumento financiero.

Ahora bien, en este apartado se estudiará como transformar los modelos matemáticos de sistemas lineales, dinámicos, causales, invariantes en el dominio y deterministas (LDCID) definidos en el dominio continuo al dominio discreto a intervalos regulares.

Normalmente, los sistemas que son estudiados son sistemas definidos en el dominio discreto del tiempo. No obstante, los métodos, técnicas y herramientas a emplear pueden ser aplicados a sistemas en dominios no necesariamente temporales.

Por otra parte, los modelos discretos provenientes de la discretización de los modelos matemáticos de sistemas lineales, dinámicos, causales, invariantes en el dominio y deter-

ministas (LDCID) definidos en el dominio continuo conforman lo que se denominan ecuaciones en diferencias, las cuales explican la manera como están relacionadas las muestras de las variables del sistema en función de su relación de desplazamiento.

### 3.2 DISCRETIZACIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS DEFINIDOS EN EL DOMINIO CONTINUO

En este punto se estudiarán dos enfoques que son empleados para la discretización de modelos matemáticos de sistemas LDCID en el dominio continuo. Los enfoques están basados en el método numérico de integración a emplear, los cuales al reemplazar las operaciones de derivada de orden  $n$ -ésimo en la ecuación diferencial que representa la dinámica del sistema, arrojan como resultado lo que se denominan el modelo matemático definido por su correspondiente ecuación en diferencias.

#### 3.2.1 Discretización por integración rectangular

**3.2.1.1 Sistema de primer orden** Para introducir el tema, suponga que el modelo matemático está dado por una ecuación diferencial de primer orden, la cual cuenta con la expresión

$$\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

Al multiplicar la Ecuación (3.5) por  $dt$  e integrando entre  $t_0$  y  $t_0 + h$ , donde  $h > 0$  es el paso de integración, se obtiene que

$$\int_{t_0}^{t_0+h} dy(t) + a_0 \int_{t_0}^{t_0+h} y(t) dt = b_0 \int_{t_0}^{t_0+h} x(t) dt, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

Ahora, si se establece de modo general que la integral entre  $t_0$  y  $t_0 + h$  de una función  $f(t)$ , puede ser aproximada por el valor de la función  $f(t)$  por su lado izquierdo del intervalo de integración multiplicado por el ancho de integración  $h$ , se tiene que

$$\int_{t_0}^{t_0+h} f(t) dt \approx f(t_0)h. \quad (3.7)$$

Sin embargo, también puede ser aproximada por el valor de la función  $f(t)$  por su lado derecho del intervalo de integración, obteniendo

$$\int_{t_0}^{t_0+h} f(t) dt \approx f(t_0 + h)h. \quad (3.8)$$

Al aplicar la Ecuación (3.7) a la Ecuación (3.6), se obtiene

$$y(t_0 + h) - y(t_0) + a_0 y(t_0)h = b_0 x(t_0)h.$$

Al reordenar los términos de esta anterior ecuación y denotando  $y(t_0 + h) = y[n + 1]$ ,  $y(t_0) = y[n]$  y  $x(t_0) = x[n]$ , se alcanza el modelo en el dominio discreto,

$$y[n + 1] + (a_0 h - 1)y[n] = b_0 h x[n], \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.9)$$

la cual puede ser expresada en su forma recurrente, como

$$y[n+1] = (1 - a_0h)y[n] + (b_0h)x[n], \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.10)$$

La Ecuación (3.10) pertenece a la familia de ecuaciones recurrentes, y es denominada así, debido al hecho de que es posible, a través de ella misma, calcular cada uno de los valores como consecuencia de lo calculado anteriormente.

Note que a través de la Ecuación (3.10), se puede proporcionar de forma recurrente la secuencia de muestra de  $y_k$  para  $k \in \mathbb{Z}$ . Para eso es necesario conocer una condición inicial, es decir,  $y[0] = y(0) = y_0$  y las muestras de la señal de excitación discreta  $x[n]$ .

### ■ EJEMPLO 3.2

Suponga que

$$x[n] = u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k], \quad (3.11)$$

y la condición inicial del sistema en  $n = 0$ , es decir,  $y_0 = 0$ ,  $a_0 = b_0 = 1$ , y el paso de integración  $h = 0,01$ . Determine por simulación la respuesta del sistema ante la señal de excitación dada.

#### Solución

De acuerdo a la Ecuación (3.10), se tiene:

$$\begin{aligned} n = 0, & \quad y_0 = 0 \\ n = 1, & \quad y_1 = 0,99y_0 + 0,01x_0 = 0,01 \\ n = 2, & \quad y_2 = 0,99y_1 + 0,01x_1 = 0,0199 \\ n = 3, & \quad y_3 = 0,99y_2 + 0,01x_2 = 0,029701 \end{aligned}$$

Los resultados de  $y_k$  mostrado arriba, proveen la solución mediante cálculo para cada uno de los instantes de muestras  $k$ , lo cual exige del una gran esfuerzo computacional si se desea obtener el valor de  $y_k$  para cada instante discreto o para un valor determinado de  $k$  muy alto, debido al hecho de que se debe calcular cada  $k$ -ésima muestra. Esta solución es comúnmente denominada solución por simulación o solución por *recurrencia*.

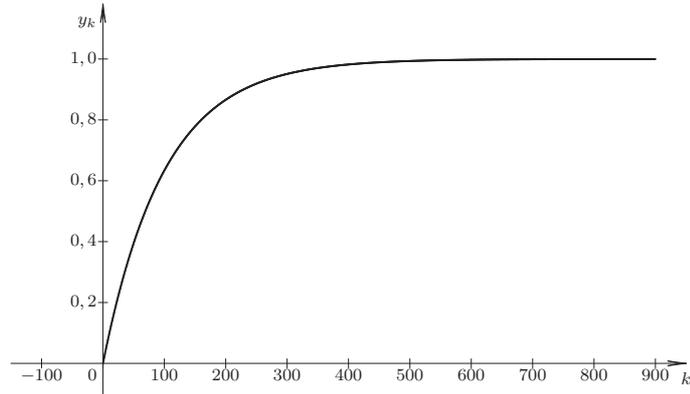
La Figura 3.1 de la página 66 ilustra la secuencia  $y_k$  correspondiente a la respuesta del sistema ante una excitación definida por una señal escalón unitaria en el dominio discreto, y cuya cálculo se basó en el empleo de la Ecuación (3.11) para cada  $k$ -ésima muestra.

**3.2.1.2 Sistema de segundo orden** Para este caso, considere el modelo matemático definido por

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0y(t) = b_0x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.12)$$

Si se multiplica la Ecuación (3.12) por  $dt$ , y se integra entre  $t_0$  y  $t_0 + h$ , donde  $h$  es nuevamente el paso de integración, se tiene

$$\int_{t_0}^{t_0+h} d \left[ \frac{dy(t)}{dt} \right] + a_1 \int_{t_0}^{t_0+h} d[y(t)] + a_0 \int_{t_0}^{t_0+h} y(t)dt = b_0 \int_{t_0}^{t_0+h} x(t)dt. \quad (3.13)$$



**Figura 3.1.** Representación gráfica de  $y_k$ , para el caso de  $h = 0.01s$

Aplicando la aproximación de la integral numérica por la izquierda, tal como es propuesta por la Ecuación (3.7), a la Ecuación (3.13), se puede expresar que

$$\frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t_0+h} - \frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t_0} + a_1 [y(t_0+h) - y(t_0)] + a_0 y(t_0)h = b_0 x(t_0)h. \quad (3.14)$$

Aplicando la definición de derivada lateral derecha se tiene que

$$\frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t_0} \approx \frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{h} \quad (3.15a)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t_0+h} \approx \frac{y(t_0+2h) - y(t_0+h)}{h} \quad (3.15b)$$

Al emplear las Ecuaciones (3.15) en la Ecuación (3.14), arroja como resultado

$$\frac{y(t_0+2h) - y(t_0+h)}{h} - \frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{h} + a_1 [y(t_0+h) - y(t_0)] + a_0 y(t_0)h = b_0 x(t_0)h. \quad (3.16)$$

Al reordenar los términos de la Ecuación (3.16), se obtiene

$$y(t_0+2h) + [a_1 h - 2]y(t_0+h) + [1 - a_1 h + a_0 h^2]y(t_0) = b_0 h^2 x(t_0) \quad (3.17)$$

Considerando que los términos de la Ecuación (3.17) pueden ser representados por:  $y(t_0) = y[n]$ ,  $y(t_0+h) = y[n+1]$ ,  $y(t_0+2h) = y[n+2]$  y  $x(t_0) = x[n]$ , se tiene que la forma discreta de la Ecuación (3.17) viene dada por

$$y[n+2] + [a_1 h - 2]y[n+1] + [1 - a_1 h + a_0 h^2]y[n] = b_0 h^2 x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.18)$$

Si se despeja el término de mayor desplazamiento de la Ecuación (3.18), se tiene que la ecuación recurrente para este caso es

$$y[n+2] = [2 - a_1 h]y[n+1] - [1 - a_1 h + a_0 h^2]y[n] + b_0 h^2 x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.19)$$

Con relación a las condiciones iniciales, o dicho de otro modo condiciones del sistema, en virtud de que lo que se requiere es conocer  $n$  condiciones no necesariamente iniciales en el caso de ser un sistema de  $n$ -ésimo orden, debe emplearse los conceptos asociados al operador de derivada.

Para el caso de un modelo matemático de segundo orden correspondiente a un sistema LDCID, suponga que son conocidas la respuesta del sistema y su primera derivada en el instante 0, y se requiere conocer las correspondientes condiciones en el dominio discreto.

Como ejemplo, suponga que

$$y(t)|_{t=0} = y_0, \quad \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = \dot{y}_0. \quad (3.20)$$

Conociendo entonces que la respuesta del sistema y su primera derivada para  $t = 0$ , se puede obtener con muy buena aproximación que

$$\begin{aligned} y(t)|_{t=0} &= y_0, \\ \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} &\approx \frac{y(h) - y(0)}{h} = \dot{y}_0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Al expresar las muestras para 0 y  $h$ , se obtiene de la Ecuación (3.21) que

$$\begin{aligned} y[0] &= y_0, \\ \frac{y[1] - y[0]}{h} &= \dot{y}_0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

De la Ecuación (3.22), se tiene que

$$\begin{aligned} y[0] &= y_0, \\ y[1] &= h \dot{y}_0 + y_0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

### ■ EJEMPLO 3.3

Sea un sistema LDCID definido en el dominio del tiempo continuo, y cuyo modelo matemático viene dado por

$$5 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 6 \frac{dy(t)}{dt} = 6 \frac{dx(t)}{dt}, \quad \forall t > 0, \quad (3.24)$$

donde  $y(t)$  y  $x(t)$  representan respectivamente las señales de respuesta y de excitación del sistema.

Si el sistema es excitado por una señal  $x(t) = u(t)$ , donde  $u(t)$  representa la función escalón unitaria. Entonces, determine el modelo matemático en tiempo discreto con un  $h = 0,01$ ; y formule la ecuación recurrente que permita simular la respuesta del sistema

#### Solución

A los efectos de mostrar algunos resultados de la simulación, suponga que  $a_1 = a_0 = b_0 = 1$ ,  $h = 0,01$  y  $x[n] = u[n]$ , es decir,  $x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$  para todo  $n \in \mathbb{R}$ , y la cual es conocida como la función escalón unitario discreto.

Por otra parte, suponga que  $y(0) = 0$  y  $\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = 1$ .

Al reemplazar los parámetros en la Ecuación (3.19), la ecuación recurrente queda

$$y[n+2] = \begin{cases} 0, & \forall n < 0; \\ 1,99y[n+1] - 0,9899y[n] + 0,0001; & \forall n \geq 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

Ahora, de las condiciones iniciales y sabiendo que la derivada lateral derecha para  $t = 0$  está dada por

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{h} \right|_{t_0=0} = 1, \quad (3.26)$$

se tiene al despejar  $y(t_0+h)$  de la Ecuación (3.26) que con  $t_0 = 0$

$$\begin{aligned} y_0 &= y(0) = 0 \\ y_1 &= y(h) = h + y(0) = 0,01 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Empleando las Ecuaciones (3.25) y (3.27),

$$\begin{aligned} n = 0, & \quad y_2 = 1,99y_1 - 0,9899y_0 + 0,0001 \\ n = 1, & \quad y_3 = 1,99y_2 - 0,9899y_1 + 0,0001 \\ n = 2, & \quad y_4 = 1,99y_3 - 0,9899y_2 + 0,0001 \\ n = 3, & \quad y_5 = 1,99y_4 - 0,9899y_3 + 0,0001 \end{aligned}$$

### 3.2.2 Discretización por integración trapezoidal

La discretización trapezoidal no será desarrollada como se hizo en el caso rectangular, debido al hecho de su semejanza con la discretización rectangular, exceptuando que la operación de integración debe aproximarse de acuerdo a

$$\int_{t_0}^{t_0+h} f(t)dt \approx \frac{f(t_0) + f(t_0+h)}{2}h. \quad (3.28)$$

No obstante, note que al aplicar este concepto al problema planteado por la Ecuación (3.5) de la página 64, la Ecuación (3.6) queda expresada como

$$y(t_0+h) - y(t_0) + a_0 \frac{y(t_0) + y(t_0+h)}{2}h = b_0 \frac{x(t_0) + x(t_0+h)}{2}h. \quad (3.29)$$

Al agrupar los términos de la Ecuación (3.29), se tiene

$$[1 + a_0/2]y(t_0+h) + [a_0/2 - 1]y(t_0) = \frac{b_0h}{2}x(t_0) + \frac{b_0h}{2}x(t_0+h), \quad (3.30)$$

la cual al ser expresada en el dominio del tiempo discreto, se tiene

$$[1 + a_0/2]y[n+1] + [a_0/2 - 1]y[n] = \frac{b_0h}{2}x[n] + \frac{b_0h}{2}x[n+1], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (3.31)$$

y al despeja el término de mayor desplazamiento se puede afirmar que

$$y[n+1] = \frac{1 - a_0/2}{1 + a_0/2}y[n] + \frac{b_0h}{2(1 + a_0/2)}x[n] + \frac{b_0h}{2(1 + a_0/2)}x[n+1], \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

la cual puede ser reexpresada como

$$y[n+1] = \frac{2-a_0}{2+a_0} y[n] + \frac{b_0 h}{2+a_0} x[n] + \frac{b_0 h}{2+a_0} x[n+1], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.32)$$

### 3.3 ESPACIO DE ESTADO

El concepto de espacio de estado es ampliamente empleado en el campo de la ingeniería y las ciencias. En esta sección se introducirá este concepto a fin de emplearlo en la búsqueda de soluciones de sistemas de orden superior por simulación. No obstante, antes de aplicarlo es importante su estudio para disponer de los conceptos de espacio de estado en la discretización de sistemas a partir de su representación en ecuaciones diferenciales.

Este enfoque presenta mejor precisión en la solución computacional que el método de discretización de los operadores de derivada  $m$ -ésima, en virtud de que sólo es empleada una aproximación de derivada de primer orden. La base del método es el concepto de espacio de estado. Éste transforma una ecuación diferencial de orden  $n$ -ésimo y de primer grado, debido al hecho de que se está tratando sistemas LDCID, en un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden y de primer grado, para luego discretizar los  $n$  operadores derivadas de primer orden.

Con el propósito de introducir el concepto de espacio de estado, suponga que se cuenta con un sistema LDCID de orden  $n$ , y éste cuenta con su respectivo modelo matemático de acuerdo a

$$\sum_{k=0}^n a_{n-k} \frac{d^{n-k} y(t)}{dt^{n-k}} = b_0 x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (3.33)$$

donde será considerado  $a_n = 1$  sin que esto no pierda su generalidad.

Sean las variables de estado  $e_i(t)$  para todo  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , las cuales corresponden a:

$$\begin{aligned} e_0(t) &= y(t), \\ e_1(t) &= \frac{dy(t)}{dt}, \\ &\vdots \\ e_{n-2}(t) &= \frac{d^{n-2}y(t)}{dt^{n-2}}, \\ e_{n-1}(t) &= \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Ahora, de la Ecuación (3.34), se tiene que al derivar cada una de las variables de estado  $e_i(t)$  para todo  $i = 0, 1, \dots, n-1$  y al establecer sus equivalencias, se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{de_0(t)}{dt} &= \frac{dy(t)}{dt} = e_1(t), \\ \frac{de_1(t)}{dt} &= \frac{d^2y(t)}{dt^2} = e_2(t), \\ &\vdots \\ \frac{de_{n-2}(t)}{dt} &= \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} = e_{n-1}(t), \\ \frac{de_{n-1}(t)}{dt} &= \frac{d^n y(t)}{dt^n}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Del modelo definido por la Ecuación (3.33), se tiene entonces que

$$\frac{de_n(t)}{dt} = \frac{d^n y(t)}{dt^n} = - \sum_{k=1}^n a_{n-k} \frac{d^{n-k} y(t)}{dt^{n-k}} + b_0 x(t) = - \sum_{k=1}^n a_{n-k} e_{n-k}(t) + b_0 x(t). \quad (3.36)$$

De las Ecuaciones (3.34), (3.35) y (3.36), se obtiene

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} e_0(t) \\ e_1(t) \\ \vdots \\ e_{n-3}(t) \\ e_{n-2}(t) \\ e_{n-1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0(t) \\ e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_{n-2}(t) \\ e_{n-1}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ b_0 \end{pmatrix} x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (3.37)$$

donde la respuesta del sistema, en este caso particular, está definida por  $y(t) = e_0(t)$ .

La Ecuación (3.37) representa lo que se conoce por ecuación de estado, la cual está en términos de las variables de estado  $e_i(t)$  para todo  $i = 0, 1, \dots, n-1$ .

Es importante señalar que debido al tratamiento con que son analizados los sistemas en cuanto a su número de excitaciones y respuestas, es decir, sistemas de una sola entrada o señal de excitación y una sola salida o respuesta, y esta última únicamente depende de una variable de estado, la respuesta del sistema es definida únicamente por una variable de estado.

Dicho esto, entonces los sistemas representados mediante sus variables de estado pueden ser definidos de la forma

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e}(t) = \mathbf{A} \mathbf{e}(t) + \mathbf{b} x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (3.38)$$

donde  $\mathbf{e}(t)$  representa el vector de estado definido en  $\mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $\mathbf{A}$  la matriz de coeficientes o parámetros del sistema en  $\mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  define los parámetros de la excitación, y  $\frac{d}{dt}$  corresponde al operador primera derivada, que al actuar sobre un vector su resultado es un nuevo vector cuyas componentes están definidas por la primera derivada de cada elemento del vector, en esta caso, del vector de estado  $\mathbf{e}(t)$ . Es decir,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e}(t) = \dot{\mathbf{e}}(t) = \left( \frac{de_0(t)}{dt}, \frac{de_1(t)}{dt}, \dots, \frac{de_{n-1}(t)}{dt} \right)^T, \quad (3.39)$$

donde el superíndice  $T$  denota el vector transpuesto.

Al aplicar lo definido por la Ecuación (3.39) en la Ecuación (3.38), se puede expresar que

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{e}(t) + \mathbf{b} x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.40)$$

**Observación 3.1** La representación de una ecuación diferencial de orden  $n$  y de primer grado requiere únicamente de  $n$  variables de estado para ser representada completamente.

■ **EJEMPLO 3.4**

Sea el siguiente ejemplo correspondiente a un sistema LDCID de tercer orden, y cuyo modelo matemático es

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + a_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0y(t) = b_0x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.41)$$

Representa el sistema en el espacio de estado.

**Solución**

Empleando la definición de variables de estado, se tiene

$$\begin{aligned} e_0(t) &= y(t), \\ e_1(t) &= \frac{dy(t)}{dt}, \\ e_2(t) &= \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

De la Ecuación (3.42), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{de_0(t)}{dt} &= \frac{dy(t)}{dt} = e_1(t), \\ \frac{de_1(t)}{dt} &= \frac{d^2y(t)}{dt^2} = e_2(t), \\ \frac{de_2(t)}{dt} &= \frac{d^3y(t)}{dt^3} = -a_0e_0(t) - a_1e_1(t) - a_2e_2(t) + b_0x(t). \end{aligned} \quad (3.43)$$

De la Ecuación (3.43), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} e_0(t) \\ e_1(t) \\ e_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0(t) \\ e_1(t) \\ e_2(t) \end{pmatrix} + \\ &\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{pmatrix} x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Se tiene entonces que la respuesta del sistema, según la Ecuación (3.42), está definida mediante  $y(t) = e_0(t)$ .

**3.3.1 Discretización de sistemas por espacio de estado**

En este apartado se aplicarán los conceptos de discretización del operador derivada, a los fines de proponer un sistema de ecuaciones en diferencias, que permita obtener una solución numérica cuando el sistema LDCID de orden  $n$ -ésimo bajo estudio está representado a través de una ecuación diferencial.

Es oportuno indicar que la discretización de los sistemas LDCID mediante su representación en espacio de estado, conduce a un mejor aproximación que el método de discretiza-

ción mostrado en la Sección 3.2, cuando el sistema es de segundo o mayor orden, debido al hecho de que únicamente se establecen aproximaciones numéricas sobre las  $n$  operaciones de derivadas de primer orden. Mientras el método de discretización establece recurrentes aproximaciones en el operador derivada  $n$ -ésimo.

Para esto se debe entonces disponer de la representación del sistema LDCID mediante variables de estado, tal como es mostrado en la Ecuación (3.37). No obstante, se empleará en primera instancia la notación matricial definida por la Ecuación (3.38) de la página 70.

Ahora, al reemplazar

$$\frac{de_i(t)}{dt} \approx \frac{e_i[k+1] - e_i[k]}{h}, \quad \forall i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (3.45)$$

en la Ecuación (3.38), donde  $h$  es el paso entre muestras, se obtiene que una representación matricial aproximada puede ser definida por

$$\frac{\mathbf{e}[k+1] - \mathbf{e}[k]}{h} = \mathbf{A}\mathbf{e}[k] + \mathbf{b}x[k], \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (3.46)$$

la cual al reordenar los términos se tiene que

$$\mathbf{e}[k+1] = (\mathbf{I} + h\mathbf{A})\mathbf{e}[k] + h\mathbf{b}x[k], \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (3.47)$$

donde  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  denota la matriz identidad, y  $k$  en este caso representa el contador de muestras discretas.

Otro modo de expresar lo representado por la Ecuación (3.47) es a través de las Ecuaciones (3.45) y (3.37), donde nuevamente  $k$  significa el contador de muestras discretas, con lo cual se obtiene

$$\begin{pmatrix} e_0[k+1] \\ e_1[k+1] \\ \vdots \\ e_{n-3}[k+1] \\ e_{n-2}[k+1] \\ e_{n-1}[k+1] \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0[k] \\ e_1[k] \\ e_2[k] \\ \vdots \\ e_{n-2}[k] \\ e_{n-1}[k] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{pmatrix} x[k] + \begin{pmatrix} e_0[k] \\ e_1[k] \\ \vdots \\ e_{n-3}[k] \\ e_{n-2}[k] \\ e_{n-1}[k] \end{pmatrix}, \quad \forall k \geq 0, \quad (3.48)$$

donde  $h$  significa el paso de discretización y  $k \in \mathbb{Z}$  representa en contador de secuencia de muestras.

**■ EJEMPLO 3.5**

Sea el sistema LDCID de segundo orden propuesto en el Ejemplo 3.3 y cuyo modelo matemático es

$$5 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 6 \frac{dy(t)}{dt} = 6 \frac{dx(t)}{dt}, \quad \forall t > 0, \quad (3.49)$$

donde  $x(t)$  es la señal de excitación del sistema, e  $y(t)$  corresponde a la señal de respuesta del sistema.

Para el modelo matemático definido por la Ecuación (3.49), represente el modelo en el espacio de estado y defínalo también en el dominio discreto.

**Solución**

A objeto de contar con un modelo más general en el espacio de estado, se puede reexesar la Ecuación (3.49) como

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t), \quad \forall t > 0, \quad (3.50)$$

donde  $a_1 = \frac{6}{5}$ ,  $a_0 = 0$ ,  $b_1 = \frac{6}{5}$  y  $b_0 = 0$ .

Ahora, al definir las variables de estado, se tiene

$$\begin{aligned} e_0(t) &= y(t), \\ e_1(t) &= \frac{dy(t)}{dt}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

De la Ecuación 3.51, se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{de_0(t)}{dt} &= \frac{dy(t)}{dt} = e_1(t), \\ \frac{de_1(t)}{dt} &= \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -a_0 y(t) - a_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t), \end{aligned} \quad (3.52)$$

Sustituyendo la Ecuación (3.51) en la Ecuación (3.52) y expresándola en forma matricial se consigue

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} e_0(t) \\ e_1(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0(t) \\ e_1(t) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \end{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_0 \end{pmatrix} x(t), \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Al aplicar el operador derivada lateral derecha en la Ecuación (3.53), se obtiene

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} e_0[n+1] \\ e_1[n+1] \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & h \\ -a_0 h & -a_1 h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0[n] \\ e_1[n] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_0[n] \\ e_1[n] \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & b_0 h - b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x[n+1] \\ x[n] \end{pmatrix}, \quad \forall n \geq 0, \end{aligned} \quad (3.54)$$

donde la respuesta del sistema es  $y[n] = e_0[n]$  para todo  $n \geq 0$ , la cual también puede ser expresada como

$$\begin{pmatrix} e_0[n+1] \\ e_1[n+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h \\ -a_0h & 1-a_1h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0[n] \\ e_1[n] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & b_0h-b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x[n+1] \\ x[n] \end{pmatrix}, \quad \forall n \geq 0, \quad (3.55)$$

Ahora, al sustituir por los coeficientes  $a_1 = \frac{6}{5}$ ,  $a_0 = 0$ ,  $b_1 = \frac{6}{5}$ ,  $b_0 = 0$  y  $h = 0,1$  en la Ecuación 3.54, se obtiene

$$\begin{pmatrix} e_0[n+1] \\ e_1[n+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,1 \\ 0 & 0,88 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0[n] \\ e_1[n] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1,2 & -1,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x[n+1] \\ x[n] \end{pmatrix}, \quad \forall n \geq 0. \quad (3.56)$$

De los obtenido en la Ecuación (3.56), se tiene en forma explícita que

$$e_0[n+1] = e_0[n] + 0,1e_1[n], \quad \forall n \geq 0, \quad (3.57a)$$

$$e_1[n+1] = 0,88e_1[n] + 1,2x[n+1] - 1,2x[n], \quad \forall n \geq 0. \quad (3.57b)$$

El sistema de ecuaciones mostradas por las Ecuaciones (3.57) son conocidas como el sistemas de ecuaciones en diferencias, las cuales ambas conforman un sistema de ecuaciones recurrentes.

No obstante, al expresar  $e_1[n]$ , en términos de  $e_0[n]$  y  $e_0[n+1]$  a partir de la Ecuación (3.57a), se obtiene que

$$e_1[n] = \frac{e_0[n+1] - e_0[n]}{0,1}, \quad \forall n \geq 0, \quad (3.58)$$

y en consecuencia

$$e_1[n+1] = \frac{e_0[n+2] - e_0[n+1]}{0,1}, \quad \forall n \geq 0, \quad (3.59)$$

las cuales al sustituir estas dos últimas expresiones en la Ecuación (3.57b) se consigue el modelo matemático discretizado del sistema, el cual viene dado por

$$\frac{e_0[n+2] - e_0[n+1]}{0,1} - 0,88 \frac{e_0[n+1] - e_0[n]}{0,1} = 1,2x[n+1] - 1,2x[n], \quad \forall n \geq 0. \quad (3.60)$$

Al agrupar los términos de la Ecuación (3.60) se obtiene

$$10e_0[n+2] - 9,8e_0[n+1] + 8,8e_0[n] = 1,2x[n+1] - 1,2x[n], \quad \forall n \geq 0. \quad (3.61)$$

Ahora, como  $e_0[n] = y[n]$ , finalmente se puede escribir que

$$y[n+2] - 0,98y[n+1] + 0,88y[n] = 0,12x[n+1] - 0,12x[n], \quad \forall n \geq 0. \quad (3.62)$$

**■ EJEMPLO 3.6**

Sea el sistema LDCID de tercer orden mostrado en el Ejemplo 3.4 de la página 71. Para el sistema descrito mediante su ecuación diferencial, determine su representación en espacio de estado definido en el dominio discreto.

**Solución**

Partiendo de la solución del Ejemplo 3.4 mostrada en la Ecuación (3.44) y aplicando las Ecuaciones (3.45) y (3.47), se consigue que para todo  $n \geq 0$

$$\begin{pmatrix} e_0[n+1] \\ e_1[n+1] \\ e_2[n+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h & 0 \\ 0 & 1 & h \\ -a_0h & -a_1h & 1-a_2h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0[n] \\ e_1[n] \\ e_2[n] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0h \end{pmatrix} x[n], \quad (3.63)$$

donde  $h$  es el paso de discretización y  $n = 0, 1, \dots$  representa en este caso el contador de muestras.

Por otra parte, de acuerdo a las variables de estado definidas en el Ejemplo 3.4, la respuesta en el dominio discreto del sistema viene dada por

$$y[n] = e_0[n], \quad \forall n \geq 0. \quad (3.64)$$

**3.3.2 Discretización de sistemas por integración de las variables de estado**

Otro enfoque para obtener la representación de un sistema LDCID definido en el dominio discreto, mediante sus variables de espacio de estado, es a través de la integración de su modelo matemático en espacio de estado definido en el dominio continuo, cuya representación ha sido dada por la Ecuación (3.40) de la página 70. Para esto, al multiplicar la Ecuación (3.40) por  $dt$ , se obtiene que

$$d\mathbf{e}(t) = \mathbf{A}\mathbf{e}(t)dt + \mathbf{b}x(t)dt, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (3.65)$$

e integrando entre  $t_0$  y  $t_0 + h$ , se consigue que

$$\int_{t_0}^{t_0+h} d\mathbf{e}(t) = \mathbf{A} \int_{t_0}^{t_0+h} \mathbf{e}(t)dt + \mathbf{b} \int_{t_0}^{t_0+h} x(t)dt, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (3.66)$$

donde  $h > 0$  es el intervalo de integración.

Ahora, aplicando a la Ecuación (3.66) uno de los métodos de integración, por ejemplo, integración rectangular por la izquierda, se tiene que

$$\mathbf{e}(t_0+h) - \mathbf{e}(t_0) = h\mathbf{A}\mathbf{e}(t_0) + h\mathbf{b}x(t_0), \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}, \quad (3.67)$$

con lo cual, al definir  $t_0$  como  $k$ , y  $t_0 + h$  como  $k + 1$ , se tiene que

$$\mathbf{e}[k+1] = (\mathbf{I} + h\mathbf{A})\mathbf{e}[k] + h\mathbf{b}x[k], \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (3.68)$$

Por el contrario, al aplicar el método de integración rectangular por la derecha a la Ecuación (3.66), se tiene que

$$\mathbf{e}(t_0 + h) - \mathbf{e}(t_0) = h\mathbf{A}\mathbf{e}(t_0 + h) + h\mathbf{b}x(t_0 + h), \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}, \quad (3.69)$$

lo que arroja, al definir  $t_0$  como  $n$ , y  $t_0 + h$  como  $n + 1$

$$\mathbf{e}[k + 1] - \mathbf{e}[k] = h\mathbf{A}\mathbf{e}[k + 1] + h\mathbf{b}x[k + 1], \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (3.70)$$

Por otra parte, al aplicar la integración trapezoidal a la Ecuación (3.66), se consigue que

$$\mathbf{e}(t_0 + h) - \mathbf{e}(t_0) = \frac{h}{2}\mathbf{A}(\mathbf{e}(t_0) + \mathbf{e}(t_0 + h)) + \frac{h}{2}\mathbf{b}(x(t_0) + x(t_0 + h)), \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}. \quad (3.71)$$

Nuevamente, al definir  $t_0$  como  $n$ , y  $t_0 + h$  como  $n + 1$  en la Ecuación (3.71), se tiene

$$\mathbf{e}[k + 1] - \mathbf{e}[k] = \frac{h}{2}\mathbf{A}(\mathbf{e}[k] + \mathbf{e}[k + 1]) + \frac{h}{2}\mathbf{b}(x[k] + x[k + 1]), \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (3.72)$$

Como puede verse, la discretización de los sistemas LDCID de orden superior definidos en el dominio continuo, cuando éstos son representados en el espacio de estado, a través del enfoque de integración permiten llegar a una representación en términos del espacio de estado definido en el dominio discreto, con lo cual mediante un sencillo procedimiento puede obtenerse la solución numérica asociada a cada sistema.

Note que la respuesta del sistema está representada por  $y[k] = e_0[k]$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

### 3.3.3 Aplicación de la discretización por variables de estado

Una de las aplicaciones que tiene el concepto de espacio de estado es su empleo en la discretización de modelos matemáticos de sistemas LDCID de orden superior definidos en el dominio continuo.

Esta aplicación se estudiará a través del siguiente ejemplo.

#### ■ EJEMPLO 3.7

Sea un sistema LDCID de segundo orden definido en el dominio continuo, y cuyo modelo matemático viene dado por

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0y(t) = b_0x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (3.73)$$

y con condiciones iniciales dadas por  $y(t)|_{t=0} = y_0$ ,  $\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = \dot{y}_0$

Para el sistema descrito mediante el modelo matemático definido por la Ecuación (3.73), determine su correspondiente modelo matemático definido en el dominio discreto.

#### Solución

A objeto de hallar una solución<sup>10</sup> al problema, se definen las variables de estado:

<sup>10</sup>Se dice que es una solución, debido al hecho de que existen diversas soluciones de acuerdo al método de integración que se emplee.

$$\begin{aligned} e_0(t) &= y(t), \\ e_1(t) &= \frac{dy(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Al determinar las derivadas de las variables de estado definidas por la Ecuación (3.74), se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{de_0(t)}{dt} &= \frac{dy(t)}{dt} = e_1(t), \\ \frac{de_1(t)}{dt} &= \frac{d^2y(t)}{dt^2} = -a_0e_0(t) - a_1e_1(t) + b_0x(t), \end{aligned} \quad (3.75)$$

debido a las variables de estado definidas por la Ecuación (3.74).

Multiplicando por  $dt$  la Ecuación (3.75), se tiene que

$$\begin{aligned} de_0(t) &= e_1(t)dt, \\ de_1(t) &= -a_0e_0(t)dt - a_1e_1(t)dt + b_0x(t)dt. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Al integrar la Ecuación (3.76) entre  $t_0$  y  $t_0 + h$ , se tiene

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+h} de_0(t) &= \int_{t_0}^{t_0+h} e_1(t)dt, \\ \int_{t_0}^{t_0+h} de_1(t) &= -a_0 \int_{t_0}^{t_0+h} e_0(t)dt - a_1 \int_{t_0}^{t_0+h} e_1(t)dt + b_0 \int_{t_0}^{t_0+h} x(t)dt. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Al aplicar, por ejemplo, integración rectangular por la izquierda a la Ecuación (3.77), se obtiene

$$\begin{aligned} e_0(t_0 + h) - e_0(t_0) &\cong he_1(t_0), \\ e_1(t_0 + h) - e_1(t_0) &\cong -a_0he_0(t_0) - a_1he_1(t_0) + b_0hx(t_0). \end{aligned} \quad (3.78)$$

Al representar  $t_0 = n$  y  $t_0 + h = n + 1$ , se obtienen

$$e_0[n + 1] - e_0[n] = he_1[n], \quad (3.79a)$$

$$e_1[n + 1] - e_1[n] = -ha_0e_0[n] - ha_1e_1[n] + hb_0x[n]. \quad (3.79b)$$

Despejando  $e_1[n]$  de la Ecuación (3.79a) y sustituyendola en la Ecuación (3.79b), se consigue que

$$e_0[n + 2] + (a_1h - 2)e_0[n + 1] + (1 + a_0h^2 - a_1h)e_0[n] = hb_0x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (3.80)$$

lo que al sustituir  $e_0[n + q]$  por  $y[n + q]$  para todo  $q \in \mathbb{Z}$  en la Ecuación (3.80), se obtiene

$$y[n + 2] + (a_1h - 2)y[n + 1] + (1 + a_0h^2 - a_1h)y[n] = hb_0x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.81)$$

La Ecuación (3.81) representa el modelo matemático equivalente definido en el dominio discreto, cuando se empleó el método de integración rectangular por la izquierda.

En cuanto a las condiciones iniciales, se tiene que

$$y(t)|_{t=0} = y[0] = y_0. \quad (3.82)$$

Por otra parte, la segunda condición inicial se obtiene a partir de la información de la derivada de  $y(t)$  con respecto a  $t$ , en  $t = 0$ , es decir, para  $t_0 = 0$  se tiene

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = \dot{y}_0. \quad (3.83)$$

Al multiplicar la Ecuación (3.83) por  $dt$ , e integrarla entre  $t_0$  y  $t_0 + h$ , se obtiene que

$$\int_{t_0}^{t_0+h} dy(t) = \dot{y}_0 \int_{t_0}^{t_0+h} dt, \quad (3.84)$$

donde  $t_0 = 0$ .

Empleando la integración rectangular por la izquierda, se tiene que

$$y(t_0 + h) - y(t_0) = \dot{y}_0 h, \quad (3.85)$$

lo que implica al hacer  $t_0 = 0$ , y representar  $y(0) = y[0] = y_0$ , e  $y(h) = y[1]$ , se obtiene

$$y[1] = y_0 + \dot{y}_0 h. \quad (3.86)$$

Quedando definidas las condiciones iniciales como

$$\begin{aligned} y[0] &= y_0 \\ y[1] &= y_0 + \dot{y}_0 h \end{aligned} \quad (3.87)$$

El lector debería repetir el procedimiento, empleando los métodos de integración rectangular por la derecha y trapezoidal, el cual este último presenta una particularidad que debería ser revisada por el lector.

### 3.3.4 Simulación de sistemas por espacio de estado

Una vez obtenido el modelo del sistema a simular, definido en el dominio discreto y en el espacio de estado, resulta realmente sencillo conseguir las muestras que permitan representar gráficamente el resultado de la simulación del sistema.

A los efectos de mostrar el empleo del modelo discreto de estado, se presenta el siguiente algoritmo, el cual permite simular el sistema definido por el Ejemplo 3.6.

---

**Algoritmo 3.1:** Algoritmo de simulación del sistema del Ejemplo 3.6

---

**Entrada:**

$e_i[0] = e_{i,0}$ ,  $\forall i = 0, 1, 2$ : condiciones iniciales;

$h$ : paso de discretización;

$x_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}_+$ : secuencia de la señal de excitación en el dominio discreto;

**Salida:**  $e_{i,k}$   $\forall i = 0, 1, 2$  y  $k > 0$ .

**inicio**

**Dado:**

$a_i$ : los coeficientes del sistema para  $i = 0, 1, 2$ ;

$b_0$ : el coeficiente de la señal de excitación;

$h$ : paso de discretización;

$N$ : número de muestras a calcular en la simulación;

**para  $k = 0$  a  $N - 1$  haga**

**Asigne a:**  $e_{1,(k+1)} \leftarrow e_{0,k} + he_{1,k}$ ;

**Asigne a:**  $e_{2,(k+1)} \leftarrow e_{1,k} + he_{2,k}$ ;

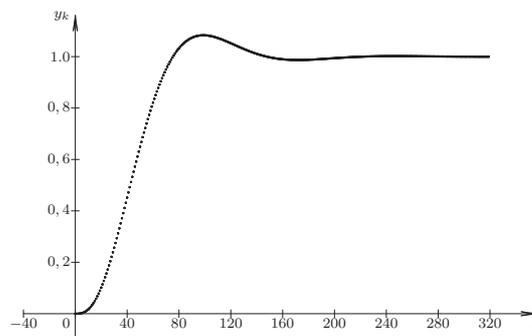
**Asigne a:**  $e_{3,(k+1)} \leftarrow -a_0he_{0,k} - a_1he_{1,k} + (1 - a_2h)e_{2,k} + b_0hx_k$ ;

**fin para**

**fin**

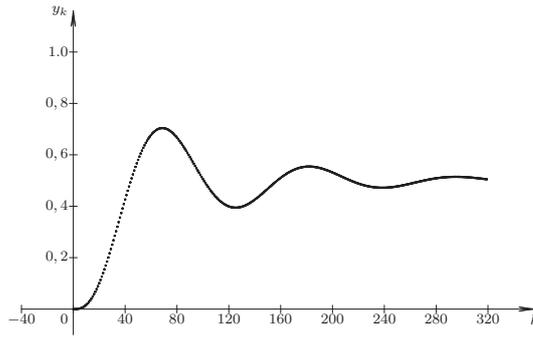
---

Note que la notación ( $k$ ) representa el contador de muestras para cada  $k$ -ésima muestra, además observe que según la Ecuación (3.64), la respuesta  $y[n]$  para todo  $n \geq 0$  viene dada por las muestras registradas en  $e_0[n]$ .



**Figura 3.2.** Muestras de  $y_k$  del sistema del Ejemplo 3.6, con  $a_0 = 1$ ,  $a_2 = a_3 = 2$

La Figura 3.2 muestra la secuencia de muestras de la respuesta del sistema  $y_k$  para  $0 \leq k \leq 320$  ante una señal de excitación escalón unitario en tiempo discreto, para  $a_0 = 1$ ,  $a_i = 2$  para  $i = 1, 2$ , y  $b_0 = 1$ , y con  $h = 0,05$ .



**Figura 3.3.** Muestras de  $y_k$  del sistema del Ejemplo 3.6, con  $a_i = 2$  para  $i = 1, 2, 3$

Mientras que la Figura 3.3 ilustra la secuencia de muestras de la respuesta del sistema  $y_k$  para  $0 \leq k \leq 320$  ante una señal de excitación escalón unitario en tiempo discreto, para valores de  $a_i = 2$  para  $i = 1, 2, 3$ , y  $b_0 = 1$ . Para la simulación se consideró un valor de  $h = 0,05$ .

### 3.4 MODELO MATEMÁTICO DE PRIMER ORDEN

Antes de estudiar los modelos matemáticos de manera general, se estudiará la solución de un sistema de primer orden LDCID definido en el dominio discreto. Para esto, considere el sistema definido por

$$y[n+1] + a_0 y[n] = x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (3.88)$$

donde  $x[n]$  representa la señal de excitación del sistema en el dominio discreto e  $y[n]$  representa la señal de respuesta del sistema en el dominio discreto. Además, se conoce que  $y[0] = y_0$ .

#### 3.4.1 Solución del modelo matemático de primer orden

Para resolver el modelo, se empleará el enfoque de modelo recurrente, el cual en términos de las secuencias que pueden ser extraídas de la Ecuación (3.88), se tiene

$$y_{n+1} + a_0 y_n = x_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.89)$$

Al expresar el término de mayor desplazamiento definido por la Ecuación (3.89), se obtiene

$$y_{n+1} = -a_0 y_n + x_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.90)$$

Basado en la Ecuación (3.90) se tiene que

$$y_{n+2} = -a_0 y_{n+1} + x_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (3.91)$$

lo que permite expresar  $y_{n+2}$  al sustituir  $y_{n+1}$  de la Ecuación (3.90) en la Ecuación (3.91), consiguiéndose

$$y_{n+2} = (-a_0)^2 y_n + (-a_0) x_n + x_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.92)$$

Aplicando el mismo procedimiento, se tiene que

$$y_{n+3} = (-a_0)^3 y_n + (-a_0)^2 x_n + (-a_0)x_{n+1} + x_{n+2}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.93)$$

De las Ecuaciones (3.90), (3.92) y (3.93) se obtiene al generalizar que

$$y_{n+k} = (-a_0)^k y_n + \sum_{q=0}^{k-1} (-a_0)^{(k-1)-q} x_{n+q}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (3.94)$$

lo que arroja al hacer  $n = 0$  que

$$y_k = (-a_0)^k y_0 + \sum_{q=0}^{k-1} (-a_0)^{(k-1)-q} x_q, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (3.95)$$

lo que representa la secuencia en términos de  $k$ , y la expresión en el dominio discreto puede ser dada por

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} y_k \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.96)$$

Note que el primer término de la Ecuación (3.95) depende, además del parámetro  $a_0$ , de la condición inicial y no así de la señal de excitación, es decir, depende de las características intrínsecas del sistema. Mientras el segundo término de la Ecuación (3.95) depende de: la señal de excitación y del parámetro  $a_0$  del sistema. Esta solución, al igual que el resultado obtenido en la Sección 2.2 en relación a la solución obtenida en el sistema de primer orden para cuando el sistema es LDCID definido en el dominio continuo, será objeto de estudio también en un próximo capítulo.

Observe las semejanzas entre la Ecuación (2.23) de la página 35, y la Ecuación (3.95), la cual es reescrita en este apartado.

$$y(t) = y(0)e^{-a_0 t} + \int_0^t e^{-a_0(t-\tau)} x(\tau) d\tau, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.97)$$

### 3.5 FORMA GENERAL DE MODELOS MATEMÁTICOS EN EL DOMINIO DISCRETO

En esta sección se estudiará la solución matemática de los modelos matemáticos definidos en el dominio discreto, por cuanto si bien es cierto que las soluciones numéricas son hoy en día fáciles de implementar, ellas están sujeta a errores numéricos que pueden conllevar a una significativa acumulación de errores, más cuando son empleado los modelos matemáticos recurrentes.

Basado en este enfoque, se debe estudiar la solución matemática obtenida por medios analíticos. Sin embargo, a fin de abordar el tema es importante formular en el modelo matemático que será estudiado en esta sección, y cuya formulación es presentada en el siguiente problema:

**Problema 3.1** Sea un sistema LDCID de orden  $k$ -ésimo definido en el dominio discreto  $n \in \mathbb{Z}$ , y cuyo modelo genérico es

$$\sum_{i=0}^k a_i y[n+i] = \sum_{i=0}^r b_i x[n+i], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (3.98)$$

donde  $x[n+i]$  para cada  $i = 0, 1, \dots, r$  son las muestras de la señal discreta de excitación;  $y[n+i]$  para cada  $i = 0, 1, \dots, k$  son las muestras de la señal discreta de respuesta;  $a_{k-i}$  para cada  $i = 0, 1, \dots, k$  son los parámetros del sistema; y  $b_{r-i}$  para cada  $i = 0, 1, \dots, r$  son los coeficientes que alteran las muestras de la señal de excitación discreta.

El modelo matemático dado por la Ecuación (3.98) es un claro ejemplo de las llanadas ecuaciones en diferencias.

**Definición 3.1** Se define al operador  $q^i$  al operador desplazamiento de una muestra con respecto a una muestra referencial  $f[n]$ , es decir,

$$q^i f[n] = f[n+i], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.99)$$

Si se aplica el operador  $q^i$  dado por la Definición 3.1, al modelo matemático del sistema definido por la Ecuación (3.98), éste arroja como resultado

$$\sum_{i=0}^k a_i q^i y[n] = \sum_{i=0}^r b_i q^i x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (3.100)$$

donde se considerará sin que esto comprometa la generalización de lo tratado que el coeficiente  $a_k = 1$ .

Sean

$$D(q) = \sum_{i=0}^k a_i q^i, \quad (3.101a)$$

y

$$N(q) = \sum_{i=0}^r b_i q^i, \quad (3.101b)$$

los polinomios que multiplican respectivamente a  $y[n]$  y  $x[n]$ .

De manera semejante a como fue tratado el caso en el dominio continuo, el  $D(q)$  es el ampliamente conocido polinomio característico del sistema.

En consecuencia, el modelo matemático del sistema puede ser expresado como

$$D(q)y[n] = N(q)x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.102)$$

### 3.5.1 Respuesta transitoria

Buscando hacer una analogía con los sistemas LDCID definidos en el dominio continuo, se presenta el siguiente método a objeto de determinar la respuesta transitoria al Problema 3.1

**Método 3.1 (Determinación de la Respuesta Transitoria)** Dada la ecuación en diferencias definida por la Ecuación (3.98), ejecute:

*Paso 1. Asegúrese de que el término  $a_k$  de la ecuación en diferencias es igual a uno. Si no es así, divida toda la ecuación en diferencias entre  $a_k$ .*

*Paso 2. Aplique el operador  $q$  a la ecuación en diferencias.*

*Paso 3. Determine las  $n$  raíces que anulen el polinomio  $D(q)$  y denote las raíces reales  $r_i$  para cada  $i = 1, \dots, n_r$ , y las raíces complejas conjugadas  $z_i = \alpha_i \pm j\beta_i = r_i e^{\pm j\theta_i}$  para cada  $i = n_r + 1, \dots, n$ , donde  $0 \leq n_r \leq n$ .*

*Paso 4. Para cada raíz obtenida, construya la respuesta transitoria o la solución homogénea del problema de acuerdo a la siguiente regla:*

- a) para cada  $i$ -ésima raíz real simple  $r_i$ , asocie una solución de la forma  $y_i[n] = r_i^n$ .*
- b) Para cada  $i$ -ésima raíz real  $r_i$  de multiplicidad  $m_i$ , asocie un conjunto de soluciones dada por  $y_{i,m_i}[n] = n^{m_i-k_i} r_i^n$  para todo  $k_i = 1, \dots, m_i$ .*
- c) para cada  $i$ -ésimo par de raíces complejas conjugadas simples  $z_i = \alpha_i \pm j\beta_i = r_i e^{\pm j\theta_i}$ , asocie un par de soluciones  $y_i^{[c]}[n] = r_i^n \cos(n\theta_i)$  y  $\bar{y}_i^{[c]}[n] = r_i^n \sin(n\theta_i)$ .*
- d) para cada  $i$ -ésimo par de raíces complejas conjugadas  $z_i = \alpha_i \pm j\beta_i = r_i e^{\pm j\theta_i}$  de multiplicidad  $m_i$ , asocie un conjunto de parejas de soluciones  $y_{i,m_i}^{[c]}[n] = n^{m_i-k_i} r_i^n \cos(n\theta_i)$  y  $\bar{y}_{i,m_i}^{[c]}[n] = n^{m_i-k_i} r_i^n \sin(n\theta_i)$  para todo  $k_i = 1, \dots, m_i$ .*

*Paso 5. Exprese la suma ponderada de las soluciones obtenidas en el Paso 4, es decir,*

$$\begin{aligned}
 y_h[n] = & \sum_{i \in \arg(r_i)} c_i y_i[n] + \sum_{i \in \arg(r_i^{[m_i]})} c_i y_{i,m_i}[n] + \\
 & \sum_{i \in \arg(z_i)} c_i y_i^{[c]}[n] + \sum_{i \in \arg(z_i)} c_i \bar{y}_i^{[c]}[n] + \\
 & \sum_{i \in \arg(z_i^{[m_i]})} c_i y_{i,m_i}^{[c]}[n] + \sum_{i \in \arg(z_i^{[m_i]})} c_i \bar{y}_{i,m_i}^{[c]}[n],
 \end{aligned}$$

*donde  $i \in \arg(\cdot)$  representa los subíndices que están asociados a las raíces: reales simples ( $r_i$ ), reales de multiplicidad  $m_i$  ( $r_i^{[m_i]}$ ), complejas conjugadas simples ( $z_i$ ) y complejas conjugadas de multiplicidad  $m_i$  ( $z_i^{[m_i]}$ ).*

### 3.5.2 Respuesta permanente

Considere nuevamente el Problema 3.1 de la página 81, el cual después de haber aplicado el operador  $q$ , se tiene que al despejar  $y[n]$

$$y[n] = \frac{N(q)}{D(q)} x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (3.103)$$

donde, al igual que en los modelos en el dominio continuo, la fracción  $\frac{N(q)}{D(q)}$  es el conocido operador del sistema discreto  $L(q)$ .

Ahora, suponga que el sistema del Problema 3.1 es excitado por la señal en el dominio discreto definida por

$$x[n] = B e^{sn} = B (e^s)^n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (3.104)$$

en donde al considerar que  $s = \sigma + j\omega$ , la Ecuación (3.104) puede ser reescrita como

$$x[n] = B(e^{\sigma+j\omega})^n = B(e^\sigma)^n(e^{j\omega})^n = Br^n e^{jn\omega}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (3.105)$$

donde obviamente  $r = e^\sigma$ .

Por medio de la Ecuación (3.105), se puede ofrecer la respuesta particular o forzada ante diversas señales de excitaciones, las cuales serán modeladas a través de la siguiente Tabla 3.1.

**Tabla 3.1.** Operaciones a ejecutar sobre  $L(q)Be^{ns}$

Caso de $x[n]$	Valores de $s$ y operación		
	$\sigma$	$\omega$	$y_f[n]$
$r^n u[n]$	$\ln r$	0	$L(q) _{e^s} Be^{ns} u[n]$
$\cos(n\omega)u[n]$	0	-	$\text{Re} [L(q) _{e^s} Be^{ns}] u[n]$
$\text{sen}(n\omega)u[n]$	0	-	$\text{Im} [L(q) _{e^s} Be^{ns}] u[n]$
$r^n \cos(n\omega)u[n]$	$\ln r$	-	$\text{Re} [L(q) _{e^s} Be^{ns}] u[n]$
$r^n \text{sen}(n\omega)u[n]$	$\ln r$	-	$\text{Im} [L(q) _{e^s} Be^{ns}] u[n]$

**Observación 3.2 (Respuesta particular ante un escalón unitario)** *Note que la determinación de la respuesta forzada ante una señal escalón unitaria en el dominio discreto, puede ser obtenida a partir de la respuesta forzada ante una excitación definida por  $r^n u[n]$ , luego a través del cálculo del límite cuando  $r$  tiende a uno, en virtud de que*

$$\lim_{r \rightarrow 1} r^n u[n] = u[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.106)$$

*Sin embargo, la respuesta forzada o particular puede ser también obtenida a través de la ecuación en diferencias del sistema, cuando su excitación  $x(n) = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq 0$ .*

### 3.5.3 Respuesta completa

De manera análoga a lo estudiado en los sistemas LDCID definidos en el dominio continuo, la respuesta del sistema es la suma de la solución homogénea o transitoria y la solución particular o forzada, es decir,

$$y[n] = y_h[n] + y_f[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (3.107)$$

donde los coeficiente  $c_i$  correspondientes a la solución homogénea son determinados por evaluación de la solución completa para cada muestra  $n$  definida en las condiciones iniciales.

#### ■ EJEMPLO 3.8

Sea un sistema LDCID en tiempo discreto, definido por la siguiente modelo matemático

$$y[n+3] - 0,8y[n+2] + 0,37y[n+1] - 0,05y[n] = 1,5(0,95)^n u[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (3.108)$$

donde  $y[0] = 0, y[1] = 0$  y  $y[2] = 0$ .

Para el sistema dado por la Ecuación (3.108). Determine su solución completa.

**Solución**

Para esto se debe determinar la respuesta transitoria y la respuesta forzada.

Para determinar la respuesta transitoria, se aplicará el operador  $q$  dado por la Definición 3.1.

Aplicando el operador  $q$  a la Ecuación (3.108), se tiene

$$(q^3 - 0,8q^2 + 0,37q - 0,05)y[n] = x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (3.109)$$

donde  $x[n] = 1,5(0,95)^n u[n]$ .

Del cálculo de las raíces mediante el Scilab™ se tiene que de lo reportado en la Figura 3.4, las raíces que anulan el polinomio característico son:  $r_1 = 0,2; z_1 = 0,3 + j0,4, z_2 = 0,3 - j0,4 = 0,5e^{-\theta_1}$ , donde  $\theta_1 = \text{tg}^{-1}(4/3)$

```
-->D=poly([-0.05 0.37 -0.8 1], 'q', 'c');
-->z=roots(D)
z =
    0.2
    0.3 + 0.4i
    0.3 - 0.4i
```

**Figura 3.4.** Comandos Scilab™ para el cálculo de las raíces del polinomio característico para el Ejemplo 3.8

De aquí se tiene que la respuesta homogénea para todo  $n \geq 0$  tiene la siguiente expresión:

$$y_h[n] = \sum_{k=0}^{\infty} (c_1(0,2)^k + c_2(0,5)^k \cos(k\theta_1) + c_3(0,5)^k \text{sen}(k\theta_1)) \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.110)$$

Sabiendo que el operador del sistema está definido por

$$L(q) = \frac{1}{q^3 - 0,8q^2 + 0,37q - 0,05},$$

se tiene que la solución particular está dada por

$$y_p[n] = \frac{1}{q^3 - 0,8q^2 + 0,37q - 0,05} \Big|_{q=e^{\ln(0,95)}} 1,5(e^{\ln(0,95)})^n u[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.111)$$

$$y_p[n] = \frac{1}{q^3 - 0,8q^2 + 0,37q - 0,05} \Big|_{q=0,95} 1,5(0,95)^n u[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.112)$$

$$y_p[n] = 3,4334764(0,95)^n u[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.113)$$

Tomando los resultados dados por las Ecuaciones (3.110) y (3.111), se afirma que para todo  $n \geq 0$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} y_k \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (3.114)$$

donde

$$y_k = 0,2)^k + c_2(0,5)^k \cos(n\theta_1) + c_3(0,5)^k \sin(n\theta_1) + 3,4334764(0,95)^k, \quad \forall k \geq 0. \quad (3.115)$$

Al evaluar la Ecuación (3.114) para  $n = 0, 1, 2$ ; se tiene:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= -3,4334764 \\ c_1(0,2) + c_2(0,5) \cos(\theta_1) + c_3(0,5) \sin(\theta_1) &= -3,4334764(0,95) \\ c_1(0,2) + c_2(0,5)^2 \cos(2\theta_1) + c_3(0,5)^2 \sin(2\theta_1) &= -3,4334764(0,95)^2 \end{aligned} \quad (3.116)$$

De la Ecuación (3.116) se puede expresar el siguiente sistema de ecuaciones lineales, la cual viene dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0,2 & 0,5 \cos(\theta_1) & 0,5 \sin(\theta_1) \\ 0,04 & 0,25 \cos(2\theta_1) & 0,25 \sin(2\theta_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,4334764 \\ -3,2618026 \\ -3,0987124 \end{pmatrix},$$

donde debe recordarse que  $\theta_1 = \text{tg}^{-1}(4/3)$ .

Debe tomarse en cuenta que el Scilab™ emplea la forma implícita para el cálculo de la solución del sistema de ecuaciones lineales, es decir, el sistema de ecuaciones debe ser introducido de acuerdo a

$$\mathbf{A}\mathbf{c} + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (3.117)$$

donde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  es el vector nulo, y  $n$  representa el número de coeficientes  $c_i$  a calcular.

Empleando el Scilab™ a través de los siguientes comandos, se obtiene

Los datos de la matriz  $\mathbf{A}$  y el vector  $\mathbf{b}$  pueden ser verificados con los siguientes comandos Scilab™ mostrado en la Figura 3.6 de la página 87.

De la Ecuación (3.114) y de lo reportado en la Figura 3.5 de la página 87, se obtiene entonces que para todo  $n \geq 0$

$$\begin{aligned} y[n] = & -11,764706(0,2)^n + \\ & 8,3312295(0,5)^n \cos(0,9272952n) - \\ & -8,5205756(0,5)^n \sin(0,9272952n) + 3,4334764(0,95)^n. \end{aligned} \quad (3.118)$$

Por otra parte, a objeto de comparar la solución numérica que puede obtenerse de la ecuación recurrente asociada al modelo matemático definido mediante la Ecuación (3.108), y la solución conseguida por métodos matemáticos, se ha despejando la variable de respuesta de mayor anticipación, es decir, en este caso el término  $y[n+3]$

```

-->theta=atan(4/3);
-->function [Lq]=f(q,n)
-->Lq=(1.5*(0.95)^n)/(q^3-0.8*q^2+0.37*q-0.05)
-->endfunction
-->A=[1,1,0;
-->0.2,0.5*cos(theta),0.5*sin(theta);
-->0.04,0.25*cos(2*theta),0.25*sin(2*theta)];
-->b=[f(0.95,0);f(0.95,1);f(0.95,2)];
->[c,kerA]=linsolve(A,b)
kerA =
c = []
- 11.764706
  8.3312295
- 8.5205756
    
```

**Figura 3.5.** Comandos Scilab™ para el cálculo de los coeficientes  $c_i$  para  $i = 1, 2, 3$  del Ejemplo 3.8

```

-->A
A =
    1.    1.    0.
    0.2  0.3  0.4
    0.04 -0.07 0.24

-->b
b =
    3.4334764
    3.2618026
    3.0987124
    
```

**Figura 3.6.** Comandos Scilab™ para la verificación de los datos del Ejemplo 3.8

de la Ecuación (3.108), resultando

$$y[n+3] = 0,8y[n+2] - 0,37y[n+1] + 0,05y[n] + 1,5(0,95)^n u[n], \tag{3.119}$$

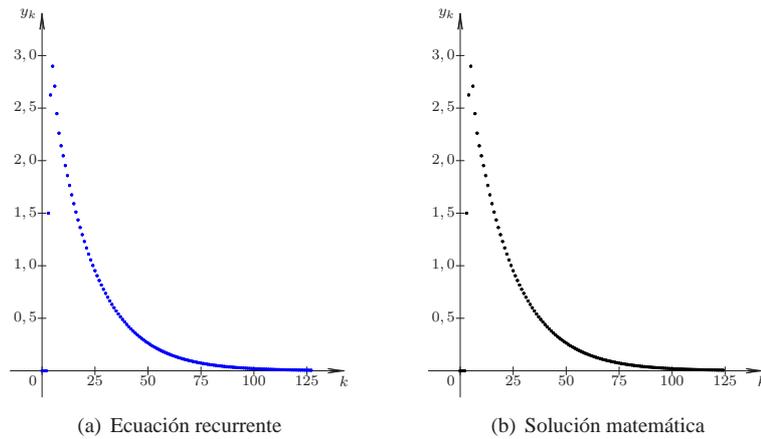
donde  $y[0] = 0$ ,  $y[1] = 0$  y  $y[2] = 0$ .

En términos de las muestras como función de  $k$ , se tiene que

$$y_{k+3} = 0,8y_{k+2} - 0,37y_{k+1} + 0,05y_k + 1,5(0,95)^k, \quad \forall k \geq 0, \tag{3.120}$$

donde  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 0$  y  $y_2 = 0$ .

La Figura 3.7(a) de la página 88 representa las muestras provenientes de la ecuación recurrente descrita por la Ecuación (3.119), mientras las muestras representadas en la Figura 3.7(b) corresponden a las obtenidas de la solución analítica de la ecuación



**Figura 3.7.** Gráficas de la solución del Ejemplo 3.8 mediante la ecuación recurrente y la obtenida por métodos matemáticos

ción en diferencias y cuya expresión es dada por la Ecuación (3.118). Además, el lector puede notar que no existe diferencias significativas entre ambas gráficas.

### 3.6 RESPUESTA IMPULSIVA DE SISTEMAS LDCID

Con el propósito de introducir el tema de respuesta impulsiva de un sistema en el dominio discreto, se debe establecer la siguiente definición:

**Definición 3.2 (Respuesta impulsiva)** *Se entenderá por respuesta impulsiva de un sistema lineal, dinámico, causal, invariante en el dominio y determinista (LDCID) en el dominio discreto, a la respuesta que ofrece el sistema ante un impulso unitario discreto, si el sistema se encuentra inicialmente en reposo o en condiciones iniciales de cero, en otras palabras cuando la respuesta del sistema, en cada instante discreto antes de aplicar el impulso unitario en el dominio discreto, es cero.*

Sea un sistema LDCID de orden  $k$ , cuyo modelo matemático viene dado por

$$\sum_{i=0}^k a_i y[n-i] = b_0 x[n], \quad \forall k > 0. \tag{3.121}$$

Basado en la Definición 3.2, se tiene que si  $h[n]$  denota la respuesta impulsiva, entonces  $h[n] = 0$  para todo  $n < 0$ .

Empleando la forma recurrente se puede determinar las condiciones iniciales que permitirán calcular la respuesta impulsiva. Es decir, al despejar el término  $y[n]$  de la Ecuación (3.121), se tiene

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left[ b_0 x[n] - \sum_{i=1}^k a_i y[n-i] \right] \tag{3.122}$$

Si se hace que  $h[n] = y[n]$  en la Ecuación (3.122), y se tiene que  $x[n] = \delta[n]$ , la condiciones iniciales de la respuesta impulsiva  $h[n]$  son entonces:

$$h[n] = \frac{1}{a_0} \left( b_0 x[n] - \sum_{i=1}^k a_i h[n-i] \right), \quad \forall n = 0, \dots, (k-1),$$

la cual para cada caso particular de  $n = 0, \dots, (k-1)$ , puede expresarse como:

$$\begin{aligned} h[0] &= \frac{1}{a_0} \left( b_0 - \sum_{i=1}^k a_i h[-i] \right) = \frac{1}{a_0} b_0, \\ h[1] &= \frac{1}{a_0} \left( -a_1 h[0] - \sum_{i=2}^k a_i h[1-i] \right) = \frac{1}{a_0} (-a_1 h[0]), \\ h[2] &= \frac{1}{a_0} \left( -a_1 h[1] - a_2 h[0] - \sum_{i=3}^k a_i h[2-i] \right) = \frac{1}{a_0} (-a_1 h[1] - a_2 h[0]), \\ &\vdots \\ h[k-1] &= \frac{1}{a_0} \left( b_0 x[k-1] - \sum_{i=1}^{k-1} a_i h[k-1-i] \right), \end{aligned} \tag{3.123}$$

debido al hecho de que  $h[-i] = 0$  para todo  $i = 1, \dots, k$ .

Basado en las condiciones iniciales determinadas a través de la Ecuación (3.123), la respuesta impulsiva se puede determinar mediante la respuesta homogénea del sistema bajo la condiciones iniciales calculadas.

### ■ EJEMPLO 3.9

Sea un sistema LDCID cuyo modelo matemático está definido por

$$y[n] - 2y[n-1] + 1,31y[n-2] - 0,28y[n-3] = x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{3.124}$$

Para el sistema descrito determine la respuesta impulsiva del sistema (Sinha, 1991, Capítulo 2).

#### Solución

Debido al hecho de que puede ser afirmado que la respuesta impulsiva para  $n < 0$  es cero, es decir,

$$h[n] = 0, \quad \forall n < 0, \tag{3.125}$$

se tiene que al despejar el término  $y[n]$  de la Ecuación (3.124) y al denotar  $y$  como  $h$ ,

$$h[n] = x[n] + 2h[n-1] - 1,31h[n-2] + 0,28h[n-3], \tag{3.126}$$

donde  $x[n] = \delta[n]$ .

Al evaluar la Ecuación (3.126) en  $n = 0, 1, 2$  se obtiene

$$\begin{aligned}h[0] &= 1 + 2h[-1] - 1,31h[-2] + 0,28h[-3] = 1 \\h[1] &= 2h[0] - 1,31h[-1] + 0,28h[-2] = 2 \\h[2] &= 2h[1] - 1,31h[0] + 0,28h[-1] = 2(2) - 1,31(1) = 2,69\end{aligned}\quad (3.127)$$

Aplicando el operador  $q$  al modelo matemático dado por la Ecuación (3.124), se tiene

$$(1 - 2q^{-1} + 1,31q^{-2} - 0,28q^{-3})y[n] = x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.128)$$

Al multiplicar la Ecuación (3.128) por  $q^3$ , se obtiene

$$(q^3 - 2q^2 + 1,31q - 0,28)y[n] = q^3x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (3.129)$$

donde las raíces que anulan al polinomio característico  $D(q)$ , el cual viene dado por  $D(q) = q^3 - 2q^2 + 1,31q - 0,28$  son:  $r_1 = 0,5$ ;  $r_2 = 0,7$  y  $r_3 = 0,8$ .

Ahora, debido a las raíces  $r_i$  para  $i = 1, 2, 3$ ; se tiene que la respuesta homogénea está dada por

$$y_h[n] = c_1(0,5)^n + c_2(0,7)^n + c_3(0,8)^n, \quad \forall n \geq 0. \quad (3.130)$$

Aplicando la Ecuación (3.130) y la condiciones definida por la Ecuación (3.127), se tiene entonces el siguiente sistema de ecuaciones lineales descrito por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,5 & 0,7 & 0,8 \\ 0,25 & 0,49 & 0,64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2,69 \end{pmatrix}, \quad (3.131)$$

el cual al resolverlo se tiene que:  $c_1 = \frac{25}{6}$ ,  $c_2 = -\frac{49}{2}$  y  $c_3 = \frac{64}{3}$ .

Este resultado puede ser obtenido también a través del Scilab™, y cuyos comandos se presentan en la Figura 3.8.

```
-->A=[1, 1, 1;0.5, 0.7, 0.8;0.25, 0.49, 0.64];
-->b=[-1; -2; -2.69];
-->[c, kerA]=linsolve(A, b)
kerA =
 []
c =
 4.1666667
 - 24.5
 21.333333
```

**Figura 3.8.** Comandos Scilab™ para el cálculo del sistema de ecuaciones lineales del Ejemplo 3.9

Entonces, la respuesta impulsiva está definida por

$$h[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{25}{6}(0,5)^k - \frac{49}{2}(0,7)^k + \frac{64}{3}(0,8)^k \right) \delta[n-k], \quad \forall n \geq 0. \quad (3.132)$$

Note que la Ecuación (3.132) cumple con las condiciones dadas en la Ecuación (3.127), es decir,

$$\begin{aligned} h[0] &= \frac{25}{6} - \frac{49}{2} + \frac{64}{3} = 1 \\ h[1] &= \frac{25}{6}(0,5) - \frac{49}{2}(0,7) + \frac{64}{3}(0,8) = 2 \\ h[2] &= \frac{25}{6}(0,5)^2 - \frac{49}{2}(0,7)^2 + \frac{64}{3}(0,8)^2 = 2,69 \end{aligned}$$

### ■ EJEMPLO 3.10

Sea un sistema LDCID en el dominio discreto cuyo modelo matemático está definido por

$$y[n] - \frac{13}{12}y[n-1] + \frac{3}{8}y[n-2] - \frac{1}{24}y[n-3] = x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.133)$$

Para el sistema definido, determine su respuesta impulsiva.

#### Solución

En virtud de que es conocido que la respuesta impulsiva para  $n < 0$  es cero, es decir,

$$h[n] = 0, \quad \forall n < 0, \quad (3.134)$$

al despejar el término  $y[n]$  de la Ecuación (3.133) y al denotar  $y[n]$  como  $h[n]$ ,

$$h[n] = x[n] + \frac{13}{12}h[n-1] - \frac{3}{8}h[n-2] + \frac{1}{24}h[n-3], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (3.135)$$

donde  $x[n] = \delta[n]$ .

Al evaluar la Ecuación (3.135) en  $n = 0, 1, 2$  se obtiene

$$\begin{aligned} h[0] &= 1 + \frac{13}{12}h[-1] - \frac{3}{8}h[-2] + \frac{1}{24}h[-3] = 1 \\ h[1] &= \frac{13}{12}h[0] - \frac{3}{8}h[-1] + \frac{1}{24}h[-2] = \frac{13}{12} \\ h[2] &= \frac{13}{12}h[1] - \frac{3}{8}h[0] + \frac{1}{24}h[-1] = \frac{13}{12} \frac{13}{12} - \frac{3}{8} = \frac{115}{144} \end{aligned} \quad (3.136)$$

Aplicando el operador  $q$  a la Ecuación (3.136), se tiene

$$\left(1 - \frac{13}{12}q^{-1} + \frac{3}{8}q^{-2} - \frac{1}{24}q^{-3}\right)y[n] = x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.137)$$

Al multiplicar la Ecuación (3.137) por  $q^3$ , se obtiene

$$\left(q^3 - \frac{13}{12}q^2 + \frac{3}{8}q - \frac{1}{24}\right)y[n] = q^3x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.138)$$

Como las raíces que anulan el polinomio característico  $D(q) = q^3 - 2q^2 + \frac{3}{8}q - \frac{1}{24}$  son:  $r_1 = \frac{1}{2}$ ,  $r_2 = \frac{1}{3}$  y  $r_3 = \frac{1}{4}$ , se puede afirmar entonces que la respuesta homogénea está dada por

$$y_h[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \left( c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^k + c_2 \left(\frac{1}{3}\right)^k + c_3 \left(\frac{1}{4}\right)^k \right) \delta[n-k], \quad \forall n \geq 0. \quad (3.139)$$

Aplicando la Ecuación (3.139) y la condiciones definida por la Ecuación (3.136), se tiene entonces el siguiente sistema de ecuaciones lineales descrito por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{9} & \frac{1}{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{13}{12} \\ \frac{115}{144} \end{pmatrix}, \quad (3.140)$$

donde la solución del sistema de ecuaciones es:  $c_1 = 6$ ,  $c_2 = -8$  y  $c_3 = 3$ , la cual puede ser obtenida también mediante el Scilab™, y cuyos comandos se muestran en la Figura 3.9.

```
-->A=[1, 1, 1; 1/2, 1/3, 1/4; 1/4, 1/9, 1/16];
-->b=[-1; -13/12; -115/144];
-->[c, kerA]=linsolve(A, b)
kerA =
[]
c =
6.
- 8.
3.
```

**Figura 3.9.** Comandos Scilab™ para el cálculo de sistema de ecuaciones lineales del Ejemplo 3.10

En consecuencia, la respuesta impulsiva está definida por

$$h[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \left( 6 \frac{1}{2^k} - 8 \frac{1}{3^k} + 3 \frac{1}{4^k} \right) \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (3.141)$$

debido al hecho de que  $h[n] = 0$  para todo  $n \in \{q \in \mathbb{Z} : q < 0\}$

Observe que la Ecuación (3.141) cumple con la condiciones dadas en la Ecuación (3.136), es decir,

$$h[0] = 6 - 8 + 3 = 1$$

$$h[1] = 6 \frac{1}{2} - 8 \frac{1}{3} + 3 \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$$

$$h[2] = 6 \frac{1}{4} - 8 \frac{1}{9} + 3 \frac{1}{16} = \frac{115}{144}$$

### 3.7 RESPUESTA DE SISTEMAS LDCID ANTE UN ESCALÓN UNITARIO

Antes de exponer este punto, debe tenerse claro el significado de un escalón unitario en el dominio discreto, el cual viene dado por

$$u[n] = \begin{cases} 0, & \forall n < 0; \\ 1, & \forall n \geq 0. \end{cases} \quad (3.142)$$

Otra forma de definirlo es empleando el concepto de impulso discreto  $\delta[n]$ , quedando entonces,

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k], \quad \forall n \geq 0.$$

**Observación 3.3** La sucesión de funciones  $x[n] = r^n u[n]$  tiende a la función escalón unitaria en el dominio discreto cuando  $r$  tiende a uno.

Basado en la Observación 3.3, es fácilmente inducible el método para la determinación de la respuesta del sistema ante un escalón, el cual se fundamenta en hallar la respuesta del sistema ante una excitación  $x[n] = r^n u[n]$ , para luego hallar el límite de la respuesta cuando  $r$  tiende a uno, es decir,

$$y^{[u]}[n] = \lim_{r \rightarrow 1} y^{[x[n]]}[n] \tag{3.143}$$

donde  $y^{[u]}[n]$  denota la respuesta del sistema ante un escalón discreto unitario, y  $y^{[x[n]]}[n]$  representa la respuesta del sistema ante una excitación  $x[n] = r^n u[n]$ .

Otro enfoque es a través de la determinación de la respuesta del sistema aplicando directamente el hecho de que el escalón discreto unitario toma valores de uno para todo  $n \geq 0$ .

**PROBLEMAS**

**3.1** Sea un sistema LDCID definido en el dominio continuo, con modelo matemático

$$\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{3.144}$$

donde  $y(t)$  y  $x(t)$  representan respectivamente la señal de respuesta y la señal de excitación del sistema.

Entonces, el modelo en tiempo discreto cuando es discretizado por integración rectangular por la izquierda y con un paso de discretización de 0,01 s es

- A)  $y[n+1] - 0,9y[n] = 0,01 x[n]$
- B)  $1,1y[n+1] - y[n] = 0,01 x[n+1]$
- C)  $y[n+1] + 9y[n] = x[n]$
- D)  $11y[n+1] - y[n] = x[n+1]$

**3.2** Sea un sistema LDCID definido en el dominio continuo, con modelo matemático

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{3.145}$$

donde  $y(t)$  y  $x(t)$  representan respectivamente la señal de respuesta y la señal de excitación del sistema. Suponga además que  $y(0) = y_0$ , y  $\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_0 = \dot{y}_0$ .

- a) Determine el modelo matemático definido en el dominio discreto empleando el método de integración rectangular por la izquierda de acuerdo a lo presentado en la Sección 3.2.
- b) Determine el modelo matemático definido en el dominio discreto empleando el método de espacio de estado mostrado en la Sección 3.3 cuando es empleando el método de integración rectangular por la izquierda.
- c) Compare los modelos matemáticos obtenidos en los Problemas 3.2.a y 3.2.b a través de la simulación de los mismos, con un paso de discretización de  $h =$

0,01 s. Para esto suponga que la señal de excitación corresponde a una señal escalón unitario y que el sistema se encuentra en condiciones iniciales de cero, es decir, en reposo.

**3.3** Sea un sistema LDCID definido en el dominio discreto, y cuyo modelo matemático viene definido por

$$-\frac{1}{6}y[n-4] + \frac{1}{6}y[n-3] + y[n-2] = x[n-2], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (3.146)$$

donde  $y[n-k]$  y  $x[n-k]$  representan respectivamente la señal de respuesta y la señal de excitación del sistema, para cada uno de los casos de  $k$ .

Entonces, para el sistema descrito, la respuesta del sistema<sup>11</sup> ante la señal  $x[n] = \delta[n-1] + 2\delta[n-2]$  cuando el sistema se encuentra inicialmente en reposo, es decir,  $y[n] = 0$  para todo  $n \leq 0$ , es

A)  $y[n] = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{-6}{5} \left(\frac{-1}{2}\right)^k + \frac{6}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^k \right] \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$

B)  $y[n] = \delta[n-1] + \frac{11}{6}\delta[n-2].$

C)  $y[n] = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{18}{5} \left(\frac{-1}{2}\right)^k + \frac{42}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^k \right] \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$

D)  $y[n] = \frac{18}{5} \left(\frac{-1}{2}\right)^n + \frac{42}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad \forall n \geq 1.$

**3.4** Sea un sistema LDCID en el dominio discreto, el cual está definido por

$$y[n] + \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.147)$$

Si el sistema es excitado por la señal  $x[n]$  definida en el dominio discreto, y la misma está dada por

$$x[n] = \frac{1}{2^n} u[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

y se conoce que  $y[0] = 1$ ;  $y[1] = 1/2$ . Entonces, la respuesta impulsiva del sistema para  $n \geq 0$  es

A)  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( 4 \left(\frac{-1}{4}\right)^k - 3 \left(\frac{-1}{2}\right)^k \right) \delta[n-k]$

B)  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( 2 \left(\frac{-1}{4}\right)^k - \left(\frac{-1}{2}\right)^k \right) \delta[n-k]$

C)  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( 3 \left(\frac{-1}{4}\right)^k - 2 \left(\frac{-1}{2}\right)^k \right) \delta[n-k]$

D)  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( - \left(\frac{-1}{4}\right)^k + 2 \left(\frac{-1}{2}\right)^k \right) \delta[n-k]$

**3.5** Sea un sistema LDCID definido en el dominio discreto, y cuyo modelo matemático viene definido por

$$y[n+2] - \frac{3}{4}y[n+1] + \frac{1}{8}y[n] = x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (3.148)$$

donde  $y[n-k]$  y  $x[n-k]$  representan respectivamente la señal de respuesta y la señal de excitación del sistema, para cada uno de los casos de  $k$ . Entonces, para el sistema descrito, la respuesta del sistema ante la señal  $x[n] = \delta[n-1] + 2\delta[n-3]$  cuando el sistema se

<sup>11</sup>Sugerencia: tome en cuenta que para  $n \geq 3$  la señal de excitación es nula, es decir,  $x[n] = 0$  para  $n \geq 3$ .

encuentra inicialmente en reposo, es decir,  $y[n] = 0$  para todo  $n \leq 0$ , es

- A)  $y[n] = \delta[n-3] + \sum_{k=4}^{\infty} \left[ 144\left(\frac{1}{2}\right)^k - 2112\left(\frac{1}{4}\right)^k \right] \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$   
 B)  $y[n] = \sum_{k=2}^{\infty} \left[ 16\left(\frac{1}{2}\right)^k - 64\left(\frac{1}{4}\right)^k \right] \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$   
 C)  $y[n] = \sum_{k=3}^{\infty} \left[ 16\left(\frac{1}{2}\right)^k - 64\left(\frac{1}{4}\right)^k \right] \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$   
 D) ninguna de las anteriores.

### EJERCICIOS PROPUESTOS

**3.6** Sea un sistema LDCID definido en el dominio continuo, y cuyo modelo matemático es dado por

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.149)$$

Si las condiciones iniciales del sistema son:

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad y(t)|_{t=0} = 1, \quad (3.150)$$

y la señal de excitación del sistema es

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (3.151)$$

donde  $\omega_0 = 20$  rad/s.

Determine:

- respuesta impulsiva del sistema;
- respuesta escalón del sistema;
- respuesta del sistema ante la excitación definida por la Ecuación (3.151), empleando el método de resolución de ecuaciones en diferencias.

**3.7** Sea el sistema definido en el Ejercicio 3.6. Determine el modelo matemático en el dominio discreto, con un paso de discretización  $h = 0,01$  s, empleando para eso su representación en variables de estado y el método de integración rectangular por la izquierda.

**3.8** Para el modelo matemático obtenido en el Ejercicio 3.7, determine:

- respuesta impulsiva del sistema;
- respuesta escalón del sistema;
- respuesta del sistema ante la excitación definida por la correspondiente representación discreta de la Ecuación (3.151), empleando el método de resolución de ecuación en diferencias.

**3.9** Compare los resultados obtenidos del Ejercicio 3.6 con los hallados en el Ejercicio 3.8.

**3.10** Sea un sistema LDCID definido en el dominio discreto, y cuyo modelo matemático es dado por

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.152)$$

Si la condición inicial del sistema es  $y[0] = 1$ ,  $y[1] = 1/2$ , y la excitación del sistema es

$$x[n] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.153)$$

Determine:

- a) respuesta impulsiva del sistema;
- b) respuesta escalón del sistema;
- c) respuesta del sistema ante la excitación definida por la Ecuación (3.153) a través de la ecuación recurrente del sistema;
- d) respuesta del sistema ante la excitación definida por la Ecuación (3.153) empleando el método de resolución de ecuación en diferencias.

## CAPÍTULO 4

---

# RESPUESTA DE SISTEMAS POR CONVOLUCIÓN

---

La vida siempre nos ofrece muchos caminos. Visualízalos antes de decidirte por uno de ellos, porque así tendrás mayor oportunidad de apreciar esta maravillosa vida.

—Ebert Brea

Son innumerables las aplicaciones que tiene la convolución, tanto en el dominio continuo como discreto. En este capítulo se estudiará un enfoque para la determinación de la respuesta de un sistema lineal, dinámico, causal, invariante en el dominio y determinista (LDCID) ante una excitación mediante el concepto de convolución. En principio, el concepto se aborda desde la perspectiva del análisis de los sistemas en el dominio discreto, para luego, mediante un proceso de aproximación, cuando el intervalo de discretización  $h$  tiende a cero, se llega al concepto de respuesta de sistemas LDCID en el dominio continuo, mediante la convolución.

El capítulo está estructurado con sólo dos secciones. En la Sección 4.1 se desarrollará la base teórica del método, basado en convolución para la determinación de la respuesta de un sistema definido en el dominio discreto, tomando en cuenta los atributos que debe tener el sistema para poder emplear el método. En la Sección 4.2 se desarrollarán los aspectos teóricos que están definidos en el método de convolución, a partir de lo estudiado en la Sección 4.1.

Al final del capítulo, el lector podrá verificar lo aprendido a través de problemas y ejercicios propuestos por el autor.

#### 4.1 SISTEMA EN EL DOMINIO DISCRETO

El concepto asociado a los métodos para la determinación de la respuesta de sistemas mediante convolución suele ser mucho más didáctico estudiarlo en el dominio discreto, que en el dominio continuo. Por tal motivo se abordará primero su enfoque en el dominio discreto para luego estudiarlo en el dominio continuo.

La convolución de funciones es ampliamente estudiada en numerosos textos de ingeniería. Por ejemplo, Brea (2006) muestra una detallada explicación de la convolución, tanto en el dominio continuo como discreto, la cual será también desarrollada en este texto a través de ejemplos desarrollados.

Sea un sistema LDCID definido en el dominio discreto, del cual se conoce su respuesta impulsiva  $h[n]$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ahora, se sabe que toda señal definida en el dominio discreto puede ser representada por

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (4.1)$$

donde  $x_k$  representa el  $k$ -ésimo valor que tiene la señal en el dominio discreto  $n$ .

De acuerdo a la Definición 3.2 de la página 88, la respuesta impulsiva de un sistema LDCID definido en el dominio discreto proporciona la respuesta del sistema ante un impulso unitario, cuando el sistema se encuentra en condiciones iniciales de cero, justo antes de excitarlo con el impulso unitario  $\delta[n]$ .

Debido al hecho de que el sistema es lineal e invariante en tiempo, se puede afirmar que la respuesta del sistema ante una excitación dada por la Ecuación (4.1), es la suma de las respuestas individuales producida por cada impulso ponderado  $x_k \delta[n-k]$ , y cada respuesta individual puede ser obtenida a partir de la respuesta impulsiva, en virtud de que el sistema es invariante en el dominio, siempre y cuando el sistema haya estado en reposo, lo cual implica que sus condiciones iniciales justo antes de haber sido excitado son nulas. Es decir, la respuesta ante un impulso  $\delta[n-k]$  estará determinada por la respuesta impulsiva  $h[n]$  pero trasladada al punto  $k$ . En consecuencia, se tiene el siguiente lema.

**Lema 4.1** *Sea un sistema LDCID definido en el dominio discreto cuya respuesta impulsiva está dada por  $h[n]$ . Entonces, si el sistema es excitado por un impulso  $x_k \delta[n-k]$ , la respuesta del sistema es  $x_k h[n-k]$ .*

**Demostración.** Por tratarse de ser un sistema invariante con relación a su dominio, se tiene que si el sistema tiene una respuesta  $y[n] = T[x[n]]$  ante una excitación  $x[n]$ , entonces, la respuesta del sistema ante una excitación  $x[n-k]$ , donde  $k$  es cualquier número entero perteneciente a  $\mathbb{Z}$ , es  $y[n-k]$ . Por otra parte, si  $y[n] = T[x[n]]$ , entonces  $\rho y[n]$  es la respuesta del sistema LDCID definido en el dominio discreto, ante una excitación  $\rho x[n]$ , como consecuencia de que se trata de un sistema lineal.

Aplicando el hecho expresado, se tiene que si  $h[n]$  es la respuesta a un impulso unitario, es decir, ante  $\delta[n]$ , entonces, la respuesta del sistema ante la excitación  $\rho \delta[n-k]$ , sin duda alguna es  $\rho h[n-k]$ , debido a que el sistema es invariante en el dominio. ■

**Teorema 4.1** *Sea un sistema LDCID definido en tiempo discreto y bajo condiciones iniciales de cero, es decir,  $y[n] = 0$  para todo  $n \in \{m \in \mathbb{Z} | m < k_0\}$ , donde  $k_0$  es un entero sin restricciones de signo, el cual es excitado con una señal discreta  $x[n] = \sum_{k=k_0}^{\infty} x_k \delta[n-k]$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Entonces, la respuesta del sistema ante la excitación  $x[n]$  está definida por*

$$y[n] = x[k] * h[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (4.2)$$

**Demostración.** Se tiene que debido a que el sistema es excitado por una señal en el dominio discreto,  $x[n] = \sum_{k=k_0}^{\infty} x_k \delta[n-k]$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , entonces, por ser un sistema LDCID definido en el dominio discreto, su respuesta corresponde a la suma de las respuestas individuales de cada término  $x_k \delta[n-k]$  (véase Lema 4.1). Este hecho permite afirmar que

$$y[n] = \sum_{q=k_0}^{\infty} x_q h[n-q] = \sum_{q=k_0}^{\infty} x[q] h[n-q] = x[k] * h[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (4.3)$$

donde  $x_q$  representa los pesos de cada  $q$ -ésimo impulso ubicado en  $\delta[n-q]$ , lo que representa la secuencia de  $x[n]$ . ■

**Observación 4.1** *En general*

$$y[n] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} y_k \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (4.4)$$

donde

$$y_k = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x_q h_{k-q}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (4.5)$$

**Teorema 4.2** Sean  $x[n] : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $z[n] : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones definidas en el dominio discreto. Entonces,

$$x[n] * z[n] = z[n] * x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (4.6)$$

*En otras palabras, la convolución en el dominio discreto es conmutativa.*

**Demostración.** De acuerdo a la definición de convolución, se tiene que

$$x[n] * z[n] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x[q] z[n-q], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (4.7)$$

Si se hace un cambio de variable a la Ecuación (4.7), donde  $k = n - q$ , se obtiene

$$x[n] * z[n] = \sum_{k=-\infty}^{-\infty} x[n-k] z[k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (4.8)$$

Como sumar términos desde  $k = \infty$  hasta  $k = -\infty$ , resulta equivalente a sumar desde  $k = -\infty$  hasta  $k = \infty$ , se puede afirmar

$$x[n] * z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z[k] x[n-k] = z[n] * x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (4.9)$$

■

#### ■ EJEMPLO 4.1

Sea un sistema LDCID definido en el dominio discreto, cuya respuesta impulsiva está dada por

$$h[n] = \sum_{k=2}^7 \left(\frac{3}{4}\right)^{k-2} \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (4.10)$$

Si el sistema es excitado por una señal

$$x[n] = \sum_{k=2}^7 -1\delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (4.11)$$

y el mismo se encontraba en condiciones iniciales de cero para todo  $n < 1$ . Determine la respuesta del sistema ante la excitación descrita anteriormente.

### Solución

Debido al hecho de que el sistema se encuentra inicialmente en reposo, se puede afirmar que la respuesta del sistema  $y[n]$  viene dada por

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x[q]h[n-q], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (4.12)$$

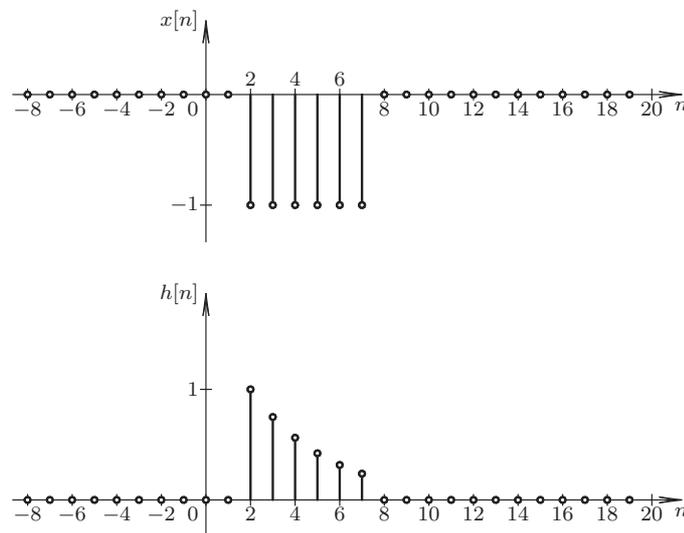
Más aún, se puede expresar la respuesta del sistema como

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (4.13)$$

donde

$$y_k = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x_q h_{k-q}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (4.14)$$

La Figura 4.1 muestra en su parte superior la señal discreta  $x[n]$  y en su parte inferior la respuesta impulsiva del sistema, la cual es denotada como  $h[n]$ .



**Figura 4.1.** Señal de excitación  $x[n]$  y respuesta impulsiva del sistema  $h[n]$

Para ejecutar la convolución en el dominio discreto, debe definirse la señal  $x[q]$  y la función  $h[n-q]$  con relación al dominio de la señal de respuesta  $y[n]$ .

Al desarrollar la Ecuación (4.12), se tiene que para el caso particular de  $n = -1$ ,

$$y[-1] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x[q]h[-1-q]. \tag{4.15}$$

Ahora, en general la función  $x[q]$  se representa con la misma función  $x[n]$ . Sin embargo, la señal discreta es definida en términos de la variable independiente  $q$ , mientras que la función  $h[n-q]$  se define como

$$h[n]_{n-q} = \sum_{k=2}^7 \left(\frac{3}{4}\right)^k \delta[n-k] \Big|_{n-q}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{4.16}$$

Quedando

$$h[n-q] = \sum_{k=2}^7 \left(\frac{3}{4}\right)^{k-2} \delta[n-q-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}. \tag{4.17}$$

La Figura 4.2 muestra un caso particular cuando  $n = 0$ . Note que el origen de coordenadas de la respuesta impulsiva  $h[n-q]_{n=0}$  se encuentra ubicado sobre la coordenada  $n = 0$  de la abscisa de los ejes de coordenadas de la respuesta  $y[n]$ .

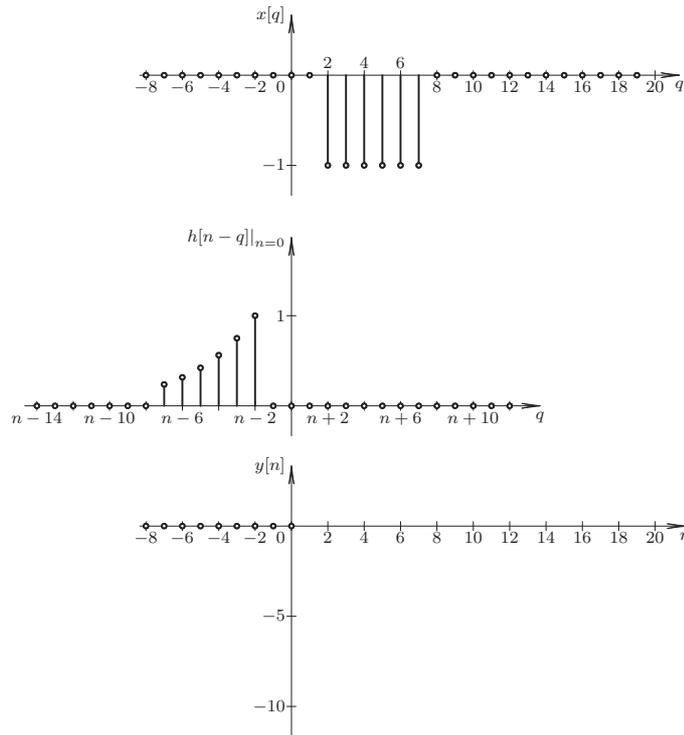


Figura 4.2. Proceso de convolución para el caso  $n = 0$

Para el caso mostrado en la Figura 4.2, la respuesta del sistema  $y[n]$ , para  $n = 0$ , se obtiene evaluando la Ecuación (4.12) en  $n = 0$ , la cual arroja entonces como resultado que

$$y[0] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x[q]h[-q] = 0. \tag{4.18}$$

Por otra parte, la Figura 4.3 ilustra el caso cuando  $n = 2$ , y cuyo valor de respuesta se consigue haciendo  $n = 2$  en la Ecuación (4.12), resultando

$$y[2] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x[q]h[2-q] = 0. \tag{4.19}$$

Note en la Figura 4.3 como la función  $h[n-q]_{n=2}$  se ha desplazado con respecto al sistema de coordenadas de la función  $y[n]$ . Hecho que se evidencia al observar que el origen de coordenadas de la función  $h[n-q]_{n=2}$  está localizado en  $n = 2$  de la señal  $y[n]$ .

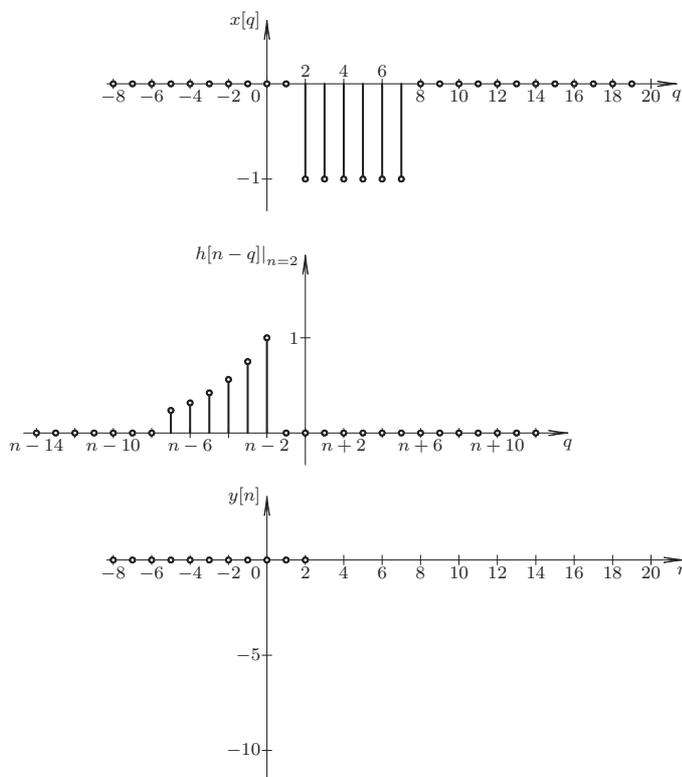
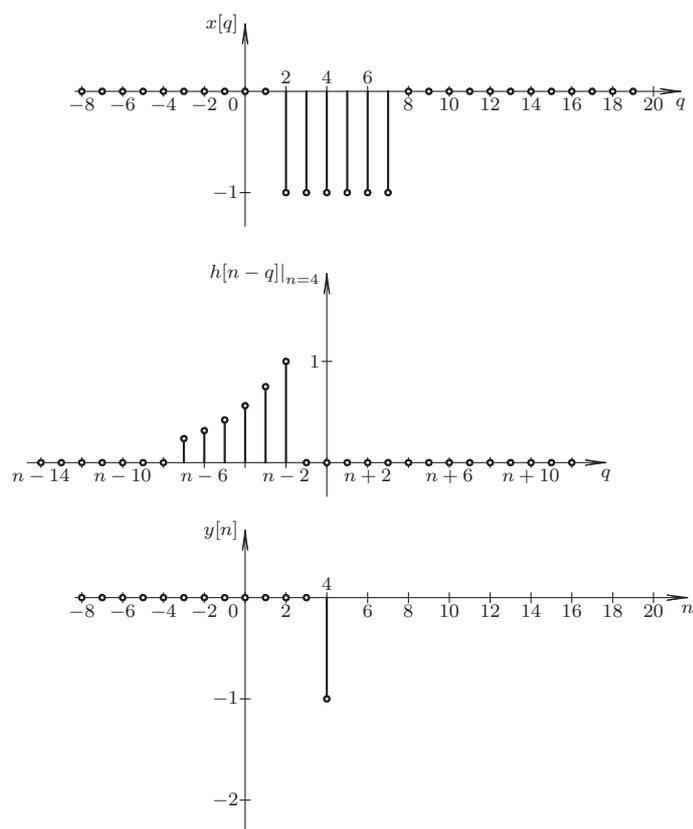


Figura 4.3. Proceso de convolución para el caso  $n = 2$

En el caso de  $n = 4$ , la Figura 4.4 muestra la función  $h[n-q]_{n=4}$ , en virtud de que su centro de coordenadas está ubicado sobre el punto de coordenadas  $(4, 0)$  del sistema de coordenadas de la función  $y[n]$ .

Para este caso,

$$y[4] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x[q]h[4-q] = x[q]h[4-q]_{q=2} = x[2]h[2] = -1. \quad (4.20)$$



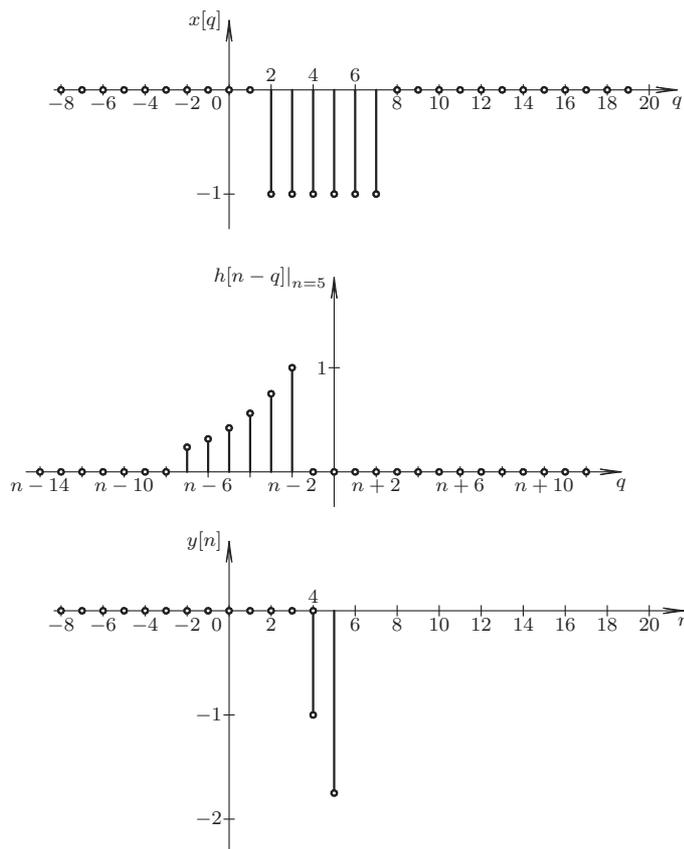
**Figura 4.4.** Proceso de convolución para el caso  $n = 4$

La Figura 4.5 muestra el caso  $n = 5$ . Observe que en este caso el origen de coordenadas se ha desplazado sobre el punto  $(5, 0)$  del sistema de coordenadas de la función  $y[n]$ .

El valor de  $y[5]$  se obtiene evaluando la Ecuación (4.12) en  $n = 5$ , resultando

$$y[5] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x[q]h[5-q] = x[q]h[5-q]|_{q=2} + x[q]h[5-q]|_{q=3}. \quad (4.21)$$

$$y[5] = x[2]h[3] + x[3]h[2] = -1,75. \quad (4.22)$$



**Figura 4.5.** Proceso de convolución para el caso  $n = 5$

Repitiendo este procedimiento para cada caso  $n$ , se obtienen los valores de la respuesta del sistema  $y[n]$ .

Sin embargo, con la ayuda del Scilab™ se tiene que

```

-->r=3/4;
-->a=-1;
-->h=[0,0,r^0,r^1,r^2,r^3,r^4,r^5,0,0];
-->x=[0,0,a,a,a,a,a,a,0,0];
-->y=convol(x,h);
-->y'
ans =
- 1.639D-16
- 8.327D-17
  0.
- 1.110D-16
- 1.
- 1.75
- 2.3125
- 2.734375
- 3.0507812
- 3.2880859
- 2.2880859
- 1.5380859
- 0.9755859
- 0.5537109
- 0.2373047
- 1.388D-16
- 2.802D-16
- 1.388D-16
- 2.220D-16

```

**Figura 4.6.** Comandos SciLab™ para el cálculo de la convolución del Ejemplo 4.1

Los resultados reportados en la Figura 4.6 permiten comprobar los valores obtenidos de  $y[n]$ . No obstante, debe tomarse en cuenta que los resultados reportados por en Scilab™ con órdenes de magnitudes menores a  $10^{-16}$  deben ser interpretados como ceros. Este error en el Scilab™ es debido a que el programa emplea la transformada rápida de Fourier, más conocida por su acrónimo en inglés como *fast Fourier transform* (FFT), para el cálculo de la convolución, tema que es abordado en el Capítulo 15 de esta obra.

■ EJEMPLO 4.2

Sea un sistema LDCID definido en el dominio discreto, cuya respuesta impulsiva está dada por

$$h[n] = \sum_{k=0}^5 \frac{1}{2^k} \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (4.23)$$

Si el sistema es excitado por una señal

$$x[n] = \sum_{k=1}^4 \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (4.24)$$

y el mismo se encontraba en condiciones iniciales de cero para todo  $n < 1$ . Entonces, determine la respuesta del sistema ante la excitación descrita.

**Solución**

De acuerdo al Teorema 4.1, la respuesta del sistema bajo condiciones iniciales nulas o cuando el sistema se encuentra inicialmente en reposo, puede ser determinada mediante la convolución de la señal de excitación y la respuesta impulsiva, es decir,

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad (4.25)$$

En este caso,

$$y[n] = \sum_{q=0}^{\infty} x[q] h[n-q] \quad (4.26)$$

Al expandir la Ecuación (4.26) se tiene que

$$y[n] = x[0]h[n] + x[1]h[n-1] + x[2]h[n-2] + x[3]h[n-3] + \dots, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (4.27)$$

La Ecuación (4.27) permite obtener cada muestra mediante su evaluación para cada valor de  $q$ , la cual al ser evaluada se obtiene

$$y[n] = \begin{cases} x[0]h[0] + x[1]h[-1] + x[2]h[-2] + \dots + x[q]h[-q], & \forall n = 0; \\ x[0]h[1] + x[1]h[0] + x[2]h[-1] + \dots + x[q]h[1-q], & \forall n = 1; \\ x[0]h[2] + x[1]h[1] + x[2]h[0] + \dots + x[q]h[2-q], & \forall n = 2; \\ x[0]h[3] + x[1]h[2] + x[2]h[1] + \dots + x[q]h[3-q], & \forall n = 3; \\ \vdots & \vdots \end{cases} \quad (4.28)$$

Al dejar expresados explícitamente los sumandos distintos de cero, se obtiene que

$$y_k = \begin{cases} 0, & \forall \{k \leq 0\} \cup \{k > 10\}; \\ x_1 h_0, & \forall k = 1; \\ x_1 h_1 + x_2 h_0, & \forall k = 2; \\ x_1 h_2 + x_2 h_1 + x_3 h_0, & \forall k = 3; \\ x_1 h_3 + x_2 h_2 + x_3 h_1 + x_4 h_0, & \forall k = 4; \\ x_1 h_4 + x_2 h_3 + x_3 h_2 + x_4 h_1, & \forall k = 5; \\ x_1 h_5 + x_2 h_4 + x_3 h_3 + x_4 h_2, & \forall k = 6; \\ x_2 h_5 + x_3 h_4 + x_4 h_3, & \forall k = 7; \\ x_3 h_5 + x_4 h_4, & \forall k = 8; \\ x_4 h_5, & \forall k = 9. \end{cases}, \quad (4.29)$$

donde  $x_q$  y  $h_{k-q}$  representan respectivamente los valores de las muestras de la señal de excitación y de la respuesta impulsiva.

Ahora, debido al hecho de que  $x_q = 1$  para  $q = 1, 2, 3, 4$ , la Ecuación (4.29) puede ser agrupada en

$$y_k = \begin{cases} 0, & \forall \{k \leq 0\} \cup \{k > 10\}, \\ h_0 = \sum_{k=0}^0 \frac{1}{2^k}, & \forall k = 1; \\ h_1 + h_0 = \sum_{k=0}^1 \frac{1}{2^k}, & \forall k = 2; \\ h_2 + h_1 + h_0 = \sum_{k=0}^2 \frac{1}{2^k}, & \forall k = 3; \\ h_3 + h_2 + h_1 + h_0 = \sum_{k=0}^3 \frac{1}{2^k}, & \forall k = 4; \\ h_4 + h_3 + h_2 + h_1 = \sum_{k=1}^4 \frac{1}{2^k}, & \forall k = 5; \\ h_5 + h_4 + h_3 + h_2 = \sum_{k=2}^5 \frac{1}{2^k}, & \forall k = 6; \\ h_5 + h_4 + h_3 = \sum_{k=3}^5 \frac{1}{2^k}, & \forall k = 7; \\ h_5 + h_4 = \sum_{k=4}^5 \frac{1}{2^k}, & \forall k = 8; \\ h_5 = \sum_{k=5}^5 \frac{1}{2^k}, & \forall k = 9. \end{cases} \quad (4.30)$$

Al evaluar cada caso  $k$  de la Ecuación (4.30) se tiene que

$$y[n] = \delta[n-1] + \frac{3}{2}\delta[n-2] + \frac{7}{4}\delta[n-3] + \frac{15}{8}\delta[n-4] + \frac{15}{16}\delta[n-5] + \frac{15}{32}\delta[n-6] + \frac{7}{32}\delta[n-7] + \frac{3}{32}\delta[n-8] + \frac{1}{32}\delta[n-9], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (4.31)$$

Al expresar los coeficientes de la Ecuación 4.31 en decimales, se tiene

$$y[n] = \delta[n-1] + 1,5\delta[n-2] + 1,75\delta[n-3] + 1,875\delta[n-4] + 0,9375\delta[n-5] + 0,46875\delta[n-6] + 0,21875\delta[n-7] + 0,09375\delta[n-8] + 0,03125\delta[n-9], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (4.32)$$

Por otra parte, al aplicar los comandos Scilab™ mostrados en la Figura 4.7 para el cálculo de la respuesta del sistema por convolución en el dominio discreto se tiene

```
-->x=[0, 1, 1, 1, 1];
-->h=[1, 1/2, 1/2^2, 1/2^3, 1/2^4, 1/2^5];
-->y=convol(x, h);
-->y'
ans =
    1.388D-16
    1.
    1.5
    1.75
    1.875
    0.9375
    0.46875
    0.21875
    0.09375
    0.03125
```

**Figura 4.7.** Comandos Scilab™ para el cálculo de la convolución del Ejemplo 4.2

El lector puede verificar la respuesta mostrada en la Figura 4.7 con la obtenida en la Ecuación (4.32). Por otra parte, aun cuando el Scilab™ ha reportado como valor  $y[0]$  el número  $1.388D-16$ , el cual puede ser considerado como cero por cuanto significa  $1,388 \times 10^{-16}$  y en consecuencia debe ser interpretada como 0, la solución ofrecida por el Scilab™ resulta muy apropiada.

## 4.2 SISTEMA EN EL DOMINIO CONTINUO

El concepto de la respuesta de un sistema, cuando éste es modelado en el dominio continuo, es análogo al concepto empleado en el dominio discreto. En este caso se supondrá que la señal de excitación puede ser modelada mediante el muestreo instantáneo empleando una sucesión de función que converge a la función delta de Dirac (Brea, 2006).

En otra palabras, toda señal en el dominio continuo puede ser representada por

$$x(t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\varepsilon)\delta_\varepsilon(t - k\varepsilon)\varepsilon, \quad (4.33)$$

donde  $\varepsilon > 0$  es un parámetro real,  $k \in \mathbb{Z}$  es el índice de la muestra, y  $\delta_\varepsilon(t - k\varepsilon)$  viene dada por

$$\delta_\varepsilon(t - k\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \forall (k-1)\frac{\varepsilon}{2} < t < (k+1)\frac{\varepsilon}{2}, \\ 0 & \forall t < (k-1)\frac{\varepsilon}{2} \vee t > (k+1)\frac{\varepsilon}{2}. \end{cases} \quad (4.34)$$

De la Ecuación (4.33), se obtiene que

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \quad (4.35)$$

**Teorema 4.3** *Sea un sistema LDCID definido en el dominio continuo. Si se conoce la respuesta impulsiva del sistema  $h(t)$  y el sistema está en condiciones iniciales de cero para el instante  $t_0^-$ . Entonces, la respuesta del sistema ante una señal de excitación  $x(t)$  puede ser determinada por*

$$y(t) = x(t) * h(t),$$

donde  $x(t) = 0$  para todo  $t < t_0^-$ .

**Demostración.** En el estudio propuesto se tiene que si el sistema es LDCID y por tanto es lineal e invariante en el tiempo, la respuesta del sistema ante la excitación  $x(k\varepsilon)\delta_\varepsilon(t - k\varepsilon)$  deberá ser  $x(k\varepsilon)h_\varepsilon(t - k\varepsilon)$ , donde  $x(k\varepsilon)$  representa la  $k$ -ésima muestra de intervalos  $\varepsilon$ , y  $h_\varepsilon(t - k\varepsilon)$  representa la respuesta ante la sucesión de la función  $\delta_\varepsilon(t - k\varepsilon)$ .

En consecuencia, debido a que la señal de excitación es representada mediante la Ecuación (4.33), entonces,

$$y(t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\varepsilon)h_\varepsilon(t - k\varepsilon)\varepsilon. \quad (4.36)$$

Al aplicar el límite a la Ecuación (4.36), se llega a que

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = x(t) * h(t). \quad (4.37)$$

■

**Teorema 4.4** *Sean  $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $z(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones definidas en el dominio continuo. Entonces,*

$$x(t) * z(t) = z(t) * x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4.38)$$

*En otras palabras, la convolución en el dominio continuo es conmutativa.*

**Demostración.** Se conoce

$$x(t) * z(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)z(t - \tau)d\tau, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4.39)$$

Al aplicar un cambio en la variable de integración haciendo  $\lambda = t - \tau$ , se tiene que  $d\tau = -d\lambda$ , lo cual transforma la integral definida por la Ecuación (4.39) en

$$x(t) * z(t) = - \int_{\lambda=\infty}^{-\infty} x(t - \lambda)z(\lambda)d\lambda, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (4.40)$$

de donde claramente se obtiene

$$x(t) * z(t) = \int_{\lambda=-\infty}^{\infty} z(\lambda) x(t-\lambda) d\lambda = z(t) * x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4.41)$$

■

**Teorema 4.5** Sea  $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida en el dominio continuo. Entonces,

$$x(t) * \delta(t - T_0) = x(t - T_0). \quad (4.42)$$

**Demostración.** Se tiene que

$$x(t) * \delta(t - T_0) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau - T_0) d\tau. \quad (4.43)$$

Haciendo el cambio variable  $z = t - \tau - T_0$ , se tiene que

$$x(t) * \delta(t - T_0) = \int_{z=-\infty}^{-\infty} x(t - z - T_0) \delta(z) (-dz) = \int_{z=-\infty}^{\infty} x(t - z - T_0) \delta(z) dz. \quad (4.44)$$

De acuerdo a la teoría de Distribución (Brea, 2006, Capítulo 1), si  $\phi(t)$  está definida en  $t = 0$ . Entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t) dt = \phi(t)|_{t=0} = \phi(0). \quad (4.45)$$

Aplicando la Ecuación (4.45) en la Ecuación (4.44), se tiene que

$$\int_{z=-\infty}^{\infty} x(t - z - T_0) \delta(z) dz = x(t - z - T_0)|_{z=0} = x(t - T_0), \quad (4.46)$$

lo que permite afirmar que  $x(t) * \delta(t - T_0) = x(t - T_0)$  ■

### ■ EJEMPLO 4.3

Sea un sistema LDCID definido en el dominio continuo, con respuesta impulsiva

$$h(t) = 2e^{-\lambda(t-T_0)} u(t - T_0), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (4.47)$$

donde  $\lambda = 1/2$  y  $T_0 = 1$ .

Si el sistema está en reposo, es decir, inicialmente en reposo para el instante  $0^-$  y éste es excitado por una señal  $x(t)$  con expresión

$$x(t) = -p_1(t - 2), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (4.48)$$

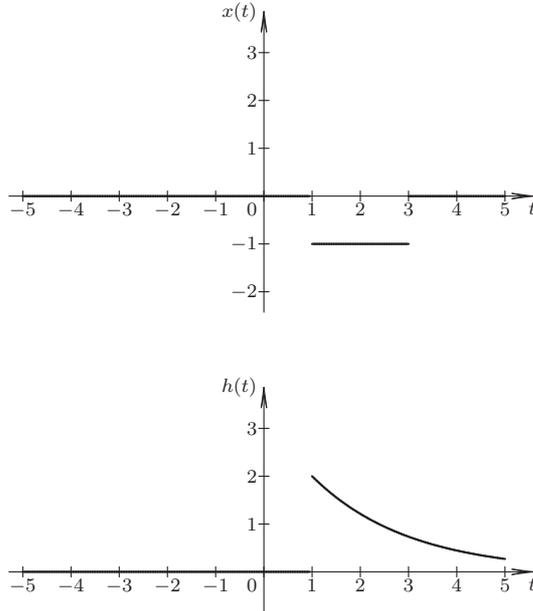
donde  $p_\alpha(t - T_0)$  denota la llamada función pulso rectangular, la cual está definida como

$$p_\alpha(t - T_0) = \begin{cases} 0, & \forall |t - T_0| > \alpha; \\ 1, & \forall |t - T_0| < \alpha. \end{cases} \quad (4.49)$$

Para el sistema descrito, determine la respuesta del sistema.

**Solución**

De acuerdo al Teorema 4.3 de la página 109, la respuesta del sistema puede ser determinada mediante la convolución de  $x(t)$  con  $h(t)$ .



**Figura 4.8.** Gráficas de la excitación y respuesta impulsiva del sistema del Ejemplo 4.3

La Figura 4.8 muestra tanto la señal de excitación  $x(t)$  en su parte superior, como la respuesta impulsiva del sistema en la parte inferior de la figura.

Ahora, deben definirse las funciones  $x(\tau)$  y  $h(t - \tau)$ , las cuales se obtienen sustituyendo respectivamente  $t$  por  $\tau$ , y  $t$  por  $t - \tau$  en las Ecuaciones (4.48) y (4.47). Obteniéndose entonces:

$$x(\tau) = -p_1(\tau - 2), \quad \forall \tau \in \mathbb{R}, \tag{4.50}$$

y

$$h(t - \tau) = 2e^{-\lambda(t - \tau - T_0)}u(t - \tau - T_0), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tau \in \mathbb{R}, \tag{4.51}$$

con  $\lambda = 1/2$  y  $T_0 = 1$ .

Por otra parte, se tiene que

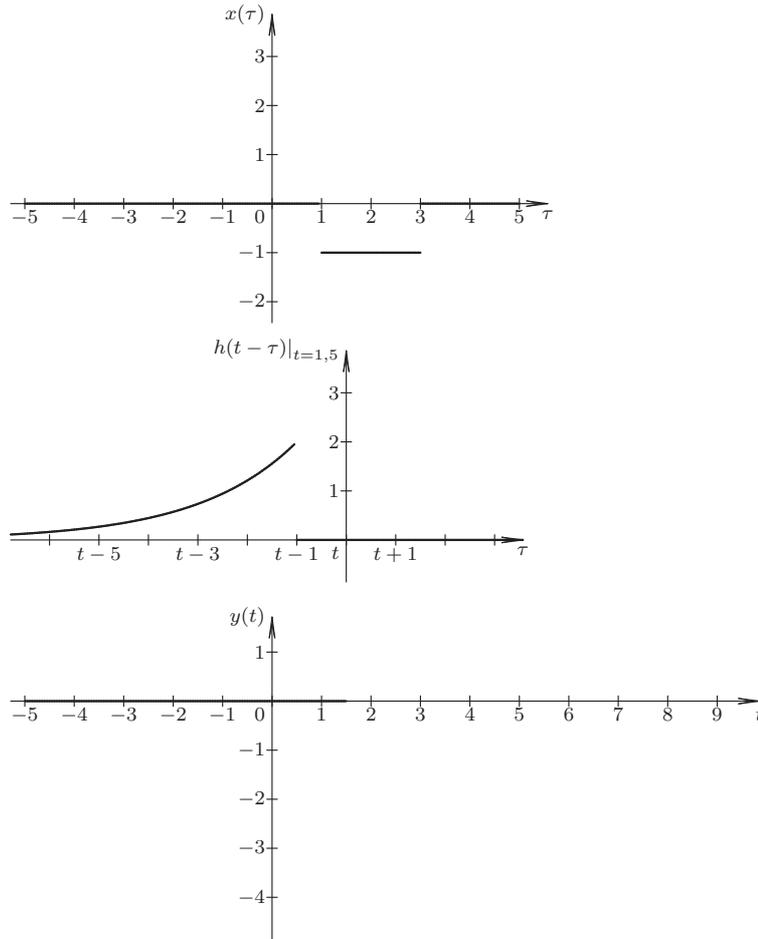
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4.52}$$

Debido a que las funciones que intervienen en la convolución en el dominio continuo son ambas funciones son seccionalmente continuas, deben analizarse los distintos casos.

Caso:  $t < 2$

En este caso, el producto de  $x(\tau)h(t-\tau)$  es nulo para todo  $t < 2$ , en consecuencia  $y(t) = 0$ .

La Figura 4.9 muestra el caso particular cuando  $t = 1,5$ . Note que el origen de coordenadas de la función  $h(t-\tau)$  está localizado justo sobre el punto  $(3/2, 0)$  del eje de las abscisa de la función  $y(t)$ .



**Figura 4.9.** Imagen para el instante  $t = 1,5$  durante la convolución del Ejemplo 4.3

Caso:  $2 \leq t < 4$

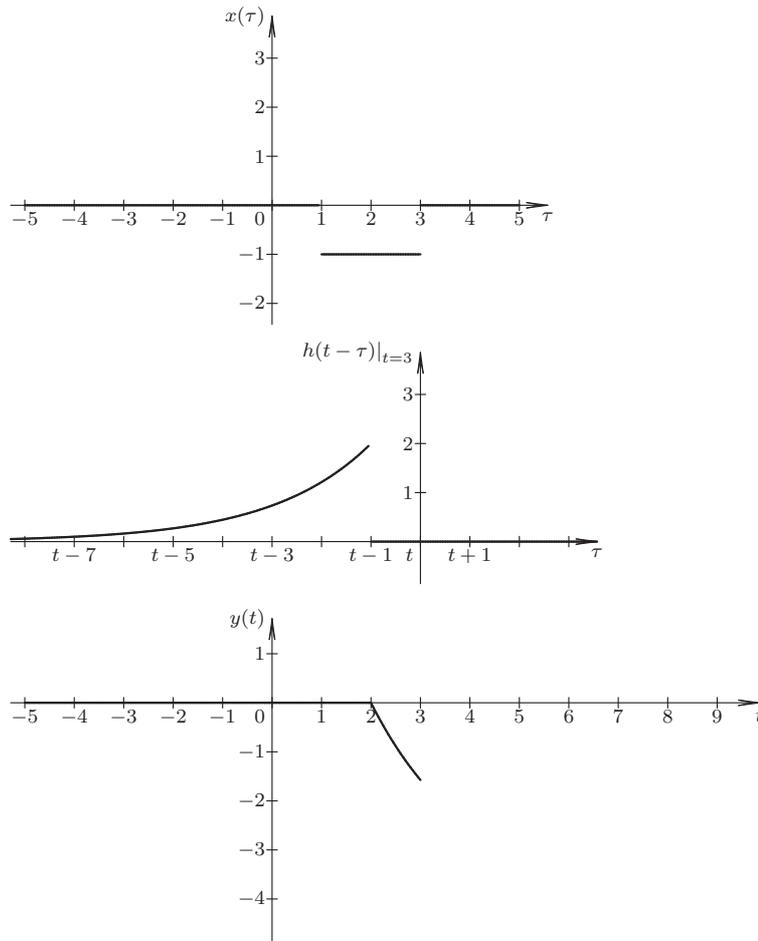
Cuando  $t \in [2, 4)$ , la integral de convolución es

$$y(t) = \int_{\tau=1}^{t-1} -2e^{-\frac{1}{2}(t-\tau-1)} d\tau, \quad \forall 2 \leq t < 4, \quad (4.53)$$

debido a que  $x(\tau)h(t-\tau) \neq 0$  para  $1 < \tau < t-1$ , arrojando como resultado

$$y(t) = 4(e^{-\frac{1}{2}(t-2)} - 1), \quad \forall 2 \leq t < 4. \tag{4.54}$$

La Figura 4.10 ilustra el caso en referencia para el instante particular  $t = 3$ , el cual es indicado por el origen de coordenadas de la función  $h(t-\tau)$  que está ubicado sobre el punto de coordenadas  $(3,0)$  del sistema de coordenadas de la función  $y(t)$ . La Figura 4.10 muestra además el resultado de la convolución  $y(t)$  para todo  $t \leq 3$ .



**Figura 4.10.** Imagen para el instante  $t = 3$  durante la convolución del Ejemplo 4.3

Caso:  $t \geq 4$

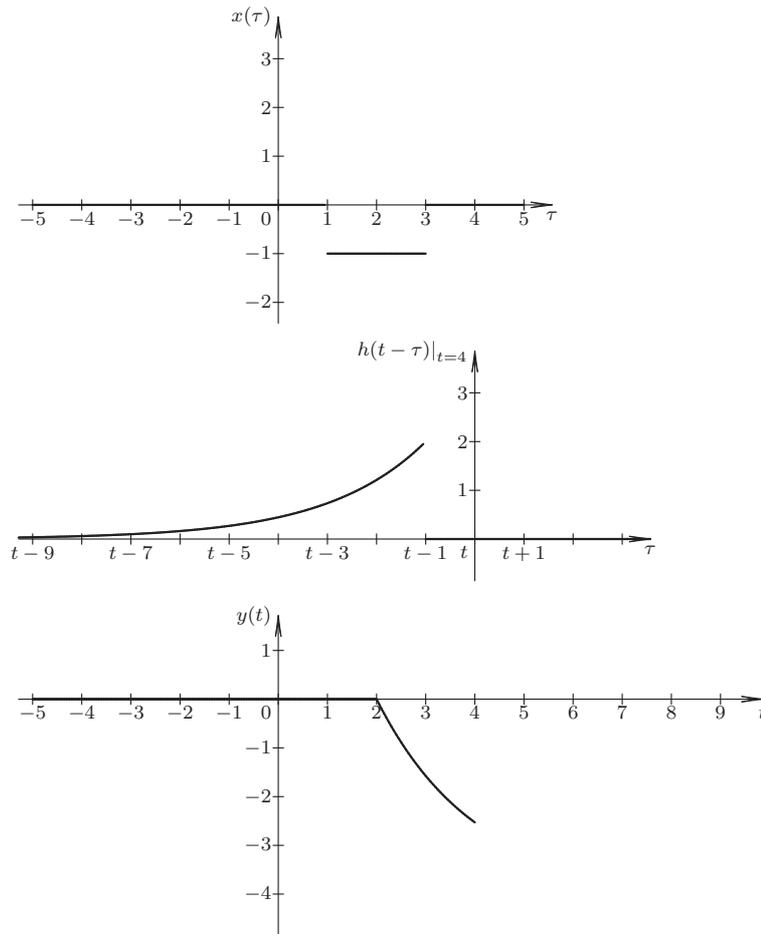
Para este último caso, la respuesta del sistema viene definida por

$$y(t) = \int_{\tau=1}^3 -2e^{-\frac{1}{2}(t-\tau-1)} d\tau, \quad \forall 2 \leq t < 4, \tag{4.55}$$

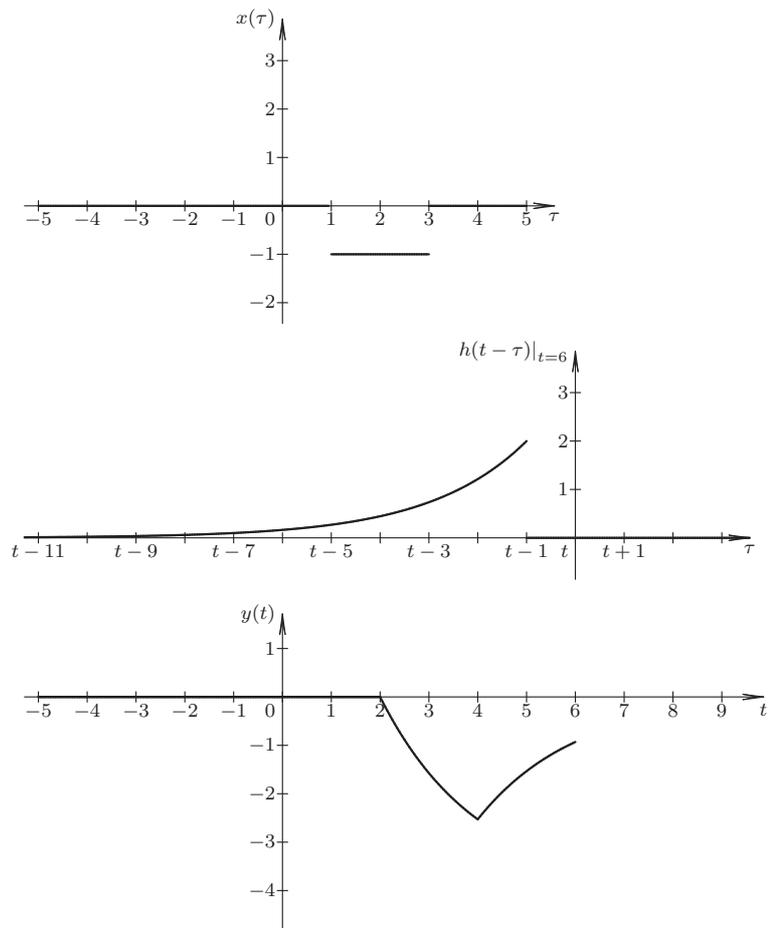
debido al hecho de que el intervalo de  $\tau$  donde el producto de  $x(\tau)h(t-\tau)$  es distinto de cero es  $1 < \tau < 3$ , dando como resultado, luego de algunas operaciones algebraicas, que

$$y(t) = 4(e^{-\frac{1}{2}(t-2)} - e^{-\frac{1}{2}(t-4)}), \quad \forall t \geq 4. \quad (4.56)$$

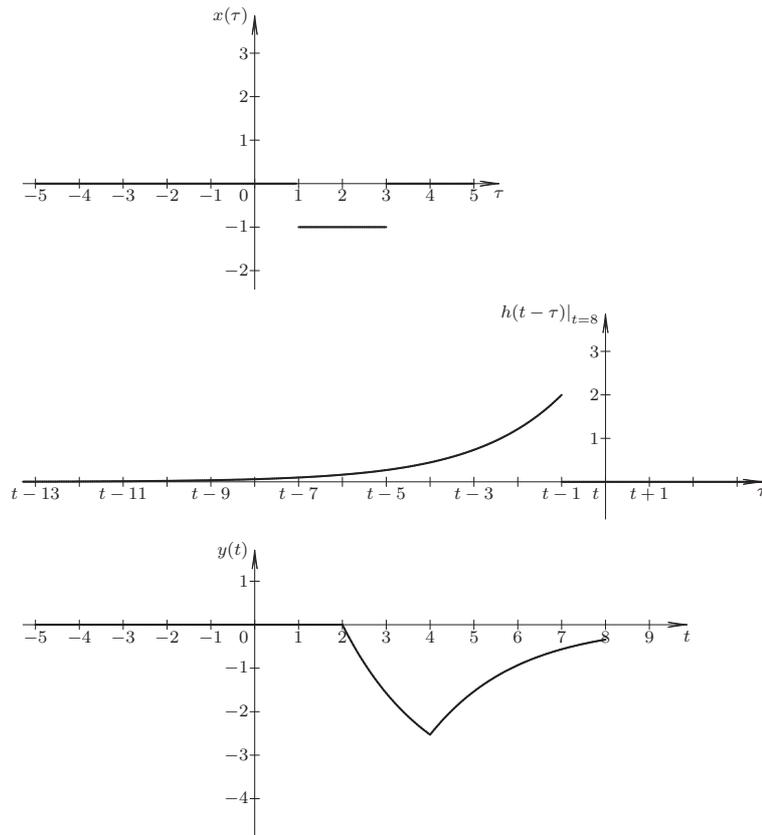
En las Figuras 4.11, 4.12 y 4.13 se muestran los instantes particulares de  $t = 4$ ,  $t = 6$  y  $t = 8$ , respectivamente, los cuales cumplen este caso. Note la ubicación del origen de coordenada de la función que se desplaza con respecto los ejes de coordenadas de la respuesta  $y(t)$ .



**Figura 4.11.** Imagen para el instante  $t = 4$  durante la convolución del Ejemplo 4.3



**Figura 4.12.** Imagen para el instante  $t = 6$  durante la convolución del Ejemplo 4.3



**Figura 4.13.** Imagen para el instante  $t = 8$  durante la convolución del Ejemplo 4.3

Finalmente, se puede afirmar que

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \forall t < 2; \\ 4(e^{-\frac{1}{2}(t-2)} - 1), & \forall 2 \leq t < 4; \\ 4(e^{-\frac{1}{2}(t-2)} - e^{-\frac{1}{2}(t-4)}), & \forall t \geq 4. \end{cases} \quad (4.57)$$

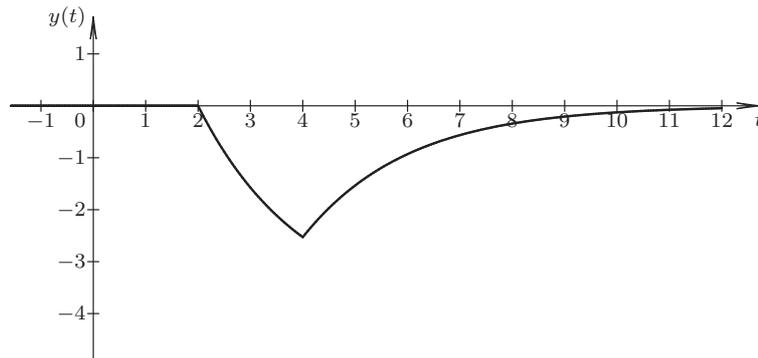
La Figura 4.14 muestra la respuesta  $y(t)$  del sistema, y cuya expresión matemática viene dada por la Ecuación (4.57).

El lector puede verificar el significado matemático de la convolución, el cual podría decirse que es el área del producto de  $x(\tau)$  y  $h(t - \tau)$  para cada instante  $t$ .

■ **EJEMPLO 4.4**

Sea un sistema LDCID definido en el dominio continuo, con respuesta impulsiva

$$h(t) = e^{-\lambda t} u(t), \quad (4.58)$$



**Figura 4.14.** Respuesta  $y(t)$  del sistema del Ejemplo 4.3 obtenida por convolución

donde  $\lambda > 0$  es un parámetro real.

Si el sistema está en condiciones iniciales de cero para el instante  $0^-$ . Determine la respuesta del sistema ante un escalón unitario.

**Solución**

Según el Teorema 4.3 de la página 109, la respuesta del sistema para cuando las condiciones iniciales del sistema son cero, puede ser determinada mediante la convolución de la señal de excitación y la respuesta impulsiva, es decir,

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=0}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad \forall t > 0. \tag{4.59}$$

Para el caso particular, se tiene entonces que

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \forall t \leq 0; \\ \int_{\tau=0}^t e^{-\lambda\tau} d\tau, & \forall t > 0. \end{cases} \tag{4.60}$$

Al integrar la Ecuación (4.60), se tiene que

$$y(t) = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t})u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

**PROBLEMAS**

**4.1** Sea un sistema LDCID definido en el dominio discreto con modelo matemático definido por

$$y[n + 1] - a_0y[n] = b_0x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{4.61}$$

donde  $x[n]$  es la señal de excitación,  $y[n]$  representa la señal de respuesta del sistema, y  $a_0$  y  $b_0$  son parámetros del sistema.

Si el sistema está inicialmente en reposo, es decir,  $y[n] = 0$ , determine:

- a) Respuesta impulsiva del sistema.
- b) Respuesta escalón del sistema mediante los métodos de resolución de ecuaciones en diferencias.

- c) Respuesta escalón del sistema a través del método de convolución.  
 d) Respuesta impulsiva del sistema considerando que

$$x[n] = \delta[n] = u[n] - u[n-1], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (4.62)$$

**4.2** Sea un sistema LDCID definido en el dominio continuo y cuyo modelo matemático está definido por

$$\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (4.63)$$

donde  $x(t)$  es la señal de excitación,  $y(t)$  representa la señal de respuesta del sistema, y  $a_0$  y  $b_0$  son parámetros del sistema.

Si el sistema está inicialmente en reposo, es decir, con condiciones iniciales de cero, determine:

- a) Respuesta impulsiva del sistema.  
 b) Respuesta escalón del sistema a través de los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales.  
 c) Respuesta escalón del sistema empleando el método de convolución y compare el resultado con el Problema 4.2.b.  
 d) Relación entre los resultados obtenidos de los Problemas 4.2.b y 4.2.c.

**4.3** Sea un sistema LDCID definido en el dominio continuo y cuyo modelo matemático está definido por

$$\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_1 \frac{dx(t)}{dt}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (4.64)$$

donde  $x(t)$  es la señal de excitación,  $y(t)$  representa la señal de respuesta del sistema, y  $a_0$  y  $b_0$  son parámetros del sistema.

- a) Respuesta escalón del sistema a través de los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales.  
 b) Relación entre la respuesta escalón del Problema 4.3.a y las soluciones obtenidas en el Problema 4.2.a.

## EJERCICIOS PROPUESTOS

**4.4** Sea un sistema LDCID definido en el dominio del tiempo discreto con función de transferencia

$$h(n) = \sum_{k=0}^8 r^{-n} \delta(n-k), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (4.65)$$

donde  $r \in \mathbb{R}$  es un parámetros tal que  $0 < r < 1$ .

Determine a través del concepto de convolución, la respuesta del sistema ante las siguientes señales  $x(n)$  de excitación definidas a continuación y verifique su resultado empleando el Scilab™ haciendo que  $r = 0,5$ .

- a)  $x[n] = \delta[n-5]$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .  
 b)  $x[n] = \delta[n-5] + \delta[n-10]$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .  
 c)  $x[n] = u[n-5]$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .  
 d)  $x[n] = \sum_{k=4}^8 \delta[n-k]$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .  
 e)  $x[n] = -2 \sum_{k=4}^8 \delta[n-k]$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .  
 f)  $x[n] = \sum_{k=2}^8 (2-k) \delta[n-k]$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

**4.5** Considere el sistema LDCID definido en el Ejercicio Propuesto 4.4, pero con condición inicial  $y[0] = 1$ . Determine la respuesta del sistema ante una excitación  $x[n] = u[n-4]$ .

**4.6** Considere un sistema LDCID definido en el dominio del tiempo continuo y cuya respuesta impulsiva corresponde a

$$h(t) = ke^{-\lambda t}u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (4.66)$$

donde  $k \in \mathbb{R}$  es un parámetro sin restricción de signo y  $\lambda \in \mathbb{R}$  es un parámetro positivo.

Determine la respuesta  $y(t)$  empleando el concepto de convolución, si el sistema es excitado por una señal  $x(t)$ , la cual corresponde a las siguientes señales definidas en el dominio del tiempo continuo.

- a)  $x(t) = p_2(t-5)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .
- b)  $x(t) = p_2(t-5) + p_2(t-7)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .
- c)  $x(t) = u(t) - p_3(t-8)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .
- d)  $x(t) = q_1(t-2)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .
- e)  $x(t) = \delta(t-4)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .
- f)  $x(t) = \delta(t-4) + \delta(t-8)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**4.7** Sea el sistema LDCID definido en el Ejercicio Propuesto 4.6, con condición inicial  $y(0) = 1$ . Determine la respuesta del sistema ante una excitación  $x[n] = u(t-4)$ .



## CAPÍTULO 5

---

# ANÁLISIS DE SISTEMAS EN EL PLANO S

---

Curiosidad e imaginación, es todo lo que necesitas para disfrutar del conocimiento.

—Ebert Brea

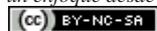
Un enfoque alternativo para el análisis de sistemas lineales, dinámicos, causales, invariantes en el dominio y deterministas (LDCID) es a través de la transformada de Laplace (TL), la cual constituye una herramienta muy empleada en la ingeniería eléctrica. Brea (2006) presenta un estudio teórico de la transformada de Laplace debido a su tratamiento desde el punto de vista del campo de los números complejos.

En este capítulo se establecerán algunas aplicaciones de la transformada de Laplace para el análisis de sistemas LDCID, así como el empleo de un nuevo concepto, el cual permite estudiar los sistemas desde la perspectiva del plano de la transformada de Laplace y éste suele denominarse plano S. Es importante puntualizar que el autor supone que el lector conoce todo lo concerniente a la transformada de Laplace, así como la determinación de la transformada inversa de Laplace (TIL). No obstante, el lector puede consultar, por ejemplo: Oppenheim *et al.* (1998); Papoulis (1980); Ziemer *et al.* (1993); Schiff (1999); Brea (2006) con el propósito de revisar los conceptos de transformada de Laplace.

El capítulo es estructurado como sigue: en la Sección 5.1 se emplea la transformada de Laplace para la determinación de la respuesta de un sistema LDCID tomando en cuenta las condiciones iniciales del sistema; en la Sección 5.2 se define y aplica el concepto de función de transferencia de un sistema LDCID con el objeto de estudiar la respuesta de los sistemas LDCID mediante la función de transferencia; en la Sección 5.3 se introducen los

*Análisis de Sistemas Lineales Asistido con Scilab™, un enfoque desde la Ingeniería Eléctrica. Primera Edición.* Por Ebert Brea.

121



por Ebert Brea, 2014.

teoremas de valor inicial y valor final, los cuales son empleados para determinar la condición inicial y final de una señal definida en el dominio continuo, a partir de su transformada de Laplace; en la Sección 5.4 se enuncian algunos criterios para establecer si un sistema es estable o no; en la Sección 5.5 se desarrolla un método para hallar el modelo matemático que define su dinámica, es decir, su correspondiente ecuación diferencial basándose en el concepto de función de transferencia. Por último, se incluyen algunos problemas y ejercicios propuestos que permitirán al lector reforzar los conocimientos adquiridos.

## 5.1 DETERMINACIÓN DE LA RESPUESTA POR TRANSFORMADA DE LAPLACE

Considere nuevamente el Problema 2.1 de la página 40, en donde se tiene un sistema LDCID en el dominio continuo, el cual cuenta con un modelo matemático definido por la ecuación diferencial ordinaria

$$\sum_{k=0}^n a_{n-k} \frac{d^{n-k} y(t)}{dt^{n-k}} = \sum_{k=0}^m b_{m-k} \frac{d^{m-k} x(t)}{dt^{m-k}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (5.1)$$

donde  $y(t)$  representa la señal de respuesta del sistema o también llamada señal de salida, y  $x(t)$  significa la señal de excitación o denominada alternativamente señal de entrada.

El método de determinación de la respuesta mediante transformada de Laplace se sustenta en la propiedad de la transformada de Laplace unilateral derecha de la derivada  $n$ -ésima de una función definida en el dominio continuo, la cual es:

**Propiedad 5.1 (Derivada  $n$ -ésima en  $t$ )** Sea  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$  la transformada de Laplace (TL) de  $f(t)$ , y cuya región de convergencia (RDC) está definida para todo  $\text{Re}[s] > \alpha$ , donde además  $f(t)$  es de orden exponencial, denotado como  $\mathcal{O}(e^{\alpha t})$  para todo  $t > T$  (Brea, 2006, Página 21); (Churchill, 1971, Capítulo 1), y  $f(t) = 0$  para todo  $t < 0$ . Entonces,

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{[k-1]}(0^-), \quad \forall \text{Re}[s] > \alpha, \quad (5.2)$$

$$\text{donde } f^{[k]}(0^-) = \left. \frac{d^k f(t)}{dt^k} \right|_{0^-} = \lim_{t \uparrow 0} \frac{d^k f(t)}{dt^k}$$

**Observación 5.1** En virtud de lo afirmado en la Propiedad 5.1 en cuanto a que  $f(t) = 0$  para todo  $t < 0$ , debe tomarse en cuenta que la definición de transformada de Laplace está dada por

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad \forall \text{Re}[s] > \alpha. \quad (5.3)$$

Para los casos particulares de derivadas ordinarias, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] &= sF(s) - f(0^-) \\ \mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] &= s^2 F(s) - sf(0^-) - f^{[1]}(0^-) \\ \mathcal{L}\left[\frac{d^3 f(t)}{dt^3}\right] &= s^3 F(s) - s^2 f(0^-) - sf^{[1]}(0^-) - f^{[2]}(0^-) \end{aligned} \quad (5.4)$$

**Método 5.1 (Determinación de la respuesta por transformada de Laplace)** Sea la ecuación diferencial ordinaria definida por la Ecuación (5.1), y conocida la excitación  $x(t)$  ejecute:

Paso 1. Aplique la transformada de Laplace de acuerdo a la Propiedad 5.1.

Paso 2. Despeje  $Y(s)$ .

Paso 3. Determine la transformada inversa de laplace.

**Observación 5.2** Note que el cálculo de residuo de una función  $F(s)$  en una  $i$ -ésima singularidades aisladas  $p_i$ , de multiplicidad  $m_i$ , puede ser determinado por

$$\text{Res}[F(s)]_{p_i} = \frac{1}{(m_i - 1)!} \left. \frac{d^{m_i-1} \Phi(s)}{ds^{m_i-1}} \right|_{p_i}, \quad (5.5)$$

donde  $\Phi(s) = (s - p_i)^{m_i} F(s)$  es analítica y no nula en  $p_i$ .

■ **EJEMPLO 5.1**

Considere nuevamente el sistema LDCID en el dominio del tiempo continuo, del Ejemplo 2.7 de la página 45 con modelo matemático definido por

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 8 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 19 \frac{dy(t)}{dt} + 12y(t) = 4e^{-5t}u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (5.6)$$

con condiciones iniciales:  $y(t)|_{0^-} = 0$ ,  $\frac{dy(t)}{dt}|_{0^-} = 0$  y  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2}|_{0^-} = 1$ , y cuya solución está dada por la Ecuación (2.61) de la página 47.

Para el sistema descrito, determine la respuesta del sistema a través de la transformada de Laplace.

**Solución**

De acuerdo al Método 5.1, se tiene entonces que al aplicar la transformada de Laplace a la Ecuación (5.6)

$$\begin{aligned} [s^3 Y(s) - s^2 y_{0^-} - s \dot{y}_{0^-} - \ddot{y}_{0^-}] + 8[s^2 Y(s) - s y_{0^-} - \dot{y}_{0^-}] + \\ 19[sY(s) - y_{0^+}] + 12Y(s) = \frac{4}{s+5}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

donde  $\ddot{y}_{0^-} = \frac{d^2 y(t)}{dt^2}|_{0^-} = 1$ ;  $\dot{y}_{0^-} = \frac{dy(t)}{dt}|_{0^-} = 0$ ;  $y_{0^-} = y(t)|_{0^-} = 0$ .

Sustituyendo las condiciones definidas en el problema en la Ecuación (5.7), se obtiene

$$(s^3 + 8s^2 + 19s + 12)Y(s) - 1 = \frac{4}{s+5}. \quad (5.8)$$

Ahora, al calcular las raíces que anulan al polinomio

$$D(s) = s^3 + 8s^2 + 19s + 12, \quad (5.9)$$

mediante los comandos Scilab™ se obtiene a través del Scilab™ que

```

-->D=poly([12 19 8 1], 's', 'c')
D =
      2      3
    12 + 19s + 8s + s

-->z=roots(D)
z =
- 1.
- 3.
- 4.

```

**Figura 5.1.** Comandos Scilab™ para el cálculo de las raíces del Ejemplo 5.1

Despejando  $Y(s)$  de la Ecuación (5.8) y aplicando lo reportado por la Figura 5.1, se obtiene que

$$Y(s) = \frac{s+9}{(s+1)(s+3)(s+4)(s+5)}, \quad \forall \text{Re}[s] > -1.$$

Aplicando el Teorema 3.9 de Brea (2006, Página 36); Brown y Churchill (2004), se tiene que

$$y(t) = \sum_{i=1}^4 \text{Res} \left[ Y(s)e^{st} \right] \Big|_{p_i} u(t), \quad (5.10)$$

donde  $p_1 = -1$ ,  $p_2 = -3$ ,  $p_3 = -4$  y  $p_4 = -5$ .

$$\text{Res} \left[ Y(s)e^{st} \right] \Big|_{p_i} = \lim_{s \rightarrow p_i} (s + p_i) Y(s) e^{st}, \quad \forall k = 1, 2, 3, 4. \quad (5.11)$$

En este caso se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[ Y(s)e^{st} \right] \Big|_{-1} &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{s+9}{(s+1)(s+3)(s+4)(s+5)} (s+1)e^{st} = \frac{1}{3}e^{-t} \\ \text{Res} \left[ Y(s)e^{st} \right] \Big|_{-3} &= \lim_{s \rightarrow -3} \frac{s+9}{(s+1)(s+3)(s+4)(s+5)} (s+3)e^{st} = -\frac{3}{2}e^{-3t} \\ \text{Res} \left[ Y(s)e^{st} \right] \Big|_{-4} &= \lim_{s \rightarrow -4} \frac{s+9}{(s+1)(s+3)(s+4)(s+5)} (s+4)e^{st} = \frac{5}{3}e^{-4t} \\ \text{Res} \left[ Y(s)e^{st} \right] \Big|_{-5} &= \lim_{s \rightarrow -5} \frac{s+9}{(s+1)(s+3)(s+4)(s+5)} (s+5)e^{st} = -\frac{1}{2}e^{-5t} \end{aligned} \quad (5.12)$$

En consecuencia, empleando la Ecuación (5.12), se tiene que para  $t > 0$ ,

$$y(t) = \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-3t} + \frac{5}{3}e^{-4t} - \frac{1}{2}e^{-5t}, \quad (5.13)$$

la cual al compararla con la solución obtenida en el Ejemplo 2.7 se comprueba la solución encontrada.

No obstante, la solución mostrada por la Ecuación (5.13) debe satisfacer tanto las condiciones iniciales como la ecuación diferencial definida por la Ecuación (5.6).

## 5.2 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Un concepto importante en el campo de la ingeniería es el concepto de función de transferencia, debido a sus amplias aplicaciones en el estudio de la respuesta permanente y respuesta de los sistemas LDCID en el dominio de la frecuencia. El concepto de función de transferencia es también aplicado en el estudio y diseño de sistemas de control, los cuales estos últimos son sistemas empleados para el control de operación de sistemas, como por ejemplo, el sistema de control de: una planta termoeléctrica, un sistema de transporte de materiales, un sistema regulador de velocidad, entre otros (Dorf y Bishop, 2008).

**Definición 5.1 (Función de transferencia)** Se dice que la función de transferencia de un sistema LDCID definido en el dominio continuo, y denotada por  $H(s)$ , como el cociente de la respuesta del sistema en el dominio de la transformada de Laplace y su excitación en ese mismo dominio, cuando todas las condiciones son cero en el instante  $t = 0^-$ , es decir,

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}. \quad (5.14)$$

**Observación 5.3** La función de transferencia de un sistema LDCID definido en el dominio continuo es:

$$H(s) = \mathcal{L}[h(t)], \quad (5.15)$$

donde  $h(t)$  es la respuesta impulsiva del sistema.

Debido a que la función de transferencia puede ser determinada a través de la respuesta impulsiva del sistema, y de acuerdo a la Definición 2.5 de la página 48, las condiciones iniciales del sistema para el instante  $t = 0^-$  deben ser consideradas nulas, mas no en el instante  $t = 0^+$ .

**Observación 5.4** Aun cuando las condiciones iniciales del sistema LDCID no sean nulas, se deben obligar a serlo a los efectos de determinar la función de transferencia del sistema.

### ■ EJEMPLO 5.2

Considere una vez más el sistema LDCID definido en el Ejemplo 2.7, el cual tiene como modelo matemático:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 8\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 19\frac{dy(t)}{dt} + 12y(t) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (5.16)$$

Para el sistema definido, determine su función de transferencia.

### Solución

Según la Definición 5.1, la función de transferencia se obtiene obligando que todas las condiciones iniciales, es decir, en el instante  $t = 0^-$ , sean cero.

Al aplicar la transformada de Laplace a la Ecuación (5.16), se tiene que

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 8s^2 + 19s + 12} \quad (5.17)$$

A los fines de verificar la Observación 5.3, se tiene que

$$h(t) = \sum_{k=1}^3 \operatorname{Res} \left[ H(s)e^{st} \right] \Big|_{p_i} u(t) = \sum_{k=1}^3 \lim_{s \rightarrow p_i} (s + p_i) H(s) e^{st} u(t), \quad (5.18)$$

donde  $p_1 = -1$ ,  $p_2 = -3$  y  $p_3 = -4$ .

Evaluando los residuos, se tiene

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left[ H(s)e^{st} \right] \Big|_{-1} &= \lim_{s \rightarrow -1} (s + 1) \frac{1}{s^3 + 8s^2 + 19s + 12} e^{st} = \frac{1}{6} e^{-t} \\ \operatorname{Res} \left[ H(s)e^{st} \right] \Big|_{-3} &= \lim_{s \rightarrow -3} (s + 3) \frac{1}{s^3 + 8s^2 + 19s + 12} e^{st} = -\frac{1}{2} e^{-3t} \\ \operatorname{Res} \left[ H(s)e^{st} \right] \Big|_{-4} &= \lim_{s \rightarrow -4} (s + 4) \frac{1}{s^3 + 8s^2 + 19s + 12} e^{st} = \frac{1}{3} e^{-4t} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Entonces, la respuesta impulsiva para todo  $t > 0$  viene dada por

$$h(t) = \frac{1}{6} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-3t} + \frac{1}{3} e^{-4t}, \quad (5.20)$$

la cual es exacta a la solución encontrada en el Ejemplo 2.8, y cuyo resultado es mostrado en la Ecuación (2.76) de la página 51.

### ■ EJEMPLO 5.3

Sea un sistema LDCID en el dominio continuo del tiempo con modelo matemático definido por

$$\frac{d^4 y(t)}{dt^4} + 10 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 34 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 48 \frac{dy(t)}{dt} + 32 y(t) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (5.21)$$

Para el sistema descrito, determine su respuesta impulsiva empleando los métodos de resolución por transformada de Laplace.

### Solución

Para determinar la respuesta impulsiva mediante la transformada de Laplace, se debe determinar primero la función de transferencia del sistema, es decir,  $H(s)$ , y luego la transformada inversa de Laplace de  $H(s)$ .

Como la función de transferencia del sistema se obtiene bajo la consideración de que las condiciones iniciales del sistema son cero en  $t = 0^-$ , se tiene que al aplicar la transformada de Laplace a la Ecuación (5.21),

$$(s^4 + 10s^3 + 34s^2 + 48s + 32)Y(s) = X(s), \quad \forall s \in \mathbb{C}, \quad (5.22)$$

y en consecuencia

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^4 + 10s^3 + 34s^2 + 48s + 32} \quad \forall s \in \{z \in \mathbb{C} : D(z) \neq 0\}. \quad (5.23)$$

donde  $D(z) = z^4 + 10z^3 + 34z^2 + 48z + 32$  es el polinomio característico del sistema.

A objeto de determinar la respuesta impulsiva del sistema se debe conocer las singularidades aisladas de la función de transferencia  $H(s)$ , la cual se determina por medio del cálculo de las raíces que anulan el denominador de  $H(s)$ , y que se denomina polinomio característico del sistema.

$$D(s) = s^4 + 10s^3 + 34s^2 + 48s + 32, \quad \forall s \in \mathbb{C}. \quad (5.24)$$

Ahora, con la ayuda del Scilab™ se tiene que de lo reportado en la Figura 5.2, se puede afirmar que el polinomio característico mostrado por la Ecuación (5.24) tiene una raíz doble y real  $s_1 = -4$ , y un par de raíces complejas conjugadas simple  $s_2 = -1 + j$  y  $s_3 = -1 - j$ , con región de convergencia  $\text{Re}[s] > -1$  por considerar que el sistema es causal, de acuerdo a lo enunciado en el problema.

```
-->D=poly([32 48 34 10 1], 's', 'c');
-->z=roots(D)
z =
- 1. + i
- 1. - i
- 3.9999999
- 4.0000001
```

**Figura 5.2.** Comandos Scilab™ para el cálculo de las raíces del polinomio característico del Ejemplo 5.3

Aplicando el Teorema 3.9 de Brea (2006, Página 36), se tiene que

$$h(t) = \sum_{i=1}^3 \text{Res} \left[ H(s)e^{st} \right] \Big|_{p_i} u(t), \quad (5.25)$$

donde  $p_1 = -2$  de orden  $m=2$ , y  $p_2 = -1 + j$ , y  $p_3 = -1 - j$  ambas singularidades son simples o de orden  $m=1$ .

Evaluando los residuos, se tiene

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[ H(s)e^{st} \right] \Big|_{-4} &= \lim_{s \rightarrow -4} \frac{d}{ds} \left[ \frac{(s+4)^2 e^{st}}{s^4 + 10s^3 + 34s^2 + 48s + 32} \right], \\ \text{Res} \left[ H(s)e^{st} \right] \Big|_{-1+j} &= \lim_{s \rightarrow -1+j} \left[ \frac{(s+1-j)e^{st}}{s^4 + 10s^3 + 34s^2 + 48s + 32} \right], \\ \text{Res} \left[ H(s)e^{st} \right] \Big|_{-1-j} &= \lim_{s \rightarrow -1-j} \left[ \frac{(s+1+j)e^{st}}{s^4 + 10s^3 + 34s^2 + 48s + 32} \right]. \end{aligned} \quad (5.26)$$

A objeto de facilitar los cálculos de los residuos, se expresará el polinomio característico, definido por la Ecuación (5.24), de acuerdo a sus factores, es decir,

$$D(s) = (s+4)^2(s^2 + 2s + 2) = (s+4)^2(s+1-j)(s+1+j). \quad (5.27)$$

Sustituyendo la Ecuación (5.27) en la Ecuación (5.26), se obtiene

$$\begin{aligned}\operatorname{Res} [H(s)e^{st}] \Big|_{-4} &= \lim_{s \rightarrow -4} \frac{d}{ds} \left[ \frac{e^{st}}{s^2 + 2s + 2} \right], \\ \operatorname{Res} [H(s)e^{st}] \Big|_{-1+j} &= \lim_{s \rightarrow -1+j} \left[ \frac{e^{st}}{(s+4)^2(s+1+j)} \right], \\ \operatorname{Res} [H(s)e^{st}] \Big|_{-1-j} &= \lim_{s \rightarrow -1-j} \left[ \frac{e^{st}}{(s+4)^2(s+1-j)} \right],\end{aligned}\tag{5.28}$$

lo que implica

$$\begin{aligned}\operatorname{Res} [H(s)e^{st}] \Big|_{-4} &= \frac{1}{10} t e^{-4t} + \frac{6}{100} e^{-4t}, \\ \operatorname{Res} [H(s)e^{st}] \Big|_{-1+j} &= \frac{e^{(-1+j)t}}{-12 + j16}, \\ \operatorname{Res} [H(s)e^{st}] \Big|_{-1-j} &= \frac{e^{(-1-j)t}}{-12 - j16}.\end{aligned}\tag{5.29}$$

Sustituyendo la Ecuación (5.29) en la Ecuación (5.25), y luego de unas operaciones algebraicas se obtiene

$$h(t) = \left[ \frac{1}{10} t e^{-4t} + \frac{3}{50} e^{-4t} - \frac{3}{50} e^{-t} \cos(t) + \frac{2}{25} e^{-t} \operatorname{sen}(t) \right] u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.\tag{5.30}$$

Ahora, se verificará el resultado obtenido a través de la resolución de la ecuación diferencial empleando el método estudiado en el Capítulo 2.

De acuerdo a los reportado por la Figura 5.2, se puede asegurar que la respuesta a un impulso unitario viene dada por

$$h(t) = c_1 t e^{-4t} + c_2 e^{-4t} + c_3 e^{-t} \cos(t) + c_4 e^{-t} \operatorname{sen}(t), \quad \forall t > 0.\tag{5.31}$$

Por otra parte, al integrar la ecuación diferencial mostrada por la Ecuación (5.21) en el intervalo  $(0^-, 0^+)$ , y sustituyendo a  $x(t)$  por  $\delta(t)$ , se obtiene

$$\int_{0^-}^{0^+} d \left( \frac{d^3 h(t)}{dt^3} \right) = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt,\tag{5.32}$$

debido al hecho de que

$$\int_{0^-}^{0^+} \frac{d^k h(t)}{dt^k} dt = 0, \quad \forall k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

En consecuencia, la Ecuación (5.32) arroja como resultado que

$$\frac{d^3 h(t)}{dt^3} \Big|_{0^+} - \frac{d^3 h(t)}{dt^3} \Big|_{0^-} = 1.\tag{5.33}$$

Ahora, como todas las condiciones iniciales en  $0^-$  son iguales a cero, se tiene

$$\frac{d^3 h(t)}{dt^3} \Big|_{0^+} = 1.\tag{5.34}$$

Además,

$$\left. \frac{d^k h(t)}{dt^k} \right|_{0^+} = \left. \frac{d^k h(t)}{dt^k} \right|_{0^-} = 0, \quad \forall k \in \{0, 1, 2\}, \quad (5.35)$$

por tratarse de ser un sistema físicamente realizable y en consecuencia su respuesta impulsiva carece términos impulsivos, lo que permite asegurar la Ecuación (5.35).

Empleando la Ecuaciones (5.31), (5.34) y (5.35), se tiene

$$\begin{aligned} h^{[0]}(0^+) &= c_2 + c_3 = 0; \\ h^{[1]}(0^+) &= c_1 - 4c_2 - c_3 + c_4 = 0; \\ h^{[2]}(0^+) &= -8c_1 + 16c_2 - 2c_4 = 0; \\ h^{[3]}(0^+) &= 48c_1 - 64c_2 + 2c_3 + 2c_4 = 1, \end{aligned} \quad (5.36)$$

donde  $h^{[k]}(0^+) = \left. \frac{d^k h(t)}{dt^k} \right|_{0^+}$  para todo  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ .

Escribiendo la Ecuación (5.36) en forma matricial se obtiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \\ -8 & 16 & 0 & -2 \\ 48 & -64 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

Empleando los comandos Scilab™ mostrados en la Figura 5.3, se tiene que

```
-->A=[0, 1, 1, 0; 1, -4, -1, 1; -8, 16, 0, -2; 48, -64, 2, 2];
-->b=[0; 0; 0; -1];
-->[c, kerA]=linsolve(A, b)
kerA =
[]
c =
0.1
0.06
- 0.06
0.08
```

**Figura 5.3.** Comandos Scilab™ para el cálculo de los coeficientes  $c_i$  del Ejemplo 5.3

De lo reportado en la Figura 5.3, los valores de los coeficientes son

$$\begin{aligned} c_1 &= 0,1 = 1/10; \\ c_2 &= 0,06 = 3/50; \\ c_3 &= -0,06 = -3/50; \\ c_4 &= 0,08 = 2/3, \end{aligned} \quad (5.38)$$

lo que implica que al sustituir en la Ecuación (5.31) los resultados arrojados por el Scilab™, los cuales son mostrados por la Ecuación (5.38), se tiene que la respuesta impulsiva es

$$h(t) = \frac{1}{10}te^{-4t} + \frac{3}{50}e^{-4t} - \frac{3}{50}e^{-t}\cos(t) + \frac{2}{25}e^{-t}\sin(t), \quad \forall t > 0, \quad (5.39)$$

lo que verifica lo obtenido por el método de transformada de Laplace, y cuyo resultado es mostrado en la Ecuación (5.30).

**Observación 5.5** Al hallar la respuesta de un sistema LDCID en el dominio continuo a través de la función de transferencia, la solución obtenida es la correspondiente a como si el sistema estuviera en condiciones iniciales de cero o en reposo en  $t = 0^-$ . Esto implica que si se desea determinar la respuesta de un sistema LDCID en el dominio continuo a través de la función de transferencia, y el mismo no está en condiciones iniciales de cero, la solución encontrada no corresponde a la determinada por la solución de su ecuación diferencial.

#### ■ EJEMPLO 5.4

Suponga un sistema de primer orden definido por

$$\frac{dy(t)}{dt} + a_0y(t) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (5.40)$$

Si el sistema es excitado por la señal  $x(t) = 4e^{-5t}u(t)$ , cuando su condición inicial  $y(t)|_{0^-} = y_0^-$ . Entonces, determine la respuesta del sistema empleando la función de transferencia.

#### Solución

Debido al hecho de que el sistema es físicamente realizable y a que es un sistema de primer orden, se puede afirmar que la respuesta  $y(t)$  es continua, lo que permite asegurar que  $y(0^-) = y(0^+)$ .

Por otra parte, al aplicar la transformada de Laplace a la Ecuación (5.40) se obtiene que

$$sY(s) - y(0^-) + a_0Y(s) = X(s) \quad (5.41)$$

Al hacer la condición inicial  $y(0^-) = 0$ , se tiene que la función de transferencia es

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s + a_0} \quad (5.42)$$

Ahora, al agrupar los términos de la Ecuación (5.41), y al despejar  $Y(s)$  se tiene que

$$Y(s) = \frac{1}{s + a_0}X(s) + \frac{1}{s + a_0}y(0^-) = H(s)X(s) + y(0^-)H(s) \quad (5.43)$$

Note la gran diferencia entre las Ecuaciones (5.42) y (5.43), la cual esta última incluye el término que contiene la condición inicial del sistema.

### 5.3 TEOREMA DE VALOR INICIAL Y VALOR FINAL

Antes de estudiar al Teorema de valor final, debe demostrarse el siguiente lema, para así poder demostrar el Teorema de valor final.

**Lema 5.1** Sea  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$  para todo  $s$  tal que  $\text{Re}[s] > \alpha > 0$ . Si la función  $f(t)$  es de orden exponencial, es decir,  $f(t)$  es  $O(e^{\alpha t})$ , y  $f(t)$  es seccionalmente continua para todo  $t > \varepsilon$ . Entonces, para un  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = 0 \quad (5.44)$$

**Demostración.** El hecho de afirmar que la función  $f(t)$  es seccionalmente continua, implica entonces que su derivada puede ser representada mediante

$$\frac{df(t)}{dt} = \sum_{k=1}^N [f(t_k^+) - f(t_k^-)] \delta(t - t_k) + g(t), \quad \forall (t > 0) \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (5.45)$$

donde  $[f(t_k^+) - f(t_k^-)] = \Delta f_k$  representa el  $k$ -ésimo salto finito de discontinuidad en  $t_k$  debido a que la función  $f(t)$  es seccionalmente continua y con un número contable  $N$  de discontinuidades, y además la función  $g(t)$  es de orden exponencial y seccionalmente continua, y es definida por

$$g(t) = g_0(t) + \sum_{k=1}^{N-1} g_k(t) + g_N(t), \quad \forall (t > 0) \in \mathbb{R}, \quad (5.46)$$

donde:

$$g_0(t) = \begin{cases} \frac{df(t)}{dt}, & \forall 0 < t < t_1; \\ 0, & \forall t > t_1, \end{cases} \quad (5.47a)$$

$$g_k(t) = \begin{cases} \frac{df(t)}{dt}, & \forall t_k < t < t_{k+1}; \\ 0, & \forall \{t < t_k\} \cup \{t > t_{k+1}\}, \end{cases} \quad (5.47b)$$

$$g_N(t) = \begin{cases} 0, & \forall 0 < t < t_N; \\ \frac{df(t)}{dt}, & \forall t > t_N. \end{cases} \quad (5.47c)$$

Al sustituir la Ecuación (5.45) en la Ecuación (5.44), se tiene que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\varepsilon}^{\infty} \left[ \sum_{k=1}^N \Delta f_k \delta(t - t_k) + g(t) \right] e^{-st} dt, \quad (5.48)$$

donde se ha denotado a  $[f(t_k^+) - f(t_k^-)]$  como  $\Delta f_k$  para cada  $k$ -ésimo salto finito de discontinuidad en  $t_k$ .

Debido a que se supone convergencia de la integral y la sumatoria, la Ecuación (5.48) puede ser reescrita como

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \Delta f_k \int_{\varepsilon}^{\infty} \delta(t - t_k) e^{-st} dt + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\varepsilon}^{\infty} g(t) e^{-st} dt, \quad (5.49)$$

lo que implica al emplear los conceptos integrales de la función delta de Dirac (Brea, 2006, Capítulo 3), y al emplear la Ecuación (5.46) en la Ecuación (5.49) se tiene que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \Delta f_k e^{-st_k} + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\varepsilon}^{\infty} \left[ g_0(t) + \sum_{k=1}^{N-1} g_k(t) + g_N(t) \right] e^{-st} dt. \quad (5.50)$$

Como consecuencia directa de que  $\text{Re}[s] > \alpha > 0$ , se tiene entonces que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \Delta f_k e^{-st_k} = \sum_{k=1}^N \lim_{s \rightarrow \infty} \Delta f_k e^{-st_k} = 0, \quad (5.51)$$

debido al hecho de que  $s = \sigma + j\omega$ .

Por otra parte, se tiene que como

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left| \int_{\varepsilon}^{\infty} \left[ g_0(t) + \sum_{k=1}^{N-1} g_k(t) + g_N(t) \right] e^{-st} dt \right| < \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\varepsilon}^{\infty} |g(t)e^{-st}| dt, \quad (5.52)$$

entonces

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left| \int_{\varepsilon}^{\infty} g(t)e^{-st} dt \right| < \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\varepsilon}^{\infty} M e^{-(\hat{\alpha} + \sigma)t} dt = 0, \quad (5.53)$$

debido a que  $|e^{-st}| = e^{-\sigma t}$ , y al hecho de que  $|g(t)| < M e^{-\hat{\alpha} t}$  por ser de orden exponencial.

■

**Teorema 5.1 (Valor inicial)** Sea  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$  para todo  $s$  tal que  $\text{Re}[s] > \alpha$ . Si la función  $f(t)$  es de orden exponencial, es decir,  $f(t)$  es  $O(e^{\alpha t})$ , y  $f(t)$  es seccionalmente continua para todo  $t > 0$  y pudiendo presentar una discontinuidad de salto finito en  $t = 0$ . Entonces

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

**Demostración.** De la propiedad de derivación de la transformada de Laplace se tiene

$$\mathcal{L} \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = sF(s) - f(0^-), \quad \forall \text{Re}[s] > \alpha. \quad (5.54)$$

La Ecuación (5.54) puede ser expresada como

$$\int_{0^-}^{0^+} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt + \int_{0^+}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = sF(s) - f(0^-), \quad \forall \text{Re}[s] > \alpha. \quad (5.55)$$

Al integral entre  $0^-$  y  $0^+$  por el método de integración por parte, se tiene que

$$\int_{0^-}^{0^+} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = f(t)e^{-st} \Big|_{0^-}^{0^+} + s \int_{0^-}^{0^+} f(t)e^{-st} dt. \quad (5.56)$$

Ahora, se tiene que

$$\left| s \int_{0^-}^{0^+} f(t)e^{-st} dt \right| \leq \left| s \int_{0^-}^{0^+} M e^{-st} dt \right|, \quad (5.57)$$

donde  $M = \sup[f(t)]$  es una constante.

De la desigualdad (5.57), se puede asegurar que

$$\left| s \int_{0^-}^{0^+} M e^{-st} dt \right| \leq M e^{-st} \Big|_{0^-}^{0^+} = 0. \quad (5.58)$$

En consecuencia, el valor de la integral

$$\int_{0^-}^{0^+} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = f(0^+) - f(0^-), \quad (5.59)$$

aun cuando puede existir una discontinuidad finita de la función  $f(t)$  en  $t = 0$ .

Por otra parte, cuando  $s \rightarrow \infty$ , se tiene

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0^+}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = 0, \quad (5.60)$$

debido al Lema 5.1 de la página 131.

Aplicando estos hechos en la Ecuación (5.54), se obtiene que

$$f(0^+) - f(0^-) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) - f(0^-), \quad (5.61)$$

lo cual implica que

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

■

**Teorema 5.2 (Valor final)** Sea  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$  para todo  $s$  tal que  $\text{Re}[s] > \alpha$ . Si la función  $f(t)$  es seccionalmente continua para todo  $t > 0$ . Entonces

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0^+} sF(s)$$

**Demostración.** Empleando la propiedad de derivación de la transformada de Laplace se tiene

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{0^-}^T \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = sF(s) - f(0^-), \quad \forall \text{Re}[s] > \alpha. \quad (5.62)$$

Al hacer tender  $s$  a cero en la Ecuación (5.62), se obtiene

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ T \rightarrow \infty}} \int_{0^-}^T \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{0^-}^T \frac{df(t)}{dt} dt. \quad (5.63)$$

De la Ecuación (5.63), se puede afirmar que

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0^-) = \lim_{T \rightarrow \infty} [f(T) - f(0^-)], \quad (5.64)$$

lo que implica que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} f(T) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (5.65)$$

■

### ■ EJEMPLO 5.5

Suponga una señal  $x(t) = 4e^{-5t}u(t)$ . Compruebe el teorema de valor inicial.

#### Solución

Del Teorema 5.1, se tiene que

$$\lim_{t \downarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (5.66)$$

$$\text{Ahora, } \mathcal{L}[4e^{-5t}u(t)] = \frac{4}{s+5}.$$

Aplicando los límites de la Ecuación (5.66), se obtiene que

$$\lim_{t \downarrow 0} 4e^{-5t}u(t) = 4 \quad (5.67)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{4}{s+5} = 4 \quad (5.68)$$

Las Ecuaciones (5.67) y (5.67), permiten afirmar la comprobación del Teorema 5.1.

## 5.4 ESTABILIDAD DE LOS SISTEMAS

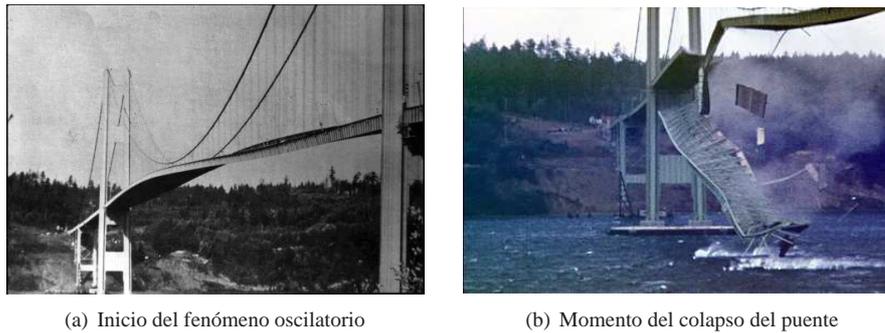
Existen diversas enfoques que permiten establecer cuando un sistema es estable o no, los cuales un conjunto de ellos son tratados en esta sección. Sin embargo, antes de presentar los criterios que permiten establecer si un sistema es estable o no, primero se introducirá la definición de sistema estable. Para esto, debe definirse lo que significará estado de equilibrio de un sistema.

**Definición 5.2 (Sistema en equilibrio)** *Se dice que un sistema permanece en equilibrio, si éste ante la ausencia de cualquier señal de perturbación agregada a la señal de excitación, su respuesta permanece inalterable.*

**Definición 5.3 (estabilidad absoluta)** *Un sistema se dice ser estable, si luego de haber sido perturbado mediante alguna señal de excitación de duración finita, el sistema retorna a su estado de equilibrio.*

La Figura 5.4<sup>12</sup> de la página 135 muestra el día en que el original puente colgante *Tacoma Narrows* colapsó, constituyendo un claro ejemplo de un sistema inestable. Una hipótesis que explica la destrucción del puente *Tacoma Narrows* es que este hecho se debió a ráfagas oscilatorias de vientos que causaron un fenómeno de resonancia, lo que produjo el colapso del puente (fotografías obtenidas a través de Wikipedia (1940)). No obstante, Yusuf Bilah y Scanian (1991) presentan un punto de vista diferente a lo que típicamente es expuesto en los textos de física e ingeniería de aquel entonces, los cuales atribuyen el colapso del puente a la respuesta forzada ante vientos oscilatorios causando una resonancia en la estructura del puente.

<sup>12</sup>Ambas fotografías fueron obtenidas de <https://commons.wikimedia.org/>



**Figura 5.4.** Original puente colgante *Tacoma Narrows* de 1810 m de longitud, el cual estuvo ubicado en el Estado de Washington, Estados Unidos de América cuando fue derribado por ráfagas oscilantes de vientos que alcanzaron una velocidad de 67 km/h, hecho acaecido el 7 de noviembre de 1940. La Gráfica (a) ilustra el inicio del fenómeno de resonancia a las 10:00 a.m., mientras la Gráfica (b) muestra el momento en que colapsó el puente a las 11:10 a.m. del 7 de noviembre de 1940.

Basado en la Definición 5.3 se cuenta con un conjunto de criterios que permiten establecer si un sistema es absolutamente estable (estable) o no, lo cuales son enunciados a continuación:

**Criterio 5.1 (Integrabilidad de la respuesta impulsiva)** *Un sistema lineal definido en el dominio continuo es considerado estable si su respuesta impulsiva es absolutamente integrable. Es decir, si*

$$\int_{t=0}^{\infty} |h(t)| dt < \infty.$$

**Criterio 5.2 (Convergencia de la respuesta impulsiva)** *Un sistema lineal definido en el dominio continuo es considerado estable si su respuesta impulsiva se aproxima a cero en la medida de que  $t$  de aproxima a infinito. Es decir, si*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0.$$

**Criterio 5.3 (Localización de los polos)** *Se dice que un sistema lineal definido en el dominio continuo es considerado estable si los polos  $p_i$  de la función de transferencia están localizados en el semiplano izquierdo del plano  $S$ . Es decir, si*

$$H(s) = k \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)},$$

y  $\text{Re}[p_i] < 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Entonces el sistema es estable.

**Criterio 5.4 (Polinomio característico)** *Se dice que un sistema lineal definido en el dominio continuo es estable si las raíces que anulan su polinomio característico, es decir, si todos las raíces  $r_i \in \mathbb{R}$  o  $z_i \in \mathbb{C}$  que hacen que  $D(r_i) = 0$  o  $D(z_i) = 0$  tienen su parte real negativa. En otras palabras, el sistema lineal es estable, si  $r_i < 0$  y  $\text{Re}[z_i] < 0$  para cada una de las raíces que anulan el polinomio característico.*

## 5.5 MODELO DINÁMICO A PARTIR DE SU FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Sea  $H(s)$  la función de transferencia de un sistema LDCID definido en el tiempo continuo y de  $n$ -ésimo orden. A través de la función de transferencia del sistema, puede obtenerse el modelo matemático del sistema empleando la siguiente regla:

Debido a que la función de transferencia es obtenida a partir del supuesto de las condiciones iniciales de cero, se tiene que

$$s^k F(s) = \mathcal{L} \left[ \frac{d^k f(t)}{dt^k} \right], \quad \text{si } \frac{d^k f(t)}{dt^k} \Big|_{0_-} = 0, \quad \forall k = 0, \dots, (n-1). \quad (5.69)$$

Entonces, de la Ecuación (5.69), se puede afirmar que

$$\mathcal{L}^{-1} [s^k F(s)] = \frac{d^k f(t)}{dt^k}, \quad \text{si } \frac{d^k f(t)}{dt^k} \Big|_{0_-} = 0, \quad \forall k = 0, \dots, (n-1). \quad (5.70)$$

Tomando en cuenta la Ecuación (5.70), se tiene que si

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^m b_{m-k} s^{m-k}}{\sum_{k=0}^n a_{m-k} s^{m-k}}. \quad (5.71)$$

Entonces de la Ecuación (5.71), se puede afirmar que

$$\sum_{k=0}^n a_{m-k} s^{m-k} Y(s) = \sum_{k=0}^m b_{m-k} s^{m-k} X(s). \quad (5.72)$$

Aplicando la Ecuación (5.70) a la Ecuación (5.72), se obtiene que

$$\sum_{k=0}^n a_{n-k} \frac{d^{n-k} y(t)}{dt^{n-k}} = \sum_{k=0}^m b_{m-k} \frac{d^{m-k} x(t)}{dt^{m-k}}.$$

### ■ EJEMPLO 5.6

Sea el sistema propuesto en el Ejemplo 5.2 de la página 125 en donde se conoce que su función de transferencia es

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 8s^2 + 19s + 12}, \quad \forall s \in \{z \in \mathbb{C} : D(z) \neq 0\}, \quad (5.73)$$

donde  $D(z) = z^3 + 8z^2 + 19z + 12$  es el llamado polinomio característico del sistema.

Para el sistema definido mediante su función de transferencia, determine su correspondiente modelo matemático, es decir, su ecuación diferencial.

### Solución

Se conoce de la Ecuación (5.73) que la función de transferencia del sistema es

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^3 + 8s^2 + 19s + 12}. \quad (5.74)$$

Como la función de transferencia se determina bajo la condiciones iniciales son cero, se tiene que de la Ecuación (5.74)

$$(s^3 + 8s^2 + 19s + 12)Y(s) = X(s). \tag{5.75}$$

Al determinar la transformada inversa de Laplace de la Ecuación (5.75), se obtiene

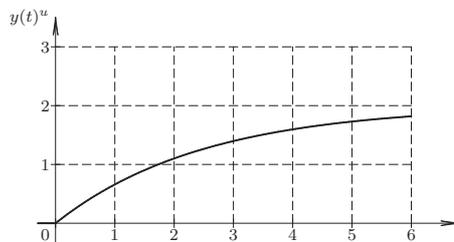
$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 8\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 19\frac{dy(t)}{dt} + 12y(t) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{5.76}$$

**PROBLEMAS**

**5.1** Sea un sistema eléctrico, el cual de acuerdo a pruebas ejecutadas en un laboratorio, el sistema es LDCID y tiene una respuesta ante un escalón unitario de expresión matemática

$$y(t)^u = k(1 - e^{-\lambda t})u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{5.77}$$

La Figura 5.5 muestra la respuesta del sistema ante el escalón unitario.



**Figura 5.5.** Respuesta del sistema del Problema 5.1 ante un escalón unitario

Por otra parte, según registros realizados durante las pruebas de laboratorio, la respuesta del sistema ante el escalón unitario viene dada por la Tabla 5.1

**Tabla 5.1.** Registros realizados a la respuesta escalón del sistema del Problema 5.1

$t$ [s]	0	1	2	3	4	5	6
$y^u(t)$ [V]	0,0000	0,6594	1,1013	1,3976	1,5962	1,7293	1,8186

Para el sistema descrito determine:

- a) respuesta impulsiva del sistema;
- b) modelo matemático del sistema.

**5.2** Sea un sistema físicamente realizable, el cual es definido según el modelo matemático,

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{5.78}$$

donde  $x(t)$  e  $y(t)$  son respectivamente las señales de excitación y respuesta del sistema. Si la transformada de Laplace de la señal de excitación está definida por

$$X(s) = \frac{1}{s+2}, \quad \forall \operatorname{Re}[s] > -2, \quad (5.79)$$

y las condiciones iniciales del sistema son:  $y(t)|_{0^-} = 0$  y  $\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{0^-} = 1$ . Entonces, la respuesta del sistema para  $t > 0$  es

- A)  $3e^{-t} - 2e^{-3t} - e^{-2t}$
- B)  $2e^{-t} - e^{-3t} - e^{-2t}$
- C)  $\frac{7}{15}e^{-t} - \frac{8}{15}e^{-3t} + \frac{1}{15}e^{-2t}$
- D)  $e^{-t} - e^{-2t}$

**5.3** Sea un sistema físicamente realizable, el cual es definido según el modelo matemático<sup>13</sup>,

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 4\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = x(t), \quad (5.80)$$

donde  $x(t)$  e  $y(t)$  son respectivamente las señales de excitación y respuesta del sistema. Si la transformada de Laplace de la señal de excitación está definida por

$$X(s) = \frac{1}{s}, \quad \forall \operatorname{Re}[s] > 0, \quad (5.81)$$

y las condiciones iniciales del sistema son:  $y(t)|_{0^-} = 0$ ;  $\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{0^-} = 0$  y  $\left. \frac{d^2y(t)}{dt^2} \right|_{0^-} = 0$ .

Entonces, la respuesta del sistema para  $t > 0$  es

- A)  $y(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{68}e^{-4t} - \frac{1}{4}\cos(t) - \operatorname{sen}(t), \quad \forall t > 0.$
- B)  $y(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{68}e^{-4t} - \frac{4}{17}\cos(t) - \frac{1}{17}\operatorname{sen}(t), \quad \forall t > 0.$
- C)  $y(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{68}e^{-4t} - \frac{2}{17}\cos(t) - \frac{1}{17}\operatorname{sen}(t), \quad \forall t > 0.$
- D) ninguna de las anteriores.

### EJERCICIOS PROPUESTOS

**5.4** Sea un sistema LDCID definido por

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 4\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (5.82)$$

donde  $x(t)$  e  $y(t)$  son respectivamente las señales de excitación y respuesta del sistema. Se conoce además que las condiciones iniciales del sistema son:  $\left. \frac{d^2y(t)}{dt^2} \right|_{0^-} = 0$ ,  $\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{0^-} = 0$  y  $y(t)|_{0^-} = 1$ .

- a) Hallar la función de transferencia del sistema.

<sup>13</sup>Observe que  $a^3 + 4a^2 + a + 4 = (a^2 + 1)(a + 4)$ .

b) Si el sistema es excitado por una señal definida por

$$x(t) = p_2(t - 5), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (5.83)$$

Determine la respuesta del sistema mediante el método de transformada de Laplace.

- c) Determine la respuesta del sistema aplicando los conceptos de función de transferencia, es decir, calculando primero  $Y(s) = H(s)X(s)$ , para luego determinar la transformada inversa de Laplace.
- d) Compare los resultados obtenidos en los Ejercicios 5.4.b y 5.4.c y explique los resultados obtenidos en cuanto a cuál es correcto y las razones para afirmarlo.

**5.5** Repita el Ejercicio 5.4, pero en este caso con las condiciones iniciales:

$\frac{d^2y(t)}{dt^2}\Big|_{0^-} = 0$ ,  $\frac{dy(t)}{dt}\Big|_{0^-} = 0$  y  $y(t)|_{0^-} = 0$ , a los efectos de establecer una comparación entre ambos ejercicios.



## CAPÍTULO 6

---

# ANÁLISIS DE SISTEMAS EN EL PLANO Z

---

La vida te ofrece muchos puentes para entenderla.

—Ebert Brea

El análisis de sistemas en el plano de la transformada  $\mathcal{Z}$  (TZ) permite visualizar los sistemas en el dominio discreto desde una óptica diferente, la cual podría facilitar las respuestas que deben ofrecerse ante distintas situaciones.

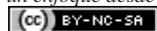
Este punto de vista requiere de un conocimiento previo de la transformada  $\mathcal{Z}$ , y cuyas definiciones, propiedades y teoremas son exhaustivamente estudiado en (Brea, 2006, Capítulo 5).

Se puede afirmar que la transformada de Laplace es una herramienta para la resolución de los modelos matemáticos dinámicos en el dominio continuo, lo que representa la transformada  $\mathcal{Z}$  en la búsqueda de soluciones de modelos matemáticos dinámicos en el dominio discreto.

La transformada  $\mathcal{Z}$  ha tenido muchas aplicaciones en el campo de la ingeniería, entre las cuales se puede citar sus aplicaciones en el diseño de filtros digitales (Hsue *et al.*, 2006, 2007)

Este capítulo está estructurado como sigue: en la Sección 6.1 se presenta un breve repaso de la transformada unilateral derecha  $\mathcal{Z}$  debido a que los sistemas que son estudiados en este capítulo son los denominados sistemas causales; los fundamentos matemáticos empleados para la determinación de la transformada inversa  $\mathcal{Z}$  se presentan en la Sección 6.2; en la Sección 6.3 se emplean los conceptos de transformada  $\mathcal{Z}$  para la determinación

*Análisis de Sistemas Lineales Asistido con Scilab™,  
un enfoque desde la Ingeniería Eléctrica. Primera Edición.* Por Ebert Brea.



por Ebert Brea, 2014.

de la respuesta de sistemas LDCID definidos en el dominio discreto; un punto de vista de lo que significa la función de transferencias en el dominio discreto se introduce en la Sección 6.4; en la Sección 6.5 se demuestran y aplican los teoremas de valor inicial y valor final para sistemas LDCID definidos en el dominio discreto; una breve revisión de los criterios empleados para determinar si un sistema LDCID es estable o no lo es, se muestran en la Sección 6.6; y finalmente, en la Sección 6.7 se presenta un método para expresar el modelo matemático de un sistema LDCID a partir de su función de transferencia.

Adicionalmente, al final del capítulo son presentados problemas y ejercicios propuestos relativos a lo tratado en este capítulo.

## 6.1 LA TRANSFORMADA UNILATERAL DERECHA $\mathcal{Z}$

El estudio de la transformada unilateral derecha  $\mathcal{Z}$  debe partir de la definición, para así poder establecer los teoremas que soportan sus propiedades. Es por tal motivo que en esta sección se establecerán algunas definiciones básicas, a objeto de familiarizar al lector con el concepto de transformada  $\mathcal{Z}$ , y la notación que será empleada en el texto en relación a la transformada  $\mathcal{Z}$ .

### 6.1.1 Definición

**Definición 6.1** Sea  $f[n]$  una función definida en el dominio discreto tal que  $f[n] = 0$ , para todo  $n < 0$  discreto. Entonces,

$$F_{I^+}(z) = \mathcal{Z}[f[n]] = \sum_{n=0}^{\infty} f[n]z^{-n}, \quad \forall z \in D_z, \quad (6.1)$$

donde  $f[n] = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \delta[n-k]$ , y  $D_z$  es la región de convergencia (RDC) en donde se garantiza analiticidad de la función  $F_{I^+}(z)$ , la cual en esta obra será simplificada en su notación como  $F_+(z)$  o simplemente  $F(z)$ .

Note que  $f_k$  representa el peso que tiene cada impulso discreto, y su significado es el mismo al presentado en el Capítulo 1.

Reemplazando la definición de  $f[n]$  en la Ecuación (6.1), se tiene

$$F_+(z) = \mathcal{Z}[f[n]] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} f_k \delta[n-k] \right] z^{-n}, \quad \forall z \in D_z. \quad (6.2)$$

Ahora bien, basado en que ambas sumas convergen, pueden ser permutados los operadores sumatorias de la Ecuación (6.2), obteniéndose

$$F_+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \delta[n-k] z^{-n} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}, \quad \forall z \in D_z. \quad (6.3)$$

### ■ EJEMPLO 6.1 Secuencia de duración finita

Sea la función definida en el dominio discreto

$$f[n] = 5\delta[n] + 4\delta[n-1] + \delta[n-2] - \delta[n-4], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (6.4)$$

Determine la transformada  $\mathcal{Z}$  de la función o señal  $f[n]$ .

**Solución**

Un modo de determinar la transformada  $\mathcal{Z}$  es aplicando la Definición 6.1, para lo cual debe sustituirse  $f[n]$  en la Ecuación (6.1), resultando

$$F_+(z) = \mathcal{Z}[f[n]] = \sum_{n=0}^{\infty} [5\delta[n] + 4\delta[n-1] + \delta[n-2] - \delta[n-4]]z^{-n}. \quad (6.5)$$

Ahora, debido al hecho de que si  $\phi[n]$  está definido para  $k \in \mathbb{Z}(\geq 0)$ , entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta[n-k]\phi[n] = \phi[k], \quad (6.6)$$

y en consecuencia

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta[n-k]z^{-n} = z^{-k}, \quad (6.7)$$

siempre y cuando  $z^{-k}$  esté definido, lo cual esto se garantiza si  $z \neq 0$ , para los casos de  $k \neq 0$ .

Basado en la Ecuación (6.7), se obtiene que de la Ecuación (6.5)

$$F_+(z) = 5 + 4z^{-1} + z^{-2} - z^{-4}, \quad \forall z \neq 0. \quad (6.8)$$

Otra forma como puede ser hallada la solución es aplicando la Ecuación (6.3) directamente, para esto debe determinarse los pesos de la función  $f[n]$  definida en el dominio discreto.

De la Ecuación (6.4) se puede afirmar que los pesos de la función  $f[n]$  están dados por

$$f_k = \begin{cases} 5, & \forall k = 0; \\ 4, & \forall k = 1; \\ 1, & \forall k = 2; \\ -1, & \forall k = 4; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (6.9)$$

Al sustituir la Ecuación (6.9) en la Ecuación (6.3), se obtiene

$$F_+(z) = 5 + 4z^{-1} + z^{-2} - z^{-4}, \quad \forall z \neq 0. \quad (6.10)$$

En el Ejemplo 6.1 se puede apreciar dos formas de encontrar la solución al problema. El primer modo es realmente conceptual, a diferencia del segundo modo que únicamente requiere la sustitución de los datos en la Ecuación (6.3).

■ **EJEMPLO 6.2**

Sea la señal discreta  $f[n] = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \delta[n-k]$ . Determine la transformada  $\mathcal{Z}$  de la señal  $f[n]$ .

**Solución**

Para determinar la transformada  $\mathcal{Z}$  se empleará el resultado expuesto en la Ecuación (6.3), es decir,

$$F_+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{z}\right)^k, \quad \forall \left|\frac{r}{z}\right| < 1. \quad (6.11)$$

Se conoce que

$$\sum_{k=n_0}^N a^k = \frac{a^{n_0} - a^{N+1}}{1-a}, \quad \forall a \neq 1. \quad (6.12)$$

Al hacer  $n_0 = 0$  y  $N$  tender a infinito, se tiene que la Ecuación (6.12) se puede reescribir como

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}, \quad \forall a < 1. \quad (6.13)$$

Aplicando la Ecuación (6.13) a la Ecuación (6.11), se tiene

$$F_+(z) = \frac{1}{1 - \left(\frac{r}{z}\right)} = \frac{z}{z-r}, \quad \forall |z| > |r|, \quad (6.14)$$

lo cual significa que  $F_+(z)$  es analítica en cada punto de la región  $|z| > |r|$ . Note que la función  $F_+(z)$  tiene un punto singular en  $z = -r$

**6.1.2 Propiedades relevantes**

En este apartado se destacarán las propiedades más importantes que suelen ser empleadas en la resolución de ecuaciones en diferencias. Sin embargo, Brea (2006, Capítulo 5) muestra un conjunto de propiedades de la transformada bilateral  $\mathcal{Z}$  que fácilmente pueden ser particularizadas al caso de transformada unilateral derecha  $\mathcal{Z}$ .

**6.1.2.1 Linealidad**

**Teorema 6.1 (Linealidad)** Sea  $F_k(z) = \mathcal{Z}\{f_k(n)\}$  para todo  $k = 1, \dots, m$ . Si  $F_k(z)$  converge para todo  $z \in D_k$ , entonces

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{k=1}^m f_k(n)\right\} = \sum_{k=1}^m F_k(z), \quad \forall z \in \bigcap_{k=1}^m D_k. \quad (6.15)$$

**Demostración.** Aplíquese el método mostrado en (Brea, 2006, Página 61). ■

**6.1.2.2 Traslación retardada en el dominio de la función**

**Teorema 6.2** Sea  $F(z)$  la transformada unilateral derecha  $\mathcal{Z}$  de una función  $f[n]$  tal que  $f[n] = 0$ , para todo  $n < 0$ , y con región de convergencia (RDC)  $z \in D_z$ . Entonces,

$$\mathcal{Z}\{f[n-n_0]\} = z^{-n_0} F(z), \quad \forall z \in D_z. \quad (6.16)$$

**Demostración.** De la Definición 6.1, se tiene que la transformada de una función  $f[n-n_0]$ , la cual es cero para todo  $n < n_0$ ,

$$\mathcal{Z}\{f[n-n_0]\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n-n_0]z^{-n}, \quad \forall z \in D_z, \quad (6.17)$$

donde  $f[n - n_0] = 0$  para todo  $n < n_0$ .

Quedando entonces la Ecuación (6.17)

$$\mathcal{L}\{f[n - n_0]\} = \sum_{n=n_0}^{\infty} f[n - n_0]z^{-n} = z^{-n_0} \sum_{n=0}^{\infty} f[n]z^{-n}, \quad \forall z \in D_z, \quad (6.18)$$

como consecuencia de hacer  $m = n - n_0$ , lo cual asegura que

$$\mathcal{L}\{f[n - n_0]\} = z^{-n_0}F(z), \quad \forall z \in D_z.$$

■

### 6.1.2.3 Traslación adelantada en el dominio de la función

**Teorema 6.3** Sea  $F(z)$  la transformada unilateral derecha  $\mathcal{L}$  de una señal  $f[n]$  tal que  $f[n] = 0$  para todo  $n < 0$ , y con RDC  $z \in D_z$ . Entonces,

$$\mathcal{L}\{f[n + n_0]\} = z^{n_0}F(z) - \sum_{k=0}^{n_0-1} z^{n_0-k}f[k], \quad \forall z \in D_z. \quad (6.19)$$

**Demostración.** Para demostrar el teorema se empleará el método de inducción completa. Caso  $n_0 = 1$

$$\mathcal{L}\{f[n + 1]\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n + 1]z^{-n} = z \sum_{m=1}^{\infty} f[m]z^{-m}, \quad \forall z \in D_z, \quad (6.20)$$

al permitir que  $m = n + 1$ .

Al sumar y restar el término  $f[0]$  a la Ecuación (6.20), se tiene

$$\mathcal{L}\{f[n + 1]\} = z \left[ \sum_{m=1}^{\infty} f[m]z^{-m} + f[0] - f[0] \right] = \sum_{m=0}^{\infty} f[m]z^{-m} - zf[0], \quad \forall z \in D_z,$$

la cual permite afirmar que

$$\mathcal{L}\{f[n + 1]\} = zF(z) - zf[0], \quad \forall z \in D_z, \quad (6.21)$$

Caso  $n_0 = 2$

$$\mathcal{L}\{f[n + 2]\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n + 2]z^{-n} = z^2 \sum_{m=2}^{\infty} f[m]z^{-m}, \quad \forall z \in D_z, \quad (6.22)$$

al hacer que  $m = n + 2$ .

Ahora, al sumar y restar  $z^2[f[0] + f[1]z^{-1}]$  a la Ecuación (6.22), se obtiene

$$\mathcal{L}\{f[n + 2]\} = z^2 \left[ -f[0] - f[1]z^{-1} + f[0] + f[1]z^{-1} + \sum_{m=2}^{\infty} f[m]z^{-m} \right], \quad \forall z \in D_z, \quad (6.23)$$

la cual al agrupar sus términos

$$\mathcal{L}\{f[n+2]\} = z^2 \left[ -f[0] - f[1]z^{-1} + \sum_{m=0}^{\infty} f[m]z^{-m} \right], \quad \forall z \in D_z. \quad (6.24)$$

Entonces, de la Ecuación (6.24), se asegura

$$\mathcal{L}\{f[n+2]\} = z^2 F(z) - z^2 f[0] - z f[1], \quad \forall z \in D_z. \quad (6.25)$$

Ahora bien, conociendo el resultado, se determinará empleando la ecuación demostrada para el caso  $n_0 = 1$ , a los fines de comprobarla.

Obviamente, se sabe que  $f[n+2] = f[(n+1)+1]$ , es decir, que empleando la Ecuación (6.21) de forma recurrente se puede obtener

$$\mathcal{L}\{f[n+2]\} = \mathcal{L}\{f[(n+1)+1]\} = z \mathcal{L}\{f[n+1]\} - z f[n+1] \Big|_{n=0}, \quad \forall z \in D_z$$

quedando entonces que

$$\mathcal{L}\{f[n+2]\} = z \mathcal{L}\{f[n+1]\} - z f[1], \quad \forall z \in D_z. \quad (6.26)$$

Aplicando nuevamente la Ecuación (6.21) a la Ecuación (6.26)

$$\mathcal{L}\{f[n+2]\} = z(zF(z) - z f[0]) - z f[1] = z^2 F(z) - z^2 f[0] - z f[1], \quad \forall z \in D_z. \quad (6.27)$$

Caso  $n_0 = 3$

Debido al hecho de que el empleo recurrente de la Ecuación (6.21) conduce a un resultado apropiado, se demostrará este caso aplicando la ecuación para el caso  $f[n+3] = f[(n+2)+1]$ .

$$\mathcal{L}\{f[n+3]\} = \mathcal{L}\{f[(n+2)+1]\} = z \mathcal{L}\{f[n+2]\} - z f[n+2] \Big|_{n=0}, \quad \forall z \in D_z.$$

Ahora, dada la Ecuación (6.27) se tiene entonces,

$$\mathcal{L}\{f[n+3]\} = z(z^2 F(z) - z^2 f[0] - z f[1]) - z f[2], \quad \forall z \in D_z,$$

la cual arroja como resultado

$$\mathcal{L}\{f[n+3]\} = z^3 F(z) - z^3 f[0] - z^2 f[1] - z f[2], \quad \forall z \in D_z. \quad (6.28)$$

Caso  $n_0 - 1$  (Hipótesis de inducción)

Como hipótesis de inducción, se tiene que

$$\mathcal{L}\{f[n+(n_0-1)]\} = z^{n_0} F(z) - \sum_{k=0}^{n_0-2} z^{n_0-1-k} f[k], \quad \forall z \in D_z. \quad (6.29)$$

Caso  $n_0$  (Tesis de inducción)

Para demostrar la tesis de inducción, se reexpresará

$$\mathcal{Z}\{f[n+n_0]\} \text{ como } \mathcal{Z}\{f[(n+n_0-1)+1]\}, \quad (6.30)$$

la cual al aplicar la Ecuación (6.30) en la Ecuación (6.21), se tiene que

$$\mathcal{Z}\{f[(n+n_0-1)+1]\} = z \mathcal{Z}\{f[(n+n_0-1)]\} - zf[(n+n_0-1)] \Big|_{n=0}, \quad \forall z \in D_z$$

lo cual implica

$$\mathcal{Z}\{f[n+n_0]\} = z \mathcal{Z}\{f[(n+n_0-1)]\} - zf[n_0-1], \quad \forall z \in D_z. \quad (6.31)$$

De este modo al emplear nuevamente la Ecuación (6.21) a la Ecuación (6.31), se tiene

$$\mathcal{Z}\{f[n+n_0]\} = z \left[ z^{n_0} F(z) - \sum_{k=0}^{n_0-2} z^{n_0-1-k} f[k] \right] - zf[n_0-1], \quad \forall z \in D_z. \quad (6.32)$$

Agrupando los términos, se tiene

$$\mathcal{Z}\{f[n+n_0]\} = z^{n_0+1} F(z) - \left[ \sum_{k=0}^{n_0-2} z^{n_0-k} f[k] \right] - zf[n_0-1], \quad \forall z \in D_z,$$

en donde el último término puede ser incluido bajo la operación de sumatoria, resultando

$$\mathcal{Z}\{f[n+n_0]\} = z^{n_0+1} F(z) - \sum_{k=0}^{n_0-1} z^{n_0-k} f[k], \quad \forall z \in D_z. \quad (6.33)$$

Claramente, esta última ecuación satisface todos los casos particulares. ■

#### 6.1.2.4 Multiplicación por $n^m$

**Teorema 6.4** Sea  $F(z)$  la transformada unilateral derecha  $\mathcal{Z}$  de una función  $f[n]$  tal que  $f[n] = 0$  para todo  $n < 0$ , y con RDC  $z \in D_z$ . Entonces,

$$\mathcal{Z}[n^m f[n]] = (-z)^m \frac{d^m F(z)}{dz^m}, \quad \forall z \in D_z. \quad (6.34)$$

**Demostración.** Para demostrar el teorema se demostrará primero el caso cuando  $m = 1$ , es decir,  $\mathcal{Z}[nf[n]]$ .

De acuerdo a la definición de transformada  $\mathcal{Z}$ ,

$$\mathcal{Z}[nf[n]] = \sum_{n=0}^{\infty} nf[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} nf[n]z^{-n} z z^{-1}, \quad \forall z \in D_z. \quad (6.35)$$

Agrupando los términos de la Ecuación (6.35), se tiene

$$\mathcal{Z}[nf[n]] = z \sum_{n=0}^{\infty} f[n]n z^{-n-1}, \quad \forall z \in D_z. \quad (6.36)$$

Por otra parte, se tiene que

$$\frac{dz^{-n}}{dz} = -nz^{-n-1}, \quad \forall z \neq 0, n \geq 0. \quad (6.37)$$

Aplicando la Ecuación (6.37) en la Ecuación (6.36) se obtiene

$$\mathcal{Z}[nf[n]] = z \sum_{n=0}^{\infty} f[n](-1) \frac{dz^{-n}}{dz} = -z \frac{d}{dz} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} f[n]z^{-n} \right], \quad \forall z \in D_z, \quad (6.38)$$

quedando entonces que

$$\mathcal{Z}[nf[n]] = -z \frac{d}{dz} F(z), \quad \forall z \in D_z. \quad (6.39)$$

Ahora, al estudiar el caso  $m = 2$ , se tiene que

$$\mathcal{Z}[n^2 f[n]] = \mathcal{Z}[n(nf[n])], \quad \forall z \in D_z. \quad (6.40)$$

Al aplicar la Ecuación (6.39) en la Ecuación (6.40), se puede afirmar

$$\mathcal{Z}[n^2 f[n]] = -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[nf[n]], \quad \forall z \in D_z, \quad (6.41)$$

la cual al emplear nuevamente la Ecuación (6.39), se consigue

$$\mathcal{Z}[n^2 f[n]] = -z \frac{d}{dz} \left( -z \frac{d}{dz} F(z) \right) = (-z)^2 \frac{d^2}{dz^2} F(z), \quad \forall z \in D_z. \quad (6.42)$$

Si este procedimiento se aplica recurrentemente se llega entonces que

$$\mathcal{Z}[n^m f[n]] = (-z)^m \frac{d^m}{dz^m} F(z), \quad \forall z \in D_z. \quad (6.43)$$

■

## 6.2 TRANSFORMADA INVERSA $\mathcal{Z}$

En esta sección se mostrará un método de transformada inversa  $\mathcal{Z}$ , el cual está basado de conceptos definidos en el estudio de variable compleja. No obstante, a pesar de lo exigente que pudiera ser la aplicación de los conceptos de variable compleja, el método resulta muy conveniente y expedito en la determinación de la transformada inversa  $\mathcal{Z}$ .

Para esto se enunciará algunos teoremas que son la base para el desarrollo del método de transformada inversa  $\mathcal{Z}$ .

**Teorema 6.5 (Serie de Laurent)** Sea  $f(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica en el dominio no vacío anular (multiplemente conexo)  $D_z = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ , donde  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$  y además  $r_1 < r_2$ . Sea también  $c$  cualquier contorno simple cerrado en torno a un punto  $z_0$  orientado en sentido positivo y contenido totalmente en  $D_z$ . Entonces, para cada punto

$z \in D_z$ ,  $f(z)$  puede ser representado como

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z - z_0)^{-k}, \quad \forall z \in D_z, \quad (6.44)$$

donde

$$a_k = \frac{1}{j2\pi} \oint_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots; \quad (6.45)$$

y

$$b_k = \frac{1}{j2\pi} \oint_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-k+1}} dz, \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots \quad (6.46)$$

**Demostración.** Véase Brown y Churchill (2004, Capítulo 5). ■

**Corolario 6.1** Al definir la región con centro en el origen, es decir,  $z_0 = 0$ , se tiene entonces que la transformada  $\mathcal{Z}$  de una función definida en el dominio discreto puede ser modelada como una serie de Laurent, es decir,

$$F(z) = \mathcal{Z}(F[n]) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{-k}, \quad \forall z \in D_z, \quad (6.47)$$

donde

$$a_{-k} = \frac{1}{j2\pi} \oint_c F(z) z^{k-1} dz, \quad \forall k = 1, 2, \dots; \quad (6.48)$$

y

$$b_k = \frac{1}{j2\pi} \oint_c F(z) z^{k-1} dz, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.49)$$

**Demostración.** Al hacer  $z_0 = 0$  y al reemplazar  $k$  por  $-k$  en  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  en la Ecuación (6.44), se demuestra el corolario. ■

**Observación 6.1** Los coeficientes  $b_k$  para todo  $k \geq 0$  representan las muestras  $f_k$  de las secuencias de dominio entero no negativo. Mientras, los coeficientes  $a_k$  constituyen las muestras  $f_k$  correspondientes al dominio negativo.

**Teorema 6.6 (Transformada unilateral derecha inversa  $\mathcal{Z}$ )** Sea  $f[n] : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida por una secuencia de muestras uniformemente espaciadas en su dominio  $\mathbb{Z}$  tal que  $f[n] = 0$  para todo  $n < 0$ . Sea además  $F_+(z) = F(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  la transformada unilateral derecha  $\mathcal{Z}$ , es decir,  $F(z) = \mathcal{Z}[f[n]]$  con región de convergencia  $D_z = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$  donde  $r$  es el radio más pequeño que garantiza la analiticidad de la transformada  $\mathcal{Z}$ ,  $F(z)$  en  $D_z$ ; y  $c = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r + \varepsilon\}$  con  $\varepsilon > 0$  es una curva cerrada simple orientada en sentido positivo con respecto a las singularidades que pudiera tener  $F(z)$ . Entonces,

$$f_k = \frac{1}{j2\pi} \oint_c F(z) z^{k-1} dz, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.50)$$

y en consecuencia

$$f[n] = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \delta[n - k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (6.51)$$

**Demostración.** De acuerdo al Teorema 6.5, se tiene que debido al hecho de que  $f[n] = 0$  para todo  $n < 0$ , la transformada  $\mathcal{Z}$  de la secuencia  $f_k$  puede ser expresada en términos de

su expansión de serie de Laurent, es decir,

$$F(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{-k}, \quad \forall z \in D_z, \quad (6.52)$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{j2\pi} \oint_c F(z) z^{-1} dz, \quad (6.53)$$

y

$$b_k = \frac{1}{j2\pi} \oint_c F(z) z^{k-1} dz, \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots \quad (6.54)$$

Por otra parte, de acuerdo a la Definición 6.1, la transformada  $\mathcal{Z}$  de  $f[n]$  viene dada por

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f[k] z^{-k}, \quad \forall z \in D_z. \quad (6.55)$$

Al comparar las Ecuaciones (6.52) y (6.55) se obtiene que

$$f_k = \begin{cases} a_0, & \forall k = 0; \\ b_k, & \forall k \geq 1. \end{cases} \quad (6.56)$$

En consecuencia,

$$f_k = \frac{1}{j2\pi} \oint_c F(z) z^{k-1} dz, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.57)$$

y

$$f[n] = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (6.58)$$

■

**Corolario 6.2** Sea  $F_+(z) = F(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  la transformada unilateral derecha  $\mathcal{Z}$ , es decir,  $F(z) = \mathcal{Z}[f[n]]$  con RDC  $D_z = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$  donde  $r$  es el radio más pequeño que garantiza la analiticidad de la transformada  $\mathcal{Z}$ ,  $F(z)$  en  $D_z$ . Además, sea  $F(z)$  analítica para todo  $Z \in D_z$  y en todo punto  $\bar{D}_z = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$  excepto posiblemente en un número finito de singularidades aisladas  $p_i$  para todo  $i = 1, 2, \dots, N$ . Entonces,

$$f_k = \sum_{i=1}^N \text{Res} \left[ F(z) z^{k-1} \right] \Big|_{p_i}, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.59)$$

donde  $\text{Res}[\cdot]$  es el residuo.

**Demostración.** Aplicando el teorema de los residuos (Brown y Churchill, 2004, Capítulo 6) a la Ecuación (6.50) para cada singularidad aislada o polo aislado  $p_i$  para todo  $i = 1, 2, \dots, N$ , se demuestra el corolario. ■

**Observación 6.2** Si  $F(z)$  posee únicamente singularidades o polos aislados y cada uno de ellos es de orden  $m_i$ , el  $\text{Res} \left[ F(z) z^{k-1} \right] \Big|_{p_i}$  para cada  $i = 1, 2, \dots, N$  puede determinarse a

través de

$$\text{Res} \left[ F(z)z^{k-1} \right] \Big|_{p_i} = \frac{1}{(m_i - 1)!} \frac{d^{(m_i-1)}[\varphi(z)]}{dz^{(m_i-1)}} \Big|_{p_i}, \quad (6.60)$$

donde

$$\varphi(z) = (z - p_i)F(z)z^{k-1}, \quad (6.61)$$

es analítica en cada punto  $p_i$  y  $\varphi(z)|_{p_i} \neq 0$  para cada  $i = 1, 2, \dots, N$ , (Brown y Churchill, 2004, Capítulo 6).

**Método 6.1 (Método de los Residuos)** Dada la transformada  $\mathcal{Z}$ ,  $F(z)$ , de una función  $f[n]$  causal definida en el dominio discreto  $n$ , es decir,  $f[n] = 0$  para todo  $n < 0$ , entonces, ejecute:

*Paso 1.* Verifique que función  $F(z)$  contiene únicamente singularidades o polos aislados y denótelos como  $p_i$  para todo  $i = 1, 2, \dots, N$ , y determine el orden  $m_i$  de cada  $i$ -ésima singularidad.

*Paso 2.* Determine el residuo que arroja cada singularidad mediante la Ecuación (6.60), es decir,

$$\text{Res} \left[ F(z)z^{k-1} \right] \Big|_{p_i} = \frac{1}{(m_i - 1)!} \frac{d^{(m_i-1)}[\varphi(z)]}{dz^{(m_i-1)}} \Big|_{p_i},$$

donde

$$\varphi(z) = (z - p_i)F(z)z^{k-1},$$

es analítica en cada punto  $p_i$  y  $\varphi(z)|_{p_i} \neq 0$  para cada  $i = 1, 2, \dots, N$ .

*Paso 3.* Sume los residuos obtenidos en el Paso 2, es decir, determine

$$f_k = \sum_{i=1}^N \text{Res} \left[ F(z)z^{k-1} \right] \Big|_{p_i}, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.62)$$

para expresar

$$f[n] = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \delta[n - k], \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

donde  $f_k$  viene definida por la Ecuación (6.62).

### 6.3 DETERMINACIÓN DE LA RESPUESTA POR TRANSFORMADA $\mathcal{Z}$

Considere nuevamente el Problema 3.1 de la página 81, en la cual se representa un sistema lineal, dinámico, causal, invariante en el dominio y determinista (LDCID), y cuyo modelo matemático viene definido por:

$$\sum_{i=0}^k a_i y[n+i] = \sum_{i=0}^r b_i x[n+i], \quad (6.63)$$

donde, como fue definido anteriormente,  $x[n+i]$  para cada  $i = 0, 1, \dots, r$  son las muestras de la señal discreta de excitación;  $y[n+i]$  para cada  $i = 0, 1, \dots, k$  son las muestras de la señal discreta de respuesta;  $a_i$  para cada  $i = 0, 1, \dots, k$  son los parámetros del sistema; y  $b_i$  para

cada  $i = 0, 1, \dots, r$  son los coeficientes que alteran las muestras de la señal de excitación discreta.

Ahora bien, para estudiar la respuesta de un sistema LDCID debe emplearse la propiedad de traslación de la transformada  $\mathcal{Z}$ , la cual en sus dos versiones fueron enunciadas por los Teoremas 6.2 y 6.3.

**Método 6.2 (Determinación de la Respuesta por Transformada  $\mathcal{Z}$ )** Dada la ecuación en diferencias definida por la Ecuación (6.63), y conocida la excitación  $x[n]$  ejecute:

*Paso 1.* Aplique la transformada  $\mathcal{Z}$  a la ecuación en diferencias, de acuerdo a los Teoremas 6.2 y 6.3, según sea el caso.

*Paso 2.* Sustituya en la expresión de la transformada  $\mathcal{Z}$  de la ecuación en diferencias, la secuencia de condiciones iniciales y la transformada  $\mathcal{Z}$  de la señal de excitación  $x[n]$ .

*Paso 3.* Despeje  $Y(z)$ .

*Paso 4.* Determine la transformada inversa  $\mathcal{Z}$  de  $Y(z)$ .

### ■ EJEMPLO 6.3

Sea un sistema LDCID definido por

$$y[n+2] + 6y[n+1] + 8y[n] = 10x[n], \quad (6.64)$$

donde la señal de excitación  $x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \delta[n-k]$ .

Determine la respuesta del sistema definido en el dominio discreto teniendo en cuenta que  $y[0] = 1$ ;  $y[1] = 1/2$ .

#### Solución

Al aplicar el Método 6.2 de la página 152, se tiene

$$z^2 Y(z) - z^2 y[0] - zy[1] + 6(zY(z) - zy[0]) + 8Y(z) = 10X(z). \quad (6.65)$$

Agrupando los términos y despejando  $Y(z)$  de la Ecuación (6.65), se tiene

$$Y(z) = \frac{10}{z^2 + 6z + 8} X(z) + y[0] \frac{z(z+6)}{z^2 + 6z + 8} + y[1] \frac{z}{z^2 + 6z + 8}. \quad (6.66)$$

Al reemplazar las condiciones en la Ecuación (6.66), se llega a

$$Y(z) = \frac{10}{z^2 + 6z + 8} X(z) + \frac{z(z+6)}{z^2 + 6z + 8} + \frac{1}{2} \frac{z}{z^2 + 6z + 8}. \quad (6.67)$$

Agrupando los términos, factorizando el polinomio característico y sustituyendo  $X(z)$  por su transformada  $\mathcal{Z}$  la cual viene dada por

$$X(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}, \quad \forall |z| > \frac{1}{2},$$

se tiene

$$Y(z) = \frac{10z}{(z+4)(z+2)(z-\frac{1}{2})} + \frac{z^2 + \frac{13}{2}z}{(z+4)(z+2)}, \quad \forall |z| > 4,$$

la cual al agrupar sus términos se obtiene

$$Y(z) = \frac{z^3 + 6z^2 + \frac{27}{4}z}{(z+4)(z+2)(z-\frac{1}{2})}, \quad \forall |z| > 4. \quad (6.68)$$

Quedando únicamente por determinar la transformada inversa  $\mathcal{Z}$  a la Ecuación (6.68), la cual se puede obtener aplicando lo mostrado en la Sección 6.2.

No obstante, se aplicarán adicionalmente dos métodos alternos que permitirán hallar la transformada inversa  $\mathcal{Z}$ .

### Método de los residuos (Método 6.1 de la página 151)

Este método se fundamenta en la aplicación del Teorema 6.6 de la página 149, el cual de acuerdo a su Corolario 6.2 se tiene que

$$y_k = \sum_{i=1}^3 \text{Res} \left[ Y(z)z^{k-1} \right] \Big|_{p_i}, \quad (6.69)$$

donde  $p_1 = -4$ ,  $p_2 = -2$ ,  $p_3 = 1/2$  son todos polos aislados simples, e  $Y(z)$  viene dado por la Ecuación (6.68).

#### Polo $p_1 = -4$ , $m_1 = 1$

$$\varphi(z) = (z+4) \frac{z^3 + 6z^2 + \frac{27}{4}z}{(z+4)(z+2)(z-\frac{1}{2})} z^{k-1}, \quad \forall |z| > 4. \quad (6.70)$$

Al simplificar la Ecuación (6.70)

$$\varphi(z) = \frac{z^2 + 6z + \frac{27}{4}}{(z+2)(z-\frac{1}{2})} z^k, \quad \forall |z| > 4.$$

$$\text{Res} \left[ Y(z)z^{k-1} \right] \Big|_{p_1} = \frac{z^2 + 6z + \frac{27}{4}}{(z+2)(z-\frac{1}{2})} z^k \Big|_{z=-4} = \frac{5}{9}(-4)^{k-1} \quad (6.71)$$

#### Polo $p_2 = -2$ , $m_2 = 1$

$$\varphi(z) = (z+2) \frac{z^3 + 6z^2 + \frac{27}{4}z}{(z+4)(z+2)(z-\frac{1}{2})} z^{k-1}, \quad \forall |z| > 4, \quad (6.72)$$

la cual al agrupar los términos se tiene

$$\varphi(z) = \frac{z^2 + 6z + \frac{27}{4}}{(z+4)(z-\frac{1}{2})} z^k, \quad \forall |z| > 4.$$

$$\text{Res} \left[ Y(z)z^{k-1} \right] \Big|_{p_2} = \frac{z^2 + 6z + \frac{27}{4}}{(z+4)(z-\frac{1}{2})} z^k \Big|_{z=-2} = -\frac{1}{2}(-2)^{k-1} \quad (6.73)$$

Polo  $p_3 = 1/2$ ,  $m_3 = 1$

$$\varphi(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \frac{z^3 + 6z^2 + \frac{27}{4}z}{(z+4)(z+2)(z-\frac{1}{2})} z^{k-1}, \quad \forall |z| > 4. \quad (6.74)$$

Simplificando la Ecuación (6.74), se obtiene

$$\varphi(z) = \frac{z^2 + 6z + \frac{27}{4}}{(z+4)(z+2)} z^k, \quad \forall |z| > 4.$$

$$\text{Res} \left[ Y(z) z^{k-1} \right] \Big|_{p_1} = \frac{z^2 + 6z + \frac{27}{4}}{(z+4)(z+2)} z^k \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{4}{9} \frac{1}{2^{k-1}} \quad (6.75)$$

Empleando las Ecuaciones (6.71), (6.73) y (6.75), se tiene que

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{5}{9} (-4)^{k-1} - \frac{1}{2} (-2)^{k-1} + \frac{4}{9} \frac{1}{2^{k-1}} \right) z^{-k}, \quad \forall |z| > 4,$$

la cual es equivalente a escribir

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( -\frac{5}{36} (-4)^k + \frac{1}{4} (-2)^k + \frac{8}{9} \frac{1}{2^k} \right) z^{-k}, \quad \forall |z| > 4. \quad (6.76)$$

En consecuencia, de la Ecuación (6.76) finalmente se obtiene que

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \left( -\frac{5}{36} (-4)^k + \frac{1}{4} (-2)^k + \frac{8}{9} \frac{1}{2^k} \right) \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (6.77)$$

### Método de división

Para la ejecución de este método debe realizarse el cociente de la Ecuación (6.68), la cual se obtiene que

$$Y(z) = 1 + \frac{1}{2} z^{-1} - z^{-2} + 7z^{-3} + \frac{-\frac{63}{2} z^{-1} - 39z^{-2} - 28z^{-3}}{z^3 + \frac{11}{2} z^2 + 5z - 4}, \quad \forall |z| > 4. \quad (6.78)$$

En consecuencia, se puede afirmar que

$$y[n] = \delta[n] + \frac{1}{2} \delta[n-1] - \delta[n-2] + 7 \delta[n-3] + \dots \quad (6.79)$$

Note que la aplicación de este método no suministra una respuesta de la transformada inversa  $\mathcal{Z}$  en su forma cerrada, lo cual muestra tantos términos de la secuencia como pasos de división sean realizados.

### Método de expansión en fracciones parciales

Para aplicar el método de expansión en fracciones parciales, se debe proponer cuales serán las fracciones parciales que al ser operadas arrojan como resultado la Ecuación (6.68).

En consecuencia, se tiene que para todo  $|z| > 4$ , la Ecuación (6.68) puede ser expresada como:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^2 + 6z + \frac{27}{4}}{(z+4)(z+2)(z-\frac{1}{2})} = \frac{c_1}{z+4} + \frac{c_2}{z+2} + \frac{c_3}{(z-\frac{1}{2})}. \quad (6.80)$$

La Ecuación (6.80) se satisface si

$$z^2 + 6z + \frac{27}{4} = c_1(z+2)(z-\frac{1}{2}) + c_2(z+4)(z-\frac{1}{2}) + c_3(z+4)(z+2). \quad (6.81)$$

Al evaluar la Ecuación (6.81) para  $z = -4$ ,  $z = -2$  y  $z = \frac{1}{2}$ , se obtiene respectivamente  $c_1 = -\frac{5}{36}$ ,  $c_2 = \frac{1}{4}$  y  $c_3 = \frac{8}{9}$ ; arrojando entonces que

$$\frac{Y(z)}{z} = -\frac{5}{36} \frac{1}{z+4} + \frac{1}{4} \frac{1}{z+2} + \frac{8}{9} \frac{1}{(z-\frac{1}{2})}, \quad \forall |z| > 4. \quad (6.82)$$

Ahora, debido al hecho de que  $|z| > 4$ , se tiene que

$$\frac{Y(z)}{z} = -\frac{5}{36} \frac{1}{z} \left( \frac{1}{1+\frac{4}{z}} \right) + \frac{1}{4} \frac{1}{z} \left( \frac{1}{1+\frac{2}{z}} \right) + \frac{8}{9} \frac{1}{z} \left( \frac{1}{1-\frac{1}{2z}} \right), \quad \forall |z| > 4, \quad (6.83)$$

lo que implica que

$$Y(z) = -\frac{5}{36} \left( \frac{1}{1+\frac{4}{z}} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1+\frac{2}{z}} \right) + \frac{8}{9} \left( \frac{1}{1-\frac{1}{2z}} \right), \quad \forall |z| > 4, \quad (6.84)$$

Por otra parte,

$$\frac{\alpha^{n_1}}{1-\alpha} = \sum_{n=n_1}^{\infty} \alpha^n, \quad \forall |\alpha| < 1. \quad (6.85)$$

Aplicando la Ecuación (6.85) en la Ecuación (6.84), se tiene que

$$Y(z) = -\frac{5}{36} \sum_{k=0}^{\infty} (-4)^k z^{-k} + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} (-2)^k z^{-k} + \frac{8}{9} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} z^{-k}, \quad \forall |z| > 4, \quad (6.86)$$

lo que permite asegurar que

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( -\frac{5}{36} (-4)^k + \frac{1}{4} (-2)^k + \frac{8}{9} \frac{1}{2^k} \right) z^{-k}, \quad \forall |z| > 4. \quad (6.87)$$

En consecuencia,

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \left( -\frac{5}{36} (-4)^k + \frac{1}{4} (-2)^k + \frac{8}{9} \frac{1}{2^k} \right) \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (6.88)$$

Note que al evaluar la Ecuación (6.88) para los casos  $k = 0, 1, 2$  se obtiene los coeficientes de la Ecuación (6.79).

### ■ EJEMPLO 6.4

Sea un sistema LDCID definido por

$$y[n+2] + \frac{2}{15}y[n+1] - \frac{1}{15}y[n] = x[n], \quad (6.89)$$

donde la señal de excitación  $x[n] = u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$ .

Determine la respuesta del sistema definido en el dominio discreto teniendo en cuenta que  $y[0] = 0$ ;  $y[1] = 1/5$ .

#### Solución

Al expresar la transformada  $\mathcal{Z}$  a la Ecuación (6.89), se consigue

$$z^2 Y(z) - z^2 y[0] - zy[1] + \frac{2}{15}(zY(z) - zy[0]) - \frac{1}{15}Y(z) = X(z), \quad (6.90)$$

donde

$$X(z) = \mathcal{Z}[u[n]] = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{z}{z-1}, \quad \forall |z| > 1. \quad (6.91)$$

Sustituyendo la secuencia de condiciones iniciales, es decir, haciendo que  $y[0] = 0$ ;  $y[1] = 1/5$ , y la transformada  $\mathcal{Z}$  de la excitación definida por la Ecuación (6.91) en la Ecuación (6.90), se obtiene

$$\left(z^2 + \frac{2}{15}z - \frac{1}{15}\right)Y(z) - \frac{1}{5}z = \frac{z}{z-1}, \quad \forall |z| > 1. \quad (6.92)$$

Despejando  $Y(z)$  de la Ecuación (6.92), se obtiene

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{5}z^2 + \frac{4}{5}z}{(z-1)\left(z^2 + \frac{2}{15}z - \frac{1}{15}\right)}, \quad \forall |z| > 1. \quad (6.93)$$

Ahora, a objeto de obtener  $y[n]$  se aplicará el método de de expansión en fracciones parciales, para lo cual se propone, a partir de la Ecuación (6.93) que

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z+\frac{1}{3}} + \frac{c_3}{z-\frac{1}{5}}, \quad \forall |z| > 1, \quad (6.94)$$

bajo la condición que

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}z + \frac{4}{5} &= c_1 \left(z + \frac{1}{3}\right) \left(z - \frac{1}{5}\right) + \\ & c_2 (z-1) \left(z - \frac{1}{5}\right) + \\ & c_3 (z-1) \left(z + \frac{1}{3}\right). \end{aligned} \quad (6.95)$$

Al evaluar la Ecuación (6.95) para  $z = 1$ ,  $z = -1/3$  y  $z = 1/5$  se obtiene respectivamente los coeficientes  $c_1 = 15/16$ ,  $c_2 = 33/32$  y  $c_3 = -63/32$ , los cuales al sustituirlos

en la Ecuación (6.94), se obtiene

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{15}{16} \frac{1}{z-1} + \frac{33}{32} \frac{1}{z+\frac{1}{3}} - \frac{63}{32} \frac{1}{z-\frac{1}{5}}, \quad \forall |z| > 1. \quad (6.96)$$

Como la región de convergencia es  $|z| > 1$ , se tiene que la Ecuación (6.96) debe ser expresada por

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{15}{16} \frac{1}{z} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{z}\right)} + \frac{33}{32} \frac{1}{z} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{3z}\right)} - \frac{63}{32} \frac{1}{z} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{5z}\right)}, \quad \forall |z| > 1. \quad (6.97)$$

Al aplicar la Ecuación (6.85) de la página 155 en la Ecuación (6.97), se consigue

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{15}{16} + \frac{33}{32} \frac{1}{(-3)^k} - \frac{63}{32} \frac{1}{5^k} \right) z^{-k}. \quad (6.98)$$

En consecuencia, se puede expresar la respuesta mediante

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{15}{16} + \frac{33}{32} \frac{1}{(-3)^k} - \frac{63}{32} \frac{1}{5^k} \right) \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (6.99)$$

El lector podrá comparar el resultado mostrado en la Ecuación (6.99) y el que pueda obtener a través del método de división. Note que de la Ecuación (6.99) se satisface que  $y[0] = 0$  e  $y[1] = 1/5$ .

## 6.4 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA EN EL PLANO Z

El concepto de función de transferencia en sistema LDCID definido en el dominio discreto es análogo al empleado en el dominio continuo.

**Definición 6.2 (Función de Transferencia)** *Sea un sistema LDCID definido en el dominio discreto, el cual está definido por el modelo matemático de la Ecuación (6.63). Entonces, se dice que la función de transferencia en el plano de la transformada  $\mathcal{Z}$ , es el cociente entre  $Y(z)$  y  $X(z)$ , los cuales representan respectivamente sendas transformadas  $\mathcal{Z}$  de las señales en el dominio discreto de respuesta y excitación, cuando todas sus condiciones iniciales son cero. En términos matemáticos,*

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}, \quad (6.100)$$

donde  $H(z)$  denota la función de transferencia.

### ■ EJEMPLO 6.5

Sea el sistema LDCID definido en el Ejemplo 6.3 de la página 152. Entonces, para el sistema descrito determine su función de transferencia del sistema.

#### Solución

De la Ecuación (6.65) se tiene que dado que las condiciones iniciales son obligadas

a ser cero, es decir, que la secuencia de condiciones iniciales para  $n < 0$  son cero. No obstante, se debe verificar si son nulas las muestras  $y[0]$  e  $y[1]$ . Esta verificación se puede realizar a través de la ecuación recurrente del sistema, la cual es

$$y[n+2] = 10x[n] - 6y[n+1] - 8y[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (6.101)$$

donde  $x[n] = \delta[n]$ .

Al evaluar la Ecuación (6.101) para  $n \in \{-2, -1, 0\}$ , se obtiene que

$$\begin{aligned} n = -2, \quad y[0] &= 10x[-2] - 6y[-1] - 8y[-2] = 0; \\ n = -1, \quad y[1] &= 10x[-1] - 6y[0] - 8y[-1] = 0; \\ n = 0, \quad y[2] &= 10x[0] - 6y[1] - 8y[0] = 10, \end{aligned} \quad (6.102)$$

lo cual corrobora que la secuencia de condiciones iniciales son nulas.

En consecuencia,

$$z^2 Y(z) + 6z Y(z) + 8Y(z) = 10X(z),$$

la cual arroja como resultado

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{10}{z^2 + 6z + 8},$$

donde el polinomio característico está dado por  $D(z) = z^2 + 6z + 8$ .

**Observación 6.3** La respuesta de todo sistema lineal obtenida a través de su función de transferencia sólo corresponde a la respuesta del sistema, si éste se encuentra en condiciones iniciales de cero.

**Observación 6.4** La función de transferencia es la transformada  $\mathcal{Z}$  de la respuesta impulsiva  $h[n]$  del sistema LDCID.

#### ■ EJEMPLO 6.6

Sea el sistema LDCID del Ejemplo 3.10 de la página 91 definido en el dominio discreto, y cuyo modelo matemático viene dado por

$$y[n] - \frac{13}{12}y[n-1] + \frac{3}{8}y[n-2] - \frac{1}{24}y[n-3] = x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (6.103)$$

Para el sistema descrito, determine su función de transferencia  $H(z)$ , así como también su respuesta impulsiva  $h[n]$ , a partir de la función de transferencia, a objeto de comparar el resultado obtenido con la respuesta del Ejemplo 3.10.

#### Solución

De acuerdo a la Definición 6.2, la función de transferencia se obtiene haciendo la secuencia de condiciones iniciales todas iguales a cero, y expresando el modelo en el dominio de la transformada  $\mathcal{Z}$ .

Por otra parte, debido a que el modelo matemático definido por la Ecuación (6.103) está expresado en términos de retardo, se debe emplear la propiedad,

$$\mathcal{Z}[f[n-n_0]] = z^{-n_0} F(z), \quad (6.104)$$

donde  $F(z) = \mathcal{Z}[f[n]]$  para todo  $z \in D_z$ , y  $n_0 \geq 0$ .

En consecuencia, se tiene

$$\left(1 - \frac{13}{12}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2} - \frac{1}{24}z^{-3}\right)Y(z) = X(z). \quad (6.105)$$

De la Ecuación (6.105) se tiene entonces que

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{13}{12}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2} - \frac{1}{24}z^{-3}}. \quad (6.106)$$

Por otra parte, se tiene que las raíces del polinomio característico son  $r_1 = \frac{1}{2}$ ,  $r_2 = \frac{1}{3}$  y  $r_3 = \frac{1}{4}$ .

A los efectos de obtener la respuesta impulsiva del sistema a partir de la función de transferencia  $H(z)$  se tiene que

$$h[n] = \mathcal{Z}^{-1}[H(z)]. \quad (6.107)$$

Ahora, al expresar la función de transferencia en factores se tiene

$$H(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2z}\right)\left(1 - \frac{1}{3z}\right)\left(1 - \frac{1}{4z}\right)} = \frac{c_1}{\left(1 - \frac{1}{2z}\right)} + \frac{c_2}{\left(1 - \frac{1}{3z}\right)} + \frac{c_3}{\left(1 - \frac{1}{4z}\right)}, \quad (6.108)$$

bajo la condición de que

$$1 = c_1\left(1 - \frac{1}{3z}\right)\left(1 - \frac{1}{4z}\right) + c_2\left(1 - \frac{1}{2z}\right)\left(1 - \frac{1}{4z}\right) + c_3\left(1 - \frac{1}{2z}\right)\left(1 - \frac{1}{3z}\right). \quad (6.109)$$

Al evaluar la Ecuación (6.109) en  $z = \frac{1}{2}$ ,  $z = \frac{1}{3}$  y  $z = \frac{1}{4}$  se obtiene respectivamente que  $c_1 = 6$ ,  $c_2 = -8$  y  $c_3 = 3$ .

Al sustituir los coeficientes obtenidos en la Ecuación (6.108) se puede afirmar que

$$H(z) = 6\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2z}\right)} - 8\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3z}\right)} + 3\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4z}\right)}, \quad \forall |z| > \frac{1}{2}. \quad (6.110)$$

Al emplear la Ecuación (6.85) de la página 155 en la Ecuación (6.110), se consigue

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(6\frac{1}{2^k} - 8\frac{1}{3^k} + 3\frac{1}{4^k}\right)z^{-k}, \quad \forall |z| > \frac{1}{2}, \quad (6.111)$$

lo cual implica que

$$h[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(6\frac{1}{2^k} - 8\frac{1}{3^k} + 3\frac{1}{4^k}\right)\delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (6.112)$$

Note que el resultado mostrado en la Ecuación (6.112) es idéntico a la solución del Ejemplo 3.10 de la página 91, la cual corresponde a la Ecuación (3.141) de la página 92.

## 6.5 TEOREMAS VALOR INICIAL Y VALOR FINAL

De modo semejante al caso de transformada de Laplace, la transformada  $\mathcal{Z}$  también cuenta con teoremas de valor inicial y valor final, los cuales serán enunciado y demostrados a continuación.

**Teorema 6.7 (Valor inicial)** Sea  $F(z)$  la transformada unilateral derecha  $\mathcal{Z}$  de una función  $f[n]$ . Entonces,

$$f[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

**Demostración.** Se tiene que  $F(z)$  es definida como

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n]z^n = f[0] + \sum_{n=1}^{\infty} f[n]z^{-n} \quad (6.113)$$

Al aplicar el límite cuando  $\mathcal{Z}$  se aproxima a infinito a la Ecuación (6.113), se obtiene

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left\{ f[0] + \sum_{n=1}^{\infty} f[n]z^{-n} \right\}. \quad (6.114)$$

Ahora, como la Ecuación (6.114), puede ser reexpresada como

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = f[0] + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \lim_{z \rightarrow \infty} z^{-k},$$

donde obviamente  $\lim_{z \rightarrow \infty} z^{-k} = 0$  para todo  $k \geq 1$ , y en consecuencia,

$$f[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z), \quad (6.115)$$

lo cual demuestra el teorema. ■

### ■ EJEMPLO 6.7

Sea el sistema LDCID del Ejemplo 6.4 de la página 156 definido en el dominio discreto.

Verifique la condición inicial del sistema, es decir,  $y[0] = 0$  empleando el teorema de valor inicial.

#### Solución

De acuerdo al Teorema 6.7,

$$y[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} Y(z) \quad (6.116)$$

Por otra parte, de la solución del Ejemplo 6.4, se tiene que

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{5}z^2 + \frac{4}{5}z}{(z-1)\left(z^2 + \frac{2}{15}z - \frac{1}{15}\right)}, \quad \forall |z| > 1. \quad (6.117)$$

Al sustituir la Ecuación (6.117) en la Ecuación (6.116) se desprende que

$$y[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{5}z^2 + \frac{4}{5}z}{(z-1)\left(z^2 + \frac{2}{15}z - \frac{1}{15}\right)} = 0. \quad (6.118)$$

El resultado obtenido en la Ecuación (6.118) corrobora el teorema.

**Teorema 6.8 (Valor final)** Sea  $F(z)$  la transformada unilateral derecha  $\mathcal{Z}$  de una función  $f[n]$ . Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$$

**Demostración.**

Para este caso, considere la transformada unilateral derecha  $\mathcal{Z}$  de la diferencia  $[f[n+1] - f[n]]$ , de ahí se tiene que

$$\mathcal{Z}\{f[n+1] - f[n]\} = zF(z) - zf[0] - F(z) = (z-1)F(z) - zf[0] \quad (6.119)$$

La Ecuación (6.119) puede ser escrita como

$$(z-1)F(z) - zf[0] = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \{f[n+1] - f[n]\} z^{-n}, \quad (6.120)$$

la cual al aplicar el límite cuando  $z$  tiende a 1, se obtiene que

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) = f[0] + \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \{f[n+1] - f[n]\} = \lim_{m \rightarrow \infty} f[m+1],$$

y como resultado de esto, se asegura que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$ , debido al hecho de que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f[m+1] = \lim_{n \rightarrow \infty} f[n].$$

■

■ **EJEMPLO 6.8**

Considere nuevamente el sistema LDCID del Ejemplo 6.4 de la página 156 definido en el dominio discreto.

Para el sistema descrito, verifique el teorema de valor final a la respuesta obtenida del sistema ante la excitación dada en el ejemplo.

**Solución**

De acuerdo a la solución encontrada en el Ejemplo 6.4 se tiene que la respuesta del sistema ante un escalón unitario discreto son mostradas por las Ecuaciones (6.93) y (6.99). Es decir, la respuesta del sistema ante la excitación viene definida por

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{15}{16} - \frac{11}{32} \frac{1}{(-3)^k} - \frac{63}{160} \frac{1}{5^k} \right) \delta[n-1-k], \quad \forall n \geq 1, \quad (6.121)$$

y su correspondiente transformada  $\mathcal{Z}$  es

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{5}z^2 + \frac{4}{5}z}{(z-1)\left(z^2 + \frac{2}{15}z - \frac{1}{15}\right)}, \quad \forall |z| > 1. \quad (6.122)$$

Según el Teorema 6.8

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)Y(z) \quad (6.123)$$

Ahora, de la Ecuación (6.121) se tiene que las muestra de la señal de respuesta viene dada por

$$y_k = \frac{15}{16} - \frac{11}{32} \frac{1}{(-3)^k} - \frac{63}{160} \frac{1}{5^k}, \quad \forall k \geq 1, \quad (6.124)$$

Según la Ecuación (6.123) y empleando la Ecuación (6.124)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y[n] = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \frac{15}{16}. \quad (6.125)$$

Por otra parte, de acuerdo a la Ecuación (6.123) y la transformada  $\mathcal{Z}$  de la señal de respuesta  $y[n]$ , la cual está definida por la Ecuación (6.122)

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[ \frac{\frac{1}{5}z^2 + \frac{4}{5}z}{(z-1)\left(z^2 + \frac{2}{15}z - \frac{1}{15}\right)} \right] \quad (6.126)$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{\frac{1}{5}z^2 + \frac{4}{5}z}{\left(z^2 + \frac{2}{15}z - \frac{1}{15}\right)} \right] = \frac{15}{16}. \quad (6.127)$$

Note que las Ecuaciones (6.125) y (6.127) verifican el teorema de valor final para este caso particular.

## 6.6 ESTABILIDAD DE LOS SISTEMAS

Existen diversos criterios que permiten determinar la estabilidad del sistema bajo estudio, los cuales serán presentados a continuación.

Es oportuno destacar que la definición de estabilidad introducida en la Definición 5.3 de la página 134 es también aplicable a los sistemas definidos en el dominio discreto, por cuanto la definición no hace distinción al campo numérico que define el dominio de la variable independiente.

**Criterio 6.1 (Ubicación de sus polos)** *Se dice que un sistema definido en el dominio discreto es estable si y sólo si todos los polos de la función de transferencia están estrictamente dentro del círculo unitario  $|z| < 1$ .*

**Criterio 6.2 (Respuesta impulsiva)** *Se dice que un sistema definido en el dominio discreto es estable si y sólo si la magnitud de la respuesta impulsiva se aproxima a cero en la medida que  $n$  se acerca a infinito, es decir,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |h[n]| = 0. \quad (6.128)$$

**Criterio 6.3 (Suma absoluta)** *Se dice que un sistema definido en el dominio discreto es estable si y sólo si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]|^p < \infty, \quad \forall p \geq 1. \tag{6.129}$$

**Criterio 6.4 (Raíces del polinomio característico)** *Se dice que un sistema definido en el dominio discreto es estable si y sólo si la magnitud de cada una de las raíces que anulan el polinomio característico es menor a uno.*

## 6.7 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA Y MODELO MATEMÁTICO

En esta sección se estudiará la relación entre la función de transferencia y su modelo matemático, tanto en el dominio  $S$  como en el dominio  $Z$ . Además se desarrollará el método para convertir una función de transferencia en el dominio continuo al dominio discreto y viceversa.

Por otra parte, Brea *et al.* (1999) propone un método basado en los conceptos de síntesis de redes eléctricas definidas en el dominio del tiempo discreto a través de los conceptos de transformada  $\mathcal{Z}$ , que al aplicar su correspondiente impedancias definidas en el dominio de la transformada  $\mathcal{Z}$ , puede obtenerse la función de transferencia en el plano de la variable  $z$ . No obstante, este método requiere conocer los principios y conceptos de síntesis de redes eléctricas, así como conceptos empleados en el cálculo de redes eléctricas.

### 6.7.1 Determinación de $H(z)$ a partir de $H(s)$ y viceversa

De la definición de función de transferencia de un sistema LDCID en el dominio discreto, Definición 6.2 de la página 157, se tiene que la función de transferencia viene dada bajo condiciones iniciales de cero, y se determina a través de

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{N(z)}{D(z)},$$

donde  $Y(z)$  y  $X(z)$  son respectivamente las transformadas  $\mathcal{Z}$  de la respuesta y excitación del sistema. Note que la función de transferencia está siendo representada por un cociente de polinomios  $\frac{N(z)}{D(z)}$ , donde  $D(z)$  es el bien conocido polinomio característico del sistema.

Ahora bien, existen diversos enfoques que permiten determinar la función de transferencia de un modelo en el dominio continuo a partir de la función de transferencia de un modelo en el dominio discreto.

Obviamente, con ambas funciones de transferencia puede ser determinado el modelo matemático asociado a cada dominio, lo cual se obtendría mediante

$$D(z)Y(z) = N(z)X(z). \tag{6.130}$$

No obstante, existe relación entre las funciones de transferencias definidas en el dominio de la transformada de Laplace y  $\mathcal{Z}$ , para lo cual debe estudiarse los diversos enfoque.

**6.7.1.1 Transformación por los núcleos de las transformadas** El concepto de transformada discreta de Laplace (TDL) no ha sido un concepto muy explotado en la literatura especializada en cálculo operacional. No obstante, Krasnov *et al.* (1983) desarrollan el tema en su obra, la cual al ver su definición, se tiene que la transformada discreta de Laplace de una función  $f[n]$ , la cual es cero para todo  $n < 0$ , puede ser definida como

$$TDL\{f[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n]e^{-nhs}, \quad (6.131)$$

donde  $s = \sigma + j\omega$  y  $h$  es el paso de discretización.

Por otra parte, la transformada Z de la función  $f[n]$ , está dada por

$$\mathcal{Z}\{f[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n]z^{-n}, \quad (6.132)$$

donde  $s = x + jy$ .

Al comparar las Ecuaciones (6.131) y (6.132), se tiene que la relación de sus respectivos núcleos es

$$z = e^{hs} \quad (6.133)$$

Al representar el resultado obtenido en la Ecuación (6.133) mediante su serie de Taylor, se tiene que

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(hs)^k}{k!} = 1 + hs + \frac{h^2}{2} s^2 + \frac{h^3}{6} s^3 + \dots \quad (6.134)$$

La Ecuación (6.134) proporciona una relación polinómica aproximada, la cual permite a través de la sustitución de la variable  $z$  en la función de transferencia  $H(z)$  obtener la correspondiente función de transferencia aproximada  $H(s)$ . Lo que implica que una vez obtenida la función de transferencia  $H(s)$  puede obtenerse su correspondiente modelo matemático en el dominio continuo.

No obstante, este enfoque no resulta apropiado para la conversión de la función de transferencia  $H(s)$  a  $H(z)$ , debido a la representación en serie de Taylor de la función  $\ln z$ , la cual no resulta adecuada para la representación de la relación  $s = \frac{1}{h} \ln z$ .

### ■ EJEMPLO 6.9

Sea un sistema LDCID definido en el dominio discreto con función de transferencia definida por

$$H(z) = \frac{1}{z-a}, \quad \forall z \neq a, \quad (6.135)$$

donde  $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ ;  $Y(z)$  es la transformada  $\mathcal{Z}$  de la señal de respuesta del sistema  $x[n]$ , y  $X(z)$  es la transformada  $\mathcal{Z}$  de la señal de excitación  $x[n]$  del sistema.

Para el sistema descrito por su función de transferencia, determine su correspondiente modelo matemático definido en el dominio continuo, es decir, sus ecuación diferencial.

### Solución

De acuerdo a la Ecuación (6.134), y tomando únicamente hasta el término cuadrático para ser sustituido en la Ecuación (6.135), se tiene que

$$H(s) = \frac{1}{1 + hs + \frac{h^2}{2} s^2 - a} \cong \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (6.136)$$

Al reescribir la Ecuación (6.136), se tiene que

$$\left[ (1-a) + h s + \frac{h^2}{2} s^2 \right] Y(s) \cong X(s) \tag{6.137}$$

De la Ecuación (6.137) se puede afirmar que

$$\frac{h^2}{2} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + h \frac{dy(t)}{dt} + (1-a)y(t) \cong x(t),$$

la cual al ser normalizada arroja

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2}{h} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{2(1-a)}{h^2} y(t) \cong \frac{2}{h^2} x(t).$$

Note que si se hubiera considerado sólo dos términos de la aproximación, es decir,  $z = 1 + h s$ , el resultado habría sido

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1-a}{h} y(t) \cong \frac{1}{h} x(t).$$

**6.7.1.2 Transformación por integración rectangular** Este enfoque se basa en la aproximación del operador derivada y su representación en los dominios transformados. En tal sentido considere la aproximación de derivada lateral derecha

$$\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t_0} \cong \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}, \tag{6.138}$$

donde  $h$  es el período de discretización.

Si se denota  $f(t_0+h)$  como  $f[n+1]$  y  $f(t_0)$  como  $f[n]$ , se obtiene que

$$\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t_0=nh} \cong \frac{f[n+1] - f[n]}{h}, \tag{6.139}$$

donde, en esta obra,  $\cong$  significa que ambos lados son análogos.

Ahora, de acuerdo a la definiciones de los operadores  $p$  y  $q$ , se tiene que al aplicar sendos operadores a la Ecuación (6.139), se puede afirmar que

$$p f(t) \cong \frac{q-1}{h} f[n],$$

la cual al representar los operadores en sus respectivos planos transformados se obtiene que

$$s \cong \frac{z-1}{h}. \tag{6.140}$$

La Ecuación (6.140) permita determinar la función de transferencia  $H(z)$  a partir de la función de transferencia  $H(s)$ , y viceversa.

Ahora, considere el concepto de derivada lateral izquierda. En este caso, se tiene

$$\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t_0} \cong \frac{f(t_0-h) - f(t_0)}{h}, \tag{6.141}$$

donde  $h$  es nuevamente el período de discretización.

Si se representan  $f(t_0 - h)$  como  $f[n - 1]$  y  $f(t_0)$  como  $f[n]$ , se obtiene que

$$\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t_0=nh} \cong \frac{f[n-1] - f[n]}{h}. \quad (6.142)$$

Aplicando el mismo procedimiento con relación a los operadores  $p$  y  $q$  a la Ecuación (6.142), se obtiene que

$$p f(t) \cong \frac{q^{-1} - 1}{h} f[n],$$

la cual arroja la relación

$$p \cong \frac{q^{-1} - 1}{h}. \quad (6.143)$$

Si se representan los operadores de la Ecuación (6.143) en sus respectivos planos de transformadas se tiene

$$s \cong \frac{z^{-1} - 1}{h}. \quad (6.144)$$

Otra forma de establecer la relación es empleando la definición de derivada lateral derecha, pero en este caso entre las muestras  $f(t_0)$  y  $f(t_0 - h)$ , la cual sería

$$\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t_0} \cong \frac{f(t_0) - f(t_0 - h)}{h},$$

donde  $h$  es una vez más el período de discretización.

Al denotar  $f(t_0 - h)$  como  $f[n - 1]$  y  $f(t_0)$  como  $f[n]$ , se tiene que

$$\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t_0=nh} \cong \frac{f[n] - f[n-1]}{h}. \quad (6.145)$$

Si se aplica respectivamente transformada de Laplace y transformada  $\mathcal{Z}$  a los lados izquierdos y derecho de la Ecuación (6.145), se obtiene que

$$s F(s) \cong \frac{1 - z^{-1}}{h} F(z). \quad (6.146)$$

De la Ecuación (6.146), se tiene que

$$s \cong \frac{1 - z^{-1}}{h}. \quad (6.147)$$

Finalmente para el caso de derivada lateral izquierda, con las muestras  $f(t_0)$  y  $f(t_0 - h)$ , se tendría

$$\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t_0} \cong \frac{f(t_0 - h) - f(t_0)}{h}, \quad (6.148)$$

donde  $h$  es una vez más el período de discretización.

Al considerar nuevamente que  $f(t_0 - h)$  como  $f[n - 1]$  y  $f(t_0)$  como  $f[n]$ , se tiene que de la Ecuación (6.148) que

$$\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t_0=nh} \cong \frac{f[n-1] - f[n]}{h}. \quad (6.149)$$

Al aplicar las transformada de Laplace y  $\mathcal{Z}$  a la Ecuación (6.149), se tiene

$$sF(s) \cong \frac{z^{-1} - 1}{h} F(z),$$

lo que implica que

$$s \cong \frac{z^{-1} - 1}{h}. \tag{6.150}$$

Note que este enfoque tiene variantes lo cual podría conllevar a diferentes resultados, los cuales dependen de la variante empleada.

**6.7.1.3 Transformación bilineal** A fin de estudiar este enfoque se supondrá que un sistema LDCID en el dominio continuo cuenta con la siguiente función de transferencia

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s}, \tag{6.151}$$

Obviamente de la Ecuación (6.151), se tiene que el modelo matemático correspondiente a la función de transferencia es

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t),$$

la cual al multiplicar la ecuación diferencial por  $dt$  e integrando trapezoidalmente entre  $nh$  y  $(n+1)h$ , se obtiene que

$$y[n+1] - y[n] \cong \frac{h}{2} (x[n] + x[n+1]) \tag{6.152}$$

Al aplicar la transformada  $\mathcal{Z}$  a la aproximada Ecuación (6.152) bajo condiciones iniciales de cero, se obtiene que

$$(z-1)Y(z) \cong \frac{h}{2}(1+z)X(z), \quad \forall z \neq 1,$$

y cuya función de transferencia está dada por

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \cong \frac{h}{2} \frac{1+z}{z-1}, \quad \forall z \neq 1. \tag{6.153}$$

Al comparar las Ecuaciones (6.151) y (6.153), se tiene que

$$s \cong \frac{2}{h} \frac{z-1}{z+1}, \quad \forall z \neq 1. \tag{6.154}$$

La Ecuación (6.154) permite transformar una función de transferencia en el dominio continuo a su correspondiente aproximación en el dominio discreto, y viceversa.

Es importante destacar que las relaciones encontradas entre las variables independiente  $s$  y  $z$ , constituyen una conjetura, la cual requiere de una demostración en el caso que se presente como un teorema.

■ **EJEMPLO 6.10**

Considere nuevamente el sistema descrito en el Ejemplo 6.9 de la página 164 a objeto de obtener su correspondiente modelo matemático definido en el dominio continuo

empleando la transformación bilineal.

### Solución

Se tiene que la función de transferencia del sistema es definida por la Ecuación (6.135), la cual corresponde a

$$H(z) = \frac{1}{z-a} \quad (6.155)$$

Por otra parte, se tiene que

$$s \cong \frac{2}{h} \frac{z-1}{z+1}, \quad \forall z \neq -1, \quad (6.156)$$

donde  $h > 0$  es el paso de discretización.

Despejando  $z$  de la Ecuación (6.156) se consigue que

$$z \cong -\frac{s + \frac{2}{h}}{s - \frac{2}{h}}, \quad \forall s \neq \frac{2}{h}. \quad (6.157)$$

Sustituyendo la Ecuación (6.157) en la Ecuación (6.155), se puede decir que

$$H(s) \cong \frac{s - \frac{2}{h}}{(1-a)s + \frac{2}{h}(1+a)}, \quad \forall a \neq 1. \quad (6.158)$$

Al aplicar la definición de función de transferencia en la Ecuación (6.158) se puede decir que

$$\frac{Y(s)}{X(s)} \cong \frac{s - \frac{2}{h}}{(1-a)s + \frac{2}{h}(1+a)}, \quad \forall a \neq 1, \quad (6.159)$$

la cual arroja como resultado

$$(1-a)sY(s) + \frac{2}{h}(1+a)Y(s) \cong sX(s) - \frac{2}{h}X(s), \quad \forall a \neq 1. \quad (6.160)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que bajo condiciones iniciales de cero, si  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ , entonces  $\mathcal{L}^{-1}[sF(s)] = \frac{df(t)}{dt}$ , lo cual al aplicar este hecho en la Ecuación (6.160) se obtiene que

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{2}{h} \frac{1+a}{1-a} y(t) \cong \frac{1}{1-a} \frac{dx(t)}{dt} - \frac{2}{h(1-a)} x(t), \quad \forall a \neq 1. \quad (6.161)$$

## PROBLEMAS

**6.1** Considere un sistema LDCID definido en el dominio discreto del tiempo, y cuyo modelo matemático es

$$y[n+2] - y[n+1] + \frac{1}{2}y[n] = x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (6.162)$$

Si el sistema es excitado por una señal escalón unitaria definida en el dominio del tiempo discreto, es decir,  $x[n] = u[n]$ , y en sistema se encuentra inicialmente en reposo, lo que significa que  $y[n] = 0$  para todo  $n \leq 0$ . Determine:

- a) respuesta del sistema empleando los conceptos de transformada  $\mathcal{Z}$ ;
- b) función de transferencia del sistema;
- c) respuesta impulsiva del sistema a partir de su función de transferencia;
- d) respuesta del sistema ante el escalón unitario a partir de su respuesta impulsiva, considerando que la secuencia de condiciones iniciales del sistema son cero;
- e) la estabilidad del sistema a partir de los criterios establecidos;
- f) si son satisfechos los teoremas de valor inicial y valor final para  $y[n]$ .

**6.2** Sea un sistema LDCID definido en el dominio del tiempo discreto con modelo matemático

$$y[n+2] + \frac{1}{4}y[n] = x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (6.163)$$

donde  $y[n]$  es la señal de respuesta del sistema y  $x[n]$  es la señal de excitación del sistema.

Si el sistema se encuentra inicialmente en reposo, es decir,  $y[n] = 0$  para todo  $n$  entero no positivo, y el sistema es excitado por una señal escalón de amplitud uno. Determine:

- a) función de transferencia del sistema;
- b) respuesta del sistema ante la señal escalón unitario;
- c) valor final de la respuesta del sistema verificando el teorema de valor final.

### EJERCICIOS PROPUESTOS

**6.3** Sea un sistema LDCID definido en el dominio del tiempo discreto con modelo matemático

$$y[n+2] + \frac{2}{5}y[n+1] + \frac{2}{25} = 2x[n], \quad \forall n \geq 0. \quad (6.164)$$

Considere además que el sistema es excitado por una señal en tiempo discreto dada por

$$x[n] = \sum_{k=2}^6 \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (6.165)$$

Si en su respuesta el sistema inicialmente tiene un valor de  $y[0] = 1$ . Determine:

- a) función de transferencia del sistema;
- b) respuesta impulsiva del sistema;
- c) respuesta del sistema ante la excitación  $x[n]$  empleando los conceptos de transformada  $\mathcal{Z}$ ;
- d) si el sistema es estable y justifique su respuesta;
- e) respuesta del sistema en su estado inicial a través del teorema de valor inicial;
- f) respuesta del sistema en su estado permanente, es decir, valor final de la respuesta del sistema empleando el teorema de valor final.

**6.4** Considere nuevamente el sistema definido en el Ejercicio Propuesto 6.3.

Si el sistema es excitado por una señal en tiempo discreto definida por

$$x[n] = \sum_{k=2}^4 \frac{1}{k} \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (6.166)$$

y el sistema se encuentra inicialmente en reposo, es decir,  $y[n] = 0$  para todo  $n < 0$ . Entonces, determine:

- a) respuesta del sistema ante la excitación  $x[n]$  empleando los conceptos de transformada  $\mathcal{Z}$ ;

- b) respuesta del sistema ante la excitación  $x[n]$  empleando la ecuación recurrente del sistema para  $0 \leq n \leq 10$ ;
- c) la diferencia entre la respuesta de los Ejercicios Propuestos 6.4.a y 6.4.b.

## PARTE II

---

# ANÁLISIS EN FRECUENCIA

---



## CAPÍTULO 7

---

# RESPUESTA EN FRECUENCIA

---

Busca siempre ver el mundo con más de un punto de vista, porque sólo así podrás apreciarlo mejor.

—Ebert Brea

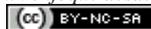
Un perspectiva alterna empleada en el análisis de los sistemas y sus señales asociadas a ellos, es el análisis en frecuencia, debido al hecho de sus amplias aplicaciones en el estudio de la respuesta de los sistemas LDCID en su régimen permanente, cuando éstos son sometidos a señales periódicas. Además, el análisis de sistemas diseñados con el propósito de adecuar señales a un conjunto de criterios, entre los cuales pueden ser la eliminación de un conjunto de componentes espectrales, es otro asunto que eventualmente puede ser requerido en el tratamiento de señales desde la óptica de la frecuencia, para lo cual se requiere de un concienzudo análisis, visto desde el dominio de la frecuencia, tanto del sistema como de las señales que éste debe procesar.

En este capítulo se estudiará el significado de respuesta en frecuencia que ofrece un sistema LDCID cuando es excitado por una señal sinusoidal y ésta ha permanecido el suficiente tiempo como para que los efectos transitorios sean despreciables.

Es importante señalar, que una condición que debe satisfacer el sistema LDCID al cual se le calcule su respuesta en frecuencia, es que éste debe ser estable, en el sentido de la Definición 5.3 de la página 134, por cuanto esta respuesta está asociada a la respuesta del sistema después de haber transcurrido un muy largo período de tiempo, y por tal motivo el sistema requiere ser estable.

*Análisis de Sistemas Lineales Asistido con Scilab™,  
un enfoque desde la Ingeniería Eléctrica. Primera Edición. Por Ebert Brea.*

173



por Ebert Brea, 2014.

No obstante, antes de iniciar el tema principal a tratar en este capítulo se revisarán algunas definiciones sobre la composición de sistema LDCID a partir de subsistemas que están conectados y se requiere conocer su función de transferencia.

En lo que resta del capítulo se estudiará: en la Sección 7.1, el concepto abstracto de función de transferencias, así como la composición de subsistemas LDCID interconectados en serie, paralelo y realimentados. Todos esto con el propósito de hallar la función de transferencia de sistemas compuestos; en la Sección 7.2 se presenta el concepto y método de cálculo de la respuesta en frecuencia de sistemas LDCID definidos en el dominio continuo; en la Sección 7.3 se estudiará los conceptos y métodos para la determinación de la respuesta en frecuencia de sistemas LDCID definidos en el dominio discreto. Finalmente, son incluidos algunos problemas y ejercicios propuestos.

## 7.1 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE SUBSISTEMAS INTERCONECTADOS

Un concepto muy empleado en la ingeniería eléctrica es el referente al estudio de los sistemas cuando están definidos por la conexión de dos o más subsistemas, bien sea en conexión serie, paralelo o realimentada.

Para lograr desarrollar estos conceptos en su forma más general, primero se expresarán algunas definiciones en un dominio abstracto de la variable independiente  $\xi \in \Xi$ , y en el dominio abstracto transformado  $\Lambda$ , para luego estudiar su significado matemático y representación gráfica.

**Definición 7.1 (Transformada  $\mathcal{T}$ )** Sea  $x(\xi)$  una señal definida por una función representada exclusivamente en el dominio continuo o dominio discreto, según sea el caso. Entonces, se dice que la transformada lineal de  $x(\xi)$  en el dominio  $\Lambda$  viene dada por

$$X(\lambda) = \mathcal{T}[x(\xi)], \quad \forall \lambda \in D, \quad (7.1)$$

donde  $D \subseteq \Lambda$  es la llamada región de convergencia o región de analiticidad de la transformada  $X(\lambda)$ , y  $X(\lambda)$  es una función definida de  $\lambda$  en  $\Lambda$ .

**Observación 7.1** El operador transformada lineal en el dominio continuo puede ser definida como

$$\mathcal{T}[x(\xi)] = X(\lambda) = \int_{\xi=a}^b x(\xi) \mathcal{N}(\xi, \lambda) d\xi, \quad \forall \lambda \in D, \quad (7.2)$$

donde  $\mathcal{N}(\xi, \lambda) : \Xi \times \Lambda \rightarrow \Lambda$  es el núcleo de la transformada integral lineal, y  $\xi \in \Xi \subseteq \mathbb{R}$  es la variable independiente continua.

Mientras que para el caso de la transformada lineal de una señal definida en el dominio discreto, puede ser definida como

$$\mathcal{T}[x(\xi)] = X(\lambda) = \sum_{\xi=a}^b x(\xi) \mathcal{N}(\xi, \lambda), \quad \forall \lambda \in D, \quad (7.3)$$

donde  $\mathcal{N}(\xi, \lambda) : \Xi \times \Lambda \rightarrow \Lambda$  es el núcleo de la transformada de suma lineal, y  $\xi \in \Xi \subseteq \mathbb{Z}$  es la variable independiente discreta.

Brea (2006) desarrolla una breve teoría de la transformada integral lineal, la cual puede ser extendida para el caso de la transformada de suma lineal.

**Definición 7.2 (Sumador)** Sea  $x_i(\xi)$  una  $i$ -ésima señal definida exclusivamente en el dominio continuo o dominio discreto, según sea el caso. Si la transformada lineal  $\mathcal{T}$  es aplicada a una suma de señales  $x_i(\xi)$  para cada  $i = 1, 2, \dots, N$ , es decir;

$$X_i(\lambda) = \mathcal{T}[x_i(\xi)], \quad \forall \lambda \in D_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (7.4)$$

donde  $D_i$  es cada  $i$ -ésima región de convergencia de la transformada  $X_i(\lambda)$ .

Entonces,

$$\mathcal{T}\left[\sum_{i=1}^N a_i x_i(\xi)\right] = \sum_{i=1}^N a_i X_i(\lambda), \quad \forall \lambda \in \bigcap_{i=1}^N D_i, \quad (7.5)$$

donde  $a_i \in \mathbb{C}$  para todo  $i = 1, 2, \dots, N$ .

**Definición 7.3 (Función de transferencia)** Sea un sistema LDCID definido exclusivamente en el dominio continuo o dominio discreto, según sea el caso. Si el sistema cuenta con un modelo matemático que relacione las señales externas  $x(\xi)$  e  $y(\xi)$  correspondiente respectivamente a la señal de excitación y respuesta, y ambas señales cuenta con transformada  $\mathcal{T}$ , es decir;

$$X(\lambda) = \mathcal{T}[x(\xi)], \quad \forall \lambda \in D_x, \quad (7.6)$$

y

$$Y(\lambda) = \mathcal{T}[y(\xi)], \quad \forall \lambda \in D_y, \quad (7.7)$$

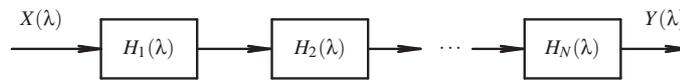
donde  $D_x \subset \Lambda$  y  $D_y \subset \Lambda$  son respectivamente las regiones de convergencia de las transformadas  $X(\lambda)$  e  $Y(\lambda)$ .

Entonces, al considerar que el sistema está inicialmente en reposo, su función de transferencia en el plano  $\Lambda$  se define como

$$H(\lambda) = \frac{Y(\lambda)}{X(\lambda)}, \quad \forall \lambda \in D_x \cap D_y. \quad (7.8)$$

En función de estas definiciones abstractas básicas, se pueden establecer los siguientes teoremas que permitirán determinar la función de transferencia de la composición de subsistemas.

La Figura 7.1 muestra un conjunto de subsistemas conectados en cascada o también denominado en conexión serie, para lo cual se está interesado en determinar la función de transferencia del conjunto.



**Figura 7.1.** Conexión en cascada

**Teorema 7.1 (Subsistemas en cascada)** Sea un conjunto de  $N$  subsistemas LDCID definidos exclusivamente en el dominio continuo o discreto, según sea el caso. Si cada  $i$ -ésimo subsistema cuenta con su respectiva función de transferencia  $H_i(\lambda)$  con región de convergencia  $D_{h_i}$  para todo  $i = 1, 2, \dots, N$ , y todos están conectados en cascada (conexión

serie). Entonces, la función de transferencia del sistema completo es

$$H(\lambda) = \prod_{i=1}^N H_i(\lambda), \quad \forall \lambda \in \bigcap_{i=1}^N D_{h_i}, \quad (7.9)$$

donde  $D_{h_i}$  es la región de convergencia de cada  $i$ -ésima función de transferencia de cada subsistema.

**Demostración.** Sin que represente una pérdida en la generalidad de la demostración, considere que los subsistemas están conectados en la secuencia como son denotados, es decir, el subsistema con función de transferencia  $H_1(\lambda)$  está conectado justo antes del subsistema con función de transferencia  $H_2(\lambda)$  y éste está conectado antes del subsistema con función de transferencia  $H_3(\lambda)$ , y así sucesivamente.

Por otra parte, denote a las señales internas  $x_i(\xi)$  e  $y_i(\xi)$  correspondiente respectivamente a la señal de excitación y respuesta de cada  $i$ -ésimo subsistema, las cuales cada señal cuenta con su respectiva transformada  $\mathcal{T}$  y región de convergencia  $D_{x_i}$  y  $D_{y_i}$  para todo  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Empleando la Definición 7.3, se puede afirmar que

$$Y_i(\lambda) = H_i(\lambda)X_i(\lambda), \quad \forall \lambda \in D_{y_i} \cap D_{h_i} \cap D_{x_i}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N. \quad (7.10)$$

Además, debido a la conexión se tiene que como  $X(\lambda) = X_1(\lambda)$ ;  $Y(\lambda) = Y_N(\lambda)$  y  $Y_i(\lambda) = X_{i+1}(\lambda)$  para todo  $i = 1, 2, \dots, N-1$ , se tiene que

$$Y(\lambda) = [H_1(\lambda)H_2(\lambda)\cdots H_N(\lambda)]X(\lambda), \quad \forall \lambda \in \bigcap_{i=1}^N D_{h_i}. \quad (7.11)$$

Entonces,

$$H(\lambda) = \frac{Y(\lambda)}{X(\lambda)} = \prod_{i=1}^N H_i(\lambda), \quad \forall \lambda \in \bigcap_{i=1}^N D_{h_i}. \quad (7.12)$$

■

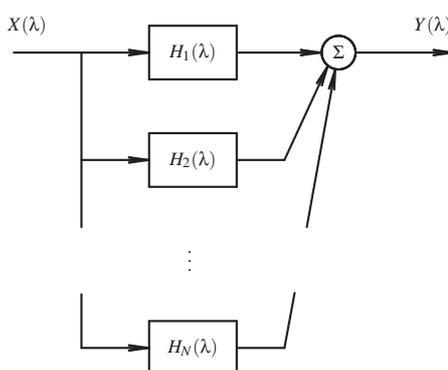


Figura 7.2. Conexión en paralelo

Otra típica conexión de subsistema es la paralela, la cual es mostrada en la Figura 7.2 y cuyo teorema asociado es:

**Teorema 7.2 (Subsistemas en paralelo)** *Sea un conjunto de  $N$  subsistemas LDCID definidos exclusivamente en el dominio continuo o discreto, según sea el caso. Si cada  $i$ -ésimo subsistema cuenta con su respectiva función de transferencia  $H_i(\lambda)$  con región de convergencia  $D_{h_i}$  para todo  $i = 1, 2, \dots, N$ , y todos están conectados en paralelo. Entonces, la función de transferencia del sistema completo es*

$$H(\lambda) = \sum_{i=1}^N H_i(\lambda), \quad \forall \lambda \in \bigcap_{i=1}^N D_{h_i}, \quad (7.13)$$

donde  $D_{h_i}$  es la región de convergencia de cada  $i$ -ésima función de transferencia de cada subsistema.

**Demostración.** Se tiene que la conexión de  $N$  subsistemas en paralelo cuenta con las siguientes condiciones:  $X(\lambda) = X_i(\lambda)$  para todo  $i = 1, 2, \dots, N$ , y  $Y(\lambda) = Y_1(\lambda) + Y_2(\lambda) + \dots + Y_N(\lambda)$ , donde  $x_i(\xi)$  e  $y_i(\xi)$  correspondiente respectivamente a la señal de excitación y respuesta de cada subsistema.

Basado en este hecho, se puede asegurar que

$$Y(\lambda) = \sum_{i=1}^N H_i(\lambda)X_i(\lambda) = \sum_{i=1}^N H_i(\lambda)X(\lambda), \quad \forall \lambda \in \bigcap_{i=1}^N D_{h_i}, \quad (7.14)$$

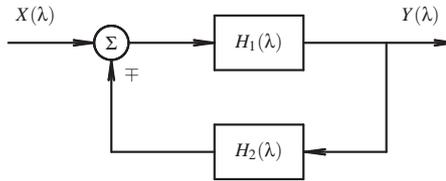
lo que implica que

$$H(\lambda) = \frac{Y(\lambda)}{X(\lambda)} = \sum_{i=1}^N H_i(\lambda), \quad \forall \lambda \in \bigcap_{i=1}^N D_{h_i}. \quad (7.15)$$

■

Una conexión de subsistemas muy frecuentemente empleada la constituye la conexión realimentada debido a su amplio uso en el control de sistemas.

La Figura 7.3 muestra una conexión básica realimentada, la cual es ampliamente estudiada en la teoría de sistemas de control (Dorf y Bishop, 2008).



**Figura 7.3.** Conexión en realimentación

**Teorema 7.3 (Sistemas realimentado)** *Sea un sistema LDCID definido exclusivamente en el dominio continuo o discreto, según sea el caso, el cual está conformado por dos subsistemas con funciones de transferencia  $H_1(\lambda)$  y  $H_2(\lambda)$ . Si el subsistema con función de transferencia  $H_1(\lambda)$  está conectado de forma tal que a su entrada, él es excitado por la señal externa  $X(\lambda)$  más o menos ( $\pm$ ) su señal de respuesta realimenta a través del otro subsistema con función de transferencia  $H_2(\lambda)$  (véase Figura 7.3). Entonces,*

$$H(\lambda) = \frac{H_1(\lambda)}{1 \pm H_1(\lambda)H_2(\lambda)}, \quad \forall \lambda \in D_{h_1} \cap D_{h_2} \quad (7.16)$$

donde  $D_{h_i}$  es la región de convergencia de sendas  $i$ -ésima funciones de transferencia.

**Demostración.** De acuerdo a las condiciones enunciadas se tiene que

$$Y(\lambda) = H_1(\lambda) [X(\lambda) \mp Y(\lambda)H_2(\lambda)], \quad \forall \lambda \in D_{h_1} \cap D_{h_2}. \quad (7.17)$$

Despejando el cociente  $\frac{Y(\lambda)}{X(\lambda)}$  de la Ecuación (7.17), se obtiene que

$$H(\lambda) = \frac{Y(\lambda)}{X(\lambda)} = \frac{H_1(\lambda)}{1 \pm H_1(\lambda)H_2(\lambda)}, \quad \forall \lambda \in D_{h_1} \cap D_{h_2}. \quad (7.18)$$

■

El Teorema 7.3 es realmente útil en el estudio de los sistemas de control, los cuales han sido tema de estudio en el campo de la ingeniería.

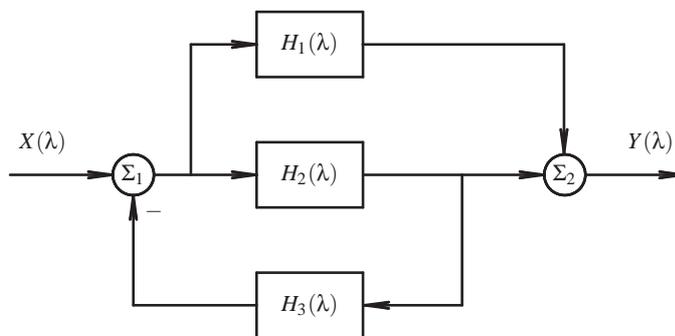
**Observación 7.2** Las definiciones y teoremas presentados en esta sección pueden ser particularizados en el dominio de cualquier transformada lineal. Por ejemplo: el dominio de la transformada de Laplace, de Fourier, discreta de Fourier, o  $\mathcal{Z}$ , entre otras.

#### ■ EJEMPLO 7.1

Sea el sistema LDCID definido en el dominio de la variable continua o discreta  $\xi \in \Xi$ , según sea el caso particular, el cual es mostrado en la Figura 7.4, y cuyos bloques  $H_i(\lambda)$  para  $i = 1, 2, 3$  cuenta con sus respectivas funciones de transferencias dada por

$$H_i(\lambda) = \frac{1}{\lambda - a_i}, \quad \forall \lambda \neq a_i, \lambda \in D_{h_i}, \quad (7.19)$$

donde  $D_{h_i}$  es la región de convergencia de cada  $i$ -ésima función de transferencia  $H_i(\lambda)$ .



**Figura 7.4.** Sistema con estructura realimentada y paralela

Para el sistema mostrado en la figura. Determine la función de transferencia del sistema en términos de  $\lambda$  y los parámetros  $a_i$  para  $i = 1, 2, 3$ .

### Solución

A los efectos de facilitar el desarrollo de la solución se definirán dos variables internas del sistema, las cuales son:  $E(\lambda)$  que representa la salida del sumador de señales  $\Sigma_1$ ; e  $Y_2(\lambda)$  que denota la respuesta del subsistema con función de transferencia  $H_2(\lambda)$ .

Entonces, para todo

$$\lambda \in \bigcap_{i=1}^3 D_{h_i}, \quad (7.20)$$

se tiene que

$$E(\lambda) = X(\lambda) - H_3(\lambda)Y_2(\lambda), \quad (7.21)$$

y por otra parte, se cuenta con que

$$Y_2(\lambda) = H_2(\lambda)[X(\lambda) - H_3(\lambda)Y_2(\lambda)]. \quad (7.22)$$

Empleando las Ecuaciones (7.21) y (7.22) se tiene que

$$Y(\lambda) = [H_1(\lambda) + H_2(\lambda)][X(\lambda) - H_3(\lambda)Y_2(\lambda)]. \quad (7.23)$$

Despejando  $Y_2(\lambda)$  de la Ecuación (7.22), se obtiene que

$$Y_2(\lambda) = \frac{H_2(\lambda)}{1 + H_2(\lambda)H_3(\lambda)} X(\lambda). \quad (7.24)$$

Al sustituir la Ecuación (7.24) en la Ecuación (7.23), y al despejar el cociente  $Y(\lambda)/X(\lambda) = H(\lambda)$  se consigue que

$$H(\lambda) = \frac{Y(\lambda)}{X(\lambda)} = \frac{H_1(\lambda) + H_2(\lambda)}{1 + H_2(\lambda)H_3(\lambda)}, \quad \forall \lambda \in \bigcap_{i=1}^3 D_{h_i}. \quad (7.25)$$

Sustituyendo la Ecuación (7.19) en la Ecuación (7.25), y luego de algunos procedimientos algebraicos se obtiene que

$$H(\lambda) = \frac{(2\lambda - a_1 - a_2)(\lambda - a_3)}{(\lambda - a_1)[1 + (\lambda - a_2)(\lambda - a_3)]}. \quad (7.26)$$

## 7.2 RESPUESTA EN FRECUENCIA EN EL DOMINIO CONTINUO

En esta sección se establecerá el significado de la respuesta en frecuencia de sistemas LDCID definidos en el dominio continuo.

Es importante señalar que el concepto de respuesta en frecuencia tiene sentido desde el punto de vista de la ingeniería, cuando es aplicado a sistemas estables, es decir, en el caso de sistemas LDCID definidos en el dominio continuo, éstos deben tener sus polos ubicados en el semiplano cuya parte real sea negativa.

A objeto de inducir el concepto de respuesta en frecuencia se presentará un caso particular, el cual permitirá conceptualizar el significado de respuesta en frecuencia.

Suponga que se cuenta con un sistema LDCID, el cual es excitado por una señal

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t) u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (7.27)$$

donde  $A$  es la amplitud de la señal de excitación y  $\omega_0$  es un parámetro, el cual define la frecuencia de oscilación de la señal de excitación medida en rad/s, y éste puede ser ajustado a cualquiera de los valores de  $\omega_0$  definido en el intervalo  $0 < \omega_0 < \infty$ . Debe destacarse que si  $\omega_0$  tomara el valor de cero, entonces, las señales definidas por funciones seno o coseno no oscilarían.

Si el sistema descrito es excitado por la señal expresada por la Ecuación (7.27), y además el sistema es estable. Entonces, es evidente que la respuesta transitoria se desvanecerá después de un muy largo tiempo debido al hecho de que el sistema es estable, quedando únicamente la respuesta asociada a la respuesta forzada o solución particular, la cual corresponde a una señal sinusoidal pero alterada tanto en amplitud como en su traslación en tiempo, con respecto a la señal de excitación.

En consecuencia, a los efectos de determinar la respuesta en frecuencia en el régimen permanente, se puede considerar que luego de un largo período de tiempo, la excitación del sistema puede ser considerada como

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (7.28)$$

Por otra parte, debido al hecho de que se cuenta con la función de transferencia del sistema, se puede asegurar que

$$Y(s) = H(s)X(s), \quad \forall s \in D_h \cap D_x, \quad (7.29)$$

donde  $s = \sigma + j\omega$ ,  $D_h$  es la región de convergencia de  $H(s)$ , y  $D_x$  es la región de convergencia de  $X(s)$ .

Si el eje imaginario  $j\omega$  está contenido en la región de convergencia  $D_h$ . Entonces, la variable  $s$  puede tomar valores con  $\sigma = 0$ , lo que implica que  $s = j\omega_0$ , y en consecuencia

$$Y(j\omega_0) = H(j\omega_0)X(j\omega_0), \quad \forall 0 < |\omega_0| < \infty, \quad (7.30)$$

donde de acuerdo a los conceptos de transformada de Fourier (Brea, 2006, Capítulo 4),

$$Y(j\omega_0) = |Y(j\omega_0)| e^{j\Phi_y(j\omega_0)}; \quad (7.31)$$

$$H(j\omega_0) = |H(j\omega_0)| e^{j\Phi_h(j\omega_0)}; \quad (7.32)$$

$$X(j\omega_0) = |X(j\omega_0)| e^{j\Phi_x(j\omega_0)}, \quad (7.33)$$

siendo respectivamente  $\Phi_y(j\omega_0)$ ,  $\Phi_h(j\omega_0)$  y  $\Phi_x(j\omega_0)$  los argumentos de  $Y(j\omega_0)$ ,  $H(j\omega_0)$  y  $X(j\omega_0)$  en el sentido establecido en (Brea, 2006, Definición 4.1).

Ahora bien, debido al hecho de que

$$|Y(j\omega_0)| = |H(j\omega_0)| |X(j\omega_0)| \quad (7.34a)$$

$$\Phi_y(j\omega_0) = \Phi_h(j\omega_0) + \Phi_x(j\omega_0), \quad (7.34b)$$

se puede afirmar que

$$Y(j\omega_0) = |H(j\omega_0)| |X(j\omega_0)| e^{j(\Phi_h(j\omega_0) + \Phi_x(j\omega_0))}, \quad (7.35)$$

lo que implica que la respuesta estable y en régimen permanente viene dada por

$$y(t) = A |H(j\omega_0)| \text{sen}(\omega_0 t + \Phi_h(j\omega_0)), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (7.36)$$

Un resultado semejante se obtiene en el caso que la excitación del sistema sea

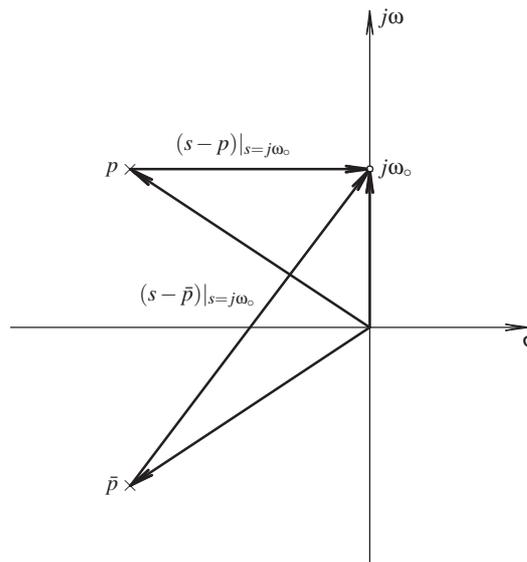
$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (7.37)$$

que en este caso la respuesta del sistema en su régimen permanente vendría siendo

$$y(t) = A |H(j\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \Phi_h(j\omega_0)), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (7.38)$$

Como resultado del análisis realizado se tiene que un aspecto a analizar es la magnitud y fase que introduce el sistema para cada valor de frecuencia  $\omega_0$ , el cual podría ser representado gráficamente.

Con el propósito de estudiar la respuesta en frecuencia de los sistemas LDCID, se analizará un caso particular, el cual permitirá realizar un ejercicio de inducción y así poder establecer los principios para el análisis en frecuencia de los sistemas LDCID y su significado.



**Figura 7.5.** Respuesta en frecuencia de un sistema con función de transferencia  $H(s) = [(s-p)(s-\bar{p})]^{-1}$

La Figura 7.5 ilustra la respuesta para un valor de frecuencia  $\omega_0$  de una función de transferencia

$$H(s) = \frac{1}{(s-p)(s-\bar{p})}, \quad \forall \text{Re}[s] > \text{Re}[p]. \quad (7.39)$$

Al evaluar la Ecuación (7.39) para  $s = j\omega_0$ , se obtiene que

$$H(j\omega_0) = \frac{1}{(j\omega_0 - p)(j\omega_0 - \bar{p})}, \quad (7.40)$$

de donde se asegura que

$$|H(j\omega_0)| = \left| \frac{1}{(j\omega_0 - p)} \right| \left| \frac{1}{(j\omega_0 - \bar{p})} \right|.$$

$$\Phi_h(j\omega_0) = -\arg(j\omega_0 - p) - \arg(j\omega_0 - \bar{p}).$$

Note que cuanto mayor es el valor de  $\omega_0$  el sistema ofrece una mayor atenuación así como un desfase cercano a  $-\pi$ . Mientras que a frecuencias cercanas a  $\omega_0 = 0$  la atenuación es mínima y su desfase es cercano a cero.

No obstante, antes de continuar con estos conceptos se presentarán algunas definiciones de transformada de Fourier (Brea, 2006); (Papoulis, 1962), y un teorema que permitirá explicar formalmente la respuesta en frecuencia de sistemas LDCID definidos en el dominio continuo.

**Definición 7.4 (Transformada de Fourier)** Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida en el dominio continuo. Entonces, la transformada de Fourier de la función  $f(t)$ , la cual se representará como  $\mathcal{F}[f(t)]$  y que es denotada como  $F(\omega)$  es definida por

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t} dt. \quad (7.42)$$

**Observación 7.3** La convergencia de la integral de la Ecuación (7.42) está garantizada suficientemente si la integral de la Ecuación (7.42) es absolutamente integrable, es decir, si se satisface que

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t} dt \right| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty. \quad (7.43)$$

**Observación 7.4** En general  $F(\omega)$  es una función compleja con parte real e imaginaria, es decir,

$$F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(j\omega t)dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sen(j\omega t)dt. \quad (7.44)$$

**Observación 7.5** En general  $F(\omega)$  puede ser representada de forma exponencial a través de

$$F(\omega) = |F(\omega)|e^{j\Phi_f(\omega)}, \quad (7.45)$$

donde

$$|F(\omega)| = +\sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)}, \quad (7.46)$$

y

$$\Phi_f(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + \pi \operatorname{sgn}(\omega), & \forall R(\omega) = 0, X(\omega) > 0; \\ \frac{\pi}{2} + \pi \operatorname{sgn}(\omega), & \forall R(\omega) = 0, X(\omega) < 0; \\ \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{X(\omega)}{R(\omega)} \right] - 2\pi u(-\omega), & \forall R(\omega) > 0; \\ \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{X(\omega)}{R(\omega)} \right] + \pi \operatorname{sgn}(\omega), & \forall R(\omega) < 0. \end{cases} \quad (7.47)$$

**Observación 7.6** Tome en cuenta que una forma general de expresar la transformada de Fourier es

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j[\Phi_f(\omega) + 2k\pi]}, \quad (7.48)$$

donde  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Observación 7.7** Cuando  $\omega = 0$ ,  $R(\omega)|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$  y  $X(\omega)|_{\omega=0} = 0$ , es decir,  $F(\omega) = R(\omega)$  para  $\omega = 0$ .

**Observación 7.8** En el caso que  $\omega$  sea igual a cero, la fase de la transformada de Fourier es definida como

$$\Phi_f(0) = \begin{cases} 0 & \forall F(0) > 0, \\ \# & \forall F(0) \leq 0. \end{cases}$$

No obstante, los valores límites para el caso  $F(0) < 0$  están dados por

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \Phi(\omega + \epsilon) = \pi, \text{ y } \lim_{\epsilon \downarrow 0} \Phi(\omega - \epsilon) = -\pi.$$

**Observación 7.9** La definición de transformada de Fourier (TF) puede además ser establecida de manera general para funciones  $f(t)$  complejas. Sin embargo, en esta obra será supuesto que las funciones son reales.

A los efectos de proponer un método de cálculo de la respuesta de sistemas LDCID en régimen permanente se enunciará el siguiente teorema.

**Teorema 7.4** Sea un sistema LDCID el cual es excitado por una señal definida en el campo de los números complejos con expresión

$$x(t) = A e^{j\omega t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (7.49)$$

donde  $A \in \mathbb{R}$  es una constante positiva.

Entonces, la respuesta del sistema en régimen permanente es

$$y(t) = AH(\omega) e^{j\omega t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (7.50)$$

donde  $H(\omega)$  es la función de transferencia del sistema en el dominio  $j\omega$ , o también la transformada de Fourier de la respuesta impulsiva del sistema.

Más aún, al expresar  $H(\omega)$  en su forma exponencial se tiene que

$$y(t) = A|H(\omega)| e^{j[\omega t + \Phi_h(\omega)]}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (7.51)$$

**Demostración.** El hecho de que el sistema sea LDCID permite asegurar que éste cuenta con su correspondiente respuesta impulsiva  $h(t)$ , con lo cual se puede decir que de acuerdo

al Teorema 4.3 de la página 109,

$$y(t) = h(t) * x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (7.52)$$

Al sustituir  $x(t)$  y  $h(t)$  en la Ecuación (7.52), se obtiene que

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) A e^{j\omega(t-\tau)} d\tau = A \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau e^{j\omega t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (7.53)$$

Según la Definición 7.4, se tiene entonces que

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (7.54)$$

lo que implica que la Ecuación (7.53) puede ser expresada como

$$y(t) = AH(\omega) e^{j\omega t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (7.55)$$

donde  $H(\omega)$  es la función de transferencia del sistema definida en el dominio  $s = j\omega$ .

Al expresar  $H(\omega)$  en su forma exponencial se tiene que

$$y(t) = A|H(\omega)| e^{j[\omega t + \Phi_h(\omega)]}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (7.56)$$

■

Note que  $\omega$  representa un parámetro en la Ecuación (7.55), así como en las ecuaciones anteriores.

**Corolario 7.1** *Sea un sistema LDCID el cual es excitado por una señal definida en el dominio continuo con expresión*

$$x(t) = A \cos(\omega t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (7.57)$$

donde  $A > 0$  es una constante real.

Entonces,

$$y(t) = A|H(\omega)| \cos[\omega t + \Phi_h(\omega)], \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (7.58)$$

donde  $|H(\omega)|$  y  $\Phi_h(\omega)$  son respectivamente la magnitud y fase de la función de transferencia del sistema.

**Demostración.** Suponga que el sistema es excitado por una señal

$$\tilde{x}(t) = A e^{j\omega t} = A \cos(\omega t) + jA \sin(\omega t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (7.59)$$

donde  $A > 0$  es una constante real.

De acuerdo al Teorema 7.4, la respuesta del sistema, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , es ante la excitación exponencial es

$$\tilde{y}(t) = A|H(\omega)| \cos[\omega t + \Phi_h(\omega)] + jA|H(\omega)| \sin[\omega t + \Phi_h(\omega)]. \quad (7.60)$$

Como el sistema es lineal, se puede afirmar que la respuesta del sistema ante la excitación  $x(t) = A \cos(\omega t)$  definida para todo  $t \in \mathbb{R}$  corresponde a la parte real de  $y^{[e]}(t)$ , es decir,

$$y(t) = \text{Re} [\tilde{y}(t)] = A|H(\omega)| \cos[\omega t + \Phi_h(\omega)], \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (7.61)$$

■

**Corolario 7.2** Sea un sistema LDCID el cual es excitado por una señal definida en el dominio continuo con expresión

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (7.62)$$

donde  $A > 0$  es una constante real.

Entonces,

$$y(t) = A|H(\omega)| \operatorname{sen}[\omega t + \Phi_h(\omega)], \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (7.63)$$

donde  $|H(\omega)|$  y  $\Phi_h(\omega)$  son respectivamente la magnitud y fase de la función de transferencia del sistema.

**Demostración.** Al aplicar el mismo método de demostración del Corolario 7.1, pero en este caso extrayendo la parte imaginaria de  $\tilde{y}(t)$  dada por la Ecuación (7.60), se demuestra el corolario. ■

Con el propósito de ilustrar los conceptos expuestos, considere el siguiente ejemplo.

■ **EJEMPLO 7.2**

Sea un sistema LDCID con función de transferencia

$$H(s) = \frac{1}{s+4}, \quad \forall \operatorname{Re}[s] > -4. \quad (7.64)$$

Si el sistema es excitado por una señal

$$x(t) = 10 \operatorname{sen}(6t)u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (7.65)$$

Determine la respuesta del sistema en régimen permanente, es decir, su respuesta después de un muy largo lapso.

Para esto, determine la respuesta por: método analíticos, método gráficos, y mediante la correspondiente ecuación diferencial asociada al sistema.

**Solución**

**a) Solución analítica.**

De acuerdo a lo presentado en esta sección, al considerar que el sistema ha permanecido un muy largo período de tiempo con la señal de excitación en su entrada, se puede suponer que la señal de excitación es

$$x(t) = 10 \operatorname{sen}(6t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (7.66)$$

lo que implica que el sistema está sometido a una señal sinusoidal de frecuencia angular de 6 rad/s.

En consecuencia,

$$H(j6) = \left. \frac{1}{s+4} \right|_{j6}. \quad (7.67)$$

De la Ecuación (7.67) se obtiene entonces que

$$|H(j6)| = \left| \frac{1}{4 + j6} \right| = \frac{1}{\sqrt{52}} \cong 0,13868. \quad (7.68a)$$

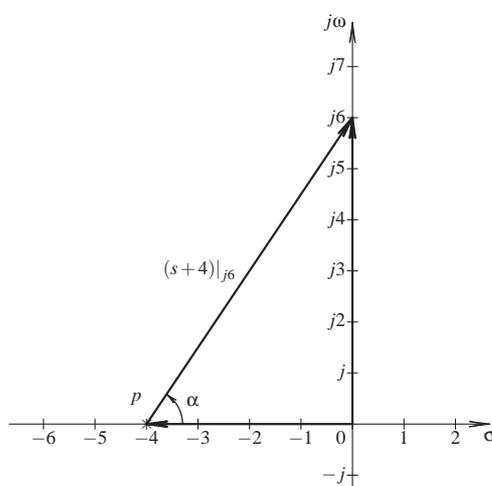
$$\Phi_h(j6) = -\text{tg}^{-1}\left(\frac{6}{4}\right) \cong -0,98279 \text{ rad.} \quad (7.68b)$$

Finalmente, aplicando la Ecuación (7.63) se tiene que

$$y(t) = \frac{10}{\sqrt{52}} \text{sen} \left( 6t - \text{tg}^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \right) \cong 1,3868 \text{sen} (6t - 0,98279). \quad (7.69)$$

### b) Solución gráfica.

La Figura 7.6 muestra los vectores  $-4$ ;  $(s+4)|_{j6}$ ; y  $j6$  en el plano complejo  $S$ , y cuyos ejes de coordenadas son denominados  $\sigma$  y  $j\omega$ . Además la figura muestra mediante el símbolo  $\times$  el único polo  $p$  del sistema, el cual está ubicado en  $-4$ .



**Figura 7.6.** Representación gráfica vectorial de  $-4$ ;  $(s+4)|_{j6}$ ; y  $j6$  en el plano complejo  $S$

Al calcular la magnitud y ángulo del vector  $(s+4)|_{j6}$ , se tiene que

$$|(s+4)|_{j6}| = |4 + j6| = \sqrt{52}. \quad (7.70a)$$

$$\alpha = \text{Arg}[(s+4)|_{j6}] = \text{tg}^{-1}\left(\frac{6}{4}\right) \cong 0,98279 \text{ rad.} \quad (7.70b)$$

Como la función de transferencia está definida por  $(s+4)^{-1}$ . Entonces, aplicando las Ecuaciones (7.70) y se obtiene que

$$|H(j6)| = \frac{1}{\sqrt{52}} \cong 0,13868. \quad (7.71a)$$

$$\Phi_h(j6) = -\alpha = -\text{tg}^{-1}\left(\frac{6}{4}\right) \cong -0,98279 \text{ rad.} \quad (7.71b)$$

En definitiva, al emplear nuevamente la Ecuación (7.63) se asegura que la respuesta del sistema en régimen permanente es

$$y(t) = \frac{10}{\sqrt{52}} \operatorname{sen} \left( 6t - \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{3}{2} \right) \right) \cong 1,3868 \operatorname{sen} (6t - 0,98279). \quad (7.72)$$

**c) Solución mediante ecuación diferencial.**

Se tiene que debido a que es conocida la función de transferencia del sistema, se puede afirmar que

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+4}, \quad \forall \operatorname{Re}[s] > -4, \quad (7.73)$$

lo que conlleva a

$$(s+4)Y(s) = X(s). \quad (7.74)$$

Ahora, debido al supuesto de que el sistema se encuentra inicialmente en reposo, y a que entonces  $\mathcal{L} \left[ \frac{dy(t)}{dt} \right] = sY(s)$ , se tiene que la ecuación diferencial asociada al sistema es

$$\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = x(t). \quad (7.75)$$

Empleando el método de resolución mostrado en el apartado 2.2.3 se tiene que al aplicar el operador  $p^n = \frac{d^n}{dt^n}$  a la Ecuación (7.75) se obtiene que

$$(p+4)y(t) = x(t). \quad (7.76)$$

La única raíz del polinomio característico  $D(p) = p+4$  es  $p = -4$ , el cual conduce a decir que la solución homogénea está dada por

$$y_h(t) = c_1 e^{-4t}, \quad \forall t > 0. \quad (7.77)$$

Por otra parte, de acuerdo a la Tabla 2.1 de la página 44, la solución particular o respuesta permanente viene definida por

$$y_p(t) = \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{p+4} \Big|_{j6} 10e^{j6t} \right], \quad \forall t > 0. \quad (7.78)$$

Al evaluar la Ecuación (7.78), se obtiene que

$$y_p(t) = \operatorname{Im} \left[ \frac{10}{\sqrt{52} e^{j \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{3}{2} \right)}} e^{j6t} \right] = \operatorname{Im} \left[ \frac{10}{\sqrt{52}} e^{j \left( 6t - \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{3}{2} \right) \right)} \right], \quad \forall t > 0, \quad (7.79)$$

lo que implica que

$$y_p(t) = \frac{10}{\sqrt{52}} \operatorname{sen} \left( 6t - \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{3}{2} \right) \right), \quad \forall t > 0. \quad (7.80)$$

Al sumar la solución homogénea o transitoria, y la solución particular o forzada mostradas respectivamente por la Ecuaciones (7.77) y (7.80) se obtiene que la respuesta total del sistema ante la excitación  $x(t) = 10 \operatorname{sen}(6t)u(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  es

$$y(t) = c_1 e^{-4t} + \frac{10}{\sqrt{52}} \operatorname{sen} \left( 6t - \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{3}{2} \right) \right), \quad \forall t > 0, \quad (7.81)$$

donde el coeficiente  $c_1$  puede ser determinado a través de la condición inicial del sistema. No obstante, a los efectos del estudio del sistema en su régimen permanente no se requiere determinar  $c_1$ .

Finalmente, tomando el límite cuando  $t$  se aproxima a infinito, se tiene que la respuesta del sistema después de un muy largo período de tiempo es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{10}{\sqrt{52}} \operatorname{sen} \left( 6t - \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{3}{2} \right) \right). \quad (7.82)$$

Observe que todos los métodos de solución empleados en el Ejemplo 7.2, condujeron exactamente al mismo resultado, los cuales son mostrados por las Ecuaciones (7.69), (7.72) y (7.82). La diferencia entre los métodos está en lo expedito que pueda resultar en el estudio de la respuesta de los sistemas en régimen permanente.

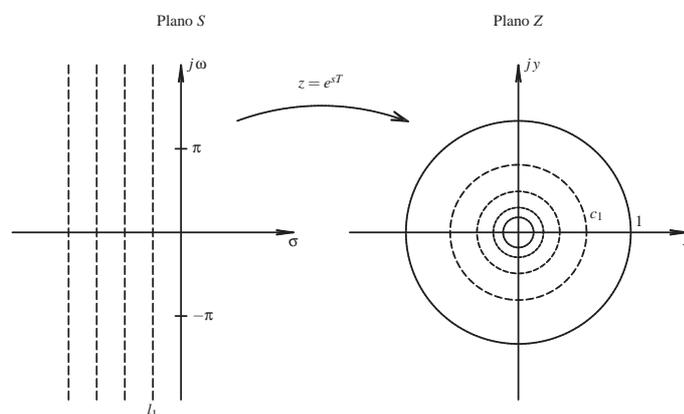
### 7.3 RESPUESTA EN FRECUENCIA EN EL DOMINIO DISCRETO

En esta sección se estudiará el significado de la respuesta en frecuencia de sistemas LDCID definidos en el dominio discreto. Al igual que en los sistemas LDCID definidos en el dominio continuo, el estudio de la respuesta en frecuencia supone que ellos deben ser estables. En otras palabras, los polos del sistema deben estar dentro de la circunferencia unitaria.

Se conoce que la transformación de rectas verticales en el plano de la transformada de Laplace al plano de la transformada  $\mathcal{Z}$ , está representada por circunferencias concéntricas con centro en el origen del plano  $Z$ , debido al hecho de que la relación que existe entre la variable  $s \in S$  y la variable  $z \in Z$  está definida por

$$z = e^{sT}, \quad \forall s \in \mathbb{C}, \quad (7.83)$$

donde  $T$  es el paso de discretización.



**Figura 7.7.** Transformación del plano  $S$  al plano  $Z$  a través de  $z = e^{sT}$ .

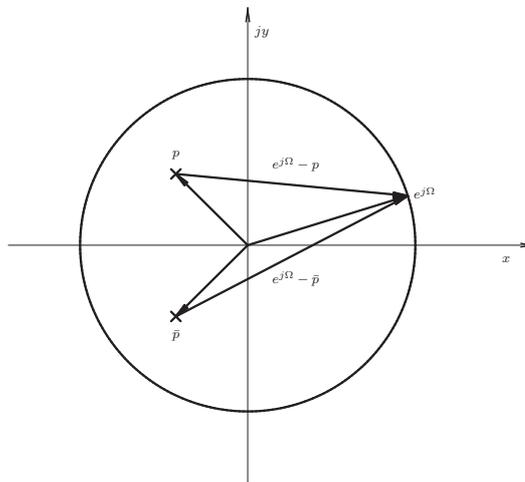
La Figura 7.7 muestra un conjunto de rectas verticales definidas en el plano  $S$ , las cuales son transformadas en circunferencias concéntricas con centro en el origen de coordenadas

del plano  $Z$ . Note que la función  $z = e^{sT}$  representa la relación entre los núcleos de las transformadas de Laplace y  $\mathcal{Z}$ .

Note además que el eje imaginario  $j\omega$  definido en el plano  $S$  se transforma en la circunferencia unitaria definida en el plano  $Z$ . Más aún, los puntos definidos sobre el eje imaginario con valor  $j\omega$  para todo  $-\infty < \omega < \infty$ , son transformados en el conjunto de puntos correspondiente a la circunferencia de radio uno y cuya expresión analítica se define por  $z = e^{j\omega T}$ .

Por otra parte, observe que cada  $2\pi$  de desplazamiento vertical sobre una recta paralela al eje  $j\omega$  produce una vuelta sobre la correspondiente circunferencia. Este hecho permite asegurar que al evaluar los puntos entre 0 y  $2\pi$  proporciona suficiente información de la respuesta en frecuencia del sistema, debido a la simetría y periodicidad de la función que representa la respuesta en frecuencia.

Es decir, lo que representa los puntos definidos por  $s = j\omega$  en la obtención de la respuesta en frecuencia en los sistemas LDCID en el dominio continuo, constituyen ser los puntos  $z = e^{j\omega T}$  en la respuesta en frecuencia de los sistemas LDCID en el dominio discreto.



**Figura 7.8.** Respuesta en frecuencia de dos polos simples complejos conjugados

La Figura 7.8 muestra un ejemplo de la respuesta en frecuencia para un sistema LDCID en el dominio discreto, conformado únicamente por dos polos  $p$  y  $\bar{p}$ , y cuya función de transferencia viene dada por

$$H(z) = \frac{\bar{k}}{(z-p)(z-\bar{p})}, \quad \forall z \notin \{p, \bar{p}\}, \tag{7.84}$$

donde  $\bar{k}$  es una constante real.

Nótese que para obtener la respuesta en frecuencia del sistema, se debe evaluar la función de transferencia  $H(z)$  en  $z = e^{j\Omega}$ , donde para obtener  $N$  puntos de la respuesta en frecuencia ubicados en el dominio no negativo de la frecuencia  $\Omega = 2\pi n/N$  con  $0 \leq n < N-1$ .

Además, en la Figura 7.8 se representan los vectores  $(z-p)|_{z=e^{j\Omega}}$  y  $(z-\bar{p})|_{z=e^{j\Omega}}$ , los cuales al calcular sus magnitudes y ángulos proporcionan los datos suficientes para deter-

minar la respuesta del sistema para la frecuencia  $\Omega$ , a través de las operaciones definidas por la función de transferencia mostrada en la Ecuación (7.84).

De modo semejante, se puede establecer el teorema que soporta lo tratado en el dominio discreto, para lo cual se tiene:

**Teorema 7.5** *Sea un sistema LDCID definido en el dominio discreto, el cual es excitado por una señal definida en el campo de los números complejos con expresión*

$$x[n] = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega} \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \Omega > 0, \quad (7.85)$$

donde  $A \in \mathbb{R}$  es una constante positiva,  $\Omega = \frac{2\pi}{N}$ , o en general  $\Omega \in \mathbb{R}$  es una constante positiva, y  $N$  es el número de muestras.

Entonces, la respuesta del sistema en régimen permanente es

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A H(e^{j\Omega}) e^{jk\Omega} \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (7.86)$$

donde  $H(e^{j\Omega})$  es la función de transferencia del sistema en el dominio discreto, y  $A \in \mathbb{R}$  es una constante positiva.

Más aún, al expresar  $H(e^{j\Omega})$  en su forma exponencial se tiene que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A |H(e^{j\Omega})| e^{j[k\Omega + \Phi_h(e^{j\Omega})]} \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (7.87)$$

**Demostración.** De acuerdo al Teorema 4.1 de la página 98, la respuesta de un sistema LDCID definido en el dominio discreto viene dada por

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} h[q] x[n-q], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (7.88)$$

Por otra parte, se tiene que la señal de excitación definida en el dominio discreto es

$$x[n] = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega} \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (7.89)$$

donde  $A \in \mathbb{R}$  es una constante positiva.

A objeto de facilitar la demostración, se reexpresará la Ecuación (7.88) como

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (7.90)$$

donde  $y_k$  está dado por

$$y_k = \sum_{q=0}^{\infty} h_q x_{k-q}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, k \geq 0, \quad (7.91)$$

y de acuerdo a la Ecuación (7.89)

$$x_k = A e^{jk\Omega}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, k \geq 0. \quad (7.92)$$

Al sustituir la Ecuación (7.92) en la Ecuación (7.91), se tiene que

$$y_k = A \sum_{q=0}^{\infty} h_q e^{j(k-q)\Omega}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, k \geq 0. \quad (7.93)$$

Reescribiendo la Ecuación (7.93), se obtiene que

$$y_k = A \sum_{q=-\infty}^{\infty} h_q (e^{j\Omega})^{-q} e^{jk\Omega}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, k \geq 0, \quad (7.94)$$

donde al considerar a  $z = e^{j\Omega}$ , se consigue que

$$y_k = A \sum_{q=-\infty}^{\infty} h_q z^{-q} \Big|_{z=e^{j\Omega}} e^{jk\Omega}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, k \geq 0. \quad (7.95)$$

Por otra parte, se tiene que según la definición de transformada  $\mathcal{Z}$  (véase Ecuación (6.3) de la página 142),

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k}, \quad \forall z \in D_z, \quad (7.96)$$

donde debe recordarse que  $D_z$  es la región de convergencia (RDC) de  $H(z)$ .

Empleando la Ecuación (7.96) en la Ecuación (7.94), se obtiene entonces que

$$y_k = A H(e^{j\Omega}) e^{jk\Omega}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, k \geq 0. \quad (7.97)$$

Sustituyendo la Ecuación (7.97) en la Ecuación (7.90), se asegura que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A H(e^{j\Omega}) e^{jk\Omega} \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (7.98)$$

Debido al hecho de que

$$H(e^{j\Omega}) = |H(e^{j\Omega})| e^{j\Phi(e^{j\Omega})}, \quad (7.99)$$

donde  $\Phi_h(e^{j\Omega}) = \text{Arg}[H(e^{j\Omega})]$ , se puede afirmar que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A |H(e^{j\Omega})| e^{j[k\Omega + \Phi_h(e^{j\Omega})]} \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (7.100)$$

■

**Observación 7.10** Al permitir que  $0 < \Omega \leq 2\pi$  se tiene la respuesta en frecuencia para cualquier valor de  $\Omega$ , en virtud a la característica periódica que presenta la transformación  $z = e^{j\Omega}$ .

De acuerdo a la Observación 7.10, la respuesta en frecuencia de un sistema LDCID definido en el dominio discreto, para cualquier valor  $\Omega = \Omega_0$  donde  $0 < \Omega_0 \leq 2\pi$ , es equivalente a  $\Omega = \Omega_0 + 2q\pi$ , donde  $q \in \mathbb{Z}$ .

**Corolario 7.3** *Sea un sistema LDCID definido en el dominio discreto, el cual es excitado por una señal definida en el campo de los números enteros con expresión*

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A \cos(\Omega k) \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (7.101)$$

donde  $A > 0$  es una constante real, y  $\Omega > 0$ .

Entonces,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A |H(e^{j\Omega})| \cos[\Omega n + \Phi_h(e^{j\Omega})] \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (7.102)$$

donde  $|H(e^{j\Omega})|$  y  $\Phi_h(e^{j\Omega})$  son respectivamente la magnitud y fase de la función de transferencia del sistema.

**Demostración.** Considere que el sistema es excitado por una señal

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A e^{j\Omega k} \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (7.103)$$

donde  $A > 0$  es una constante real.

Al reescribir la Ecuación (7.103) se tiene que

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A \cos(\Omega k) \delta[n-k] + j \sum_{k=-\infty}^{\infty} A \operatorname{sen}(\Omega k) \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (7.104)$$

De acuerdo al Teorema 7.5, la respuesta del sistema, para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , es ante la excitación exponencial en el dominio discreto es

$$\begin{aligned} \tilde{y}[n] = & \sum_{k=-\infty}^{\infty} A |H(e^{j\Omega})| \cos[\Omega k + \Phi_h(e^{j\Omega})] \delta[n-k] + \\ & j \sum_{k=-\infty}^{\infty} A |H(e^{j\Omega})| \operatorname{sen}[\Omega k + \Phi_h(e^{j\Omega})] \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (7.105)$$

Como el sistema es lineal, se puede afirmar que la respuesta del sistema ante la excitación

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A \cos(\Omega k) \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (7.106)$$

corresponde a la parte real de  $\tilde{y}[n]$ , es decir,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A |H(e^{j\Omega})| \cos[\Omega k + \Phi_h(e^{j\Omega})] \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (7.107)$$

■

**Corolario 7.4** Sea un sistema LDCID definido en el dominio discreto, el cual es excitado por una señal definida en el campo de los números enteros con expresión

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A \operatorname{sen}(\Omega k) \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (7.108)$$

donde  $A > 0$  es una constante real, y  $\Omega > 0$ .

Entonces,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A |H(e^{j\Omega})| \operatorname{sen}[\Omega k + \Phi_h(e^{j\Omega})] \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (7.109)$$

donde  $|H(e^{j\Omega})|$  y  $\Phi_h(e^{j\Omega})$  son respectivamente la magnitud y fase de la función de transferencia del sistema.

**Demostración.** Aplicando el método de demostración del Corolario 7.3, pero en este caso calculando la parte imaginaria a  $\tilde{y}[n]$  definida por la Ecuación (7.105), se demuestra el corolario. ■

**Observación 7.11** Por razones de simplificación de nomenclatura, las funciones  $|H(e^{j\Omega})|$  y  $\Phi_h(e^{j\Omega})$ , serán eventualmente denotadas como  $|H(\Omega)|$  y  $\Phi_h(\Omega)$ , respectivamente. No obstante, debe recordarse el significado matemático de  $\Omega$ .

### ■ EJEMPLO 7.3

Sea un sistema LDCID definido en el dominio discreto y cuya función de transferencia es

$$H(z) = \frac{1}{z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{8}}, \quad \forall z \neq \frac{1}{4} \pm j\frac{1}{4}. \quad (7.110)$$

Determine la respuesta en frecuencia del sistema tanto en su magnitud como en su fase.

### Solución

Para obtener la solución de este ejemplo, se debe evaluar la magnitud y fase de la función de transferencia considerando a

$$z = e^{jn\Delta\Omega}, \quad (7.111)$$

donde  $n$  es el número de la muestra que en este caso se hará variar entre 0 y  $N = 10$ , y  $\Delta\Omega$  es el incremento de fase en la variable  $z$ , para lo cual  $\Delta\Omega = \pi/N$ .

Definido entonces la variable  $z$ , puede emplearse el Scilab™, el cual a través de las siguientes instrucciones se obtienen los resultados mostrados en la Figura 7.9 de la página 194.

La Figura 7.9 muestra en su primera parte los comandos Scilab™ para el cálculo de la magnitud y fase de la función de transferencia  $H(z)|_{z=e^{jn\Delta\Omega}}$ .

En la segunda parte de la Figura 7.9, se presenta en una tabla, las respectivas columnas  $n\Delta\Omega$ ,  $|H(z)|$  y  $\operatorname{Arg}[H(z)]$ . Es decir, por ejemplo, para la frecuencia  $n\Delta\Omega = 0,6283$ , ubicada en la tercera fila, la magnitud de la función de transferencia es  $|H(z)| = 1,5202$  y su fase o argumento principal es  $\operatorname{Arg}[H(z)] = -1,5259$  rad.

```

-->for n=0:10;
-->DOmega=%pi/10;
-->z=exp(%i*n*DOmega);
-->H=(z^2-(1/2)*z+1/8)^-1;
-->Omega=n*DOmega; Mag=abs(H);
-->fase=atan(imag(H),real(H));
-->Resp=[Omega,Mag,fase];
-->if fase<0 then
-->mprintf(' | %5.4f | %5.4f | %5.4f |\n',Resp);
-->else
-->mprintf(' | %5.4f | %5.4f | %5.4f |\n',Resp);
-->end
-->end
-->end
| 0.0000 | 1.6000 | 0.0000 |
| 0.3142 | 1.5852 | -0.7571 |
| 0.6283 | 1.5202 | -1.5259 |
| 0.9425 | 1.3774 | -2.2893 |
| 1.2566 | 1.1820 | -3.0085 |
| 1.5708 | 0.9923 | 2.6224 |
| 1.8850 | 0.8418 | 2.0328 |
| 2.1991 | 0.7353 | 1.4899 |
| 2.5133 | 0.6662 | 0.9780 |
| 2.8274 | 0.6277 | 0.4847 |
| 3.1416 | 0.6154 | 0.0000 |
-->

```

**Figura 7.9.** Comandos Scilab™ para el cálculo de la respuesta en frecuencia del Ejemplo 7.3

Es importante destacar, que el comando Scilab™  $\text{atan}(y, x)$  está definido de acuerdo a

$$\Phi(y, x) = \begin{cases} \text{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), & \forall x > 0; \\ \pi + \text{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), & \forall x < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & \forall x = 0, y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & \forall x = 0, y < 0; \\ 0, & \forall x = 0, y = 0. \end{cases} \quad (7.112)$$

donde  $z = x + jy$ .

No obstante, de acuerdo a la teoría de variable compleja el  $\Phi(0,0)$  no está definido (Brown y Churchill, 2004); (Markushevich, 1970).

**PROBLEMAS**

**7.1** El estudio y análisis de las series de tiempo ha constituido ser uno de los campos de conocimientos que hoy por hoy ha tenido una gran importancia, debido al hecho de las necesidades que el mundo actual requiere del pronóstico de variables ambientales, económicas, sociales, entre otras.

Uno de los más básicos modelos matemáticos empleados en el pronóstico es el conocido modelo de promedios móviles (Box *et al.*, 1994), y cuyo modelo matemático es:

$$y[n + 1] = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{N-1} x[n - k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{7.113}$$

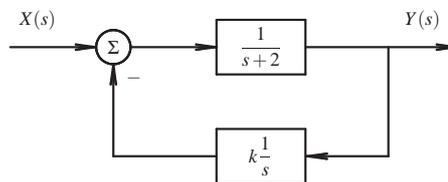
donde el parámetro  $N$  representa el número de datos presente y pasados a emplear para poder brindar un pronóstico del próximo período,  $x[n - k]$  para todo  $0 \leq k \leq N-1$  representa los datos presentes y pasados de la variable registrada, e  $y[n + 1]$  es la respuesta del modelo que constituye el pronóstico de la variable en el próximo período.

El modelo matemático mostrado por la Ecuación (7.113) es lo que se conoce como un sistema LDCID definido en el dominio discreto, el cual puede ser analizado desde la perspectiva de los sistemas lineales.

Para el sistema mostrado, determine:

- a) función de transferencia del sistema;
- b) respuesta en frecuencia del sistema, considerando a  $N$  impar;
- c) respuesta en frecuencia del sistema y su representación gráfica, para el caso particular  $N = 5$ ;

**7.2** Sea el sistema LDCID definido en el dominio del tiempo continuo mostrado en la Figura 7.10. Si considera a la constante  $k \in \mathbb{R}$  y positiva. Entonces, para el sistema de la figura determine:



**Figura 7.10.** Sistema con realimentación negativa

- a) función de transferencia del sistema;
- b) rango de valores de  $k$  que garanticen la estabilidad del sistema;
- c) respuesta en frecuencia del sistema para los valores de  $k$  en donde el sistema es estable.

**7.3** Sea un sistema LDCID definido en el dominio discreto y físicamente realizable, es decir, con respuesta impulsiva  $h[n]$  de rango real, es decir,  $h[n] : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ , y con función de transferencia  $H(z)$  conocida. Demuestre que la magnitud de la respuesta en frecuencia es una función par de la variable independiente  $\Omega$ , y la fase de la respuesta en frecuencia es una función impar de  $\Omega$ .

## EJERCICIOS PROPUESTOS

**7.4** Empleando el método gráfico, determine la respuesta en frecuencia, en magnitud y en fase, de la función

$$g(s) = 1 - s, \quad \forall s \in \mathbb{C}. \quad (7.114)$$

Para esto y a modo de sugerencia, represente su magnitud y fase para los valores de frecuencias 0,01 rad/s; 0,1 rad/s; 1 rad/s; 10 rad/s y 100 rad/s.

Explique sus resultados detalladamente, y compárelos con la respuesta obtenida mediante la evaluación de la función para las frecuencias sugeridas.

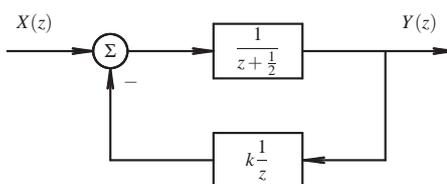
**7.5** Sea un sistema LDCID definido en el dominio del tiempo continuo. Si la función de transferencia del sistema en el plano  $S$  es

$$H(s) = \frac{s}{(s+4)} + \frac{s+1}{s^2+2s+5}, \quad \forall \text{Re}[s] > -1. \quad (7.115)$$

Entonces, determine:

- respuesta en frecuencia del sistema para  $\omega_0 = 4$  rad/s por métodos analíticos;
- respuesta en frecuencia del sistema para  $\omega_0 = 4$  rad/s por métodos gráfico;
- respuesta en frecuencia del sistema en el dominio discreto, si el sistema es discretizado mediante integración trapezoidal o también denominada transformación bilineal, con un período de discretización  $T = 10^{-3}$  s. Para esto implemente el código Scilab™ a fin de determinar la respuesta en frecuencia del sistema.

**7.6** Sea el sistema LDCID definido en el dominio discreto mostrado en la figura



**Figura 7.11.** Sistema realimentado negativamente definido en el plano  $Z$

Para el sistema de la Figura 7.11, determine:

- función de transferencia del sistema;
- rango de valores de  $k$  que garantice la estabilidad del sistema;
- respuesta en frecuencia del sistema para  $0 < \Omega \leq 2\pi$ ;
- respuesta en frecuencia del sistema para valores de  $\Omega = 2\pi n/20$ , para todo  $n = 1, 2, \dots, 20$ , empleando el Scilab™.

## CAPÍTULO 8

---

### DIAGRAMA DE BODE

---

El mundo que nos rodea no es suficiente para hacer de la vida una experiencia agradable, se requiere además de espiritualidad y voluntad.

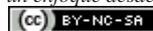
—Ebert Brea



Hendrik Wade Bode

Una de las representaciones de respuesta en frecuencia más empleada en la ingeniería, es la ampliamente conocida representación en *Diagrama de Bode*. Sin embargo, el concepto de respuesta en frecuencia estudiado en el Capítulo 7 permite al analista apreciar su concepto, más allá de su definición.

*Análisis de Sistemas Lineales Asistido con Scilab™, un enfoque desde la Ingeniería Eléctrica. Primera Edición.* Por Ebert Brea.



por Ebert Brea, 2014.

Como fue claramente presentado en el Capítulo 7, la respuesta en frecuencia, en magnitud y en fase, proporciona la información suficiente para determinar la respuesta en régimen permanente del sistema LDCID bajo estudio, cuando éste es excitado por una señal sinusoidal, a través de los mismos principios estudiados en la Sección 7.2 del Capítulo 7.

En este capítulo se desarrollarán los conceptos que permitirán al lector construir e interpretar uno de los diagramas más empleados en el análisis de los sistemas desde la perspectiva de la frecuencia.

Es oportuno destacar que Hendrik Wade Bode<sup>14</sup> fue quien desarrolló en diagrama que lleva su nombre. Bode fue un ingeniero, investigador, inventor, autor y científico de origen Americano y ascendencia alemana. Además se le atribuye ser el pionero de la teoría de control moderna, con lo cual revolucionó el campo de la electrónica y las telecomunicaciones con sus patentes.

En lo que resta del capítulo se introducirá las siguientes secciones: en la Sección 8.1 se establecerán algunas definiciones necesarias que deben ser enunciadas a fin de poder construir los diagramas de Bode; en la Sección 8.2 se estudiarán los factores lineal y cuadrático a los efectos de poder establecer los criterios de construcción del diagrama de Bode en magnitud, además se mostrará un método de construcción del diagrama en magnitud de Bode; en la Sección 8.3 se presentarán las expresiones empleadas para la determinación de la fase de los factores lineal y cuadrático, así como un método para la construcción del diagrama en fase de Bode; en la Sección 8.4 se aplicarán los diagramas de Bode para el cálculo de la respuesta permanente de un sistema LDCID ante excitaciones sinusoidales. Finalmente, son presentados algunos ejercicios y problemas propuestos a ser resueltos por el lector.

## 8.1 DEFINICIONES PRELIMINARES

Existen un conjunto de definiciones que son relevantes para la construcción de los diagramas de Bode, la cuales serán mostradas en esta sección.

**Definición 8.1 (Octava)** *Sea una frecuencia cualquiera  $\omega_0$ . Se dice que otro valor de frecuencia  $\omega_1$  está a una octava por encima de  $\omega_0$ , si  $\omega_1 = 2\omega_0$ . Esto implica que para determinar las octavas en la cual están separadas dos frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , debe establecerse en cuanto duplica una de la otra, es decir,*

$$\Delta_o = \log_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} \text{ oct}, \quad (8.1)$$

donde  $\Delta_o$  denota las octavas (oct) entre  $\omega_1$  y  $\omega_2$ .

**Observación 8.1** *Si  $\Delta_o = \log_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$ , entonces, se dice que  $\omega_2$  está por encima de  $\omega_1$  en  $\Delta_o$ . Por el contrario, si  $\Delta_o = \log_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} < 0$ , entonces, se puede asegurar que  $\omega_2$  está por debajo de  $\omega_1$  en  $\Delta_o$ .*

**Definición 8.2 (Década)** *Sea una frecuencia cualquiera  $\omega_0$ . Se dice que otro valor de frecuencia  $\omega_1$  está a una década por encima de  $\omega_0$ , si  $\omega_1 = 10\omega_0$ . Más aún, las décadas*

<sup>14</sup>Hendrik Wade Bode, nació en Madison, Wisconsin, EE.UU., el 24 de diciembre de 1905, y falleció el 21 de junio de 1982. EL retrato fue obtenido de <https://commons.wikimedia.org/>

entre dos frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  se determinan a través de

$$\Delta_d = \log_{10} \frac{\omega_2}{\omega_1} \text{ déc}, \quad (8.2)$$

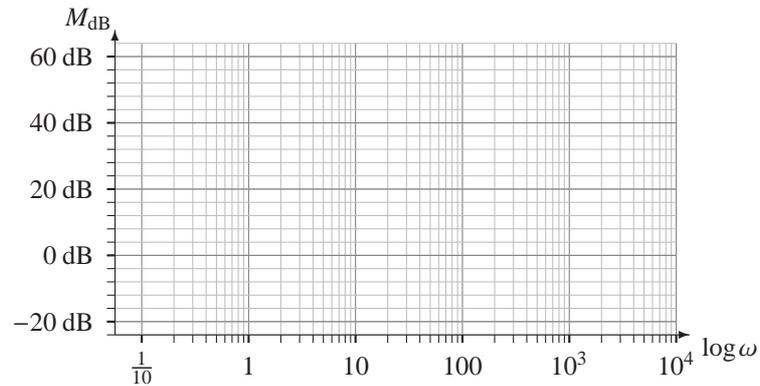
donde  $\Delta_d$  denota las décadas (déc) entre  $\omega_1$  y  $\omega_2$ .

**Observación 8.2** Si  $\Delta_d = \log_{10} \frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$ , entonces, se dice que  $\omega_2$  está por encima de  $\omega_1$  en  $\Delta_d$ . Mientras que si  $\Delta_d = \log_{10} \frac{\omega_2}{\omega_1} < 0$ , se puede afirmar entonces que  $\omega_2$  está por debajo de  $\omega_1$  en  $\Delta_d$ .

**Observación 8.3** Las Definiciones 8.1 y 8.2 requieren que los valores de frecuencia sean estrictamente positivo, lo cual se ajusta al dominio de definición del diagrama de Bode, es decir, en para todo  $\omega \in \mathbb{R}_+$ , donde  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ .

**Definición 8.3 (decibel)** Sea  $M$  la magnitud de una variable. Se dice que la magnitud de  $M$  expresada en decibel, la cual es representada por dB, es

$$M_{\text{dB}} = 10 \log_{10}(M^2) = 20 \log_{10}(M). \quad (8.3)$$



**Figura 8.1.** Ejemplo de un sistema de coordenadas semilogarítmico para la representación de la magnitud

La Figura 8.1 muestra un sistema de coordenadas semilogarítmico, los cuales serán ampliamente empleados en la representación del diagrama de Bode, en donde el eje horizontal cuantifica el logaritmo decimal de la frecuencia en rad/s, mientras que el eje vertical representa la magnitud medida en dB de la función de transferencia bajo estudio.

Es oportuno señalar que para el estudio del diagrama de Bode, se empleará la forma canónica de los factores lineal y cuadrático, en virtud de que todo polinomio  $P(s)$  de grado  $q+n$  puede ser expresado en el producto de sus factores lineales y cuadráticos. Es decir,

$$P(s) = \sum_{i=0}^{q+n-1} a_{n-i} s^{n-i} = K s^q \prod_{i=0}^{m-1} \left(1 + \frac{s}{a_i}\right) \prod_{i=0}^{(n-m)/2} \left(1 + 2\xi_i \frac{s}{b_i} + \frac{s^2}{b_i^2}\right), \quad \forall s \in \mathbb{C}, \quad (8.4)$$

donde  $K \in \mathbb{R}$  es la constante que surge de haber expresado el polinomio  $P(s)$  sus factores canónicos;  $s^q$  representa un factor de grado  $q$  en el origen;  $m$  representa el número de factores lineal en su forma canónica;  $a_i \in \mathbb{R}$  coeficientes que definen los factores lineales;

y  $b_i \in \mathbb{R}$  coeficientes que definen los factores cuadráticos. Note que en la Ecuación (8.4),  $(n - m)$  es un número par.

**Observación 8.4** *Un factor cuadrático se identifica por poseer raíces complejas conjugadas, debido a que en el caso de ser reales, entonces serían dos factores lineales, es decir,  $(1 + \frac{s}{a_i})^2$ .*

## 8.2 DIAGRAMA EN MAGNITUD

En esta sección se estudiará el método de contribución de cada factor de la función de transferencia definida para una sistema LDCID en el dominio continuo.

Es oportuno señalar que la función  $\log(x)$  denotará al logaritmo decimal o base 10, es decir,

$$\log(x) = \log_{10}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+. \quad (8.5)$$

### 8.2.1 Factor lineal

Sea la función  $G(s) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$G(s) = 1 + \frac{s}{a}, \quad \forall s \in \mathbb{C}, \quad (8.6)$$

donde  $a \in \mathbb{R}$  es la denominada frecuencia de corte o frecuencia de esquina.

Al hacer  $s = j\omega$  en la Ecuación (8.6), se tiene que<sup>15</sup>

$$G(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{a}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+.$$

Sea  $M$  la magnitud de  $G(j\omega)$ , es decir,

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = +\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{a^2}}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+.$$

la cual al ser expresada en dB se tiene

$$M_{\text{dB}}(\omega) = 20\log_{10} M(\omega) = 10\log \left[ 1 + \frac{\omega^2}{a^2} \right], \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+. \quad (8.7)$$

**8.2.1.1 Análisis asintótico** Un punto de vista en el análisis de la respuesta en frecuencia es el análisis asintótico, en donde se debe determinar el comportamiento del factor, para los casos extremos de frecuencias.

#### Caso $0 < \omega \ll a$

En el caso cuando  $0 < \omega \ll a$ , por ejemplo,  $\omega$  está a frecuencias menores de una década de  $a$ , se tiene que

$$\lim_{\omega \downarrow 0} M_{\text{dB}}(\omega) = 10\log(1) \text{ dB} = 0 \text{ dB}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+.$$

<sup>15</sup> $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ .

**Caso  $\omega = a$**

Si el caso es que  $\omega = a$ , se tiene que

$$M_{dB}(a) = 10 \log(2) \text{ dB} \cong 3 \text{ dB}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+.$$

**Caso  $\omega \gg a$**

En este caso, se considera que una frecuencia es mucho mayor que  $a$  si está al menos a una década.

$$M_{dB}(\omega) \cong 20 \log\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+. \tag{8.8}$$

La Ecuación (8.8) muestra que variaciones de décadas entre una frecuencia y otra, implica que los cambios en la magnitud son de aproximadamente igual a 20 dB, es decir, la asíntota viene dada por una recta de pendiente de 20 dB/déc  $\cong 6$  dB/oct, si es representado en un sistema de coordenadas semilogarítmico.

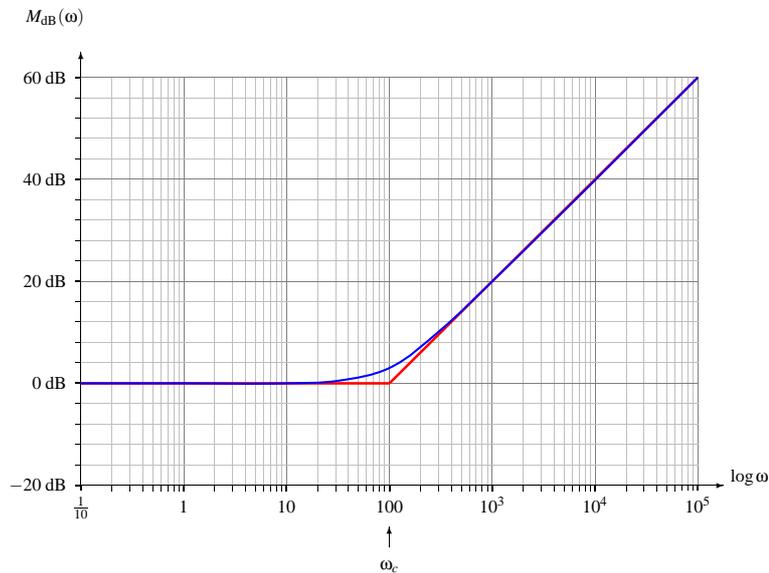
Este hecho puede ser verificado al evaluar el cambio de magnitud entre  $\omega_1 = 10a$  y  $\omega_2 = 100a$ , los cuales corresponden a

$$\Delta M_{dB}(\omega) = 20 \log\left(\frac{\omega_2}{a}\right) - 20 \log\left(\frac{\omega_1}{a}\right). \tag{8.9}$$

Al sustituir  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , en la Ecuación (8.9), se obtiene que

$$\Delta M_{dB}(\omega) = 20 \log\left(\frac{100a}{a}\right) \text{ dB} - 20 \log\left(\frac{10a}{a}\right) \text{ dB} = 20 \text{ dB}. \tag{8.10}$$

La Ecuación (8.10) significa que a lo largo de la asíntota se produce un cambio en la magnitud de 20 dB/déc.



**Figura 8.2.** Diagrama de Bode en magnitud real y asíntotico de un factor lineal

La Figura 8.2 ilustra un ejemplo del diagrama de Bode asintótico en magnitud del factor lineal, el cual es mostrado mediante la línea poligonal. Además, en la figura se muestra el diagrama de Bode real en magnitud ese mismo factor lineal, el cual corresponde a la curva suave, y cuya expresión matemática corresponde a

$$G(s) = 1 + \frac{s}{100}, \quad \forall s \in \mathbb{C}. \quad (8.11)$$

Adicionalmente, en la Figura 8.2 se muestra la frecuencia de corte o frecuencia de esquina, la cual es indicada con  $\omega_c = 100$  rad/s.

Es importante hacer notar que en el caso de que el factor lineal no contenga término independiente, éste tiene su frecuencia de corte en  $\omega = 0$  rad/s, y esta frecuencia de corte no puede ser representada en la escala logarítmica.

Al determinar la magnitud en decibelios, de un factor definido por

$$G(s) = s, \quad \forall s \in \mathbb{C},$$

se tiene que ésta viene dada por

$$M_{dB}(\omega) = 20 \log(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+.$$

Note que a la frecuencia de  $\omega = 1$  rad/s, la magnitud del factor  $G(s) = s$  en decibelios es de  $M_{dB}(\omega)|_{\omega=1} = 0$  dB.

Además, es importante destacar que la magnitud de  $G(j\omega)$  en decibelios, determinada por la Ecuación (8.2.1.1), tiene una pendiente  $20$  dB/déc  $\cong 6$  dB/oct en el sistema de coordenadas semilogarítmico.

## 8.2.2 Factor cuadrático

Sea la función  $G(s) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , la cual está definida por

$$G(s) = 1 + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}, \quad \forall s \in \mathbb{C}, \quad (8.12)$$

donde  $0 < \xi < 1$  es el llamado factor de amortiguamiento y  $\omega_n$  es la llamada frecuencia natural.

Al sustituir  $s$  por  $j\omega$  en la Ecuación (8.12) se tiene

$$G(j\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+. \quad (8.13)$$

Sea  $M$  la magnitud de la función  $G(j\omega)$ , la cual a partir de la Ecuación (8.13) arroja

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \left[ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right]^{1/2}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+,$$

que al expresarla en dB se obtiene

$$M_{dB}(\omega) = 10 \log \left[ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right], \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+. \quad (8.14)$$

**8.2.2.1 Análisis asintótico** Empleando el método de análisis como en el factor lineal, se puede destacar tres casos:

**Caso**  $0 < \omega \ll \omega_n$

De modo semejante al caso del factor lineal, cuando  $\omega \ll \omega_n$

$$\lim_{\omega \downarrow 0} M_{\text{dB}}(\omega) = 10 \log(1) \text{dB} = 0 \text{ dB}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+.$$

**Caso**  $\omega = \omega_n$

Para este caso, al hacer  $\omega = \omega_n$  en la Ecuación (8.14) se tiene

$$M_{\text{dB}}(\omega_n) = 10 \log(2\xi)^2 \text{ dB} = 20 \log(2\xi) \text{ dB}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+. \quad (8.15)$$

Note que de acuerdo a la Ecuación (8.15), si  $0 < \xi < 1/2$ , entonces  $M_{\text{dB}}(\omega_n) < 0$ . Mientras que si  $1/2 < \xi < 1$ , entonces  $M_{\text{dB}}(\omega_n) > 0$ . En el caso en que  $\xi = 1/2$ ,  $M_{\text{dB}}(\omega_n) = 0$ .

**Caso**  $\omega \gg \omega_n$

Por último, para el caso cuando  $\omega \gg \omega_n$  la Ecuación (8.14) se puede expresar como

$$M_{\text{dB}}(\omega) \cong 10 \log\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 = 40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+. \quad (8.16)$$

La Ecuación (8.16) muestra que variaciones de décadas entre una frecuencia y otra, implica que los cambios en la magnitud son de aproximadamente igual a 40 dB, es decir, la asíntota está definida por una recta de pendiente de 40 dB/déc que equivale aproximadamente 12 dB/oct cuando es representado en el sistema de coordenadas semilogarítmico.

La Figura 8.3 de la página 204 muestra el diagrama de Bode asintótico en magnitud, denotado  $\hat{M}_{\text{dB}}(\omega)$  y representado mediante la línea poligonal, y dos casos del diagrama de Bode en magnitud real, denotado  $M_{\text{dB}}(\omega)$  y mostrado en colores azul y verde, correspondientes a  $\xi \in \{0, 25; 0, 75\}$ , para una frecuencia natural  $\omega_n = 100$  rad/s. Note que la asíntota ubicada para  $\omega > \omega_n$  presenta una pendiente de 40 dB/déc.

### 8.2.3 Factor cuadrático con raíces imaginarias puras

El caso de un factor cuadrático con raíces imaginarias puras corresponden cuando  $\xi = 0$ . Sin embargo, debido a su particularidad será estudiado detalladamente.

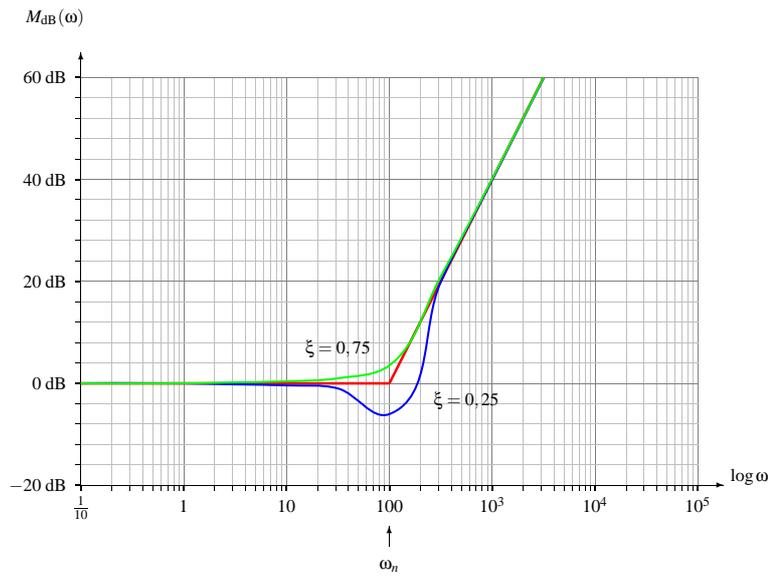
Sea la función  $G(s) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , la cual está dada por

$$G(s) = 1 + \frac{s^2}{\omega_n^2}, \quad \forall s \in \mathbb{C}, \quad (8.17)$$

donde  $\omega_n$  es la llamada frecuencia natural.

Al evaluar la Ecuación (8.17) para  $s = j\omega$  se obtiene que

$$G(j\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+. \quad (8.18)$$



**Figura 8.3.** Diagrama de Bode en magnitud real y asintótico de un factor cuadrático

Note que la expresión matemática dada por la Ecuación (8.18) es real, y en consecuencia la magnitud de  $G(j\omega)$  debe ser obtenida a través de su valor absoluto, es decir,

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right|, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+, \quad (8.19)$$

resultando

$$M(\omega) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2, & \forall 0 < \omega \leq \omega_n; \\ \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - 1, & \forall \omega > \omega_n. \end{cases} \quad (8.20)$$

Al expresar la magnitud en dB, se tiene

$$M_{dB}(\omega) = \begin{cases} 20 \log \left[ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right], & \forall 0 < \omega \leq \omega_n; \\ 20 \log \left[ \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - 1 \right], & \forall \omega > \omega_n. \end{cases} \quad (8.21)$$

**8.2.3.1 Análisis asintótico** En relación al análisis asintótico, se cuenta con dos casos, los cuales se estudiará a partir de la Ecuación (8.21).

**Caso**  $0 < \omega \ll \omega_n$

En este caso, el término  $0 < \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \ll 1$ , lo que implica que

$$\lim_{\omega \downarrow 0} M_{dB}(\omega) = \lim_{\omega \downarrow 0} 20 \log \left[ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right] = 20 \log(1) \text{ dB} = 0 \text{ dB}. \quad (8.22)$$

**Caso**  $\omega \gg \omega_n$

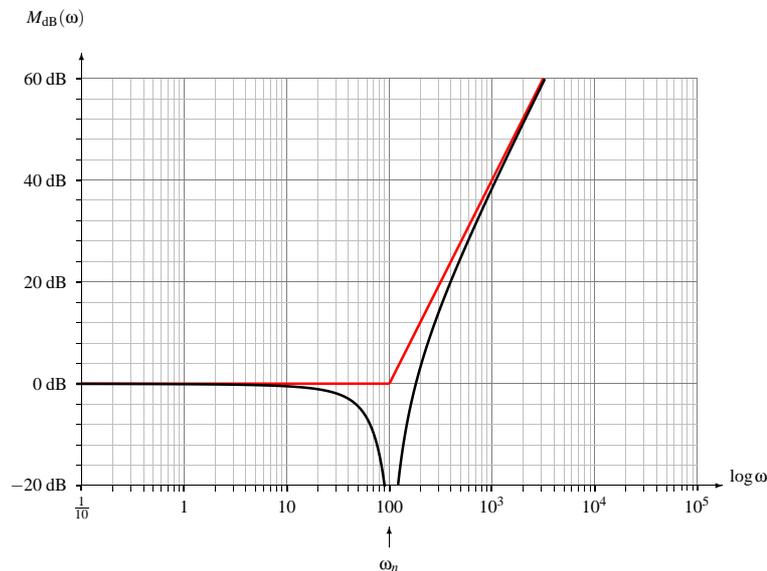
Si  $\omega \gg \omega_n$ , entonces  $\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \gg 1$ , y en consecuencia

$$M_{dB}(\omega) = 20 \log \left[ \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - 1 \right] \cong 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = 40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right), \quad (8.23)$$

lo que implica que si  $\omega$  se separa por encima de  $\omega_n$  en una década, entonces se produce un cambio en la amplitud de 40 dB, teniendo entonces una pendiente de 40 dB/déc  $\cong$  12 dB/oct.

**Caso**  $\omega = \omega_n$

Note que cuando  $\omega = \omega_n$ , de acuerdo a la Ecuación (8.19) la magnitud es cero, y su  $M_{dB}(\omega)$  no está definido. No obstante, ésta se aproxima a  $-\infty$  en la medida en que  $\omega$  se acerca a  $\omega_n$  tanto por la izquierda como por la derecha de  $\omega_n$ .



**Figura 8.4.** Diagrama de Bode en magnitud real y asintótico de un factor cuadrático con raíces imaginarias puras

La Figura 8.4 de la página 205 muestra el diagrama de Bode asintótico en magnitud a través de la línea poligonal, y el diagrama de Bode real en magnitud mediante la curva suave. Note la discontinuidad que se presenta en la curva real para la frecuencia natural  $\omega_n = 100$  rad/s.

Al comparar la Figura 8.3 con la Figura 8.4, se puede inducir que en la medida de que el factor de amortiguamiento  $\xi$  se aproxima a cero, el diagrama de Bode en magnitud se aproxima a la curva mostrada en la Figura 8.4.

### 8.2.4 Factor $G(s) = s^n$

Sea entonces la función  $G(s) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$G(s) = s^n, \quad \forall s \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_+. \quad (8.24)$$

Al sustituir en la Ecuación (8.24) a  $s$  por  $j\omega$  se tiene que

$$G(j\omega) = (j\omega)^n, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}_+, \quad (8.25)$$

y en consecuencia,

$$M(\omega) = \omega^n, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}_+. \quad (8.26)$$

Al expresar la magnitud en dB se tiene que

$$M_{\text{dB}}(\omega) = 20n \log(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}_+. \quad (8.27)$$

Note que si  $\omega_2$  está separada en una década de una cualquier frecuencia  $\omega_1$ . Entonces, se produce un cambio en magnitud igual a  $20n$  dB. Es decir, una pendiente en la magnitud de  $20n$  dB/déc.

Por otra parte, observe que

$$M_{\text{dB}}(1) = 0 \text{ dB}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+. \quad (8.28)$$

La Figura 8.5 de la página 207 representa los casos cuando  $n = 1$  y  $n = 2$  de un factor con raíz en el origen. Observe que ambas curvas se interceptan en el punto  $(1, 0)$ , y además para el caso  $G(s) = s$  se produce una pendiente de  $20$  dB/déc, mientras que para el caso  $G(s) = s^2$  se tiene una pendiente de  $40$  dB/déc.

### 8.2.5 Factor $G(s) = s^{1/n}$

Considere la función  $G(s) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

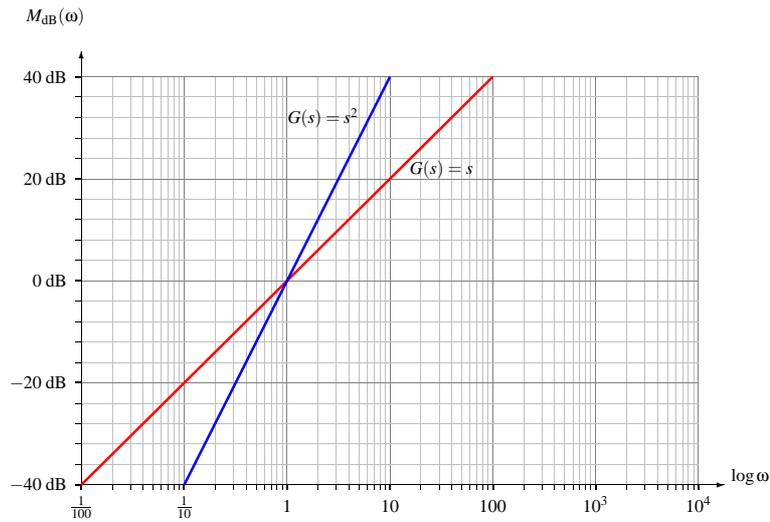
$$G(s) = s^{1/n}, \quad \forall s \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_+. \quad (8.29)$$

Al sustituir en la Ecuación (8.29)  $s$  por  $j\omega$  para luego determinar su magnitud, se tiene que

$$M(\omega) = \omega^{1/n}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}_+. \quad (8.30)$$

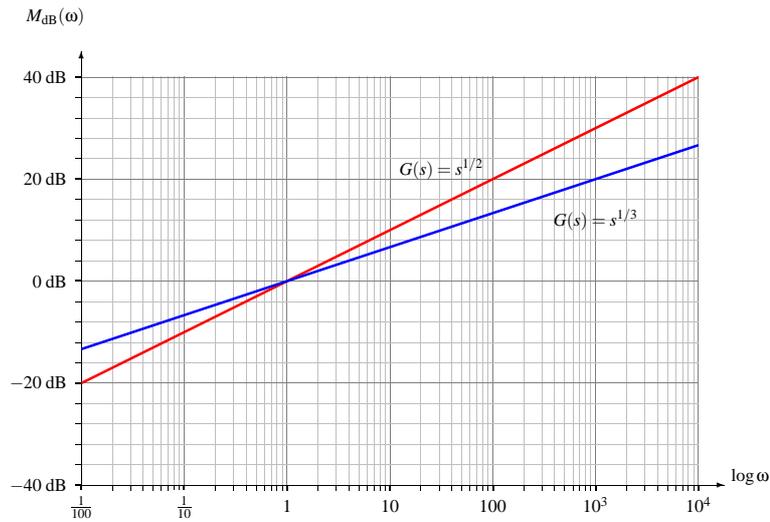
Al expresar la magnitud en dB, se tiene que

$$M_{\text{dB}}(\omega) = \frac{20}{n} \log(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}_+. \quad (8.31)$$



**Figura 8.5.** Diagrama de Bode en magnitud real para los casos  $G(s) = s$  y  $G(s) = s^2$

Ejecutando un análisis similar a como el realizado en el Apartado 8.2.4, se tiene que la pendiente de este factor es de  $\frac{20}{n} \frac{\text{dB}}{\text{déc}}$  para  $n$  entero positivo.



**Figura 8.6.** Diagrama de Bode en magnitud real para los casos  $G(s) = s^{1/2}$  y  $G(s) = s^{1/3}$

Note que en la Figura 8.6, la curva en color rojo, correspondiente al factor  $G(s) = s^{1/2}$ , su pendiente es de 10 dB/déc. Mientras la curva correspondiente al factor  $G(s) = s^{1/3}$  tiene una pendiente de  $\frac{20}{3} \frac{\text{dB}}{\text{déc}}$ .

Por otra parte, observe que toda la familia de factores  $G(s) = s^{1/n}$  se intercepta en el punto (1,0).

### 8.2.6 Método para construcción de diagrama de Bode en magnitud

Conocida la función de transferencia  $H(s)$  de un sistema LDCID definido en el dominio continuo, ejecute el siguiente método para así construir su diagrama de Bode en magnitud o también denominado amplitud.

**Método 8.1 (Construcción del diagrama de Bode en magnitud)** *Sea la función de transferencia  $H(s)$ , ejecute:*

*Paso 1. Exprese la función de transferencia en factores lineales y cuadráticos, si aplica.*

*Paso 2. Para cada factor que contenga su término independiente, normalice cada uno de los términos independientes de cada factor, a fin de expresarlo en su forma canónica.*

*Paso 3. Sustituya  $s$  por  $j\omega$  en  $H(s)$ .*

*Paso 4. Calcule la magnitud de  $M(\omega) = |H(j\omega)|$ .*

*Paso 5. Calcule  $M_{dB}(\omega) = 20\log_{10} M(\omega)$ .*

*Paso 6. Dibuje las asíntotas de cada factor de acuerdo a lo estudiado en los apartados anteriores.*

*Paso 7. Sume las asíntotas de los factores y dibuje la curva real de magnitud.*

#### ■ EJEMPLO 8.1

Sea un sistema LDCID definido en el dominio continuo, y con función de transferencia

$$H(s) = 10 \frac{s+10}{s+100}, \quad \forall \text{Re}[s] > -100. \quad (8.32)$$

Para el sistema definido, determine su diagrama de Bode en magnitud real y asíntótico.

#### Solución

Al aplicar el Método 8.1 de la página 208, se tiene que debido a que la función de transferencia está expresada en factores, se procede a expresarla en su forma canónica, quedando

$$H(s) = \frac{1 + \frac{s}{10}}{1 + \frac{s}{100}}, \quad \forall \text{Re}[s] > -100, \quad (8.33)$$

y en consecuencia

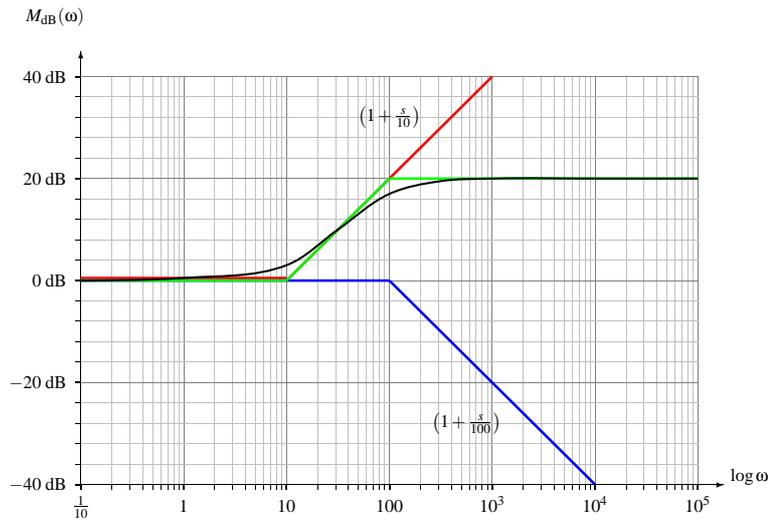
$$H(j\omega) = \frac{1 + j\frac{\omega}{10}}{1 + j\frac{\omega}{100}}, \quad \forall \omega > 0. \quad (8.34)$$

De la Ecuación (8.34), se tiene que

$$M(\omega) = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{10}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{100}\right)^2}}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+, \quad (8.35)$$

y entonces se arroja que

$$M_{dB}(\omega) = 10 \log \left[ 1 + \left(\frac{\omega}{10}\right)^2 \right] - 10 \log \left[ 1 + \left(\frac{\omega}{100}\right)^2 \right], \quad \forall \omega > 0. \quad (8.36)$$



**Figura 8.7.** Diagrama de Bode en magnitud real y asintótico para el Ejemplo 8.1

La Figura 8.7 muestra los diagramas asintóticos en magnitud de cada factor. Note que la contribución del cero  $(1 + s/10)$  se muestra en color rojo, el cual muestra una frecuencia de corte  $\omega_1 = 10$  rad/s. Mientras la contribución del polo  $(1 + s/100)$  se presenta en la figura en color azul, y cuya frecuencia de corte es  $\omega_2 = 100$  rad/s. Además, la figura muestra tanto la curva asintótica,  $\hat{M}_{dB}(\omega)$ , proveniente de sumar las curvas asintóticas del cero y el polo, en color verde, como la curva real en magnitud,  $M_{dB}(\omega)$ , la cual es dibujada en negro.

Es importante señalar que el Scilab™ se basa en la construcción del diagrama de Bode en función de la frecuencia medida en Hz. No obstante, empleando un escalamiento a través de la asignación computacional

$$s := s/2\pi, \quad (8.37)$$

es posible alterar el eje logarítmico horizontal de forma tal que el diagrama de Bode obtenido mediante en Scilab™ se ajuste a rad/s en lugar de Hz.

La Figura 8.8 muestra los comandos Scilab™ que permiten construir el diagrama real de Bode de amplitud.

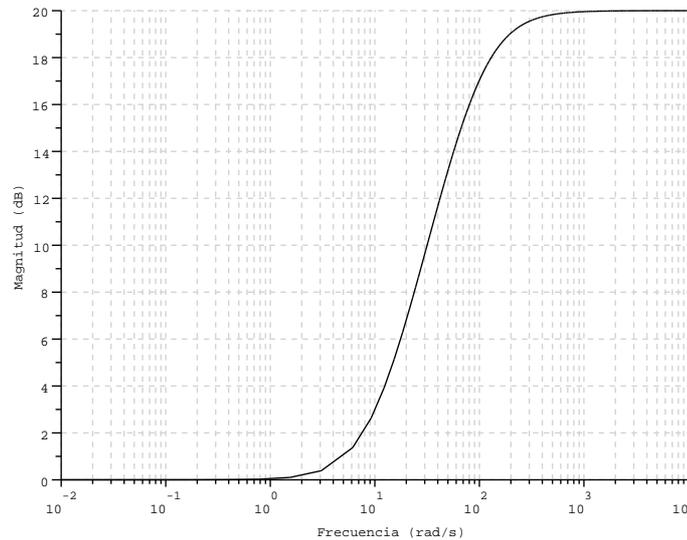
```

-->s=poly(0,'s');
-->s=s/(2*pi);
-->H=syslin('c',10*(s+10)/(s+100));
-->gainplot(H,0.01,10000);
-->xtitle('','Frecuencia (rad/s)','Magnitud (dB)')

```

**Figura 8.8.** Comandos Scilab™ para construir el diagrama real de Bode en magnitud del Ejemplo 8.1

Por otra parte, la Figura 8.9 representa el diagrama real de Bode en amplitud, que se obtiene al aplicar los comandos Scilab™ mostrados en la Figura 8.8.



**Figura 8.9.** Diagrama de Bode en magnitud obtenido mediante los comandos mostrados en la Figura 8.8

### ■ EJEMPLO 8.2

Sea un sistema un sistema LDCID definido en el dominio continuo y función de transferencia definida por

$$H(s) = 10^4 \frac{s + 20}{(s + 80)(s^2 + 600s + 90000)}, \quad \forall \text{Re}[s] > -80. \quad (8.38)$$

Para el sistema definido, determine su diagrama de Bode en magnitud real y asintótico.

**Solución**

Lo primero que debe hacerse es determinar las raíces del factor  $(s^2 + 600s + 90000)$ , las cuales, luego de algunas operaciones, se concluye que corresponden a una raíz doble de valor  $-300$ . En consecuencia, la función de transferencia del sistema puede ser expresada como

$$H(s) = 10^4 \frac{s + 20}{(s + 80)(s + 300)^2}, \quad \forall \text{Re}[s] > -80. \quad (8.39)$$

Al escribir los factores en su forma canónica, se tiene que

$$H(s) = \frac{1}{36} \frac{1 + \frac{s}{20}}{\left(1 + \frac{s}{80}\right)\left(1 + \frac{s}{300}\right)^2}, \quad \forall \text{Re}[s] > -80. \quad (8.40)$$

De la Ecuación (8.40) se puede concluir que la función de transferencia posee un cero simple con frecuencia de corte ubicada en  $\omega_1 = 20$  rad/s, un polo simple con frecuencia de corte  $\omega_2 = 80$  rad/s, y un polo doble con frecuencia de corte  $\omega_3 = 300$  rad/s.

Evaluando la Ecuación (8.40) en  $s = j\omega$  y calculando su magnitud se tiene

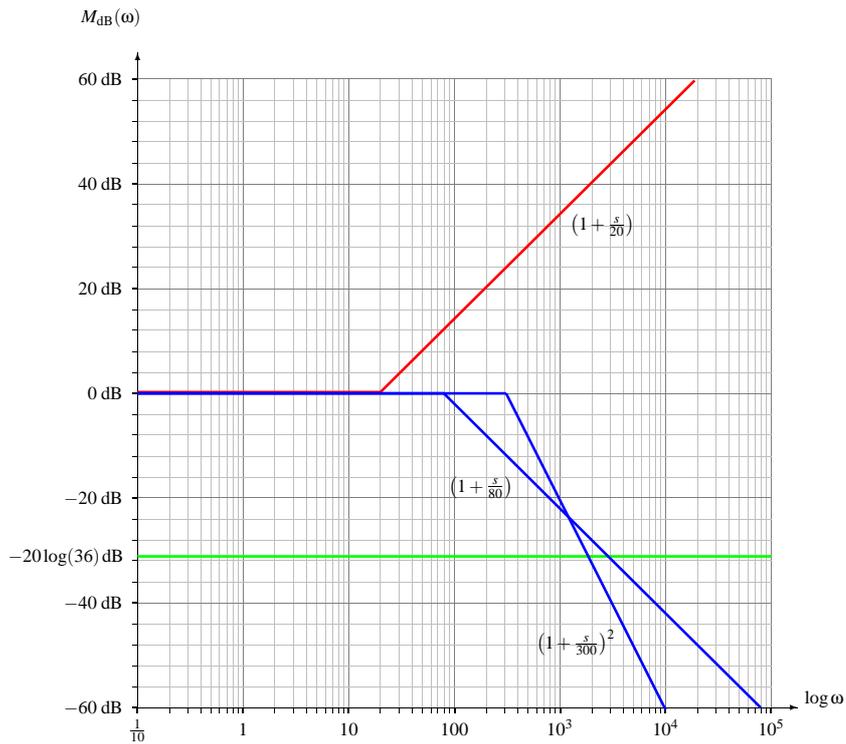
$$M(\omega) = \frac{1}{36} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{20}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{80}\right)^2} \left(1 + \left(\frac{\omega}{300}\right)^2\right)}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+. \quad (8.41)$$

Expresando la magnitud en dB se obtiene que

$$M_{dB}(\omega) = 10 \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{20}\right)^2\right) - 20 \log(36) - 10 \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{80}\right)^2\right) - 20 \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{300}\right)^2\right), \quad \forall \omega > 0. \quad (8.42)$$

La Figura 8.10 de la página 212 muestra la contribución de cada factor definido por la expresión en magnitud en dB dado por la Ecuación (8.42). Note que la contribución del cero simple  $\left(1 + \frac{\omega}{20}\right)$  presentado en color rojo, tiene como frecuencia de esquina  $\omega_1 = 20$  rad/s y posee una asíntota de pendiente 20 dB/déc. En la misma figura también se muestra la contribución del polo simple  $\left(1 + \frac{\omega}{80}\right)$  en color azul, con frecuencia de esquina  $\omega_2 = 80$  rad/s y con una pendiente inclinada de  $-20$  dB/déc, además del polo doble  $\left(1 + \frac{\omega}{300}\right)^2$  en color azul, con frecuencia de corte  $\omega_2 = 300$  rad/s y con una pendiente inclinada de  $-40$  dB/déc. Observe además que en la Figura 8.10 se muestra la constante del denominador de la función de transferencia igual a 36 y cuya magnitud es de  $-20 \log(36)$  dB.

La Figura 8.11 de la página 213 presenta la curva real en negro,  $M_{dB}(\omega)$ , y la curva asintótica en color verde,  $\hat{M}_{dB}(\omega)$ , del diagrama de Bode en magnitud.



**Figura 8.10.** Diagrama de Bode asintótico correspondiente a cada factor definido en la función de transferencia del Ejemplo 8.2

Observe que en la Figura 8.11 se han denotado sobre el diagrama asintótico en magnitud de Bode los puntos A, B y C, los cuales su primera componente de coordenadas está expresado en rad/s, y su segunda componente está definida en dB.

Punto A

Es claro determinar que  $A = (20, -20\log(36))$ .

Punto B

La primera componente de punto A corresponde a la frecuencia de corte  $\omega_2 = 80$  rad/s, y como segunda componente de acuerdo al diagrama asintótico es

$$M_{dB}(80) = -20\log(36) \text{ dB} + 20 \frac{\text{dB}}{\text{déc}} \log\left(\frac{80}{20}\right) \text{ déc}, \tag{8.43}$$

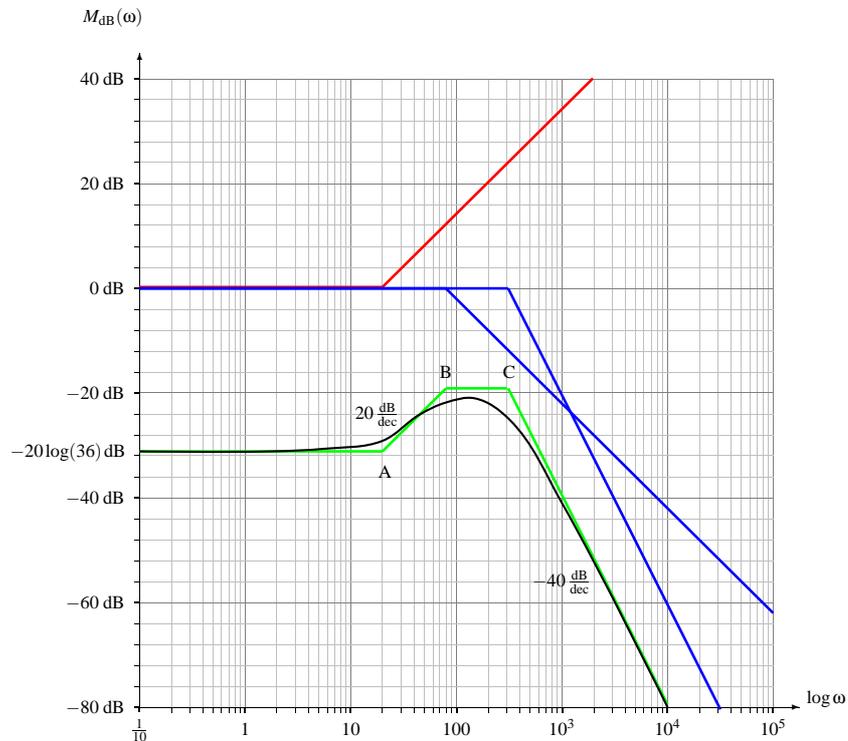
la cual luego de algunos procedimientos algebraicos se tiene que

$$M_{dB}(80) = -20\log(9) \text{ dB} \cong -19,0849 \text{ dB}. \tag{8.44}$$

En consecuencia  $B = (80, -20\log(9))$ .

Punto C

Claramente el punto C = (300, -20 log(9)).

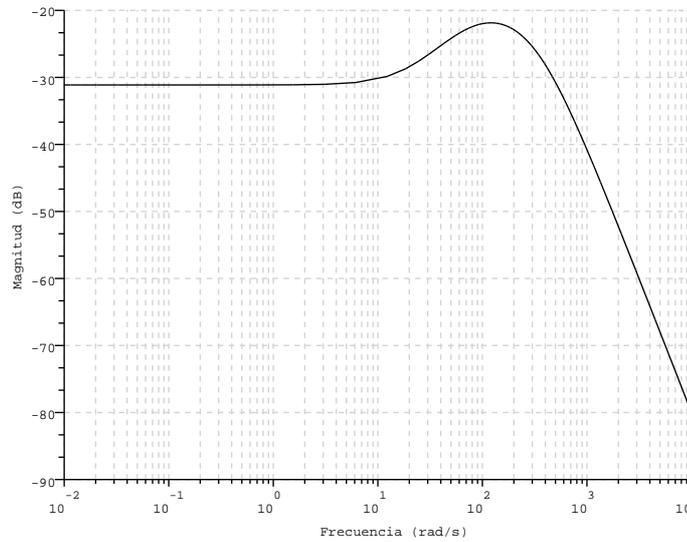


**Figura 8.11.** Diagrama de Bode asintótico y real de la suma de los factores de acuerdo a la función de transferencia definida en el Ejemplo 8.2

La Figura 8.12 presenta los comandos Scilab™ empleados para generar el diagrama de Bode real de amplitud, y cuyo resultado se muestra en la Figura 8.13 de la página 214.

```
-->s=poly(0,'s');
-->s=s/(2*%pi);
-->H=syslin('c',10^4*(s+20)/((s+80)*(s+300)^2));
-->gainplot(H,0.01,10000);
-->xtitle('',"Frecuencia (rad/s)","Magnitud (dB)")
```

**Figura 8.12.** Comandos Scilab™ para construir el diagrama real de Bode en magnitud del Ejemplo 8.2



**Figura 8.13.** Diagrama de Bode en magnitud obtenido mediante los comandos mostrados en la Figura 8.12

■ EJEMPLO 8.3

Sea un sistema LDCID definido en el dominio continuo y con función de transferencia

$$H(s) = \frac{20s}{s^2 + 20s + 200}, \quad \forall \text{Re}[s] > -10. \quad (8.45)$$

Para el sistema definido, determine su diagrama de bode en magnitud real y asintótico.

**Solución**

Como preliminar del estudio, debe determinarse si las raíces del polinomio cuadrático son complejas.

Al determinar las raíces del polinomio  $s^2 + 20s + 200$ , se tiene que éstas son  $s = -10 \pm j10$ , lo cual corrobora que el factor es un factor cuadrático, y en consecuencia la función de transferencia expresada en su forma canónica está dada por

$$H(s) = \frac{s}{10 \left( 1 + 2 \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{s}{\sqrt{200}} \right) + \left( \frac{s}{\sqrt{200}} \right)^2 \right)}, \quad \forall \text{Re}[s] > -10, \quad (8.46)$$

de donde se puede identificar que el factor cuadrático tiene como parámetros:  $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0,7071$  y  $\omega_n = \sqrt{200} \text{ rad/s} \cong 14,1421 \text{ rad/s}$ .

Al evaluar la Ecuación 8.46 en  $s = j\omega$ , se obtiene que

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{10 \left( 1 - \left( \frac{\omega}{\sqrt{200}} \right)^2 + j2 \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\omega}{\sqrt{200}} \right) \right)}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (8.47)$$

y como resultado de esto, se tiene que la magnitud es

$$M(\omega) = \frac{|\omega|}{10 \sqrt{\left( 1 - \left( \frac{\omega}{\sqrt{200}} \right)^2 \right)^2 + 2 \left( \frac{\omega}{\sqrt{200}} \right)^2}}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (8.48)$$

Al expresar la magnitud en dB para todo  $\omega \in \mathbb{R}_+$  se tiene que

$$M_{dB}(\omega) = 20 \log(\omega) - 20 - 10 \log \left[ \left( 1 - \left( \frac{\omega}{\sqrt{200}} \right)^2 \right)^2 + 2 \left( \frac{\omega}{\sqrt{200}} \right)^2 \right]. \quad (8.49)$$

La Figura 8.14 de la página 216 expone los factores definidos por la función de transferencia, y cuya expresión matemática está definida por la Ecuación (8.49). Observe de la figura que el cero está representado en color rojo, mientras que la contribución de los polos complejos conjugados está mostrado en color azul. Además se muestra en color verde la contribución de la constante.

La Figura 8.15 de la página 217 muestra la curva asintótica,  $\hat{M}_{dB}(\omega)$ , en color verde, y la real del diagrama de Bode en magnitud,  $M_{dB}(\omega)$ , en negro. Note que en la figura también se denotan los puntos A, B y C; y cuyas coordenadas son:

Punto A

A=(1/10,-40)

Punto B

El punto B, tiene como frecuencia  $\sqrt{200}$  rad/s, y su segunda componente medida estableciendo como referencia el punto A viene dado por

$$M_{dB}(\omega_B) = -40 \text{ dB} + 20 \frac{\text{dB}}{\text{déc}} \log \left( \frac{\sqrt{200}}{0,1} \right) \text{ déc} = 10 \log(2) \text{ dB} \cong 3,0103 \text{ dB},$$

y como resultado de lo anterior el punto B = ( $\sqrt{200}$ ,  $10 \log(2)$ ).

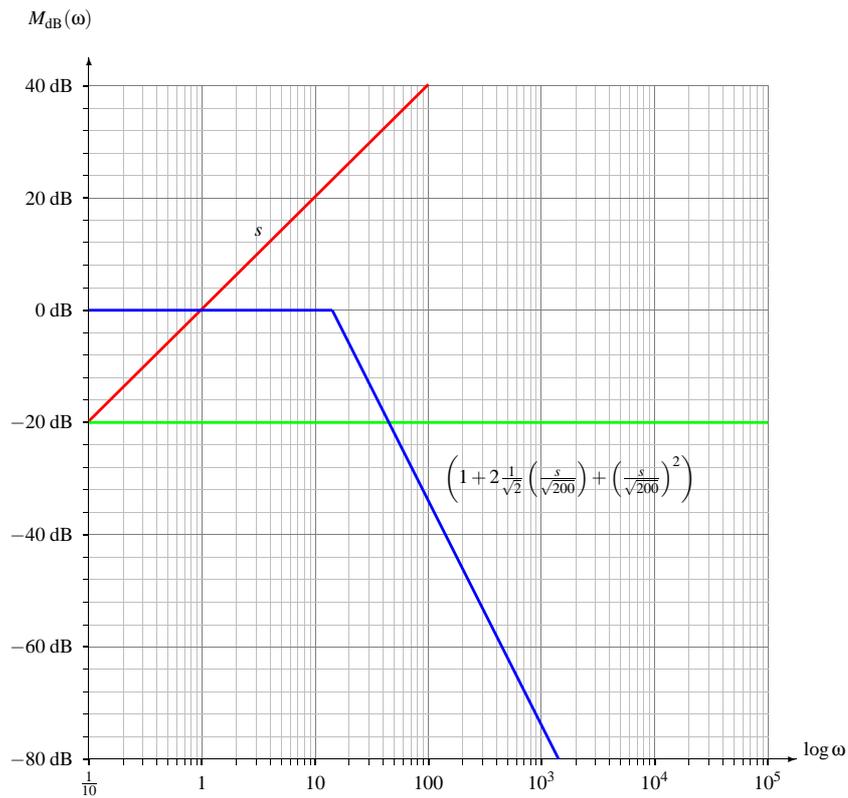
Punto C

El punto C tiene como segunda componente 0. Esto significa que se debe determinar el número de décadas del punto C con relación a  $\sqrt{200}$  rad/s.

$$\Delta\omega_d = -\frac{1}{20} \frac{\text{déb}}{\text{dB}} [-40 - 10 \log(2)] \text{ dB} = (2 + \log(2^{1/2})) \text{ déb}.$$

Aplicando la Ecuación (8.2) de la página 199, se tiene que

$$\log \left( \frac{\omega_C}{\omega_B} \right) = \Delta\omega_d, \quad (8.50)$$



**Figura 8.14.** Diagrama de Bode asintótico correspondiente a cada factor definido en la función de transferencia del Ejemplo 8.3

lo que arroja al despejar  $\omega_C$  que

$$\omega_C = \omega_B 10^{\Delta\omega_d} = \sqrt{200} 10^{2+\log(2^{1/2})} \text{ rad/s} = 2000 \text{ rad/s} \quad (8.51)$$

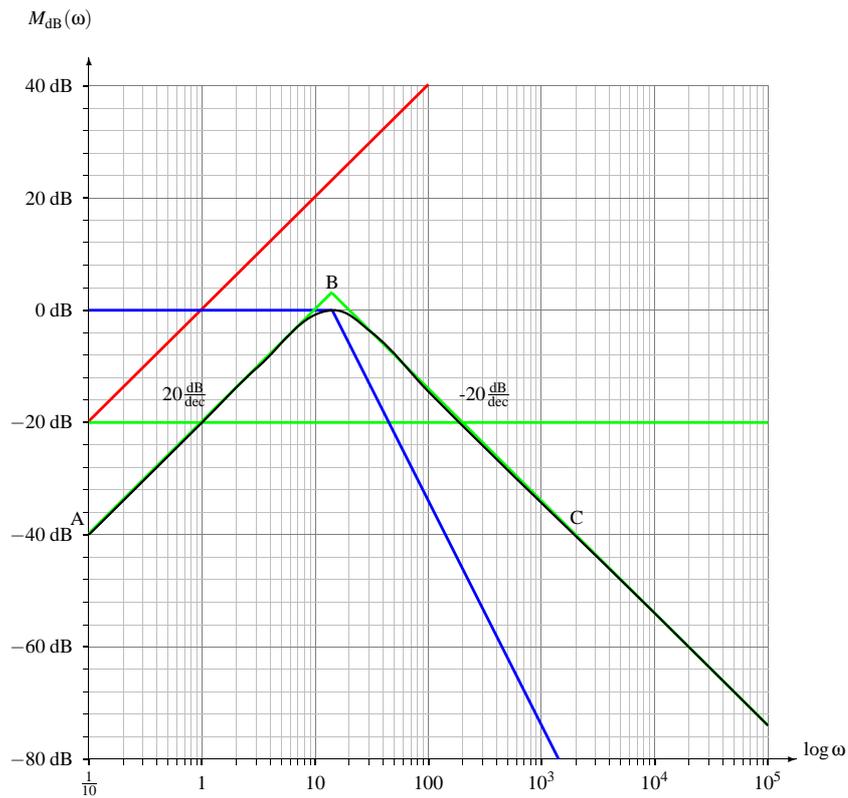
Por otra parte, empleando el Scilab™, se tiene que al aplicar los comandos presentados en la Figura 8.16 de la página 217, el Scilab™ arroja como resultado lo mostrado en la Figura 8.17 de la página 218.

### 8.3 DIAGRAMA EN FASE

Siguiendo el mismo modo de estudio que el empleado en el diagrama en magnitud, se analizarán los factores lineal, cuadrático,  $s^n$  y  $s^{1/n}$  desde el punto de vista de sus fases.

Debe tomarse en cuenta que debido al hecho de que la representación del diagrama de Bode se realiza como función de valores positivos de la frecuencia, la fase se medirá con respecto al semieje real positivo y en sentido antihorario.

La Figura 8.18 de la página 218 muestra un ejemplo de un sistema de coordenadas semilogarítmica empleado para representar la respuesta de la fase medida en rad de un sistema en función del logaritmo de la frecuencia angular medida en rad/s.



**Figura 8.15.** Diagrama de Bode asintótico y real de la suma de los factores de acuerdo a la función de transferencia del Ejemplo 8.3

```

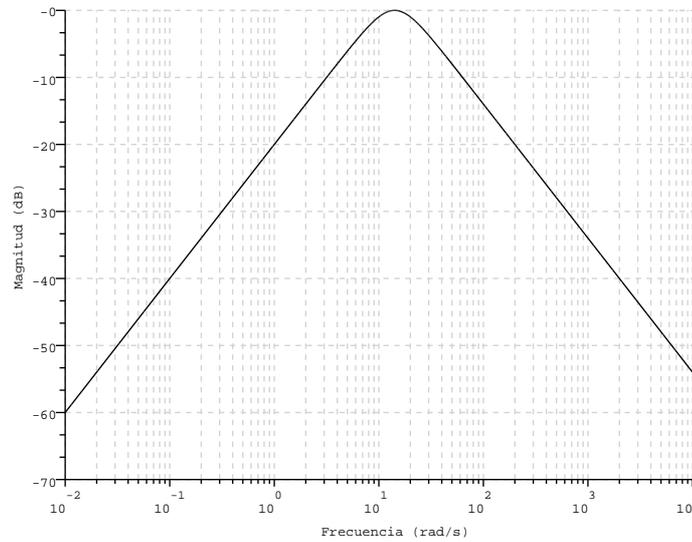
-->s=poly(0,'s');
-->s=s/(2*pi);
-->H=syslin('c',20*s/(s^2+20*s+200));
-->gainplot(H,0.01,10000);
-->xtitle('','Frecuencia (rad/s)','Magnitud (dB)')
    
```

**Figura 8.16.** Comandos Scilab™ para construir el diagrama real de Bode en magnitud del Ejemplo 8.3

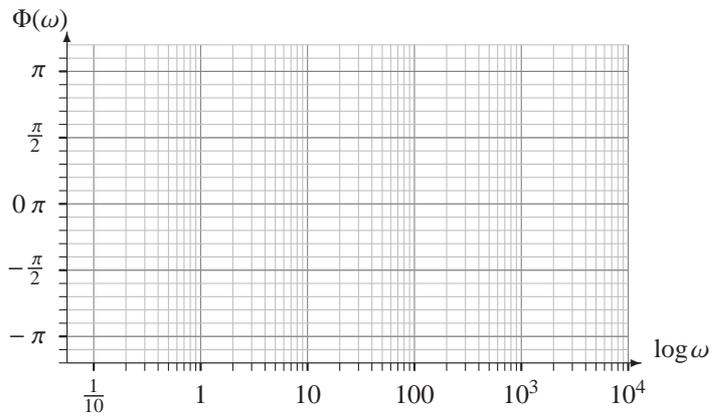
### 8.3.1 Factor lineal

Sea la función  $G(s) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$G(s) = 1 + \frac{s}{a},$$



**Figura 8.17.** Diagrama de Bode en magnitud obtenido mediante los comandos mostrados en la Figura 8.16



**Figura 8.18.** Ejemplo de un sistema de coordenadas semilogarítmico para la representación en fase

donde  $a$  es la conocida frecuencia de corte.

Como la parte real de  $G(j\omega)$  es positiva, la fase de  $G(j\omega)$  se determina a través de

$$\text{Arg}[G(j\omega)] = \Phi(\omega) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad \forall \omega > 0. \quad (8.52)$$

**8.3.1.1 Análisis asintótico** Ahora, al hacer el análisis asintótico de la Ecuación (8.52) se tienen los siguientes casos:

**Caso  $0 < \omega \ll a$**

Para valores tendientes a cero, la fase se aproxima a cero. Esto implica que una asíntota está definida por un rango de cero.

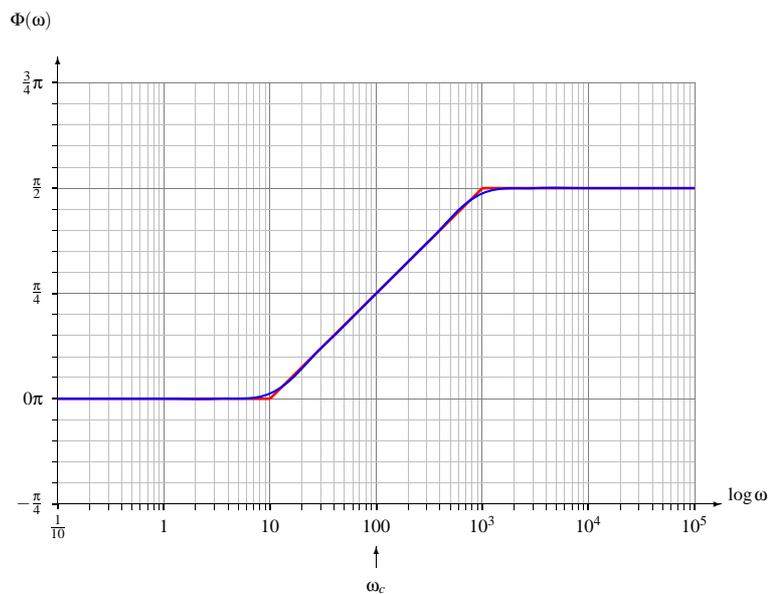
Si  $\omega = \frac{10}{a}$  rad/s, es decir, está a una década por debajo de  $a$ , la fase  $\Phi(\omega) \approx 0$ .

**Caso  $\omega = a$**

En este caso, evidentemente  $\Phi(a) = \pi/4$ .

**Caso  $\omega \gg a$**

Cuando  $\omega \gg a$ , es decir, al menos una década por encima de  $a$ , la fase  $\Phi(\omega) \approx \pi/2$ . En consecuencia, la curva en fase tiene otra asíntota en un valor en fase de  $\pi/2$ .



**Figura 8.19.** Diagrama de Bode en fase real y asintótico de un factor lineal

La Figura 8.19 presenta la curva real, denotada como  $\Phi(\omega)$ , y asintótica, denotada como  $\hat{\Phi}(\omega)$ , del diagrama de Bode en fase de un factor lineal. Observe además que la pendiente de la curva asintótica, la cual es representada por una curva poligonal, entre 10 rad/s y  $10^3$  rad/s es de  $\frac{\pi}{4} \frac{\text{rad}}{\text{déc}}$ .

### 8.3.2 Factor cuadrático

Considere nuevamente la función  $G(s) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$G(s) = 1 + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}, \quad (8.53)$$

donde recuerde que  $0 < \xi < 1$  es el llamado factor de amortiguamiento y  $\omega_n$  es la llamada frecuencia natural.

Al sustituir una vez más a  $s$  por  $j\omega$  en la Ecuación (8.53) se tiene

$$G(j\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}, \quad (8.54)$$

lo que implica que la fase de la Ecuación (8.54) es

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right), & \forall \omega < \omega_n; \\ \frac{\pi}{2}, & \forall \omega = \omega_n; \\ \pi + \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right), & \forall \omega > \omega_n. \end{cases} \quad (8.55)$$

**8.3.2.1 Análisis asintótico** Del análisis asintótico se tiene entonces los siguientes casos:

**Caso**  $0 < \omega \ll \omega_n$

Obviamente, para el caso en que  $0 < \omega \ll \omega_n$ , se tiene que  $\frac{\omega}{\omega_n} \approx 0$ , lo cual permite asegurar que  $\Phi(\omega) \approx 0$  en su asíntota inferior.

**Caso**  $\omega = \omega_n$

En este caso, la función

$$G(j\omega) \Big|_{\omega=\omega_n} = j2\xi,$$

lo cual asegura que  $\Phi(\omega) \Big|_{\omega=\omega_n} = \pi/2$ , debido al hecho de que  $\xi > 0$ .

**Caso**  $\omega \gg \omega_n$

Si  $\omega > \omega_n$ , la parte real de  $G(j\omega)$  es negativa, lo cual implica que

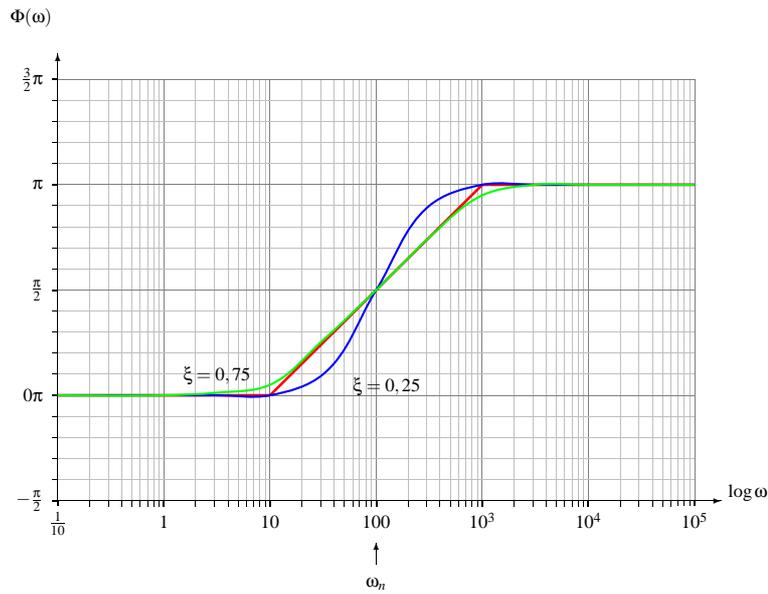
$$\Phi(\omega) = \pi + \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right). \quad (8.56)$$

De la Ecuación (8.56), se tiene que cuando  $\omega \gg \omega_n$ , la fracción  $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$ , lo cual se asegura que

$$\Phi(\omega) \approx \pi - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2\xi}{\frac{\omega}{\omega_n}}\right).$$

El límite cuando  $\frac{\omega}{\omega_n}$  tiene a infinito, es decir,

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \Phi(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[ \pi - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2\xi\omega_n}{\omega}\right) \right] = \pi.$$



**Figura 8.20.** Diagrama de Bode en fase real y asintótico de un factor cuadrático

La Figura 8.20 presenta la curva real,  $\Phi(\omega)$ , y asintótica,  $\hat{\Phi}(\omega)$ , del diagrama de Bode en fase del factor cuadrático estudiado. Observe además que la pendiente de la curva asintótica, la cual es representada por una curva poligonal, entre  $10\text{rad/s}$  y  $10^3\text{rad/s}$  es de  $\frac{\pi}{2} \frac{\text{rad}}{\text{dec}}$ .

### 8.3.3 Factor cuadrático con raíces imaginarias puras

Como fue descrito anteriormente, un factor cuadrático como raíces conjugadas imaginarias está definido por la Ecuación (8.17) de la página 203.

Por otra parte, la expresión matemática cuando  $G(s)$  es evaluada por  $s = j\omega$ , viene dada por

$$G(j\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+. \tag{8.57}$$

Debido a que el rango de la función  $G(j\omega)$  es real, el estudio de su fase está asociado al signo de  $G(j\omega)$ , en consecuencia,

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} 0, & \forall 0 < \omega < \omega_n; \\ \pi, & \omega > \omega_n. \end{cases} \quad (8.58)$$

Note que para el caso  $\omega = \omega_n$ , la fase no está definida debido al hecho de que su magnitud es cero.

### 8.3.4 Factor $G(s) = s^n$

Sea nuevamente la función  $G(s) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$G(s) = s^n, \quad \forall s \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}. \quad (8.59)$$

Ahora, al sustituir en la Ecuación (8.59)  $s$  por  $j\omega$  se obtiene que

$$G(j\omega) = (j\omega)^n = |\omega|^n e^{j(\frac{n\pi}{2} + \pi u(-\omega) + 2k\pi)}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}, \quad (8.60)$$

donde  $u(\cdot)$  denota la función escalón unitario y  $n \in \mathbb{Z}$ .

En consecuencia, el argumento principal de  $G(j\omega)$  es

$$\Phi(\omega) = \frac{n\pi}{2}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}. \quad (8.61)$$

De la Ecuación 8.61 se puede concluir que

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} 0, & \forall n = 4q; \\ \frac{\pi}{2}, & \forall n = 4q + 1; \\ \pi, & \forall n = 4q + 2; \\ \frac{3\pi}{2}, & \forall n = 4q + 3, \end{cases} \quad (8.62)$$

donde  $q \in \mathbb{N}$ .

### 8.3.5 Factor $G(s) = s^{1/n}$

Sea la función  $G(s) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$G(s) = s^{1/n}, \quad \forall s \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_+. \quad (8.63)$$

Al sustituir en la Ecuación (8.63)  $s$  por  $j\omega$  para luego determinar su fase (argumento principal), se tiene que

$$\Phi(\omega) = \frac{\pi}{2n}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}_+. \quad (8.64)$$

### 8.3.6 Método para construcción de diagrama de Bode en fase

Conocida la función de transferencia  $H(s)$  de un sistema LDCID definido en el dominio continuo, ejecute el siguiente método para así construir su diagrama de Bode en fase.

**Método 8.2 (Construcción del Diagrama de Bode en fase)** Sea la función de transferencia  $H(s)$ , ejecute:

- Paso 1. Expresar la función de transferencia en factores lineales y cuadráticos, si aplica.*
- Paso 2. Para cada factor que contenga su término independiente, normalice cada uno de los términos independientes de cada factor, a fin de expresarlo en su forma canónica.*
- Paso 3. Sustituir  $s$  por  $j\omega$  en  $H(s)$ .*
- Paso 4. Calcule la fase de  $H(j\omega)$ .*
- Paso 5. Dibuje las asíntotas de cada factor de acuerdo a lo estudiado en los apartes anteriores.*
- Paso 6. Sume las asíntotas de cada factor y dibuje la curva real.*

#### ■ EJEMPLO 8.4

Considere nuevamente el sistema descrito en el Ejemplo 8.1 de la página 208, el cual tiene como función de transferencia

$$H(s) = 10 \frac{s+10}{s+100}, \quad \forall \operatorname{Re}[s] > -100. \quad (8.65)$$

Para el sistema definido, determine su diagrama de Bode en fase real y asíntótico.

#### Solución

De acuerdo al Método 8.2 se tiene que la forma canónica de la función de transferencia es

$$H(s) = \frac{1+s/10}{1+s/100}, \quad \forall \operatorname{Re}[s] > -100. \quad (8.66)$$

Al sustituir  $s$  por  $j\omega$  en la Ecuación (8.66), se consigue que

$$H(\omega) = \frac{1+j\omega/10}{1+j\omega/100}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (8.67)$$

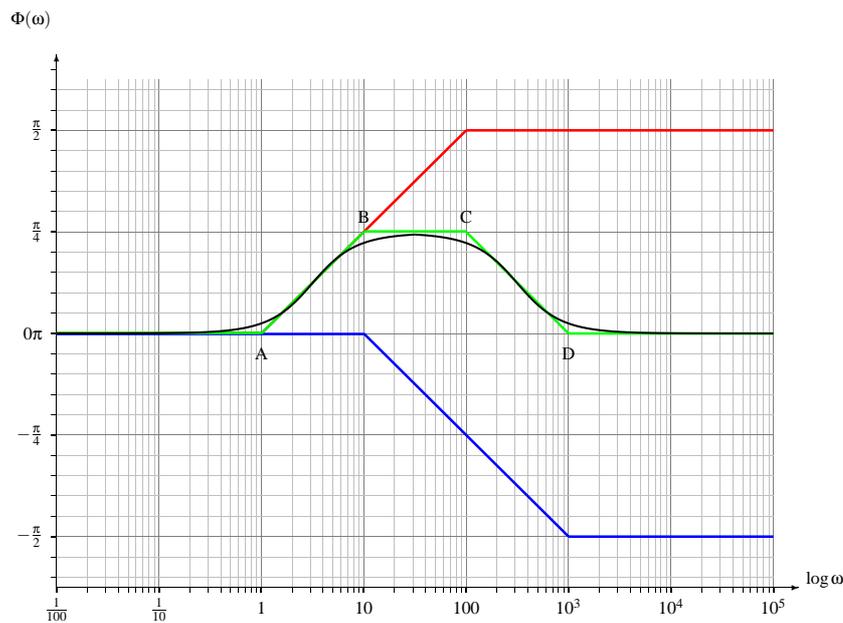
Quedando entonces la fase como

$$\Phi(\omega) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{10}\right) - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{100}\right), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+. \quad (8.68)$$

La Figura 8.21 de la página 224 muestra las contribuciones en fase del cero  $(1+s/10)$  en color rojo, y del polo  $(1+s/100)$  en color azul. Además de figura presenta el diagrama asíntótico en fase,  $\hat{\Phi}(\omega)$ , en color verde, y en negro es mostrado el diagrama real en fase  $\Phi(\omega)$ .

Por otra parte, en la Figura 8.21 se denotan los puntos A, B, C y D, y cuyas coordenadas son: A= (1,0); B= (10, $\pi/4$ ); C= (100, $\pi/4$ ) y D= (1000,0), donde la primera componente es medida en rad/s y la segunda componente en rad.

Mediante el Scilab™ puede obtenerse el diagrama de Bode, además del diagrama de Bode en amplitud.



**Figura 8.21.** Diagrama de Bode en fase real y asintótico del Ejemplo 8.4

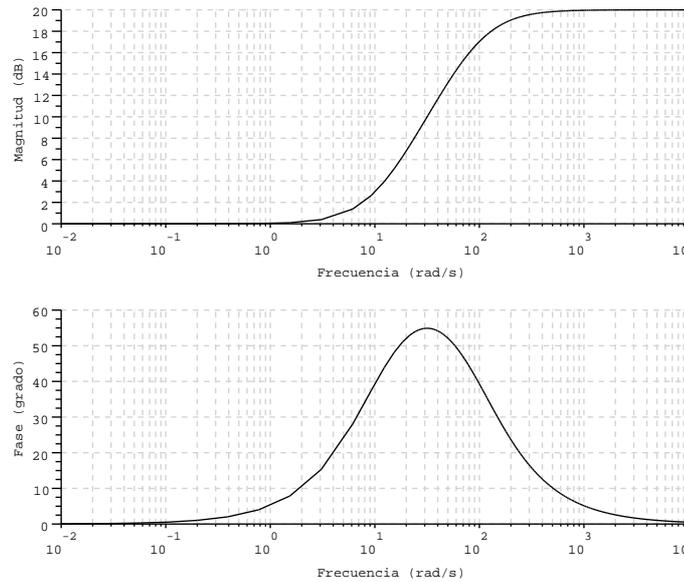
Para realizar las adaptaciones del diagrama de Bode con el objeto de que sus ejes sean escrito de acuerdo a las necesidades del idioma, además de que ambos dominios estén en rad/s, se debe ejecutar previamente el macro `bodew.sci`, el cual se describe su procedimiento de implementación y procedimiento para su ejecución en la Sección A.5 del Apéndice A.

Una vez ejecutado el macro `bodew.sci` dentro del ambiente del Scilab™, a través de los comandos mostrados en la Figura 8.22 se obtiene el diagrama real de Bode en magnitud y en fase del sistema.

```
-->s=poly(0,'s');
-->s=s/(2*%pi);
-->H=syslin('c',10*(s+10)/(s+100));
-->bodew(H,0.01,10000);
```

**Figura 8.22.** Comandos Scilab™ para construir el diagrama de Bode real en magnitud y fase del Ejemplo 8.4

La Figura 8.23 de la página 225 representa en su parte superior el diagrama de de Bode en magnitud, y en su parte inferior el diagrama de Bode en fase para el sistema bajo estudio. Note además que en la representación en fase, ésta es medida en grados.



**Figura 8.23.** Diagrama de Bode en magnitud y fase obtenidos mediante los comandos mostrados en la Figura 8.22

Es decir, en el caso de la Figura 8.23 el eje vertical correspondiente al diagrama de Bode en fase, mostrado en la parte inferior de la figura, está definido entre  $0^\circ$  y  $60^\circ$ .

■ **EJEMPLO 8.5**

Sea el sistema descrito en el Ejemplo 8.2 de la página 210. Determine su diagrama de Bode real y asíntotico en fase.

**Solución**

De acuerdo al Método 8.2 se debe expresar la función de transferencia en su forma canónica, para luego expresar su fase. Es decir,

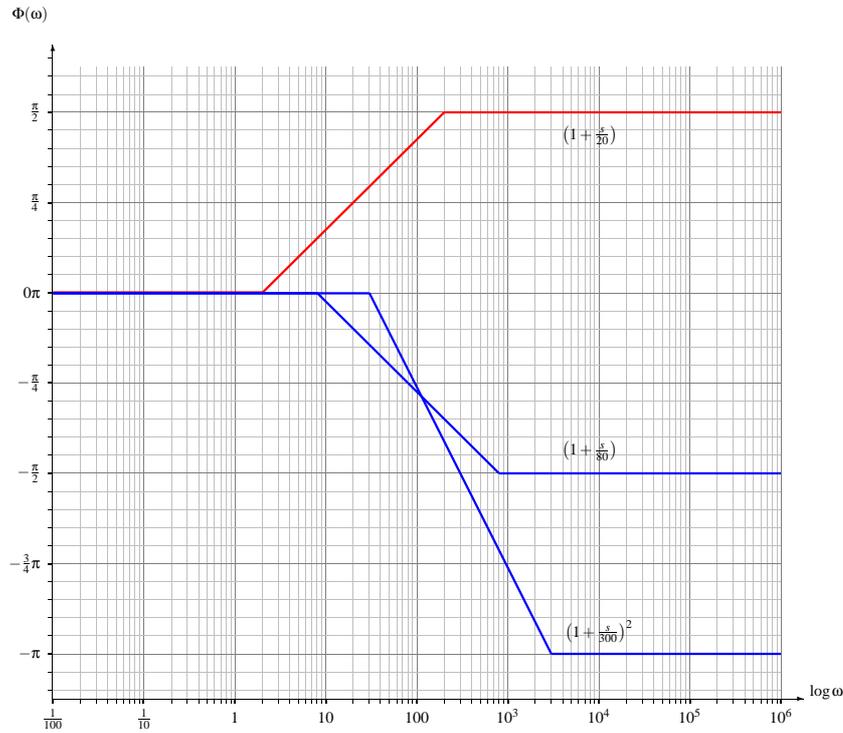
$$H(s) = \frac{1}{36} \frac{1 + \frac{s}{20}}{\left(1 + \frac{s}{80}\right)\left(1 + \frac{s}{300}\right)^2}, \quad \forall \text{Re}[s] > -80, \quad (8.69)$$

la cual al sustituir en la Ecuación (8.69) a  $s$  por  $j\omega$  se obtiene que

$$H(j\omega) = \frac{1}{36} \frac{1 + \frac{j\omega}{20}}{\left(1 + \frac{j\omega}{80}\right)\left(1 + \frac{j\omega}{300}\right)^2}, \quad \forall \text{Re}[s] > -80. \quad (8.70)$$

En consecuencia, la fase de la función de transferencia es

$$\Phi(\omega) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{20}\right) - \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{80}\right) - 2\text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{300}\right), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+. \quad (8.71)$$



**Figura 8.24.** Representación de los factores en fase asintótico del Ejemplo 8.5

La Figura 8.24 muestra la contribución en fase en el diagrama asintótico de Bode de cada uno de los factores, de acuerdo a la Ecuación (8.71). El cero  $\left(1 + \frac{s}{20}\right)$  es representado en la figura en color rojo, mientras la contribución de los polos  $\left(1 + \frac{s}{80}\right)$  y  $\left(1 + \frac{s}{300}\right)^2$  son mostrados en color azul.

Por otra parte, la Figura 8.25 de la página 228 son exhibidos tanto el diagrama de Bode en fase asintótico en color verde como el real en negro.

Además en la Figura 8.25 son denotados los puntos de cambios de pendiente en el diagrama asintótico, y cuyas coordenadas expresadas en rad/s para la primera componente y rad para la segunda componente. Para el cálculo de las coordenadas de los puntos, la componente de la fase que está sobre el diagrama asintótico corresponde a los valores de  $\hat{\Phi}(\omega)$  para  $\omega \in \{2, 8, 30, 200, 800, 3000\}$  en rad/s.

Note, que de acuerdo a la curva asintótica la pendiente de  $\hat{\Phi}(\omega)$  medida en  $\frac{\text{rad}}{\text{déc}}$  está dada por

$$\frac{\Delta\hat{\Phi}(\omega)}{\Delta\log\omega} = \begin{cases} 0, & \forall\omega \leq 2; \\ \frac{\pi}{4}, & \forall 2 < \omega \leq 8; \\ 0, & \forall 8 < \omega \leq 30; \\ -\frac{\pi}{2}, & \forall 30 < \omega \leq 200; \\ -\frac{3\pi}{4}, & \forall 200 < \omega \leq 800; \\ -\frac{\pi}{2}, & \forall 800 < \omega \leq 3000; \\ 0, & \forall\omega > 3000. \end{cases} \quad (8.72)$$

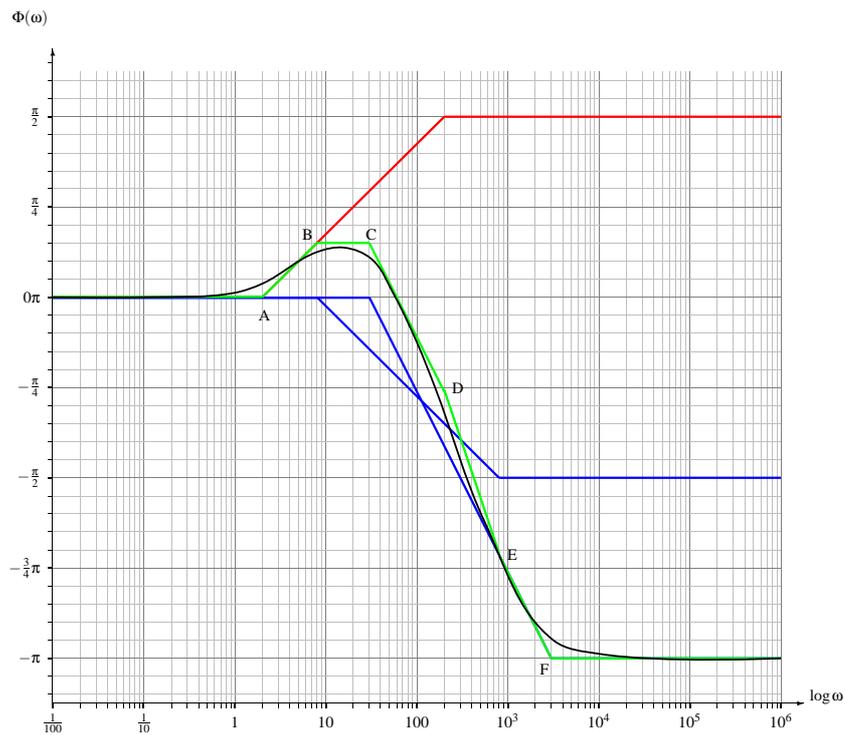
Entonces,  $\hat{\Phi}(\omega)$  toma los siguiente valores:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(2) &= 0 \text{ rad}; \\ \hat{\Phi}(8) &= \frac{\pi}{4} \frac{\text{rad}}{\text{déc}} \log(8/2) \text{ déc} = \frac{\pi}{2} \log(2) \text{ rad}; \\ \hat{\Phi}(30) &= \frac{\pi}{2} \log(2) \text{ rad}; \\ \hat{\Phi}(200) &= \frac{\pi}{2} \log(2) \text{ rad} - \frac{\pi}{2} \frac{\text{rad}}{\text{déc}} \log(200/30) \text{ déc} = \frac{\pi}{2} \log(3/10) \text{ rad}; \\ \hat{\Phi}(800) &= \frac{\pi}{2} \log(3/10) \text{ rad} - \frac{3\pi}{4} \frac{\text{rad}}{\text{déc}} \log(800/200) \text{ déc} = \frac{\pi}{2} \log(30/80) \text{ rad}; \\ \hat{\Phi}(3000) &= \frac{\pi}{2} \log(30/80) \text{ rad} - \frac{\pi}{2} \frac{\text{rad}}{\text{déc}} \log(3000/800) \text{ déc} = -\pi \text{ rad}. \end{aligned} \quad (8.73)$$

En consecuencia, de acuerdo a la Ecuación (8.73) las coordenadas de los puntos son:

$$\begin{aligned} A &= (2, 0); & B &= \left(8, \frac{\pi}{2} \log(2)\right); & C &= \left(30, \frac{\pi}{2} \log(2)\right); \\ D &= \left(200, \frac{\pi}{2} \log(3/10)\right); & E &= \left(800, \frac{\pi}{2} \log(30/80)\right); & F &= (3000, -\pi). \end{aligned}$$

La Figura 8.26 de la página 228 presenta los comandos Scilab™ requeridos para obtener el diagrama de Bode real en magnitud y en fase. Note además que el diagrama es construido mediante el comando `bodew`, el cual no es un comando original del Scilab™ y debe ser implementado según lo mostrado en la Sección A.5 del Apéndice A. No obstante, si se emplea el comando `bode(H, 0.01, 10000)` en lugar del comando `bodew(H, 0.01, 10000)` se obtiene el diagrama de Bode con los rótulos en los ejes generados por el Scilab™ en su forma original, aun cuando las gráficas de magnitud y fase son las mismas a la mostrada en la Figura 8.27 de la página 229.



**Figura 8.25.** Diagrama de Bode en fase real y asintótico del Ejemplo 8.5

```

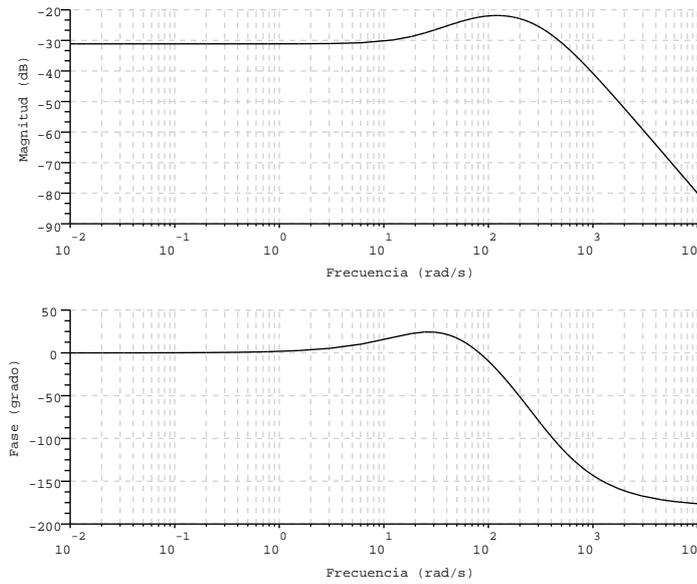
-->s=poly(0,'s');
-->s=s/(2*pi);
-->H=syslin('c',10^4*(s+20)/((s+80)*(s+300)^2));
-->bodew(H,0.01,10000);

```

**Figura 8.26.** Comandos Scilab™ para construir el diagrama de Bode real en magnitud y fase del Ejemplo 8.5

### ■ EJEMPLO 8.6

Sea el sistema descrito en el Ejemplo 8.3 de la página 214. Determine su diagrama de Bode real y asintótico en fase.



**Figura 8.27.** Diagrama de Bode en magnitud y fase obtenidos mediante los comandos mostrados en la Figura 8.26

**Solución**

De la función de transferencia del sistema del Ejemplo 8.3, se tiene que

$$H(s) = \frac{s}{10 \left( 1 + 2 \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{s}{\sqrt{200}} \right) + \left( \frac{s}{\sqrt{200}} \right)^2 \right)}, \quad \forall \text{Re}[s] > -10, \quad (8.74)$$

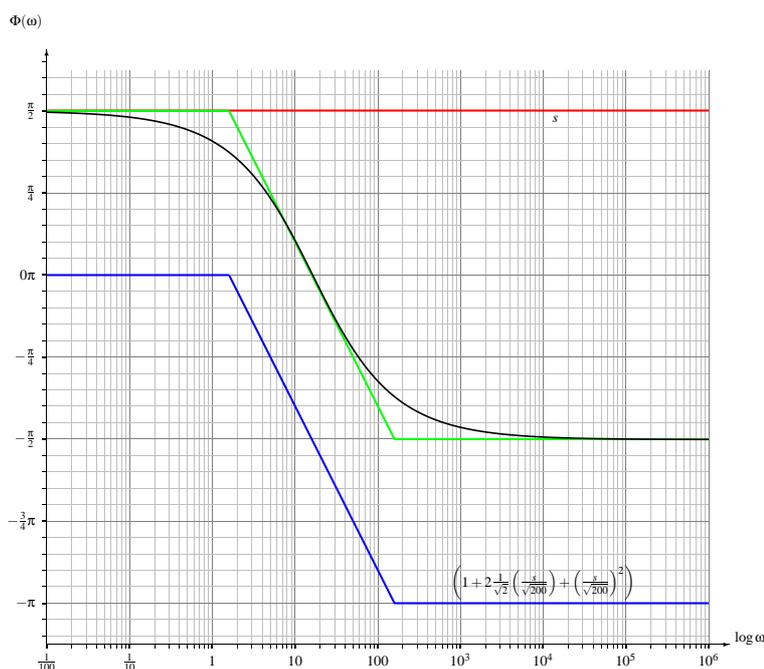
de donde se puede identificar claramente que el parámetro  $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Al evaluar la Ecuación (8.74) por  $j\omega$ , se obtiene

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{10 \left( 1 - \left( \frac{\omega}{\sqrt{200}} \right)^2 + j2 \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\omega}{\sqrt{200}} \right) \right)}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (8.75)$$

Al calcular la fase, se tiene que al aplicar Ecuación (8.55) en la Ecuación (8.75), se tiene que

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \text{tg}^{-1} \left( \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right), & \forall \omega < \omega_n; \\ 0, & \forall \omega = \omega_n; \\ -\frac{\pi}{2} - \text{tg}^{-1} \left( \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right), & \forall \omega > \omega_n. \end{cases} \quad (8.76)$$



**Figura 8.28.** Diagrama de Bode en fase real y asintótico del Ejemplo 8.6

```

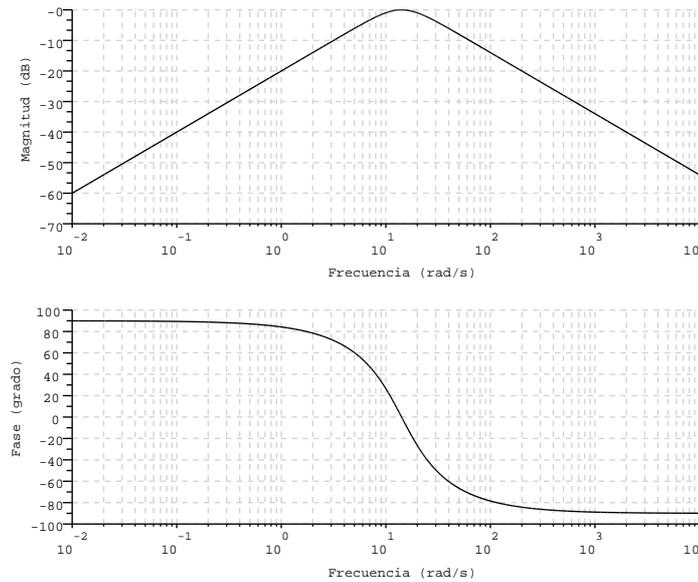
-->s=poly(0,'s');
-->s=s/(2*pi);
-->H=syslin('c',20*s/(s^2+20*s+200));
-->bodew(H,0.01,10000);

```

**Figura 8.29.** Comandos Scilab™ para construir el diagrama de Bode real en magnitud y fase del Ejemplo 8.6

La Figura 8.28 presenta la curva correspondiente al cero ( $s$ ) en color rojo, la cual es una constante de valor  $\frac{\pi}{2}$ , y la curva correspondiente a la contribución del factor cuadrático  $\left(1 + 2 \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{s}{\sqrt{200}}\right) + \left(\frac{s}{\sqrt{200}}\right)^2\right)$  en color azul. Además, la figura muestra el diagrama de Bode en fase, tanto la curva asintótica en color verde como la real en negro.

Por otra parte, la Figura 8.29 muestra el conjunto de comandos Scilab™ que permite obtener tanto el diagrama de Bode real en magnitud como su correspondiente diagrama de Bode real en fase, los cuales ambos diagramas son presentados en la Figura 8.30 de la página 231.



**Figura 8.30.** Diagrama de Bode en magnitud y fase obtenidos mediante los comandos mostrados en la Figura 8.29

#### 8.4 RESPUESTA PERMANENTE DE UN SISTEMA LDCID ANTE UNA EXCITACIÓN SINUSOIDAL

El concepto de respuesta en frecuencia y su significado ya ha sido estudiado previamente en el Capítulo 7.

En esta sección se aplicarán las definiciones introducidas en el Capítulo 7 mediante un ejemplo, el cual a través del diagrama de Bode en magnitud y en fase permitirán determinar la respuesta permanente del sistema LDCID ante entradas sinusoidales.

##### ■ EJEMPLO 8.7

Considere una vez más el sistema LDCID del Ejemplo 8.1, el cual es excitado por una señal  $x(t)$  y su respuesta es denotada por  $y(t)$ . Además, se conoce que función de transferencia del sistema está dada por

$$H(s) = 10 \frac{s+10}{s+100}, \quad \forall \text{Re}[s] > -100. \quad (8.77)$$

Para el sistema descrito, determine la respuesta permanente del sistema empleando los diagramas de Bodes asintóticos y el procedimiento analítico, si su señal de excitación es

$$x(t) = 20 \text{sen}(110t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (8.78)$$

**Solución**

Para determinar la solución analítica, sólo se debe evaluar la Ecuación (8.77) para  $s = 110 \text{ rad/s}$ , lo que implica que

$$H(j110) = 10 \frac{s+10}{s+100} \Big|_{s=j110} = 10 \frac{10+j110}{100+j110} = 10 \sqrt{\frac{122}{221}} e^{j[\text{tg}^{-1}(11)-\text{tg}^{-1}(1,1)]}, \quad (8.79)$$

lo cual implica que

$$H(j110) \cong 7,4299 e^{j0,64716}. \quad (8.80)$$

Aplicando el Corolario 7.2 de la página 185, se obtiene que

$$y(t) \cong 148,598 \text{ sen}(110t + 0,64716), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (8.81)$$

Ahora, basado los diagramas de Bode construidos en los Ejemplos 8.1 y 8.4 se tiene que:

Cálculo basado en los diagramas asintóticos

Según el diagrama de Bode asintótico en magnitud mostrado en la Figura 8.7 de la página 209,

$$\hat{M}_{\text{dB}}(110) = 20 \text{ dB}. \quad (8.82)$$

Ahora, debido a que

$$M_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log M(\omega), \quad (8.83)$$

se tiene que

$$M(\omega) = 10^{M_{\text{dB}}(\omega)/20}. \quad (8.84)$$

Reemplazando el valor leído mostrado en la Ecuación (8.82) en la Ecuación (8.84), se obtiene que

$$\hat{M}(110) = 10^{20/20} = 10. \quad (8.85)$$

Con relación a la fase, de la Figura 8.21 de la página 224 se tiene que según el diagrama de Bode asintótico en fase,

$$\hat{\Phi}(\omega) = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \quad (8.86)$$

Aplicando nuevamente el Corolario 7.2 con los datos arrojados por las Ecuaciones (8.85) y (8.86), se obtiene que

$$y(t) \cong 200 \text{ sen}(110t + 0,785), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (8.87)$$

Cálculo basado en los diagramas reales

De acuerdo al diagrama de Bode real en magnitud mostrado en la Figura 8.7 de la página 209,

$$\hat{M}_{\text{dB}}(110) = 18 \text{ dB}, \quad (8.88)$$

lo que implica al aplicar la Ecuación (8.84) que

$$\hat{M}(110) = 10^{18/20} \cong 7,943 \quad (8.89)$$

Por otra parte, del diagrama de Bode en fase real, se tiene que

$$\Phi(\omega) \cong \frac{9\pi}{40} \text{ rad} \cong 0,707 \tag{8.90}$$

En definitiva, empleando el Corolario 7.2 con los resultados de magnitud y fase de las Ecuaciones (8.89) y (8.90), se obtiene que

$$y(t) \cong 158,866 \text{ sen}(110t + 0,707), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{8.91}$$

La Figura 8.31 presente la señal de excitación  $x(t)$  en color verde, y la señal de respuesta  $y(t)$  en color azul, esta última de acuerdo a la Ecuación (8.81).

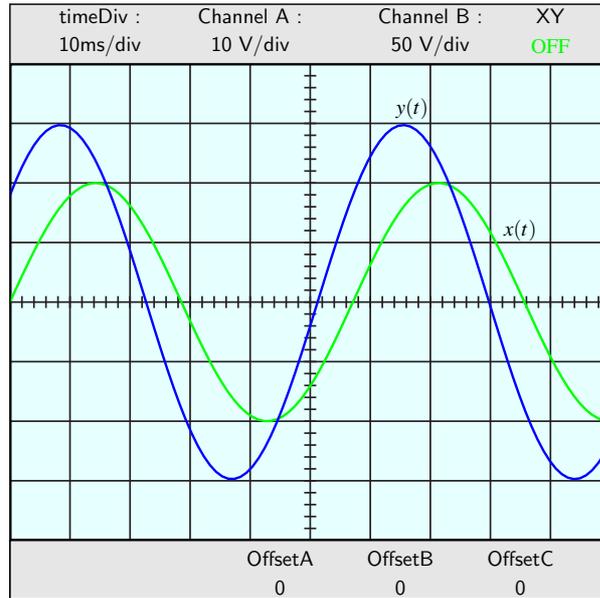
Note que la señal  $y(t)$  está adelantada 0,6 div con relación a la señal  $x(t)$  para un período de la señal que corresponde a 5,75 div. Es decir,

$$\tilde{\Phi}(\omega) \cong 2\pi \text{ rad} \frac{0,6 \text{ div}}{5,75 \text{ div}} \approx 0,673 \text{ rad}. \tag{8.92}$$

En relación a la amplitud, la curva de color azul muestra que la señal  $y(t)$  tiene un valor pico de 3 div con un ajuste de sensibilidad vertical de 50V/div, lo que implica que la amplitud o valor pico de la señal  $y(t)$  es

$$V_{y(t)} = 3 \text{ div } 50 \text{ V/div} = 150 \text{ V}. \tag{8.93}$$

Note que el adelanto medido de  $y(t)$  con respecto a  $x(t)$ , y el valor pico  $V_{y(t)}$  se aproxima en buena medida al obtenido en la Ecuación (8.81).



**Figura 8.31.** Visualización en un osciloscopio de las señales de excitación y respuesta del sistema del Ejemplo 8.7

### PROBLEMAS

**8.1** Sea un sistema LDCID en el dominio continuo, con respuesta en frecuencia dada por su correspondiente diagrama de Bode. Si para las frecuencia  $\omega_1 = 3$  rad/s y  $\omega_2 = 10$  rad/s las correspondientes magnitudes en dB están definidas en el diagrama asintótico de magnitud de Bode a través de una recta de pendiente 18 dB/oct, y la magnitud de la función de transferencia para  $\omega_1$  es de 20 dB. Entonces, la magnitud del diagrama de Bode para  $\omega_2$  es

- A)  $18 \log_2\left(\frac{10}{3}\right)$  dB                      B)  $\left[20 + 18 \frac{\log_2 10}{\log_2 3}\right]$  dB
- C)  $\left[20 + 18 \log_2\left(\frac{10}{3}\right)\right]$  dB                      D)  $\left[20 + 18 \log_{10}\left(\frac{10}{3}\right)\right]$  dB

**8.2** Sea un sistema LDCID en el dominio continuo, el cual está definido por su función de transferencia

$$H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s^2+400)} \quad (8.94)$$

Entonces, de acuerdo a su diagrama asintótico de Bode en magnitud y diagrama asintótico de Bode en fase, sus respectivos valores de magnitud y fase para  $\omega = 100$  rad/s son

- A) -80 dB; 0                                      B)  $-40 \log_{10}(5)$  dB;  $-\pi$
- C) -80 dB;  $-\pi$                                 D) ninguna de las anteriores.

**8.3** Sea un sistema LDCID en el dominio continuo, el cual está definido por su función de transferencia

$$H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(100^2+50s+s^2)} \quad (8.95)$$

Si la frecuencia  $\omega_1$  está ubicada justo a 0,5 déc por encima de  $\omega_0 = 100$  rad/s. Entonces, de acuerdo al diagrama asintótico de Bode en magnitud y diagrama asintótico de Bode en fase, sus respectivos valores de magnitud y fase para  $\omega_1$  son

- A) -100 dB;  $-7\pi/4$                             B) -20 dB;  $-3\pi/4$
- C) -100 dB;  $-3\pi/4$                             D) ninguna de las anteriores.

**8.4** Sea un sistema LDCID definido en el dominio continuo, con función de transferencia

$$H(s) = 10 \frac{s-10}{s+100}, \quad \forall \text{Re}[s] > -100. \quad (8.96)$$

Para el sistema descrito, determine:

- a) diagrama de Bode del sistema empleando el Scilab™;
- b) respuesta del sistema en régimen permanente basándose en el diagrama de Bode arrojado por el Scilab™, si el sistema es excitado con una señal  $x(t)$  con expresión matemática o modelo matemático

$$x(t) = \cos^2(100t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (8.97)$$

**EJERCICIOS PROPUESTOS**

**8.5** Sea un sistema LDCID definido en el dominio continuo, con función de transferencia

$$H(s) = 10 \frac{s+40}{s+800}, \quad \forall \operatorname{Re}[s] > -800. \quad (8.98)$$

Para el sistema descrito, determine:

- a) diagrama de Bode asintótico en magnitud y fase;
- b) diagrama de Bode real en magnitud y fase;
- c) respuesta del sistema en régimen permanente ante una excitación dada por

$$x(t) = 2 \cos(400t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (8.99)$$

**8.6** Sea un sistema LDCID definido en el dominio continuo, con función de transferencia

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 90000}, \quad \forall \operatorname{Re}[s] > 0. \quad (8.100)$$

Para el sistema descrito, determine:

- a) diagrama de Bode asintótico en magnitud y fase;
- b) diagrama de Bode real en magnitud y fase;
- c) respuesta del sistema en régimen permanente ante una excitación dada por

$$x(t) = 2 \cos(400t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (8.101)$$

**8.7** Sea un sistema LDCID definido en el dominio continuo, con función de transferencia

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + 90000}, \quad \forall \operatorname{Re}[s] > 0. \quad (8.102)$$

Para el sistema descrito, determine:

- a) diagrama de Bode asintótico en magnitud y fase;
- b) diagrama de Bode real en magnitud y fase;
- c) respuesta del sistema en régimen permanente ante una excitación dada por

$$x(t) = 2 \cos(400t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (8.103)$$



## CAPÍTULO 9

---

# RESPUESTA EN FRECUENCIA EN EL DOMINIO DISCRETO

---

No sólo es importante alcanzar la meta, sino también como se llega a ella.

—Ebert Brea

El análisis de los sistemas en el régimen permanente desde la óptica de la frecuencia y sumado al enfoque discreto conlleva a tomar en cuenta el concepto de respuesta en frecuencia presentado en el Capítulo 7. En el capítulo se establece que la representación de la respuesta en frecuencia en el dominio discreto es consecuencia de la transformación del eje imaginario  $j\omega$  del plano  $s = \sigma + j\omega$  a través de la función  $z = e^{j\omega T}$ , donde  $T$  es el paso de discretización.

En este capítulo se estudia la respuesta en frecuencia de los sistemas representados desde la perspectiva del dominio discreto, además de mostrar su significado en ese dominio.

EL resto del capítulo está estructurado de acuerdo a lo siguiente: en la Sección 9.1 se introduce el concepto de la transformada de Fourier de señales definidas en el dominio discreto, la cual es tratada en la sección a través de su relación con la transformada  $\mathcal{Z}$ ; en la Sección 9.2 se expondrá el método de representación gráfica en magnitud y en fase de la respuesta en frecuencia de sistemas lineales, dinámicos, causales, invariantes en el dominio y deterministas (LDCID) definidos en el dominio discreto; en la Sección 9.3 son empleados las representaciones gráficas en magnitud y en fase de la respuesta en frecuencia a objeto de calcular la respuesta permanente del sistema bajo estudio, cuando éste es excitado por

una señal sinusoidal. Por último, son presentados ejemplos y ejercicios propuestos para que a través de ellos el lector pueda medir su aprendizaje en los tópicos abordados.

## 9.1 TRANSFORMADA DE FOURIER EN EL DOMINIO DISCRETO

Sea  $f[n]$  una señal real definida en el dominio discreto, la cual viene dada por

$$f[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (9.1)$$

Entonces, la transformada de Fourier en el dominio discreto (TFDD) está definida por

$$\mathcal{F}_D\{f[n]\} = F(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-j\Omega n}, \quad \forall \Omega \in \mathbb{R}. \quad (9.2)$$

Bajo ciertas condiciones, la TFDD está relacionada con la transformada bilateral  $\mathcal{Z}$ , debido al hecho de que la transformada bilateral  $\mathcal{Z}$  es definida por

$$\mathcal{Z}\{f[n]\} = F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] z^{-n}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad (9.3)$$

donde el dominio de convergencia de la transformada bilateral  $\mathcal{Z}$  está definida  $r_1 \leq |z| \leq r_2$ .

Observe que si la circunferencia unitaria está contenida en la región de convergencia de la transformada bilateral  $\mathcal{Z}$ , la expresión de transformada de Fourier en el dominio discreto, dada por la Ecuación (9.2), de una función definida en el dominio discreto puede ser obtenida a partir de la transformada bilateral  $\mathcal{Z}$  haciendo  $z = e^{j\Omega}$ , es decir, sustituyendo  $z$  por  $e^{j\Omega}$  en la Ecuación (9.3).

Este hecho es el fundamento de lo tratado en este capítulo, y que será tratado aplicándolo al concepto de respuesta en frecuencia de sistemas definidos en el dominio discreto.

Una propiedad importante que puede ser explicada a través de un ejemplo, es en cuanto a la periodicidad de la transformada de Fourier en el dominio discreto (TFDD), la cual es de  $2\pi$ .

Por otra parte, un estudio similar puede ser desarrollado para el caso de señales causales definidas en el dominio discreto, es decir, señales en el dominio discreto con rango igual a cero para todo en dominio discreto negativo. En este caso, debe emplearse la definición de transformada unilateral derecha  $\mathcal{Z}$ .

Considere el siguiente ejemplo, en el cual se mostrará a través de una representación gráfica vectorial, el significado de la transformada de Fourier en el dominio discreto (TFDD).

### ■ EJEMPLO 9.1

Sea una función  $f[n]$  definida en el dominio discreto con transformada  $\mathcal{Z}$

$$F(z) = \frac{z+1}{z-\frac{3}{4}}, \quad \forall |z| > \frac{3}{4}. \quad (9.4)$$

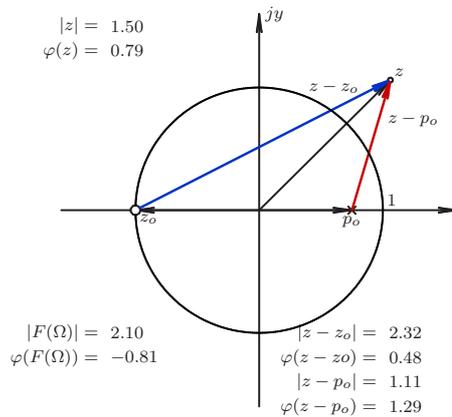
Represente en el plano  $z$  la transformada  $\mathcal{Z}$  y represente gráficamente el significado de la TFDD de la función  $f[n]$ .

**Solución**

A objeto de hacer una representación gráfica del significado de la TFDD, se expresará la Ecuación (9.4) de una forma genérica, para así poder interpretar la  $\mathcal{F}_D\{x[n]\}$ , quedando entonces como

$$F(z) = \frac{z - z_o}{z - p_o}, \quad \forall |z| > |p_o|, \tag{9.5}$$

donde  $z_o = -1$  y  $p_o = \frac{3}{4}$ .



**Figura 9.1.** Representación gráfica para el caso  $z = \frac{3}{2} e^{j\pi/4}$

La Figura 9.1 muestra el caso cuando  $z = \frac{3}{2} e^{j\pi/4}$ , lo que al evaluar la Ecuación (9.5) para ese valor de  $z$ , se tiene

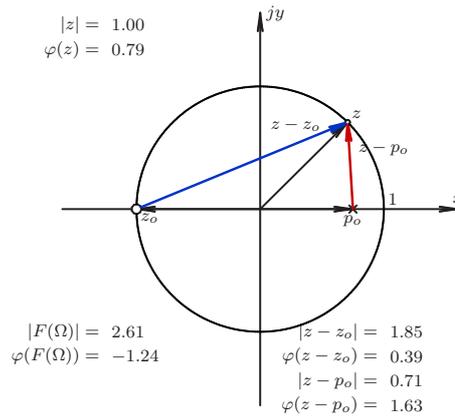
$$F(z) \Big|_{\frac{3}{2} e^{j\pi/4}} = \frac{\frac{3}{2} e^{j\pi/4} + 1}{\frac{3}{2} e^{j\pi/4} - \frac{3}{4}} \cong 2,10 e^{-j0,81}. \tag{9.6}$$

En cambio, en la Figura 9.2 de la página 240 se representan los vectores que conforman la función  $F(z)$  cuando  $z = e^{j\pi/4}$ .

$$F(z) \Big|_{e^{j\pi/4}} = \frac{e^{j\pi/4} + 1}{e^{j\pi/4} - \frac{3}{4}} \cong 2,61 e^{-j1,24}. \tag{9.7}$$

Note que el valor indicado en la Ecuación (9.7) puede ser también obtenida al calcular las magnitudes y ángulos de los vectores  $z - z_o$  y  $z - p_o$ , los cuales están representados respectivamente en color azul y rojo, para así determinar la magnitud de  $F(e^{j\pi/4})$  mediante el cociente de la magnitud de  $z - z_o$  dividida entre la magnitud de  $z - p_o$ , y el ángulo de  $F(e^{j\pi/4})$  se obtiene haciendo la diferencia del ángulo de  $z - z_o$  menos el ángulo de  $z - p_o$ .

En general, y para cualquier valor de frecuencia, la TFDD puede ser determinada en este ejemplo a través de



**Figura 9.2.** Representación gráfica para el caso  $z = e^{j\pi/4}$

$$F(\Omega) = \frac{e^{j\Omega} + 1}{e^{j\Omega} - \frac{3}{4}}, \quad \forall \Omega \in \mathbb{R}. \tag{9.8}$$

Observe además la periodicidad de  $2\pi$  que presenta la función  $F(\Omega)$ , debido al hecho de que cada giro completo de  $2\pi$  el punto  $z = e^{j\Omega}$  está ubicado en el mismo punto, y en consecuencia el valor de  $F(\Omega)$  es el mismo. Este hecho puede ser expresado matemáticamente como

$$F(\Omega) = F(e^{j\Omega}) = F(e^{j(\Omega+2k\pi)}), \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{9.9}$$

## 9.2 REPRESENTACIÓN DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA

Sea un sistema lineal, dinámico, causal, invariante en el dominio y determinista (LDCID) definido en el dominio discreto, el cual se conoce o puede determinarse su función de transferencia en el dominio de la transformada  $\mathcal{Z}$ .

A tal efecto, para determinar la respuesta en frecuencia de un sistema LDCID definido en el dominio discreto, debe seguirse el siguiente método.

**Método 9.1 (Determinación de respuesta en frecuencia)** *Sea la función de transferencia  $H(z)$ , ejecute:*

*Paso 1. Sustituya la variable  $z = e^{jn\pi/N}$  en la función de transferencia, donde  $N$  es el número de puntos a evaluar.*

*Paso 2. Para cada  $n = 0, \dots, N - 1$ , calcule la magnitud y fase de  $H(z)|_{z=e^{jn\pi/N}}$ .*

*Paso 3. Dibuje cada figura correspondiente a la respuesta en magnitud y fase.*

**■ EJEMPLO 9.2**

Sea un sistema LDCID definido en el dominio discreto con función de transferencia

$$H(z) = \frac{z+1}{10,4z-8,4}, \quad \forall |z| > \frac{21}{26}. \quad (9.10)$$

Representa gráficamente la respuesta en frecuencia del sistema.

**Solución**

A objeto de obtener la respuesta en frecuencia, debe evaluarse la función de transferencia  $H(z)$  para todo  $z = e^{jx\pi}$ , donde  $x \in \mathbb{R}$  está definido en el intervalo  $0 \leq x \leq \pi$ .

Es decir,

$$H(z)|_{z=e^{jx\pi}} = \frac{e^{jx\pi} + 1}{10,4e^{jx\pi} - 8,4}, \quad \forall 0 \leq x \leq \pi. \quad (9.11)$$

De la Ecuación (9.11) se puede obtener la magnitud y fase para luego realizar las correspondientes representaciones gráficas.

En consecuencia, la expresión de la magnitud de la Ecuación (9.11) es

$$M(x) = \frac{\sqrt{(1 + \cos(x\pi))^2 + (\text{sen}(x\pi))^2}}{\sqrt{(-8,4 + 10,4 \cos(x\pi))^2 + (10,4 \text{sen}(x\pi))^2}}, \quad \forall 0 \leq x \leq \pi. \quad (9.12)$$

Por su parte, para el cálculo de la fase se tiene

$$\Phi(x) = \text{Arg}(e^{jx\pi} + 1) - \text{Arg}(10,4e^{jx\pi} - 8,4), \quad \forall 0 \leq x \leq \pi. \quad (9.13)$$

Observe que en las Ecuaciones (9.12) y (9.13) viene a ser

$$x = \frac{n}{N}, \quad \forall n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (9.14)$$

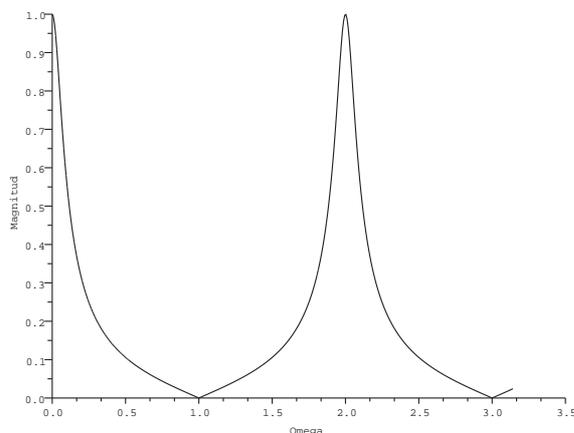
donde  $N$  es el número total de datos.

No obstante, para lograr obtener una representación gráfica en magnitud de la respuesta en frecuencia, se emplearon los siguientes comandos Scilab™ mostrados en la Figura 9.3.

```

-->deff("Z]=z(x)", "Z=exp(%i*x*pi)")
-->deff("M]=f(x)", "M=abs((z(x)+1)/(10.4*z(x)-8.4))")
-->x=[0:0.025:10]*%pi/10;
-->fplot2d(x,f);
-->xtitle('','Omega',"Magnitud")
    
```

**Figura 9.3.** Comandos Scilab™ para obtener diagrama en magnitud de la respuesta en frecuencia del Ejemplo 9.2



**Figura 9.4.** Diagrama en magnitud de la respuesta en frecuencia

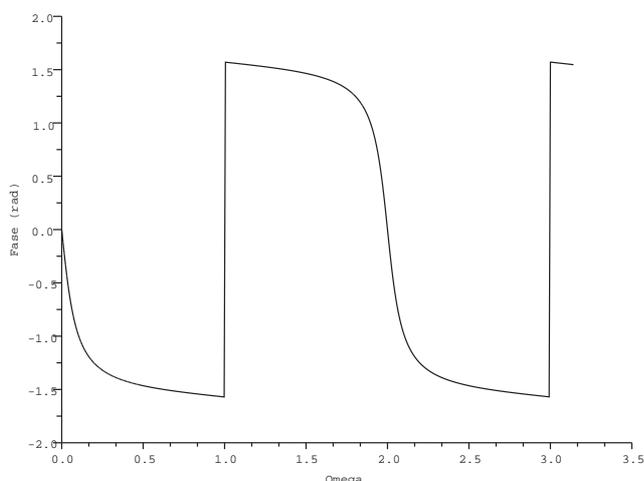
La Figura 9.4 muestra una representación gráfica en magnitud de la respuesta en frecuencia del sistema definido por la función de transferencia expresada en la Ecuación (9.10). Note que el eje horizontal está definido en cantidades de  $\pi$ , lo que es corroborado al observar la magnitud de 0 para un valor de 1 en la escala horizontal, es decir  $M = 0$  para  $1 \cdot \pi$ .

Por otra parte, para disponer del diagrama en fase de la respuesta en frecuencia del sistema se requiere ejecutar los siguientes comandos Scilab™ presentados en la Figura 9.5.

```
-->deff("[Z]=z(x)", "Z=exp(%i*x*pi)")
-->deff("[R]=r(x)", "R=real((z(x)+1)/(10.4*z(x)-8.4))")
-->deff("[I]=i(x)", "I=imag((z(x)+1)/(10.4*z(x)-8.4))")
-->deff("[A]=a(x)", "A=atan(i(x),r(x))")
-->x=[0:0.025:10]*%pi/10;
-->fplot2d(x,a);
-->xtitle('','Omega',"Fase (rad)")
```

**Figura 9.5.** Comandos Scilab™ para obtener el diagrama en fase de la respuesta en frecuencia del Ejemplo 9.2

La Figura 9.6 muestra el resultado reportado por el Scilab™ del diagrama en fase del sistema. Note que el eje vertical está medido en rad y no en grados como normalmente lo presentaría el Scilab™.



**Figura 9.6.** Diagrama en fase de la respuesta en frecuencia del sistema

### 9.3 RESPUESTA DE SISTEMA MEDIANTE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA DE SISTEMAS

El problema a estudiar está centrado en el hecho de que si un sistema LDCID definido en el dominio discreto es excitado por una señal sinusoidal definida en el dominio discreto, el cual después de un largo tiempo la señal, de tratarse de ser un sistema estable, debe estabilizarse. Este concepto fue estudiado a través del teorema y corolarios presentados en la Sección 7.3 del Capítulo 7.

En esta sección se emplearán los conceptos presentados en el Capítulo 7 y el empleo de la representación gráfica de la respuesta en frecuencia introducida en la Sección 9.2.

Para determinar tal respuesta, considere la señal en el dominio discreto,

$$x[n] = A \text{sen}(\beta n)u(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{9.15}$$

Si un sistema LDCID definido en el dominio discreto es excitado por la señal sinusoidal dada por la Ecuación (9.15), y la función de transferencia  $H(z)$  del sistema es conocida, se tiene que la respuesta del sistema después de un largo período es

$$y[n] = A |H(z)|_{z=e^{j\beta}} \text{sen}(\beta n + \Phi(z)|_{z=e^{j\beta}}), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{9.16}$$

donde la función de transferencia del sistema  $H(z)$ , esta dada por

$$H(z) = |H(z)|e^{j\Phi(z)} \tag{9.17}$$

### ■ EJEMPLO 9.3

Sea el sistema LDCID definido en el Ejemplo 9.2. Si el sistema es excitado por una señal definida en el dominio discreto de expresión

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 4 \cos(1,5k) \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (9.18)$$

Determine la respuesta del sistema en régimen permanente.

#### Solución

Empleando el Corolario 7.3 de la página 191 se tiene que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 4 |H(e^{j1,5})| \cos[1,5n + \Phi_h(e^{j1,5})] \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (9.19)$$

donde, de las Figuras 9.4 y 9.6 se tiene que

$$\begin{aligned} M(1,5) &= |H(e^{j1,5})| \cong 0,1 \\ \Phi(1,5) &= \Phi_h(e^{j1,5}) \cong 1,4 \text{ rad} \end{aligned} \quad (9.20)$$

Sustituyendo los valores mostrados en la Ecuación (9.20) en la Ecuación (9.19) se obtiene que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 0,4 \cos(1,5n + 1,4) \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (9.21)$$

## PROBLEMAS

**9.1** Sea un sistema LDCID definido en el dominio discreto con función de transferencia

$$H(z) = \frac{h z + 1}{2 z - 1}, \quad \forall |z| > 1, \quad (9.22)$$

donde el período de discretización  $h=0,1$  s.

Si el sistema es excitado con un señal de expresión

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sen}(0,5k) \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (9.23)$$

Determine:

- respuesta en frecuencia del sistema empleando el Scilab™;
- respuesta del sistema en régimen permanente ante la excitación  $x[n]$ .

**9.2** Sea un sistema LDCID definido en el dominio discreto con función de transferencia

$$H(z) = \frac{9,4(z-1)}{10,4z-8,4}, \quad \forall |z| > \frac{21}{26}, \quad (9.24)$$

con un paso de discretización  $h = 10^{-3}$  s.

Si el sistema es excitado con un señal de expresión

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(0,5k) \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (9.25)$$

Determine:

- respuesta en frecuencia del sistema empleando el Scilab™;
- respuesta del sistema en régimen permanente ante la excitación  $x[n]$ .

### EJERCICIOS PROPUESTOS

**9.3** Considere el sistema LDCID definido en el dominio discreto y cuya función de transferencia es

$$H(z) = \frac{1}{z^2 + \frac{1}{4}}, \quad \forall |z| > \frac{1}{2}. \quad (9.26)$$

Si el sistema es excitado con un señal de expresión

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos^2(0,5k) \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (9.27)$$

Determine:

- representación gráfica de la respuesta en frecuencia del sistema;
- respuesta en frecuencia del sistema empleando el Scilab™;
- respuesta del sistema ante la excitación definida por la señal de la Ecuación (9.27).

**9.4** Sea un sistema LDCID definido en el dominio discreto y con función de transferencia

$$H(z) = \frac{z}{z^2 + \frac{1}{4}}, \quad \forall |z| > \frac{1}{2}. \quad (9.28)$$

Si el sistema es excitado por la señal

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\cos(0,5k) + \operatorname{sen}(0,5k)] \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (9.29)$$

Determine:

- representación gráfica de la respuesta en frecuencia del sistema;
- respuesta en frecuencia del sistema empleando el Scilab™;
- respuesta del sistema ante la excitación definida por la señal de la Ecuación (9.29).

**9.5** Sea un sistema LDCID definido en el dominio discreto y con función de transferencia

$$H(z) = \frac{z - \frac{1}{2}}{z^2 + \frac{1}{4}}, \quad \forall |z| > \frac{1}{2}. \quad (9.30)$$

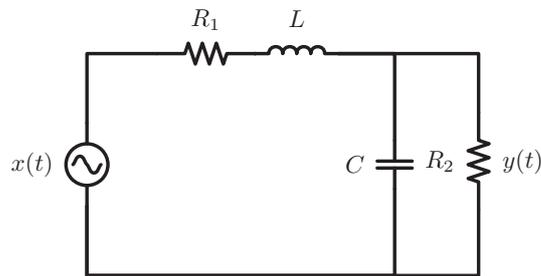
Si el sistema es excitado por la señal

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sen}(0,25k) \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (9.31)$$

Determine:

- representación gráfica de la respuesta en frecuencia del sistema;
- respuesta en frecuencia del sistema empleando el Scilab™;
- respuesta del sistema ante la excitación definida por la señal de la Ecuación (9.31).

**9.6** Considere el sistema LDCID definido en el dominio del tiempo continuo mostrado en la Figura 9.7



**Figura 9.7.** Red eléctrica conformada por elementos pasivos

Si considera que los valores de los parámetros asociados a los elementos eléctricos del sistema son:  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 30 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 1 \text{ mH}$  y  $C = 33 \text{ }\mu\text{F}$ , y  $x(t)$  representa la excitación del sistema, y la respuesta del sistema es denotada por  $y(t)$ .

Por otra parte, se tiene que la excitación del sistema, medida en V, es

$$x(t) = 5 \text{sen}(1000t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (9.32)$$

Si el sistema de la figura es discretizado por integración trapezoidal a razón de un intervalo de discretización  $h = 33 \text{ ms}$ .

Determine:

- función de transferencia del sistema discretizado;
- representación gráfica de la respuesta en frecuencia del sistema discretizado;
- respuesta en frecuencia del sistema empleando el Scilab™;
- respuesta del sistema ante la excitación definida por discretización de la señal de la Ecuación (9.32).

## CAPÍTULO 10

---

# ANÁLISIS DE SEÑALES EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

---

Detenerse a apreciar la naturaleza y percibirla en la más pura paz, hace que este bello mundo que nos rodea pueda ser cada día una nueva experiencia de vida. Haz que estos momentos sean nuevas experiencias en tu vida, y así podrás encontrarte a ti mismo.

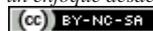
—Ebert Brea



Jean Baptiste Joseph Fourier

Existen dos perspectivas básicas para el análisis de señales: la primera es la relativa al análisis en el dominio continuo o discreto del tiempo, y la segunda es la referente al análisis de las señales en el dominio de la frecuencia, tanto en su dominio continuo como discreto.

*Análisis de Sistemas Lineales Asistido con Scilab™, un enfoque desde la Ingeniería Eléctrica. Primera Edición.* Por Ebert Brea.



por Ebert Brea, 2014.

Una de las teorías más empleadas en el análisis de señales desde la óptica de la frecuencia es la transformada de Fourier, llamada así en honor a Jean Baptiste Joseph Fourier<sup>16</sup> y a su contribución en la denominada series de Fourier, que ha tenido un importante lugar en el análisis de las señales tanto en el dominio continuo como en el discreto. Sin embargo, es importante señalar que de acuerdo con Heideman *et al.* (1985), uno de los pioneros en el análisis de fenómenos oscilatorios a través de lo que hoy se conoce como series de Fourier fue Euler.

Algunos materiales históricos que el lector puede estar interesado en revisar son los presentados por Kahane (2007) y Duoandikoetxea (2007), los cuales presentan una síntesis de algunos hechos que hicieron que la teoría de las series de Fourier haya alcanzado su importancia en el análisis de señales.

En este capítulo se desarrollará un conjunto de conceptos en lo referente al análisis de señales desde la óptica de la transformada de Fourier (TF) (Brea, 2006, Capítulo 4).

Lo que resta de este capítulo está estructurado de acuerdo a: en la Sección 10.1 se presenta un breve repaso de la definición de la TF en el dominio continuo para así establecer la notación que es empleada en el capítulo; en la Sección 10.2 se introduce un criterio de clasificación de señales desde la perspectiva de su contenido de energía para lo cual deben enunciarse algunas definiciones; en la Sección 10.3 se establecen algunos modelos matemáticos que permiten representar matemáticamente señales periódicas definidas en el dominio continuo; en la Sección 10.4 se estudia detenidamente la simetría de señales periódicas con el propósito de explicar la presencia de componentes de frecuencias en las señales de acuerdo a su simetría, y empleando estas definiciones de simetría se podrán analizar los resultados obtenidos en el cálculo de series de Fourier; en la Sección 10.5 se desarrollará el concepto de serie exponencial de Fourier a partir del concepto de transformada de Fourier de señales en el dominio continuo; en la Sección 10.6 se reexpresará las series exponencial de Fourier para que de este modo pueda definirse las series trigonométrica de Fourier; en la Sección 10.7 se revisará brevemente el estudio de convergencia de las series de Fourier así como el fenómeno de Gibbs, el cual explica el comportamiento de las series de Fourier en la vecindad en donde la señal es discontinua; en la Sección 10.8 son introducidos los conceptos empleados para el cálculo de energía normalizada y potencia promedio normalizada de una señal periódica para lo cual se enuncia y demuestra el teorema de Parseval para el cálculo de la energía normalizada de señales reales, y la potencia normalizada de señales reales periódicas. Finalmente, el capítulo incluye una sección de problemas y ejercicios propuestos, los cuales permitirán reforzar los conocimientos adquiridos por el lector.

## 10.1 PRELIMINAR: TRANSFORMADA DE FOURIER

**Definición 10.1** Sea  $f$  una función real definida en el dominio continuo, dígase  $f(t)$  definida en el dominio  $t$ . Entonces, la transformada de Fourier (TF) se define como

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt, \quad \forall -\infty < \omega < \infty. \quad (10.1)$$

<sup>16</sup>Jean Baptiste Joseph Fourier, nació el 21 de marzo de 1768 en Auxerre, Bourgogne, Francia y falleció el 16 de mayo de 1830 en París. El retrato fue obtenido de <https://commons.wikimedia.org/>

De la definición anterior puede notarse que si  $f(t)$  es una función real,  $F(\omega)$  puede ser definida claramente por

$$F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt. \quad (10.2)$$

Adicionalmente, la función  $F(\omega)$  es usualmente representada por medio de su espectro de magnitud o amplitud, denotado por  $A(\omega)$ , y su denominado espectro de fase, el cual es denotado por  $\Phi(\omega)$  en virtud de que usualmente se define como su argumento (Papoulis, 1962). De esta forma la función  $F(\omega)$  es usualmente definida como:

$$F(\omega) = A(\omega)e^{j\Phi(\omega)},$$

donde:

$$A(\omega) = |F(\omega)| = +\sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)}; \quad (10.3)$$

y  $\Phi(\omega)$  es dada por su argumento para todo  $\omega \neq 0$ , como

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} -\pi/2 + \pi \operatorname{sgn}(\omega), & \forall R(\omega) = 0, X(\omega) > 0; \\ \pi/2 + \pi \operatorname{sgn}(\omega), & \forall R(\omega) = 0, X(\omega) < 0; \\ \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{X(\omega)}{R(\omega)} \right] - 2\pi u(-\omega), & \forall R(\omega) > 0, X(\omega) > 0; \\ \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{X(\omega)}{R(\omega)} \right] + 2\pi u(\omega), & \forall R(\omega) > 0, X(\omega) < 0; \\ \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{X(\omega)}{R(\omega)} \right] + \pi \operatorname{sgn}(\omega), & \forall R(\omega) < 0. \end{cases} \quad (10.4)$$

Note que  $u(x)$  denota la función escalón unitario en el dominio  $\mathbb{R}$ .

Sin embargo, la función  $F(\omega)$  puede estar definida en términos más generales como:

$$F(\omega) = A(\omega)e^{j[\Phi(\omega) + 2k\pi \operatorname{sgn}(\omega)]},$$

donde  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

**Observación 10.1 (Determinación de  $\Phi(\omega)$ )** *Puede tomarse como regla general, y al menos es el punto de vista empleado por el autor, a objeto de determinar el argumento  $\Phi(\omega)$ , el signo de  $\omega$ , en virtud de que cuando  $\omega > 0$  se supondrá que la determinación del ángulo o argumento de la cantidad compleja  $F(\omega)$  debe hacerse en sentido antihorario. Mientras que si  $\omega < 0$  se supondrá que la determinación del argumento de la cantidad compleja  $F(\omega)$  debe hacerse en sentido horario.*

**Observación 10.2** *Cuando  $\omega = 0$ ,  $R(\omega)|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$  y  $X(\omega)|_{\omega=0} = 0$ , es decir,  $F(\omega) = R(\omega)$  para  $\omega = 0$ .*

**Observación 10.3 (Argumento cuando  $\omega = 0$ )** *En el caso que  $\omega$  sea igual a cero la fase de la transformada de Fourier es definida como*

$$\Phi(0) = \begin{cases} 0, & \forall F(0) > 0; \\ \pi, & \forall F(0) \leq 0. \end{cases}$$

No obstante, los valores límites para el caso  $F(0) < 0$  están dados por

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \Phi(\omega + \epsilon)|_{\omega=0} = \pi, \quad \text{y} \quad \lim_{\epsilon \downarrow 0} \Phi(\omega - \epsilon)|_{\omega=0} = -\pi.$$

**Observación 10.4** La definición de TF puede además ser establecida de manera general para funciones complejas. Sin embargo, en esta obra será supuesto que las funciones son reales.

**Definición 10.2 (Transformada inversa de Fourier)** La conocida fórmula de inversión o fórmula de transformada inversa de Fourier, permite representar cualquier función  $f(t)$  por medio de la TF de la función  $f(t)$ , es decir,

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (10.5)$$

En cuanto a las propiedades de la transformada de Fourier, las mismas pueden ser estudiadas en (Brea, 2006); (Oppenheim *et al.*, 1998).

## 10.2 TAXONOMÍA DE SEÑALES DESDE SU CONTENIDO DE ENERGÍA

Uno de los criterios aplicados en la clasificación de las señales está basado en su contenido de energía. Al respecto, es necesario establecer algunas definiciones de energía y potencia promedio normalizada de una señal.

**Definición 10.3 (Energía normalizada de una señal)** Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal determinista y definida en el dominio del tiempo continuo, en donde no necesariamente corresponde a una función continua. Entonces, la energía normalizada  $E$  de la señal real  $f(t)$  es determinada por

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt. \quad (10.6)$$

**Definición 10.4 (Potencia promedio de una señal)** Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal determinista y definida en el dominio del tiempo continuo, en donde no necesariamente corresponde a una función continua. Entonces, la potencia promedio normalizada  $P$  de la señal real  $f(t)$  es determinada mediante

$$P = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f^2(t) dt. \quad (10.7)$$

Desde el punto de vista de la ingeniería eléctrica las Definiciones 10.3 y 10.4 pueden ser interpretadas respectivamente como la cantidad de energía y de potencia promedio disipada en una resistencia de  $1 \Omega$ , en virtud de que la potencia instantánea, denotada por  $p(t)$ , disipada sobre una resistencia  $r$  es determinada por

$$p(t) = r [i(t)]^2 = \frac{[v(t)]^2}{r}, \quad (10.8)$$

donde  $i(t)$  representa la señal de corriente que atraviesa la resistencia, y  $v(t)$  es en consecuencia la señal que representa de la diferencia de potencial eléctrico a la cual está sometida la resistencia  $r$  en cada instante de tiempo  $t$ .

Es importante señalar que la relación que se mantiene entre la señal de tensión eléctrica  $v(t) \in \mathbb{R}$  aplicada sobre una resistencia  $r$  y la corriente eléctrica  $i(t) \in \mathbb{R}$  que atraviesa a la resistencia  $r$ , viene definida por la ley de Ohm,  $v(t) = ri(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Además note que en el caso en que  $r = 1 \Omega$ , la potencia normalizada instantánea está definida por los valores de rango de la señal al cuadrado. Es decir,

$$p(t) = [i(t)]^2 = [v(t)]^2, \quad (10.9)$$

**Definición 10.5 (Señal de energía)** *Se dice que una señal es de energía cuando su energía es finita, es decir, si*

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt < \infty. \quad (10.10)$$

**Definición 10.6 (Señal de potencia)** *Una señal de potencia es aquella que es capaz de entregar energía infinita, es decir, cuando*

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt \rightarrow \infty. \quad (10.11)$$

**Observación 10.5** *Si la señal  $f(t)$  es medida en A o en V, la energía normalizada debe ser medida en J y la potencia promedio normalizada en W.*

*Más aún, si por ejemplo una señal  $f(t)$  es medida en mV. Entonces, su energía normalizada es medida en  $\mu\text{J}$  y su potencia promedio normalizada en  $\mu\text{W}$ .*

#### ■ EJEMPLO 10.1

Sea una señal  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(t) = 50p_4(t-2), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (10.12)$$

medida en mV.

Determine su energía normalizada y potencia promedio normalizada, y clasifique la señal de acuerdo a su contenido de energía.

#### Solución

De la Definición 10.3 de la página 250 se tiene que

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} [50p_4(t-2)\text{mV}]^2 dt = 2500 \int_{-\infty}^{\infty} p_4^2(t-2) dt \mu\text{J}. \quad (10.13)$$

De la Ecuación (10.13) y empleando la definición de pulso rectangular se tiene que

$$E = 2500 \int_{t=-2}^6 dt 10^{-6}\text{J} = 10 \text{ mJ} = 0,01 \text{ J}. \quad (10.14)$$

Para el cálculo de la potencia promedio normalizada se tiene, que al aplicar la Definición 10.4 de la página 250, entonces la potencia promedio normalizada de la señal  $f(t)$  es

$$P = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} [50p_4(t-2)]^2 dt, \quad (10.15)$$

lo que implica que

$$P = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-2}^4 [50p_4(t-2)]^2 dt = 0 \text{ W.} \quad (10.16)$$

En consecuencia, la señal definida por la Ecuación (10.12) corresponde a una señal de energía.

### ■ EJEMPLO 10.2

Sea una señal  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(t) = \delta(t-2), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (10.17)$$

medida en V.

Calcule su energía normalizada y su potencia promedio normalizada. Clasifique además el tipo de señal desde la perspectiva de su contenido de energía.

### Solución

Una forma para determinar la energía normalizada de la señal es a través de la definición de una sucesión de función que permita representar la función delta de Dirac.

Por ejemplo, considere

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & \forall |t| < \varepsilon; \\ 0, & \forall |t| > \varepsilon. \end{cases} \quad (10.18)$$

Al sustituir la Ecuación (10.18) en la Ecuación (10.17) se tiene que

$$f(t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f_\varepsilon(t-2) = \begin{cases} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon}, & \forall |t-2| < \varepsilon; \\ 0, & \forall |t-2| > \varepsilon. \end{cases} \quad (10.19)$$

En consecuencia, al emplear la Definición 10.3 bajo la consideración de que la señal  $f(t)$  viene definida por la Ecuación (10.19), se tiene que

$$E = \int_{2-\varepsilon}^{2+\varepsilon} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{4\varepsilon^2} dt. \quad (10.20)$$

Como la operación límite no depende del proceso de integración, y sumado a que supone que ambas operaciones convergen, se puede decir que

$$E = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{2-\varepsilon}^{2+\varepsilon} dt = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{4\varepsilon} \neq \infty \quad (10.21)$$

Por otra parte, a objeto de determinar la potencia promedio normalizada, se empleará el mismo enfoque que el utilizado para determinar la energía normalizada.

Al aplicar la Definición 10.4, se tiene entonces que

$$P = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{2-\varepsilon}^{2+\varepsilon} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{4\varepsilon^2} dt. \quad (10.22)$$

Al intercambiar la operación de integración y límite, se obtiene que

$$P = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{2-\varepsilon}^{2+\varepsilon} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{4\varepsilon} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{4\varepsilon\tau} < \infty \quad (10.23)$$

De acuerdo a lo establecido anteriormente, la señal es considerada una señal de potencia debido al hecho de contener energía normalizada no acotada.

### ■ EJEMPLO 10.3

Sea una señal  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(t) = u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (10.24)$$

medida en V.

Calcule su energía normalizada y su potencia promedio normalizada. Clasifique además el tipo de señal desde la perspectiva de su contenido de energía.

### Solución

Nuevamente, aplicando la Definición 10.3 se tiene que

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T dt \neq \infty. \quad (10.25)$$

En cuanto al cálculo de la potencia promedio normalizada se tiene que de la Definición 10.4,

$$P = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} u^2(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau/2} dt = \frac{1}{2} \text{ W}. \quad (10.26)$$

Debido a que la señal tiene una energía normalizada no acotada, se puede afirmar que la señal es una señal de potencia.

## 10.3 SEÑALES PERIÓDICAS

El estudio y análisis de señales periódicas constituye uno de los tantos aspectos que todo ingeniero y científico debe enfrentar, para lograr tener una visión más exacta de los fenómenos de las señales sobre los sistemas. En esta sección se estudiarán las señales periódicas desde su definición y modelación en tiempo, como su análisis en el dominio espectral.

**Definición 10.7 (Señal periódica)** Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal determinista y definida en el dominio del tiempo continuo, en donde no necesariamente corresponde a una función continua. Se dice que  $f(t)$  es una señal periódica si

$$f(t) = f(t - nT), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

donde  $n \in \mathbb{Z}$  representa el número de la extensión periódica.

**Definición 10.8 (Extensión periódica principal)** Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal determinista, periódica de período  $T$  y definida en el dominio del tiempo continuo, en donde no necesariamente corresponde a una función continua. Se dice que la extensión principal de la señal periódica  $f(t)$ , la cual es denotada por  $f_0(t)$ , está definida por

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t), & \forall t_0 \leq t < t_0 + T; \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

donde  $t_0 \in \mathbb{R}$  es un instante cualquiera de referencia.

**Definición 10.9 (n-ésima extensión periódica)** Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal determinista, periódica de período  $T$  y definida en el dominio del tiempo continuo, en donde no necesariamente corresponde a una función continua. Se dice que la  $n$ -ésima extensión periódica de la señal  $f(t)$ , la cual es denotada por  $f_n(t)$ , está definida por

$$f_n(t) = \begin{cases} f_0(t - nT), & \forall t_0 + nT \leq t < t_0 + (n + 1)T; \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

De acuerdo a la Definición 10.9, se tiene que una señal periódica puede ser modelada empleando la siguiente expresión matemática.

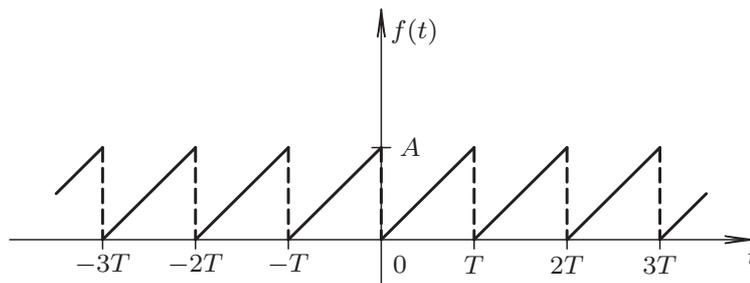
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t - nT), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{10.27}$$

donde  $n \in \mathbb{Z}$  representa el subíndice de la  $n$ -ésima extensión periódica.

Aplicando el modelo mostrado a través de la Ecuación (10.27), se puede afirmar que el modelo matemático correspondiente a un tren unitario de impulsos de Dirac, con periodicidad  $T$  es

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{10.28}$$

donde  $\delta_T(t)$  denota el tren de impulsos unitarios de período  $T$ .



**Figura 10.1.** Señal periódica diente de sierra

**Lema 10.1 (Señal periódica)** Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal determinista, periódica de período  $T$  y definida en el dominio del tiempo continuo, en donde no necesariamente corres-

ponde a una función continua. Entonces,  $f(t)$  puede ser modelada por

$$f(t) = f_0(t) * \delta_T(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (10.29)$$

donde  $f_0(t)$  es la extensión principal de la señal  $f(t)$ , y  $\delta_T(t)$  representa el tren unitario de impulsos de Dirac con expresión matemática definida por la Ecuación (10.28).

**Demostración.** Se sabe que si  $g(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(t) * \delta(t - T_0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \delta(t - \tau - T_0) d\tau, \quad (10.30)$$

el cual al hacer el cambio de variable  $x = t - \tau - T_0$ , se tiene que  $dx = -d\tau$  y además  $\tau = t - x - T_0$ .

Este hecho permite asegurar que la Ecuación (10.30), puede ser reescrita como

$$g(t) * \delta(t - T_0) = - \int_{\infty}^{-\infty} g(t - x - T_0) \delta(x) dx = g(t - T_0). \quad (10.31)$$

Tomando en cuenta la Ecuación (10.31), se puede afirmar que

$$f_0(t) * \delta(t - nT) = f_0(t - nT), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (10.32)$$

donde  $n \in \mathbb{Z}$  es un entero cualquiera.

Si la operación de la Ecuación (10.32), se establece para todos los posibles valores de  $n$  y son sumados, se obtiene que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t) * \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t - nT) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (10.33)$$

Por otra parte,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t) * \delta(t - nT) = f_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = f_0(t) * \delta_T(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (10.34)$$

De las Ecuaciones (10.33) y (10.34), se tiene que

$$f(t) = f_0(t) * \delta_T(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

■

**Lema 10.2 (Transformada de Fourier de un tren de impulsos unitarios)** Sea una señal periódica de período  $T$  definida por un tren de impulsos unitarios. Entonces, su transformada de Fourier corresponde a

$$\mathcal{F}[\delta_T(t)] = \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (10.35)$$

donde  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ .

**Demostración.** Véase (Papoulis, 1962, Página 44). ■

**Teorema 10.1** Sean dos funciones  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ambas no necesariamente continuas en todo el dominio. Si  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$  y  $G(\omega) = \mathcal{F}[g(t)]$ , entonces,

$$\mathcal{F}[f(t) * g(t)] = F(\omega)G(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

**Demostración.** A objeto de demostrar el teorema se propondrá determinar la transformada de Fourier de la convolución de  $f(t)$  con  $g(t)$ , quedando

$$\mathcal{F}[f(t) * g(t)] = \int_{t=-\infty}^{\infty} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau e^{-j\omega t} dt, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Bajo el supuesto de que ambas integrales convergen, puede intercambiarse el orden de integración, obteniendo

$$\mathcal{F}[f(t) * g(t)] = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) \int_{t=-\infty}^{\infty} g(t-\tau)e^{-j\omega t} dt d\tau, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (10.36)$$

Si a la integral interna de la Ecuación (10.36), se le ejecuta el cambio de variable  $x = t - \tau$ , se tiene que  $dt = dx$  y  $t = x + \tau$ , obteniéndose que

$$\mathcal{F}[f(t) * g(t)] = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) \int_{x=-\infty}^{\infty} g(x)e^{-j\omega(x+\tau)} dx d\tau, \quad \forall \omega \in \mathbb{R},$$

lo cual conduce a

$$\mathcal{F}[f(t) * g(t)] = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{x=-\infty}^{\infty} g(x)e^{-j\omega x} dx, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (10.37)$$

Quedando la Ecuación (10.37),

$$\mathcal{F}[f(t) * g(t)] = F(\omega)G(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (10.38)$$

■

Ahora, se introducirá un teorema que permitirá establecer la equivalencia que existe al ejecutar integrales sobre un período.

**Teorema 10.2** Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal periódica de período  $T > 0$ . Entonces:

i)

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha+nT}^{\beta+nT} f(t)dt, \quad (10.39)$$

donde obviamente  $\alpha < \beta$  y ambos son reales, y  $n$  tiene el mismo significado al presentado en la Definición 10.7 de la página 253;

ii)

$$\int_{\gamma-T/2}^{\gamma+T/2} f(t)dt = \int_{-T/2}^{+T/2} f(t)dt, \quad (10.40)$$

donde  $\gamma \in \{x \in \mathbb{R} : -\frac{T}{2} \leq x \leq \frac{T}{2}\}$ .

**Demostración.** Parte i) Debido al hecho de que  $f(t)$  es periódica, se puede afirmar que

$$f(t) = f(t - nT), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (10.41)$$

donde  $n \in \mathbb{Z}$  representa la posición de la extensión periódica.

Si se define la variable  $t = \tau - nT$ , entonces al considerar la integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha+nT}^{\beta+nT} f(\tau-nT)d\tau. \quad (10.42)$$

Debido a la propiedad de periodicidad de  $f(t)$ , se tiene que al aplicar la Ecuación (10.41) en la Ecuación (10.42), la

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha+nT}^{\beta+nT} f(\tau)d\tau = \int_{\alpha+nT}^{\beta+nT} f(t)dt, \quad (10.43)$$

por cuanto  $\tau$  es una variable muda de integración y ésta puede ser cambiada a  $t$ .

Parte ii) Para demostrar lo enunciado, se estudiarán dos posibles casos de  $\gamma$ . El primero considera que  $-\frac{T}{2} \leq \gamma \leq 0$ . Entonces, al subdividir el intervalo de integración de la integral del lado izquierdo de la Ecuación (10.40) se tiene que

$$\int_{\gamma-T/2}^{\gamma+T/2} f(t)dt = \int_{\gamma-T/2}^{-T/2} f(t)dt + \int_{-T/2}^{\gamma+T/2} f(t)dt. \quad (10.44)$$

Aplicando la Ecuación (10.43) bajo el caso particular de  $n = 1$  en la integral definida desde  $\gamma - T/2$  hasta  $-T/2$  de la Ecuación (10.44), ésta arroja que

$$\int_{\gamma-T/2}^{\gamma+T/2} f(t)dt = \int_{\gamma+T/2}^{T/2} f(t)dt + \int_{-T/2}^{\gamma+T/2} f(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt. \quad (10.45)$$

Para el caso en que  $0 < \gamma \leq \frac{T}{2}$ , se obtiene que al subdividir el intervalo de integración de la integral del lado izquierdo de la Ecuación 10.40

$$\int_{\gamma-T/2}^{\gamma+T/2} f(t)dt = \int_{\gamma-T/2}^{T/2} f(t)dt + \int_{T/2}^{\gamma+T/2} f(t)dt. \quad (10.46)$$

Nuevamente, al aplicar la Ecuación (10.43), pero en este caso con  $n = -1$ , y sobre la integral definida desde  $T/2$  hasta  $\gamma + T/2$  de la Ecuación (10.46), se consigue que

$$\int_{\gamma-T/2}^{\gamma+T/2} f(t)dt = \int_{\gamma-T/2}^{T/2} f(t)dt + \int_{-T/2}^{\gamma-T/2} f(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt. \quad (10.47)$$

■

**Corolario 10.1** Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal periódica de período  $T > 0$ . Entonces,

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = \int_{T_0+nT}^{T_0+(n+1)T} f(t)dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (10.48)$$

donde  $T_0 \in \{x \in \mathbb{R} : -T \leq x \leq 0\}$ .

**Demostración.** Permitiendo que  $\gamma = T_0 + \frac{T}{2}$  en la Ecuación (10.40) del Teorema 10.2 cuando  $-T \leq T_0 \leq 0$ , se llega a que

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = \int_{T_0}^{T_0+T} f(t)dt. \quad (10.49)$$

Por otra parte, al aplicar la Ecuación (10.39) del Teorema 10.2 a la Ecuación (10.49), se obtiene que

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = \int_{T_0+nT}^{T_0+(n+1)T} f(t)dt. \quad (10.50)$$

■

## 10.4 SIMETRÍA DE SEÑALES PERIÓDICAS

El estudio de la simetría en señales periódicas permite explicar de un modo riguroso los resultados obtenidos en el análisis de señales.

**Definición 10.10 (Componente continua)** *La componente continua de una señal representa una parte de la señal que no está sometida a oscilación alguna. La misma se determina a través de*

$$f_{DC}(t) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t)dt. \quad (10.51)$$

En el caso de ser  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal determinista, periódica de período  $T$ , la Ecuación (10.51), se simplifica a

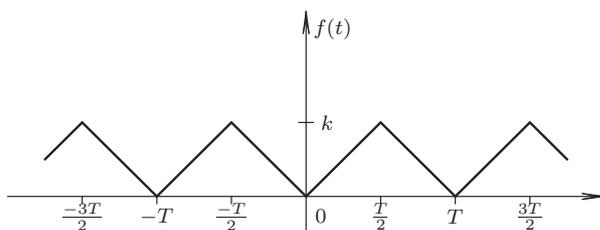
$$f_{DC}(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt. \quad (10.52)$$

La Ecuación (10.52) puede ser fácilmente estudiada a través del Lema 10.4 de la página 289, el cual es empleado para el caso del cálculo de potencia de señales periódicas.

### 10.4.1 Simetría de onda par

Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal determinista, periódica de período  $T$  y definida en el dominio del tiempo continuo. Se dice que la señal periódica  $f(t)$  posee simetría de onda par si cumple con

$$f(t) = f(-t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (10.53)$$



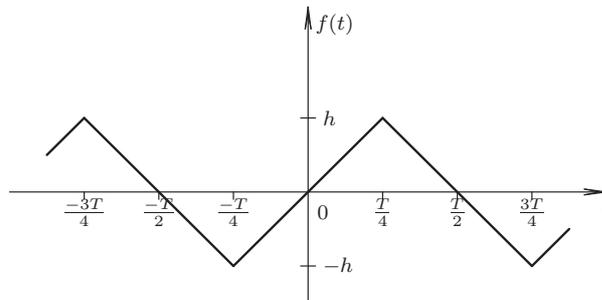
**Figura 10.2.** Señal periódica par

La Figura 10.2 muestra un ejemplo de una señal con simetría par, con la cual el lector puede verificar la condición de paridad de la señal mediante la Ecuación (10.53).

### 10.4.2 Simetría de onda impar

Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal determinista, periódica de período  $T$  y definida en el dominio del tiempo continuo. Se dice que la señal periódica  $f(t)$  posee simetría de onda impar si cumple con

$$f(-t) = -f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (10.54)$$



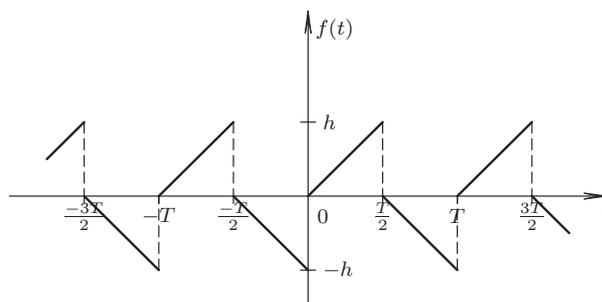
**Figura 10.3.** Señal periódica impar

Mediante el empleo de la Ecuación (10.54) puede verificarse fácilmente que la señal mostrada en la Figura 10.3 corresponde a una señal con simetría impar.

### 10.4.3 Simetría de media onda

Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal determinista, periódica de período  $T$  y definida en el dominio del tiempo continuo. Se dice que la señal periódica  $f(t)$  posee simetría de media onda si cumple con

$$f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (10.55)$$



**Figura 10.4.** Señal periódica media onda

La Figura 10.4 muestra un ejemplo de una señal con simetría de media onda. Este hecho puede verificarlo el lector, si al considerar medio período de la señal, por ejemplo, el intervalo comprendido entre 0 y  $T/2$ , y lo desplaza a la izquierda o a la derecha en  $T/2$  y este resultado lo multiplica por menos uno, la porción desplazada corresponde al medio período restante del período.

#### 10.4.4 Simetría de cuarto de onda par

Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal determinista, periódica de período  $T$  y definida en el dominio del tiempo continuo. Se dice que la señal periódica  $f(t)$  posee simetría de cuarto onda par, si tiene simetría de media onda y además tiene simetría par.

#### 10.4.5 Simetría de cuarto de onda impar

Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal determinista, periódica de período  $T$  y definida en el dominio del tiempo continuo. Se dice que la señal periódica  $f(t)$  posee simetría de cuarto onda impar, si cuenta con simetría de media onda y presenta también simetría impar.

#### 10.4.6 Simetría oculta

Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal determinista, periódica de período  $T$  y definida en el dominio continuo. Se dice que la señal periódica  $f(t)$  posee simetría oculta, si al eliminar su componente continua, también llamada componente corriente directa (DC), ella muestra algún tipo de simetría.

### 10.5 SERIE EXPONENCIAL DE FOURIER

Un enfoque alternativo al presentado en muchos textos matemáticos, es el llegar al concepto de la ampliamente conocida serie exponencial de Fourier (SEF), a partir de la serie trigonométrica de Fourier (STF), lo que implicaría tener que emplear los conceptos de funciones ortogonales para definir la STF. No obstante, existe un enfoque alternativo, el cual desarrolla la serie exponencial de Fourier (SEF) a partir de la transformada de Fourier (TF), para luego definir la serie trigonométrica de Fourier (STF) desde la serie exponencial de Fourier.

En esta sección se desarrollará el concepto de serie exponencial de Fourier desde la óptica de la transformada de Fourier. Para esto se debe enunciar y demostrar el siguiente teorema.

#### 10.5.1 Formulación

**Teorema 10.3 (Transformada de Fourier de señales periódicas)** *Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal determinista, periódica de período  $T$  y definida en el dominio del tiempo continuo, en donde no necesariamente corresponde a una función continua. Entonces, la transformada de Fourier de  $f(t)$  viene dada por*

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \delta(\omega - n\omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (10.56)$$

donde  $\alpha_n$  se define como

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \mathcal{F}[f_0(t)] \Big|_{n\omega_0} = \frac{1}{T} \int_{t_0^-}^{(t_0+T)^-} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (10.57)$$

**Demostración.** De acuerdo al Lema 10.1 de la página 254, se tiene que  $f(t)$ , por ser una señal periódica, puede ser representada por

$$f(t) = f_0(t) * \delta_T(t), \quad (10.58)$$

donde  $f_0(t)$  es la extensión principal de la señal  $f(t)$ .

Por otra parte, según el Teorema 10.1 de la página 255, si  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$  y  $G(\omega) = \mathcal{F}[g(t)]$ , entonces,

$$\mathcal{F}[f(t) * g(t)] = F(\omega)G(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (10.59)$$

Adicionalmente, del Lema 10.2 de la página 255,

$$\mathcal{F}[\delta_T(t)] = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (10.60)$$

donde  $\omega_0 = 2\pi/T$ .

Para determinar la transformada de Fourier de  $f(t)$ , se tiene que de acuerdo a las Ecuaciones (10.58), (10.59) y (10.60),

$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}[f_0(t) * \delta_T(t)] = \mathcal{F}[f_0(t)] \mathcal{F}[\delta_T(t)],$$

lo cual asegura que

$$F(\omega) = F_0(\omega) \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (10.61)$$

donde  $F_0(\omega)$  denota  $\mathcal{F}[f_0(t)]$ , y está dada por

$$F_0(\omega) = \int_{t_0^-}^{(t_0+T)^-} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

De la Ecuación (10.61), se tiene

$$F(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(\omega) \delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (10.62)$$

Reescribiendo la Ecuación (10.62), se tiene

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} F_0(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (10.63)$$

donde se denota a  $\alpha_n$  como

$$\alpha_n = \frac{F_0(n\omega_0)}{T} = \frac{1}{T} \mathcal{F}[f_0(t)] \Big|_{n\omega_0} = \frac{1}{T} \int_{t_0^-}^{(t_0+T)^-} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

■

**Observación 10.6 (Orden de  $\alpha_n$ )** De acuerdo a la Ecuación (10.57), los coeficientes  $\alpha_n$  son de orden  $O(1/n^k)$ , donde  $k \in \mathbb{N}^+$ . Este hecho exige por parte del analista considerar en todo momento las condiciones de convergencia de la integral que permite determinar  $\alpha_n$ ,

para así estudiar de manera particular los coeficientes  $\alpha_n$  que no pueden ser determinados por la Ecuación (10.57), sino por su caso particular de  $n$ .

**Observación 10.7 (Característica compleja de  $\alpha_n$ )** Los coeficientes  $\alpha_n$  corresponden a una función de  $\alpha_n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , por tal motivo puede afirmarse que

$$\alpha_n = |\alpha_n|e^{j\varphi_n}, \quad (10.64)$$

donde  $|\alpha_n|$  y  $\varphi_n$  representan respectivamente la magnitud y la fase de los coeficientes  $\alpha_n$ , las cuales suelen ser representadas gráficamente, y tiene como nombre: espectro de línea en magnitud  $|\alpha_n|$  y en fase  $\varphi_n$ , para denominar las representaciones de sendas funciones definidas en  $n \in \mathbb{Z}$ ,

**Corolario 10.2** Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal periódica de período  $T$ . Entonces:

- i)  $|\alpha_n| : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función par de la variable entera  $n$ ;
- ii)  $\varphi_n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función impar de la variable entera  $n$ .

**Demostración.** De acuerdo al Teorema 10.3,

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \int_{t_0^-}^{(t_0+T)^-} f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (10.65)$$

Si se denota a  $\alpha_n = r_n + jx_n$ . Entonces,

$$\alpha_n = r_n + jx_n = \frac{1}{T} \int_{t_0^-}^{(t_0+T)^-} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt - j \frac{1}{T} \int_{t_0^-}^{(t_0+T)^-} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (10.66)$$

Ahora, considere  $\alpha_{-n}$

$$\alpha_{-n} = r_{-n} + jx_{-n} = \frac{1}{T} \int_{t_0^-}^{(t_0+T)^-} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt + j \frac{1}{T} \int_{t_0^-}^{(t_0+T)^-} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (10.67)$$

Al comparar las Ecuaciones (10.66) y (10.67) se puede asegurar que

$$\alpha_{-n} = r_n - jx_n = \overline{\alpha_n}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (10.68)$$

donde  $\bar{\cdot}$  denota el conjugado de una cantidad perteneciente a los números complejos.

Por otra parte, de acuerdo a la Ecuación (10.64), y al expresar  $\alpha_n$  y su conjugado en la Ecuación (10.68), se obtiene que

$$|\alpha_{-n}|e^{j\varphi_{-n}} = |\alpha_n|e^{-j\varphi_n}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (10.69)$$

Al comparar las magnitudes de la Ecuación (10.69) se demuestra la parte i), y al comparar las fases de la Ecuación (10.69) se demuestra la parte ii).

Más aún, de las Ecuaciones (10.66) y (10.67) se puede afirmar que  $r_n$  es una función par de la variable entera  $n$ , y  $x_n$  es una función impar de la variable entera  $n$ , es decir,

$$\begin{aligned} r_{-n} &= r_n, & \forall n \in \mathbb{Z}; \\ x_{-n} &= -x_n, & \forall n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (10.70)$$

Aun cuando esta forma de expresar los coeficientes de la serie exponencial no es usualmente empleada. ■

Ahora, a objeto de formular la serie exponencial de Fourier, se enunciará el siguiente teorema.

**Teorema 10.4 (Serie Exponencial de Fourier)** *Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal determinista, periódica de período  $T$  y definida en el dominio continuo, en donde no necesariamente corresponde a una función continua. Entonces, la serie exponencial de Fourier de  $f(t)$  viene dada por*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (10.71)$$

donde  $\alpha_n$  se define como

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \mathcal{F}[f_0(t)] \Big|_{n\omega_0} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{(t_0+T)^-} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (10.72)$$

**Demostración.** A objeto de demostrar el teorema, se recurrirá a la definición de transformada inversa de Fourier mostrada en la Definición 10.2 de la página 250.

Aplicando la Ecuación (10.5) con el fin de determinar la función  $f(t)$  correspondiente a la transformada de Fourier de una señal periódica, se tiene,

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \delta(\omega - n\omega_0) \right] e^{j\omega t} d\omega. \quad (10.73)$$

Debido al hecho de que tanto la operación de integración como la de sumatoria convergen y ambas son lineales, se puede permutar el orden de las operaciones de la Ecuación (10.73), quedando,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) e^{j\omega t} d\omega \right]. \quad (10.74)$$

De la teoría de Distribución (Brea, 2006, Capítulo 1), se tiene que de la Ecuación (10.74),

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (10.75)$$

■

**Observación 10.8** *De acuerdo con la Ecuación (10.63) la transformada de Fourier (TF) de una señal periódica  $f(t)$  está definida por*

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \delta(\omega - n\omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (10.76)$$

**Observación 10.9** *El intervalo de integración en el cual ha sido definido el coeficiente  $\alpha_n$  ha sido generalizado para un intervalo desde  $t_0$  hasta  $t_0 + T$ , es decir,*

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (10.77)$$

debido a la periodicidad  $T$  de la función  $f(t)e^{-jn\omega_0 t}$ , y de acuerdo al Corolario 10.1 de la página 257.

Por otra parte, el coeficiente  $\alpha_0$  viene a significar la componente de corriente directa (DC) de la señal  $f(t)$ , quedando

$$\alpha_0 = \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \quad (10.78)$$

como consecuencia del Corolario 10.1.

**Definición 10.11 ( $n$ -ésima armónica)** Se denomina  $n$ -ésima armónica de una señal periódica a la componente sinusoidal o cosinusoidal de frecuencia  $\omega_n = n\omega_0$ . La primera componente, es decir,  $\omega_1 = \omega_0$  se conoce con el nombre de componente fundamental.

#### ■ EJEMPLO 10.4

Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal periódica con extensión principal

$$f_0(t) = \begin{cases} -k, & \forall -\frac{T}{2} < t < 0; \\ k, & \forall 0 < t < \frac{T}{2}, \end{cases} \quad (10.79)$$

donde  $k \in \mathbb{R}$  es una constante positiva.

Para la señal definida por la Ecuación (10.79) determine:

- i) serie exponencial de Fourier;
- ii) representación gráfica del espectro de línea de sus coeficientes  $\alpha_n$ ;
- iii) representación gráfica del espectro de la señal, es decir, gráfica de  $F(\omega)$ .

#### Solución

Parte i)

Según el Teorema 10.4 de la página 263

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^0 -k e^{-jn\omega_0 t} dt + \int_0^{\frac{T}{2}} k e^{-jn\omega_0 t} dt \right]. \quad (10.80)$$

Al determinar la primitiva de sendas integrales, se obtiene que

$$\alpha_n = \frac{k}{T} \left[ \frac{e^{-jn\omega_0 t}}{jn\omega_0} \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 - \frac{e^{-jn\omega_0 t}}{jn\omega_0} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right], \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (10.81)$$

Tomando en cuenta que  $\omega_0 T = 2\pi$ , y luego de algunas operaciones algebraica se obtiene que

$$\alpha_n = \frac{k}{jn\pi} (1 - e^{jn\pi}), \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (10.82)$$

A objeto de obtener el término  $\alpha_n$  debe particularizarse la definición de  $\alpha_n$  para el caso  $n = 0$ , esto es,

$$\alpha_0 = \frac{1}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^0 -k dt + \int_0^{\frac{T}{2}} k dt \right] = 0. \quad (10.83)$$

Note que el núcleo  $e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{n=0} = 1$ .

En consecuencia, de las Ecuaciones (10.82) y (10.83), se puede afirmar que

$$\alpha_n = \begin{cases} 0, & \forall n \in \mathbb{Z}, \text{ par;} \\ \frac{2k}{jn\pi}, & \forall n \in \mathbb{Z}, \text{ impar.} \end{cases} \tag{10.84}$$

Entonces,

$$f(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{2k}{jn\pi} e^{jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{10.85}$$

Más aún, de acuerdo al Teorema 10.3 de la página 260, la transformada de Fourier de la señal  $f(t)$  está dada por

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{2k}{jn\pi} \delta(\omega - n\omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \tag{10.86}$$

Parte ii)

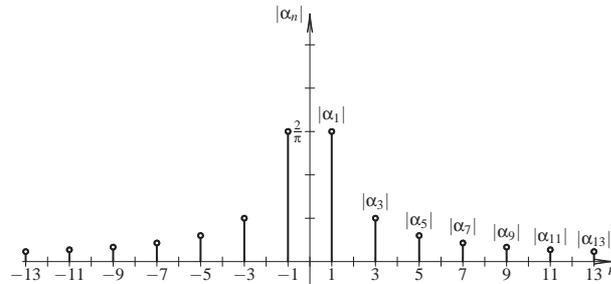


Figura 10.5. Espectro de línea en magnitud del Ejemplo 10.4

La Figura 10.5 muestra el espectro de línea en magnitud de los coeficientes  $\alpha_n$  de la señal periódica  $f(t)$  expresados en la Ecuación (10.84), para un caso particular de  $k = 1$ . Además, la Figura 10.6 de la página 266 exhibe el espectro de línea en fase de la señal  $f(t)$ . Note que ambas gráficas están dibujadas sobre el eje de la variable discreta o variable entera  $n \in \mathbb{Z}$ .

Más aún, los términos  $\alpha_n$  definidos por la Ecuación (10.84) pueden ser representados matemáticamente a través de la Definición 1.20 de la página 11, quedando

$$\alpha_n = \alpha[n] = \sum_{\substack{q=-\infty \\ q \text{ impar}}}^{\infty} \frac{2k}{jq\pi} \delta[n - q], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{10.87}$$

Por otra parte,  $|\alpha_n|$  y  $\varphi_n$  pueden ser expresadas por

$$|\alpha_n| = \sum_{\substack{q=-\infty \\ q \text{ impar}}}^{\infty} \frac{2k}{|q|\pi} \delta[n - q], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{10.88}$$

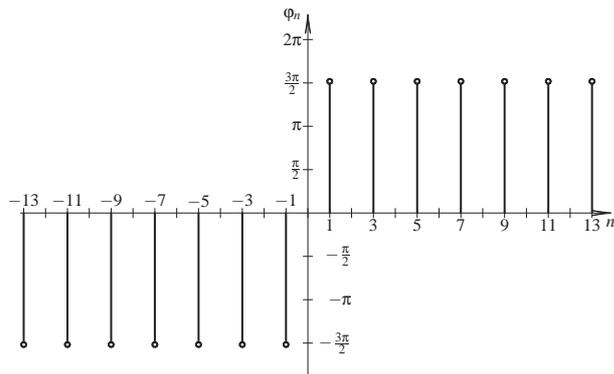


Figura 10.6. Espectro de línea en fase del Ejemplo 10.4

$$\varphi_n = \sum_{\substack{q=-\infty \\ q \text{ impar}}}^{\infty} \frac{3\pi}{2} \text{sgn}(n) \delta[n-q], \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (10.89)$$

Parte iii)

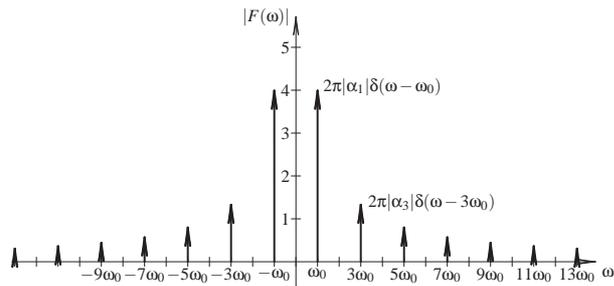


Figura 10.7. Espectro de  $f(t)$  en magnitud del Ejemplo 10.4

La Figura 10.7 ilustra el espectro en magnitud de la señal  $f(t)$  como función del dominio continuo  $\omega \in \mathbb{R}$ , para el caso particular de  $k = 1$ . Note que el espectro de la señal  $f(t)$  mostrado en la Figura 10.7 se diferencia en que cada impulso  $\delta(\omega - n\omega_0)$  es alterado por un factor de  $2\pi$ , con relación al espectro de línea en magnitud mostrado en la Figura 10.5.

La Figura 10.8 de la página 267 muestra sobre el eje de la variable independiente continua  $\omega \in \mathbb{R}$ , la fase correspondiente a cada impulso  $\delta(\omega - n\omega_0)$ . Note además que para aquellos valores en donde el espectro de magnitud es nulo, la fase para su correspondiente valor de  $\omega$  no está definida, debido a que la fase del número cero no está definida.

Como comentarios finales de este ejemplo, puede destacarse que de los gráficos de espectros en magnitud se tiene que para  $\omega = 0$  la magnitud del espectro es cero, lo que corrobora que la componente DC es nula. Por otra parte, observe que únicamente existen armónicas de orden impar, es decir,  $\omega_0, 3\omega_0, 5\omega_0, \dots$  siendo una

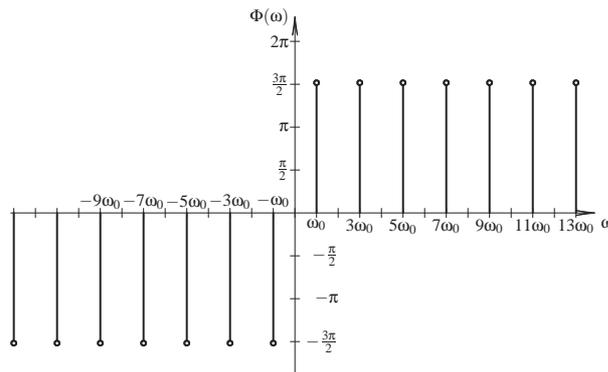


Figura 10.8. Espectro de  $f(t)$  en fase del Ejemplo 10.4

señal de simetría de media onda. Además, la señal también es de simetría impar y sus términos  $\alpha_n$  son todos imaginarios puros.

Considerando que los comentarios finales del ejemplo no es una conclusión general, las observaciones expuestas podrías inducir al lector a la realización de un estudio teórico de las implicaciones de la simetría de señales periódicas y el tipo de coeficientes  $\alpha_n$ , estudio realizado por diversos autores del tema.

■ EJEMPLO 10.5

Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal periódica con extensión principal

$$f_0(t) = \begin{cases} k, & \forall |t| < \frac{T}{4}; \\ -k, & \forall \frac{T}{4} < |t| < \frac{T}{2}, \end{cases} \tag{10.90}$$

donde  $k \in \mathbb{R}$  es una constante positiva.

Para la señal definida por la Ecuación (10.90) determine:

- i) serie exponencial de Fourier;
- ii) representación gráfica del espectro de línea de sus coeficientes  $\alpha_n$ .

**Solución**

Parte i)

Aplicando nuevamente el Teorema 10.4 de la página 263, se tiene que

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}} -k e^{-jn\omega_0 t} dt + \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} k e^{-jn\omega_0 t} dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} -k e^{-jn\omega_0 t} dt \right]. \tag{10.91}$$

Al determinar sendas primitivas de la Ecuación (10.91), se tiene que

$$\alpha_n = \frac{k}{T} \left[ -\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}} + \frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0} \Big|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} - \frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0} \Big|_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \right], \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{10.92}$$

Tomando en cuenta que  $\omega_0 T = 2\pi$ , de la Ecuación (10.92) se arroja que

$$\alpha_n = \frac{k}{-j2n\pi} \left[ e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{4}} + e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} + e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \right], \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (10.93)$$

y en consecuencia

$$\alpha_n = \frac{k}{n\pi} [2 \operatorname{sen}(n\pi/2) - \operatorname{sen}(n\pi)] = \frac{2k}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi/2), \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (10.94)$$

debido a que  $\operatorname{sen}(n\pi) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

El resultado mostrado en la Ecuación (10.94) puede ser obtenido también a través de la definición de  $\alpha_n$  basada en la transformada de Fourier de la extensión principal expresada en la Ecuación (10.57) del Teorema 10.3.

En virtud de que la Ecuación (10.94) no es válida para el caso particular  $n = 0$ , debe entonces determinarse para ese caso particular, es decir,

$$\alpha_0 = \frac{1}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}} -k dt + \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} k dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} -k dt \right] = 0. \quad (10.95)$$

Note que de la Ecuación (10.94) se puede afirmar que los coeficientes  $\alpha_n = 0$  para todo  $n$  par, y además de la expresión de la señal, ésta tiene simetría de media onda.

Otro aspecto a resaltar es el hecho de que la señal posee simetría par y los coeficientes  $\alpha_n$  son todos reales.

Tomando en consideración las Ecuaciones (10.94) y (10.95), se puede afirmar que

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{2k(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\pi}, & \forall n \in \mathbb{Z}, \text{ impar}; \\ 0, & \forall n \in \mathbb{Z}, \text{ par}. \end{cases} \quad (10.96)$$

Parte ii)

La Figura 10.9 de la página 269 presenta el espectro de línea en magnitud de los coeficientes de la serie exponencial de Fourier de la señal  $f(t)$ , en donde su extensión principal es definida por la Ecuación (10.90), para el caso de  $k = 1$ . Note que no existe diferencia alguna entre los espectros de línea de los Ejemplos 10.4 y 10.5, debido a que las formas de ambas funciones periódicas son idénticas, excepto su traslación en un tiempo de  $T/4$ , lo cual únicamente altera el espectro de línea en fase, hecho que es mostrado en la Figura 10.10 de la página 269.

Por otra parte, observe que el espectro de línea en fase ilustrado en la Figura 10.10 corresponde a una función impar de la variable independiente  $n$ . Este resultado fue demostrado en el Corolario 10.2 de la página 262.

### ■ EJEMPLO 10.6

Sea la señal periódica definida en el dominio continuo y de modelo matemático

$$f(t) = \operatorname{sen}^4(\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (10.97)$$

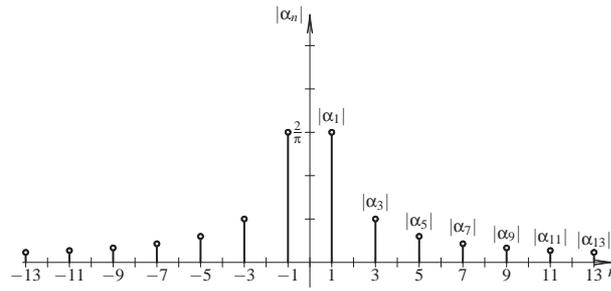


Figura 10.9. Espectro de línea en magnitud del Ejemplo 10.5

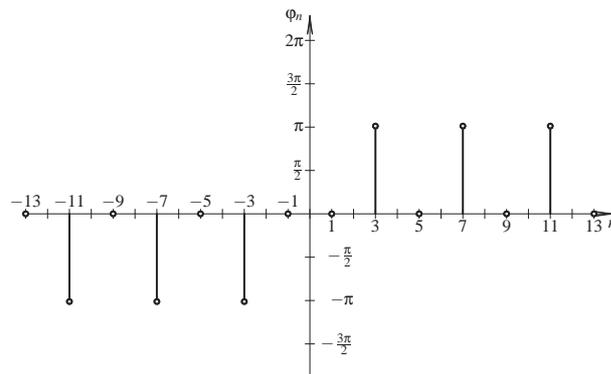


Figura 10.10. Espectro de línea en fase del Ejemplo 10.4

Determine la serie exponencial de Fourier (SEF) de la señal definida por la Ecuación (10.97), así como su transformada de Fourier.

**Solución**

Para encontrar la solución al ejemplo se expresará la función  $\text{sen}(\omega_0 t)$  en términos de exponenciales, es decir

$$\text{sen}(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{j2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{10.98}$$

Por otra parte, del binomio de Newton se tiene que

$$(a - b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k a^{n-k} b^k, \tag{10.99}$$

donde aquí  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

Aplicando la Ecuación (10.99) al caso particular de  $n = 4$  se tiene

$$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3 b + 6a^2 b^2 - 4ab^3 + b^4. \tag{10.100}$$

Haciendo  $a = e^{j\omega_0 t}$  y  $b = e^{-j\omega_0 t}$ , se tiene que para todo  $t \in \mathbb{R}$

$$\text{sen}^4(\omega_0 t) = \frac{1}{(j2)^4} \left( e^{j4\omega_0 t} - 4e^{j3\omega_0 t} e^{-j\omega_0 t} + 6e^{j2\omega_0 t} e^{-j2\omega_0 t} - 4e^{j\omega_0 t} e^{-j3\omega_0 t} + e^{-j4\omega_0 t} \right). \quad (10.101)$$

Simplificando los términos en la Ecuación (10.101) y ordenándolos en modo ascendente con relación a su exponente, se obtiene que

$$f(t) = \frac{1}{16} e^{-j4\omega_0 t} - \frac{1}{4} e^{-j2\omega_0 t} + \frac{3}{8} - \frac{1}{4} e^{j2\omega_0 t} + \frac{1}{16} e^{j4\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (10.102)$$

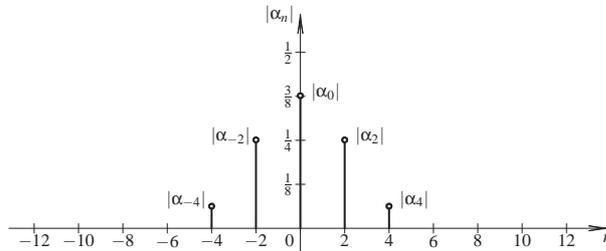
resultado que puede ser reexpresado como

$$f(t) = \frac{3}{8} + \sum_{\substack{n=-2 \\ n \neq 0}}^2 (-1)^n \frac{1}{4^{|n|}} e^{j2n\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (10.103)$$

En cuanto a la transformada de Fourier de la señal se tiene que al aplicar el Teorema 10.3

$$F(\omega) = 2\pi \frac{3}{8} \delta(\omega) + 2\pi \sum_{\substack{n=-2 \\ n \neq 0}}^2 (-1)^n \frac{1}{4^{|n|}} \delta(\omega - 2n\omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (10.104)$$

La Figura 10.11 presenta el espectro de línea en magnitud de los correspondientes coeficientes  $\alpha_n$  de la serie exponencial de Fourier. Observe que el espectro además de estar limitado en ancho de banda, también ocupa armónicas de orden par, es decir, para  $n \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ . Además, se puede verificar que los coeficientes son puramente reales, esto es,  $\alpha_n \in \mathbb{R}$ , y que la señal  $f(t)$  es una función par de la variable independiente  $t$ .



**Figura 10.11.** Espectro de línea en magnitud del Ejemplo 10.6

La Figura 10.12 ilustra el espectro de línea en fase de los coeficientes  $\alpha_n$  de la serie exponencial de Fourier. Observe que la fase del coeficiente  $\alpha_2$  es equivalente a  $\pi$  por cuanto  $n = 2$ , lo que significa que en el dominio del espectro de la señal  $\omega$  las variaciones de ángulos son positivas, es decir, en sentido positivo o antihorario, y en consecuencia el argumento principal de un número real negativo es  $\pi$ . Por el contrario, cuando  $n = -2$  éste está girando sobre el plano complejo en sentido negativo u horario, teniendo un ángulo de  $-\pi$ . Note que los coeficientes  $\alpha_n$  reales positivos tiene una fase de cero, lo cual es indicado para cada caso.

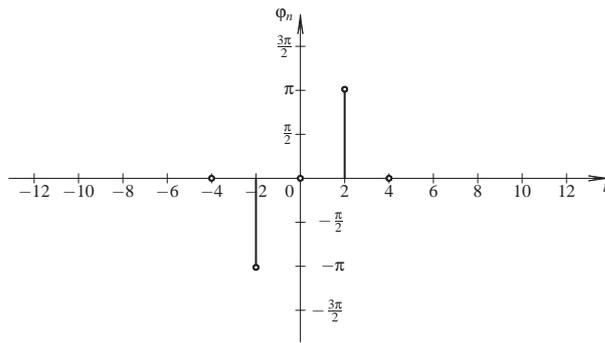


Figura 10.12. Espectro de línea en fase del Ejemplo 10.6

De los ejemplos estudiados se ha podido distinguir que existe una relación entre la paridad de la función y la naturaleza de los coeficientes de la serie exponencial de Fourier, en cuanto a si son reales, imaginarios o complejos.

Para esto se tiene el siguiente lema y teorema.

**Lema 10.3** Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Se dice que:

i) si  $f(t)$  es una función par de la variable independiente  $t$ , entonces,

$$\int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt; \tag{10.105}$$

ii) si  $f(t)$  es una función impar de la variable independiente  $t$ , entonces,

$$\int_{-a}^a f(t)dt = 0. \tag{10.106}$$

**Demostración.** Parte i) Se tiene que si  $f(t)$  es una función par de la variable independiente  $t$ . Entonces,  $f(-t) = f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Basado en este hecho, se tiene que

$$\int_{-a}^a f(t)dt = \int_{-a}^0 f(t)dt + \int_0^a f(t)dt. \tag{10.107}$$

Al hacer el cambio de variable de  $\tau = -t$  en la integral de la Ecuación (10.107) que va desde  $-a$  hasta 0, se tiene que

$$\int_{-a}^0 f(t)dt = - \int_a^0 f(-\tau)d\tau + \int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(-\tau)d\tau + \int_0^a f(t)dt. \tag{10.108}$$

En consecuencia,

$$\int_{-a}^a f(t)dt = \int_0^a f(\tau)d\tau + \int_0^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt, \tag{10.109}$$

debido a que  $\tau$  es una variable muda y  $f(-t) = f(t)$ .

Parte ii) De acuerdo a la definición de función impar,  $f(-t) = -f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Por otra parte, se tiene que

$$\int_{-a}^a f(t)dt = \int_{-a}^0 f(t)dt + \int_0^a f(t)dt. \quad (10.110)$$

Si se cambia la variable  $t$  por  $\tau = -t$  en la integral de la Ecuación (10.110) que va desde  $-a$  hasta 0, se obtiene que

$$\int_{-a}^a f(t)dt = - \int_a^0 f(-\tau)d\tau + \int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(-\tau)d\tau + \int_0^a f(t)dt. \quad (10.111)$$

Ahora, como  $f(-t) = -f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , se puede afirmar que

$$\int_{-a}^a f(t)dt = - \int_0^a f(\tau)d\tau + \int_0^a f(t)dt = 0, \quad (10.112)$$

debido al hecho de que  $\tau$  es una variable muda. ■

**Teorema 10.5** Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal periódica de período  $T > 0$ . Se dice que:

i) si  $f(t)$  es una función par de la variable independiente  $t$ . Entonces, sus coeficientes de serie exponencial de Fourier son reales, es decir,  $\alpha_n \in \mathbb{R}$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ;

ii) si  $f(t)$  es una función impar de la variable independiente  $t$ . Entonces, sus coeficientes de serie exponencial de Fourier son imaginarios puros, es decir,  $\alpha_n \in \mathbb{I}$ , para todo  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

**Demostración.** Parte i) De la definición de los coeficientes  $\alpha_n$  del Teorema 10.3 de la página 260, se tiene que,

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (10.113)$$

Al expresar el núcleo  $e^{-jn\omega_0 t} = \cos(n\omega_0 t) - j\sin(n\omega_0 t)$ , se consigue que la Ecuación (10.113) puede ser escrita como

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt - j\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega_0 t)dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (10.114)$$

Si  $f(t)$  es una función par de la variable independiente  $t$ , entonces, de acuerdo al Lema 10.3 de la página 271 y tomando en cuenta que el producto de funciones pares arroja una función par, y el producto de una función par por otra impar produce una función impar, se tiene que

$$\alpha_n = 2\frac{1}{T} \int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (10.115)$$

Parte ii) De la Ecuación (10.114), y considerando que el producto de dos funciones impares de la misma variable independiente  $t$  produce una función par, y teniendo que el producto de una función par por otra impar produce una función impar, sumado al Lema 10.3 de la página 271 permite asegurar que

$$\alpha_n = -2j\frac{1}{T} \int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega_0 t)dt \in \mathbb{I}, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (10.116)$$

lo que obliga a excluir el caso  $n = 0$  debido a que  $\sin(n\omega_0 t)|_{n=0} = 0$  y este caso se obtiene con la definición de  $\alpha_0$ . ■

### 10.5.2 Propiedades de las series exponenciales

En esta parte, se estudiarán dos propiedades básicas que son empleadas frecuentemente para la determinación de las series exponenciales de Fourier de señales periódicas, como son: la propiedad de derivación y la de traslación en tiempo. Estas propiedades serán presentadas a través de los siguientes teoremas.

#### 10.5.2.1 Derivada $m$ -ésima

**Teorema 10.6 (Derivada)** Sean  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dos señales deterministas, periódicas, ambas de período  $T$  y definidas en el dominio del tiempo continuo, en donde no necesariamente corresponden ambas a funciones continuas. Si  $g(t)$  es la derivada  $m$ -ésima de  $f(t)$ , entonces

$$\alpha_n^{[g]} = (jn\omega_0)^m \alpha_n^{[f]}, \quad \forall n \neq 0, \tag{10.117}$$

donde  $\alpha_n^{[g]}$  y  $\alpha_n^{[f]}$  son respectivamente los coeficientes de las series exponenciales de Fourier de las señales periódicas  $g(t)$  y  $f(t)$ .

**Demostración.** En virtud de que ambas señales cuentan con una expresión de serie exponencial de Fourier, se tiene:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^{[f]} e^{jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}; \tag{10.118a}$$

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^{[g]} e^{jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{10.118b}$$

donde  $\alpha_n^{[f]}$  y  $\alpha_n^{[g]}$  son respectivamente los coeficientes de series de Fourier de las señales periódicas  $f(t)$  y  $g(t)$ .

Al expresar la derivada  $m$ -ésima de la señal  $f(t)$  de la Ecuación (10.118a), dado que la señal  $g(t) = d^m[f(t)]/dt^m$ , se obtiene

$$g(t) = \frac{d^m f(t)}{dt^m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (jn\omega_0)^m \alpha_n^{[f]} e^{jn\omega_0 t} \tag{10.119}$$

Entonces al comparar las Ecuaciones (10.118b) y (10.119), se puede afirmar que  $\alpha_n^{[g]} = (jn\omega_0)^m \alpha_n^{[f]}$  para todo  $n \neq 0$ . ■

**10.5.2.2 Traslación en el dominio continuo  $t$**  Con respecto a la traslación de una señal con relación a otra y en donde su única diferencia es su traslación, véase el siguiente teorema.

**Teorema 10.7 (Traslación en el dominio  $t$ )** Sean  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dos señales deterministas, periódicas, ambas de período  $T$  y definidas en un dominio continuo  $t$ , en donde no necesariamente corresponden ambas a funciones continuas. Si  $g(t) = f(t - \tau)$ , entonces

$$\alpha_n^{[g]} = \alpha_n^{[f]} e^{-jn\omega_0 \tau}, \quad \forall n \neq 0, \tag{10.120}$$

donde  $\alpha_n^{[g]}$  y  $\alpha_n^{[f]}$  son respectivamente los coeficientes de sendas series exponenciales de Fourier de las señales periódicas  $g(t)$  y  $f(t)$ .

**Demostración.** En virtud de que ambas señales cuentan con una expresión de serie exponencial de Fourier, se tiene:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^{[f]} e^{jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}; \quad (10.121a)$$

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^{[g]} e^{jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (10.121b)$$

donde  $\alpha_n^{[f]}$  y  $\alpha_n^{[g]}$  son respectivamente los coeficientes de sendas series de Fourier de las señales periódicas  $f(t)$  y  $g(t)$ .

Por otra parte, en virtud al hecho planteado en la hipótesis del teorema, se tiene que  $g(t) = f(t - \tau)$ , entonces

$$g(t) = f(t - \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^{[f]} e^{jn\omega_0(t-\tau)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^{[f]} e^{-jn\omega_0\tau} e^{jn\omega_0 t}. \quad (10.122)$$

Comparando las Ecuaciones (10.121b) y (10.122), se tiene que

$$\alpha_n^{[g]} = \alpha_n^{[f]} e^{-jn\omega_0\tau}, \quad \forall n \neq 0, \quad (10.123)$$

lo que demuestra el teorema. ■

### ■ EJEMPLO 10.7

Sea la señal definida en el dominio continuo del Ejemplo 10.4 de la página 264.

Determine la serie exponencial de Fourier empleando la propiedad de derivación, y compare los resultados.

### Solución

En este caso es realmente importante definir detalladamente la extensión principal de la señal  $f(t)$  por cuanto al derivar la señal, ésta presentará términos impulsivos, los cuales tienen contribuciones significativas al ser incluidas en las integrales que definen los coeficientes de la serie exponencial de Fourier.

Tomando en cuenta lo anterior, se definirá el dominio de la extensión principal al intervalo definido por  $-\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2}$ .

Note que la definición del dominio de la extensión principal incluye dos discontinuidades finitas para  $t = -\frac{T}{2}$  y  $t = 0$ .

Al obtener la primera derivada de la señal se tiene que la extensión principal de la señal derivada es

$$g(t) = \frac{df(t)}{dt} = -2k\delta(t + \frac{T}{2}) + 2k\delta(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (10.124)$$

De acuerdo al Teorema 10.6, la relación que existe entre  $\alpha_n^{[g]}$  y  $\alpha_n^{[f]}$  está definida por

$$\alpha_n^{[g]} = jn\omega_0\alpha_n^{[f]}, \quad \forall n \neq 0. \quad (10.125)$$

Ahora, los coeficientes de la serie exponencial de Fourier de la señal  $g(t)$  es

$$\alpha_n^{[g]} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [-2k\delta(t + \frac{T}{2}) + 2k\delta(t)] e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \forall n \neq 0. \quad (10.126)$$

Tomando en cuenta las propiedades de la función delta de Dirac, se tiene que

$$\alpha_n^{[g]} = \frac{1}{T} (-2ke^{-jn\omega_0 \frac{T}{2}} + 2k) = \frac{2k}{T} (1 - e^{-jn\pi}), \quad \forall n \neq 0. \quad (10.127)$$

Analizando la Ecuación (10.127) se tiene que

$$\alpha_n^{[g]} = \begin{cases} 0, & \forall n \neq 0, n \text{ par}; \\ \frac{4k}{T}, & \forall n \text{ impar}. \end{cases} \quad (10.128)$$

Aplicando la Ecuación (10.125) a lo obtenido en la Ecuación (10.128), se tiene que

$$\alpha_n^{[f]} = \begin{cases} 0, & \forall n \neq 0, n \text{ par}; \\ \frac{2k}{jn\pi}, & \forall n \text{ impar}. \end{cases} \quad (10.129)$$

Como claramente  $\alpha_0^{[f]} = 0$ , se tiene que

$$\alpha_n^{[f]} = \begin{cases} 0, & \forall n \text{ par}; \\ \frac{2k}{jn\pi}, & \forall n \text{ impar}. \end{cases} \quad (10.130)$$

Observe que el resultado conseguido es el mismo al mostrado en la Ecuación (10.84) de la página 265.

■ EJEMPLO 10.8

Sea la señal  $f(t)$  definida en el Ejemplo 10.5 de la página 267. Basado en el resultado obtenido en el Ejemplo 10.4, determine la serie exponencial de Fourier de la señal  $f(t)$  del Ejemplo 10.5.

**Solución**

Denote a la señal del Ejemplo 10.5 como  $g(t)$ . Entonces,

$$g(t) = f(t + \frac{T}{4}), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (10.131)$$

Del resultado del Ejemplo 10.4 se puede decir que

$$\alpha_n^{[f]} = \begin{cases} 0, & \forall n \in \mathbb{Z}, \text{ par}; \\ \frac{2k}{jn\pi}, & \forall n \in \mathbb{Z}, \text{ impar}. \end{cases} \quad (10.132)$$

Aplicando el Teorema 10.7 de la página 273 a la Ecuación (10.132), se consigue que

$$\alpha_n^{[g]} = \begin{cases} 0, & \forall n \in \mathbb{Z}, \text{ par}; \\ \frac{2k}{jn\pi} e^{jn\pi/2}, & \forall n \in \mathbb{Z}, \text{ impar}, \end{cases} \quad (10.133)$$

por cuanto

$$\alpha_n^{[g]} = \alpha_n^{[f]} e^{jn\frac{\omega_0 T}{4}} = \alpha_n^{[f]} e^{jn\frac{\omega_0 T}{4}} = \alpha_n^{[f]} e^{j\frac{n\pi}{2}}. \quad (10.134)$$

Como para todo  $n$  impar  $e^{j\frac{n\pi}{2}} = j \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})$ , la Ecuación (10.134) arroja como resultado

$$\alpha_n^{[g]} = \begin{cases} 0, & \forall n \in \mathbb{Z}, \text{ par}; \\ \frac{2k}{n\pi} \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2}), & \forall n \in \mathbb{Z}, \text{ impar}. \end{cases} \quad (10.135)$$

La Ecuación (10.135) corrobora el resultado obtenido en el Ejemplo 10.5.

## 10.6 SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER

Una representación alterna a la serie exponencial de Fourier es la bien conocida serie trigonométrica de Fourier.

Para esto, considere el siguiente teorema.

**Teorema 10.8 (Serie trigonométrica de Fourier)** *Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal determinista, periódica de período  $T$  y definida en el dominio continuo  $t$ , en donde no necesariamente corresponde a una función continua. Entonces, la serie trigonométrica de Fourier de  $f(t)$  viene dada por*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)], \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (10.136)$$

donde  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  son definidos por

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0^-}^{(t_0+T)^-} f(t) dt. \quad (10.137a)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0^-}^{(t_0+T)^-} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+, \quad (10.137b)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0^-}^{(t_0+T)^-} f(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+, \quad (10.137c)$$

lo que constituyen los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier.

**Demostración.** Del desarrollo en serie exponencial de Fourier, se tiene que

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (10.138)$$

De la Ecuación (10.138), se puede expresar que

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha_n e^{jn\omega_0 t} + \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (10.139)$$

Al hacer un cambio de variable en la primera suma de la Ecuación (10.139), es decir, al hacer  $m = -n$  y renombrar la variable  $m$  por  $n$ , dado que es una variable muda, se tiene que

$$f(t) = \alpha_0 + \sum_{n=\infty}^1 \alpha_{-n} e^{-jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (10.140)$$

Ahora, en virtud de que ejecutar la suma desde  $n = \infty$  hasta 1, es equivalente a sumar desde  $n = 1$  hasta  $\infty$ , se puede reescribir la primera suma de la Ecuación (10.140), con lo cual se tiene que

$$f(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} e^{-jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (10.141)$$

Como consecuencia de que los términos exponenciales pueden ser expresados en función de su representación binomial, se puede obtener

$$f(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} [\cos(n\omega_0 t) - j \operatorname{sen}(n\omega_0 t)] + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n [\cos(n\omega_0 t) + j \operatorname{sen}(n\omega_0 t)], \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (10.142)$$

Rearreglando los términos  $\cos(n\omega_0 t)$  y  $\operatorname{sen}(n\omega_0 t)$ , se tiene que

$$f(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n + \alpha_{-n}] \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} j[\alpha_n - \alpha_{-n}] \operatorname{sen}(n\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (10.143)$$

donde al denominar  $a_n = \alpha_n + \alpha_{-n}$  y  $b_n = j[\alpha_n - \alpha_{-n}]$  se tiene

$$f(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (10.144)$$

Ahora, recordando la definición de  $\alpha_n$ , se obtiene

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \int_{t_0^-}^{(t_0+T)^-} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (10.145)$$

Al emplear la Ecuación (10.145), se tiene que para todo  $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

$$a_n = \alpha_n + \alpha_{-n} = \frac{1}{T} \int_{t_0^-}^{(t_0+T)^-} f(t) [e^{-jn\omega_0 t} + e^{jn\omega_0 t}] dt = \frac{2}{T} \int_{t_0^-}^{(t_0+T)^-} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt. \quad (10.146)$$

Empleando un razonamiento similar,

$$b_n = j[\alpha_n - \alpha_{-n}] = \frac{1}{T} \int_{t_0^-}^{(t_0+T)^-} f(t) j[e^{-jn\omega_0 t} - e^{jn\omega_0 t}] dt = \frac{2}{T} \int_{t_0^-}^{(t_0+T)^-} f(t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt. \quad (10.147)$$

En el caso de  $\alpha_0$ , éste se obtiene al evaluar  $\alpha_n|_{n=0}$  de la Ecuación (10.72), con lo cual se obtiene

$$\alpha_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0^-}^{(t_0+T)^-} f(t) dt = \frac{a_0}{2}. \quad (10.148)$$

■

**Observación 10.10** De la demostración del Teorema 10.8, se puede afirmar que para todo  $n \geq 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= 2\alpha_0, \\ a_n &= \alpha_n + \alpha_{-n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+, \\ b_n &= j[\alpha_n - \alpha_{-n}], \quad \forall n \in \mathbb{N}_+, \end{aligned}$$

donde  $\mathbb{N}_+$  es el conjunto de los enteros positivos.

Estas ecuaciones permiten relacionar los coeficientes de las series exponenciales y trigonométricas de Fourier, para una misma señal periódica, y en consecuencia se tiene que

$$\alpha_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}_+, \quad (10.149)$$

que al emplear el Corolario 10.2 de la página 262, el cual establece:

- a)  $|\alpha_{-n}| = |\alpha_n|$ , es decir, la magnitud de los coeficientes  $\alpha_n$  es una función par de la variable entera  $n > 0$ ;
- b)  $\varphi_{-n} = -\varphi_n$ , es decir, la fase de los términos  $\alpha_n$  es una función impar de la variable entera  $n > 0$ ,

se obtiene los términos  $\alpha_n$  para todo  $n < 0$ .

No obstante, este hecho mostrado en la Observación 10.10 puede ser presentado formalmente a través del siguiente teorema.

**Teorema 10.9** Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal determinista, periódica de período  $T$  y definida en el dominio continuo  $t$ , en donde no necesariamente corresponde a una función continua, y con serie trigonométrica de Fourier dada por

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \text{sen}(n\omega_0 t)], \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (10.150)$$

donde los coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  son definidos por el Teorema 10.8 de la página 276. Entonces,

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - jb_n), & \forall n > 0; \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + jb_{-n}), & \forall n < 0; \\ \frac{1}{2}a_0, & \forall n = 0. \end{cases} \quad (10.151)$$

**Demostración.** Al expresar  $\cos(n\omega_0 t)$  y  $\sin(n\omega_0 t)$  en sus formas exponenciales en la Ecuación (10.150) se tiene que

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \left( \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} \right) + b_n \left( \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{j2} \right) \right], \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (10.152)$$

agrupando los términos de la Ecuación (10.152), se obtiene que

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - jb_n)e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n + jb_n)e^{-jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (10.153)$$

Ahora, si se denota la segunda sumatoria como  $S_2$ , es decir,

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n + jb_n)e^{-jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (10.154)$$

la cual al sustituir  $n$  por  $-m$ , es decir, al hacer  $m = -n$ , se tiene que

$$S_2 = \sum_{m=-1}^{-\infty} \frac{1}{2}(a_{-m} + jb_{-m})e^{jm\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (10.155)$$

Debido a la propiedad de conmutatividad de la suma y a que la variable  $m$  de la suma  $S_2$  es una variable muda, la Ecuación (10.155) puede ser expresada como

$$S_2 = \sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{1}{2}(a_{-n} + jb_{-n})e^{jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (10.156)$$

Sustituyendo lo obtenido en la Ecuación (10.156) en la Ecuación (10.153), se tiene

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - jb_n)e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2}(a_{-n} + jb_{-n})e^{jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (10.157)$$

lo que implica que

$$f(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (10.158)$$

Al comparar las Ecuaciones (10.157) y (10.158), se obtiene que

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - jb_n), & \forall n > 0; \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + jb_{-n}), & \forall n < 0; \\ \frac{1}{2}a_0, & \forall n = 0, \end{cases} \quad (10.159)$$

lo que demuestra el teorema. ■

■ EJEMPLO 10.9

Sea  $x(t)$  una señal periódica con serie trigonométrica de Fourier dada por

$$x(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(n\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (10.160)$$

Determine la serie exponencial de Fourier de  $x(t)$ .

**Solución**

Mediante identificación de términos, se tiene que para todo  $n > 0$  entero impar

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n} \\ b_n &= 0, \end{aligned} \quad (10.161)$$

y además  $a_0 = 0$ .

Al emplear el Teorema 10.9 de la página 278 se tiene que para todo  $n$  entero impar

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - j0), & \forall n > 0; \\ \frac{1}{2}(\frac{1}{-n} + j0), & \forall n < 0, \end{cases} \quad (10.162)$$

lo que implica que para todo  $n$  entero impar

$$\alpha_n = \frac{1}{2|n|}, \quad \forall n \neq 0, \quad (10.163)$$

y en consecuencia

$$x(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{2|n|} e^{jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (10.164)$$

■ EJEMPLO 10.10

Considere una vez más la señal periódica del Ejemplo 10.4 de la página 264. Para la señal del ejemplo, determine:

- i) su serie trigonométrica de Fourier empleando las definiciones de  $a_n$  y  $b_n$ ;
- ii) la representación gráfica de algunas armónicas y su suma.

**Solución**

Parte i)

Se conoce que la señal tiene simetría impar, por lo que su coeficiente  $a_0 = 0$ .

Por otra parte, se tiene que

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+, \quad (10.165)$$

dado que se ha considerado  $t_0 = -T/2$ .

Ahora, como  $f(t)\cos(n\omega_0t)$  es una función impar de la variable independiente  $t$ , se tiene que debido al Lema 10.3 de la página 271  $a_n = 0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

Para el cálculo de  $b_n$  se tiene que

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen}(n\omega_0t) dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+. \quad (10.166)$$

Como el producto de  $f(t)\operatorname{sen}(n\omega_0t)$  es una función par de la variable independiente  $t$ , se tiene que

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} k \operatorname{sen}(n\omega_0t) dt = \frac{4k}{T} \frac{\cos(n\omega_0t)}{n\omega_0} \Big|_{T/2}^0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+, \quad (10.167)$$

la cual luego de algunos procedimientos algebraicos se tiene que

$$b_n = \frac{2k}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)], \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+. \quad (10.168)$$

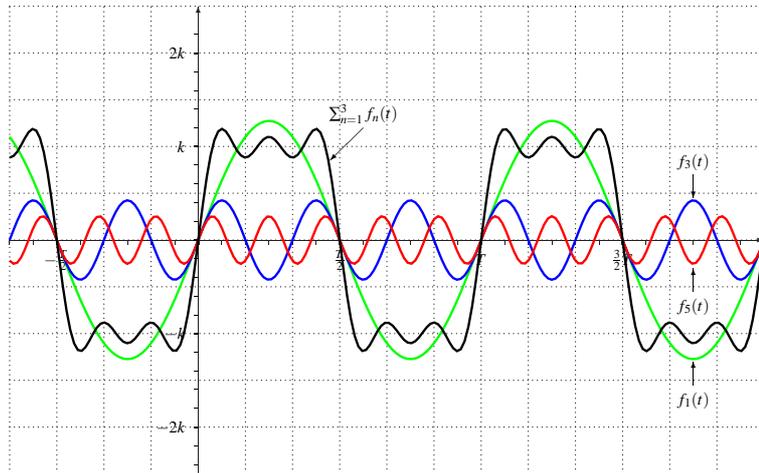
Como resultado de esto se tiene que

$$b_n = \begin{cases} 0, & \forall n \in \mathbb{Z}_+, n \text{ par}; \\ \frac{4k}{n\pi}, & \forall n \in \mathbb{Z}_+, n \text{ impar}. \end{cases} \quad (10.169)$$

En consecuencia, la expresión matemática de la serie trigonométrica de Fourier viene dada por

$$f(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{4k}{n\pi} \operatorname{sen}(n\omega_0t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (10.170)$$

Parte ii)



**Figura 10.13.** Representación de tres armónicas y su suma para la señal cuadrada de simetría impar del Ejemplo 10.10

La Figura 10.13 representa tres armónicas de la serie trigonométrica de Fourier, a decir, la onda fundamental que oscila a una frecuencia angular  $\omega_0$  rad/s es mostrada en la figura en color verde y es denotada por  $f_1(t)$ ; la tercera armónica, indicada en color azul denotada como  $f_3(t)$  y cuya oscilación es de  $3\omega_0$  rad/s; y la curva  $f_5(t)$  en color rojo representa la quinta armónica por estar oscilando a  $5\omega_0$  rad/s. Además se muestra la suma de las tres armónicas en negro, es decir,

$$S_3(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^3 f_n(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (10.171)$$

donde  $S_3(t)$  denota la suma de las tres primeras armónicas, y

$$f_n(t) = \frac{2k}{n\pi} \operatorname{sen}(n\omega_0 t), \quad \forall n \in \{1, 3, 5\}, t \in \mathbb{R}. \quad (10.172)$$

Note que el hecho de que la señal posee una simetría impar, ésta únicamente puede ser representada por la suma de señales impares con relación a su variable independiente. Por tal motivo, la señal  $f(t)$  es formada por la suma de señales  $\operatorname{sen}(n\omega_0 t)$ .

#### ■ EJEMPLO 10.11

Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal periódica de expresión matemática

$$f(t) = k|\operatorname{sen}(\omega_0 t)|, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (10.173)$$

donde  $k \in \mathbb{R}_+$

Para la señal  $f(t)$ , la cual es conocida ampliamente como una señal sinusoidal rectificada completamente, determine:

- i) su serie trigonométrica de Fourier empleando las definiciones de  $a_n$  y  $b_n$ ;
- ii) la representación gráfica de algunas armónicas y su suma;
- iii) su serie exponencial de Fourier empleando las definiciones de  $\alpha_n$ ;
- iv) verifique la relación entre  $\alpha_n$ , y  $a_n$  y  $b_n$ .

#### Solución

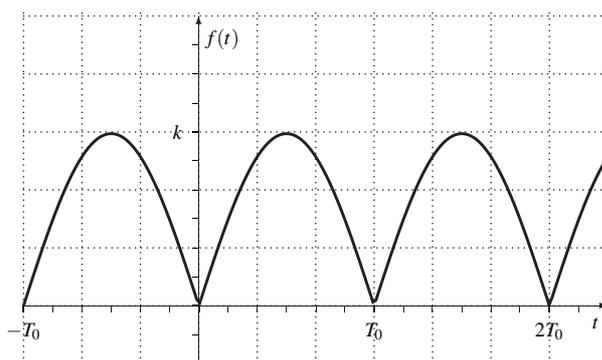
Parte i)

La Figura 10.14 de la página 283 ilustra la señal seno rectificada completamente. Note que el período de  $f(t)$  se ha reducido a la mitad con relación a la señal  $\operatorname{sen}(\omega_0 t)$ , y en consecuencia la frecuencia de la señal fundamental en el doble, es decir, la fundamental de  $f(t)$  oscila a  $2\omega_0$ .

Este hecho permite determinar los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier según

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} k|\operatorname{sen}(\omega_0 t)| \cos(2n\omega_0 t) dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (10.174)$$

Tomando en cuenta que  $T_0 = T/2$ , donde  $T$  es el período de la señal  $\operatorname{sen}(\omega_0 t)$ , y además  $|\operatorname{sen}(\omega_0 t)| \cos(2n\omega_0 t)$  es una función par de la variable independiente  $t$ , se



**Figura 10.14.** Gráfica de la señal seno con rectificación completa

obtiene que

$$a_n = \frac{4}{T/2} \int_0^{T/4} k \operatorname{sen}(\omega_0 t) \cos(2n\omega_0 t) dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (10.175)$$

Ahora, se conoce que

$$\operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta)]. \quad (10.176)$$

Al hacer  $\alpha = \omega_0 t$  y  $\beta = 2n\omega_0 t$  en la Ecuación (10.176), y sustituyendo este resultado en la Ecuación (10.175), se obtiene que

$$a_n = \frac{4k}{T} \int_0^{T/4} [\operatorname{sen}[(1 + 2n)\omega_0 t] + \operatorname{sen}[(1 - 2n)\omega_0 t]] dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (10.177)$$

lo que arroja que

$$a_n = \frac{4k}{\omega_0 T} \left[ \frac{\cos[(1 + 2n)\omega_0 t]}{1 + 2n} \Big|_{T/4}^0 + \frac{\cos[(1 - 2n)\omega_0 t]}{1 - 2n} \Big|_{T/4}^0 \right], \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (10.178)$$

Tomando en cuenta que  $\omega_0 T = 2\pi$  se obtiene entonces de la Ecuación (10.178) que

$$a_n = \frac{4k}{\pi} \frac{1}{1 - 4n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (10.179)$$

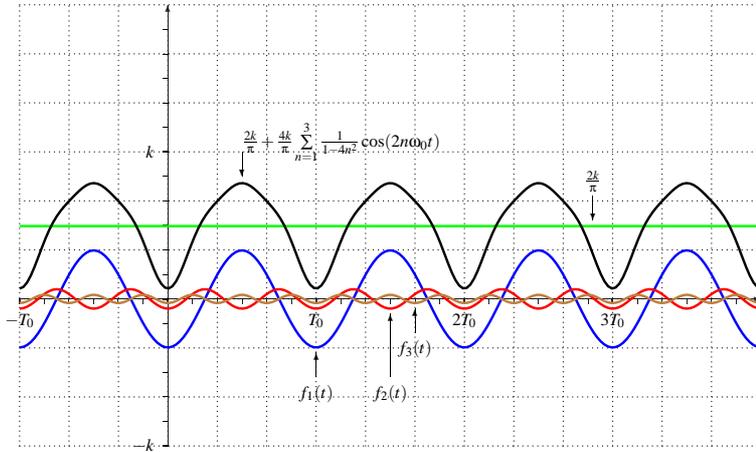
Observe que virtud de que la Ecuación (10.179) es válida para todo  $n$  entero mayor o igual a cero, el coeficiente  $\frac{a_0}{2}$  puede ser determinado evaluando la Ecuación (10.179) en  $n = 0$ .

Por otra parte, se tiene que los coeficientes  $b_n$  son todos iguales a cero debido a que la señal  $f(t)$  es una señal de simetría par.

En consecuencia, se tiene que

$$f(t) = \frac{2k}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4k}{\pi} \frac{1}{1 - 4n^2} \cos(2n\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (10.180)$$

Parte ii)



**Figura 10.15.** Representación de tres armónicas y su suma para la señal cuadrada de simetría impar del Ejemplo 10.11

La Figura 10.15 muestra las gráficas de las tres primeras armónicas de la serie trigonométrica de Fourier de la señal onda sinusoidal rectificada completamente y su suma, la cual está definida por

$$S_3(t) = \frac{2k}{\pi} + \sum_{n=1}^3 \frac{4k}{\pi} \frac{1}{1-4n^2} \cos(2n\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (10.181)$$

Observe que en la figura se ha empleado la notación

$$f_n(t) = \frac{4k}{\pi} \frac{1}{1-4n^2} \cos(2n\omega_0 t), \quad \forall n \in \{1, 2, 3\}, t \in \mathbb{R}, \quad (10.182)$$

para indicar la contribución de cada armónica.

Parte iii)

Basado en el Corolario 10.1 de la página 257, se puede afirmar que

$$\alpha_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (10.183)$$

donde para este específico caso,  $T_0 = T/2$ , siendo  $T$  el período de la señal  $\text{sen}(\omega_0 t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Entonces, de la Ecuación (10.183) se tiene que

$$\alpha_n = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} k \text{sen}(\omega_0 t) e^{-jn2\omega_0 t} dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (10.184)$$

debido a que la señal  $f(t) = |\text{sen}(\omega_0 t)|$  tiene una frecuencia fundamental de  $2\omega_0$ .

Al expresar  $\sin(\omega_0 t)$  en su forma exponencial, y calculando la primitiva de la integral se tiene que

$$\alpha_n = \frac{k}{j^2 \omega_0 T} \left( \frac{e^{j(1-2n)\omega_0 t}}{1-2n} \Big|_0^{T/2} + \frac{e^{-j(1+2n)\omega_0 t}}{1+2n} \Big|_0^{T/2} \right), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (10.185)$$

donde  $\omega_0 T = 2\pi$ .

Al evaluar la Ecuación (10.185) se tiene que

$$\alpha_n = \frac{k}{-2\pi} \left( \frac{e^{j(1-2n)\pi} - e^0}{1-2n} + \frac{e^{-j(1+2n)\pi} - e^0}{1+2n} \right), \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (10.186)$$

Conociendo que  $e^{j(1-2n)\pi} = e^{-j(1+2n)\pi} = -1$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , se tiene que

$$\alpha_n = \frac{k}{-2\pi} \left( \frac{-2}{1-2n} + \frac{-2}{1+2n} \right) = \frac{k}{\pi} \left( \frac{1}{1-2n} + \frac{1}{1+2n} \right), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (10.187)$$

lo que arroja como resultado que

$$\alpha_n = \frac{2k}{\pi} \frac{1}{1-4n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (10.188)$$

Como consecuencia de esto, se asegura que la serie exponencial de Fourier viene definida por

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2k}{\pi} \frac{1}{1-4n^2} e^{j2n\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (10.189)$$

Parte iv)

De la Observación 10.10 de la página 278 se tiene que

$$\alpha_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n). \quad (10.190)$$

Al sustituir lo obtenido en la Parte ii) en la Ecuación (10.190), se obtiene que

$$\alpha_n = \frac{1}{2} \left( \frac{4k}{\pi} \frac{1}{1-4n^2} - j0 \right), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (10.191)$$

por cuanto  $\alpha_n \in \mathbb{R}$ , y en consecuencia  $\alpha_n = \alpha_{-n}$ , lo que permite afirmar que

$$\alpha_n = \frac{2k}{\pi} \frac{1}{1-4n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (10.192)$$

lo cual verifica lo obtenido en las Partes i) y iii).

## 10.7 CONVERGENCIA DE LAS SERIES DE FOURIER

El estudio de la convergencia de las series de Fourier ha sido un reto de muy vieja data. Duoandikoetxea (2007) presenta en su artículo la evolución que ha tenido el estudio de convergencia de las series de Fourier desde 1807, cuando Jean Baptiste Joseph Fourier publicó su clásico (Fourier, 1822).

Según Duoandikoetxea (2007), el primer resultado reportado en cuanto al estudio de convergencia fue el mostrado por Dirichlet (1829), quien demostró que la serie de Fourier de una señal periódica  $f(t)$  converge al punto medio de sus límites laterales, es decir, si  $f(t)$  es una función periódica definida en los números reales. Entonces,

$$f(t) = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} [f(t - \varepsilon) + f(t + \varepsilon)], \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (10.193)$$

El resultado obtenido por Dirichlet (1829) explica la razón por la cual en una señal periódica con discontinuidades de saltos finitos, los puntos medios de las discontinuidades se constituyen en los nodos de cada una de las señales armónicas, y en consecuencia, en los valores del dominio donde existan discontinuidades de salto finito, la serie trigonométrica de Fourier converge al punto medio de sendos saltos de discontinuidad.

Considere la señal  $f(t)$  del Ejemplo 10.4 de la página 264, cuyo desarrollo en serie trigonométrica de Fourier es mostrado en la Ecuación (10.170) del Ejemplo 10.10.

Ahora, sea la función  $S_N(t)$  definida como serie finita trigonométrica de Fourier (SFTF), la cual viene dada por

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sen(n\omega_0 t)], \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (10.194)$$

donde  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  son los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier para la señal periódica  $f(t)$ , y  $N$  es el número de la armónica de mayor orden que es incluida en la serie finita trigonométrica de Fourier

Del resultado mostrado en la Ecuación (10.170) se puede afirmar que

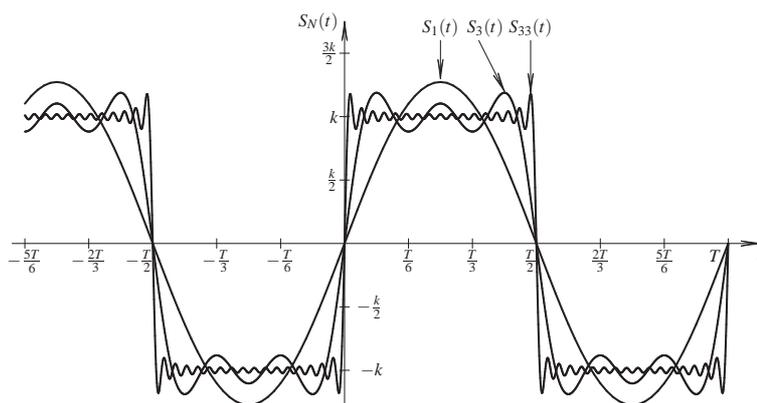
$$S_N(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^N \frac{4k}{n\pi} \sen(n\omega_0 t), \quad \forall N \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}. \quad (10.195)$$

La Figura 10.16 de la página 287 ilustra tres casos de serie finita trigonométrica de Fourier, denotadas como:  $S_1(t)$ ,  $S_3(t)$  y  $S_{33}(t)$ . Note que aún con un número importante de términos se produce un error en la proximidad de las discontinuidades. Sin embargo, observe que la serie converge a los puntos medios de cada discontinuidad de salto finito, los cuales conforman los nodos de las  $S_N(t)$  para todo  $N \in \mathbb{Z}_+$ .

Este fenómeno fue apreciado por el célebre premio Nobel de Física 1907, Albert A. Michelson, quien lo reportó en su artículo como resultado de pruebas experimentales realizadas con su equipo de cálculo de series de Fourier (Michelson y Stratton, 1898a). No obstante, el estudio del fenómeno fue realizado por Gibbs de acuerdo a lo reportado por Hewitt y Hewitt (1979).

La Figura 10.17<sup>17</sup> de la página 288 muestra el equipo diseñado por Albert A. Michelson, el cual fue empleado para el cálculo de series de Fourier, y una imagen a color de la máquina puede ser obtenida de Michelson y Stratton (1898b).

<sup>17</sup>Imagen obtenida de <https://commons.wikimedia.org/>



**Figura 10.16.** Ejemplo del fenómeno de Gibbs en el desarrollo en serie trigonométrica de Fourier para una señal cuadrada de simetría impar

### 10.8 ENERGÍA Y POTENCIA PROMEDIO DE UNA SEÑAL

En la Sección 10.2 se establecieron las definiciones de energía normalizada de una señal y la definición de la potencia promedio normalizada de una señal. En este punto, se establecerán dos teoremas que permitirán determinar tanto la energía normalizada como la potencia promedio normalizada de una señal desde la perspectiva de la frecuencia, los cuales son ampliamente conocidos como los Teoremas de Parseval.

**Teorema 10.10 (Energía)** Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal de energía desde el punto de vista de la Definición 10.3. Entonces, la energía normalizada de la señal puede ser determinada por

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \tag{10.196}$$

**Demostración.** Se sabe que toda señal absolutamente integrable puede ser representada a través de su transformada de Fourier, es decir,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{10.197}$$

Bajo el supuesto que  $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$ , lo cual implica que al emplear la Ecuación (10.197), se tiene

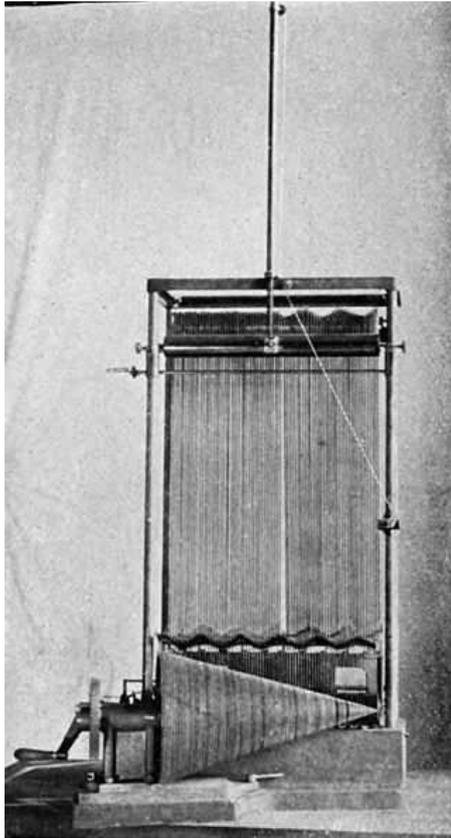
$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{10.198}$$

Por otra parte, se tiene que si  $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$ , entonces

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt \tag{10.199}$$

Aplicando la Ecuación (10.198) en la Ecuación (10.199), se tiene

$$E = \int_{t=-\infty}^{\infty} f_2(t) \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} F_1(\omega) e^{j\omega t} d\omega dt \tag{10.200}$$



**Figura 10.17.** Equipo diseñado por Albert A. Michelson para el cálculo de series de Fourier de señales periódicas

Debido al supuesto de convergencia de ambas integrales planteadas en la Ecuación (10.200), las mismas pueden ser intercambiadas, quedando

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} F_1(\omega) \int_{t=-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{j\omega t} dt d\omega, \quad (10.201)$$

de donde se puede afirmar que la integral en  $t$  corresponde a la transformada de Fourier de  $f_2(t)$ , en términos de  $-\omega$ , es decir,  $F_2(-\omega)$ , obteniéndose

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2(-\omega) d\omega. \quad (10.202)$$

Como  $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$ , se puede asegurar que  $F_1(\omega) = F_2(\omega) = F(\omega)$ , y en consecuencia,

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} F(\omega) F(-\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (10.203)$$

Al tratarse de una señal  $f(t)$  real,  $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$ . ■

A objeto de estudiar el Teorema de Parseval para el caso de señales reales periódicas, se debe establecer la siguiente condición:

**Condición 10.1** *Sea  $f(t)$  una señal periódica. Entonces,  $f^2(t)$  es también una señal periódica.*

Ahora, véase el siguiente lema, el cual permite asegurar que la determinación de la potencia promedio normalizada de una señal real periódica puede ser calculada mediante la potencia promedio normalizada entregada en un período.

**Lema 10.4** *Sea la función  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal determinista, periódica de período  $T$  y definida en el dominio continuo  $t$ , en donde no necesariamente corresponde a una función continua. Entonces, la potencia promedio normalizada de la señal  $f(t)$  puede ser determinada por*

$$P = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_T f^2(t) dt.$$

**Demostración.** Al considerar que  $\tau = nT$  y  $n$  un entero par, y tomando en cuenta la Condición 10.1, se tiene que

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT} \sum_{k=-n/2}^{n/2} \int_{kT-T/2}^{kT+T/2} f^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n/2}^{n/2} \frac{1}{nT} \int_{kT-T/2}^{kT+T/2} f^2(t) dt. \quad (10.204)$$

Ahora, como

$$\int_{kT-T/2}^{kT+T/2} f^2(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (10.205)$$

por ser la señal  $f(t)$  periódica y debido al Teorema 10.2 de la página 256.

Aplicando la Ecuación (10.205) en la Ecuación (10.204), se obtiene

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n/2}^{n/2} \frac{1}{nT} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \frac{1}{nT} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt. \quad (10.206)$$

De la Ecuación (10.206) y del Teorema 10.2 de la página 256, se tiene claramente que,

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_T f^2(t) dt$$

■

**Teorema 10.11 (Potencia promedio normalizada)** *Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal determinista, periódica de período  $T$  y definida en el dominio continuo  $t$ , en donde no necesariamente corresponde a una función continua. Entonces, la potencia promedio normalizada de la señal  $f(t)$  puede ser determinada por*

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2$$

**Demostración.** Debido al Lema 10.4 se tiene que la potencia promedio normalizada de una señal periódica está dada por

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt. \quad (10.207)$$

Ahora, debido a la hipótesis del teorema, se puede asegurar que la señal  $f(t)$  cuenta con su correspondiente serie exponencial de Fourier, la cual es

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{-jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (10.208)$$

Si se afirma que  $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$ . Entonces, empleando las Ecuaciones (10.207) y (10.208), se obtiene

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^{[f_2]} e^{-jn\omega_0 t} \right] dt. \quad (10.209)$$

Debido a que tanto la operación de integración como la de sumatoria, garantizan ambas convergencias, se puede permutar el orden de operación, quedando

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^{[f_2]} \left[ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right],$$

en donde claramente la operación de integración arroja los términos  $\alpha_{-n}^{[f_1]}$ , obteniéndose entonces que

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^{[f_2]} \alpha_{-n}^{[f_1]} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^{[f]} \alpha_{-n}^{[f]}. \quad (10.210)$$

Debido a que  $\alpha_{-n}^{[f]} = \bar{\alpha}_n^{[f]} = \bar{\alpha}_n$ , y al emplear la Ecuación (10.210), se tiene que la potencia promedio normalizada de una señal periódica puede ser determinada por

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2. \quad (10.211)$$

■

**Corolario 10.3** Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal determinista, periódica de período  $T$  y definida en el dominio del tiempo continuo, en donde no necesariamente corresponde a una función continua. Entonces, la potencia promedio normalizada de la señal  $f(t)$  puede ser determinada por

$$P = \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2),$$

donde  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  son los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier.

**Demostración.** De la Ecuación (10.211) se tiene que

$$P = \alpha_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2. \quad (10.212)$$

De la Observación 10.10 de la página 278 se tiene que

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \frac{1}{2}a_0; \\ \alpha_n &= \frac{1}{2}a_n - j\frac{1}{2}b_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.\end{aligned}\tag{10.213}$$

Al calcular las magnitudes al cuadrado de  $\alpha_n$  para  $n \in \mathbb{N}$ , se puede afirmar que

$$\begin{aligned}\alpha_0^2 &= \frac{1}{4}a_0^2; \\ |\alpha_n|^2 &= \frac{1}{4}a_n^2 + \frac{1}{4}b_n^2, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.\end{aligned}\tag{10.214}$$

Sustituyendo la Ecuación (10.214) en la Ecuación (10.212), esta arroja

$$P = \frac{1}{2}\alpha_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).\tag{10.215}$$

■

### ■ EJEMPLO 10.12

Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un señal medida en V y definida por

$$f(t) = \text{senc}_5(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},\tag{10.216}$$

donde la función  $\text{senc}_{\omega_0}(t)$  se define como

$$\text{senc}_{\omega_0}(t) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(\omega_0 t)}{\omega_0 t}, & \forall t \neq 0; \\ 1, & \forall t = 0. \end{cases}\tag{10.217}$$

Determine la energía normalizada de la señal  $f(t)$ .

### Solución

Se tiene que la energía normalizada viene dada por

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \text{senc}_5^2(t) dt.\tag{10.218}$$

Ahora, aplicando el Teorema 10.10 de la página 287 se tiene que

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}[\text{senc}_5(t)]|^2 d\omega.\tag{10.219}$$

Por otra parte, se tiene que

$$\mathcal{F}[p_a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} p_a(t)e^{-j\omega t} dt,\tag{10.220}$$

donde

$$p_a(t) = \begin{cases} 1, & \forall |t| < a; \\ 0, & \forall |t| > a \end{cases} \quad (10.221)$$

Sustituyendo la Ecuación (10.221) en la Ecuación (10.220) se tiene que

$$\mathcal{F}[p_a(t)] = \int_{-a}^a e^{-j\omega t} dt = \frac{e^{-j\omega t}}{j\omega} \Big|_{-a}^a, \quad \forall \omega \neq 0. \quad (10.222)$$

Al evaluar la Ecuación (10.222), se obtiene que

$$\mathcal{F}[p_a(t)] = 2a \frac{\text{sen}(\omega a)}{\omega a}, \quad \forall \omega \neq 0. \quad (10.223)$$

Debido al hecho de que la Ecuación (10.223) no está definida para el caso particular  $\omega = 0$ , se debe determinar su valor a partir de la definición de transformada de Fourier considerando únicamente el caso  $\omega = 0$ , es decir,

$$F(0) = \mathcal{F}[p_a(t)]|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} p_a(t) dt = 2a. \quad (10.224)$$

En definitiva se tiene entonces que

$$\mathcal{F}[p_a(t)] = 2a \text{senc}_a(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (10.225)$$

Ahora, según el Teorema de dualidad o simetría de la transformada de Fourier se tiene que si  $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ . Entonces,  $\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$ .

Es decir, que al aplicar el Teorema de dualidad a la Ecuación (10.225) se obtiene que

$$\mathcal{F}[\text{senc}_a(\omega)] = \frac{\pi}{a} p_a(\omega), \quad (10.226)$$

debido a que la función  $p_a(\omega)$  es una función par de su variable independiente.

Para este caso particular, se tiene entonces que

$$\mathcal{F}[\text{senc}_5(\omega)] = \frac{\pi}{5} p_5(\omega). \quad (10.227)$$

Sustituyendo este resultado en la Ecuación (10.219) se tiene que

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi^2}{25} p_5^2(\omega) d\omega = \frac{\pi}{50} \int_{-5}^5 d\omega = \frac{\pi}{5} \text{J}. \quad (10.228)$$

### ■ EJEMPLO 10.13

Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un señal medida en V y definida por

$$f(t) = \text{sen}^2(2t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (10.229)$$

Determine la potencia promedio normalizada de la señal  $f(t)$ .

**Solución**

La potencia promedio normalizada puede ser determinada a través de la integral en tiempo o mediante los coeficientes de la serie exponencial de Fourier, para lo cual se cuenta con el Teorema 10.11 de la página 289.

Debido a que

$$f(t) = \text{sen}^2(2t) = \left[ \frac{e^{j2t} - e^{-j2t}}{j2} \right]^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (10.230)$$

lo que conduce a

$$f(t) = \text{sen}^2(2t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{j4t} - \frac{1}{4}e^{-j4t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (10.231)$$

donde claramente se tiene que la frecuencia fundamental  $\omega_0 = 4 \text{ rad/s}$ .

La Ecuación (10.231) presenta los coeficientes  $\alpha_n$  para  $n \in \{-1, 0, 1\}$ , es decir,

$$\alpha_{-1} = -\frac{1}{4}; \quad \alpha_0 = \frac{1}{2}; \quad \alpha_1 = -\frac{1}{4}. \quad (10.232)$$

Aplicando el Teorema 10.11 se tiene que

$$P = \alpha_0^2 + 2 \sum_{n=1}^1 |\alpha_n|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{8} \text{ W}. \quad (10.233)$$

**PROBLEMAS**

**10.1** Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal periódica con extensión periódica principal definida por

$$f_0(t) = \begin{cases} k, & \forall 0 < t < \frac{T}{2}; \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (10.234)$$

donde  $k > 0$  es un número real.

Entonces, la serie trigonométrica de Fourier de  $f(t)$  es

- A)  $k + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{2k}{n\pi} \text{sen}(n\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$
- B)  $\frac{k}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{2k}{n\pi} \text{sen}(n\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$
- C)  $\frac{k}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{2k}{n\pi} \cos(n\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$
- D)  $\frac{k}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{2k}{n\pi} \text{sen}(n\omega_0 t) + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{2k}{n\pi} \cos(n\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

**10.2** Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal periódica con período igual a  $T$ . Si la transformada de Fourier de la señal  $f(t)$  está definida por

$$F(\omega) = \sum_{\substack{n=-5 \\ n \text{ impar}}}^5 \frac{1}{jn} \delta(\omega - n\omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (10.235)$$

donde  $\omega_0 = 2\pi/T$  es la frecuencia fundamental de la señal.

Entonces, la serie trigonométrica de Fourier de la señal  $f(t)$  es

$$\begin{aligned} \text{A) } & \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^5 \frac{1}{\pi n} \cos(n\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. & \text{B) } & \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^5 \frac{2}{n} \cos(n\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \\ \text{C) } & \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^5 \frac{1}{\pi n} \sin(n\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. & \text{D) } & \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^5 \frac{2}{n} \sin(n\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**10.3** Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal periódica con período igual a  $T$ . Si la transformada de Fourier de la señal  $f(t)$  está definida por

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|n|}} \delta(\omega - n\omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (10.236)$$

donde  $\omega_0 = 2\pi/T$  es la frecuencia fundamental de la señal.

Entonces, la potencia promedio normalizada de la señal  $f(t)$  es

$$\text{A) } \frac{1}{6\pi^2} \quad \text{B) } \frac{2}{3} \quad \text{C) } \frac{5}{12\pi^2} \quad \text{D) } \frac{1}{6\pi^2}$$

**10.4** Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal periódica cuya expresión analítica está dada por

$$f(t) = \cos^q(\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (10.237)$$

donde  $q \in \mathbb{N}_+$  y  $\omega_0 = 2\pi/T$  es la frecuencia fundamental de la señal.

Entonces, la transformada de Fourier de la señal  $f(t)$  es

$$\begin{aligned} \text{A) } & \frac{1}{2^q} \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} \delta(\omega - (q-2k)\omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad q \in \mathbb{N}. \\ \text{B) } & 2\pi \frac{1}{(j2)^q} \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} \delta(\omega - (q-2k)\omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad q \in \mathbb{N}. \\ \text{C) } & 2\pi \frac{1}{2^q} \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} \delta(\omega - (q-2k)\omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad q \in \mathbb{N}. \\ \text{D) } & \frac{\pi}{j^q 2^{q-1}} \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} \delta(\omega - (q-2k)\omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad q \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

**10.5** Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal periódica con período igual a  $T$ . Si la transformada de Fourier de la señal  $g(t) = f(t - \frac{T}{4})$  está definida por

$$G(\omega) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \delta(\omega - n\omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (10.238)$$

donde  $\omega_0 = 2\pi/T$  es la frecuencia fundamental de la señal.

Entonces, la serie exponencial de Fourier de la señal  $f(t)$  es

$$\begin{aligned} \text{A)} \quad & \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{e^{-jn\pi/2}}{2\pi n^2} e^{jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. & \text{B)} \quad & \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{e^{-jn\pi/2}}{n^2} e^{jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \\ \text{C)} \quad & \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{e^{jn\pi/2}}{n^2} e^{jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. & \text{D)} \quad & \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{e^{jn\pi/2}}{2\pi n^2} e^{jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**10.6** Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal periódica con período igual a  $T$ . Si la transformada de Fourier de la señal  $g(t) = \frac{df(t)}{dt}$  está definida por

$$G(\omega) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{jnT} \delta(\omega - n\omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (10.239)$$

donde  $\omega_0 = 2\pi/T$  es la frecuencia fundamental de la señal.

Si la señal  $f(t)$  tiene una componente continua o también denominada componente DC igual a 2. Entonces, la serie exponencial de Fourier de la señal  $f(t)$  es

$$\begin{aligned} \text{A)} \quad & 2 - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. & \text{B)} \quad & 2 - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \\ \text{C)} \quad & 2 + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. & \text{D)} \quad & -\frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**10.7** Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal periódica cuya extensión periódica principal está definida por

$$f_0(t) = \begin{cases} \frac{2k}{T}|t|, & \forall -\frac{T}{2} < t \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (10.240)$$

donde  $k > 0$  es un número real.

Entonces, la transformada de Fourier de  $f(t)$  es

$$\begin{aligned} \text{A)} \quad & -\frac{4k}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \delta(\omega - n\omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \\ \text{B)} \quad & \pi k \delta(\omega) - \frac{4k}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \delta(\omega - n\omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \\ \text{C)} \quad & \frac{k}{2} \delta(\omega) - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{2k}{n^2 \pi^2} \delta(\omega - n\omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \\ \text{D)} \quad & 2\pi \frac{k}{2} \delta(\omega) + 2\pi \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{2k}{n^2 \pi^2} \delta(\omega - n\omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

## EJERCICIOS PROPUESTOS

**10.8** Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal periódica de período  $T$ , medida en V, y cuya expresión analítica de su extensión principal está dada por

$$f_0(t) = \begin{cases} 0, & \forall -\frac{T}{2} < t < 0; \\ kt, & \forall 0 \leq t < \frac{T}{2}. \end{cases} \quad (10.241)$$

donde  $k \in \mathbb{R}$  es una constante sin restricciones de signo.

Para la señal  $f(t)$ , determine:

- su serie exponencial de Fourier;
- su transformada de Fourier;
- su serie trigonométrica de Fourier;
- su potencia promedio normalizada.

**10.9** Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal periódica de período  $T$ , medida en V, y cuya expresión analítica de su extensión principal está dada por

$$f_0(t) = \begin{cases} 0, & \forall -\frac{T}{2} < t < 0; \\ \text{sen}(\omega_0 t), & \forall 0 \leq t < \frac{T}{2}. \end{cases} \quad (10.242)$$

donde  $k \in \mathbb{R}$  es una constante sin restricciones de signo, y  $\omega_0 T = 2\pi$ .

Para la señal  $f(t)$ , determine:

- su serie exponencial de Fourier;
- su transformada de Fourier;
- su serie trigonométrica de Fourier;
- su potencia promedio normalizada.

**10.10** Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal periódica, medida en mV, y cuya expresión analítica está dada por

$$f(t) = \cos^q(\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (10.243)$$

donde  $q \in \mathbb{N}$  y  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  es la frecuencia fundamental de la señal.

Para la señal  $f(t)$ , determine:

- serie trigonométrica de Fourier;
- potencia promedio normalizada de la señal, si la señal es medida en mV.

**10.11** Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal periódica de período  $T$  cuya expresión analítica de su extensión principal está dada por

$$f_0(t) = \begin{cases} 0, & \forall -\frac{T}{2} < t < 0; \\ kt, & \forall 0 \leq t < \frac{T}{2}. \end{cases} \quad (10.244)$$

donde  $k \in \mathbb{R}$  es una constante sin restricciones de signo.

Para la señal  $f(t)$ , determine:

- su serie exponencial de Fourier;
- su transformada de Fourier;
- su serie trigonométrica de Fourier;
- su potencia promedio normalizada.

**10.12** Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal periódica de período  $T$ , medida en V, y cuya expresión analítica de su extensión principal está dada por

$$f_0(t) = q_{T/2}(t), \quad \forall -\frac{T}{2} < t \leq \frac{T}{2}, \quad (10.245)$$

donde para todo  $a \in \mathbb{R}_+$

$$q_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a}, & \forall |t| < a \\ 0, & \forall |t| \geq a. \end{cases} \quad (10.246)$$

Para la señal  $f(t)$ , determine:

- a) su serie exponencial de Fourier a partir de su definición dada por la integral;
- b) su serie exponencial de Fourier a partir de la transformada de Fourier de la extensión principal de  $f_0(t)$ ;
- c) su serie trigonométrica de Fourier;
- d) su potencia promedio normalizada.



## CAPÍTULO 11

---

# ANÁLISIS DE SISTEMAS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

---

Todos tenemos una visión del hecho que constituye la verdad de cada quien. La integración de los puntos de vistas de cada uno nos aproxima a la verdad. Sin embargo, sólo Dios, el Dios de cada quien, conoce la verdad.

—Ebert Brea

Un enfoque diferente que tiene como objeto de estudiar los sistemas lineales, dinámicos, causales, invariantes en el dominio y deterministas es a través de su estudio en el régimen permanente cuando estos han sido excitados por señales sinusoidales.

Para esto debe estudiarse la función de transferencia desde la perspectiva de la frecuencia, lo que conlleva al análisis de los sistemas a través de la transformada de Fourier.

El resto del capítulo está estructurado de la siguiente forma: en la Sección 11.1 se introducirá la definición de función de transferencia en el dominio  $\omega$ , además es ilustrada esta definición a través de diversos ejemplos que tienen como propósito visualizar los distintos puntos de vistas en la aplicación de tal definición; en la Sección 11.2 se estudiará nuevamente la relación que existe entre la función de transferencia definida en el dominio de cada una de las variables  $s$  y  $\omega$ .

Al final del capítulo, el lector podrá contar con problemas y sus respectivas soluciones al final del libro, y ejercicios propuestos, los cuales permitirán al lector comprobar sus conocimientos en el tema tratado en el capítulo.

## 11.1 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Desde la óptica del régimen permanente y cuando un sistema lineal, dinámico, causal, invariante en el dominio y determinista es excitado por señales sinusoidal, la definición de función de transferencia exige que las condiciones iniciales del sistema sean cero.

A tal efecto, se establecerá la definición de función de transferencia basada en que el sistema puede o no estar con condiciones iniciales de cero, por cuanto si el sistema es lineal y estable, las condiciones iniciales no inciden en la respuesta en régimen permanente.

**Definición 11.1** Se dice que la función de transferencia de un sistema lineal, dinámico, causal, invariante en el dominio y determinista (LDCID) definido en el dominio continuo, y se denotará como  $H(\omega)$ , como el cociente de la respuesta del sistema en el dominio de la transformada de Fourier y su excitación en ese mismo dominio de transformada de Fourier, es decir,

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}, \quad (11.1)$$

donde  $X(\omega)$  e  $Y(\omega)$  son respectivamente las transformadas de Fourier de la excitación y respuesta del sistema.

Es importante destacar que la función de transferencia que puede ser obtenida a través de la representación de la transformada de Fourier, corresponde a sistemas LDCID y estables.

Por otra parte, debido al hecho de la naturaleza de la función en el sentido de que  $H(\omega) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , ésta puede ser expresada como

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\Phi(\omega)}, \quad (11.2)$$

donde  $\Phi(\omega)$  es la fase de la función de transferencia.

Ahora, de las Ecuaciones (11.1) y (11.2), se puede afirmar que

$$|Y(\omega)| = |H(\omega)||X(\omega)|. \quad (11.3a)$$

$$\Phi_y(\omega) = \Phi_h(\omega) + \Phi_x(\omega), \quad (11.3b)$$

donde  $\Phi_h(\omega)$ ,  $\Phi_x(\omega)$  y  $\Phi_y(\omega)$  representan respectivamente las fases de la función de transferencia, de la señal de excitación y de la señal de respuesta.

### ■ EJEMPLO 11.1

Sea el sistema lineal, dinámico, causal, invariante en el dominio y determinista (LDCID) mostrado por la Figura 11.1 de la página 301. En la gráfica  $x(t)$  representa la señal de excitación de tensión eléctrica, e  $y(t)$  corresponde a la señal de respuesta, la cual es la caída de tensión entre los terminales del condensador  $C$ .

Para el sistema de la Figura 11.1. Determine su función de transferencia definida en el dominio de  $\omega$ .

### Solución

Del Ejemplo 2.2 de la página 35 se tiene que el modelo dinámico del sistema está definido por

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t), \quad (11.4)$$

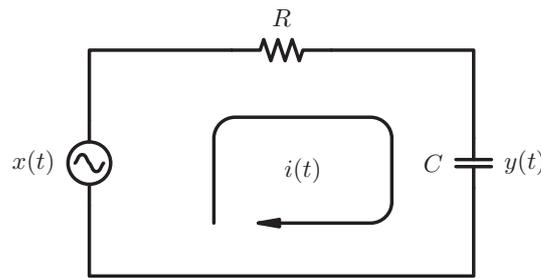


Figura 11.1. Sistema LDCID del Ejemplo 11.1

el cual viene dado por la Ecuación 2.25 de la página 36.

Ahora, aplicando la transformada de Fourier a la Ecuación (11.4), se tiene que

$$j\omega Y(\omega) + \frac{1}{RC}Y(\omega) = \frac{1}{RC}X(\omega). \tag{11.5}$$

Despejando la relación  $Y(\omega)/X(\omega)$  de la Ecuación (11.5) se consigue que

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \tag{11.6}$$

■ EJEMPLO 11.2

Sea un sistema LDCID con función de transferencia en el dominio de la frecuencia, definida por

$$H(\omega) = 10 p_{6\pi}(\omega) e^{-j\frac{1}{6\pi}\omega}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \tag{11.7}$$

Por otra parte, suponga que el sistema ha sido excitado con una señal periódica durante un muy largo tiempo y cuya expresión analítica de serie trigonométrica de Fourier es

$$x(t) = 4 + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \text{sen}(n\pi t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{11.8}$$

Para el sistema descrito determine el espectro de la señal de respuesta.

**Solución**

A objeto de determinar la respuesta del sistema ante la señal de excitación, se calculará la transformada de Fourier de la señal  $x(t)$ , para lo cual se requiere conocer su serie exponencial de Fourier.

De las Ecuaciones formuladas en la Observación 10.10 de la página 278, se tiene

$$\alpha_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n). \tag{11.9}$$

En virtud de que la serie trigonométrica de  $x(t)$  no contiene términos  $\cos(n\omega_0 t)$  se puede asegurar que los coeficientes  $a_n = 0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

En consecuencia, de la Ecuación (11.9) se obtiene que para todo  $n$  impar positivo,

$$\alpha_n = \frac{1}{2}(-jb_n) = \frac{1}{2}\left(-j\frac{2}{n\pi}\right) = \frac{1}{jn\pi}, \quad (11.10)$$

y esta ecuación describe correctamente los términos  $\alpha_n$  para todo  $n$  impar negativo

Aplicando la Ecuación (11.10), se tiene que

$$x(t) = 4 + \sum_{\substack{n=-\infty, n \neq 0 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{jn\pi} e^{jn\pi t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (11.11)$$

Entonces, la transformada de Fourier de la señal de excitación dada por la Ecuación (11.11), es

$$X(\omega) = 2\pi 4\delta(\omega) + 2\pi \sum_{\substack{n=-\infty, n \neq 0 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{jn\pi} \delta(\omega - n\pi), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

$$X(\omega) = 8\pi\delta(\omega) + \sum_{\substack{n=-\infty, n \neq 0 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{2}{jn} \delta(\omega - n\pi), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Empleando la Definición 11.1 y la función de transferencia expresada por la Ecuación (11.7), se tiene

$$Y(\omega) = 10 p_{6\pi}(\omega) e^{-j\frac{1}{6\pi}\omega} \left( 8\pi\delta(\omega) + \sum_{\substack{n=-\infty, n \neq 0 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{2}{jn} \delta(\omega - n\pi) \right), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (11.12)$$

Simplificando la Ecuación (11.12), se tiene

$$Y(\omega) = 80\pi\delta(\omega) + \sum_{\substack{n=-5, n \neq 0 \\ n \text{ impar}}}^5 \frac{2}{jn} e^{-j\frac{n}{6}\omega} \delta(\omega - n\pi), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

### ■ EJEMPLO 11.3

Sea un sistema LDCID con función de transferencia definida por

$$H(\omega) = \frac{1}{5} |\omega| p_5(\omega) e^{-j\text{sgn}(\omega)}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (11.13)$$

Para el sistema definido, represente gráficamente la función de transferencia en magnitud y fase.

### Solución

De la Ecuación (11.13), se tiene que la función de transferencia puede ser expresada explícitamente como

$$H(\omega) = \begin{cases} -\frac{1}{5}\omega e^{j\frac{\pi}{2}}, & \forall -5 < \omega < 0; \\ \frac{1}{5}\omega e^{-j\frac{\pi}{2}}, & \forall 0 \leq \omega < 5; \\ 0, & |\omega| > 5. \end{cases} \quad (11.14)$$

En consecuencia, de la Ecuación (11.14), se tiene

$$|H(\omega)| = \begin{cases} -\frac{1}{5}\omega, & \forall -5 < \omega < 0; \\ \frac{1}{5}\omega, & \forall 0 \leq \omega < 5; \\ 0, & |\omega| > 5. \end{cases} \quad (11.15a)$$

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \forall -5 < \omega < 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \forall 0 < \omega < 5, \end{cases} \quad (11.15b)$$

De las expresiones matemáticas de  $H(\omega)$  y  $\Phi(\omega)$  se tiene entonces, una forma alterna de representar la función de transferencia de un sistema lineal, dinámico, causal, invariante en el dominio y determinista.

A continuación se explicará este concepto a través de un ejemplo.

#### ■ EJEMPLO 11.4

Sean los gráficos mostrados en la Figura 11.2, los cuales corresponden respectivamente a la magnitud y fase de una función de transferencia de un sistema lineal, dinámico, causal, invariante en el dominio y determinista.

Determine el modelo matemático de la función de transferencia.

#### Solución

De la Figura 11.2(a) se tiene claramente que

$$|H(\omega)| = 2p_2(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (11.16)$$

Por otra parte, de la Figura 11.2(b) se tiene que la fase de la función de transferencia es

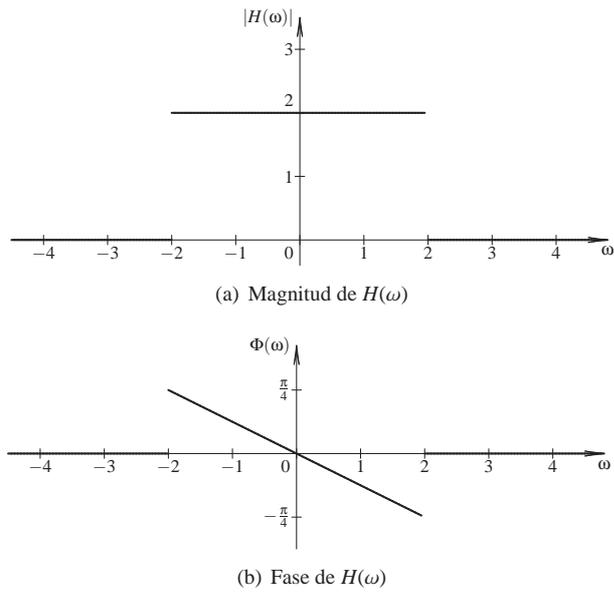
$$\Phi(\omega) = -\frac{\pi}{8}\omega p_2(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (11.17)$$

De las Ecuaciones (11.16) y (11.17) se tiene que la función de transferencia puede ser modelada por

$$H(\omega) = 2p_2(\omega)e^{-j\frac{\pi}{8}\omega p_2(\omega)}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (11.18)$$

## 11.2 RELACIÓN DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA EN EL PLANO $S$ Y EL DOMINIO $\omega$

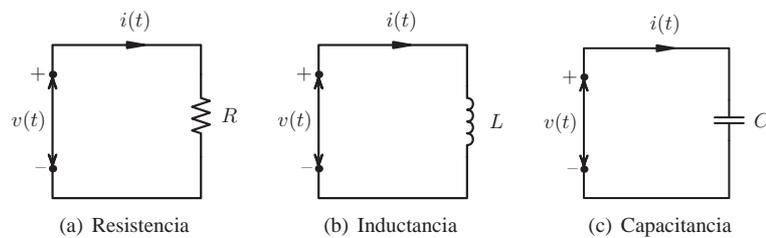
El concepto que establece la relación entre el plano  $S$  y el dominio  $\omega$  ha sido tratado en los capítulos anteriores. Sin embargo, en este apartado se busca mostrar el tema nuevamente debido a su importancia en el ámbito de la ingeniería eléctrica.



**Figura 11.2.** Gráfica de: (a) magnitud de la función de transferencia del Ejemplo 11.4 y (b) fase de la función de transferencia del Ejemplo 11.4

### 11.2.1 Impedancia de elementos pasivos

Para lograr el propósito de este apartado, se introducirá el concepto de impedancia de elementos eléctricos pasivos, el cual es ampliamente presentado en Kuo (1966) y Papoulis (1978). No obstante, el autor no pretende desarrollar un tratado de redes eléctricas debido a los extenso que esto puede resultar.



**Figura 11.3.** Gráfica de elementos eléctricos vistos desde el dominio del tiempo: (a) resistencia, (b) inductancia y (c) capacitancia

La Figura 11.3 muestra las redes eléctricas conformadas por los elementos pasivos: resistencia, inductancia y capacitancia, las cuales serán modeladas matemáticamente en términos de sus variables externas,  $i(t)$  y  $v(t)$  correspondientes respectivamente a la señal de excitación y respuesta de cada sistema.

Del sistema de la Figura 11.3(a) se tiene que

$$v(t) = Ri(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (11.19)$$

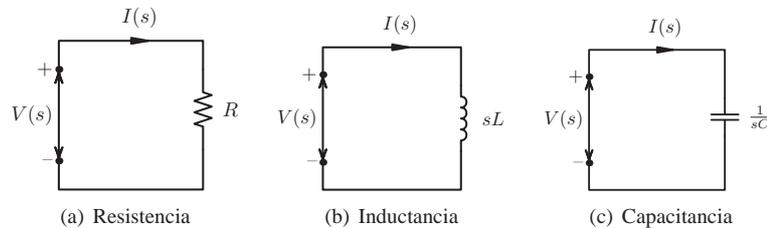
Por otra parte, el sistema de la Figura 11.3(b) tiene como relación

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (11.20)$$

En cuanto al sistema conformado por la capacitancia mostrado en la Figura 11.3(c), la relación entre las variables externas es

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (11.21)$$

Un punto de vista alternativo al análisis en tiempo, es por medio de la transformada de Laplace. La Figura 11.4 muestra las redes eléctricas conformadas por los elementos pasivos: resistencia, inductancia y capacitancia en el dominio de la transformada de Laplace, donde sus variables externas,  $I(s)$  y  $V(s)$  correspondientes respectivamente a la señal de excitación y respuesta de cada sistema.



**Figura 11.4.** Gráfica de elementos eléctricos vistos desde el dominio  $S$ : (a) resistencia, (b) inductancia y (c) capacitancia

Al aplicar la transformada de Laplace a la Ecuación (11.19) se tiene que la relación entre las variables externas del sistema de la Figura 11.4(a) viene dada por

$$V(s) = RI(s), \quad \forall s \in D_r, \quad (11.22)$$

donde  $D_r$  es la región de convergencia, y su función de transferencia es

$$H(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = Z_r(s) = R, \quad \forall s \in D_r, \quad (11.23)$$

donde  $Z_r(s)$  denota la impedancia de la resistencia en el dominio de la variable  $s$ .

Por otra parte, si suponemos que las condiciones iniciales de los sistema son nulas, se tiene entonces que la relación del sistema la Figura 11.4(b) obtenida a través de la Ecuación (11.20), corresponde a

$$V(s) = LsI(s), \quad \forall s \in D_l, \quad (11.24)$$

donde  $D_l$  es la región de convergencia, y la función de transferencia es

$$H(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = Z_l(s) = sL, \quad \forall s \in D_l, \quad (11.25)$$

donde  $Z_I(s)$  denota la impedancia de la inductancia en el dominio de la variable  $s$ .

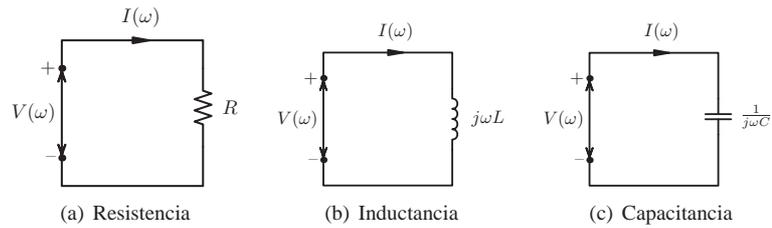
En cuanto al sistema de la Figura 11.4(c), su relación en el dominio de la transformada de Laplace bajo el supuesto de condiciones iniciales nulas, es

$$I(s) = C s V(s), \quad \forall t \in D_c, \quad (11.26)$$

donde  $D_c$  es la región de convergencia, y con relación a su función de transferencia se tiene que esta es dada por

$$H(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = Z_c(s) = \frac{1}{sC}, \quad \forall s \in D_c, \quad (11.27)$$

donde  $Z_c(s)$  denota la impedancia de la capacitancia en el dominio de la variable  $s$ .



**Figura 11.5.** Gráfica de elementos eléctricos vistos desde el dominio  $\omega$ : (a) resistencia, (b) inductancia y (c) capacitancia

Haciendo un análisis análogo al empleado en los sistemas de la Figura 11.4, se tiene que los sistemas de la Figura 11.5 presentan como relación en el dominio de la transformada de Fourier lo siguiente:

El sistema de la Figura 11.5(a), de acuerdo a la Ecuación (11.19) su representación en el dominio de la transformada de Fourier está definida como

$$V(\omega) = R I(\omega), \quad \forall |\omega| > 0, \quad (11.28)$$

y su función de transferencia viene expresada por

$$H(\omega) = \frac{V(\omega)}{I(\omega)} = Z_r(\omega) = R, \quad \forall |\omega| > 0, \quad (11.29)$$

donde  $Z_r(\omega)$  denota la impedancia de la resistencia en el dominio de la variable  $\omega$ .

De igual manera, se tiene que para el sistema de la Figura 11.5(b), al aplicar la transformada de Fourier a la Ecuación (11.20) esta arroja que

$$V(\omega) = j\omega L I(\omega), \quad \forall |\omega| > 0, \quad (11.30)$$

y la función de transferencia es

$$H(\omega) = \frac{V(\omega)}{I(\omega)} = Z_l(\omega) = j\omega L, \quad \forall |\omega| > 0, \quad (11.31)$$

donde  $Z_l(\omega)$  denota la impedancia de la inductancia en el dominio de la variable  $\omega$ .

Finalmente, para el sistema de la Figura 11.5(c), su relación en el dominio de la transformada de Fourier es

$$I(\omega) = j\omega C V(\omega), \quad \forall |\omega| > 0, \quad (11.32)$$

y con relación a su función de transferencia se tiene que ésta es dada por

$$H(\omega) = \frac{V(\omega)}{I(\omega)} = Z_c(\omega) = \frac{1}{j\omega C}, \quad \forall |\omega| > 0, \quad (11.33)$$

donde  $Z_c(\omega)$  denota la impedancia de la capacitancia en el dominio de la variable  $\omega$ .

Es oportuno mencionar que estos conceptos también pueden ser estudiados desde la perspectiva de los sistemas en el dominio discreto, a través de sus relaciones en ecuaciones en diferencias y su posterior representación en transformada  $\mathcal{Z}$ .

Brea *et al.* (1999) desarrollan una propuesta del enfoque de impedancia desde el punto de vista del dominio discreto.

Tomando en cuenta algunos conceptos básicos de redes eléctricas, se tienen dos conexiones básicas en redes eléctrica, como son: la conexión serie y conexión paralelo de impedancias, las cuales serán estudiadas a continuación.

### 11.2.2 Conexión serie y paralelo de arreglos de impedancias

La Figura 11.6 ilustra la conexión serie de dos impedancias  $Z_1$  y  $Z_2$ , las cuales tienen respectivamente una la caída de tensión eléctrica  $V_1(s)$  y  $V_2(s)$ , y en consecuencia se puede afirmar que

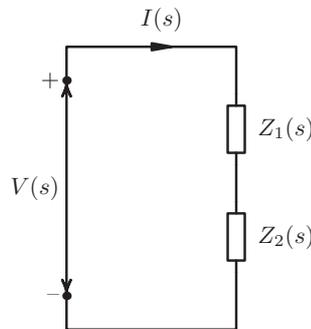
$$V(s) = V_1(s) + V_2(s). \quad (11.34)$$

Debido al hecho de que  $V_1(s) = Z_1(s)I(s)$  y  $V_2(s) = Z_2(s)I(s)$ , se tiene que al sustituir estas relaciones en la Ecuación (11.34)

$$V(s) = (Z_1(s) + Z_2(s))I(s), \quad (11.35)$$

lo que arroja que

$$Z(s) = H(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = Z_1(s) + Z_2(s), \quad (11.36)$$

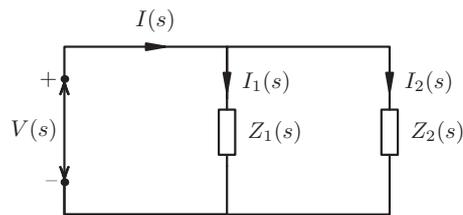


**Figura 11.6.** Arreglo de impedancias en conexión serie

La Figura 11.7 presenta dos impedancias conectadas en paralelo, debido al hecho de que ambas están sometidas a la misma diferencia de potencial eléctrico.

Del sistema se tiene que

$$I(s) = I_1(s) + I_2(s). \quad (11.37)$$



**Figura 11.7.** Arreglo de impedancias en conexión paralelo

Por otra parte, se tiene que

$$I_k(s) = \frac{V(s)}{Z_k(s)}, \quad \forall k = 1, 2. \quad (11.38)$$

Sustituyendo la Ecuación (11.38) en la Ecuación (11.37) se tiene que

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z_1(s)} + \frac{V(s)}{Z_2(s)}, \quad (11.39)$$

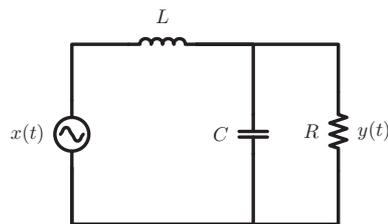
lo que permite asegurar al despejar la relación  $\frac{V(s)}{I(s)}$  que

$$Z(s) = H(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{\frac{1}{Z_1(s)} + \frac{1}{Z_2(s)}} = \frac{Z_1(s)Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}. \quad (11.40)$$

Las Ecuaciones (11.36) y (11.40) representan respectivamente la impedancia equivalente de la conexión serie y paralelo de dos impedancias  $Z_1(s)$  y  $Z_2(s)$ . Estas relaciones básicas permiten determinar la impedancia equivalente de una red eléctrica, conociendo su configuración, lo que constituye la función de transferencia del sistema, si su señal de excitación es la corriente  $I(s)$ , y su señal de respuesta es la caída de tensión eléctrica  $V(s)$ .

#### ■ EJEMPLO 11.5

Sea el sistema de representado por la Figura 11.8 de la página 308, el cual es excitado por una señal  $x(t)$ , y su respuesta  $y(t)$ , es medida sobre caída de tensión eléctrica sobre la resistencia  $R$ .



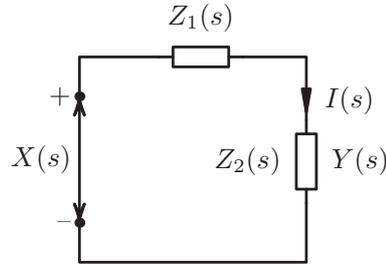
**Figura 11.8.** Sistema eléctrico RCL.

Determine la función de transferencia del sistema como función de la variable  $s$ , así como su función de transferencia en frecuencia.

**Solución**

Un modo de ver el problema es a través de un sistema eléctrico equivalente que permita establecer la relación entre  $x(t)$  e  $y(t)$ , bajo condiciones iniciales nulas.

La Figura 11.9 muestra un sistema equivalente que permite expresar la relación esperada.



**Figura 11.9.** Sistema eléctrico equivalente RCL.

En la Figura 11.9  $Z_2(s)$  representa la impedancia equivalente de la resistencia y la capacitancia conectadas en paralelo.

Si se denota a  $Z_l(s)$ ,  $Z_c(s)$  y  $Z_r(s)$  como las impedancias de la inductancia, capacitancia y resistencia, respectivamente, se tiene que

$$\begin{aligned} Z_l(s) &= sL; \\ Z_c(s) &= 1/sC; \\ Z_r(s) &= R. \end{aligned} \tag{11.41}$$

Empleando la Ecuación (11.40) de la página 308 se tiene que

$$Z_2(s) = \frac{Z_r(s)Z_c(s)}{Z_r(s) + Z_c(s)} = \frac{R}{1 + sRC}. \tag{11.42}$$

Además, como puede verse

$$Z_1(s) = Z_l(s) = sL. \tag{11.43}$$

Por otra parte se tiene que

$$Y(s) = I(s)Z_2(s), \tag{11.44}$$

donde

$$I(s) = \frac{X(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}, \tag{11.45}$$

lo que implica que

$$Y(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} X(s), \quad \forall s \in D, \tag{11.46}$$

donde  $D$  es la región de convergencia.

Al sustituir los valores de  $Z_1(s)$  y  $Z_2(s)$  en la Ecuación (11.46), ésta arroja como resultado que

$$Y(s) = \frac{R}{R + Ls + RLCs^2} X(s), \quad \forall s \in D. \quad (11.47)$$

En consecuencia,

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{R}{R + Ls + RLCs^2}, \quad \forall s \in D, \quad (11.48)$$

y al hacer  $s = j\omega$  se tiene

$$H(\omega) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{R}{R - RLC\omega^2 + j\omega L}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (11.49)$$

### ■ EJEMPLO 11.6

Determine la función de transferencia  $H(\omega)$  definida en el Ejemplo 11.1 de la página 300, mediante el concepto de impedancia.

#### Solución

De acuerdo al problema planteado en el Ejemplo 11.1, y empleando la notación definida en el ejemplo, la caída de tensión eléctrica sobre la capacitancia, bajo condiciones iniciales nulas, viene dada por

$$Y(s) = I(s)Z_c(s), \quad (11.50)$$

donde

$$I(s) = \frac{X(s)}{Z_r(s) + Z_c(s)}, \quad (11.51)$$

y  $Z_r(s) = R$  y  $Z_c(s) = 1/sC$ .

Sustituyendo la Ecuación (11.51) en la Ecuación (11.50), se obtiene

$$Y(s) = \frac{Z_c(s)}{Z_r(s) + Z_c(s)} X(s), \quad (11.52)$$

la cual al sustituir los valores de  $Z_r(s)$  y  $Z_c(s)$ , esta arroja que

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} X(s). \quad (11.53)$$

Al considerar las condiciones iniciales nulas, se tiene que  $H(s)$  es

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{1 + sCR}, \quad (11.54)$$

la cual al ser evaluada en  $s = j\omega$ ,

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega CR}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (11.55)$$

**PROBLEMAS**

**11.1** Sea  $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal periódica cuya expresión analítica está dada por

$$x(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^5 \frac{1}{n} \cos(2nt), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (11.56)$$

Sea además un sistema lineal, dinámico, causal, invariante en el dominio y determinista (LDCID), el cual tiene como función de transferencia

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (11.57)$$

Si el sistema es excitado por la señal  $x(t)$  dada por la Ecuación (11.56). Entonces, el retardo que se produce en la onda fundamental de  $x(t)$  es

- A)  $-\frac{\text{tg}^{-1}(2)}{2}$  s
- B)  $\frac{\text{tg}^{-1}(2)}{2}$  s
- C)  $-\frac{\pi}{4}$  s
- D) ninguna de las anteriores.

**11.2** Sea un sistema LDCID, y cuya función de transferencia está definida por

$$H(\omega) = \left. \frac{Y(s)}{X(s)} \right|_{s=j\omega} = \frac{10}{10 - 4\omega^2 + j2\omega}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (11.58)$$

donde  $X(s)$  e  $Y(s)$  denotan respectivamente sendas transformada de Laplace de su excitación y respuesta.

Si el sistema es excitado por la señal

$$x(t) = \cos^3(10t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (11.59)$$

la cual es medida en V.

Determine:

- a) respuesta del sistema ante la excitación  $x(t)$ ;
- b) potencia promedio normalizada de la señal de excitación  $x(t)$ ;
- c) potencia promedio normalizada de la señal de respuesta  $y(t)$ ;

**11.3** Sea un sistema LDCID definido en el dominio continuo del tiempo. Si la función de transferencia del sistema es

$$H(\omega) = q_{4\omega_0}(\omega) e^{-j\frac{\pi}{8\omega_0}\omega}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (11.60)$$

y el sistema es excitado por una señal  $x(t)$ , medida en V y con expresión

$$x(t) = [\text{sen}(\omega_0 t) + \text{cos}(\omega_0 t)]^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (11.61)$$

Determine:

- respuesta del sistema ante la excitación  $x(t)$ ;
- potencia promedio normalizada de la señal de excitación  $x(t)$ ;
- potencia promedio normalizada de la señal de respuesta  $y(t)$ .

### EJERCICIOS PROPUESTOS

**11.4** Sea un sistema LDCID definido en el dominio continuo del tiempo. Si la función de transferencia del sistema es

$$H(\omega) = q_{60}(\omega) e^{j \frac{\pi}{120} \omega}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (11.62)$$

y el sistema es excitado por una señal  $x(t)$  con expresión

$$x(t) = [\text{sen}(10t) + \text{sen}(20t)]^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (11.63)$$

Determine:

- respuesta del sistema ante la excitación  $x(t)$ ;
- potencia promedio normalizada de la señal de excitación  $x(t)$ ;
- potencia promedio normalizada de la señal de excitación  $y(t)$ .

**11.5** Sea un sistema LDCID definido en el dominio continuo del tiempo. Si la función de transferencia del sistema es

$$H(\omega) = p_{60}(\omega) e^{j \frac{\pi}{120} \omega}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (11.64)$$

y el sistema es excitado por una señal  $x(t)$ , conocida como un señal seno con rectificación de media onda, y cuya expresión es

$$x(t) = \text{máx}[0, \text{sen}(10t)], \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (11.65)$$

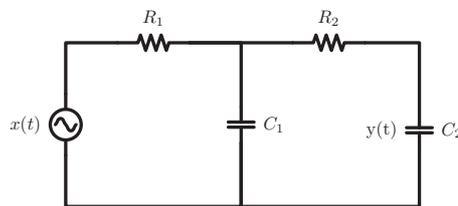
donde

$$\text{máx}(\alpha, \beta) = \begin{cases} \alpha, & \forall \alpha \geq \beta; \\ \beta, & \forall \alpha < \beta. \end{cases} \quad (11.66)$$

Determine:

- respuesta del sistema ante la excitación  $x(t)$ ;
- potencia promedio normalizada de la señal de excitación  $x(t)$ ;
- potencia promedio normalizada de la señal de excitación  $y(t)$ .

**11.6** Sea el sistema descrito por la Figura 11.10 formado por resistencias y capacitancias.



**Figura 11.10.** Sistema eléctrico doble RC.

Si el sistema es excitado por una señal de tensión eléctrica  $x(t)$  y su respuesta  $y(t)$  es medida a través de la caída de tensión sobre la capacitancia  $C_2$ . Entonces, determine su función de transferencia del sistema en el dominio de la variable  $s$  empleando los conceptos de impedancia.



## CAPÍTULO 12

---

# ANÁLISIS DE SISTEMAS NO LINEALES

---

El respeto y el aprecio a todo lo que nos rodea, son unas de las bases más importantes que permite la convivencia entre los seres que habitamos este universo.

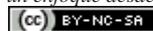
—Ebert Brea



Jules Henri Poincaré

El pionero en el estudio de la dinámica de los sistemas como sistemas deterministas y no lineales a través de un novedoso enfoque, para la época, denominado “*Teoría del Caos*”

*Análisis de Sistemas Lineales Asistido con Scilab™, un enfoque desde la Ingeniería Eléctrica. Primera Edición.* Por Ebert Brea.



por Ebert Brea, 2014.

fue Jules Henri Poincaré<sup>18</sup> a quien se le atribuye ser el padre del estudio de la dinámica de los sistemas no lineales lo cual condujo a la *Teoría del Caos*, teoría que hoy en día ha tenido gran vigencia en sus innumerables aplicaciones en diversos campos del saber, desde las artes, biología, economía, matemáticas, entre otros tantos campos de conocimiento. Su teoría emergió mientras estudiaba su *Problema de los Tres Cuerpos*, la cual debió estudiar el planteamiento del problema con una visión diferente para ese entonces.

Gleick (1988) desarrolla en su obra un enfoque sencillo del concepto de la Teoría del Caos, aunque en su obra no hace un reconocimiento a Poincaré por sus aportes en esta área del saber.

Sin embargo, a pesar de las grandes aplicaciones que tiene el estudio de los sistemas dinámicos no lineales, en este capítulo se limitará su estudio a los sistemas estáticos no lineales.

El análisis de los sistemas y señales, en muchas oportunidades exige un estudio exhaustivo de elementos no lineales que por su características no puede ser estudiados bajo aproximaciones lineales. Este hecho es lo que ha motivado incluir este capítulo con el fin de estudiar los sistemas con no linealidades.

Es oportuno señalar que los sistemas mostrados en esta sección son estudiados cuando estos son excitados por señales sinusoidales. No obstante, las señales de excitación de los sistemas pueden ser cualquier tipo definida en el dominio continuo o discreto.

El resto del capítulo está distribuido en dos secciones. La Sección 12.1 estudia los sistemas no lineales definidos en el dominio continuo, y la Sección 12.2 muestra mediante ejemplos en estudio de sistemas no lineales en el ámbito del dominio discreto.

## 12.1 MODELOS MATEMÁTICOS NO LINEALES EN EL DOMINIO CONTINUO

Los modelos matemáticos asociados a sistemas no lineales, estáticos, causales, invariantes en el dominio y deterministas (NLECID) son definidos a través de formulaciones matemáticas, las cuales han sido denominadas ecuaciones descriptivas del sistema, y el estudio de estos modelos se harán mediante casos particulares.

Para cada uno de los siguientes casos, se denominará a la señal de excitación o entrada por  $x(t)$ , y la señal de respuesta o salida mediante  $y(t)$ , donde ambas señales cuentan con expresiones matemáticas definidas por funciones  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

### 12.1.1 Rectificador de media onda

Un rectificador de media onda, cuenta con la siguiente ecuación descriptiva,

$$y(t) = x(t)u[x(t)], \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}, \quad (12.1)$$

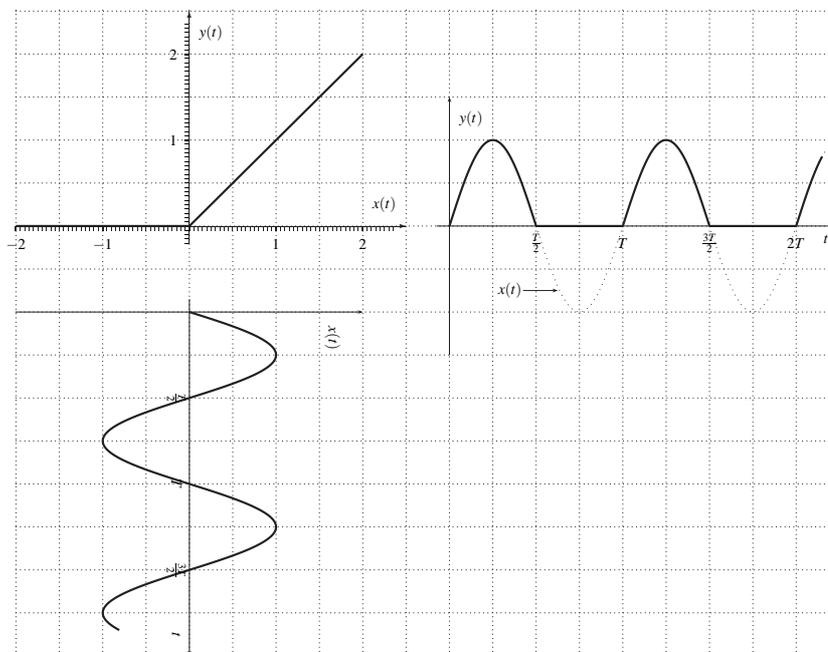
donde  $u[\cdot]$  es la función escalón definida en el dominio correspondiente.

Es importante destacar que existen otros modelos matemáticos del rectificador de media onda, y uno de ellos será mostrado en el Apartado 12.1.5 de la página 320.

<sup>18</sup>Jules Henri Poincaré nació el 29 de abril de 1854 en Nancy, Lorraine, Francia; y falleció el 17 de julio de 1912 en Paris, Francia. El retrato fue obtenido de <https://commons.wikimedia.org/>

De la Ecuación (12.1) se tiene que

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & \forall x(t) \geq 0; \\ 0, & \forall x(t) < 0. \end{cases} \quad (12.2)$$



**Figura 12.1.** Representación gráfica de la ecuación descriptiva de un rectificador de media onda, señal de excitación  $x(t) = \text{sen}(\omega_0 t)$ , y respuesta  $y(t)$  arrojada por el sistema no lineal

La Figura 12.1 presenta tres gráficas: en su esquina superior izquierda la curva que representa la ecuación descriptiva del sistema; en la esquina superior derecha se muestra la respuesta del sistema en trazo continuo y sobre una línea pespunteada la señal de excitación  $x(t) = \text{sen}(\omega_0 t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , únicamente con propósitos referenciales; y en la esquina inferior izquierda la señal de excitación del sistema.

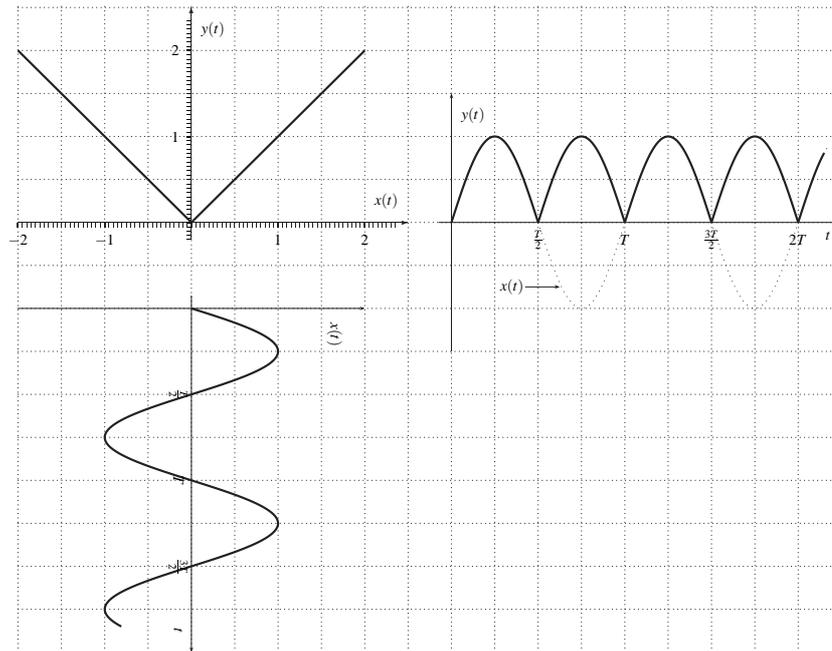
Note que el sistema sólo deja pasar la señal de excitación, si ésta es de rango no negativo.

### 12.1.2 Rectificador onda completa

$$y(t) = |x(t)|, \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}. \quad (12.3)$$

De acuerdo a la Ecuación (12.3), ésta es interpretada como

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & \forall x(t) \geq 0; \\ -x(t), & \forall x(t) < 0. \end{cases} \quad (12.4)$$



**Figura 12.2.** Representación gráfica de la ecuación descriptiva de un rectificador de onda completa, señal de excitación  $x(t) = \text{sen}(\omega_0 t)$ , y respuesta  $y(t)$  arrojada por el sistema no lineal

La Figura 12.2 muestra en su esquina superior izquierda la curva correspondiente a la ecuación descriptiva de un sistema rectificador de onda completa; en su esquina superior derecha la respuesta del sistema ante la señal de excitación, la cual es ilustrada en la esquina inferior derecha de la figura.

Observe que el sistema transforma los valores negativos de la señal de excitación en positivo, y aquellos valores que son positivo o nulos, el sistema no los altera.

### 12.1.3 Comparador

Un comparador es un elemento no lineal, el cual indica con un nivel constante cuando la señal está por encima de un umbral  $\alpha$ , y un nivel cero cuando la señal de excitación está por debajo del umbral definido.

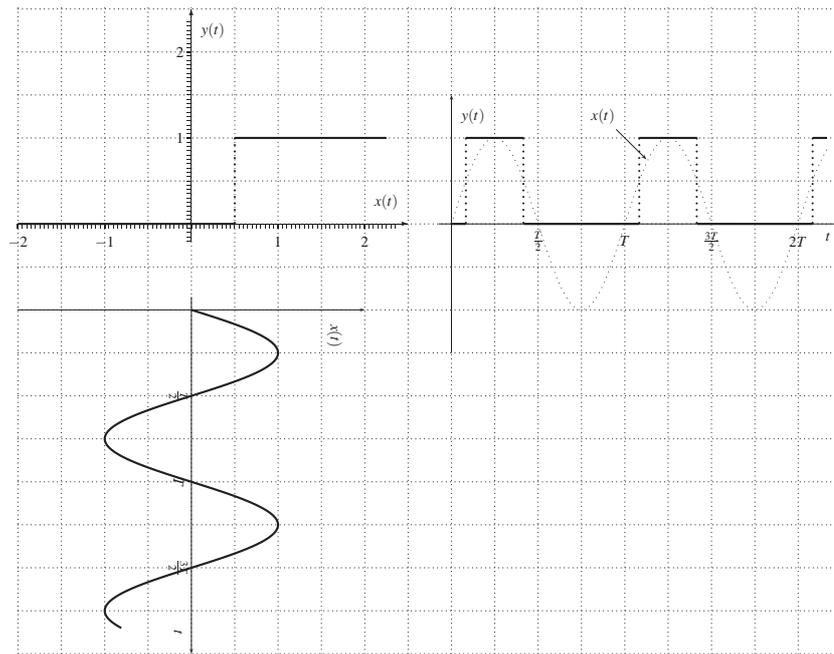
De lo explicado, se tiene,

$$y(t) = u[x(t) - \alpha], \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}, \quad (12.5)$$

donde  $\alpha$  es el nivel de umbral.

Según la expresión matemática definida por la Ecuación (12.5), se tiene

$$y(t) = \begin{cases} 1, & \forall x(t) > \alpha, \\ 0, & \forall x(t) \leq \alpha. \end{cases} \quad (12.6)$$



**Figura 12.3.** Representación gráfica de la ecuación descriptiva de un comparador con umbral  $\alpha = \frac{1}{2}$ , señal de excitación  $x(t) = \text{sen}(\omega_0 t)$ , y respuesta  $y(t)$  arrojada por el sistema no lineal

La Figura 12.3 presenta la gráfica de la ecuación descriptiva del comparador con un umbral de  $\alpha = 1/2$  en la esquina superior izquierda de la figura. Además, en la esquina inferior izquierda es representada la señal de excitación del sistema, la cual corresponde a  $x(t) = \text{sen}(\omega_0 t)$ ; y en la esquina superior derecha la figura muestra la señal de respuesta ante la excitación mostrada en la figura.

Note que el primer cambio producido en la respuesta, es decir, cuando cambia de 0 a 1 se produce cuando  $\text{sen}(\omega_0 t) = \frac{1}{2}$ , lo que implica que este hecho ocurre en el instante  $T/12$ . Empleando la misma relación, puede asegurarse que el primer cambio en la señal de respuesta de 1 a 0 se produce en el instante  $5T/12$ . Observa además que estos instantes de cambios se repiten con una periodicidad de  $T$ .

### 12.1.4 Función mínimo

La función mínimo es otra de las funciones que son empleadas en la representación de elementos no lineales, y cuya definición en términos generales es

$$\text{mín}(a, b) = \begin{cases} a, & \forall a < b; \\ b, & \forall a \geq b. \end{cases} \tag{12.7}$$

Como ejemplo, sea el sistema descrito por

$$y(t) = \text{mín}[x(t), \alpha], \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}, \tag{12.8}$$

donde  $\alpha$  representa el tope superior que puede adquirir  $y(t)$ .

La Figura 12.4 de la página 321 exhibe en su esquina superior izquierda la gráfica de la ecuación descriptiva del sistema no lineal; en su esquina inferior izquierda la señal de excitación  $x(t) = \sin(\omega_0 t)$ ; y en su esquina superior derecha la señal de respuesta del sistema ante la excitación  $x(t) = \sin(\omega_0 t)$ , la cual es representada con una línea respunteada.

Al observar la Figura 12.4 se puede determinar que los intervalos donde están definidas las mesetas producidas en la señal  $x(t) = \sin(\omega_0 t)$  corresponden a aquellos valores de  $t$  que hacen que  $\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2}$ , es decir,

$$\omega_0 t = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi, & \forall k \in \mathbb{Z}; \\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, & \forall k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (12.9)$$

lo que implica que los instantes que definen los extremos de las mesetas son

$$t = \begin{cases} \frac{1+12k}{12}T, & \forall k \in \mathbb{Z}; \\ \frac{5+12k}{12}T, & \forall k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (12.10)$$

### 12.1.5 Función máximo

La función máximo suele ser empleada en algunas ocasiones para el modelaje de elementos no lineales, el cual en términos generales es definido por

$$\text{máx}(a, b) = \begin{cases} a, & \forall a \geq b; \\ b, & \forall a < b. \end{cases} \quad (12.11)$$

Como ejemplo, sea el sistema descrito por

$$y(t) = \text{máx}[x(t), \alpha], \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}, \quad (12.12)$$

donde  $\alpha$  viene a significar el tope inferior de la respuesta del sistema.

Note que al hacer  $\alpha = 0$  en la Ecuación (12.12) se modela un rectificador de media onda.

La Figura 12.5 exhibe en su esquina superior izquierda la gráfica de la ecuación descriptiva del sistema; en la esquina inferior izquierda de la figura se muestra la señal de excitación  $x(t) = \sin(\omega_0 t)$ ; y en la esquina superior derecha se ilustra la señal de respuesta con la señal de excitación en línea respunteada.

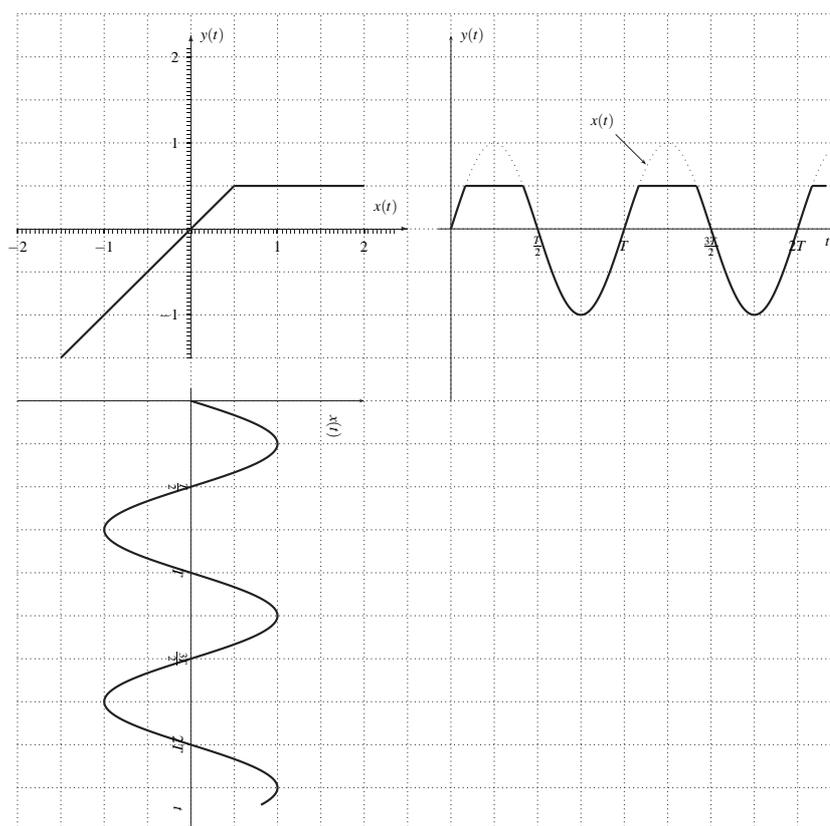
Note que los instantes que definen los cambios en la curva de respuesta corresponden a los instantes definidos por la Ecuación (12.10), por cuanto ambos casos tiene el mismo valor de umbral igual a  $\alpha = 1/2$ .

### 12.1.6 Amplificador con saturación

Un amplificador con niveles de saturación es modelado a través de

$$y(t) = \begin{cases} kx(t), & \forall |x(t)| \leq \alpha; \\ k\alpha \text{sgn}[x(t)], & \forall |x(t)| > \alpha, \end{cases} \quad (12.13)$$

donde  $k \in \mathbb{R}_+$  es la ganancia del amplificador, y  $\alpha > 0$  es el umbral de saturación.



**Figura 12.4.** Representación gráfica de la ecuación descriptiva de un sistema mínimo con un tope superior de  $\alpha = \frac{1}{2}$ , señal de excitación  $x(t) = \text{sen}(\omega_0 t)$ , y respuesta  $y(t)$  arrojada por el sistema no lineal

Una expresión analítica, tomando en cuenta los mismos parámetros definidos anteriormente, la cual permite representar un amplificador con saturación es

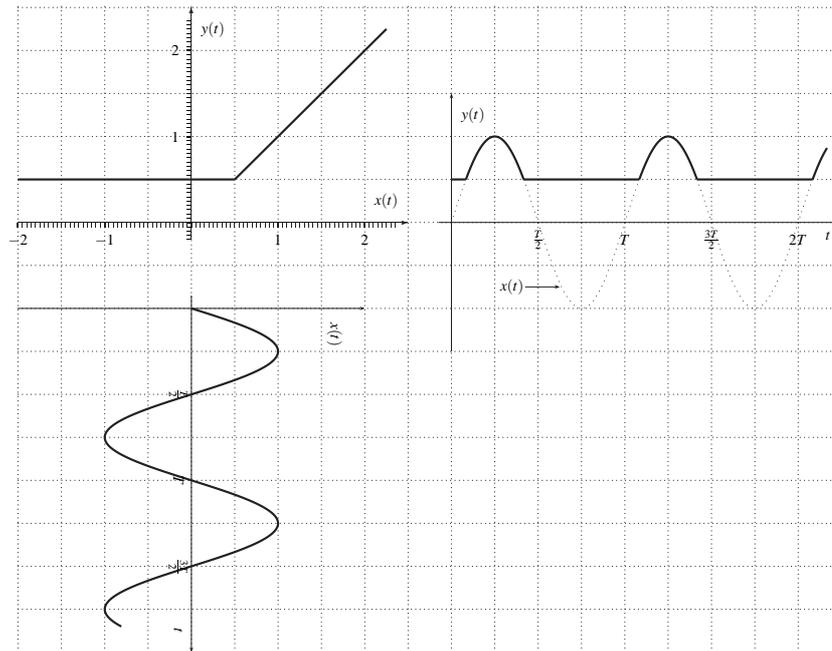
$$y(t) = \min[k\alpha, kx(t)] u[x(t)] - \max[-k\alpha, kx(t)] u[-x(t)], \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}, \quad (12.14)$$

donde  $u[\cdot]$  es la función escalón unitario.

La Figura 12.6 presenta las figuras correspondientes a la ecuación descriptiva del sistema, la señal de excitación y la señal de respuesta del sistema, ubicadas respectivamente en la esquina superior izquierda, esquina inferior izquierda y esquina superior derecha.

Observa que los valores de saturación del sistema no lineal limitan la señal de respuesta entre -1 y 1.

**Observación 12.1** Si el parámetro de umbral definido en algunas ecuaciones descriptivas de los sistemas estudiados es variable en el tiempo, es decir, el parámetro es una función que se ve alterada con el tiempo, la cual puede ser denotado como  $\alpha(t)$ , el sistema es considerado no lineal y variante en tiempo.



**Figura 12.5.** Representación gráfica de la ecuación descriptiva de un sistema máximo con un tope inferior de  $\alpha = \frac{1}{2}$ , señal de excitación  $x(t) = \text{sen}(\omega_0 t)$ , y respuesta  $y(t)$  arrojada por el sistema no lineal

Como ejemplo a lo referido a la Observación 12.1 está el caso de un sistema cuya ecuación descriptiva es

$$y(t) = \text{máx}[x(t), \alpha_0 e^{-\lambda t}], \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad (12.15)$$

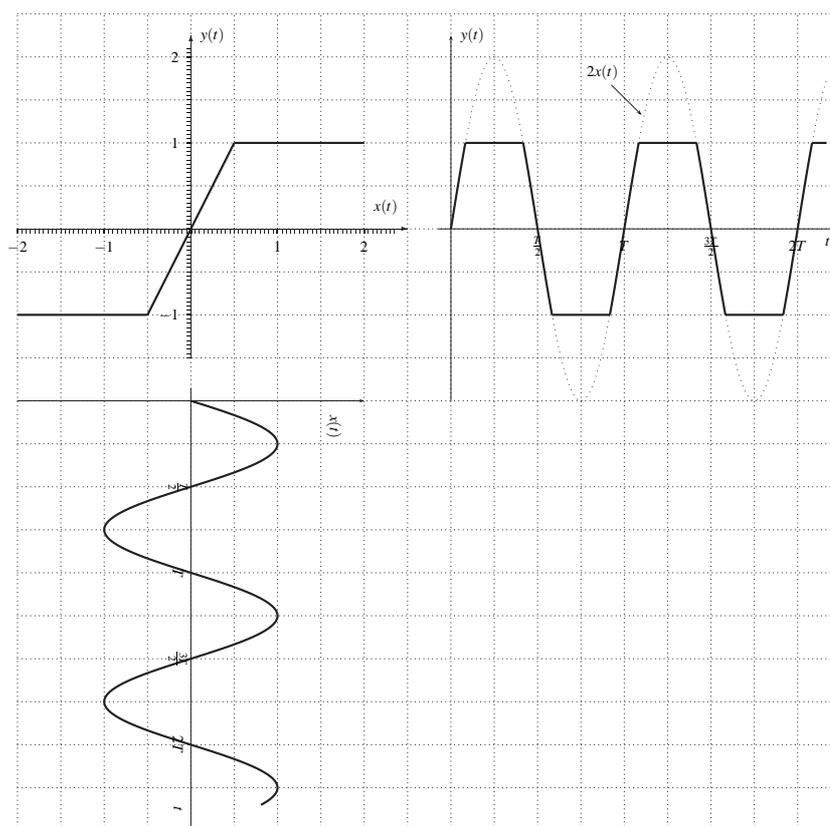
donde  $x(t)$  es la señal de excitación,  $y(t)$  es la señal de respuesta del sistema,  $\lambda > 0$  define la tasa de cambio del umbral,  $\alpha_0$  valor inicial del tope inferior, y el tope inferior es definido por  $\alpha(t) = \alpha_0 e^{-\lambda t}$  para todo  $t > 0$ .

■ **EJEMPLO 12.1**

Sea un sistema no lineal, estático, causal, invariante en el dominio y determinista (NLECID) con ecuación descriptiva

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \forall |x(t)| \leq \alpha; \\ k x(t), & \forall |x(t)| > \alpha, \end{cases} \quad (12.16)$$

donde  $x(t)$  es la señal de excitación,  $y(t)$  es la señal de respuesta del sistema,  $k$  es un factor de multiplicación, denominado usualmente factor de amplificación si  $k > 1$  o factor de atenuación si  $0 < k < 1$ , y  $\alpha > 0$  es el parámetro de umbral.



**Figura 12.6.** Representación gráfica de la ecuación descriptiva de un amplificador con saturación, señal de excitación  $x(t) = \text{sen}(\omega_0 t)$ , y respuesta  $y(t)$  arrojada por el sistema no lineal, con parámetro  $k = 2$  y  $\alpha = 1/2$

Si la señal de excitación del sistema corresponde a una señal sinusoidal, es decir,

$$x(t) = A \text{sen}(\omega_0 t)u(t), \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}, \tag{12.17}$$

donde  $A > \alpha$  es una constante real.

Entonces, para unos valores de  $k = 2$ ,  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$  y  $A = 2$ , determine:

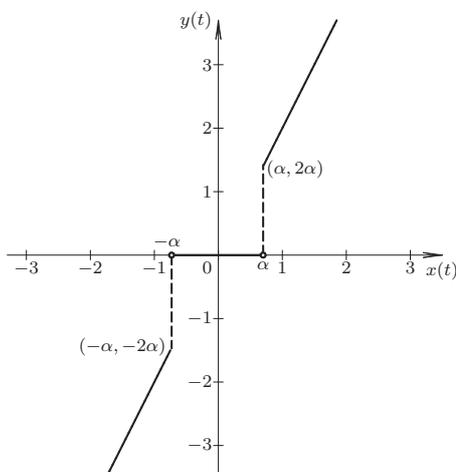
- i) representación gráfica correspondiente a la ecuación descriptiva del sistema;
- ii) representación gráfica de la respuesta del sistema ante la señal de excitación.

**Solución**

Parte i)

La Figura 12.7 de la página 324 presenta la gráfica correspondiente a la ecuación descriptiva del sistema definida por la Ecuación (12.16), con un valor de  $\alpha = 1/\sqrt{2}$ . Note que para señales con valores de rango comprendidos entre  $-1/\sqrt{2}$  y  $1/\sqrt{2}$  la

señal de respuesta es nula. Mientras que si  $|x(t)| > 1/\sqrt{2}$  la señal de excitación es amplificada en un factor de 2.



**Figura 12.7.** Representación gráfica correspondiente a la ecuación descriptiva del sistema con un valor de umbral  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$  y  $k = 2$

Parte ii)

Los instantes de tiempo en donde se producen los cambios son aquellos que satisfacen la ecuación

$$2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{12.18}$$

Es decir,

$$t = kT + \frac{T}{2\pi} \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \tag{12.19}$$

y

$$t = \left(\frac{2k+1}{2}\right)T - \frac{T}{2\pi} \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \tag{12.20}$$

donde  $\omega_0 T = 2\pi$ .

La Figura 12.8 de la página 325 ilustra el caso donde se ha definido la señal de excitación con una periodicidad de  $T = 2$  s.

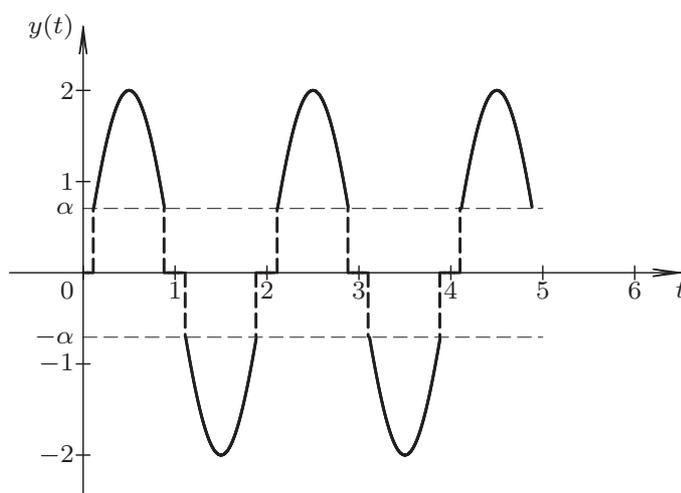
Note que los lapsos alrededor de  $t = 1, 2, \dots$  en donde la respuesta se anula está dado por

$$\Delta t = \frac{T}{2} \left(1 - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right). \tag{12.21}$$

Para el caso particular en donde  $T = 2$  s,  $\Delta t \cong 0,6368$  s.

## 12.2 MODELOS MATEMÁTICOS NO LINEALES EN EL DOMINIO DISCRETO

El concepto de respuesta de un sistema no lineal, estático, causal, invariante en el dominio y determinista (NLECID) en el ámbito del dominio discreto requiere tan sólo de la



**Figura 12.8.** Representación gráfica correspondiente a la respuesta del sistema ante la señal de excitación del Ejemplo 12.1

evaluación de la ecuación descriptiva del sistema para cada valor de la señal de excitación definida en el dominio discreto.

Suponga que cuenta con la ecuación descriptiva de un sistema NLECID, el cual se denota por  $y[n] = g(x[n])$ , donde  $g(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x[n] : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  es la señal de excitación definida en el dominio discreto, e  $y[n] : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  es la señal de respuesta definida en el dominio discreto.

En otras palabras, si

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{12.22}$$

donde  $x_k$  es el valor que tiene la  $k$ -ésima muestra de la señal de excitación.

Entonces,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(x_k) \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{12.23}$$

Note que cada muestra de la señal de respuesta es determinada por la evaluación de  $g(x_k)$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ .

A fin de introducir el concepto de respuesta de sistemas NLECID se empleará siguiente ejemplo.

■ **EJEMPLO 12.2**

Sea un sistema NLECID con modelo matemático definido por su ecuación descriptiva

$$y[n] = \text{sgnz}(x[n]), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{12.24}$$

donde la función  $\text{sgnz}(x) : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ , y está definida como

$$\text{sgnz}(x) = \begin{cases} -1, & \forall x < 0; \\ 0, & \forall x = 0; \\ 1, & \forall x > 0. \end{cases} \quad (12.25)$$

Determine la respuesta del sistema definido por la Ecuación (12.24) ante una señal excitación  $x[n]$  definida por

$$x[n] = \text{sen}(\pi hn)u[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (12.26)$$

donde  $h$  es el paso de discretización.

### Solución

Al aplicar la Ecuación (12.23) se tiene que la respuesta del sistema es

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \text{sgnz}(\text{sen}(\pi hk))\delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (12.27)$$

debido a que los pesos de cada impulso definido en el dominio discreto son determinados por la evaluación de la ecuación descriptiva del sistema, para cada valor de muestra de la excitación.

Es decir, si se denota a  $x_k = \text{sen}(\pi hk)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , entonces, los valores de la secuencia de la señal de respuesta vienen dados por

$$y_k = \text{sgnz}(\text{sen}(\pi hk)), \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (12.28)$$

La Figura 12.9(a) de la página 327 ilustra la señal de excitación o entrada al sistema definida en el dominio discreto. Mientras, la Figura 12.9(b) muestra la señal de respuesta del sistema ante la excitación de la Figura 12.9(a).

## PROBLEMAS

**12.1** Sea el sistema no lineal, estático, causal, invariante en el dominio y determinista (NLECID) mostrado en la Figura 12.10 de la página 327, el cual contiene un elemento no lineal con ecuación descriptiva

$$r(t) = g[x(t)] = u[x(t)], \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}, \quad (12.29)$$

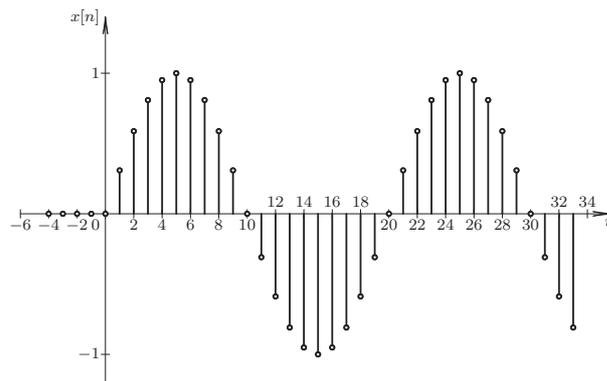
y además se conoce que la señal de salida o respuesta del sistema  $y(t) = x(t) + r(t)$ .

Si la señal de excitación del sistema es

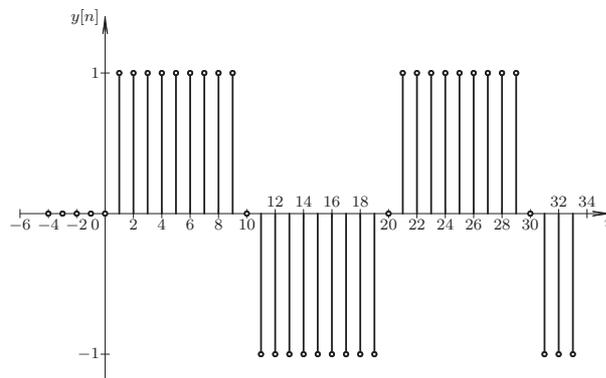
$$x(t) = \cos(\pi t)u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (12.30)$$

Determine:

- compruebe que el sistema es estático y no lineal;
- gráfica de la señal  $r(t)$ ;
- gráfica de la señal  $y(t)$ .

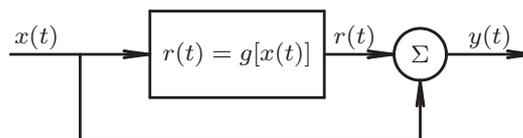


(a) Excitación sinusoidal discreta



(b) Respuesta del sistema no lineal

**Figura 12.9.** Gráfica de: (a) señal de excitación y (b) señal de respuesta del sistema NLECID del Ejemplo 12.2



**Figura 12.10.** Sistema en el dominio continuo compuesto de un elemento no lineal y un sumador de señales

**EJERCICIOS PROPUESTOS**

**12.2** Considera el sistema no lineal, estático, causal, invariante en el dominio y determinista (NLECID) de la Figura 12.10.

Si la señal de excitación del sistema es

$$x(t) = \text{sen}(\pi t)u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{12.31}$$

Determine la respuesta del sistema para cada uno de los casos definidos por las siguientes ecuaciones descriptivas:

a)  $r(t) = g[x(t)] = \max\left[\frac{1}{2}, x(t)\right];$

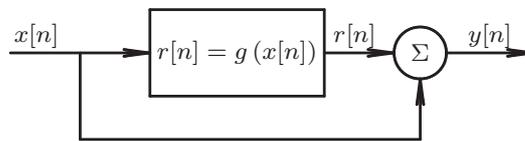
b)  $r(t) = g[x(t)] = \min\left[\frac{1}{2}, x(t)\right];$

c)  $r(t) = g[x(t)] = |x(t)|;$

d)  $r(t) = g[x(t)] = 2x(t)u[x(t)];$

e)  $r(t) = g[x(t)] = \min\left[\frac{1}{2}, |x(t)|\right].$

**12.3** Sea el sistema no lineal, estático, causal, invariante en el dominio y determinista (NLECID) definido en el dominio discreto presentado en la Figura 12.11, el cual posee un elemento no lineal con ecuación descriptiva  $r[n] = g(x[n])$ .



**Figura 12.11.** Sistema en el dominio discreto compuesto de un elemento no lineal y un sumador de señales

Si el sistema tiene a su entrada la señal

$$x[n] = [\sin(\pi hn) + \sin(3\pi hn)]u[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (12.32)$$

donde  $h = 10\text{ms}$  es el paso de discretización.

Entonces, determine<sup>19</sup> la respuesta del sistema para cada uno de los siguientes casos:

a)  $r[n] = g(x[n]) = \max\left[\frac{1}{2}, x[n]\right];$

b)  $r[n] = g(x[n]) = \min\left[\frac{1}{2}, x[n]\right];$

c)  $r[n] = g(x[n]) = |x[n]|;$

d)  $r[n] = g(x[n]) = 2x[n]u(x[n]);$

e)  $r[n] = g(x[n]) = \min\left[\frac{1}{2}, |x[n]|\right].$

<sup>19</sup>Como recomendación emplee alguna hoja de cálculo electrónica o el Scilab™.

## CAPÍTULO 13

---

# APLICACIONES DE ANÁLISIS ESPECTRAL

---

Debemos pensar siempre que podemos hacer y actuar en consecuencia, antes de esperar que otros vengan a hacer algo por nosotros.

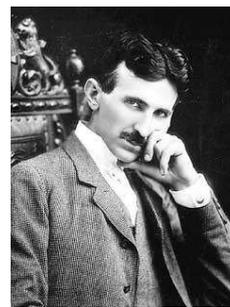
—Ebert Brea



Guglielmo Marconi



Karl Ferdinand Braun



Nikola Tesla

Las telecomunicaciones inalámbricas como es hoy en día más conocida fue originada por Guglielmo Marconi<sup>20</sup> a través de su desarrollo de la telegrafía inalámbrico.

<sup>20</sup>Guglielmo Marconi nació en Bologna, Italia, el 25 de abril de 1874; y falleció en Roma, Italia el 20 de julio de 1937. El retrato fue obtenido de <https://commons.wikimedia.org/>

En 1909 Marconi empleó su famosa Patente Británica No. 7777 “*tuned or syntonized telegraphy*”, en el histórico día del 12 de diciembre de 1901, a las 12:30 a.m., 4:30 Tiempo Universal Coordinado, más conocido de su denominación en inglés *Coordinated Universal Time* (UTC). En aquel histórico día, Marconi probó que la curvatura de La Tierra no afectaba las ondas electromagnéticas. Marconi transmitió la letra “s” en código Morse usando su sistema de transmisión telegráfica inalámbrico, siendo éste el primer sistema inalámbrico desarrollado, con el cual logró establecer comunicación telegráfica a lo largo del océano Atlántico, entre Poldhu, Cornwall (Reino Unido de Inglaterra y Norte de Irlanda) y St. John’s Newfoundland (Canadá) a una distancia de 2.100 mi. La Figura 13.1 muestra a Marconi<sup>21</sup> ese histórico día de diciembre de 1901.

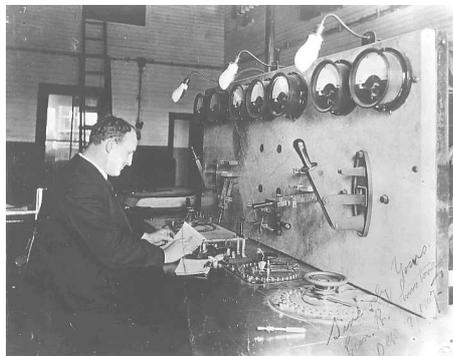


**Figura 13.1.** Guglielmo Marconi durante su prueba, el 12 de diciembre de 1901

Guglielmo Marconi fue homenajeado con el Premio Nobel de Física en 1909, el cual compartió con el Profesor Karl Ferdinand Braun<sup>22</sup>, por sus aportes en el desarrollo de la telegrafía inalámbrica.

No obstante, la invención de las comunicaciones inalámbricas se le atribuye también a Nikola Tesla<sup>23</sup> al punto de que hoy en día existe controversia sobre quien fue realmente el inventor de la radio. Tesla fue un destacado científica quien dominó la física, las matemáticas y la electricidad, y es considerado el padre de la corriente alterna por su invención del generador de corriente alterna multifásica.

La Figura 13.2 muestra una fotografía<sup>24</sup> del primer servicio de transmisión transatlántica de telegrafía operado por L.R. Johnstone. En la gráfica el Sr. Johnstone transmite el primer mensaje de servicio comercial de telegrafía inalámbrica desde la Torre Marconi, cerca de Glace Bay, Nova Scotia a Clifden, Irlanda, el 17 de octubre de 1907. Alrededor de diez mil palabras fueron intercambiadas entre ambas estaciones ese día.



**Figura 13.2.** Primer servicio transatlántico de telegrafía

<sup>21</sup>La fotografía fue obtenida en <http://www.hamradio.piatt.com/poldhu.htm>

<sup>22</sup>Karl Ferdinand Braun nació en Fulda, Alemania, el 6 de junio de 1850; y falleció en Brooklyn, Nueva York, EE.UU., el 20 de abril de 1918. Su retrato fue obtenido de <https://commons.wikimedia.org/>

<sup>23</sup>Nikola Tesla nació en Smiljan, Croacia, entonces Imperio Austro-Húngaro, el 10 de julio de 1856; y falleció en Nueva York, EE.UU., el 7 de enero de 1943. El retrato fue obtenido de <https://commons.wikimedia.org/>

<sup>24</sup>La fotografía fue obtenida de <http://ns1763.ca/marconi100/marpic03.html>

unos de los tantos fenómenos presente en la naturaleza, con el propósito de estudiar algunas aplicaciones en el análisis de los sistemas desde el punto de vista espectral. Un claro ejemplo del fenómeno de modulación son los procesos comunicacionales entre los seres vivos. En el caso del ser humano, el sentido auditivo está desarrollado para captar señales sonoras que oscilan entre 20 Hz y 20.000 Hz, en el caso de que la persona no tenga afectado el sistema auditivo. Mientras, la gesticulación de palabras no sobre pasan de los 10 Hz.

No obstante, el ser humano es capaz de percibir señales sonoras provenientes del habla de otra persona. Entonces, la pregunta es: ¿Cómo puede el ser humano percibir señales proveniente de la voz humana si el rango de audición, en el mejor de los casos, está entre 20 Hz y 20.000 Hz, y más cuando la gesticulación de palabras no pasan de los 10 Hz?

La respuesta a esta pregunta está basada en el estudio de los fenómenos de modulación de señales.

Dentro de los diferentes tipos de modulación, se estudiará la amplitud modulada (AM) tomando en cuenta el análisis espectral de las señales, para los dos principales modos de modulación en amplitud.

Además, como otra aplicación del análisis espectral se ha incluido el estudio de los sistemas de muestreo de señales definidas en el dominio del tiempo continuo.

Es importante destacar, que un análisis riguroso de los sistemas de modulación requiere que éstos sean estudiados desde la óptica de los procesos estocásticos, por cuanto las señales de información deben ser modeladas a través de variables aleatorias definidas como función de la variable independiente tiempo, bien sea en el dominio continuo o discreto. Sin embargo, este enfoque escapa de los alcances de esta obra, debido al hecho de que el lector requeriría, para el análisis desde el punto de vista estocástico, de un conjunto de conceptos que deben ser estudiados a partir de las probabilidades y las variables aleatorias.

El capítulo está estructurado como sigue: en la Sección 13.1 se estudiarán los sistema de amplitud modulada con portadora y con portadora suprimida. Además se introducirá el sistema de demodulación para el caso de amplitud modulada con portadora suprimida; en la Sección 13.3 se estudiará las condiciones mínimas que deben tomarse en cuenta para la toma de muestras de señales definidas en el dominio continuo.

Finalmente, son incluidos problemas y ejercicios propuestos que servirán para examinar los tópicos presentados en el capítulo.

### 13.1 MODULACIÓN EN AMPLITUD

La modulación en amplitud o también conocida como la amplitud modulada (AM) puede ser categorizada en dos grandes grupos: el primer grupo denominado amplitud modulada con portadora suprimida, y un segundo grupo conocido como amplitud modulada con portadora.

Una mayor descripción de estos sistemas de modulación pueden ser estudiados de Carlson y Crilly (2009); Lathi y Ding (2009).

Para visualizar estas dos clases de sistemas de modulación en amplitud debe tenerse en cuenta algunas definiciones básicas.

**Definición 13.1 (Señal moduladora)** *Es la señal que contiene la información que se desea transmitir a través del sistema de modulación.*

**Definición 13.2 (Señal portadora)** *Es la señal que porta la información al lugar del espectro deseado.*

**Definición 13.3 (Señal modulada)** Es la señal resultante del proceso de modulación.

### 13.1.1 Modulación en amplitud con portadora suprimida

Considera una señal  $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la señal que contiene la información a transmitir, es decir, la señal moduladora.

Por otra parte, sea  $f_p(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la señal portadora definida en este caso como

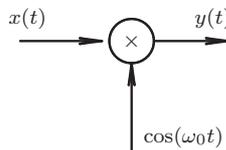
$$f_p(t) = \cos(\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (13.1)$$

donde  $\omega_0$  es la frecuencia de modulación o de la portadora.

Entonces, la representación matemática de un sistema de modulación en amplitud con portadora suprimida es definida por

$$y(t) = x(t)\cos(\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (13.2)$$

donde  $y(t)$  viene a representar la señal modulada.



**Figura 13.3.** Sistema transmisor de amplitud modulada con portadora suprimida

Como ejemplo, suponga que la señal moduladora, es decir, la señal que contiene la información a transmitir que es denotada, en la Figura 13.3, como  $x(t)$ , viene dada por

$$x(t) = \sin(2\pi f_1 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (13.3)$$

donde  $f_1 = 50\text{Hz}$ , es decir, la señal tiene un período de  $T_1 = 20\text{ms}$ .

Además, considere que la señal portadora está oscilando a una frecuencia angular  $\omega_0 = \frac{4\pi}{3} 10^3 \text{rad/s} \cong 4.188,8 \text{rad/s}$ , la cual tiene un período  $T = 1,5\text{ms}$ .

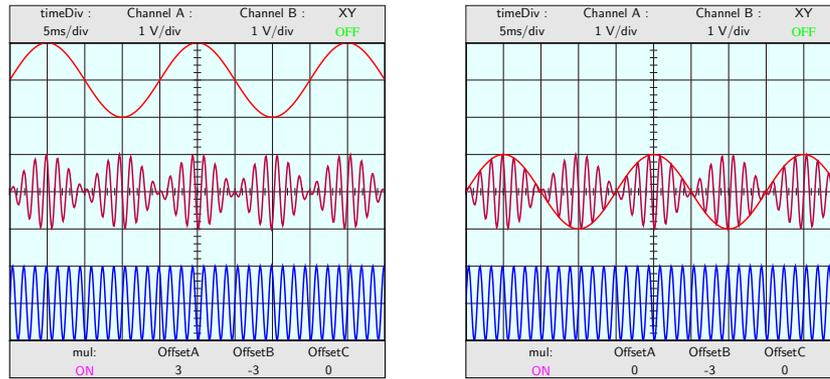
La Figura 13.4(a) muestra los registros que se tienen en un osciloscopio, las señales moduladora, modulada y portadora, en la parte superior, central e inferior de la pantalla del osciloscopio, respectivamente. Mientras la Figura 13.4(b) ilustra las mismas señales de la Figura 13.4(a), pero la señal moduladora es registrada sin *offset* para visualizar las alteraciones a que es expuesta la señal portadora.

La Figura 13.5 de la página 333 ilustra el fenómeno de cambio de fase en la señal modulada a consecuencia de los valores negativos en la señal moduladora definida por la Ecuación (13.3).

Observe entre los instantes  $\frac{T_1}{2}$  y  $T_1$  la señal portadora ha sufrido un cambio en su fase de valor igual a  $\pi$ . Este hecho puede observarse mejor en el cambio que se produce en la señal modulada en los instantes  $n\frac{T_1}{2}$ , para  $n \in \mathbb{Z}$ .

El beneficio que tiene la modulación es realmente apreciable cuando se estudia en el dominio de la frecuencia. Para esto considere que la señal moduladora  $x(t)$  cuenta con transformada de Fourier  $X(\omega)$ .

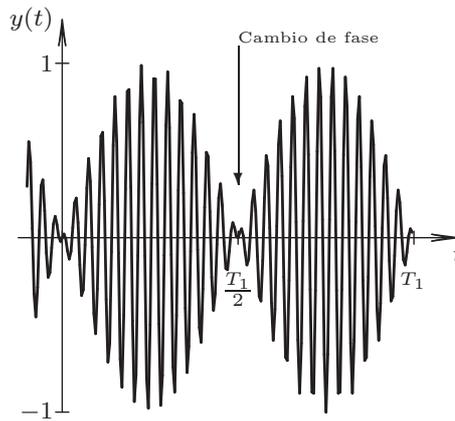
Al evaluar la transformada de Fourier de  $y(t)$  se tiene que



(a) Señales moduladora con *offset* igual a 3V

(b) Señales moduladora sin *offset*

**Figura 13.4.** Imágenes de dos osciloscopios registrando las señales moduladora, modulada y portadora en un sistema amplitud modulada con portadora suprimida. Gráfica (a) señal moduladora con un ajuste de *offset* igual a 3V y (b) señal moduladora sin *offset*



**Figura 13.5.** Efecto del cambio de fase en la señal modulada debido a los valores negativos presente en la señal moduladora

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)], \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \tag{13.4}$$

De la Ecuación (13.4) se tiene que debido al Teorema 4.5 de la página 110

$$Y(\omega) = \frac{1}{2} X(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \tag{13.5}$$

por cuanto

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)] = \pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \tag{13.6}$$

La Ecuación 13.5 representa el fenómeno de traslación del espectro de la señal  $x(t)$  a los valores de frecuencia  $\pm \omega_0$ .

Para explicar este fenómeno considere que la señal moduladora  $x(t)$  corresponde a la señal

$$x(t) = 2 \operatorname{senc}_a(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (13.7)$$

donde  $a > 0$ .

Se conoce que

$$X(\omega) = \mathcal{F}[2 \operatorname{senc}_a(t)] = \frac{\pi}{2} p_a(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (13.8)$$

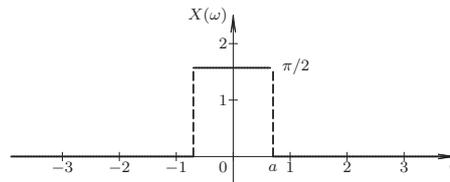


Figura 13.6. Espectro de la señal  $x(t)$

La Figura 13.6 ilustra el espectro de la señal  $x(t)$  definida por la Ecuación (13.8). Al aplicar la Ecuación (13.5), se obtiene que

$$Y(\omega) = \frac{\pi}{4} p_a(\omega + \omega_0) + \frac{\pi}{4} p_a(\omega - \omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (13.9)$$

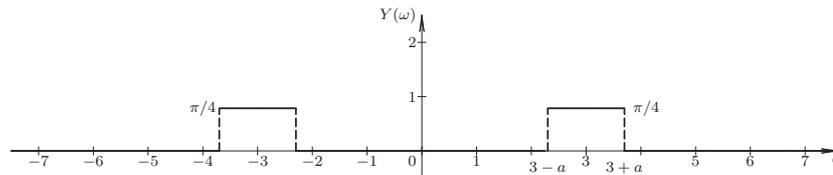


Figura 13.7. Espectro de la señal  $x(t)\cos(\omega_0 t)$  para el caso cuando  $\omega_0 = 3 \text{ rad/s}$

La Figura (13.7) muestra el espectro de la señal  $Y(\omega)$  dada por la Ecuación (13.9). Note que en la figura se presenta la traslación que sufre el espectro de la señal  $x(t)$ , la cual se desplaza a los valores de  $\omega = \pm \omega_0$ , cuando  $\omega_0 = 3 \text{ rad/s}$ .

Además, observe que la modulación en amplitud permite transmitir distintas señales simultáneamente sin que ocurra una mezcla de ellas, si son transmitidas a diferentes frecuencias de portadoras y además si no se produce un solapamiento en frecuencia, para lo cual se debe tener cuidado con los dominios de ocupación en frecuencias que contienen el conjunto de señales a transmitir. En el ejemplo de la Figura (13.7), la señal moduladora ocupa un ancho de  $\Delta\omega = 2a$ .

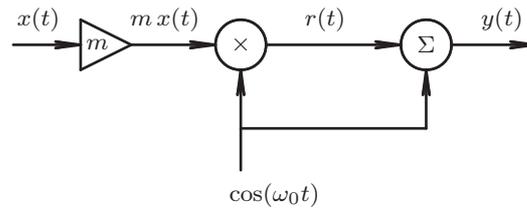
Una definición muy importante en los sistemas de transmisión analógicos es el relativo al ancho de banda, que usualmente es denotado por  $\beta$ .

**Definición 13.4 (Ancho de banda)** Se define como ancho de banda de una señal analógica  $f(t)$  como el intervalo de frecuencia en la cual la señal está por encima de la mitad de la máxima potencia instantánea de la señal. Es decir, que el ancho de banda  $2\beta$  de una señal corresponde al intervalo de frecuencia en donde la señal tiene un rango mayor a  $\frac{1}{\sqrt{2}}M$ ,

donde  $M$  es la máxima amplitud de la señal, o en términos de decibelios a  $M_{dB} - 3dB$ , donde  $M_{dB}$  es el valor máximo de la señal expresado en dB.

### 13.1.2 Modulación en amplitud con portadora

Los sistemas de modulación en amplitud con portadora son realmente sencillos de demodular a través de un sencillo filtro. No obstante, estos sistemas requieren de mayor capacidad debido a que deben transmitir la señal portadora.



**Figura 13.8.** Sistema transmisor de amplitud modulada con portadora

La Figura 13.8 ilustra un sistema de modulación amplitud modulada (AM) con portadora.

El modelo matemático que representa el sistema de la Figura 13.8 es

$$y(t) = [1 + m x(t)] \cos(\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (13.10)$$

donde  $x(t)$  es la señal moduladora,  $m > 0$  es el índice de modulación, y  $\omega_0$  es la frecuencia de la portadora.

Por otra parte, al determinar el espectro de la señal  $y(t)$ , se tiene que

$$Y(\omega) = \mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)] + \frac{1}{2\pi} m X(\omega) * \mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)], \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (13.11)$$

Tomando en cuenta las Ecuaciones (13.6) de la página 333, se obtiene que

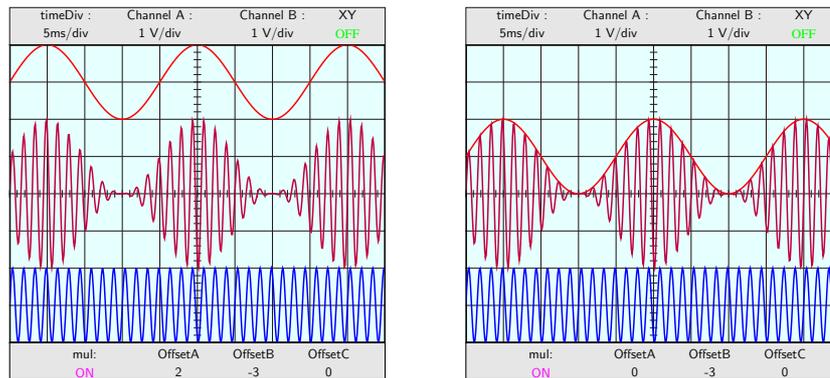
$$Y(\omega) = \pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} m X(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} m X(\omega - \omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (13.12)$$

La Ecuación (13.12) muestra claramente en su expresión, la presencia de la portadora en la transmisión de la señal  $x(t)$  en un sistema de modulación en amplitud con portadora.

Considere nuevamente la señal moduladora definida por la Ecuación (13.3), con una frecuencia de la señal portadora de  $\omega_0 = \frac{2\pi}{1.5 \times 10^{-3}}$  rad/s, y con un índice de modulación  $m = 1$ .

La Figura 13.9(a) de la página 336 muestra los registros que se tienen en un osciloscopio, las señales moduladora, modulada y portadora, en la parte superior, central e inferior de la pantalla del osciloscopio, respectivamente, con un ajuste del *offset* igual a 2V en la señal moduladora para el caso en donde el índice de modulación  $m = 1$ , cuando estas señales son empleadas en un sistema de modulación en amplitud con portadora.

Por otra parte, la Figura 13.9(b) ilustra las mismas señales representadas en la Figura 13.9(a), pero sin *offset* en el canal A del osciloscopio a los efectos de mostrar la línea envolvente dibujada en la señal portadora.



(a) Señales moduladora con *offset* igual a 2V

(b) Señales moduladora sin *offset*

**Figura 13.9.** Imágenes de dos osciloscopios registrando las señales moduladora, modulada y portadora en un sistema amplitud modulada con portadora. Gráfica (a) señal moduladora con un ajuste de *offset* igual a 2 V y (b) señal moduladora sin *offset*

### 13.1.3 Comparación de la modulación en amplitud con portadora suprimida y con portadora

Las Figuras 13.10(a) y 13.10(b) de la página 337 ilustra un ejemplo de modulación en amplitud, en donde la señal moduladora corresponde a

$$x(t) = \text{sen}(\omega t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{13.13}$$

es indicada en línea pespunteada, la cual modula una señal portadora de ecuación

$$p(t) = \text{cos}(\omega t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{13.14}$$

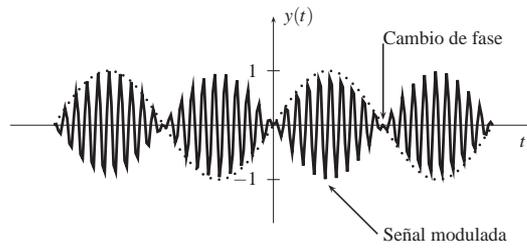
La Figura 13.10(a) de la página 337 ilustra las alteraciones que sufre la señal portadora, así como el cambio de fase en  $\pi$  rad cuando la señal moduladora toma valores negativos. El sistema de modulación en amplitud con portadora requiere de un complejo sistema de recepción o recuperación de la señal moduladora, y cuyo principios serán tema de estudio en la Sección 13.2.

Por otra parte, La Figura 13.10(b) presenta el efecto aditivo que tiene la inclusión de la señal portadora, cuando el índice de modulación  $m = 1$ . Este sistema de modulación es realmente sencillo en la recuperación de la señal moduladora, la cual puede incluso hacerse con un receptor compuesto únicamente de elementos pasivos, llamado *Radio a Galena*.

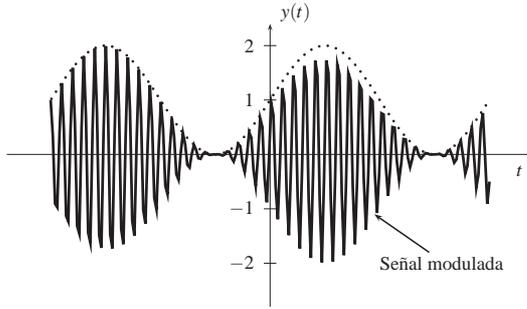
■ **EJEMPLO 13.1**

Sea una señal moduladora definida como

$$x(t) = \text{senc}_5^2(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{13.15}$$



(a) amplitud modulada con portadora suprimida



(b) amplitud modulada con portadora

**Figura 13.10.** Gráfica de: (a) Modulación de la señal  $\text{sen}(\omega_1 t)$  con portadora suprimida y (b) Modulación de la señal  $\text{sen}(\omega_1 t)$  con portadora e índice de modulación  $m = 1$

Si la señal moduladora es empleada en un sistema de modulación en amplitud con portadora suprimida, y la expresión matemática de la señal portadora es

$$p(t) = \cos(\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (13.16)$$

donde  $\omega_0 = 100 \text{ rad/s}$ .

Entonces, determine el espectro de  $y(t) = x(t)p(t)$ . Es decir,  $\mathcal{F}[y(t)]$ .

**Solución**

Se tiene que

$$\mathcal{F}[q_a(t)] = a \text{senc}_{a/2}^2(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (13.17)$$

donde

$$q_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a}, & \forall |t| < a; \\ 0, & \forall |t| \geq 0, \end{cases} \quad (13.18)$$

es la conocida función pulso rectangular.

Aplicando el principio de dualidad o de simetría de la transformada de Fourier, tomando en cuenta la Ecuación (13.17), se obtiene que

$$\mathcal{F}\left[a \text{senc}_{a/2}^2(t)\right] = 2\pi q_a(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (13.19)$$

En consecuencia, se tiene que

$$X(\omega) = \mathcal{F} \left[ \text{senc}_5^2(t) \right] = \frac{\pi}{5} q_{10}(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (13.20)$$

debido a que  $a = 10 \text{ rad/s}$ .

Aplicando la Ecuación (13.5) de la página 333, se obtiene que

$$\mathcal{F} [y(t)] = \frac{\pi}{10} q_{10}(\omega + 100) + \frac{\pi}{10} q_{10}(\omega - 100), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (13.21)$$

### 13.2 DEMODULACIÓN EN AMPLITUD

Ahora, suponga que la señal representada por la Ecuación (13.2) es multiplicada por la misma señal  $\cos(\omega_0 t)$ , quedando

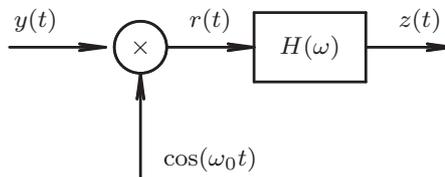
$$r(t) = x(t) \cos^2(\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (13.22)$$

Es claro que la Ecuación (13.22) puede ser reexpresada como

$$r(t) = \frac{1}{2} x(t) + \frac{1}{2} x(t) \cos(2\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (13.23)$$

y cuyo espectro obviamente es

$$R(\omega) = \frac{1}{2} X(\omega) + \frac{1}{4} X(\omega - 2\omega_0) + \frac{1}{4} X(\omega + 2\omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (13.24)$$



**Figura 13.11.** Sistema receptor de amplitud modulada sin portadora

La Figura 13.11 de la página 338 presenta a nivel de bloques un sistema de demodulación. Note que en la figura se muestra un bloque con función de transferencia  $H(\omega)$ , el cual es empleado para eliminar la parte de la señal que es modulada a  $\pm 2\omega_0$ , y así sólo permitir que  $Z(\omega) = \frac{1}{2} Y(\omega)$ .

### ■ EJEMPLO 13.2

Suponga que se desea recuperar la información transmitida por el sistema de modulación en amplitud con portadora suprimida, como lo propuesto en el Ejemplo 13.1.

Para lograr recuperar la información de la señal moduladora  $x(t)$ , se tiene que

$$r(t) = y(t)\cos(\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (13.25)$$

donde  $\omega_0 = 100$  rad/s, e  $y(t) = x(t)\cos(100t)$ .

Determine el espectro de  $r(t)$ .

#### Solución

Empleando la Ecuación (13.20) en la Ecuación (13.24) se tiene entonces que

$$R(\omega) = \frac{\pi}{10}q_{10}(\omega) + \frac{\pi}{20}q_{10}(\omega - 200) + \frac{\pi}{20}q_{10}(\omega + 200), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (13.26)$$

Note que si el sistema de demodulación es como el que aparece en la Figura 13.11, y el filtro  $H(\omega)$  tiene una función de transferencia

$$H(\omega) = p_{10}(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (13.27)$$

Entonces, el espectro de la señal  $z(t)$  a la salida del filtro viene a ser

$$Z(\omega) = \frac{\pi}{10}q_{10}(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (13.28)$$

La expresión definida por la Ecuación 13.28 proporciona suficiente información de la señal moduladora  $x(t)$ .

### 13.3 TEOREMA DE MUESTREO

La idea de tomar muestras de una señal para luego recuperarla a través de filtros fue originalmente propuesto por Harry Nyquist.

En este apartado se mostrará los principios del muestreo de señales definida en el dominio continuo, la cual será contextualizada en el dominio del tiempo continuo.

Esta teoría fue lo que ha permitido el desarrollo de las comunicaciones digitales y su conexión entre el dominio continuo y discreto.

El Teorema de Muestreo enunciado por Nyquist (1928) propone la condición con que debe tomarse las muestras de una señal definida en el dominio continuo, si se espera, a partir de sus muestras recuperarla nuevamente, para así poder representarla en el dominio continuo.

**Teorema 13.1 (Muestreo)** Sea  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal definida en el dominio continuo del tiempo y de banda limitada, es decir,

$$F(\omega) = 0, \quad \forall |\omega| > \beta, \quad (13.29)$$

donde  $\beta$  es la frecuencia angular máxima de la señal  $f(t)$ .

Si se toman muestras de la señal  $f(t)$  a intervalos regulares del tiempo de modo tal que la frecuencia de tomas de muestras, denominada frecuencia de muestreo  $\tilde{\omega}$ , es mayor

al doble de la frecuencia máxima de la señal  $f(t)$ . Entonces, la señal  $f(t)$  puede ser recuperada a partir de la señal  $\tilde{f}(t)$ , la cual representa la señal contentiva de las muestras.

**Demostración.** Sea  $\tilde{f}(t)$  la señal contentiva de las muestras, la cual es representada por

$$\tilde{f}(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tilde{T}), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (13.30)$$

donde  $f(t)$  es una señal de banda limitada tal como es definida en el enunciado del teorema, y  $\tilde{T}$  es el correspondiente período del tren de impulsos unitarios y cuya frecuencia es  $\tilde{\omega} = 2\pi/\tilde{T}$ .

Ahora, del análisis de transformada de Fourier se tiene que

$$\mathcal{F}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega), \quad (13.31)$$

donde  $F_i(\omega) = \mathcal{F}[f_i(t)]$  para cada  $i = 1, 2$ .

Por otra parte, denote  $\delta_{\tilde{T}}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\tilde{T})$ , entonces empleando esta notación se puede afirmar que el par de transformada de Fourier de  $\delta_{\tilde{T}}(t)$  es

$$\mathcal{F}[\delta_{\tilde{T}}(t)] = \tilde{\omega} \delta_{\tilde{\omega}}(\omega) = \tilde{\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\tilde{\omega}), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (13.32)$$

donde  $\tilde{\omega} = \frac{2\pi}{\tilde{T}}$ .

Empleando las Ecuaciones (13.31) y (13.32) para calcular la transformada de Fourier de (13.30), se tiene

$$\mathcal{F}[\tilde{f}(t)] = \tilde{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * \tilde{\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\tilde{\omega}), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (13.33)$$

Reexpresando la Ecuación (13.33), se tiene

$$\tilde{F}(\omega) = \frac{1}{\tilde{T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega) * \delta(\omega - n\tilde{\omega}), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (13.34)$$

Ahora, de acuerdo con Brea (2006),

$$F(\omega) * \delta(\omega - n\tilde{\omega}) = \int_{\Omega=-\infty}^{\infty} F(\Omega) \delta(\omega - \Omega - n\tilde{\omega}) d\Omega \quad (13.35)$$

Aplicando el cambio de variable  $x = \omega - \Omega - n\tilde{\omega}$  a la integral de la Ecuación (13.35), se puede afirmar que la Ecuación (13.35) queda expresada por

$$F(\omega) * \delta(\omega - n\tilde{\omega}) = \int_{x=-\infty}^{\infty} F(\omega - x - n\tilde{\omega}) \delta(x) dx = F(\omega - n\tilde{\omega}). \quad (13.36)$$

Al sustituir el resultado arrojado por la Ecuación (13.36) en la Ecuación (13.34), se tiene que

$$\tilde{F}(\omega) = \frac{1}{\tilde{T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\tilde{\omega}), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (13.37)$$

Obviamente la Ecuación (13.37) representa el modelo matemático de una función periódica, hecho estudiado ampliamente en la Sección 10.3 de esta obra.

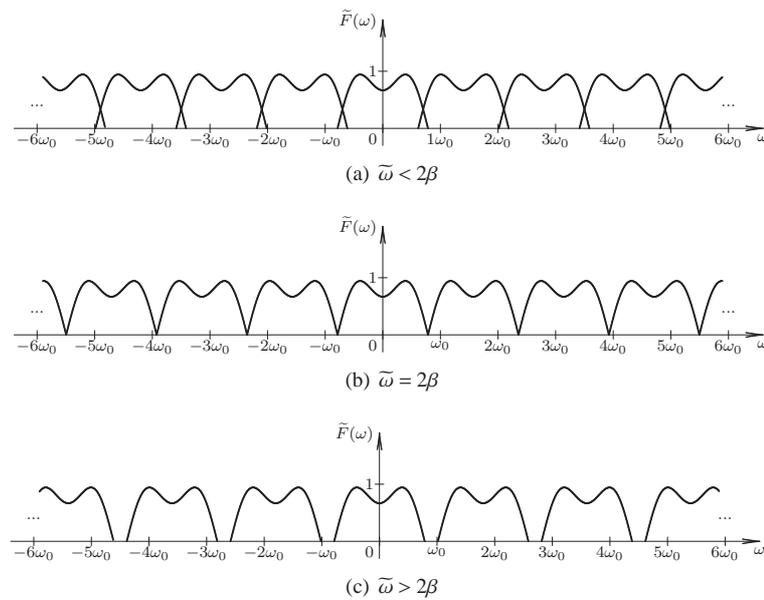
Note que la periodicidad de función  $\tilde{F}(\omega)$  es  $\tilde{\omega}$  y la única condición para que valores distintos de cero de dos consecutivas extensiones periódicas no compartan sus dominio en  $\omega$ , produciendo así una distorsión en su espectro, es

$$\tilde{\omega} > 2\beta,$$

donde  $\beta$  es el semiancho de banda de la señal  $F(\omega)$ . ■

La Figura 13.12 de la página 341 ilustra los tres posibles casos de muestreos con relación al doble de la frecuencia máxima de una señal limitada en banda. Note como es ilustrado el fenómeno de solapamiento cuando la frecuencia de muestreo es  $\tilde{\omega} < 2\beta$ , el cual es mostrado en la Figura 13.12(a), conllevando una distorsión en el espectro de la señal muestreada y en consecuencia la pérdida de información de la señal. Mientras que la Figura 13.12(c) presenta el caso cuando  $\tilde{\omega} > 2\beta$ , lo que posibilita la reconstrucción de la señal a partir de la información extraída en el proceso de toma de muestras.

Este hecho entonces induce a proponer una solución cuando la señal a muestrear es de un ancho de banda mayor al doble de la frecuencia máxima de muestreo, para lo cual se deberá limitar en banda la señal a través del empleo de filtros, y de esta forma evitar el fenómeno de solapamiento o también conocido del inglés como *aliasing*.



**Figura 13.12.** Un ejemplo de muestreo con: (a) frecuencia de muestreo menor al doble de la máxima frecuencia de la señal, lo que produce un solapamiento en el espectro; (b) frecuencia de muestreo igual al doble de la máxima frecuencia de la señal; y (c) frecuencia de muestreo mayor al doble de la máxima frecuencia de la señal, lo que permite separar los espectros

**Corolario 13.1** Sea  $\tilde{f}(t)$  una señal contentiva de las muestras de la señal  $f(t)$ , en donde la toma de muestras de la señal  $f(t)$  satisface las condiciones enunciadas en el Teorema 13.1. Si  $\tilde{f}(t)$  excita a un filtro que constituye ser un sistema LDCID de función de transferencia definida por

$$H(\omega) = \tilde{T} p_{\beta}(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (13.38)$$

donde

$$p_{\beta}(\omega) = \begin{cases} 1, & \forall |\omega| < \beta, \\ 0, & \forall |\omega| > \beta. \end{cases} \quad (13.39)$$

Entonces, la señal de salida o respuesta del filtro es exacta a la señal  $f(t)$  y ella estará dada por

$$f(t) = \frac{\tilde{T}\beta}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\tilde{T}) \text{senc}_{\beta}(t - n\tilde{T}), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (13.40)$$

**Demostración.** Se tiene que la respuesta de todo sistema LDCID con función de transferencia  $H(\omega)$  ante una señal  $x(t)$  y cuya transformada de Fourier es denotada por  $X(\omega)$ , viene dada por

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (13.41)$$

donde  $Y(\omega)$  representa la transformada de Fourier de la señal de salida  $y(t)$ .

Aplicando las Ecuaciones (13.37) y (13.38) en la Ecuación (13.41), se obtiene que

$$Y(\omega) = \tilde{T} p_{\beta}(\omega) \frac{1}{\tilde{T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\tilde{\omega}), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (13.42)$$

la cual al reescribirla se tiene que

$$Y(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_{\beta}(\omega) F(\omega - n\tilde{\omega}) = F(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (13.43)$$

debido al hecho de que  $\tilde{f}(t)$  satisface las condiciones establecidas en el Teorema 13.1.

Al calcular la antitransformada de  $Y(\omega)$ , se tiene claramente que

$$\mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)] = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t). \quad (13.44)$$

Además note que de las Ecuaciones (13.30) y (13.38) se obtiene respectivamente que

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\tilde{T}) \delta(t - n\tilde{T}), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (13.45)$$

y

$$h(t) = \frac{\tilde{T}\beta}{\pi} \text{senc}_{\beta}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (13.46)$$

Ahora, como  $f(t) = h(t) * \tilde{f}(t)$ , se tiene que sustituyendo únicamente la expresión de  $\tilde{f}(t)$  dada por la Ecuación (13.45),

$$f(t) = h(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\tilde{T}) \delta(t - n\tilde{T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\tilde{T}) h(t) * \delta(t - n\tilde{T}), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (13.47)$$

Empleando el concepto de convolución a la Ecuación (13.47), se consigue que

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\tilde{T}) \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) * \delta(t - \tau - n\tilde{T}) d\tau, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (13.48)$$

de donde claramente se sabe que  $\int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) * \delta(t - \tau - n\tilde{T}) d\tau = h(t - n\tilde{T})$ , la cual al sustituirla en la Ecuación (13.48), se obtiene que

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\tilde{T}) h(t - n\tilde{T}), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (13.49)$$

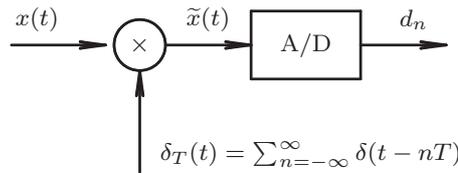
Al emplear la Ecuación (13.46) en la Ecuación (13.49), se obtiene que

$$f(t) = \frac{\tilde{T}\beta}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\tilde{T}) \text{senc}_{\beta}(t - n\tilde{T}), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

■

■ **EJEMPLO 13.3**

Sea el sistema ilustrado por la Figura 13.13, el cual presenta un sistema de muestreo con un convertidor de señales analógicas a señales digitales (A/D)



**Figura 13.13.** Sistema de tomas de muestras con convertido de señales analógicas a señales digitales

Si el convertidor de señales analógicas a señales digitales tiene una capacidad de convertir una muestra analógica en un palabra digital de 8 bits en 1 μs. Determine entonces la mayor frecuencia que puede ser correctamente muestreada.

**Solución**

Debido al hecho de que el convertidor puede cuantificar un nivel analógico cada 1 μs, entonces, la frecuencia de muestreo ( $f_m$ ) puede ser

$$f_m = \frac{1}{T} = \frac{1}{1 \mu\text{s}} = 1 \text{ MHz}. \quad (13.50)$$

Ahora bien, como la frecuencia de muestreo debe ser al menos el doble de la máxima frecuencia de la señal a muestrear, se tiene que la máxima frecuencia que debe contener la señal analógica es de 0,5 MHz.

■ EJEMPLO 13.4

Sea una señal  $x(t)$  periódica con simetría de media onda y frecuencia fundamental  $f_0 = 5$  kHz. Suponga que desea tomar muestras uniformemente espaciadas en tiempo de la señal  $x(t)$ , para lo cual cuenta con un sistema de tomas de muestras capaz de realizar la toma y conversión cada  $10 \mu\text{s}$ .

A fin de evitar los problemas que conllevan el solapamiento en frecuencia, debe filtrar la señal  $x(t)$  con un filtro pasa bajo con función de transferencia

$$H(\omega) = p_{\omega_c}(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (13.51)$$

donde  $\omega_c$  es la frecuencia de corte del filtro.

Determine la máxima frecuencia de corte  $\omega_c$  del filtro para evitar los problemas que producen el muestreo inadecuado de la señal.

**Solución**

Según lo enunciado en el problema, se conoce que la señal es periódica con simetría de media onda, lo que implica de la señal  $x(t)$  tiene únicamente armónicos de orden impar, es decir, que su desarrollo en serie de Fourier es

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (13.52)$$

Denote a  $y(t)$  la señal de respuesta del filtro, y cuya expresión matemática debe ser de la forma

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^N a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (13.53)$$

donde  $N$  es el orden la de armónica de mayor frecuencia que debe cumplir con los requerimientos del sistema de muestreo.

Debido al hecho de que el filtro no produce distorsión ni en amplitud ni en fase a cada una de las armónicas que pasan por el filtro, se tiene que como consecuencia del Teorema 13.1 de la página 339

$$2N f_0 \leq \frac{1}{10\mu\text{s}}, \quad (13.54)$$

donde de acuerdo con el enunciado  $f_0 = 5$  kHz.

Como resultado de la Desigualdad (13.54), el máximo valor entero de  $N$  debe satisfacer que

$$N 5\text{kHz} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{10\mu\text{s}}, \quad (13.55)$$

lo que implica que

$$N \leq 10. \quad (13.56)$$

De la Ecuación (13.56), se tiene que la frecuencia de corte  $\omega_c$  del filtro debe ser

$$\omega_c = 2\pi 10 f_0 = 100\pi \text{ krad/s.} \quad (13.57)$$

**PROBLEMAS**

**13.1** Sea la señal moduladora  $x(t)$  definida por

$$x(t) = \text{senc}_1(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (13.58)$$

Si la señal  $x(t)$  modula en amplitud con portadora suprimida a una señal periódica  $p(t)$  con extensión principal

$$p_0(t) = \begin{cases} 1, & \forall |t| < \frac{T}{2}; \\ -1, & \forall \frac{T}{2} < |t| < T, \end{cases} \quad (13.59)$$

donde la frecuencia fundamental de la señal periódica es  $\omega_0 = 100 \text{ rad/s}$ .

Determine entonces:

- a) el espectro de la señal modulada, denotada como  $y(t) = x(t)p(t)$ ;
- b) la energía normalizada así como su potencia normalizada a la salida de un sistema lineal, dinámico, causal, invariante en el dominio y determinista (LDCID) con función de transferencia

$$H(\omega) = p_{4\omega_0}(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (13.60)$$

si la señal de salida del sistema, la cual es denotada como  $z(t)$  viene dada por  $z(t) = h(t) * y(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**13.2** Sea la señal moduladora

$$x(t) = 1 + \text{sen}(10t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (13.61)$$

Si la señal moduladora es empleada en un sistema de amplitud modulada con portadora suprimida. Determine el espectro de la señal modulada para los casos cuando la señal portadora es:

- a)  $p(t) = \cos(100t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- b)  $p(t) = \text{sen}(100t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$

**EJERCICIOS PROPUESTOS**

**13.3** Sea el sistema mostrado en la Figura 13.14 de la página 346

Por otra parte, se tiene que

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \text{senc}_6(t), & \forall t \in \mathbb{R}; & & f_2(t) &= \cos^2(40t), & \forall t \in \mathbb{R}; \\ a(t) &= f_1(t)f_2(t), & \forall t \in \mathbb{R}; & & c(t) &= b(t)\cos(20t), & \forall t \in \mathbb{R}; \\ d(t) &= c(t)\cos(20t), & \forall t \in \mathbb{R}; & & e(t) &= c(t)\text{sen}(20t), & \forall t \in \mathbb{R}; \\ s(t) &= d(t) + e(t), & \forall t \in \mathbb{R}. & & & & \end{aligned} \quad (13.62)$$

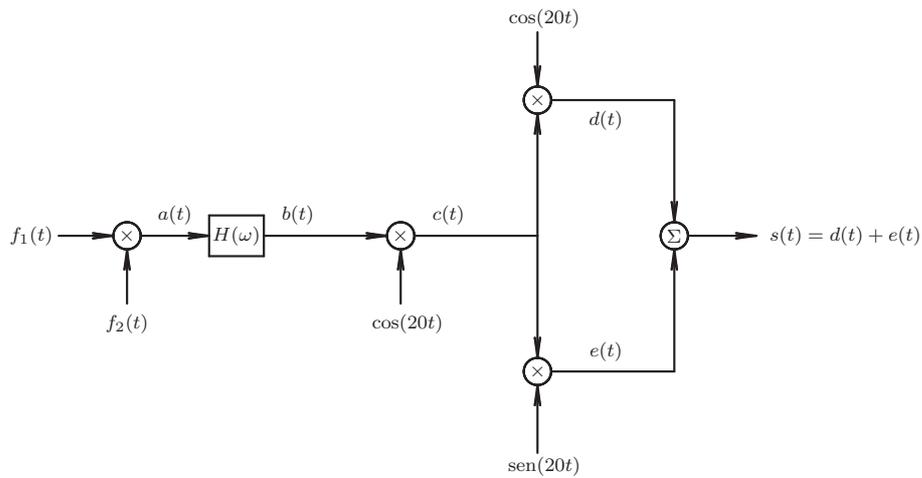


Figura 13.14. Sistema modulador de señales

Además, se sabe que la función de transferencia  $H(\omega)$  está definida por

$$H(\omega) = q_5(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (13.63)$$

Para el sistema de la Figura 13.14, determine:

- a) energía normalizada de  $b(t)$ ;
- b) expresión matemática de la señal  $c(t)$ ;
- c) espectro de la señal  $s(t)$ .

13.4 Sea el sistema mostrado en la Figura 13.15 de la página 346

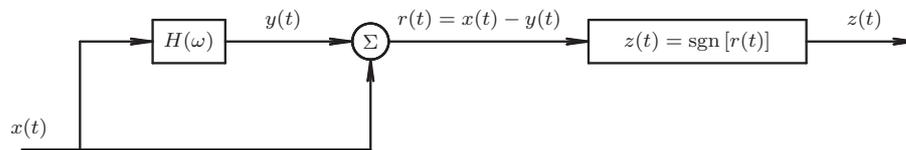


Figura 13.15. Sistema digitalizador

Si la función de transferencia  $H(\omega)$  contenida en el sistema es definida por

$$H(\omega) = p_5(\omega + 30) + p_5(\omega - 30), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (13.64)$$

y si el espectro de la señal  $x(t)$  está dado por

$$X(\omega) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{jn} \delta(\omega - n10), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (13.65)$$

Determine:

- a) potencia promedio normalizada de  $r(t)$ ;
- b) serie exponencial de Fourier de  $z(t)$ .

## CAPÍTULO 14

---

### FILTROS DIGITALES

---

La amistad es el más hermoso tesoro que puede hacer de la vida una bella experiencia. Cuídala con el respeto y la consideración que debes ofrecerle, porque sólo así podrás compartir con plenitud todas las experiencias que te ofrece la vida.

—Ebert Brea



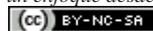
George Ashley Campbell



Karl Willy Wagner

El tratamiento de señales digitales ha exigido, entre otros aspectos, la adecuación de la señal definida en el dominio discreto. Es por tal motivo que se ha incluido el estudio de filtros digitales, los cuales corresponden a una clase de sistemas definidos en el dominio discreto, dentro del análisis de señales. El termino *filtro*, en el contexto de esta obra, puede

*Análisis de Sistemas Lineales Asistido con Scilab™, un enfoque desde la Ingeniería Eléctrica. Primera Edición.* Por Ebert Brea.



por Ebert Brea, 2014.

ser entendido como una red o sistema que transforma, de una manera especificada, a una señal de entrada para obtener una señal con unas características deseadas.

De acuerdo a documentos históricos,<sup>25</sup> George Ashley Campbell<sup>26</sup> fue galardonado por la creación de dos patentes de filtro de ondas eléctricas en 1917. Por su parte y de manera independiente, Karl Willy Wagner<sup>27</sup> también desarrolló la teoría de filtros eléctricos.

Los filtros eléctricos pueden ser clasificados en analógicos y digitales. Los primeros se refieren a sistemas diseñados para tratar señales en el dominio continuo, mientras que los segundos operan sobre señales definidas en el dominio discreto.

La gran diferencia que existen entre los filtros analógicos y digitales es en cuanto a su realización o construcción. Existen dos grandes grupos de filtros analógicos: los filtros analógicos pasivos construidos de elementos pasivos, tales como condensadores, resistencias e inductores; y los conocidos filtros analógicos activos, los cuales están basados, además de elementos eléctricos pasivos, de elementos activos, es decir, de transistores y amplificadores operacionales. Por su parte, los filtros digitales están básicamente fundamentados de algoritmos implementados en microprocesadores o microcomputadores (De Freitas, 2005). No obstante, los filtros digitales pueden ser también construidos con elementos electrónicos, cuando se requiere contar con una respuesta casi inmediata de la señal deseada.

En este capítulo se estudiarán dos familias de filtros digitales: los filtros de respuesta impulsiva de duración finita (RIF), más conocido por su acrónimo en inglés *finite impulse response* (FIR), o también como filtros no recursivos en tiempo discreto; y los filtros de respuesta impulsiva de duración infinita (RII), normalmente denominados por su acrónimo en inglés *infinite impulse response* (IIR), los cuales corresponden a los filtros recursivos en tiempo discreto.

La estructura de este capítulo es la siguiente: en la Sección 14.1 se introducirán algunas consideraciones generales que deben ser tomadas en cuentas para el diseño y realización de filtros digitales; en la Sección 14.2 se introducirán los filtros de respuesta impulsiva de duración finita pasa bajo y pasa alto. No obstante, lo llamados filtros pasa banda pueden ser estudiados empleando las mismas técnicas; en la Sección 14.3 se estudiarán los filtros respuesta impulsiva de duración infinita, así como su diseño. Adicionalmente, serán tratadas algunas consideraciones para que el diseño del filtros pueda ser físicamente realizable.

Por último, son presentados un conjunto de problemas y ejercicios propuestos, los cuales servirá para el afianzamiento de los conocimientos impartidos en este capítulo.

## 14.1 CONCEPTOS PRELIMINARES

La realización o implementación de los filtros digitales exige por una parte que estos sean causales, en el sentido de que su respuesta no debe anticiparse a la señal de excitación, además de cumplir con las características deseadas. Estos requerimientos obligan al diseñador encontrar una relación matemática en el dominio discreto que asegure la causalidad del sistema diseñado, para que el filtro sea físicamente realizable, bien sea mediante un sistema electrónico rígido o *hardware*, o mediante un sistema programable en donde el filtro es implementado por *software*.

<sup>25</sup>Los retratos fueron obtenidos de <http://www.quadrivium.nl/history/history.html>

<sup>26</sup>Nació el 27 de noviembre de 1870, en Hastings, Minnesota, USA, y falleció el 10 de noviembre de 1954.

<sup>27</sup>Nació el 22 de febrero de 1883 en Friedrichsdorf (Taunus) Alemania, y falleció el 4 de septiembre de 1953 en Friedrichsdorf, Alemania.

Para visualizar esta consideración, se planteará sin perder la generalidad del concepto que se busca presentar, el ejemplo de un filtro pasa bajo ideal, el cual es presentado por Proakis y Manolakis (1996), y en donde se podrá apreciar los efectos asociados a la causalidad del filtro.

Suponga que desea diseñar un filtro pasa bajo ideal, el cual debe anular todas las componentes de frecuencia por encima de  $\omega_c$ , sin alterar en magnitud y en fase las componentes de frecuencia por debajo de  $\omega_c$ , es decir, sin distorsión de amplitud y de fase para  $|\omega| < \omega_c$ . Un filtro con tales características, debe contar con una función de transferencia

$$H(\omega) = p_{\omega_c}(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \tag{14.1}$$

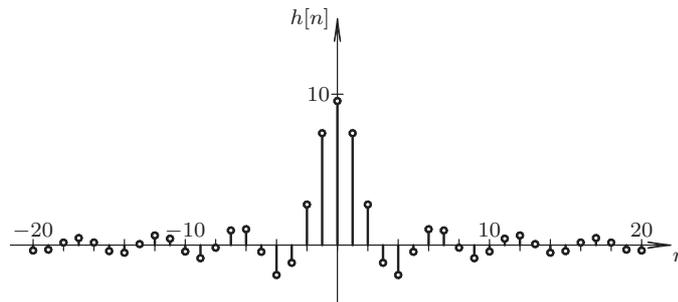
Esté hecho implica que la respuesta impulsiva del sistema en el dominio continuo es

$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{senc}_{\omega_c}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{14.2}$$

Al discretizar la Ecuación (14.2) haciendo  $t = nh$ , donde  $h$  es el paso de discretización se obtiene que la correspondiente respuesta impulsiva definida en el dominio discreto viene dada por

$$h[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{senc}_{\omega_c}(k) \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{14.3}$$

donde el paso de discretización  $h$  debe ser tomado en cuenta para la reconstrucción de la señal, si ésta requiere ser reproducida en el dominio continuo.



**Figura 14.1.** Respuesta impulsiva  $h[n]$  del filtro ideal pasa bajo

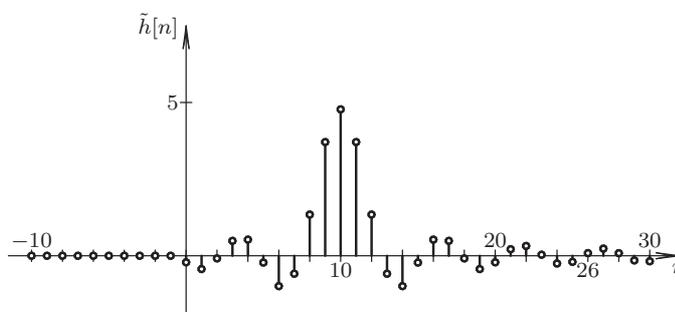
La Figura 14.1 ilustra el caso de la respuesta impulsiva del filtro pasa bajo definido por la Ecuación (14.3), cuando el paso de discretización  $h = 0,08$  s, y la frecuencia de corte  $\omega_c = 15$  rad/s.

De la Figura 14.1 se puede apreciar además que el sistema es no causal, debido al hecho de que para un instante  $n$  se requieren las muestras anticipadas a  $n$ , lo que implica que el sistema no sería realizable. Para logra que el sistema sea realizable debe agregarse un retardo en  $n_0$  muestras, y además limitar las muestras de la respuesta impulsiva, de forma tal que  $h[n] = 0$  para todo  $n < 0$ .

Como ejemplo de lo expuesto anteriormente, considere que  $n_0 = 10$ . Entonces, de la respuesta impulsiva definida por la Ecuación (14.3) se consigue considerando el retardo en

$n_0$  muestras, y haciendo  $\tilde{h}[n] = 0$  para todo  $n < 0$ . En términos matemáticos se tiene que

$$\tilde{h}[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \text{senc}_{\omega_c}(k-10) \delta[n-k-10], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (14.4)$$



**Figura 14.2.** Respuesta impulsiva  $\tilde{h}[n]$  del filtro pasa bajo físicamente realizable

La Figura 14.2 representa la respuesta impulsiva de un filtro pasa bajo físicamente realizable. Observe que la respuesta impulsiva  $\tilde{h}[n]$  tiene un retardo en  $n_0$ , en comparación a la respuesta impulsiva del filtro pasa bajo ideal  $h[n]$  representada en la Figura 14.1.

Este hecho hace que al filtro físicamente realizable introduzca una distorsión en la fase de la función de transferencia original.

## 14.2 FILTROS DIGITALES NO RECURSIVOS EN TIEMPO DISCRETO

Los filtros digitales no recursivos en tiempo discreto o conocidos por su acrónimo en inglés como *finite impulse response* (FIR), pueden dividirse en: los *pasa bajo*, los cuales buscan promediar las muestras dentro de una ventana; los *pasa alto*, los cuales anulan mediante operaciones de diferencias los cambios suaves entre las muestras, dejando pasar las diferencias entre ellas; y los *pasa banda*, estos último sólo dejan pasar las componentes cuyas frecuencias están ubicadas en un intervalo de valores.

Es importante señalar que el término de *pasa bajo* y *pasa alto* se refiere respectivamente a pasa baja frecuencias y pasa alta frecuencias.

En esta sección se introducirán dos tipos de filtros respuesta impulsiva de duración finita (RIF) a través del estudio de casos particulares, por cuanto existen diversas técnicas para el diseño de filtros RIF, y entre uno de los más recientes se tiene presentado por Ramos *et al.* (2009).

En términos generales, se puede decir que un filtro RIF de longitud  $N$ , con señal de excitación  $x[n]$ , y señal de respuesta  $y[n]$  se define matemáticamente como

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x_k \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (14.5)$$

donde  $b_k$  es cada  $k$ -ésimo parámetro del filtro.

Por otra parte, un filtro RIF de longitud  $N$  puede ser también representado mediante su respuesta impulsiva, lo que resultaría afirmar que

$$y[n] = \sum_{q=0}^{\infty} x[q]h[n-q], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (14.6)$$

donde  $h[\cdot]$  denota la respuesta impulsiva del filtro.

Claramente se tiene que la función de transferencias del filtro está dada por

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k z^{-k}, \quad \forall z \in \{w \in \mathbb{C} : |w| \geq R\}. \quad (14.7)$$

Una característica que pudiera ser de interés es en cuanto a que el filtro tenga una fase lineal, la cual puede verificarse si se cumple que

$$h_n = \pm h_{N-1-n}, \quad \forall n \in \{q \in \mathbb{N} : 0 \leq q \leq N-1\}. \quad (14.8)$$

De la Ecuación (14.7) se tiene que al expandir la sumatoria

$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots + h_{\frac{N-1}{2}} z^{-\frac{N-1}{2}} + \dots + h_{N-2} z^{-(N-2)} + h_{N-1} z^{-(N-1)} \quad (14.9)$$

Ahora, debido a que  $N \in \mathbb{N}$ , se tienen dos casos: cuando  $N$  es un número impar; o cuando  $N$  es un número par.

### Caso $N$ impar

Se dice que la respuesta impulsiva es simétrica si se cumple que para todo  $N$  impar

$$h_{\frac{N-1}{2}-k} = h_{\frac{N-1}{2}+k}, \quad \forall k \in \left\{q \in \mathbb{N} : 1 \leq q \leq \frac{N-1}{2}\right\}. \quad (14.10)$$

Por otra parte, la respuesta impulsiva se dice ser antisimétrica si para todo  $N$  impar

$$h_{\frac{N-1}{2}-k} = -h_{\frac{N-1}{2}+k}, \quad \forall k \in \left\{q \in \mathbb{N} : 1 \leq q \leq \frac{N-1}{2}\right\}. \quad (14.11)$$

Tomando en cuenta el hecho de que la respuesta impulsiva del filtro sea simétrica o antisimétrica, se tiene entonces que

$$H(z) = z^{-\frac{N-1}{2}} \left[ h_{\frac{N-1}{2}} + \sum_{k=0}^{\frac{N-3}{2}} h_k \left( z^{(N-1-2k)/2} \pm z^{-(N-1-2k)/2} \right) \right]. \quad (14.12)$$

Si se reemplaza a  $z$  por  $e^{j\Omega}$  en la Ecuación (14.12), donde  $-\pi < \Omega < \pi$ , con el objeto de determinar la respuesta en frecuencia, se tiene que

$$H(\Omega) = e^{-j\frac{N-1}{2}\Omega} \left[ h_{\frac{N-1}{2}} + \sum_{k=0}^{\frac{N-3}{2}} h_k \left( e^{j(N-1-2k)\Omega/2} \pm e^{-j(N-1-2k)\Omega/2} \right) \right], \quad \forall -\pi < \Omega < \pi. \quad (14.13)$$

Suponga, a los fines de ejemplificar, que la respuesta impulsiva del filtro es simétrica, lo que permitiría asegurar que la Ecuación (14.13) se simplifica a

$$H(\Omega) = \left[ h_{\frac{N-1}{2}} + 2 \sum_{k=0}^{\frac{N-3}{2}} h_k \cos\left(\frac{N-1-2k}{2} \Omega\right) \right] e^{-j\frac{N-1}{2}\Omega}, \quad \forall -\pi < \Omega < \pi. \quad (14.14)$$

Note que la magnitud de  $H(\Omega)$  esta definida por

$$|H(\Omega)| = \left| h_{\frac{N-1}{2}} + 2 \sum_{k=0}^{\frac{N-3}{2}} h_k \cos\left(\frac{N-1-2k}{2} \Omega\right) \right|, \quad \forall -\pi < \Omega < \pi. \quad (14.15)$$

En cuanto a la fase de  $H(\Omega)$ , ésta es lineal debido a que tiene la forma

$$\Phi(\Omega) = q\pi - \frac{N-1}{2}\Omega, \quad \forall -\pi < \Omega < \pi, q \in \{-1, 0, 1\}. \quad (14.16)$$

en virtud de que el término

$$\left[ h_{\frac{N-1}{2}} + 2 \sum_{k=0}^{\frac{N-3}{2}} h_k \cos\left(\frac{N-1-2k}{2} \Omega\right) \right] \in \mathbb{R}, \quad (14.17)$$

y dependiendo si es positivo o negativo,  $q$  puede tomar los valores de  $\{-1, 0, 1\}$ .

### Caso $N$ par

Para el caso en que  $N$  sea un número par, la respuesta impulsiva es simétrica si

$$h_{\frac{N}{2}-k} = h_{\frac{N}{2}+k}, \quad \forall k \in \left\{ q \in \mathbb{N} : 1 \leq q \leq \frac{N}{2} - 1 \right\}. \quad (14.18)$$

Mientras, que para un  $N$  par, se dice que la respuesta impulsiva es antisimétrica si se cumple que

$$h_{\frac{N}{2}-k} = -h_{\frac{N}{2}+k}, \quad \forall k \in \left\{ q \in \mathbb{N} : 1 \leq q \leq \frac{N}{2} - 1 \right\}. \quad (14.19)$$

Al considerar la simetría o antisimetría, se tiene que la función de transferencia del filtro definida por la Ecuación (14.7) puede ser expresada por

$$H(z) = z^{-\frac{N-1}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} h_k \left( z^{(N-1-2k)/2} \pm z^{-(N-1-2k)/2} \right). \quad (14.20)$$

Sustituyendo  $z$  por  $e^{j\Omega}$  en la Ecuación (14.20), se obtiene entonces que

$$H(\Omega) = e^{-j\frac{N-1}{2}\Omega} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} h_k \left( e^{j(N-1-2k)\Omega/2} \pm e^{-j(N-1-2k)\Omega/2} \right), \quad \forall -\pi < \Omega < \pi. \quad (14.21)$$

Suponga que la respuesta impulsiva del sistema es simétrica, entonces se tiene que la Ecuación (14.21) puede ser expresada por

$$H(\Omega) = 2 \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} h_k \cos\left(\frac{N-1-2k}{2}\Omega\right) e^{-j\frac{N-1}{2}\Omega}, \quad \forall -\pi < \Omega < \pi. \quad (14.22)$$

Resultando que la magnitud de  $H(\Omega)$  es

$$|H(\Omega)| = 2 \left| \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} h_k \cos\left(\frac{N-1-2k}{2}\Omega\right) \right|, \quad \forall -\pi < \Omega < \pi. \quad (14.23)$$

Además, la fase de  $H(\Omega)$  está dada por

$$\Phi(\Omega) = q\pi - \frac{N-1}{2}\Omega, \quad \forall -\pi < \Omega < \pi, q \in \{-1, 0, 1\}, \quad (14.24)$$

por cuanto el término

$$\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} h_k \cos\left(\frac{N-1-2k}{2}\Omega\right) \in \mathbb{R}, \quad (14.25)$$

y dependiendo si la Ecuación (14.25) es positiva o negativa,  $q$  puede ser uno de los valores del conjunto  $\{-1, 0, 1\}$ .

La Ecuación (14.24) permite afirmar que la fase es lineal.

**Observación 14.1** *Si la respuesta en frecuencia de un filtro digital de respuesta impulsiva de duración finita (RIF) es simétrica o antisimétrica. Entonces, la fase de su respuesta en frecuencia es lineal.*

A continuación se presentan dos casos de filtros digitales RIF, de respuesta impulsiva simétrica y antisimétrica.

### 14.2.1 Filtros pasa bajo no recursivos

De acuerdo a las definiciones iniciales de estos filtros, los cambios repentinos provenientes de componentes de altas frecuencias son atenuadas mediante el promedio ponderado o no, entre las muestras de la señal discreta. Es decir, su implementación se basa en una formulación dada por

$$y[n] = \sum_{k=0}^M a_k x[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (14.26)$$

donde  $0 < a_k < 1$  y  $\sum_{k=0}^M a_k = 1$ .

Un ejemplo de esta clase de filtros es un filtro conformado de cuatro muestras con igual peso, es decir,

$$y[n] = \sum_{k=0}^3 \frac{1}{4} x[n-k] = \frac{x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3]}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (14.27)$$

Note que el filtro definido por la Ecuación (14.27) promedia las abruptas variaciones que puedan presentarse entre las muestras, dejando pasar los suaves cambios entre las muestras

provenientes de la señal  $x[\cdot]$ , es decir, deja pasar las componentes de baja frecuencia, sin mayores alteraciones.

De la Ecuación (14.27) se obtiene que la función de transferencia es

$$H(z) = \frac{1}{4}(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}). \quad (14.28)$$

Al reemplazar  $z = e^{j\Omega}$ , donde  $\Omega = \frac{k\pi}{N}$  para todo  $k = 0, \dots, N-1$ , en la Ecuación (14.28) se obtiene que

$$H(z) = \frac{1}{4} + \left(\frac{1 + 2\cos(\Omega)}{4}\right)e^{-j2\Omega}, \quad \forall -\pi < \Omega < \pi. \quad (14.29)$$

### 14.2.2 Filtros pasa alto no recursivos

A diferencia de los filtros pasa baja frecuencias, estos buscan eliminar los suaves cambios entre las muestras, dejando pasar las abruptas variaciones entre las muestras.

Como ejemplo, esto puede lograrse con un sistema dado por

$$y[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[n-1]), \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (14.30)$$

Note que si la señal discreta  $x[\cdot]$  no presenta variaciones entre dos muestras consecutivas, la salida  $y[\cdot]$  es cero, mientras que si se producen cambios abruptos entre dos muestras consecutivas de la entrada  $x[\cdot]$ , el sistema responde abruptamente.

Al determinar la función de transferencia del filtro pasa alta frecuencias no recursivo definido por la Ecuación (14.30) se tiene que

$$H(z) = \frac{1}{2}(1 - z^{-1}), \quad (14.31)$$

y cuya respuesta en frecuencia discreta está dada por

$$H(\Omega) = \frac{1}{2}(1 - e^{-j\Omega}) = j\text{sen}(\Omega/2)e^{-j\Omega/2} \quad \forall -\pi < \Omega < \pi, \quad (14.32)$$

donde  $\Omega = \frac{k\pi}{N}$  para todo  $k = 0, \dots, N-1$ .

Claramente de la Ecuación (14.32) se puede obtener la magnitud y fase de la función de transferencia, las cuales son:

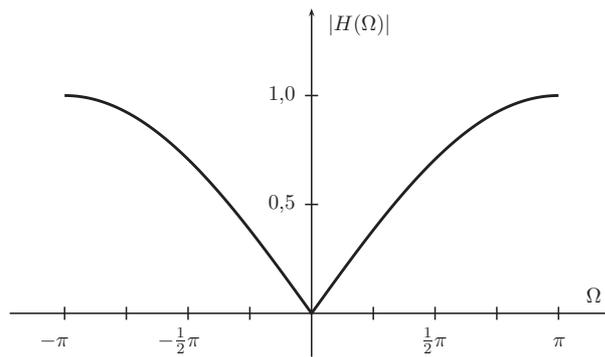
$$|H(\Omega)| = |\text{sen}(\Omega/2)|, \quad \forall -\pi < \Omega < \pi. \quad (14.33)$$

$$\Phi(\Omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{\Omega}{2}, & \forall 0 < \Omega < \pi; \\ -\frac{\pi}{2} - \frac{\Omega}{2}, & \forall \pi < \Omega < 0. \end{cases} \quad (14.34)$$

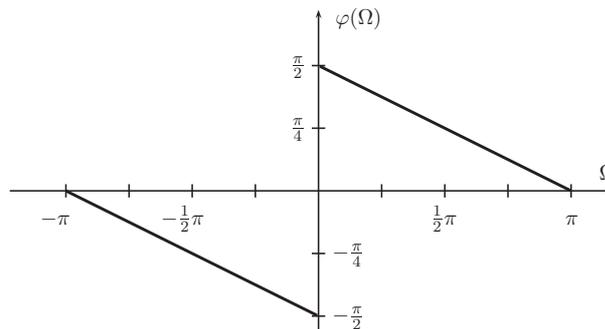
Reexpresando la Ecuación (14.34) se obtiene que

$$\Phi(\Omega) = \frac{\pi}{2} \text{sgn}(\Omega) - \frac{\Omega}{2}, \quad \forall -\pi < \Omega < \pi. \quad (14.35)$$

La Figura 14.3 de la página 355 muestra la respuesta en magnitud y fase del filtro pasa alta frecuencias no recursivo definido mediante el modelo matemático dado por la Ecuación (14.30). Note que la Figura 14.3(a) es una función par de la variable  $\Omega$  y la



(a) Magnitud de  $H(\Omega)$



(b) Fase de  $H(\Omega)$

**Figura 14.3.** Diagrama de la función de transferencia: (a) magnitud y (b) fase

Figura 14.3(b) es una función impar de la misma variable. Además, de la Figura 14.3(a) se puede apreciar la característica de ser un filtro pasa alta frecuencias, el cual atenúa las componentes de baja frecuencias, dejando pasa las componentes de altas frecuencias.

Es oportuno destacar que existen una amplia literatura relacionada con el estudio y diseño de filtros digitales RIF, como por ejemplo, el trabajo reportado por Khan (2010), en el cual el autor presenta un método de diseño de filtros pasa bajo y pasa alto, buscando que la banda de transición<sup>28</sup> sea lo más estrecha posible.

### 14.3 FILTROS DIGITALES RECURSIVOS EN TIEMPO DISCRETO

Como fue establecido en la introducción, esta clase de filtros presentan una respuesta impulsiva de duración infinita y son conocidos por su acrónimo en inglés como filtros IIR.

Este tipo de filtro se caracteriza por contar con un modelo matemático en tiempo discreto en términos de desplazamientos de la señal de salida discreta, es decir, de  $y[n - k]$  para  $k \in \mathbb{Z}$ . En otras palabras, estos filtros constituyen ser un sistema dinámico debido al hecho de contar con memoria.

<sup>28</sup>Este término es explicado en la Figura 14.4 de la página 357.

Su modelo matemático está dado por

$$\sum_{k=0}^M a_{n-k} y[n-k] = \sum_{k=0}^N b_{n-k} x[n-k] \quad (14.36)$$

Al igual que los filtros estudiados en la sección anterior, estos pueden ser *pasa bajo*, *pasa alto*, y además de *frecuencias selectivas*.

Como ejemplo véase el siguiente modelo, el cual constituye un filtro *pasa bajo*.

$$y[n] - ay[n-1] = x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (14.37)$$

De la Ecuación (14.37) se obtiene que la función de transferencia es

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad \forall |z| > |a|, \quad (14.38)$$

donde  $a$  se supondrá ser positivo.

Al reemplazar  $z = e^{j\Omega}$ , donde  $\Omega = \frac{k\pi}{N}$  para todo  $k = 0, \dots, N-1$ , en la Ecuación (14.38) se obtiene que

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}, \quad \forall -\pi < \Omega < \pi. \quad (14.39)$$

Note que en el caso de ser  $a < 0$  el filtro se comporta como un filtro *pasa alto*.

En esta sección se estudiará en primera instancia el método clásico para el diseño de filtros digitales, el cual consiste en la conversión de filtros analógicos a filtros digitales. Para lograr este objetivo se empleará como ejemplo el ampliamente conocido filtro analógico de Butterworth.

Además se introducirá el método de diseño de filtros digitales RII, los cuales sus parámetros son definidos en el ámbito del dominio discreto. Entre los diversos enfoques están los presentados por Fernandez-Vazquez y Jovanovic-Dolecek (2006), y Selesnick y Sidney Burrus (1998).

### 14.3.1 Diseño de filtros digitales mediante transformación de filtros analógicos

El diseño de los filtros recursivos o RII puede basarse en dos enfoques. El primero a partir de la ecuación diferencial del filtro analógico, la cual debe ser transformada en su correspondiente ecuación en diferencias tomando en cuenta los métodos de integración estudiados en la Sección 3.1 (véase página 62). El segundo enfoque se basa en las funciones de los filtros analógicos, cuya función de transferencia  $H(s)$  es transformada a su correspondiente función de transferencia  $H(z)$  empleando los métodos de transformación previamente estudiados en la Sección 6.7 (véase página 163) y luego se expresa su correspondiente ecuación en diferencias.

Para esto puede emplearse la transformación bilineal, la cual es arrojada de la integración trapezoidal y cuyo cambio de variable está dado por

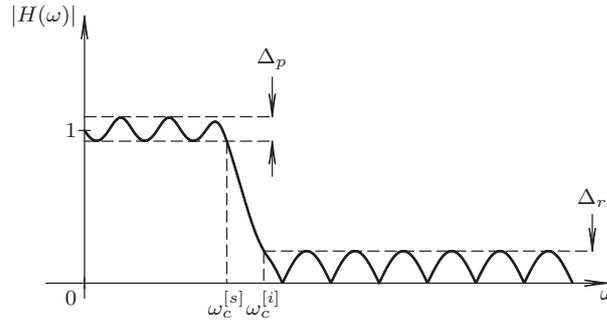
$$s = \frac{2z-1}{h(z+1)}, \quad (14.40)$$

donde  $h$  es el paso de discretización.

De estos enfoques entonces se debe diseñar el filtro analógico, para luego discretizarlo, y de esta forma poder contar con el modelo matemático del sistema en el dominio discreto.

Este enfoque tiene algunas ventajas por cuanto el diseño de filtros analógicos ha tenido un gran desarrollo. No obstante, el diseño de filtros digitales a partir de filtros analógicos puede conllevar a algunas imprecisiones debido a la aproximación a que son sometidos.

Algunos parámetros que deben considerarse son los relativos a la respuesta real en frecuencia de los filtros analógico. Como ejemplo, considere un filtro pasa bajo como el ilustrado en la Figura 14.4.



**Figura 14.4.** Parámetro a considerar en el diseño de filtros analógicos

En la Figura 14.4 puede notarse un conjunto de parámetros los cuales definen un filtro analógico real. El filtro pasa bajo de la figura muestra la banda de paso, la cual está definida para  $0 < \omega < \omega_c^{[s]}$ ; la banda de transición correspondiente a las frecuencias  $\omega_c^{[s]} < \omega < \omega_c^{[i]}$ , y la banda de rechazo la cual es para  $\omega > \omega_c^{[i]}$ . Además, el filtro muestra el rizado de la banda de paso con un valor de  $\Delta_p$ , y el rizado de la banda de rechazo definido por  $\Delta_r$ .

Un filtro analógico ideal, no debe tener banda de transición y los valores de rizados deben ser nulos, además de no introducir retardos los cuales se determinan mediante su diagrama de fase.

Una relación que debe ser considerada es la relación entre la frecuencia en el dominio discreto, denotada por  $\Omega$  y la frecuencia en el dominio continuo, la cual es comúnmente denotada como  $\omega$ , cuando se está empleando la transformación bilineal.

A partir de la Ecuación (14.40) se tiene que al sustituir  $z$  por  $e^{j\Omega}$ , donde  $|\Omega| < \pi$ , y  $s$  por  $j\omega$ , donde  $|\omega| < \infty$ , se obtiene que

$$j\omega = \frac{2 e^{j\Omega} - 1}{h e^{j\Omega} + 1}, \tag{14.41}$$

donde  $h > 0$  es el paso de discretización.

Al multiplicar el lado derecho de la Ecuación (14.41), tanto numerado como denominador, por  $e^{j\Omega/2}$ , se consigue que

$$j\omega = j \frac{2 \operatorname{sen}(\Omega/2)}{h \cos(\Omega/2)}, \tag{14.42}$$

lo cual permite fácilmente asegurar que

$$\omega = \frac{2}{h} \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega}{2}\right), \quad \forall |\Omega| < \pi, \tag{14.43}$$

y en consecuencia

$$\Omega = 2 \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\omega h}{2} \right), \quad \forall |\omega| < \infty. \quad (14.44)$$

Las Ecuaciones (14.43) y (14.44) permiten encontrar la relación entre la frecuencia en el dominio discreto y en el dominio continuo.

**14.3.1.1 Filtro de Butterworth analógico** En este apartado se introducirá brevemente los fundamentos del filtro de Butterworth (Ruston y Bordogna, 1966; Kuo, 1966), debido a su amplia aplicación en el tratamiento de señales analógicas. Mello *et al.* (2007) presentan en su artículo algunas consideraciones en el diseño y aplicación del filtro de Butterworth.

El filtro de Butterworth supone que debe cumplirse

$$H(s)H(-s)|_{s=j\omega} = |H(\omega)|^2, \quad (14.45)$$

donde  $H(\cdot)$  es la función de transferencia del filtro.

Por otra parte, se tiene que

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + F(\omega^2)}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+, \quad (14.46)$$

donde la función  $F(\omega^2)$  tiende a

$$\hat{F}(\omega^2) = \begin{cases} 0, & \forall 0 \leq \omega \leq \omega_c; \\ \infty, & \forall \omega > \omega_c. \end{cases} \quad (14.47)$$

La Ecuación (14.47) permite garantizar que el filtro tenga una función de transferencia tal que

$$|H(\omega)|^2 = \begin{cases} 1, & \forall 0 \leq \omega \leq \omega_c; \\ 0, & \forall \omega > \omega_c, \end{cases} \quad (14.48)$$

lo que constituiría un filtro ideal.

No obstante, la realización de un filtro ideal no es físicamente posible, lo que debe buscarse una solución aproximada.

Un posible función  $F(\omega)$  puede ser definida como

$$F(\omega^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{2n}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+, \quad (14.49)$$

donde  $n \in \mathbb{N}$  representa el orden del filtro.

Obviamente,  $n$  no puede tomar el valor de infinito, lo que en todo caso se puede establecer es una aproximación, resultando que para un valor finito de  $n$

$$\tilde{F}(\omega^2) \approx \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{2n}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+. \quad (14.50)$$

Note que para valores elevados de  $n$ , la aproximación definida por la Ecuación (14.50) se aproxima a la función  $\hat{F}(\omega^2)$  dada por la Ecuación (14.47).

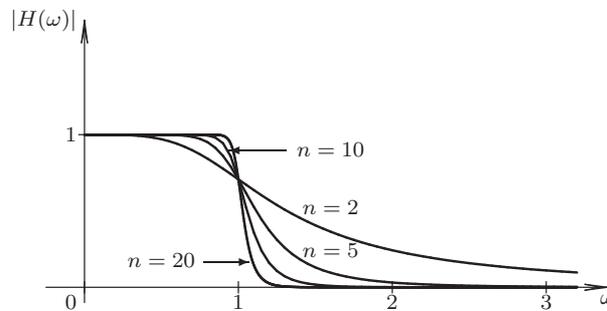
En consecuencia, tomando en cuenta la Ecuación (14.45), se tiene que

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{-s}{\omega_c}\right)^{2n}}, \quad \forall s \in \mathbb{C}. \quad (14.51)$$

De la Ecuación (14.51) y tomando en cuenta la Ecuación (14.50), se obtiene que

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+. \quad (14.52)$$

La Figura 14.5 de la página 359 ilustra la función de magnitud de un filtro analógico de butterworth para los casos de orden 2, 5, 10 y 20, y con frecuencia de corte  $\omega_c = 1$  rad/s. En la figura puede apreciarse como en la medida en que aumenta el orden  $n$  del filtro, éste se va haciendo más plano y con una mayor caída abrupta en la frecuencia de corte, es decir, su banda de transición se reduce en la medida en que el orden del filtro aumenta. En cuanto al rizado del filtro este es despreciable debido al tipo de función que define su función de transferencia.



**Figura 14.5.** Magnitud de un filtro Butterworth analógico de orden 2, 5, 10 y 20, con frecuencia de corte  $\omega_c = 1$  rad/s

■ **EJEMPLO 14.1**

Suponga que desea diseñar un filtro digital RII tipo Butterworth de orden  $n = 2$  con frecuencia de corte  $\omega_c = 1$  rad/s.

Si el filtro se requiere ser diseñado mediante integración trapezoidal, y con un paso de discretización de  $h = 100$  ms, Entonces determine:

- a) función de transferencia  $H(z)$ ;
- b) expresión analítica de la respuesta en frecuencia del filtro;
- c) ecuación recurrente a partir de la correspondiente ecuación en diferencias.

**Solución**

a) De acuerdo con Ruston y Bordogna (1966), y Kuo (1966), la función de transferencia en el dominio  $s$  de un filtro Butterworth de grado  $n = 2$  y frecuencia de corte  $\omega_c = 1$  rad/s es

$$H(s) = \frac{1}{1 + \sqrt{2}s + s^2}. \quad (14.53)$$

Se sabe que la relación entre  $s$  y  $z$  para el caso de integración trapezoidal, viene dada por

$$s = \frac{2z-1}{h(z+1)}, \quad (14.54)$$

donde  $h$  es el paso de discretización.

Sustituyendo la Ecuación (14.54) en la Ecuación (14.53), se obtiene

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sqrt{2} \left( \frac{2z-1}{h(z+1)} \right) + \left( \frac{2z-1}{h(z+1)} \right)^2}. \quad (14.55)$$

Al operar algebraicamente la Ecuación (14.55) se tiene que

$$H(z) = \frac{h^2(z+1)^2}{h^2(z+1)^2 + 2\sqrt{2}h(z-1)(z+1) + 4(z-1)^2}. \quad (14.56)$$

Al expandir los términos se tiene que (14.56) se tiene que

$$H(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{\left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{h} + \frac{4}{h^2}\right)z^2 + \left(2 - \frac{8}{h^2}\right)z + 1 - \frac{2\sqrt{2}}{h} + \frac{4}{h^2}}. \quad (14.57)$$

Sustituyendo en la Ecuación (14.58) el paso de discretización de  $h = 0,1$  s, se tiene que

$$H(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{(401 + 20\sqrt{2})z^2 - 798z + 401 - 20\sqrt{2}}, \quad (14.58)$$

lo que resulta

$$H(z) = \frac{1}{(401 + 20\sqrt{2})} \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 - \frac{798}{(401 + 20\sqrt{2})}z + \frac{401 - 20\sqrt{2}}{(401 + 20\sqrt{2})}}, \quad (14.59)$$

$$H(z) \cong \frac{1}{429,28} \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 - 1,859z + 0,868}. \quad (14.60)$$

b) De la Ecuación (14.56) se obtiene que

$$H(z) = \frac{2 + z + z^{-1}}{\left(2 - \frac{8}{h^2}\right) + \left(1 + \frac{4}{h^2}\right)(z + z^{-1}) + \left(\frac{2\sqrt{2}}{h}\right)(z - z^{-1})}. \quad (14.61)$$

Al hacer  $z = e^{j\Omega}$  en la Ecuación (14.61), se tiene que para todo  $-\pi < \Omega < \pi$

$$H(\Omega) = \frac{2 + 2\cos(\Omega)}{\left(2 - \frac{8}{h^2}\right) + 2\left(1 + \frac{4}{h^2}\right)\cos(\Omega) + j2\left(\frac{2\sqrt{2}}{h}\right)\sin(\Omega)}. \quad (14.62)$$

c) De la Ecuación (14.60), se tiene que al denotar la transformada  $\mathcal{L}$  de la señal de respuesta del filtro como  $Y(z)$ , y la transformada  $\mathcal{L}$  de la señal de excitación

mediante  $X(z)$ , se obtiene que

$$z^2 Y(z) - 1,859z Y(z) + 0,868 Y(z) = 0,0023z^2 X(z) + 0,0046z X(z) + 0,0023 X(z) \quad (14.63)$$

Al aplicar las propiedades de la transformada  $\mathcal{Z}$ , la Ecuación (14.63) arroja como resultado que para todo  $n \in \mathbb{Z}$

$$y[n+2] - 1,859y[n+1] + 0,868y[n] = 0,0023(x[n+2] + x[n]) + 0,0046x[n+1]. \quad (14.64)$$

Al referir la muestra  $(n+2)$ -ésima a la muestra  $n$ -ésima, la Ecuación (14.64) puede ser expresada como

$$y[n] - 1,859y[n-1] + 0,868y[n-2] = 0,0023(x[n] + x[n-2]) + 0,0046x[n-1], \quad (14.65)$$

con la cual se tiene que la ecuación recurrente está definida por

$$y[n] = 1,859y[n-1] - 0,868y[n-2] + 0,0023(x[n] + x[n-2]) + 0,0046x[n-1]. \quad (14.66)$$

Observe que la respuesta c) del Ejemplo 14.1 pudo haber sido determinada a partir de la función de transferencia  $H(s)$  dada por la Ecuación (14.53), para de esta forma determinar el correspondiente modelo matemático definido en el dominio continuo, el cual habría resultado ser una ecuación diferencial. Una vez definida la ecuación diferencial, puede determinarse el modelo matemático en el dominio discreto mediante el reemplazo los operadores derivadas. No obstante, este enfoque no resulta lo suficientemente apropiado, debido al hecho de que el operador de segunda derivada tiene implícito un error en su representación, tal como fue expuesto este problema en la Sección 3.3, a menos que se emplee el enfoque de variable de estado.

### 14.3.2 Método directo de diseño de filtros digitales recursivos

En este punto, se presentará un método directo para el diseño de filtros digitales recursivos de Butterworth o también denominado filtro digital de Butterworth RII propuesto por Selesnick y Sidney Burrus (1998). Sin embargo, existen otros enfoque para el diseño otros tipos de filtros digitales mediante métodos directos, tales como los presentados por Fernandez-Vazquez y Jovanovic-Dolecek (2006); Cheng y Tsai (2006); Arias-de Reyna y Acha (2004), entre otros.

El diseño de filtros de señales se basa en la especificación del mismo, la cual deberá cumplir con los requerimientos a que debe ser sometida las señales a ser tratadas. Para lograr esto, se debe especificar en primera instancia la función de transferencia del filtro de acuerdo con las especificaciones, y una vez determinada la función de transferencia, se puede determinar la ecuación recurrente que será empleada como base de un algoritmo para la obtención de la correspondiente señal de respuesta.

Por otra parte, es oportuno señalar que el diseño óptimo de filtros digitales ha seguido siendo tema de desarrollo dentro del campo de la ingeniería electrónica. Por citar uno de los últimos trabajos reportados en publicaciones científicas se tiene el artículo presentado por Lai y Lin (2010), quienes emplean de mínimos cuadrados con restricciones para identificar los parámetros óptimos de diseño de filtros digitales IIR. Otro enfoque en el diseño óptimo de filtros digitales es el propuesto por Karaboga (2009), quien aplica las técnicas de optimización de enjambre de abejas para la búsqueda de los parámetros que optimizan el diseño de filtros digitales IIR. No obstante, este enfoque no será tratado en

esta obra debido a que el diseño óptimo de filtros digitales es tema fuera de los alcances de este libro.

**14.3.2.1 Notación** Sea  $H(z) = B(z)/A(z)$  la función de transferencia del filtro digital. El grado del polinomio  $B(z)$  está definido por  $L + M$ , donde  $L$  denota el número de ceros ubicados en  $z = -1$ , y  $M$  es el número restantes de ceros distintos a  $z = -1$ . Los ceros ubicados en  $z = -1$  producen una respuesta en frecuencia plana para la frecuencia  $\Omega = \pi$ , mientras el resto de los ceros, junto a los polos del filtro producen una respuesta en frecuencia plana para  $\Omega = 0$ . El número de polos presentes en la función de transferencia del filtro es denotada por  $N$ . La frecuencia de central de la banda de transición del filtro, es decir, la frecuencia en donde el cuadrado de la magnitud de la respuesta en frecuencia es la mitad de la máxima amplitud es denotada por  $\Omega_o$ , la cual es también conocida como la frecuencia de potencia mitad (frecuencia donde la respuesta en frecuencia decae en 3 dB con relación a su máximo).

Denote además a  $H(\Omega)$  la función de transferencia del filtro obtenida por sustitución de  $Z$  por  $e^{j\Omega}$  en la función de transferencia  $H(z)$ . Es decir,

$$H(\Omega) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}}. \quad (14.67)$$

Por otra parte, sea

$$F(x) = |H(\Omega)|^2 = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad (14.68)$$

donde  $x = \frac{1}{2}(1 - \cos \Omega)$ , la función empleada para diseñar un filtro de Butterworth pasa bajo sobre los valores de  $x \in [0, 1]$ .

De esta forma,  $B(z)$  y  $A(z)$  determinan convenientemente las raíces de  $P(x)$  y  $Q(x)$ , a través de la transformación definida por las raíces, de acuerdo a la relación

$$x = \frac{1}{2}(1 - \cos \Omega). \quad (14.69)$$

De la Ecuación (14.69), se tiene que

$$\cos(\Omega) = 1 - 2x, \quad (14.70)$$

la cual al expresarla en su forma exponencial, se puede establecer que

$$\frac{e^{j\Omega} + e^{-j\Omega}}{2} = 1 - 2x, \quad (14.71)$$

lo que implica que

$$z^2 - 2(1 - 2x)z + 1 = 0, \quad (14.72)$$

debido al hecho de que  $z = e^{j\Omega}$ .

Al determinar las raíces de la Ecuación (14.72), se obtiene que

$$z = 1 - 2x \pm \sqrt{(1 - 2x)^2 - 1}, \quad (14.73)$$

la cual deberá tomarse en cuenta el signo de la raíz cuadrada que permita definir el punto dentro del círculo unitario, a los efectos de obtener la mínima fase del filtro.

**14.3.2.2 Filtro digital Butterworth clásico** En este apartado se establecerán las ecuaciones básicas que permitirán diseñar un filtro digital Butterworth clásico. Para esto,

suponga que la función de transferencia del filtro no tiene presente ceros distintos a  $z = -1$ , es decir, el valor de  $M = 0$ . Además, considere que  $L \leq N$ . Bajo estas consideraciones, se tiene que

$$F(x) = \frac{(1-x)^L}{(1-x)^L + cx^N}. \tag{14.74}$$

Debido a la relación dada por la Ecuación (14.68), se tiene que

$$F(x_0) = \frac{1}{4}, \tag{14.75}$$

donde  $x_0 = \frac{1}{2}(1 - \cos \Omega_o)$ , y  $\Omega_o$  es el valor de frecuencia en donde  $|H(\Omega_o)| = \frac{1}{2}$ .

Al evaluar la Ecuación (14.74) en  $x_0$ , y conociendo que  $F(x_0) = \frac{1}{4}$ , se obtiene que

$$\frac{(1-x_0)^L}{(1-x_0)^L + cx_0^N} = \frac{1}{4}. \tag{14.76}$$

La Ecuación (14.76) permite hallar el valor de  $c$  que cumple la condición de  $|H(\Omega_o)| = \frac{1}{2}$ , y de esta forma poder determinar el función  $F(x)$ . Es decir, al despejar  $c$  de la Ecuación (14.76), se tiene que

$$c = \frac{3(1-x_0)^L}{x_0^N}, \tag{14.77}$$

donde para un valor especificado de frecuencia  $\Omega_o \in [0, \pi]$ , se tiene que el valor de  $x_0 = \frac{1}{2}(1 - \cos \Omega_o)$ .

Debe destacarse que Selesnick y Sidney Burrus (1998) proponen una variante al enfoque clásico presentado en este apartado, el cual se basa en el truncamiento del polinomio representado por el término  $(1-x)^L$ .

**Observación 14.2** El polinomio  $Q(x) = (1-x)^L + cx^N$  puede ser expandido según

$$Q(x) = \begin{cases} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq N}}^L (-1)^k \binom{L}{k} x^k + (c + (-1)^N \binom{L}{N}) x^N, & \forall N \leq L; \\ \sum_{k=0}^L (-1)^k \binom{L}{k} x^k + cx^N, & \forall N > L. \end{cases} \tag{14.78}$$

■ **EJEMPLO 14.2**

Determine la función de transferencia de un filtro digital Butterworth clásico, con frecuencia de potencia mitad  $\Omega_0 = \frac{\pi}{4}$ , y parámetros  $L = 5$  y  $N = 4$ .

**Solución**

Se tiene que

$$x_0 = \frac{1}{2}(1 - \cos \Omega_o)|_{\Omega_o = \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{4}(2 - \sqrt{2}) \cong 0,14645 \tag{14.79}$$

Empleando la Ecuación (14.77), se obtiene que

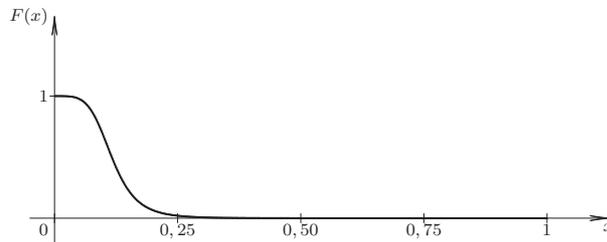
$$c = \frac{3 \left[ 1 - \frac{1}{4}(2 - \sqrt{2}) \right]^5}{\left[ \frac{1}{4}(2 - \sqrt{2}) \right]^4} = \frac{3 (2 + \sqrt{2})^5}{4 (2 - \sqrt{2})^4} \cong 2955 \quad (14.80)$$

Sustituyendo el valor de  $c$  mostrado por la Ecuación (14.80) en la Ecuación (14.74), con los parámetros  $L = 5$  y  $N = 4$ , se tiene que

$$F(x) = \frac{(1-x)^5}{(1-x)^5 + 2955x^4}, \quad (14.81)$$

la cual puede ser expresada como

$$F(x) = \frac{(1-x)^5}{1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 2960x^4 - x^5} \quad (14.82)$$



**Figura 14.6.** Gráfica de la función  $F(x) = |H(\Omega)|^2$

La Figura 14.6 representa gráficamente la función  $F(x) = |H(\Omega)|^2$ . Note que en la figura se muestra la respuesta plana que tiene el filtro tanto en su banda pasante como en su banda de rechazo. No obstante, el filtro presenta una banda de transición alrededor del valor de  $x_0 \cong 0,15$  y correspondiente a un valor de frecuencia  $\Omega_o \cong 0,79$ , el cual en el dominio continuo correspondería a una frecuencia de

$$\omega_o = \frac{2}{h} \operatorname{tg} \left( \frac{\Omega_o}{2} \right) = \frac{2}{h} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{8} \right) \cong 82,8 \operatorname{rad/s}, \quad (14.83)$$

si es considerado un valor de  $h = 10\text{ms}$ .

La Figura 14.7 presenta los comandos Scilab™ empleados para el cálculo de las raíces del polinomio  $Q(x)$  de la función  $F(x)$ , así como los valores de  $z$  de acuerdo a la Ecuación (14.73) de la página 362, denotando a  $z_p$  para señalar el valor positivo de la raíz cuadrada, y  $z_m$  para determinar cuando es restado el valor de la raíz cuadrada.

Con relación al polinomio  $B(z)$ , cuyo  $|z_i| < 1$  para cada  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , que producen la mínima fase, se han tomado en cuenta

$$z_i = \begin{cases} 0,6179213 + j0,4810288, & \forall i = 1; \\ 0,6179213 - j0,4810288, & \forall i = 2; \\ 0,4722756 + j0,161643, & \forall i = 3; \\ 0,4722756 - j0,161643, & \forall i = 4; \\ -0,0000845, & \forall i = 5. \end{cases} \quad (14.84)$$

```

-->D=poly([1 -5 10 -10 2960 -1], 'x', 'c');
-->x=roots(D)
x =
    0.0936012 + 0.0758520i
    0.0936012 - 0.0758520i
    - 0.0919125 + 0.1217689i
    - 0.0919125 - 0.1217689i
    2959.9966

-->zp=1-2*x+sqrt(-1+(1-2*x)^2);
-->zm=1-2*x-sqrt(-1+(1-2*x)^2);

-->zp
zp =
    1.0076741 - 0.7844368i
    1.0076741 + 0.7844368i
    1.8953745 - 0.6487187i
    1.8953745 + 0.6487187i
    - 0.0000845

-->zm
zm =
    0.6179213 + 0.4810288i
    0.6179213 - 0.4810288i
    0.4722756 + 0.161643i
    0.4722756 - 0.161643i
    - 11837.986
    
```

**Figura 14.7.** Comandos Scilab™ para el cálculo de las raíces de  $Q(x)$  del Ejemplo 14.2, y sus correspondientes valores de  $z$

Quedando entonces

$$B(z) = \prod_{i=1}^5 (z - z_i), \tag{14.85}$$

donde  $z_i$  son los valores dado por la Ecuación (14.84).

En relación al valor de  $z$  correspondientes a las raíces del polinomio del numerador  $P(x) = (1 - x)^5$ , estos deben ser  $A(z) = (z + 1)^5$ , debido al hecho de que el punto  $x = 1$  se transforma al punto  $z = -1$  al emplear la transformación definida por la Ecuación (14.73).

En consecuencia,

$$H(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{(z + 1)^5}{\prod_{i=1}^5 (z - z_i)}, \tag{14.86}$$

lo que resulta al sustituir por los polos  $z_i$  que

$$H(z) \cong \frac{(z + 1)^5}{(z^2 - 1,236z + 0,613)(z^2 - 0,945z + 0,249)(z + 0,0000845)}. \tag{14.87}$$

Observe que la Ecuación (14.87) puede ser representada a través de tres sistemas en serie, resultando que

$$H(z) \cong H_1(z)H_2(z)H_3(z), \quad (14.88)$$

donde

$$H_1(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 - 1,236z + 0,613}; \quad (14.89a)$$

$$H_2(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 - 0,945z + 0,249}; \quad (14.89b)$$

$$H_3(z) = \frac{z + 1}{z + 0,0000845}. \quad (14.89c)$$

Las Ecuaciones (14.89) permiten definir cada una de las correspondientes ecuaciones en diferencias, y de esta forma poder implementar el filtro digital en el dominio discreto.

## PROBLEMAS

**14.1** Sea una red eléctrica conformada por un capacitor de parámetro  $C$  y una resistencia de valor  $R$ , ambos conectados de forma tal que definen un filtro para bajo con función de transferencia

$$H(s) = \frac{1}{1 + RCs}, \quad \forall \text{Re}[s] > -\frac{1}{RC}, \quad (14.90)$$

donde claramente tiene una frecuencia de corte  $\omega_c = \frac{1}{RC}$  rad/s.

Si se denota a  $x(t)$  como la señal de entrada al filtro, e  $y(t)$  como la señal de salida del sistema. Determine la ecuación recurrente del filtro digital como resultado de emplear una transformación bilineal

**14.2** Sea un señal  $x(t)$  definida en el dominio continuo, de la cual se conoce que la máxima frecuencia que la compone es de 100 kHz.

Suponga que se desea tratar la señal  $x(t)$  con el objeto de atenuar al menos en la mitad, todas aquellas componentes de frecuencias por encima de la frecuencia de corte  $f_c = 20$  kHz mediante un filtro digital tipo Butterworth.

Determine la frecuencia de mitad de amplitud  $\Omega_o$  del filtro digital Butterworth, tomando en cuenta que se debe muestrear la señal de modo adecuado.

## EJERCICIOS PROPUESTOS

**14.3** Sea un filtro digital definido por

$$y[n] = \frac{1}{3}\{x[n] + x[n-1] + x[n-2]\}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (14.91)$$

Para el sistema dado por la Ecuación (14.91), determine:

- el tipo de filtro en cuanto a la duración de su respuesta impulsiva, es decir, si es de respuesta impulsiva de duración finita o de duración infinita. Justifique su respuesta;
- función de transferencia en términos de  $\Omega$ , para  $-\pi < \Omega < \pi$ ;
- expresión matemática de la magnitud de la función de transferencia,  $|H(\Omega)|$ ;
- representación gráfica de  $|H(\Omega)|$ ;

- e) expresión matemática de la fase de la función de transferencia,  $\Phi(\Omega)$ ;
- f) representación gráfica de  $\Phi(\Omega)$ .



## CAPÍTULO 15

---

# TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

---

Ser sincero en el día a día, construye honestidad. Realmente es uno de los más altos valores que podemos ofrecerle a nuestros seres queridos. Porque al ser probo, los amamos con nuestro respeto hacia ellos.

—Ebert Brea



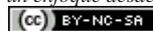
John Wilder Tukey



James William Cooley

Desde la primera publicación del algoritmo de decimación en tiempo para el cálculo de la serie exponencial discreta de Fourier propuesto por Cooley y Tukey (1965), se han desarrollado múltiples aplicaciones de la conocida transformada discreta de Fourier (TDF) llegando a alcanzar amplias aplicaciones a través de la transformada rápida de Fourier,

*Análisis de Sistemas Lineales Asistido con Scilab™, un enfoque desde la Ingeniería Eléctrica. Primera Edición.* Por Ebert Brea.



por Ebert Brea, 2014.

más ampliamente conocida por su nombre en inglés *fast Fourier transform* (FFT), la cual su desarrollo se le atribuyen a John Wilder Tukey<sup>29</sup> y James W. Cooley<sup>30</sup>

Brigham (1974) reúne de manera clara la esencia de la TDF y de la FFT a través de un planteamiento didáctico de los principios de la transformada discreta de Fourier. No obstante, Oberst (2007) propone un extenso tratado teórico de la FFT con aplicaciones a la convolución de secuencias discretas. Otros trabajos relativo a la FFT son los presentados por Edelman *et al.* (1998); Ware (1998), los cuales su lectura permiten profundizar en el tema.

Un interesante artículo sobre la inspiración que permitió proponer el algoritmo de FFT es el presentado por Heideman *et al.* (1985). En su artículo, Heideman *et al.* (1985) presentan una retrospectiva de la FFT, y de acuerdo a sus investigaciones históricas, los trabajos de Gauss sobre la determinación de las series de Fourier fueron los que inspiraron a Cooley y Tukey a la formulación de la FFT. Es oportuno señalar, que los trabajos de Gauss fueron formulado a partir de los planteamientos presentados por Euler en relación a los actualmente conocidos coeficientes de series de Fourier (Euler, 1753).

En este capítulo se mostrarán las principales bases de la TDF, así como el algoritmo de FFT para el caso de datos proveniente de tomas de muestra uniformemente espaciadas en el dominio continuo. No obstante, existe un enfoque alternativo de la FFT, el cual ha sido desarrollado cuando los datos son adquiridos de tomas de muestras no uniformemente espaciadas. Ejemplo de este último enfoque se puede obtener del trabajo reportado por Greengard y Lee (2004), quienes presentan una combinación de algunos esquemas de interpolación con el algoritmo estándar de la FFT.

Lo que resta del capítulo será estructurado como sigue: en la Sección 15.1 se desarrolla la definición de la transformada discreta de Fourier; en la Sección 15.2 se presenta de definición de la transformada inversa discreta de Fourier; una formulación de la transformada discreta de Fourier en términos matriciales se desarrolla en la Sección 15.3; en relación a las propiedades estas son presentadas a través de teoremas y demostrados en la Sección 15.4; en la Sección 15.5 se describe el algoritmo de FFT, haciendo énfasis en su forma canónica. No obstante, también se presenta en su forma más didáctica el algoritmo de FFT base-2. Finalmente, problemas y ejercicios propuestos son presentados al final del capítulo.

## 15.1 TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

En esta sección se desarrollará el concepto de la TDF para luego poder estudiar el algoritmo de FFT. Es de hacer notar que el desarrollo aquí mostrado se fundamenta en el muestreo de la definición de transformada de Fourier, y en el truncamiento del número de muestras adquiridas de la señal a la cual se le determinará su transformada discreta de Fourier.

### 15.1.1 Desarrollo de la transformada discreta de Fourier

Considere una señal real  $f(t)$  definida en el dominio continuo, es decir, en términos matemáticos  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , la cual deben adquirirse muestras a intervalos regulares tomando en cuenta el teorema de muestreo.

<sup>29</sup>John Wilder Tukey nació el 16 de junio de 1915 en New Bedford, Massachusetts, EE.UU.; y falleció el 26 de julio de 2000 en Princeton, Nueva Jersey, EE.UU. Retrato de John Wilder Tukey es © Copyright 2013 IEEE.

<sup>30</sup>James William Cooley nació en 1926. Retrato de James William Cooley es © Copyright 2013 IEEE.

Sea entonces un tren de impulsos unitarios definido como

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (15.1)$$

La toma de muestras de la señal  $f(t)$  a intervalos regulares puede verse como

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \delta(t-nT), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (15.2)$$

donde  $\tilde{f}(t)$  denota la señal muestreada definida en el dominio continuo, y  $T$  representa el intervalo de muestreo de la señal  $f(t)$ .

Es oportuno señalar que debido a que la señal  $f(t)$  es multiplicada por un tren de impulsos unitarios definido por la Ecuación (15.1), se produce en el dominio de la frecuencia un espectro periódico, por cuanto

$$\mathcal{F}[\delta_T(t)] = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (15.3)$$

donde  $\omega_0 = 2\pi/T$ , y además

$$\mathcal{F}[f_1(t) f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega), \quad (15.4)$$

donde  $F_1(\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)]$  y  $F_2(\omega) = \mathcal{F}[f_2(t)]$ .

Este fenómeno de periodicidad en el espectro de la señal muestreada  $\tilde{f}(t)$ , ya ha sido estudiado en la Sección 13.3, e ilustrado en la Figura 13.12 de la página 341.

Aplicando las Ecuación (15.4), al caso de la TF de la señal muestreada  $\tilde{f}(t)$ , se obtiene que

$$\mathcal{F}[\tilde{f}(t)] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[f(t)] * \mathcal{F}[\delta_T(t)], \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (15.5)$$

la cual resulta al emplear la Ecuación (15.3) que

$$\mathcal{F}[\tilde{f}(t)] = \frac{1}{T} F(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (15.6)$$

donde claramente se tiene que  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ .

Por otra parte, debido al hecho de que el tren de impulsos unitarios es de duración infinita, con lo cual se contaría con un número infinito de muestras de la señal  $\tilde{f}(t)$ , éstas deben ser limitada mediante el truncamiento de la misma. Para lograr este propósito se debe multiplicar la señal muestreada  $\tilde{f}(t)$  por una ventana  $v(t)$ , tal que limite a  $N$  el número de muestras, y cuya expresión matemática es

$$v(t) = \begin{cases} 1, & \forall -\frac{T}{2} < t < V + \frac{T}{2}; \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases} \quad (15.7)$$

donde  $V$  es la duración de truncamiento.

Al multiplicar la señal muestreada  $\tilde{f}(t)$  con la ventana definida por la Ecuación (15.7), se obtiene que

$$\tilde{f}(t)v(t) = \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT) \right] v(t) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT)\delta(t-nT), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (15.8)$$

debido a que  $V = NT$ , y en consecuencia se ha truncado la señal  $\tilde{f}(t)$  a  $N$  muestras uniformemente espaciada en  $T$ , produciendo una distorsión en el espectro periódico en la  $\mathcal{F}[\tilde{f}(t)]$  definida por la Ecuación (15.5).

Esta distorsión es producto de la convolución en el dominio de la frecuencia que presentan  $\mathcal{F}[\tilde{f}(t)]$  y  $\mathcal{F}[v(t)]$ , donde

$$v(t) = p_{V/2}(t - V/2), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (15.9)$$

Tomando en cuenta que

$$\mathcal{F}[p_a(t)] = 2a \operatorname{senc}_a(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (15.10)$$

y sabiendo que

$$\mathcal{F}[f(t - T_0)] = F(\omega)e^{-j\omega T_0}, \quad (15.11)$$

donde  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ , se puede asegurar que

$$\mathcal{F}[v(t)] = V \operatorname{senc}(\omega V/2) e^{-j\omega V/2}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (15.12)$$

Como resultado de este análisis, se tiene entonces que

$$\mathcal{F}[\tilde{f}(t)v(t)] = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_0) \right] * [V \operatorname{senc}(\omega V/2) e^{-j\omega V/2}], \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (15.13)$$

Ahora, con el propósito de discretizar el espectro definido por  $\mathcal{F}[\tilde{f}(t)v(t)]$ , deben tomarse muestras uniformemente espaciadas en el dominio de la frecuencia  $\omega$ , para lo cual debe multiplicarse por un tren de impulsos unitarios en  $\omega$ . Es decir,

$$\mathcal{F}^{-1} \left[ \mathcal{F}[\tilde{f}(t)v(t)] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_1) \right] = \tilde{f}(t)v(t) * \frac{1}{\omega_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_1), \quad (15.14)$$

donde  $\omega_1 = 2\pi/T_1$ .

Denote

$$\hat{f}(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[ \mathcal{F}[\tilde{f}(t)v(t)] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_1) \right], \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (15.15)$$

con la cual junto a la Ecuación (15.8), se tiene que la Ecuación (15.14) puede ser expresada como

$$\hat{f}(t) = \left[ \sum_{n=0}^{N-1} f(nT)\delta(t-nT) \right] * \left[ T_1 \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta(t-qT_1) \right], \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (15.16)$$

Resultando entonces de la Ecuación (15.16), que

$$\hat{f}(t) = T_1 \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} f(nT) \delta(t - nT - qT_1) \right], \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (15.17)$$

donde se ha permitido que  $T_1 = V$ , es decir, a la duración de la ventana.

Ahora, de acuerdo con la definición de serie exponencial de Fourier, se tiene que si una señal  $x(t)$  es periódica con período  $T_x$ , su coeficiente

$$\alpha_k = \frac{1}{T_x} \int_t^{t+T_x} x(t) e^{-jk\omega_0 t}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (15.18)$$

donde la frecuencia fundamental de  $x(t)$  viene definida por  $\omega_0 = 2\pi/T_x$ .

Debido al hecho de que  $\hat{f}(t)$  es una señal periódica. Entonces, al aplicar la Ecuación (15.18) se tiene que

$$\alpha_k = \frac{1}{V} \int_{\frac{T}{2}}^{V+\frac{T}{2}} V \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} f(nT) \delta(t - nT - qV) \right] e^{-jk\omega_0 t} dt, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (15.19)$$

donde  $\omega_0 = 2\pi/V$ .

La integral planteada en la Ecuación (15.19), define una integral sobre el intervalo  $\frac{T}{2} < t < V + \frac{T}{2}$ , lo que implica que

$$\alpha_k = \int_{\frac{T}{2}}^{V+\frac{T}{2}} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} f(nT) \delta(t - nT) \right] e^{-jk\omega_0 t} dt, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (15.20)$$

Bajo el supuesto de convergencia de las operaciones definidas en la Ecuación (15.20), se puede afirmar que

$$\alpha_k = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT) \int_{\frac{T}{2}}^{V+\frac{T}{2}} \delta(t - nT) e^{-jk\omega_0 t} dt, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (15.21)$$

la cual arroja que

$$\alpha_k = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT) e^{-jm\omega_0 nT}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (15.22)$$

Debido a que  $\omega_0 = 2\pi/V$  y a que  $V = NT$ , la Ecuación (15.22) puede ser expresada como

$$\alpha_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-j2\pi nk/N}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (15.23)$$

en virtud de que se ha denotado a  $f(nT)$  como  $f_n$  con el propósito de señalar la  $n$ -ésima muestra de  $f(t)$ .

Por otra parte, al determinar la transformada de Fourier de  $\hat{f}(t)$  definida por la Ecuación (15.17), se obtiene que

$$\mathcal{F}[\hat{f}(t)] = \hat{F}(\omega) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT) e^{-j2\pi nq/N}. \quad (15.24)$$

Como  $\hat{F}(\omega)$  tiene un período de  $N$ , debido a

$$e^{-j2\pi nq/N} = e^{-j2\pi n(q+N)/N}, \quad (15.25)$$

se tiene que al sustituir la Ecuación (15.25) en la Ecuación (15.24), resulta que

$$\hat{F}(q) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-j2\pi n(q+N)/N}. \quad (15.26)$$

En consecuencia, se puede asegurar que la TF aproximada de las muestras de  $f(t)$  para el período  $\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} + V$ , puede ser definida como

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-j2\pi nk/N}, \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, N-1\}. \quad (15.27)$$

La Ecuación (15.27) viene a representar, para cada valor de  $k$ , la  $k$ -ésima transformada discreta de Fourier (TDF) de la secuencia de datos  $f_n$ .

Basado entonces en la Ecuación (15.27), se puede establecer la siguiente definición de transformada discreta de Fourier, la cual es formulada en el siguiente apartado.

### 15.1.2 Definición de la transformada discreta de Fourier

**Definición 15.1 (Transformada discreta de Fourier)** Sea una secuencia finita de datos, la cual define entonces que  $f[n] : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  contentiva de  $N$  muestras de una señal,

$$f[n] = \sum_{m=0}^{N-1} f_m \delta[n-m], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (15.28)$$

donde

$$\delta[n-m] = \begin{cases} 1, & \forall n = m; \\ 0, & \text{en otros casos,} \end{cases} \quad (15.29)$$

y la función  $f[n]$  corresponde a la toma de muestras a intervalos regulares  $h$ , definido en el dominio continuo del tiempo de una señal  $f(t)$ . Entonces, la transformada discreta de Fourier (TDF) de la secuencia  $f[n]$  está dada por

$$F[k] = \sum_{q=0}^{N-1} F_q \delta[k - \Omega_q], \quad \forall k \in \{\hat{k} | \hat{k} = \Omega_q, \forall q = 0, \dots, N-1\}, \quad (15.30)$$

donde  $\Omega_q = q \frac{2\pi}{N}$  representa la frecuencia discreta, y

$$F_q = \text{TDF}(f_m) = \sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{-j2\pi mq/N}, \quad \forall q \in \{\hat{q} \in \mathbb{Z} | 0 \leq \hat{q} \leq N-1\}. \quad (15.31)$$

## 15.2 TRANSFORMADA INVERSA DISCRETA DE FOURIER

En esta sección se presentará la definición de la transformada inversa discreta de Fourier (TIDF) mediante un sencillo desarrollo realizado en el ámbito de la transformada discreta de Fourier (TDF).

### 15.2.1 Desarrollo de la transformada inversa discreta de Fourier

Para el desarrollo de una ecuación que permita calcular la transformada inversa discreta de Fourier (TIDF), se empleará un principio que debe tener toda transformada, el cual establece en términos abstracto que si una función cuenta con una transformada. Entonces, la transformada inversa de la transformada arroja la función original.

En términos de una función definida en el dominio discreto, se tiene:

**Definición 15.2** Sea  $f[n] : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  una función en el dominio discreto. Sea también  $\mathcal{T}$  un operador que transforma la secuencia  $f[n]$  de otra secuencia  $F[k]$ , es decir,

$$F[k] = \mathcal{T}[f[n]], \quad \forall k \in D, \quad (15.32)$$

donde  $D$  es un dominio donde está definida  $F[k]$ .

Denote a  $\mathcal{T}^{-1}$  como la transformada inversa de  $\mathcal{T}$ . Entonces,

$$f[n] = \mathcal{T}^{-1}[\mathcal{T}[f[n]]], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (15.33)$$

De la Ecuación (15.31), se tiene que

$$F_q = \text{TDF}(f_m) = \sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{-j2\pi m q/N}, \quad \forall q \in \{\hat{q} \in \mathbb{Z} | 0 \leq \hat{q} \leq N-1\}. \quad (15.34)$$

Basado en esta operador, se debe proponer un operador de TIDF que convierta a uno el núcleo de la TDF, es decir, el factor  $e^{-j2\pi m q/N}$ .

Por otra parte, como se deben ejecutar la suma desde  $m = 0$  hasta  $N - 1$ , la cual constituye la suma de  $N$  términos, el operador de TIDF deberá dividir entre  $N$  para así cumplir con la Definición 15.2.

Como resultado de lo anterior, se propone entonces,

$$f_m = \text{TIDF}(F_k) = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} F_q e^{j2\pi m q/N}, \quad \forall m \in \{\hat{m} \in \mathbb{N} | 0 \leq \hat{m} \leq N-1\}. \quad (15.35)$$

Para probar la validez de lo propuesto en la Ecuación (15.35), se debe aplicar la Definición 15.2. Es decir, sustituir la Ecuación (15.34) en la Ecuación (15.35), resultando que para todo  $m \in \{\hat{m} \in \mathbb{N} | 0 \leq \hat{m} \leq N-1\}$

$$f_m = \text{TIDF}(F_k) = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} \left[ \sum_{r=0}^{N-1} f_r e^{-j2\pi r q/N} \right] e^{j2\pi m q/N}, \quad (15.36)$$

la cual puede ser reexpresada al intercambiar el orden de las sumas, como

$$f_m = \text{TIDF}(F_k) = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} f_m \left[ \sum_{q=0}^{N-1} e^{-j2\pi r q/N} e^{j2\pi m q/N} \right]. \quad (15.37)$$

Ahora, debido a que

$$\sum_{q=0}^{N-1} e^{-j2\pi r q/N} e^{j2\pi m q/N} = \begin{cases} N, & \forall r = m; \\ 0, & \text{en otros casos,} \end{cases} \quad (15.38)$$

se tiene que la Ecuación (15.37) puede ser escrita como

$$f_m = \text{TIDF}(F_k) = \frac{1}{N} N f_m = f_m, \quad \forall m \in \{\hat{m} \in \mathbb{N} | 0 \leq \hat{m} \leq N-1\}. \quad (15.39)$$

La Ecuación (15.39) afirma lo propuesto como transformada inversa discreta de Fourier a través de la Ecuación (15.35).

### 15.2.2 Definición de la transformada inversa discreta de Fourier

**Definición 15.3 (Transformada inversa discreta de Fourier)** Sea una función definida en el dominio discreto tal que  $F[k] : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  contiene  $N$  datos correspondientes a la transformada discreta de Fourier de una función  $f[n]$ ,

$$F[k] = \sum_{q=0}^{N-1} F_q \delta[k - \Omega_q], \quad \forall k \in \{\hat{k} | \hat{k} = \Omega_q, \forall q = 0, \dots, N-1\}, \quad (15.40)$$

donde  $\Omega_q = q \frac{2\pi}{N}$  representa la frecuencia discreta. Entonces, la transformada inversa discreta de Fourier (TIDF) de la función  $F[k]$  viene definida por

$$f[n] = \sum_{m=0}^{N-1} f_m \delta[n - m], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (15.41)$$

donde

$$f_m = \text{TIDF}(F_k) = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} F_q e^{j2\pi m q/N}, \quad \forall m \in \{\hat{m} \in \mathbb{N} | 0 \leq \hat{m} \leq N-1\}. \quad (15.42)$$

### 15.3 FORMA MATRICIAL DE LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

A los efectos de simplificar la notación, Cooley y Tukey (1965) propusieron en su artículo denotar el término  $e^{-j2\pi/N}$  como  $W$ . No obstante, se definirá como

$$W_N = e^{-j2\pi/N}, \quad (15.43)$$

donde obviamente  $N(>0) \in \mathbb{N}$  es el número de datos contenidos en la secuencia de muestras de la señal en tiempo.

Una forma alterna de expresar la transformada discreta de Fourier (TDF) es en su forma matricial, para lo cual se tiene la siguiente proposición.

**Proposición 15.1** Sea  $f_m$  un secuencia de datos adquiridos a intervalos regulares de una señal  $f(t)$ . Entonces, la transformada discreta de Fourier (TDF) de la secuencia puede ser definida mediante su representación matricial como

$$\mathbf{F} = \mathbf{W}_N \mathbf{f}, \quad (15.44)$$

donde en general  $\mathbf{F} \in \mathbb{C}^{N \times 1}$  es el vector contenido de la transformada discreta de Fourier;  $\mathbf{W}_N \in \mathbb{C}^{N \times N}$  es la matriz de núcleos  $[\mathbf{W}_N^{mq}]_{N \times N}$ ; y  $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^{N \times 1}$  es el vector de datos provenientes del muestreo de la señal  $f(t)$ .

**Demostración.**

Aplicando lo denotado por la Ecuación (15.43) en la Ecuación (15.31), se obtiene que

$$F_q = \text{TDF}(f_m) = \sum_{m=0}^{N-1} f_m \mathbf{W}_N^{mq}, \quad \forall q \in \{\hat{q} \in \mathbb{Z} | 0 \leq \hat{q} \leq N-1\}. \quad (15.45)$$

Ahora, al evaluar la Ecuación (15.45), para  $q = 0, 1, \dots, N-2, N-1$ , se obtiene

$$F_0 = f_0 \mathbf{W}_N^0 + f_1 \mathbf{W}_N^0 + f_2 \mathbf{W}_N^0 + \dots + f_{N-2} \mathbf{W}_N^0 + f_{N-1} \mathbf{W}_N^0. \quad (15.46a)$$

$$F_1 = f_0 \mathbf{W}_N^0 + f_1 \mathbf{W}_N^1 + f_2 \mathbf{W}_N^2 + \dots + f_{N-2} \mathbf{W}_N^{N-2} + f_{N-1} \mathbf{W}_N^{N-1}. \quad (15.46b)$$

$$F_2 = f_0 \mathbf{W}_N^0 + f_1 \mathbf{W}_N^2 + f_2 \mathbf{W}_N^4 + \dots + f_{N-2} \mathbf{W}_N^{2(N-2)} + f_{N-1} \mathbf{W}_N^{2(N-1)}. \quad (15.46c)$$

$$F_{N-2} = f_0 \mathbf{W}_N^0 + f_1 \mathbf{W}_N^{(N-2)} + f_2 \mathbf{W}_N^{2(N-2)} + \dots + f_{N-2} \mathbf{W}_N^{(N-2)(N-2)} + f_{N-1} \mathbf{W}_N^{(N-2)(N-1)}. \quad (15.46d)$$

$$F_{N-1} = f_0 \mathbf{W}_N^0 + f_2 \mathbf{W}_N^{(N-1)} + f_2 \mathbf{W}_N^{2(N-1)} + \dots + f_{N-2} \mathbf{W}_N^{(N-1)(N-2)} + f_{N-1} \mathbf{W}_N^{(N-1)(N-1)}. \quad (15.46e)$$

Las Ecuaciones (15.46) pueden ser reescritas como

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{N-2} \\ F_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N^0 & \mathbf{W}_N^0 & \mathbf{W}_N^0 & \dots & \mathbf{W}_N^0 & \mathbf{W}_N^0 \\ \mathbf{W}_N^0 & \mathbf{W}_N^1 & \mathbf{W}_N^2 & \dots & \mathbf{W}_N^{N-2} & \mathbf{W}_N^{N-1} \\ \mathbf{W}_N^0 & \mathbf{W}_N^2 & \mathbf{W}_N^4 & \dots & \mathbf{W}_N^{2(N-1)} & \mathbf{W}_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{W}_N^0 & \mathbf{W}_N^{N-2} & \mathbf{W}_N^{2(N-2)} & \vdots & \mathbf{W}_N^{(N-2)(N-2)} & \mathbf{W}_N^{(N-2)(N-1)} \\ \mathbf{W}_N^0 & \mathbf{W}_N^{N-1} & \mathbf{W}_N^{2(N-1)} & \vdots & \mathbf{W}_N^{(N-2)(N-1)} & \mathbf{W}_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \end{pmatrix} \quad (15.47)$$

La Ecuación (15.47) puede ser expresada en su forma matricial como

$$\mathbf{F} = \mathbf{W}_N \mathbf{f}, \quad (15.48)$$

■ **Observación 15.1** Cada uno de los elementos  $w_{mq}$  de la matriz  $\mathbf{W}_N$  ubicado en la  $m$ -ésima fila y  $q$ -ésima columna viene dado por

$$w_{mq} = W_N^{(m-1)(q-1)} = e^{-j2\pi(m-1)(q-1)/N}, \quad (15.49)$$

quedando entonces definida la matriz  $\mathbf{W}_N$  como

$$\mathbf{W}_N = \left[ W_N^{(m-1)(q-1)} \right]_{N \times N}. \quad (15.50)$$

■ **EJEMPLO 15.1**

Considere  $f_m$  para todo  $m = 0, 1, 2, 3$  una secuencia de 4 datos adquiridos de una señal  $f(t)$ . Expresé en su forma matricial la transformada discreta de Fourier.

**Solución**

Según la definición de  $\mathbf{W}_N$ ,

$$W_4 = e^{j2\pi/4} = e^{-j\pi/2} = -j. \quad (15.51)$$

Aplicando la Ecuación (15.47), se obtiene que

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad (15.52)$$

Al sustituir  $W_4$  por  $j$  en la Ecuación (15.52), se tiene que

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad (15.53)$$

**Observación 15.2** La definición de transformada inversa discreta de Fourier puede ser expresada también en su forma matricial, quedando entonces

$$\mathbf{f} = \frac{1}{N} \overline{\mathbf{W}}_N \mathbf{F}, \quad (15.54)$$

donde

$$\overline{\mathbf{W}}_N = \left[ e^{j2\pi(m-1)(q-1)/N} \right]_{N \times N} \in \mathbb{C}^{N \times N}, \quad (15.55)$$

es decir,  $\overline{\mathbf{W}}_N$  es la matriz formada por los elementos  $\overline{W}_N^{mq}$ , donde

$$\overline{W}_N = e^{j2\pi/N}. \quad (15.56)$$

Además, de la Ecuación (15.44) de la página 377, se puede afirmar que

$$\mathbf{f} = \mathbf{W}_N^{-1} \mathbf{F}, \tag{15.57}$$

donde  $\mathbf{W}_N^{-1}$  denota la matriz inversa de  $\mathbf{W}_N$ , lo que al comparar las Ecuaciones (15.54) y (15.57), se puede afirmar que

$$\mathbf{W}_N^{-1} = \frac{1}{N} \overline{\mathbf{W}}_N. \tag{15.58}$$

■ **EJEMPLO 15.2**

Sea  $F_q$  para todo  $q = 0, 1, 2, 3$  una secuencia de 4 datos proveniente de la transformada discreta de Fourier de  $f[n]$ . Expresar en su forma matricial la transformada inversa discreta de Fourier de la función  $F[k]$ .

**Solución**

De lo Observación 15.2, se tiene que

$$\mathbf{f} = \frac{1}{4} \overline{\mathbf{W}}_4 \mathbf{F}, \tag{15.59}$$

lo que arroja que

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}, \tag{15.60}$$

debido a que  $\overline{W}_4 = e^{j2\pi/4} = j$ .

■ **EJEMPLO 15.3**

Sea  $f[n] : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida en el dominio discreto con expresión matemática

$$f[n] = \sum_{m=0}^{N-1} f_m \delta[n-m], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{15.61}$$

donde

$$f_m = \begin{cases} 1, & \forall 0 \leq m \leq M-1; \\ 0, & \forall M \leq m \leq N. \end{cases} \tag{15.62}$$

donde  $0 < M \leq N-1$ .

Determine una expresión matemática que permita representar la transformada discreta de Fourier (TDF).

**Solución**

Según la definición de TDF se tiene que

$$F_q = \text{TDF}(f_m) = \sum_{m=0}^{N-1} f_m W_N^{mq}, \quad \forall q \in \{\hat{q} \in \mathbb{Z} | 0 \leq \hat{q} \leq N-1\}, \quad (15.63)$$

donde  $W_N = e^{-j2\pi/N}$ .

Sustituyendo Ecuación (15.62) en Ecuación (15.63)

$$F_q = \text{TDF}(f_m) = \sum_{m=0}^{M-1} W_N^{mq}, \quad \forall q \in \{\hat{q} \in \mathbb{Z} | 0 \leq \hat{q} \leq N-1\}, \quad (15.64)$$

Ahora, sabiendo que

$$\sum_{n=0}^{M-1} a^n = \begin{cases} M, & \forall a = 1; \\ \frac{1-a^M}{1-a}, & \forall a \neq 1. \end{cases} \quad (15.65)$$

Aplicando la definido por la Ecuación (15.65) a la Ecuación (15.64), ésta arroja que

$$F_q = \begin{cases} M, & \forall W_N^q = 1; \\ \frac{1-W_N^{qM}}{1-W_N^q}, & \forall W_N^q \neq 1, \end{cases} \quad (15.66)$$

la cual es equivalente a

$$F_q = \begin{cases} M, & \forall \frac{q}{N} \in \mathbb{N}; \\ \frac{1-e^{-jq2\pi M/N}}{1-e^{-jq\pi/N}}, & \forall \frac{q}{N} \notin \mathbb{N}. \end{cases} \quad (15.67)$$

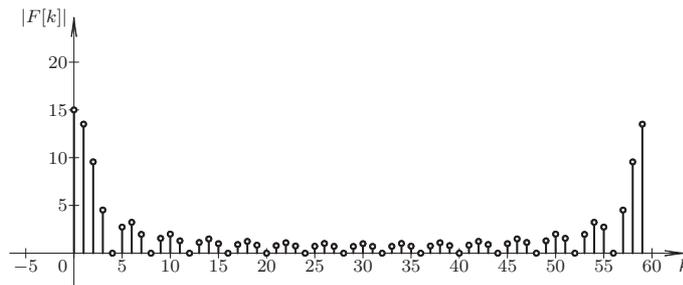
Luego de algunos procedimientos algebraicos, se obtiene de la Ecuación (15.67) que

$$F_q = \begin{cases} M, & \forall q = 0; \\ \frac{\text{sen}(q\pi M/N)}{\text{sen}(q\pi/N)} e^{-jq\pi(M+1)/N}, & \forall 1 \leq q \leq N-1. \end{cases} \quad (15.68)$$

En consecuencia, una extensión periódica de la transformada discreta de Fourier de la función  $f[n]$ , para todo  $k \in \{\kappa \in \mathbb{Z} | 0 \leq \kappa \leq N-1\}$  puede ser expresada como

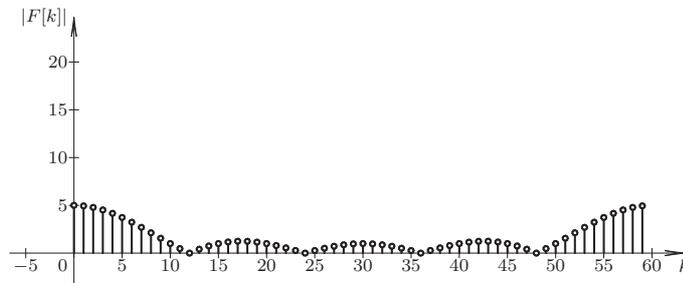
$$F[k] = M \delta[k] + \sum_{q=1}^{N-1} \frac{\text{sen}(q\pi M/N)}{\text{sen}(q\pi/N)} e^{-jq\pi(M+1)/N} \delta[k-q]. \quad (15.69)$$

Note que el cálculo de la transformada discreta de Fourier de una función definida en el dominio discreto, no siempre arroja una expresión matemática. Por tal motivo, en general se recurre al cálculo numérico para su determinación.



**Figura 15.1.** Espectro de la señal discreta  $f[n]$  en magnitud para un número de datos  $N = 60$  y parámetro  $M = 15$

La Figura 15.1 ilustra un período de la magnitud del espectro de la señal discreta  $f[n]$  propuesta en este ejemplo, para una secuencia de  $M = 15$  unos de un número total de datos  $N = 60$ . Note que la extensión periódica principal de  $F[k]$  está definida para  $0 \leq k \leq 59$ , y además  $F[k] = 15$ .



**Figura 15.2.** Espectro de la señal discreta  $f[n]$  en magnitud para un número de datos  $N = 60$  y parámetro  $M = 5$

Por otra parte, la Figura 15.2 de la página 381 muestra también un período de espectro de la señal discreta  $f[n]$  del Ejemplo 15.3 para un número de datos  $N = 60$ , pero con una secuencia de  $M = 5$  unos.

### 15.4 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

En esta sección se estudiarán las propiedades de la transformada discreta de Fourier, las cuales facilitan el cálculo de TDF de otras secuencias que están relacionadas. Es importante señalar que las demostraciones de las propiedades se basarán en el estudio de los valores  $F_q$ .

#### 15.4.1 Linealidad de la TDF

**Teorema 15.1 (Linealidad)** Sea  $F_q^{[i]}$  los valores correspondiente a la TDF de la  $i$ -ésima secuencia de valores de la  $f_n^{[i]}$ , para todo  $i = 1, \dots, M$ , donde el número de datos de cada  $i$ -ésima secuencia es  $N_i = N$ , es decir, las  $M$  secuencias tienen el mismo número  $N$  de

datos. Entonces,

$$\text{TDF} \left[ \sum_{i=1}^M f_m^{[i]} \right] = \sum_{i=1}^M F_q^{[i]}. \quad (15.70)$$

**Demostración.** De la Definición 15.1 se tiene que

$$\text{TDF} \left[ \sum_{i=1}^M f_m^{[i]} \right] = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i=1}^M f_m^{[i]} e^{-j2\pi nq/N}, \quad \forall q \in \{\hat{q} \in \mathbb{Z} | 0 \leq \hat{q} \leq N-1\}. \quad (15.71)$$

Al intercambiar el orden de las sumatorias de la Ecuación (15.71) se consigue que

$$\text{TDF} \left[ \sum_{i=1}^M f_n^{[i]} \right] = \sum_{i=1}^M \sum_{n=0}^{N-1} f_n^{[i]} e^{-j2\pi nq/N}, \quad \forall q \in \{\hat{q} \in \mathbb{Z} | 0 \leq \hat{q} \leq N-1\}. \quad (15.72)$$

Debido al hecho de que  $F_q^{[i]} = \sum_{n=0}^{N-1} f_n^{[i]} e^{-j2\pi nq/N}$ , entonces, se puede afirmar que

$$\text{TDF} \left[ \sum_{i=1}^M f_m^{[i]} \right] = \sum_{i=1}^M F_q^{[i]}, \quad \forall q \in \{\hat{q} \in \mathbb{Z} | 0 \leq \hat{q} \leq N-1\}, \quad (15.73)$$

siempre que el número de datos de cada secuencia, denotado por  $N_i$ , sean todos iguales a  $N$ . ■

#### 15.4.2 Traslación en tiempo discreto

**Teorema 15.2 (Traslación en tiempo discreto)** Sea  $F_q$  los valores correspondiente a la TDF de una secuencia de valores  $f_m$ . Entonces,

$$\text{TDF}[f_{m-r}] = F_q e^{-j2\pi r q/N}, \quad (15.74)$$

donde  $r$  en un entero tal que  $0 \leq r \leq N-1$ .

**Demostración.** De acuerdo a la Definición 15.1, se tiene que

$$\text{TDF}[f_{m-r}] = \sum_{m=r}^{N-1+r} f_{m-r} e^{-j2\pi m q/N}, \quad \forall q \in \{\hat{q} \in \mathbb{Z} | 0 \leq \hat{q} \leq N-1\}. \quad (15.75)$$

Ahora, si se aplica el cambio de variable  $d = m - r$  en la Ecuación (15.75), se consigue que

$$\text{TDF}[f_{m-r}] = \sum_{d=0}^{N-1} f_d e^{-j2\pi(d+r)q/N}, \quad \forall q \in \{\hat{q} \in \mathbb{Z} | 0 \leq \hat{q} \leq N-1\}, \quad (15.76)$$

de donde se deduce que

$$\text{TDF}[f_{m-r}] = \sum_{d=0}^{N-1} f_d e^{-j2\pi d q/N} e^{-j2\pi r q/N} = F_q e^{-j2\pi r q/N}, \quad \forall q \in \{\hat{q} \in \mathbb{Z} | 0 \leq \hat{q} \leq N-1\}. \quad (15.77)$$

■

### 15.4.3 Simetría

**Teorema 15.3 (Simetría)** Sea  $F_q$  los valores correspondiente a la TDF de una secuencia de valores  $f_m$ . Entonces,

$$\text{TDF}[F_m] = Nf_{-q}. \quad (15.78)$$

**Demostración.** Al evaluar la Ecuación (15.42) para  $-m$ , se tiene que

$$f_{-m} = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} F_q e^{j2\pi(-m)q/N}, \quad \forall m \in \{\hat{m} \in \mathbb{N} | 0 \leq \hat{m} \leq N-1\}, \quad (15.79)$$

la cual al reacomodar los términos se consigue que

$$\sum_{q=0}^{N-1} F_q e^{-j2\pi mq/N} = \text{TDF}(F_q) = Nf_{-m}, \quad \forall m \in \{\hat{m} \in \mathbb{N} | 0 \leq \hat{m} \leq N-1\}, \quad (15.80)$$

Haciendo  $q = m$  y  $m = q$ , es decir, intercambiando  $m$  y  $q$  en la Ecuación (15.80), se tiene que  $\text{TDF}(F_m) = Nf_{-q}$ . ■

### 15.4.4 Traslación en frecuencia discreta

**Teorema 15.4 (Traslación en frecuencia)** Sea  $F_q$  los valores correspondiente a la TDF de una secuencia de valores  $f_m$ . Entonces,

$$\text{TDF}[F_m e^{j2\pi im/N}] = F_{q-i}. \quad (15.81)$$

**Demostración.** De la Definición 15.1 se tiene que

$$\text{TDF}[F_m e^{j2\pi im/N}] = \sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{j2\pi im/N} e^{-j2\pi mq/N}, \quad \forall q \in \{\hat{q} \in \mathbb{Z} | 0 \leq \hat{q} \leq N-1\}, \quad (15.82)$$

la cual puede ser reescrita como

$$\text{TDF}[F_m e^{j2\pi im/N}] = \sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{-j2\pi m(q-i)/N}, \quad \forall q \in \{\hat{q} \in \mathbb{Z} | 0 \leq \hat{q} \leq N-1\}. \quad (15.83)$$

Claramente, de la Ecuación (15.83) se puede ver que  $\sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{-j2\pi m(q-i)/N} = F_{q-i}$ . ■

## 15.5 TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER

La transformada rápida de Fourier o como es ampliamente conocida *fast Fourier transform* (FFT) de sus significado en inglés constituye ser un algoritmo basado en la TDF, el cual fue propuesta originalmente por Cooley y Tukey (1965). Es importante aclarar que el algoritmo de FFT de Cooley y Tukey (1965) no establece limitaciones en el número de datos  $N$  con que deben contarse. No obstante, existen algunas particularidades del número de datos en donde el algoritmo muestra un óptimo desempeño.

En este apartado se estudiará algunos de estos casos los cuales son presentados por Brigham (1974), además de los casos estudiados por el autor.

No obstante, no deja de ser interesante el artículo presentado por Cooley *et al.* (1969), en el cual los autores presentan algunas primeras aplicaciones del algoritmo de FFT, además de una extensa explicación para la implementación del algoritmo puede ser consultado en (Press *et al.*, 2007).

De la Definición 15.1, se tiene que la Ecuación (15.31) puede ser reexpresada como

$$F_q = \text{TDF}(f_m) = \sum_{m=0}^{N-1} f_m W_N^{mq}, \quad \forall q \in \{\hat{q} \in \mathbb{Z} | 0 \leq \hat{q} \leq N-1\}, \quad (15.84)$$

donde  $W_N = e^{-j2\pi/N}$ .

Note que tanto  $n$  como  $q$  pertenecen ambos al conjunto  $\{i \in \mathbb{N} | 0 \leq i \leq N-1\}$ .

### 15.5.1 Transformada rápida de Fourier para $N = r_1 r_2$

En este apartado se estudiará la FFT para un número de datos  $N = r_1 r_2$ , donde obviamente  $r_1$  y  $r_2$  son dos número entero positivos. En este caso se estudiará el algoritmo de FFT base  $r_1 + r_2$ .

En esta caso,

$$q = q_1 r_1 + q_0, \quad q_0 = 0, 1, \dots, r_1 - 1, \quad q_1 = 0, 1, \dots, r_2 - 1. \quad (15.85a)$$

$$m = m_1 r_2 + m_0, \quad m_0 = 0, 1, \dots, r_2 - 1, \quad m_1 = 0, 1, \dots, r_1 - 1. \quad (15.85b)$$

Empleando la Ecuación (15.85a) en la Ecuación (15.84), se consigue que

$$F_{(q_1, q_0)} = \sum_{m_0=0}^{r_2-1} \sum_{m_1=0}^{r_1-1} f_{(m_1, m_0)}^{[0]} W_N^{q(m_1 r_2 + m_0)}, \quad \forall q_0 = 0, 1, \dots, r_1 - 1, \quad q_1 = 0, 1, \dots, r_2 - 1, \quad (15.86)$$

la cual puede ser reescrita como

$$F_{(q_1, q_0)} = \sum_{m_0=0}^{r_2-1} \left[ \sum_{m_1=0}^{r_1-1} f_{(m_1, m_0)}^{[0]} W_N^{q m_1 r_2} \right] W_N^{q m_0}, \quad \forall q_0 = 0, 1, \dots, r_1 - 1, \quad q_1 = 0, 1, \dots, r_2 - 1, \quad (15.87)$$

Al estudiar el factor  $W_N^{m r_2 q_1}$ , se obtiene que

$$\begin{aligned} W_N^{q m_1 r_2} &= W_N^{(q_1 r_1 + q_0) m_1 r_2} \\ &= W_N^{r_1 r_2 q_1 m_1} W_N^{q_0 m_1 r_2} \\ &= W_N^{q_0 m_1 r_2} \end{aligned}$$

debido al hecho de que  $W_N^{r_1 r_2} = W_N^N = 1$ .

Aplicando estas relaciones a la Ecuación (15.87), se obtiene que

$$f_{(q_0, m_0)}^{[1]} = \sum_{m_1=0}^{r_1-1} f_{(m_1, m_0)}^{[0]} W_N^{q_0 m_1 r_2}, \quad \forall q_0 = 0, 1, \dots, r_1 - 1, \quad m_0 = 0, 1, \dots, r_2 - 1. \quad (15.88a)$$

$$f_{(q_0, q_1)}^{[2]} = \sum_{m_0=0}^{r_2-1} f_{(q_0, m_0)}^{[1]} W_N^{(q_1 r_1 + q_0) m_0}, \quad \forall q_0 = 0, 1, \dots, r_1 - 1, \quad q_1 = 0, 1, \dots, r_2 - 1. \quad (15.88b)$$

Obteniéndose entonces como resultado final que

$$F_{(q_1, q_0)} = f_{(q_0, q_1)}^{[2]} \quad (15.89)$$

#### ■ EJEMPLO 15.4

Expresar las ecuaciones necesarias para determinar la FFT de una secuencia de  $N = 12$  datos, empleando para eso una base 3+4.

#### Solución

Debido al número de datos de  $N = 12$  con  $r_1 = 3$  y  $r_2 = 4$ , se tiene que para este particular caso, las Ecuaciones (15.85), quedan como

$$\begin{aligned} q &= q_1 3 + q_0, & q_0 &= 0, 1, 2, & q_1 &= 0, 1, 2, 3. \\ m &= m_1 4 + m_0, & m_0 &= 0, 1, 2, 3, & m_1 &= 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Sustituyendo  $m$  en la Ecuación (15.84), se tiene que

$$F_{(q_1, q_0)} = \sum_{m_0=0}^3 \sum_{m_1=0}^2 f_{(m_1, m_0)}^{[0]} W_{12}^{q(m_1 4 + m_0)}, \quad \forall q_0 = 0, 1, 2, \quad q_1 = 0, 1, 2, 3, \quad (15.90)$$

quedando como

$$F_{(q_1, q_0)} = \sum_{m_0=0}^3 \left[ \sum_{m_1=0}^2 f_{(m_1, m_0)}^{[0]} W_{12}^{4q m_1} \right] W_{12}^{q m_0}, \quad \forall q_0 = 0, 1, 2, \quad q_1 = 0, 1, 2, 3, \quad (15.91)$$

donde el núcleo  $W_{12}^{4q m_1}$  es

$$\begin{aligned} W_{12}^{4q m_1} &= W_{12}^{4(3q_1 + q_0)m_1} \\ &= W_{12}^{3 \cdot 4q_1 m_1} W_{12}^{4q_0 m_1} \\ &= W_{12}^{4q_0 m_1} \end{aligned}$$

debido al hecho de que  $W_{12}^{3 \cdot 4} = W_{12}^{12} = 1$ .

Entonces, la Ecuación (15.91) es reescrita como

$$F_{(q_1, q_0)} = \sum_{m_0=0}^3 \left[ \sum_{m_1=0}^2 f_{(m_1, m_0)}^{[0]} W_{12}^{4q_0 m_1} \right] W_{12}^{q m_0}, \quad \forall q_0 = 0, 1, 2, \quad q_1 = 0, 1, 2, 3. \quad (15.92)$$

Aplicando estas relaciones a la Ecuación (15.92), se obtiene que

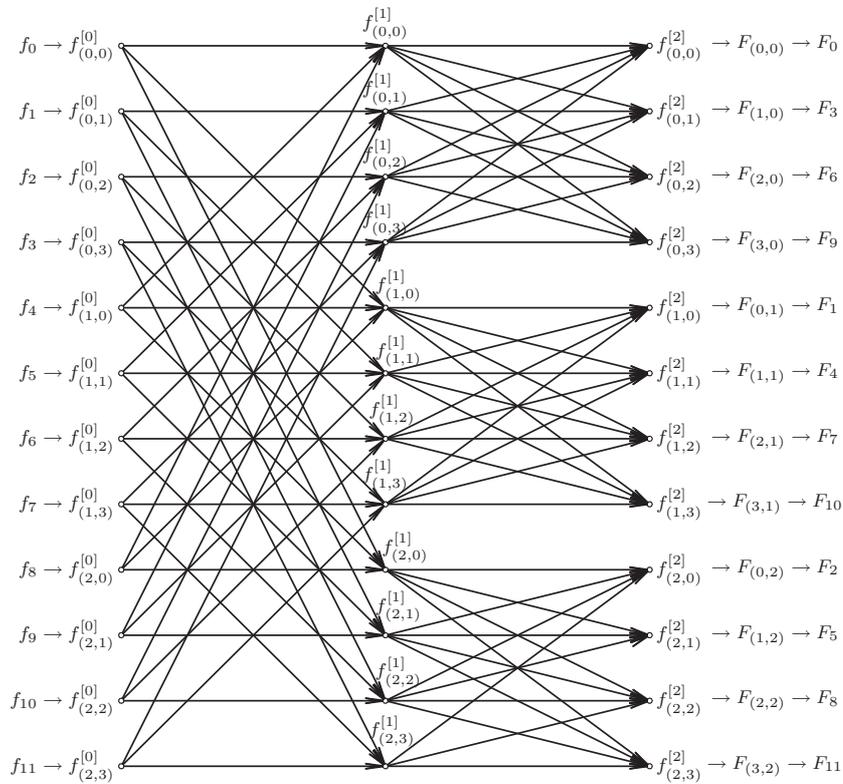
$$f_{(q_0, m_0)}^{[1]} = \sum_{m_1=0}^2 f_{(m_1, m_0)}^{[0]} W_{12}^{4q_0 m_1}, \quad \forall q_0 = 0, 1, 2, \quad m_0 = 0, 1, 2, 3. \quad (15.93a)$$

$$f_{(q_0, q_1)}^{[2]} = \sum_{m_0=0}^3 f_{(q_0, m_0)}^{[1]} W_{12}^{(3q_1 + q_0)m_0}, \quad \forall q_0 = 0, 1, 2, \quad q_1 = 0, 1, 2, 3. \quad (15.93b)$$

Las Ecuaciones (15.93) permiten calcular la FFT con base 3+4, arrojando finalmente que

$$F_q = F_{(q_1, q_0)} = f_{(q_0, q_1)}^{[2]}, \quad \forall q_0 = 0, 1, 2, \quad q_1 = 0, 1, 2, 3, \quad (15.94)$$

teniendo en cuenta que  $q = 3q_1 + q_0$ .



**Figura 15.3.** Transformada rápida de Fourier, base 3+4.

La Figura 15.3 muestra la dependencia de las variables a través de un grafo, el cual por su simetría es conocido como diagrama de mariposa del algoritmo FFT para el caso de  $N = 12$  con  $r_1 = 3$  y  $r_2 = 4$ . Note que en el gráfico no se muestran los factores  $W_{12}$  que multiplican las variables.

### 15.5.2 Transformada rápida de Fourier para $N = r_1 r_2 r_3 r_4$

Sin que este caso particular pierda de generalidad, se estudiará la FFT para el caso base  $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$  y de esta forma el lector podrá inferir las ecuaciones para cualquier base.

Para este caso,

$$q = q_3 r_1 r_2 r_3 + q_2 r_1 r_2 + q_1 r_1 + q_0, \quad q_{i-1} = 0, 1, \dots, r_i - 1, \forall i = 1, 2, 3, 4. \quad (15.95a)$$

$$m = m_3 r_2 r_3 r_4 + m_2 r_3 r_4 + m_1 r_4 + m_0, \quad m_i = 0, 1, \dots, r_{4-i} - 1, \forall i = 0, 1, 2, 3. \quad (15.95b)$$

Empleando las Ecuación (15.95) en la Ecuación (15.84), se consigue que

$$F_{(q_3, q_2, q_1, q_0)} = \sum_{m_0=0}^{r_4-1} \sum_{m_1=0}^{r_3-1} \sum_{m_2=0}^{r_2-1} \sum_{m_3=0}^{r_1-1} f_{(m_3, m_2, m_1, m_0)}^{[0]} W_N^{q(m_3 r_2 r_3 r_4 + m_2 r_3 r_4 + m_1 r_4 + m_0)}, \quad (15.96)$$

para todo  $q_{i-1} = 0, 1, \dots, r_i - 1$ , donde  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Al reexpresar la Ecuación (15.96) se tiene que

$$F_{(q_3, q_2, q_1, q_0)} = \sum_{m_0=0}^{r_4-1} \left[ \sum_{m_1=0}^{r_3-1} \left[ \sum_{m_2=0}^{r_2-1} \left[ \sum_{m_3=0}^{r_1-1} f_{(m_3, m_2, m_1, m_0)}^{[0]} W_N^{q(m_3 r_2 r_3 r_4)} \right] W_N^{q(m_2 r_3 r_4)} \right] W_N^{q(m_1 r_4)} \right] W_N^{q(m_0)} \quad (15.97)$$

Al estudiar los núcleos se tiene:

a)

$$\begin{aligned} W_N^{q(m_3 r_2 r_3 r_4)} &= W_N^{(q_3 r_1 r_2 r_3 + q_2 r_1 r_2 + q_1 r_1 + q_0) m_3 r_2 r_3 r_4} \\ &= W_N^{(q_3 r_1 r_2 r_3) m_3 r_2 r_3 r_4} W_N^{(q_2 r_1 r_2) m_3 r_2 r_3 r_4} W_N^{(q_1 r_1) m_3 r_2 r_3 r_4} W_N^{(q_0) m_3 r_2 r_3 r_4} \\ &= W_N^{q_3 m_3 r_2 r_3 r_1 r_2 r_3 r_4} W_N^{q_2 m_3 r_2 r_1 r_2 r_3 r_4} W_N^{q_1 m_3 r_1 r_2 r_3 r_4} W_N^{q_0 m_3 r_2 r_3 r_4} \\ &= W_N^{q_3 m_3 r_2 r_3 N} W_N^{q_2 m_3 r_2 N} W_N^{q_1 m_3 N} W_N^{q_0 m_3 r_2 r_3 r_4} \\ &= W_N^{q_0 m_3 r_2 r_3 r_4}, \end{aligned}$$

debido al hecho de que  $W_N^{q_3 m_3 r_2 r_3 N} = W_N^{q_2 m_3 r_2 N} = W_N^{q_1 m_3 N} = 1$ .

b)

$$\begin{aligned} W_N^{q(m_2 r_3 r_4)} &= W_N^{(q_3 r_1 r_2 r_3 + q_2 r_1 r_2 + q_1 r_1 + q_0) m_2 r_3 r_4} \\ &= W_N^{(q_3 r_1 r_2 r_3) m_2 r_3 r_4} W_N^{(q_2 r_1 r_2) m_2 r_3 r_4} W_N^{(q_1 r_1 + q_0) m_2 r_3 r_4} \\ &= W_N^{q_3 m_2 r_3 r_1 r_2 r_3 r_4} W_N^{q_2 m_2 r_1 r_2 r_3 r_4} W_N^{(q_1 r_1 + q_0) m_2 r_3 r_4} \\ &= W_N^{q_3 m_2 r_3 N} W_N^{q_2 m_2 N} W_N^{(q_1 r_1 + q_0) m_2 r_3 r_4} \\ &= W_N^{(q_1 r_1 + q_0) m_2 r_3 r_4}, \end{aligned}$$

como consecuencia de que  $W_N^{q_3 m_2 r_3 N} = W_N^{q_2 m_2 N} = 1$ .

c)

$$\begin{aligned}
W_N^{q(m_1 r_4)} &= W_N^{(q_3 r_1 r_2 r_3 + q_2 r_1 r_2 + q_1 r_1 + q_0)(m_1 r_4)} \\
&= W_N^{(q_3 r_1 r_2 r_3)(m_1 r_4)} W_N^{(q_2 r_1 r_2 + q_1 r_1 + q_0)(m_1 r_4)} \\
&= W_N^{q_3 m_1 r_1 r_2 r_3 r_4} W_N^{(q_2 r_1 r_2 + q_1 r_1 + q_0) m_1 r_4} \\
&= W_N^{q_3 m_1 N} W_N^{(q_2 r_1 r_2 + q_1 r_1 + q_0) m_1 r_4} \\
&= W_N^{(q_2 r_1 r_2 + q_1 r_1 + q_0) m_1 r_4},
\end{aligned}$$

dado que  $W_N^{q_3 m_1 N} = 1$ .

d)

$$W_N^{q(m_0)} = W_N^{(q_3 r_1 r_2 r_3 + q_2 r_1 r_2 + q_1 r_1 + q_0) m_0}$$

Al sustituir los núcleos equivalentes desarrollados desde la parte a) hasta la parte d) en la Ecuación (15.97), se consigue

$$f_{(q_0, m_2, m_1, m_0)}^{[1]} = \sum_{m_3=0}^{r_1-1} f_{(m_3, m_2, m_1, m_0)}^{[0]} W_N^{q_0 m_3 r_2 r_3 r_4}, \quad (15.98a)$$

$$f_{(q_0, q_1, m_1, m_0)}^{[2]} = \sum_{m_2=0}^{r_2-1} f_{(q_0, m_2, m_1, m_0)}^{[1]} W_N^{(q_1 r_1 + q_0) m_2 r_3 r_4}, \quad (15.98b)$$

$$f_{(q_0, q_1, q_2, m_0)}^{[3]} = \sum_{m_1=0}^{r_3-1} f_{(q_0, q_1, m_1, m_0)}^{[2]} W_N^{(q_2 r_1 r_2 + q_1 r_1 + q_0) m_1 r_4}, \quad (15.98c)$$

$$f_{(q_0, q_1, q_2, q_3)}^{[4]} = \sum_{m_0=0}^{r_4-1} f_{(q_0, q_1, q_2, m_0)}^{[3]} W_N^{(q_3 r_1 r_2 r_3 + q_2 r_1 r_2 + q_1 r_1 + q_0) m_0}, \quad (15.98d)$$

donde

$$\begin{aligned}
q_{i-1} &= 0, 1, \dots, r_i - 1, \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, \\
m_i &= 0, 1, \dots, r_{4-i} - 1, \quad \forall i = 0, 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

Quedando entonces la FFT base  $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ ,

$$F_q = F_{(q_3, q_2, q_1, q_0)} = f_{(q_0, q_1, q_2, q_3)}^{[4]}, \quad (15.99)$$

donde  $q = q_3 r_1 r_2 r_3 + q_2 r_1 r_2 + q_1 r_1 + q_0$ .

**15.5.2.1 Transformada rápida de Fourier para  $N = 16$ , base 2** A través del apartado anterior se pueden particularizar las ecuaciones haciendo  $r_i = 2$  para todo  $i = 1, 2, 3, 4$ , quedando entonces que la FFT para el caso de  $N = 16$  como

$$f_{(q_0, m_2, m_1, m_0)}^{[1]} = \sum_{m_3=0}^1 f_{(m_3, m_2, m_1, m_0)}^{[0]} W_{16}^{q_0 m_3 8}, \quad (15.100a)$$

$$f_{(q_0, q_1, m_1, m_0)}^{[2]} = \sum_{m_2=0}^1 f_{(q_0, m_2, m_1, m_0)}^{[1]} W_{16}^{(q_1 2 + q_0) m_2 4}, \quad (15.100b)$$

$$f_{(q_0, q_1, q_2, m_0)}^{[3]} = \sum_{m_1=0}^1 f_{(q_0, q_1, m_1, m_0)}^{[2]} W_{16}^{(q_2 4 + q_1 2 + q_0) m_1 2}, \quad (15.100c)$$

$$f_{(q_0, q_1, q_2, q_3)}^{[4]} = \sum_{m_0=0}^1 f_{(q_0, q_1, q_2, m_0)}^{[3]} W_{16}^{(q_3 8 + q_2 4 + q_1 2 + q_0) m_0}, \quad (15.100d)$$

donde

$$\begin{aligned} q_{i-1} &= 0, 1, \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, \\ m_i &= 0, 1, \quad \forall i = 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Obteniéndose entonces la FFT base 2, para  $N = 16$ ,

$$F_q = F_{(q_3, q_2, q_1, q_0)} = f_{(q_0, q_1, q_2, q_3)}^{[4]}, \quad (15.101)$$

donde  $q = q_3 2^3 + q_2 2^2 + q_1 2 + q_0$ .

### 15.5.3 Forma no canónica de la FFT base 2

Sea  $f[n]$  un secuencia contentiva de  $N$  muestras, tal que

$$f[n] = \sum_{m=0}^{N-1} f_m \delta[n-m], \quad \forall n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (15.102)$$

donde en este caso,

$$f_m = \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}. \quad (15.103)$$

La secuencia mostrada por (15.102), tiene como transformada discreta de Fourier

$$F[k] = \text{TDF}\{f[n]\} = \sum_{q=0}^{N-1} F_q \delta[k-q], \quad \forall k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (15.104)$$

Ahora, la descomposición de  $f_m$  en secuencias de posición par e impar, para el caso bajo estudio se tiene que

$$f_m = \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}. \quad (15.105a)$$

$$g_m = \{f_0, f_2, f_4, f_6\}, \quad h_m = \{f_1, f_3, f_5, f_7\}. \quad (15.105b)$$

Al descomponer tanto la secuencia  $g_m$  como la secuencia  $h_m$ , se obtiene que

$$a_m = \{f_0, f_4\}, \quad b_m = \{f_2, f_6\}, \quad c_m = \{f_1, f_5\}, \quad d_m = \{f_3, f_7\}. \quad (15.105c)$$

Este hecho, obliga a denotar que

$$F_q = \text{TDF}\{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}. \quad (15.106a)$$

$$G_q = \text{TDF}\{f_0, f_2, f_4, f_6\}, \quad h_q = \text{TDF}\{f_1, f_3, f_5, f_7\}. \quad (15.106b)$$

$$A_q = \text{TDF}\{f_0, f_4\}, \quad B_q = \text{TDF}\{f_2, f_6\}, \quad C_q = \text{TDF}\{f_1, f_5\}, \quad D_q = \text{TDF}\{f_3, f_7\}. \quad (15.106c)$$

**15.5.3.1 Formulación de la FFT base 2** De acuerdo a las ecuaciones de la transformada rápida de Fourier, se tiene

$$F_q = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2n} W_{N/2}^{nq} + W_N^q \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2n+1} W_{N/2}^{nq}, \quad \forall q = 0, 1, \dots, (N/2) - 1. \quad (15.107a)$$

$$F_{q+\frac{N}{2}} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2n} W_{N/2}^{nq} - W_N^q \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2n+1} W_{N/2}^{nq}, \quad \forall q = 0, 1, \dots, (N/2) - 1. \quad (15.107b)$$

De acuerdo a las Ecuaciones (15.105b) y (15.107) se pueden expresar que

$$G_q = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2n} W_{N/2}^{nq}, \quad \forall q = 0, 1, \dots, (N/2) - 1. \quad (15.108a)$$

$$H_q = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2n+1} W_{N/2}^{nq}, \quad \forall q = 0, 1, \dots, (N/2) - 1. \quad (15.108b)$$

Empleando las Ecuaciones (15.108) en las Ecuaciones (15.107), se consigue que

$$F_q = G_q + W_N^q H_q, \quad \forall q = 0, 1, \dots, (N/2) - 1. \quad (15.109a)$$

$$F_{q+\frac{N}{2}} = G_q - W_N^q H_q, \quad \forall q = 0, 1, \dots, (N/2) - 1. \quad (15.109b)$$

Aplicando recursivamente las Ecuaciones (15.109), se tiene que

$$G_q = A_q + W_{N/2}^q B_q, \quad \forall q = 0, 1, \dots, (N/4) - 1. \quad (15.110a)$$

$$G_{q+\frac{N}{4}} = A_q - W_{N/2}^q B_q, \quad \forall q = 0, 1, \dots, (N/4) - 1. \quad (15.110b)$$

$$H_q = C_q + W_{N/2}^q D_q, \quad \forall q = 0, 1, \dots, (N/4) - 1. \quad (15.110c)$$

$$H_{q+\frac{N}{4}} = C_q - W_{N/2}^q D_q, \quad \forall q = 0, 1, \dots, (N/4) - 1. \quad (15.110d)$$

Al emplear las Ecuaciones (15.107) en la determinación de  $A_q$ ,  $B_q$ ,  $C_q$  y  $D_q$ , se consigue que debido al hecho de que cada una de las secuencias  $a_m$ ,  $b_m$ ,  $c_m$  y  $d_m$  contiene únicamente

dos muestras, es decir,  $N = 2$ ,

$$A_0 = f_0 + f_4. \tag{15.111a}$$

$$A_1 = f_0 - f_4.$$

$$B_0 = f_2 + f_6. \tag{15.111b}$$

$$B_1 = f_2 - f_6.$$

$$C_0 = f_1 + f_5. \tag{15.111c}$$

$$C_1 = f_1 - f_5.$$

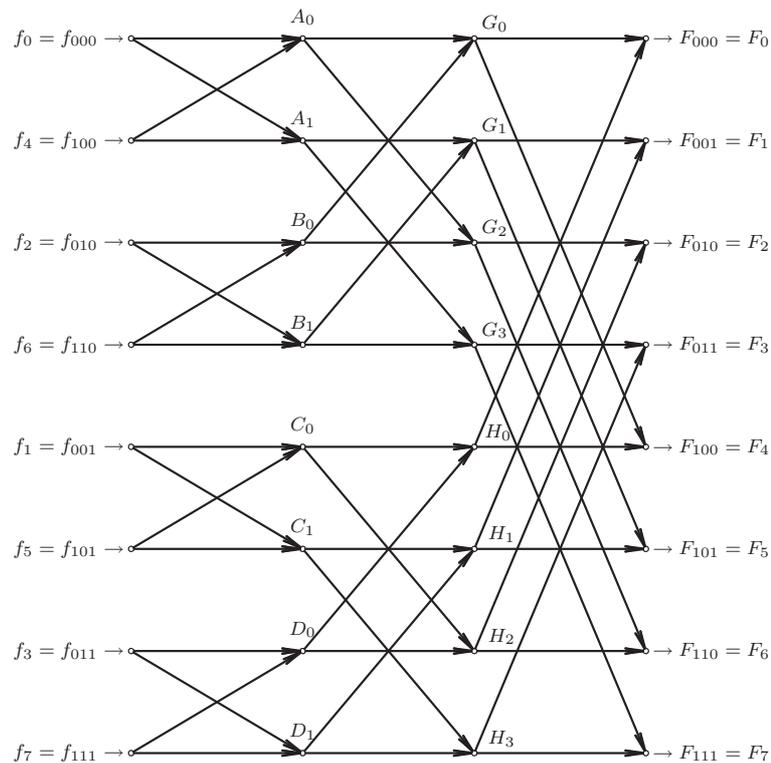
$$D_0 = f_3 + f_7. \tag{15.111d}$$

$$D_1 = f_3 - f_7.$$

Es importante destacar, que la transformada discreta de Fourier de un dato  $f$  es el mismo dato, es decir,

$$\text{TDF}\{f_i\} = f_i, \forall i = 0, \dots, N - 1. \tag{15.112}$$

Lo expresado en la Ecuación (15.112) puede ser fácilmente verificado por el lector.



**Figura 15.4.** Transformada rápida de Fourier para  $N = 2^3$

Esto arroja que la transformada rápida de Fourier puede ser representada a través del conocido diagrama de mariposa, el cual es mostrado en la Figura 15.4. Por otra parte, en

la Figura 15.4 no son mostrados los factores  $W_M$ , para los casos  $M \in \{2, 4, 8\}$ . No obstante, son mostradas las dependencias entre las relaciones desarrolladas para el caso de  $N = 8$ .

La transformada inversa discreta de Fourier (TIDF) de una señal  $F[k]$  puede ser determinado de manera eficiente a través del algoritmo de *fast Fourier transform* (FFT). Para esto véase la siguiente proposición:

**Proposición 15.2** *Sea  $F[k]$  la transformada discreta de Fourier de una señal  $f[n]$  definida en el dominio discreto. Entonces, la transformada inversa discreta de Fourier de  $F[k]$  puede ser determinada por*

$$f[n] = \frac{1}{N} \overline{\text{FFT}\{F[k]\}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (15.113)$$

donde  $\overline{(\cdot)}$  representa el operador conjugado de una cantidad compleja, y  $\text{FFT}[\cdot]$  denota el algoritmo de fast Fourier transform (FFT).

**Demostración.** Basado en la forma matricial de la transformada discreta de Fourier definida por la Ecuación (15.48)

$$\mathbf{F} = \mathbf{W}_N \mathbf{f}, \quad (15.114)$$

y en la forma matricial de la transformada inversa discreta de Fourier, la cual se establece en la Ecuación (15.54) que

$$\mathbf{f} = \frac{1}{N} \overline{\mathbf{W}_N} \mathbf{F}, \quad (15.115)$$

se tiene que

$$\text{FFT}[\overline{\mathbf{F}}] = \mathbf{W}_N \overline{\mathbf{F}}. \quad (15.116)$$

Al determinar el conjugado a ambos lados de la Ecuación (15.116), se obtiene que

$$\overline{\text{FFT}[\overline{\mathbf{F}}]} = \overline{\mathbf{W}_N \overline{\mathbf{F}}} = \overline{\mathbf{W}_N} \overline{\overline{\mathbf{F}}}. \quad (15.117)$$

Si se divide entre  $N$  ambos lados de la Ecuación (15.117), y sabiendo  $\overline{\overline{\mathbf{F}}} = \mathbf{F}$  que se tiene

$$\frac{1}{N} \overline{\text{FFT}[\overline{\mathbf{F}}]} = \frac{1}{N} \overline{\mathbf{W}_N} \mathbf{F}. \quad (15.118)$$

El lado derecho de la Ecuación (15.118), corresponde a la transformada inversa discreta de Fourier de  $F[k]$  definida por la Ecuación (15.115), lo que implica que

$$\mathbf{f} = \frac{1}{N} \overline{\text{FFT}[\overline{\mathbf{F}}]}. \quad (15.119)$$

■

#### 15.5.4 Ejemplos de cálculos de FFT empleando Scilab™

En este apartado se ejecutarán diversos ejemplos de cálculo de la FFT mediante el uso del Scilab™.

■ EJEMPLO 15.5

Sea la secuencia

$$d_m = \begin{cases} 1, & \forall m = 0; \\ 0, & \forall m = 1, \dots, 7, \end{cases} \quad (15.120)$$

la cual representa un impulso discreto.

Determine la FFT[ $d_m$ ] empleando comandos Scilab™.

**Solución**

Empleando los siguientes comandos Scilab™, se obtiene

```

-->dm=[1;0;0;0;0;0;0;0];n=size(dm, '*');
-->Dk=fft(dm);
-->Dk
Dk =
  1.
  1.
  1.
  1.
  1.
  1.
  1.
  1.
    
```

**Figura 15.5.** Comandos Scilab™ para el cálculo de la FFT del Ejemplo 15.5

La Figura 15.5 muestra los comandos Scilab™ requeridos para obtener la FFT de la secuencia  $d_m$ .

■ EJEMPLO 15.6

Sea la secuencia  $d_m$  definida por la Ecuación (15.120) del Ejemplo 15.5.

Determine empleando comandos Scilab™ la FFT[ $d_{m-2}$ ].

**Solución**

La secuencia de datos  $d_{m-2}$ , viene definida por

$$d_m = \begin{cases} 1, & \forall m = 2; \\ 0, & \forall m = 1, 3, 4, 5, 6, 7. \end{cases} \quad (15.121)$$

Al emplear los siguientes comando Scilab™, se obtiene que

El resultado mostrado en la Figura 15.6 permite verificar la propiedad de traslación en tiempo discreto definida por el Teorema 15.2 de la página 382, en virtud a que para una traslación de  $r = 2$

$$\text{TDF}[d_{m-2}] = D_q e^{-j4\pi q/8} = D_q e^{-j\frac{\pi}{2}q}, \quad (15.122)$$

donde

$$D_q = 1, \quad \forall 0 \leq q \leq 7, \quad (15.123)$$

```

-->dm2=[0;0;1;0;0;0;0;0];n=size(dm, '**');
-->Dk2=fft(dm2);
-->Dk2
Dk2 =
  1.
 - i
 - 1.
  i
  1.
 - i
 - 1.
  i

```

**Figura 15.6.** Comandos Scilab™ para el cálculo de la FFT del Ejemplo 15.6

y el término  $e^{-j\frac{\pi}{2}q}$  viene dado por

$$e^{-j\frac{\pi}{2}q} = \begin{cases} 1, & \forall q = 0; \\ -j, & \forall q = 1; \\ -1, & \forall q = 2; \\ j, & \forall q = 3; \\ 1, & \forall q = 4; \\ -j, & \forall q = 5; \\ -1, & \forall q = 6; \\ j, & \forall q = 7. \end{cases} \quad (15.124)$$

Al sustituir las Ecuaciones (15.123) y (15.124) en la Ecuación (15.122), se consigue el resultado reportado en la Figura 15.6.

#### ■ EJEMPLO 15.7

Considere la secuencia

$$f_m = 1, \quad \forall m = 0, \dots, 7. \quad (15.125)$$

Determine la FFT[ $f_m$ ] empleando comandos Scilab™.

#### Solución

Los comandos en Scilab™ para el cálculo de la FFT de la secuencia  $f_m$ , mostrada en la Ecuación (15.125) de  $N = 8$ , son como siguen:

```

-->fm=[1;1;1;1;1;1;1;1];n=size(fm, '*');
-->Fk=fft(fm);
-->Fk
Fk =
  8.
  0
  0
  0
  0
  0
  0
  0

```

**Figura 15.7.** Comandos Scilab™ para el cálculo de la FFT del Ejemplo 15.7

### ■ EJEMPLO 15.8

Sea la secuencia

$$p_m = \begin{cases} 1, & \forall m = 0, 1, 2, 3; \\ 0, & \forall m = 4, 5, 6, 7, \end{cases} \quad (15.126)$$

la cual representa un pulso rectangular.

Determine la FFT[ $p_m$ ] empleando comandos Scilab™.

### Solución

Los comando en Scilab™ para el cálculo de la FFT de la secuencia  $p_m$ , mostrada en la Ecuación (15.126) de  $N = 8$ , son como siguen:

```

-->pm=[1;1;1;1;0;0;0;0];n=size(pm, '*');
-->Pk=fft(pm);
-->Pk
Pk =
  4.
  1. - 2.4142136i
  0
  1. - 0.4142136i
  0
  1. + 0.4142136i
  0
  1. + 2.4142136i

```

**Figura 15.8.** Comandos Scilab™ para el cálculo de FFT del Ejemplo 15.8

### ■ EJEMPLO 15.9

Verifique a través de comandos Scilab™ que la TDF obtenida en el Ejemplo 15.8 es realmente la TDF, empleando para esto la Proposición 15.2 de la página 392.

#### Solución

A objeto de obtener la respuesta al problema se han empleado los siguientes comandos Scilab™.

```

-->pm=[1;1;1;1;0;0;0;0];n=size(pm,'*');
-->Pk=fft(pm);
-->Pkc=conj(Pk);
-->Pkc
Pkc =
    4.
    1. + 2.4142136i
    0
    1. + 0.4142136i
    0
    1. - 0.4142136i
    0
    1. - 2.4142136i
-->pm1=(1/8)*fft(Pkc)
pm1 =
    1.
    1.
    1.
    1.
    0
    0
    5.551D-17
    0

```

**Figura 15.9.** Comandos Scilab™ para el cálculo de TIDF mediante FFT del Ejemplo 15.9

El Scilab™ también ofrece la forma directa de obtener la TIDF mediante el siguiente comando.

Note que tanto la muestra  $pm1[6]=5.551D-17$  reportada en la Figura 15.9 de la página 396 como la muestra  $pm2[6]=5.551D-17$  presentada en la Figura 15.10 de la página 397 son numéricamente iguales, y en ambos caso pueden ser consideradas iguales a cero, lo que permite verificar la TDF de  $pm$ . Además, el resultado reportado en la Figura 15.9 verifica la Proposición 15.2 de la página 392.

```

-->pm=[1;1;1;1;0;0;0;0];n=size(pm, '*');
-->Pk=fft(pm);
-->Pkc=conj(Pk);
-->pm2=ifft(Pk)
pm2 =
    1.
    1.
    1.
    1.
    0
    0
    5.551D-17
    0
    
```

**Figura 15.10.** Comandos Scilab™ para el cálculo de TIDF mediante FFT del Ejemplo 15.9

**PROBLEMAS**

**15.1** Sea  $f[n] : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f[n] = \sum_{m=0}^{11} f_m \delta[n-m], \quad \forall n = 0, 1, \dots, 11, \tag{15.127}$$

donde la secuencia  $f_m$  es

$$f_m = \{6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0\}. \tag{15.128}$$

Para la función  $f[n]$ , determine todas las ecuaciones requeridas para hallar la transformada discreta de Fourier, empleando hasta donde sea posible la transformada rápida de Fourier base 2 en su forma no canónica.

**15.2** A través de comandos Scilab™ compruebe que

$$\mathbf{W}_4^{-1} = \frac{1}{4} \overline{\mathbf{W}_4} \tag{15.129}$$

**15.3** Desarrolle las ecuaciones necesarias que permitan determinar la FFT base 3+4+5 de una secuencia de 60 muestras.

**EJERCICIOS PROPUESTOS**

**15.4** Sea una secuencia  $f[n]$  con transformada discreta de Fourier (TDF) definida por

$$F[k] = \sum_{q=0}^8 F_q \delta[k-q], \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \tag{15.130}$$

donde

$$F_q = \begin{cases} 1, & \forall 0 \leq q \leq 3; \\ 0, & \forall 4 \leq q \leq 7. \end{cases} \tag{15.131}$$

Determine, entonces:

- a) la TDF de  $f[n-2]$ ;
- b) la TDF de  $f[-n]$ ;
- c) la TDF de  $f[n]\cos(5n)$ ;
- d) la función  $f[n]$ , es decir, la TIDF de  $F[k]$ .

**15.5** Considere una secuencia  $f[n]$  dada por

$$f[n] = \sum_{q=0}^{N-1} f_m \delta[n-m], \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \quad (15.132)$$

donde

$$f_m = \begin{cases} 0, & \forall m < 0; \\ r^m, & \forall m \geq 0. \end{cases} \quad (15.133)$$

Para un valor de  $r = 1/2$ , halle:

- a) la TDF de  $f[n]$ , cuando  $N$  es un número finito de datos;
- b) la TDF de  $f[n]$ , cuando  $N$  es un número infinito de datos;
- c) gráfico del espectro en magnitud y fase de la señal  $f[n]$  cuando ha considerado que  $N$  es infinito.

# Soluciones de los Problemas

---

## SOLUCIÓN DEL CAPÍTULO 1

1.1 Basado en las condiciones impuestas del problema, se tiene que a la señal  $x(t)$  se le tomarán muestras cada intervalo  $h = \frac{1}{10}$  s. En consecuencia, al evaluar la Ecuación (1.47) de la página 25 se obtiene que

$$x(kh) = e^{-5kh} u(kh), \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (16.1)$$

Ahora, reexpresando la Ecuación (16.1) se tiene

$$x(kh) = \left(e^{-5h}\right)^k u(kh), \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (16.2)$$

Al sustituir  $h = \frac{1}{10}$  s se obtiene que

$$x(kh) = \left(e^{-\frac{5}{10}}\right)^k u(kh), \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (16.3)$$

Basado en la Ecuación (16.3) se puede afirmar entonces que

$$x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^k \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (16.4)$$

Al denotar  $r = e^{-\frac{1}{2}}$ , la Ecuación (16.4) queda como

$$x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (16.5)$$

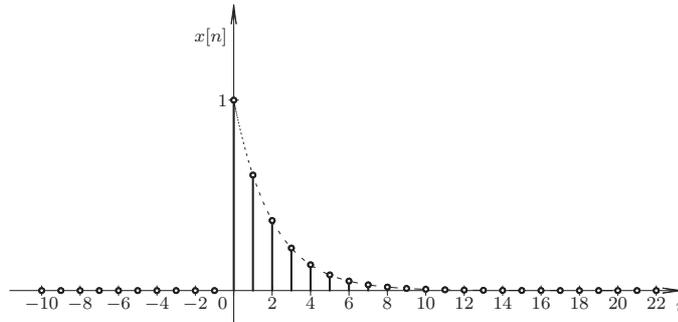
No obstante, un modelo matemático alternativo y explícito es

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^k \delta[n-k] u[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (16.6)$$

donde

$$u[n] = \begin{cases} 0, & \forall n \in \{q \in \mathbb{Z} | q < 0\}; \\ 1, & \forall n \in \{q \in \mathbb{Z} | q \geq 0\} \end{cases} \quad (16.7)$$

Note que el modelo matemático definido por la Ecuación (16.5) no provee información de la señal discreta  $x[n]$  para  $n < 0$ , mientras el modelo matemático dado por la Ecuación (16.6) define explícitamente la señal discreta  $x[n]$  en todo el dominio de la variable discreta  $n$ .



**Figura 16.11.** Función  $x[n]$  definida en el dominio discreto

La Figura 16.11 muestra la función  $x[n]$  definida en el dominio discreto  $n$  dada por la expresión matemática definida por la Ecuación (16.6). La figura también representa la envolvente definida por la Ecuación (1.47) de la página 25. Note que en la figura son representados los impulsos discretos, es decir,  $\delta[n-k]$  para cada valor discreto de  $k$ , a través de las barras verticales.

**1.2.a** Aplicando el método empleado en la solución del Problema 1.1 se obtiene que

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{2}{3}k\right) \delta[n-k] u[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (16.8)$$

Note que aun cuando la función escalón  $u(t)$  definida en el dominio continuo  $t \in \mathbb{R}$  no está definida en  $t = 0$ , se ha considerado que la señal  $x(t)|_{t=0} = 0$ , debido a que  $\text{sen}(2t)|_{t=0} = 0$ .

**1.2.b** Aplicando el método empleado en la solución del Problema 1.1 se obtiene que

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^k \sin\left(\frac{2}{5}k\right) \delta[n-k] u[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (16.9)$$

donde  $r = e^{-\frac{1}{5}}$ .

**1.2.c** Aplicando el método empleado en la solución del Problema 1.1 se obtiene que

$$x[n] = \begin{cases} \sum_{k=10}^{30} \delta[n-k], & \forall n \in [10, 30]; \\ 0, & \forall n \notin [10, 30], \end{cases} \quad (16.10)$$

debido a que cuando  $t = 1$ ,  $n = 5$ .

**1.2.d** Aplicando el método empleado en la solución del Problema 1.1 se obtiene que

$$x[n] = \begin{cases} \sum_{k=10}^{30} q_2\left(\frac{1}{5}k + 4\right) \delta[n-k], & \forall n \in [10, 30]; \\ 0, & \forall n \notin [10, 30], \end{cases} \quad (16.11)$$

debido a que cuando  $t = 1$ ,  $n = 5$ .

**1.3.a** El sistema es no lineal, debido a que si el sistema es excitado ante una señal  $kx(t)$ , su respuesta es  $k^2 x^2(t)$ , la cual es distinta a una respuesta proporcional a  $x(t)$ , es decir,  $kx^2(t)$ .

El sistema es estático, por cuanto su respuesta depende únicamente de valor presente de la excitación.

El sistema es causal, dado que al haber cambios en la excitación, estos se manifiestan en el instante del cambio y no antes.

El sistema es invariante en su dominio, es decir, en el tiempo, debido a: si el sistema es excitado por una señal  $f(t)$ , entonces su respuesta es  $y(t) = f^2(t)$ . Ahora, si el sistema es excitado por la misma señal en forma pero trasladada, es decir,  $f(t - T_0)$ , entonces la respuesta del sistema debe ser  $y(t - T_0)$ , la cual es corroborada con la respuesta determinada por  $f^2(t - T_0)$ .

Por último, el sistema es determinista debido al hecho de que éste no presenta cantidades aleatorias alguna.

**1.3.b** El sistema es lineal, estático, causal, variante en el dominio del tiempo debido a que uno de sus parámetros,  $\sin(2t)$  es variable en el dominio del tiempo; y determinista.

**1.3.c** El sistema descrito es no lineal, estático, causal, invariante en el dominio del tiempo y determinista.

**1.3.d** El sistema es lineal, dinámico, no causal debido a que su respuesta se anticipa, invariante en tiempo y determinista.

**1.4.a** El sistema es lineal, dinámico, causal, variante en el dominio discreto  $n$  y determinista.

**1.4.b** El sistema es lineal, dinámico, no causal (anticipatorio), invariante en el dominio  $n$  y determinista.

1.4.c El sistema es no lineal, dinámico, causal, invariante en el dominio discreto  $n$  y determinista.

1.4.d El sistema es no lineal (incrementalmente lineal), dinámico, causal, invariante en el dominio discreto  $n$  y determinista.

1.5 Obviamente el sistema es causal, dinámico, y determinista. En relación a si el sistema es invariante en tiempo, se tiene que debido al hecho de que el modelo está definido únicamente para todo  $t > 0$ , sus parámetros no se ven afectados con el transcurrir del tiempo, por tanto, el sistema es invariante en tiempo.

Por otra parte, en virtud de  $u(t)$ , el sistema es no lineal, y más específicamente el sistema es incrementalmente lineal de acuerdo a la Propiedad 1.3 de la página 21.

En consecuencia el sistema es *no lineal, dinámico, causal, invariante en tiempo y determinista*.

## SOLUCIÓN DEL CAPÍTULO 2

2.1 Sean  $i_L(t)$  y  $v_L(t)$  la corriente que atraviesa el inductor y la caída de tensión sobre el mismo, respectivamente. Entonces,

$$x(t) = v_L(t) + y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (16.12)$$

donde

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (16.13)$$

Ahora, como

$$i_L(t) = i_C(t) + i_R(t) = C \frac{dy(t)}{dt} + \frac{y(t)}{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (16.14)$$

donde  $i_C(t)$  e  $i_R(t)$  son respectivamente sendas corrientes eléctricas que atraviesan el capacitor y la resistencia.

Sustituyendo (16.14) en (16.13), se obtiene

$$v_L(t) = LC \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{dy(t)}{dt}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (16.15)$$

Finalmente, empleando (16.15) en (16.12), se tiene que

$$LC \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

2.2 En principio, el modelo matemático dado por (2.105), puede ser transformado en el siguiente modelo matemático, y cuya expresión matemática vendría definida por

$$16 \frac{d^3y(t)}{dt^3} + 20 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 8 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 32\tilde{x}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (16.16)$$

donde  $\tilde{x}(t) = x^2(t)$ .

Al aplicar el operador  $p$  a la Ecuación (16.16), se tiene que

$$(16p^3 + 20p^2 + 8p + 1)y(t) = 32\tilde{x}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (16.17)$$

## SOLUCIÓN HOMOGÉNEA

En virtud de lo afirmado en la nota del Problema 2.2, en cuanto a que el polinomio

$$16a^3 + 20a^2 + 8a + 1 = 16\left(a + \frac{1}{4}\right)\left(a^2 + a + \frac{1}{4}\right),$$

se tiene que

$$16a^3 + 20a^2 + 8a + 1 = 16\left(a + \frac{1}{4}\right)\left(a + \frac{1}{2}\right)^2.$$

En consecuencia, la solución homogénea del sistema es

$$y_h(t) = A_1 e^{-t/4} + A_2 t e^{-t/2} + A_3 e^{-t/2} \quad (16.18)$$

## SOLUCIÓN PARTICULAR

Debido al hecho de que  $x(t) = e^{-2t}u(t)$ , entonces, se puede afirmar que

$$\tilde{x}(t) = \left[ e^{-2t}u(t) \right]^2 = e^{-4t}u(t).$$

Ahora, de la Ecuación (16.16) se tiene

$$L(p) = \frac{32}{16p^3 + 20p^2 + 8p + 1}. \quad (16.19)$$

En consecuencia,

$$y_p(t) = \frac{32}{16s^3 + 20s^2 + 8s + 1} \Big|_{s=-4} e^{-4t}u(t) = -\frac{32}{735} e^{-4t}u(t). \quad (16.20)$$

## SOLUCIÓN COMPLETA

De las Ecuaciones (16.18) y (16.20), se obtiene que la solución completa del sistema ante la excitación  $x(t) = e^{-2t}u(t)$ , para  $t > 0$  viene dada por

$$y(t) = A_1 e^{-t/4} + A_2 t e^{-t/2} + A_3 e^{-t/2} - \frac{32}{735} e^{-4t}.$$

**2.3** Al aplicar el operador  $p$  al modelo matemático representado por la Ecuación (2.106), se obtiene que

$$(p^2 + p)y(t) = (p + 1)x(t). \quad (16.21)$$

## SOLUCIÓN HOMOGÉNEA

Las raíces que anulan el polinomio característico del sistema son:  $r_1 = 0$  y  $r_2 = 1$ , en consecuencia, la solución homogénea del sistema viene dada por:

$$y_h(t) = A_1 + A_2 e^{-t}. \quad (16.22)$$

## SOLUCIÓN PARTICULAR

De la Ecuación (16.21), se tiene que el operador del sistema es

$$L(p) = \frac{p + 1}{p^2 + p}. \quad (16.23)$$

Entonces, la solución particular es

$$y_p(t) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{s+1}{s^2+s} e^{-t} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{2s+1} e^{-t} = -e^{-t} \quad (16.24)$$

#### SOLUCIÓN COMPLETA

Entonces, la solución completa, para todo  $t > 0$ , es dada por la respuesta homogénea más la solución particular. Sin embargo, como la solución particular corresponde a uno de los modos naturales del sistema, se puede afirmar que,

$$y(t) = A_1 + A_2 e^{-t} \quad (16.25)$$

**2.4** En principio, el modelo matemático dado por (2.107), corresponde a un sistema de tercer orden y primer grado.

Al aplicar el operador  $p$  a la Ecuación (2.42), se tiene que

$$(p^3 + 2p^2 + 2p)y(t) = 4p x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (16.26)$$

De donde se deduce que el operador del sistema

$$L(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{4p}{p(p^2 + 2p + 2)}. \quad (16.27)$$

#### SOLUCIÓN HOMOGÉNEA

Al hallar las raíces que anulan el polinomio característico  $D(p)$  de la Ecuación (16.27) se tiene que

$$D(p) = p(p^2 + 2p + 2) = p(p+1-j)(p+1+j) = 0. \quad (16.28)$$

En consecuencia, la forma más completa de expresar la solución homogénea del sistema es

$$y_h(t) = A_1 + A_2 e^{-t} \sin(t) + A_3 e^{-t} \cos(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (16.29)$$

donde  $A_i \in \mathbb{R}$  para todo  $i = 1, 2, 3$ .

#### SOLUCIÓN PARTICULAR

Debido al hecho de que  $x(t) = e^{-2t}u(t)$ , entonces, se puede afirmar que la solución particular viene dada por

$$y_h(t) = \lim_{s \rightarrow -2} L(p)|_{p=s} e^{st} = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{4}{s^2 + 2s + 2} e^{st} = 2e^{-2t}, \quad \forall t > 0. \quad (16.30)$$

#### SOLUCIÓN COMPLETA

De las Ecuaciones (16.29) y (16.30), se obtiene que la solución completa del sistema ante la excitación  $x(t) = e^{-2t}u(t)$ , para  $t > 0$  viene dada por

$$y(t) = A_1 + A_2 e^{-t} \sin(t) + A_3 e^{-t} \cos(t) + 2e^{-2t}, \quad \forall t > 0.$$

**2.5** Sea  $p^n = \frac{d^n}{dt^n}$  el operador derivada, el cual es aplicado a la ecuación diferencial dada por (2.108), obteniéndose:

$$(p^2 + 5p + 6)y(t) = 6x(t), \quad (16.31)$$

donde el polinomio característico  $D(p) = p^2 + 5p + 6$  y cuyas raíces que hacen que se anule son:  $r_1 = -2$  y  $r_2 = -3$ .

De acuerdo a las raíces se tiene que la solución homogénea, respuesta transitoria o respuesta natural está definida por,

$$y_h(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-3t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (16.32)$$

Ahora, de (16.31) se tiene que el operador del sistema  $L(p)$  está dado por

$$L(p) = \frac{6}{p^2 + 5p + 6}. \quad (16.33)$$

Debido al hecho de que para  $t > 0$  la señal de excitación  $x(t) = 1$ , más aún,  $\text{sgn}(t) = -u(-t) + u(t)$ , se puede afirmar que la señal de excitación para  $t > 0$  puede ser representada como

$$x(t) = \lim_{\sigma \uparrow 0} e^{\sigma t}, \quad \forall t > 0, \quad (16.34)$$

donde el parámetro real  $\sigma < 0$ .

De esta forma, al aplicar el operador del sistema dado por (16.33) y (16.34), se tiene que la solución particular, respuesta permanente o respuesta forzada está definida por

$$y_p(t) = \lim_{\sigma \uparrow 0} L(p) \Big|_{\sigma} e^{\sigma t} = \lim_{\sigma \uparrow 0} \frac{6}{p^2 + 5p + 6} \Big|_{\sigma} e^{\sigma t} = 1, \quad \forall t > 0. \quad (16.35)$$

Empleando (16.32) y (16.35), se tiene que la solución al sistema para  $t > 0$  es

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-3t} + 1, \quad \forall t > 0. \quad (16.36)$$

De (16.36), se tiene que la derivada de  $y(t)$  para  $t > 0$  es

$$\frac{dy(t)}{dt} = -2A_1 e^{-2t} - 3A_2 e^{-3t}, \quad \forall t > 0. \quad (16.37)$$

Tomando en cuenta las condiciones iniciales se tiene que

$$y(t) \Big|_{t=0} = y(t) \Big|_{t=0^+} = -1; \quad \frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t=0^+} = 0 \quad (16.38)$$

Basado en (16.36), (16.37) y (16.38) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} y(t) \Big|_{t=0^+} &= A_1 + A_2 + 1 = -1, \\ \frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t=0^+} &= -2A_1 - 3A_2 = 0, \end{aligned} \quad (16.39)$$

el cual tiene como solución  $A_1 = -6$  y  $A_2 = 4$ .

En conclusión, la solución del problema es

$$y(t) = -6e^{-2t} + 4e^{-3t} + 1, \quad \forall t > 0. \quad (16.40)$$

### SOLUCIÓN DEL CAPÍTULO 3

3.1 Al multiplicar la Ecuación (3.144) por  $dt$  e integrarla entre  $t_0$  y  $t_0 + h$ , donde  $h$  es el paso de discretización, o también conocido como el intervalo entre muestras, se obtiene

$$\int_{t_0}^{t_0+h} dy(t) + 10 \int_{t_0}^{t_0+h} y(t)dt = \int_{t_0}^{t_0+h} x(t)dt. \quad (16.41)$$

Evaluable la Ecuación (16.41), se tiene

$$y(t_0 + h) - y(t_0) + 10hy(t_0) = hx(t_0) \quad (16.42)$$

Al definir  $t_0$  y  $t_0 + h$  como las muestras  $n$  y  $n + 1$ , respectivamente, la Ecuación (16.42) arroja como resultado

$$y[n + 1] - y[n] + 10hy[n] = hx[n], \quad (16.43)$$

la cual, al sustituir  $h$  por  $0,01$  s, y al agrupar sus términos se puede afirmar que el modelo matemático del sistema en el dominio del tiempo discreto es

$$y[n + 1] - 0,9y[n] = 0,01x[n]$$

3.2.a Del modelo matemático se tiene que

$$\int_{t_0}^{t_0+h} d \left[ \frac{dy(t)}{dt} \right] + 2 \int_{t_0}^{t_0+h} dy(t) + 2 \int_{t_0}^{t_0+h} y(t) = \int_{t_0}^{t_0+h} x(t) \quad (16.44)$$

Al resolver las integrales de la Ecuación (16.44) por el lado izquierdo del intervalo de integración, se consigue

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t_0+h} - \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t_0} + 2(y(t_0 + h) - y(t_0)) + 2y(t_0)h = x(t_0)h \quad (16.45)$$

Debido a la operación de derivada se tiene

$$\frac{y(t_0 + 2h) - y(t_0 + h)}{h} - \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h} + 2(y(t_0 + h) - y(t_0)) + 2y(t_0)h = x(t_0)h \quad (16.46)$$

Al agrupar los términos y al sustituir  $y(t_0 + kh) = y[n + k]$  para  $k = 0, 1, 2$  y  $x(t_0) = x[n]$ , se puede afirmar que

$$y[n + 2] + 2(h - 1)y[n + 1] + (1 + 2h + h^2)y[n] = h^2x[n], \quad \forall n \geq 0. \quad (16.47)$$

En relación a las condiciones iniciales se tiene que

$$y(0) = y_0; \quad \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_0 = \dot{y}(0). \quad (16.48)$$

Debido a la aproximación del operador derivada, se tiene

$$y(0) = y[0] = y_0; \quad \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_0 \approx \frac{y(h) - y(0)}{h} = \dot{y}(0), \quad (16.49)$$

lo que implica que

$$y[0] = y_0; \quad y[1] = y_0 + h\dot{y}(0). \quad (16.50)$$

**3.2.b** De la definición de espacio de estado se tiene

$$e_0(t) = y(t); \quad e_1(t) = \frac{dy(t)}{dt} \quad (16.51)$$

Si se derivan  $e_0(t)$  y  $e_1(t)$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{de_0(t)}{dt} &= e_1(t); \\ \frac{de_1(t)}{dt} &= -2\frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) + x(t). \end{aligned} \quad (16.52)$$

Sustituyendo la Ecuación (16.51) en la Ecuación (16.52), se tiene que para cualquier instante  $t$ ,

$$\begin{aligned} \frac{de_0(t)}{dt} &= e_1(t); \\ \frac{de_1(t)}{dt} &= -2e_1(t) - 2e_0(t) + x(t). \end{aligned} \quad (16.53)$$

Sabiendo que

$$\frac{de_i(t)}{dt} \approx \frac{e_i(t+h) - e_i(t)}{h}, \quad \forall i = 0, 1. \quad (16.54)$$

Aplicando la Ecuación (16.54) en la Ecuación (16.52), y teniendo que  $e_i(t) = e_i[n]$  para  $i = 0, 1$ ;  $e_i(t+h) = e_i[n+1]$  para  $i = 0, 1$ , y  $x(t) = x[n]$  se tiene

$$\begin{aligned} e_0[n+1] &= e_0[n] + e_1[n] \\ e_1[n+1] &= -2he_0[n] + (1-2h)e_1[n] + x[n] \end{aligned} \quad (16.55)$$

Además de las condiciones iniciales se tiene que  $e_0[0] = y_0$  y  $e_1[0] = \dot{y}_0$ .

**3.2.c** Aplicando el método de solución de ecuaciones diferenciales lineales dado en el Capítulo 2, se obtiene que la solución del modelo en el dominio continuo es

$$y(t) = \left( -\frac{1}{2}e^{-t} \cos(t) - \frac{1}{2}e^{-t} \sin(t) + \frac{1}{2} \right) u(t), \quad (16.56)$$

bajo el supuesto de que con  $y_0 = 0$  y  $\dot{y}_0 = 0$ .

La Figura 16.12 muestra en color azul la gráfica correspondiente a solución numérica definida por la ecuación recurrente a partir de la Ecuación (16.47), con  $y_0 = 0$  y  $\dot{y}_0 = 0$ .

Por otra parte, la Figura 16.13 muestra en color azul el resultado de la simulación a partir del modelo matemático definido en términos de las variables de estado.

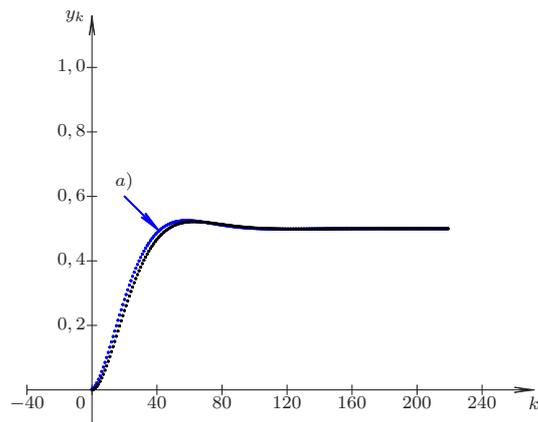
Es oportuno destacar que en ambas figuras se representa la solución obtenida de la resolución de la ecuación diferencial. Note que la simulación proveniente del modelo de estado se aproxima mejor de la solución de la ecuación diferencial, que la simulación definida de la discretización directa del modelo matemático.

**3.3** De acuerdo a la Ecuación (3.146), se tiene que al asignar  $n$  el valor de  $n-2$ , el modelo matemático resultante es

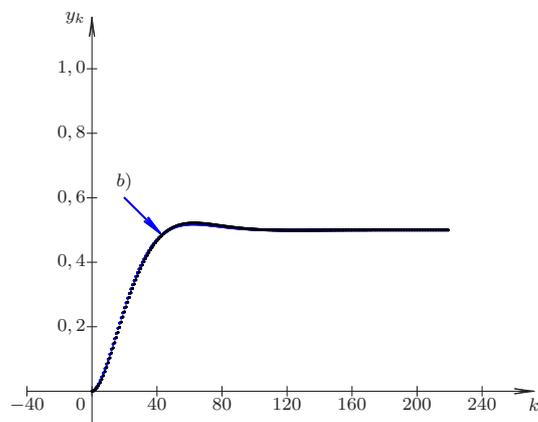
$$-\frac{1}{6}y[n-2] + \frac{1}{6}y[n-1] + y[n-2] = x[n], \quad (16.57)$$

y cuya representación en términos del operador  $q$ , arroja

$$\left( -\frac{1}{6}q^{-2} + \frac{1}{6}q^{-1} + 1 \right) y[n] = x[n]. \quad (16.58)$$



**Figura 16.12.** Simulación mediante discretización de la ecuación diferencial



**Figura 16.13.** Simulación mediante espacio de estado

**SOLUCIÓN HOMOGÉNEA**

Ahora, las raíces que anulan el polinomio característico del sistema son  $r_1 = -1/2$  y  $r_2 = 1/3$ .

En consecuencia, la solución homogénea está representada por

$$y_k = c_1 \left(\frac{-1}{2}\right)^k + c_2 \left(\frac{1}{3}\right)^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}^+ \tag{16.59}$$

Note que

$$y[n] = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

**SOLUCIÓN COMPLETA**

En virtud de que la señal es nula para todo  $n \geq 3$ , la solución del sistema viene dada únicamente por la solución homogénea.

No obstante, para poder determinar la respuesta, se debe evaluar las condiciones iniciales, las cuales son obtenida por la ecuación recurrente del sistema, es decir, evaluando para  $n = 1, 2$  la ecuación:

$$y[n] = x[n] - \frac{1}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2], \quad (16.60)$$

donde  $x[n] = \delta[n-1] + 2\delta[n-2]$ .

Sabiendo que  $y[-1] = y[0] = 0$ , y empleando la Ecuación (16.60), se obtiene que

$$n = 1, \quad y[1] = \delta[0] + 2\delta[-1] - \frac{1}{6}y[0] + \frac{1}{6}y[-1] = 1 \quad (16.61)$$

$$n = 2, \quad y[2] = \delta[1] + 2\delta[0] - \frac{1}{6}y[1] + \frac{1}{6}y[0] = \frac{11}{6}$$

Al evaluar la Ecuación (16.59) para  $n = 1, 2$  y al emplear las condiciones iniciales mostradas por la Ecuación (16.61), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{11}{6} \end{pmatrix},$$

y cuya solución es  $c_1 = \frac{18}{5}$  y  $c_2 = \frac{42}{5}$ .

Como resultado de lo anterior, se tiene que la respuesta del sistema ante la excitación  $x[n] = \delta[n-1] + 2\delta[n-2]$  es

$$y[n] = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{18}{5} \left( \frac{-1}{2} \right)^k + \frac{42}{5} \left( \frac{1}{3} \right)^k \right] \delta[n-k] \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

**3.4** En virtud de que lo que se pide en el problema es la respuesta impulsiva, debe tomarse en cuenta de que la condiciones iniciales del sistema se deben llevar a cero, a fin de que el sistema esté inicialmente en reposo, y además la excitación está definida por el impulso unitario discreto.

Teniendo en cuenta estos hechos, de (3.147) se tiene que

$$y[n] = x[n] - \frac{3}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2]. \quad (16.62)$$

Al evaluar (16.62) para  $n = 0, 1$ , se tiene

$$y[0] = x[0] - \frac{3}{4}y[-1] - \frac{1}{8}y[-2] = 1, \quad (16.63)$$

$$y[1] = x[1] - \frac{3}{4}y[0] - \frac{1}{8}y[-1] = -\frac{3}{4}.$$

Por otra parte, al aplicar el operador  $q$  al modelo matemático del sistema dado por (3.147), se obtiene que

$$\left( 1 + \frac{3}{4}q^{-1} + \frac{1}{8}q^{-2} \right) y[n] = x[n]. \quad (16.64)$$

En virtud de que la respuesta impulsiva del sistema no es más que la solución homogénea del sistema para  $n \geq 0$ , se tiene que el polinomio característico está dado por

$$D(q) = q^2 + \frac{3}{4}q + \frac{1}{8} = \left( q + \frac{1}{4} \right) \left( q + \frac{1}{2} \right). \quad (16.65)$$

De acuerdo a las raíces que anulan en polinomio característico, se tiene que

$$h[n] = \sum_{k=1}^{\infty} \left( c_1 \left( \frac{-1}{4} \right)^k + c_2 \left( \frac{-1}{2} \right)^k \right) \delta[n-k], \quad \forall n \geq 0. \quad (16.66)$$

Evaluando (16.66) para  $n = 0, 1$ ,

$$\begin{aligned} h[0] &= c_1 + c_2 = 1, \\ h[1] &= \frac{-1}{4}c_1 + \frac{-1}{2}c_2 = \frac{-3}{4} \end{aligned} \quad (16.67)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales dado por (16.67), se tiene que

$$h[n] = \sum_{k=1}^{\infty} \left( -\left( \frac{-1}{4} \right)^k + 2 \left( \frac{-1}{2} \right)^k \right) \delta[n-k], \quad \forall n \geq 0. \quad (16.68)$$

**3.5** De acuerdo a la Ecuación (3.146), se tiene el modelo matemático es

$$y[n+2] - \frac{3}{4}y[n+1] + \frac{1}{8}y[n] = x[n], \quad (16.69)$$

y cuya representación en términos del operador  $q$ , arroja

$$\left( q^2 - \frac{3}{4}q + \frac{1}{8} \right) y[n] = x[n]. \quad (16.70)$$

#### SOLUCIÓN HOMOGÉNEA

Ahora, las raíces que anulan el polinomio característico del sistema son  $r_1 = 1/2$  y  $r_2 = 1/4$ .

En consecuencia, la solución homogénea está representada por

$$y_k = c_1 \left( \frac{1}{2} \right)^k + c_2 \left( \frac{1}{4} \right)^k \quad \forall k \in \mathbb{N}^+. \quad (16.71)$$

Note que

$$y_h[n] = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \delta[n-k] \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (16.72)$$

donde  $y_k$  está definida por la Ecuación (16.71).

#### SOLUCIÓN COMPLETA

En virtud de que la señal  $x[n] = \delta[n-1] + 2\delta[n-3]$ , y dado que el sistema es lineal e invariante en tiempo discreto, la solución del sistema viene dada únicamente por la suma pesada de la respuesta impulsiva del sistema, la cual es dada por la solución homogénea  $y[n]$  de la Ecuación (16.71).

No obstante, una manera alterna para determinar la respuesta es a través de las condiciones iniciales, las cuales son obtenida por la ecuación recurrente del sistema, es decir, evaluando para  $n = 1, 2$  la ecuación:

$$y[n+2] = x[n] + \frac{3}{4}y[n+1] - \frac{1}{8}y[n], \quad (16.73)$$

donde  $x[n] = \delta[n - 1] + 2\delta[n - 3]$ .

Sabiendo que  $y[-1] = y[0] = 0$ , y empleando la Ecuación (16.73), se obtiene que

$$\begin{aligned} n = -1, \quad y[1] &= \delta[-2] + 2\delta[-4] + \frac{3}{4}y[0] - \frac{1}{8}y[-1] = 0; \\ n = 0, \quad y[2] &= \delta[-1] + 2\delta[-3] + \frac{3}{4}y[1] - \frac{1}{8}y[0] = 0; \\ n = 1, \quad y[3] &= \delta[0] + 2\delta[-2] + \frac{3}{4}y[2] - \frac{1}{8}y[1] = 1; \\ n = 2, \quad y[4] &= \delta[1] + 2\delta[-1] + \frac{3}{4}y[3] - \frac{1}{8}y[2] = 3/4; \\ n = 3, \quad y[5] &= \delta[2] + 2\delta[0] + \frac{3}{4}y[4] - \frac{1}{8}y[3] = 39/16. \end{aligned} \tag{16.74}$$

Al evaluar la Ecuación (16.72) para  $y[4]$  y  $y[5]$ , y junto con las condiciones determinadas por la Ecuación (16.74), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2^4} & \frac{1}{4^4} \\ \frac{1}{2^5} & \frac{1}{4^5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{39}{16} \end{pmatrix},$$

y cuya solución es  $c_1 = 144$  y  $c_2 = -2112$ .

Como resultado de lo anterior, se tiene que la respuesta del sistema ante la excitación  $x[n] = \delta[n - 1] + 2\delta[n - 3]$  es

$$y[n] = \delta[n - 3] + \sum_{k=4}^{\infty} \left( 144 \left( \frac{1}{2} \right)^k - 2112 \left( \frac{1}{4} \right)^k \right) \delta[n - k] \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

## SOLUCIÓN DEL CAPÍTULO 4

**4.1.a** La respuesta impulsiva, supone que el sistema se encuentra en reposo, es decir,  $y[0] = 0$ .

Por otra parte, del modelo del sistema dado por la Ecuación (4.61) se tiene que la ecuación recurrente es

$$y[n + 1] = b_0x[n] + a_0y[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{16.75}$$

Al sustituir  $x[n]$  por  $\delta[n]$  en la Ecuación (16.75), se tiene que

$$h[n + 1] = b_0\delta[n] + a_0y[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{16.76}$$

Para el caso particular de  $n = 0$ , se obtiene de la Ecuación (16.76)

$$h[1] = b_0\delta[0] + a_0y[0] = b_0. \tag{16.77}$$

Aplicando el operador  $q$  a la Ecuación (4.61) se tiene

$$(q - a_0)y[n] = b_0x[n], \tag{16.78}$$

de donde se concluye que debido a que  $D(q) = q - a_0$ ,

$$h[n] = c_1a_0^n, \quad \forall n \geq 1. \tag{16.79}$$

De las condiciones mostradas en la Ecuación (16.77) y evaluando la Ecuación (16.79) para el caso particular de  $n = 1$ , se obtiene

$$h[1] = c_1 a_0 = b_0. \quad (16.80)$$

De las Ecuaciones (16.79) y (16.80) se tiene

$$h[n] = b_0 a_0^{n-1} u[n-1], \quad \forall n \geq 1. \quad (16.81)$$

Por último, se tiene que

$$h[n] = \begin{cases} 0, & \forall n \leq 0; \\ b_0 \sum_{k=1}^{\infty} a_0^{k-1} \delta[n-k], & \forall n \geq 1. \end{cases} \quad (16.82)$$

**4.1.b** De la solución del Problema (4.1.a), se sabe que la solución homogénea o respuesta transitoria es

$$y_h[n] = c_1 a_0^n, \quad \forall n \geq 0. \quad (16.83)$$

En cuanto a la solución particular, se tiene

$$y_p[n] = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{b_0}{q - a_0} \Big|_{q=e^{\ln r}} r^n u(n), \quad \forall n \geq 0, \quad (16.84)$$

la cual converge a

$$y_p[n] = \frac{b_0}{1 - a_0} u(n), \quad \forall n \geq 0, \quad (16.85)$$

De las Ecuaciones (16.83) y (16.85), se obtiene

$$y''[n] = y_p[n] + y_h[n] = c_1 a_0^n + \frac{b_0}{1 - a_0} u(n), \quad \forall n \geq 0, \quad (16.86)$$

Al evaluar la Ecuación (16.86) en  $n = 0$ , y tomando en cuenta que  $y[0] = 0$

$$y[0] = c_1 + \frac{b_0}{1 - a_0} = 0, \quad (16.87)$$

se tiene que

$$c_1 = -\frac{b_0}{1 - a_0}, \quad (16.88)$$

Quedando entonces que

$$y''[n] = \frac{b_0}{1 - a_0} (1 - a_0^n) u(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (16.89)$$

El lector puede verificar los valores de  $y[n]$  obtenido a la ecuación recurrente proveniente del modelo matemático, la cual está definida por la Ecuación (16.75), y la solución mostrada en la Ecuación (16.89).

**4.1.c** De la Ecuación (16.81), se conoce que

$$h[n] = \begin{cases} 0, & \forall n \leq 0; \\ b_0 \sum_{k=1}^{\infty} a_0^{k-1} \delta[n-k], & \forall n \geq 1. \end{cases} \quad (16.90)$$

Por otra parte, se sabe que

$$x[n] = u[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (16.91)$$

De acuerdo a lo estudiado en este capítulo,  $y[n] = x[n] * h[n]$ , lo cual implica

$$y[n] = u[n] * h[n] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} u[q]h[n-q], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (16.92)$$

Al evaluar la Ecuación (16.92) para los distintos valores de  $n$ , se tiene que

$$y[0] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} u[q]h[-q] = 0. \quad (16.93)$$

$$y[1] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} u[q]h[1-q] = u[q]b_0a_0^{1-q-1} \Big|_{q=0} = b_0. \quad (16.94)$$

$$y[2] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} u[q]h[2-q]. \quad (16.95)$$

$$y[2] = u[q]b_0a_0^{2-q-1} \Big|_{q=0} + u[q]b_0a_0^{2-q-1} \Big|_{q=1} = b_0(1+a_0). \quad (16.96)$$

Lo que implica,

$$y[n] = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{k-1} b_0a_0^{k-q-1} \delta[n-k], \quad \forall n \geq 1. \quad (16.97)$$

**4.1.d** Debido a que el sistema es LDCID, se puede afirmar que la respuesta del sistema es la suma de las respuesta ante  $u[n]$  y  $-u[n-1]$ .

Es decir,

$$h[n] = y^u[n] - y^u[n-1], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (16.98)$$

De la Ecuación (16.89), se tiene

$$y^u[n] = \frac{b_0}{1-a_0}(1-a_0^n)u(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (16.99)$$

Al sustituir (16.99) en (16.98) se obtiene

$$h[n] = \frac{b_0}{1-a_0}(1-a_0^n)u(n) - \frac{b_0}{1-a_0}(1-a_0^{n-1})u(n-1), \quad \forall n \geq 1. \quad (16.100)$$

Ahora, para cada valor  $k$ , se tiene

$$h_k = \frac{b_0}{1-a_0}(1-a_0^k) - \frac{b_0}{1-a_0}(1-a_0^{k-1}), \quad \forall k \geq 1. \quad (16.101)$$

Al hacer algunas operaciones algebraica, se tiene

$$h_k = \frac{b_0}{1-a_0}(1-a_0^k - 1 + a_0^{k-1}), \quad \forall k \geq 1.$$

$$h_k = \frac{b_0}{1-a_0} \left( \frac{a_0^k}{a_0} - a_0^k \right) = \frac{b_0}{1-a_0} \frac{a_0^k(1-a_0)}{a_0}, \quad \forall k \geq 1,$$

lo que implica que

$$h_k = b_0 a_0^{k-1}, \quad \forall k \geq 1. \quad (16.102)$$

Para el caso  $n = 0$ , se obtiene evaluando la Ecuación (16.100) en  $n = 0$ , lo que arroja

$$h[0] = b_0. \quad (16.103)$$

**4.2.a** Debido al hecho de que el sistema se encuentra inicialmente en reposo, se puede afirmar que  $y(0^-) = 0$ .

Por otra parte, como consecuencia de que  $x(t) = \delta(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , se tiene

$$\int_{0^-}^{0^+} dy(t) + a_0 \int_{0^-}^{0^+} y(t) dt = b_0 \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt. \quad (16.104)$$

(A)

Como la señal  $y(t)$  no contiene término impulsivo en el origen, se puede asegurar que aunque pueda presentar discontinuidad en  $t = 0$ , la integral identificada con (A) converge a cero, quedando entonces,

$$y(0^+) - y(0^-) = b_0, \quad (16.105)$$

debido a que  $\int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$ .

Como  $y(0^-) = 0$ , entonces

$$y(0^+) = b_0. \quad (16.106)$$

Al aplicar el operador  $p$  a la Ecuación 4.63 se tiene que

$$(p + a_0)y(t) = b_0 x(t), \quad (16.107)$$

donde puede notarse fácilmente que la raíz que anula el polinomio característico  $D(p) = p + a_0$  es  $p = -a_0$ , y en consecuencia

$$h(t) = c_1 e^{-a_0 t}, \quad \forall t > 0. \quad (16.108)$$

Ahora, como

$$\lim_{t \downarrow 0} h(t) = c_1 = y(0^+) = b_0, \quad (16.109)$$

se tiene que al sustituir el valor de  $c_1$  de la Ecuación (16.109) en la Ecuación (16.108)

$$h(t) = b_0 e^{-a_0 t} u(t) \quad (16.110)$$

**4.2.b** Del Problema 4.2.a, se tiene que la solución homogénea o respuesta transitoria es

$$y_h(t) = c_1 e^{-a_0 t}, \quad \forall t > 0. \quad (16.111)$$

Por otra parte, se tiene que del operador del sistema

$$y_p(t) = \left. \frac{b_0}{p + a_0} \right|_{p=0} u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (16.112)$$

De las Ecuaciones (16.111) y (16.112), se tiene que

$$y''(t) = \left( c_1 e^{-a_0 t} + \frac{b_0}{a_0} \right) u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (16.113)$$

donde  $y''(t)$  denota la respuesta a un escalón unitario.

Como  $y(0^+) = y(0^-) = 0$ , se tiene que de la Ecuación (16.113),  $c_1 = -b_0/a_0$ , y como resultado de esto

$$y''(t) = \frac{b_0}{a_0} (1 - e^{-a_0 t}) u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (16.114)$$

**4.2.c** Del resultado obtenido del Problema (4.2.b) se tiene que la respuesta impulsiva del sistema es

$$h(t) = b_0 e^{-a_0 t} u(t) \quad (16.115)$$

Se sabe que si el sistema está inicialmente en reposo la respuesta del sistema ante una excitación  $x(t)$  viene dada por

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (16.116)$$

Aplicando la Ecuación (16.116) y sabiendo que  $x(t) = u(t)$ , se tiene que

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \forall t \leq 0, \\ \int_{\tau=0}^t b_0 e^{-a_0 \tau} d\tau, & \forall t > 0 \end{cases} \quad (16.117)$$

Al resolver la integral planteada en la Ecuación (16.117), se obtiene

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \forall t \leq 0, \\ \frac{b_0}{a_0} (1 - e^{-a_0 t}), & \forall t > 0 \end{cases} \quad (16.118)$$

Lo que implica

$$y(t) = \frac{b_0}{a_0} (1 - e^{-a_0 t}) u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (16.119)$$

**4.2.d** Los resultados obtenidos en ambos problemas son idénticos. Además note que

$$\frac{dy''(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{b_0}{a_0} (1 - e^{-a_0 t}) \right] u(t) + \frac{b_0}{a_0} (1 - e^{-a_0 t}) \frac{d}{dt} [u(t)], \quad (16.120)$$

y cuyas operaciones en la ecuación arroja que

$$\frac{dy''(t)}{dt} = b_0 e^{-a_0 t} u(t) + \frac{b_0}{a_0} (1 - e^{-a_0 t}) \delta(t). \quad (16.121)$$

Como  $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$ , siempre que  $f(t)$  esté definida en  $t = 0$  (Brea, 2006), se tiene que

$$\frac{b_0}{a_0} (1 - e^{-a_0 t}) \delta(t) = 0. \quad (16.122)$$

En consecuencia, al aplicar la Ecuación (16.122) en la Ecuación (16.121), se tiene

$$\frac{dy''(t)}{dt} = h(t) = b_0 e^{-a_0 t} u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (16.123)$$

**4.3.a** Al emplear el operador  $p$  a la ecuación diferencial definida por la Ecuación (4.64), se tiene

$$(p + a)y(t) = b_1 p x(t). \quad (16.124)$$

Debido a que  $D(p) = p + a$  tiene una raíz real  $r = -a$ , la solución homogénea es

$$y_h(t) = c_1 e^{-a_0 t}, \quad \forall t > 0. \quad (16.125)$$

Por otra parte, la solución particular viene dada por

$$y_h(t) = \left. \frac{p}{p + a} \right|_{p=0} u(t), \quad \forall t > 0. \quad (16.126)$$

De las Ecuaciones (16.125) y (16.126), se puede afirmar que la solución es

$$y(t) = c_1 e^{-a_0 t}, \quad \forall t > 0. \quad (16.127)$$

Como  $x(t) = u(t)$ , y la solución es válida para  $t > 0$  se debe determinar la condición inicial para  $t = 0^+$ , sabiendo que  $y(0^-) = 0$ . Para esto se debe integrar la ecuación diferencial entre  $0^-$  y  $0^+$ .

$$\int_{0^-}^{0^+} dy(t) + a_0 \int_{0^-}^{0^+} y(t) dt = b_1 \int_{0^-}^{0^+} \frac{du(t)}{dt} dt. \quad (16.128)$$

(A)

Como  $y(t)$  no contiene términos impulsivos en el intervalo entre  $0^-$  y  $0^+$ , y  $\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$  (Brea, 2006), se tiene

$$y(0^+) - y(0^-) = b_1, \quad (16.129)$$

y en consecuencia  $y(0^+) = b_1$ .

Evaluando el límite cuando  $t$  se aproxima a 0, siendo  $t > 0$ , se tiene de la Ecuación (16.127),

$$\lim_{t \downarrow 0} y(t) = \lim_{t \downarrow 0} c_1 e^{-a_0 t} = c_1 = b_1 \quad (16.130)$$

Resultando entonces que

$$y(t) = b_1 e^{-a_0 t}, \quad \forall t > 0. \quad (16.131)$$

**4.3.b** Como puede verse, la solución obtenida del Problema 4.3.a constituye ser la respuesta impulsiva del Problema 4.2.a, con la diferencia del coeficiente  $b_1$ , debido al hecho de que

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (16.132)$$

## SOLUCIÓN DEL CAPÍTULO 5

**5.1.a** A objeto de determinar la respuesta impulsiva del sistema, se debe calcular primero los parámetros  $k$  y  $\lambda$  asociados a la respuesta escalón.

Evaluando la Ecuación (5.77) de la página 137 para dos instantes distintos de cero mostrados en la Tabla 5.1 de esa misma página, se tiene

$$y''(1) = k(1 - e^{-\lambda}). \quad (16.133a)$$

$$y''(2) = k(1 - e^{-2\lambda}). \quad (16.133b)$$

De la Tabla 5.1 de la página 137 y considerando  $r = e^{-\lambda}$  se tiene

$$\frac{y''(2)}{y''(1)} = \frac{k(1 - r^2)}{k(1 - r)} = \frac{1,1013}{0,6594}. \quad (16.134)$$

De la Ecuación (16.134), se puede afirmar

$$\frac{(1 - r)(1 + r)}{1 - r} = 1 + r = 1,6701547, \quad (16.135)$$

lo que implica que  $r = 0,6701547$ .

Ahora como  $r = e^{-\lambda}$ , se obtiene

$$\lambda = -\ln(0,6701547) = 0,4002467; \quad (16.136)$$

el cual se supondrá como  $\lambda = 0,4$ .

Para determinar  $k$  se toma cualquier punto de la Tabla 5.1, por ejemplo, para  $t = 1$  y con el valor de  $\lambda = 0,4$ , se tiene

$$y''(1) = k(1 - e^{-0,4}) = 0,6594, \quad (16.137)$$

lo que implica

$$k = \frac{0,6594}{1 - e^{-0,4}} = 2,0001216, \quad (16.138)$$

lo que permitirá aproximar un valor de  $k = 2$ .

Ahora, al derivar la respuesta escalón de la Ecuación (5.77) de la página 137, se obtiene

$$h(t) = \frac{d}{dt} [k(1 - e^{-\lambda t})u(t)] = k\lambda e^{-\lambda t}u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (16.139)$$

Sustituyendo por los parámetros, se tiene

$$h(t) = 0,8 e^{-0,4t}u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (16.140)$$

**5.1.b** Al obtener la transformada de Laplace de  $h(t)$ , es decir, la transformada de Laplace de la Ecuación (16.140), se tiene

$$\mathcal{L}[h(t)] = H(s) = \int_0^{\infty} 0,8 e^{-0,4t} e^{-st} dt. \quad (16.141)$$

$$H(s) = 0,8 \left. \frac{e^{-(s+0,4)t}}{s+0,4} \right|_0^{\infty}.$$

$$H(s) = \frac{0,8}{s+0,4}, \quad \forall \operatorname{Re}[s+0,4] > 0. \quad (16.142)$$

De la Ecuación (16.142), se obtiene que

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{0,8}{s+0,4},$$

donde  $Y(s)$  es la transformada de Laplace de la respuesta del sistema, y  $X(s)$  es la transformada de Laplace de la excitación del sistema, lo cual permite asegurar

$$(s+0,4)Y(s) = 0,8X(s),$$

lo que implica

$$\frac{dy(t)}{dt} + 0,4y(t) = 0,8x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (16.143)$$

**5.2** Del modelo matemático definido por (5.78), se tiene que al aplicar la transformada unilateral derecha de Laplace

$$s^2Y(s) - sy(0^-) - \dot{y}(0^-) + 4[sY(s) - y(0^-)] + 3Y(s) = X(s). \quad (16.144)$$

Como el sistema es físicamente realizable, entonces, las condiciones iniciales del sistema son:  $y(t)|_{0^-} = y(t)|_{0^+} = 0$

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{0^-} = \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{0^+} = 1.$$

Al sustituir estas condiciones iniciales y  $X(s)$  dada por (5.79) en (16.144), se tiene que

$$Y(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s^2+4s+3)} = \frac{1}{(s+2)(s+1)} \quad (16.145)$$

Aplicando el teorema para el cálculo de transformada inversa se tiene

$$y(t) = \sum_{k=1}^2 \text{Res} \left[ Y(s)e^{st} \right]_{p_k} u(t), \quad (16.146)$$

donde  $p_1 = -1$  y  $p_2 = -2$ .

Al aplicar el Teorema de los Residuos a (16.146), se obtiene que

$$y(t) = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \frac{1}{(s+2)(s+1)} e^{st} u(t) + \lim_{s \rightarrow -2} (s+2) \frac{1}{(s+2)(s+1)} e^{st} u(t),$$

la cual arroja como resultado que

$$y(t) = e^{-t} - e^{-2t} \quad \forall t > 0.$$

**5.3** Aplicando la transformada de Laplace a (5.80) se tiene que

$$(s^3 + 4s^2 + s + 4)Y(s) = X(s) \quad (16.147)$$

Despejando  $Y(s)$  de (16.147) y sustituyendo  $X(s)$  por (5.81), se obtiene que

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^3 + 4s^2 + s + 4)} = \frac{1}{s(s+4)(s^2+1)}, \quad \forall \text{Re}[s] > 0. \quad (16.148)$$

Aplicando el Teorema 3.9 de Brea (2006, Pág. 36) se tiene que debido a los polos  $z_i \in \{0, -4, j, -j\}$  para todo  $i = 1, 2, 3, 4$ , respectivamente, los residuos  $\text{Res}[Y(s)e^{st}]_{z_i}$  están dados por

$$\begin{aligned}\text{Res}[Y(s)e^{st}]_{z_1} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s(s+4)(s^2+1)} e^{st} = \frac{1}{4} \\ \text{Res}[Y(s)e^{st}]_{z_2} &= \lim_{s \rightarrow -4} (s+4) \frac{1}{s(s+4)(s^2+1)} e^{st} = -\frac{1}{68} e^{-4t} \\ \text{Res}[Y(s)e^{st}]_{z_3} &= \lim_{s \rightarrow -j} (s+j) \frac{1}{s(s+4)(s^2+1)} e^{st} = \frac{1}{-8+j2} e^{-jt} \\ \text{Res}[Y(s)e^{st}]_{z_4} &= \lim_{s \rightarrow +j} (s-j) \frac{1}{s(s+4)(s^2+1)} e^{st} = \frac{1}{-8-j2} e^{+jt}\end{aligned}\tag{16.149}$$

Sustituyendo (16.149) en

$$y(t) = \sum_{i=1}^4 \text{Res}[Y(s)e^{st}]_{z_i} u(t),\tag{16.150}$$

y luego de unos elementales cálculos sobre (16.150) se tiene que

$$y(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{68} e^{-4t} - \frac{4}{17} \cos(t) - \frac{1}{17} \text{sen}(t), \quad \forall t > 0.\tag{16.151}$$

## SOLUCIÓN DEL CAPÍTULO 6

**6.1.a** Debido a que se debe determinar el valor de  $y[1]$  se evaluará la ecuación recurrente del modelo matemático, la cual es

$$y[n+2] = x[n] + y[n+1] - \frac{1}{2}y[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.\tag{16.152}$$

Al evaluar la Ecuación (16.152) para  $n = -1$  se tiene que

$$y[1] = x[-1] + y[0] - \frac{1}{2}y[-1] = 0.\tag{16.153}$$

Debido a que  $y[0] = y[1] = 0$ , entonces, al aplicar la transformada  $\mathcal{Z}$  a la Ecuación (6.162) de la página 168 se obtiene que

$$(z^2 - z + \frac{1}{2})Y(z) = X(z).\tag{16.154}$$

Por otra parte, de acuerdo al enunciado del problema, la señal de excitación  $x[n] = u[n]$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , lo que implica que

$$X(z) = \mathcal{Z}[u[n]] = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}, \quad \forall |z| > 1.\tag{16.155}$$

Sustituyendo la Ecuación (16.155) en la Ecuación (16.154), y despejando  $Y(z)$  se tiene que

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z^2 - z + \frac{1}{2})}, \quad \forall |z| > 1. \quad (16.156)$$

Del polinomio característico de la Ecuación (16.156) se arroja que los polos son:  $p_1 = 1$ ;  $p_2 = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$  y  $p_3 = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}$ .

Aplicando el Método 6.1 de la página 151, se puede afirmar que:

polo  $p_1 = 1, m_1 = 1$

$$\text{Res}[Y(z)z^{k-1}]|_{p_1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)z}{(z-1)(z^2 - z + \frac{1}{2})} z^{k-1} = 2; \quad (16.157)$$

polo  $p_2 = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}, m_2 = 1$

$$\text{Res}[Y(z)z^{k-1}]|_{p_2} = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\pi/4}} \frac{\left(z - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\pi/4}\right)z^k}{(z-1)(z^2 - z + \frac{1}{2})} = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k e^{jk\pi/4}(1-j); \quad (16.158)$$

polo  $p_3 = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}, m_3 = 1$

$$\text{Res}[Y(z)z^{k-1}]|_{p_3} = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\pi/4}} \frac{\left(z - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\pi/4}\right)z^k}{(z-1)(z^2 - z + \frac{1}{2})} = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k e^{-jk\pi/4}(1+j). \quad (16.159)$$

Por otra parte, se tiene que

$$y_k = \sum_{i=1}^3 \text{Res}[Y(z)z^{k-1}]|_{p_i}, \quad (16.160)$$

lo que arroja que

$$y_k = 2 \left[ 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k \cos(k\pi/4) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k \text{sen}(k\pi/4) \right], \quad \forall k \geq 0. \quad (16.161)$$

Entonces, de la Ecuación (16.161) se puede asegurar que

$$y[n] = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \left[ 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k (\cos(k\pi/4) + \text{sen}(k\pi/4)) \right] \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (16.162)$$

**6.1.b** De la Ecuación (16.154), se tiene que

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{z^2 - z + \frac{1}{2}}, \quad \forall z \neq \frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}. \quad (16.163)$$

**6.1.c** Para conseguir la respuesta impulsiva a partir de conocer la función de transferencia del sistema, debe hallarse la transformada inversa  $\mathcal{Z}$  de  $H(z)$ , para lo cual se aplicará

nuevamente el Método de los Residuos (Método 6.1 de la página 151).

Polo  $p_1 = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$ ,  $m_1 = 1$

$$\text{Res}[H(z)z^{k-1}]|_{p_1} = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\pi/4}} \frac{\left(z - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\pi/4}\right)z^{k-1}}{z^2 - z + \frac{1}{2}} = \frac{1}{j} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-1} e^{jk\pi/4}. \quad (16.164)$$

Polo  $p_2 = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}$ ,  $m_2 = 1$

$$\text{Res}[H(z)z^{k-1}]|_{p_2} = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\pi/4}} \frac{\left(z - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\pi/4}\right)z^{k-1}}{z^2 - z + \frac{1}{2}} = \frac{1}{-j} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-1} e^{-jk\pi/4}. \quad (16.165)$$

Al sumar los residuos se obtiene que

$$h_k = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k \text{sen}(k\pi/4), \quad \forall k \geq 0, \quad (16.166)$$

lo que arroja que

$$h[n] = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k \text{sen}(k\pi/4) \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (16.167)$$

**6.1.d** Como el sistema es LDCID se puede asegurar que la respuesta del sistema es

$$y^u[n] = \sum_{q=0}^{\infty} h[n-q], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (16.168)$$

donde  $h[n]$  viene dada por la Ecuación (16.167), debido al hecho de que

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (16.169)$$

Este hecho puede ser corroborado a través del Teorema 4.1 de la página 98, el cual establece que

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x[q]h[n-q], \quad (16.170)$$

donde al reemplazar  $x[q]$  por  $u[q]$ , se obtiene

$$y[n] = \sum_{q=0}^{\infty} h[n-q]. \quad (16.171)$$

**6.1.e** Se puede afirmar que el sistema es estable, por cuanto las magnitudes de las raíces del polinomio característico de la función de transferencia son todas menores que uno.

Por otra parte, se tiene además que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |h_k| < \lim_{k \rightarrow \infty} 2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^k = 0, \quad (16.172)$$

en consecuencia el sistema es estable.

**6.1.f** Aplicando el teorema de valor inicial se tiene

$$y[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} Y(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{(z-1)(z^2 - z + \frac{1}{2})} = 0, \quad (16.173)$$

lo cual verifica el teorema debido a que de según a los datos del problema  $y[0] = 0$ .

Por otro lado, aplicando el teorema de valor final, se tiene

$$y[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z}{(z-1)(z^2 - z + \frac{1}{2})} = 2. \quad (16.174)$$

Al calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y[n] = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \lim_{k \rightarrow \infty} 2 \left[ 1 - \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^k (\cos(k\pi/4) + \text{sen}(k\pi/4)) \right] = 2. \quad (16.175)$$

Las Ecuaciones (16.174) y (16.175) verifican el teorema.

**6.2.a** Al aplicar la transformada  $\mathcal{Z}$  a la Ecuación (6.163) se tiene

$$(z^2 + \frac{1}{4})Y(z) = X(z), \quad \forall |z| > \frac{1}{2}. \quad (16.176)$$

En consecuencia, la función de transferencia viene definida por

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{z^2 + \frac{1}{4}}, \quad \forall z \neq \pm \frac{j}{2}. \quad (16.177)$$

**6.2.b** Se tiene que

$$\mathcal{Z}[u[n]] = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad \forall |z| > 1. \quad (16.178)$$

Aplicando las Ecuaciones (16.176) y (16.178) se tiene que

$$Y(z) = \frac{1}{(z^2 + \frac{1}{4})(1-z^{-1})}, \quad \forall |z| > 1, \quad (16.179)$$

debido a que la región de convergencia o de analiticidad está definida por la intersección de las regiones de convergencia de  $H(z)$  y  $X(z)$ , es decir, si  $D_y(z)$  denota la región de convergencia de  $Y(z)$ ,

$$D_y(z) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1/2\} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}. \quad (16.180)$$

Ahora, para obtener la función  $y[n]$  se aplicará el método de los residuos.

Para esto, se tiene que la función  $y(z)$  presenta únicamente singularidades aisladas ubicadas en  $p_1 = 1$ ;  $p_2 = \frac{j}{2}$  y  $p_3 = -\frac{j}{2}$ .

polo  $p_1 = 1, m_1 = 1$

$$\text{Res}[Y(z)z^{k-1}]|_{p_1} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{(z^2 + \frac{1}{4})(1-z^{-1})},$$

el cual arroja

$$\text{Res}[Y(z)z^{k-1}]|_{p_1} = \frac{4}{5}. \tag{16.181}$$

polo  $p_2 = \frac{j}{2}, m_2 = 1$

$$\text{Res}[Y(z)z^{k-1}]|_{p_2} = \lim_{z \rightarrow \frac{j}{2}} (z - \frac{j}{2}) \frac{1}{(z^2 + \frac{1}{4})(1-z^{-1})},$$

lo que resulta

$$\text{Res}[Y(z)z^{k-1}]|_{p_2} = \frac{\left(\frac{j}{2}\right)^{k-1}}{-2+j}. \tag{16.182}$$

polo  $p_3 = -\frac{j}{2}, m_3 = 1$

$$\text{Res}[Y(z)z^{k-1}]|_{p_3} = \lim_{z \rightarrow -\frac{j}{2}} (z + \frac{j}{2}) \frac{1}{(z^2 + \frac{1}{4})(1-z^{-1})},$$

y en consecuencia

$$\text{Res}[Y(z)z^{k-1}]|_{p_3} = \frac{\left(-\frac{j}{2}\right)^{k-1}}{-2-j}. \tag{16.183}$$

Al sustituir las Ecuaciones (16.181), (16.182) y (16.183) en

$$y_k = \sum_{i=1}^3 \text{Res}[Y(z)z^{k-1}]|_{p_i}, \quad \forall k \geq 0,$$

se obtiene luego de algunos cálculos algebraicos que

$$y_k = \frac{4}{5} + \frac{2}{5} \frac{1}{2^{k-1}} \left[ \text{sen} \left( \frac{(k-1)\pi}{2} \right) - 2 \cos \left( \frac{(k-1)\pi}{2} \right) \right], \quad \forall k \geq 0. \tag{16.184}$$

Finalmente, se tiene que

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{4}{5} + \frac{2}{5} \frac{1}{2^{k-1}} \left[ \text{sen} \left( \frac{(k-1)\pi}{2} \right) - 2 \cos \left( \frac{(k-1)\pi}{2} \right) \right] \right] \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{16.185}$$

lo que equivale a expresar que

$$y[n] = \frac{4}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ 1 + \frac{1}{2^k} \left[ \text{sen} \left( \frac{(k-1)\pi}{2} \right) - 2 \cos \left( \frac{(k-1)\pi}{2} \right) \right] \right] \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{16.186}$$

**6.2.c** De la Ecuación (16.186), se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y[n] = \frac{4}{5}. \tag{16.187}$$

Por otra parte, se tiene que al aplicar el teorema de valor final,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{(z^2 + \frac{1}{4})(1-z^{-1})} = \frac{4}{5}. \quad (16.188)$$

Las Ecuaciones (16.187) y (16.188) verifican el teorema de valor final.

## SOLUCIÓN DEL CAPÍTULO 7

**7.1.a** Al aplicar la transformada  $\mathcal{Z}$  a la Ecuación (7.113) y considerando que el sistema se encuentra inicialmente en reposo, se obtiene que

$$zY(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z^{-k} X(z), \quad \forall z \in D_y \cap D_x, \quad (16.189)$$

donde  $D_y$  y  $D_x$  son respectivamente las regiones de convergencia de  $Y(z)$  y  $X(z)$ .

Despejando el cociente  $\frac{Y(z)}{X(z)}$ , se tiene que

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z^{-k-1}, \quad \forall |z| \geq 1. \quad (16.190)$$

**7.1.b** Reescribiendo la Ecuación (16.190), se tiene que

$$H(z) = \frac{1}{N} z^{-\lfloor N/2 \rfloor} \sum_{k=-\lfloor N/2 \rfloor}^{\lfloor N/2 \rfloor} z^k, \quad \forall |z| \geq 1, \quad (16.191)$$

donde  $\lfloor \cdot \rfloor$  aproxima hacia el próximo entero inferior, en el caso de ser una cantidad real no entera.

Al hacer  $z = e^{j\Omega}$  en la Ecuación (16.191) para todo  $0 < \Omega \leq 2\pi$ , se consigue que (véase Observación 7.11 de la página 193)

$$H(\Omega) = \frac{1}{N} e^{-j\lfloor N/2 \rfloor \Omega} \sum_{k=-\lfloor N/2 \rfloor}^{\lfloor N/2 \rfloor} e^{k\Omega}, \quad \forall 0 < \Omega \leq 2\pi. \quad (16.192)$$

De la Ecuación (16.192), se arroja que

$$H(\Omega) = \frac{1}{N} e^{-j\lfloor N/2 \rfloor \Omega} \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} \cos(k\Omega), \quad \forall 0 < \Omega \leq 2\pi. \quad (16.193)$$

En consecuencia, de la Ecuación (16.193), se tiene que

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} \cos(k\Omega) \right|, \quad \forall 0 < \Omega \leq 2\pi, \quad (16.194)$$

y

$$\Phi(\Omega) = 2\pi - \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + \pi \left[ 1 - u \left( \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} \cos(k\Omega) \right) \right], \quad \forall 0 < \Omega \leq 2\pi. \quad (16.195)$$

7.1.c De las Ecuaciones (16.194) y (16.195), se tiene que al evaluarlas para  $N = 5$ ,

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{5} \left| \sum_{k=0}^2 \cos(k\Omega) \right|, \quad \forall 0 < \Omega \leq 2\pi, \quad (16.196)$$

y

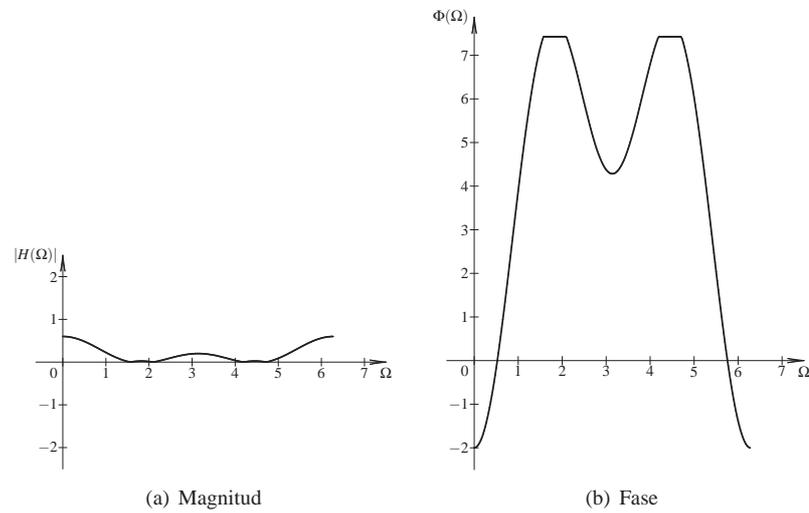
$$\Phi(\Omega) = 2\pi - 2 + \pi \left[ 1 - u \left( \sum_{k=0}^2 \cos(k\Omega) \right) \right], \quad \forall 0 < \Omega \leq 2\pi. \quad (16.197)$$

Al expandir las Ecuaciones (16.196) y (16.197), se obtiene que

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{5} |1 + \cos(\Omega) + \cos(2\Omega)|, \quad \forall 0 < \Omega \leq 2\pi, \quad (16.198)$$

y

$$\Phi(\Omega) = 2\pi - 2 + \pi [1 - u(1 + \cos(\Omega) + \cos(2\Omega))], \quad \forall 0 < \Omega \leq 2\pi. \quad (16.199)$$



**Figura 16.14.** Gráfica de: (a) magnitud de la respuesta en frecuencia y (b) fase de la respuesta en frecuencia del modelo matemático para el caso  $N = 5$ , para el intervalo  $0 < \Omega \leq \pi$

7.2.a Considere la cantidad interna  $E(s)$ , la cual representa un variable interna a la salida del sumador, es decir,

$$E(s) = X(s) - \frac{k}{s} Y(s), \quad \forall s \in D_x \cap D_y, \quad (16.200)$$

donde  $D_x$  y  $D_y$  son respectivamente las regiones de convergencia de  $X(s)$  e  $Y(s)$ .

Por otra parte, se tiene que

$$Y(s) = \frac{1}{s+2} E(s), \quad \forall s \in D_x \cap \{s \in \mathbb{C} : s \neq -2\}, \quad (16.201)$$

Sustituyendo la Ecuación (16.200) en la Ecuación (16.201), y luego de algunos procedimientos algebraico se tiene que

$$H(s) = \frac{s}{s(s+2)+k}, \quad \forall \operatorname{Re}[s] > 0. \quad (16.202)$$

**7.2.b** De la Ecuación (16.202), se tiene que el polinomio característico es

$$D(s) = s^2 + 2s + k, \quad (16.203)$$

donde  $k > 0$ .

Tomando en cuenta el criterio de las raíces del polinomio característico (véase Definición 5.4 de la página 135), se tiene que como consecuencia de que las raíces que anulan al polinomio característico son

$$\begin{aligned} s_1 &= -1 + \sqrt{1-k}; \\ s_2 &= -1 - \sqrt{1-k}, \end{aligned} \quad (16.204)$$

el coeficiente  $k$  debe ser positivo para asegurar la estabilidad del sistema.

Note que si  $0 < k \leq 1$  las raíces son puramente reales. No obstante, si  $k > 1$  las raíces son complejas conjugadas y con parte real igual a  $-1$ .

**7.2.c** Al sustituir la variable  $s$  por  $j\omega$  en la Ecuación (16.202) se obtiene que

$$H(\omega) = \frac{j\omega}{(k-\omega^2)+j2\omega}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (16.205)$$

De la Ecuación (16.205), se tiene que la magnitud y fase de la respuesta del sistema viene dada respectivamente por

$$|H(\omega)| = \frac{|\omega|}{\sqrt{(k-\omega^2)^2 + 4\omega^2}}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (16.206)$$

y

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\omega) - \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{2\omega}{k-\omega^2} \right], & \forall 0 < |\omega| < \sqrt{k}; \\ 0, & \forall |\omega| = \sqrt{k}; \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\omega) - \pi \operatorname{sgn}(\omega) - \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{2\omega}{k-\omega^2} \right], & \forall |\omega| > \sqrt{k}. \end{cases} \quad (16.207)$$

La Ecuación (16.207), puede ser escrita como

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\omega) - \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{2\omega}{k-\omega^2} \right], & \forall 0 < |\omega| < \sqrt{k}; \\ 0, & \forall |\omega| = \sqrt{k}; \\ -\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\omega) - \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{2\omega}{k-\omega^2} \right], & \forall |\omega| > \sqrt{k}. \end{cases} \quad (16.208)$$

**7.3** Se tiene que la respuesta en frecuencia se obtiene evaluando la función de transferencia  $H(z)$  para  $z = e^{j\Omega}$ , lo cual denote a (véase Observación 7.11 de la página 193)

$$H(\Omega) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}} = \sum_{n=0}^{\infty} h[n](e^{j\Omega})^{-n}, \quad \forall z \in D_z, \quad (16.209)$$

donde al ser un sistema físicamente realizable su respuesta impulsiva es una función  $h[n] : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Al reexpresar la Ecuación (16.209), se tiene que debido al hecho de que  $h[n] : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$

$$H(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] \cos(\Omega n) - j \sum_{n=0}^{\infty} h[n] \sen(\Omega n), \quad \forall \Omega \in D_z. \quad (16.210)$$

Por otra parte, se tiene que si  $h[n] : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$

$$H(-\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] \cos(\Omega n) + j \sum_{n=0}^{\infty} h[n] \sen(\Omega n), \quad \forall \Omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (16.211)$$

Al comparar las Ecuaciones (16.210) y (16.211) se puede asegurar que

$$H(-\Omega) = \overline{H(\Omega)}, \quad \forall \Omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (16.212)$$

donde la barra superior significa el conjugado.

Además, se tiene que al denotar

$$H(\Omega) = |H(\Omega)| e^{j\Phi(\Omega)}, \quad \forall \Omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (16.213)$$

que al sustituir la Ecuación (16.213) en la Ecuación (16.212), arroja que

$$|H(-\Omega)| e^{j\Phi(-\Omega)} = |H(\Omega)| e^{-j\Phi(\Omega)}, \quad \forall \Omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (16.214)$$

En consecuencia, de la Ecuación (16.214), se asegura que

$$|H(-\Omega)| = |H(\Omega)|, \quad \forall \Omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (16.215a)$$

$$\Phi(-\Omega) = -\Phi(\Omega), \quad \forall \Omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (16.215b)$$

La Ecuación (16.215a) demuestra que la magnitud de la respuesta en frecuencia es una función par de la variable independiente  $\Omega$ , y la Ecuación (16.215b) demuestra que la fase de la respuesta en frecuencia es una función impar de la variable independiente  $\Omega$ .

## SOLUCIÓN DEL CAPÍTULO 8

8.1 Lo primero que debe determinarse son las octavas que existen entre  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Para esto puede emplearse la expresión,

$$\Delta\omega = \log_2 \left( \frac{10}{3} \right) \text{ oct.} \quad (16.216)$$

Al multiplicar la pendiente de  $18 \frac{\text{dB}}{\text{oct}}$  con  $\Delta\omega$  de (16.216), se obtiene

$$\Delta M = 18 \frac{\text{dB}}{\text{oct}} \log_2 \left( \frac{10}{3} \right) \text{ oct} = 18 \log_2 \left( \frac{10}{3} \right) \text{ dB.} \quad (16.217)$$

De (16.217) y teniendo la magnitud para  $\omega_1$ , se tiene que

$$M(\omega_2) = 20 \text{ dB} + 18 \log_2 \left( \frac{10}{3} \right) \text{ dB}.$$

**8.2** Al normalizar los términos independientes de cada factor de la función de transferencia se obtiene que

$$H(s) = \frac{1}{20^2} \frac{s-1}{(s+1) \left( \left( \frac{s}{20} \right)^2 + 1 \right)}. \quad (16.218)$$

Al evaluar (16.218) en  $s = j\omega$ , se tiene

$$H(j\omega) = \frac{1}{20^2} \frac{j\omega - 1}{(j\omega + 1) \left( 1 - \left( \frac{\omega}{20} \right)^2 \right)}. \quad (16.219)$$

**Parte i)** Ahora, al calcular la magnitud de (16.219) en dB, se obtiene que

$$M(\omega) = \frac{1}{20^2} \frac{\sqrt{1 + \omega^2}}{\sqrt{1 + \omega^2} \left| 1 - \left( \frac{\omega}{20} \right)^2 \right|}. \quad (16.220)$$

Obviamente, la magnitud está dada por

$$M(\omega) = \frac{1}{20^2} \frac{1}{\left| 1 - \left( \frac{\omega}{20} \right)^2 \right|} = \begin{cases} \frac{1}{20^2} \frac{1}{1 - \left( \frac{\omega}{20} \right)^2} & \forall \omega < 20, \\ \frac{1}{20^2} \frac{1}{\left( \frac{\omega}{20} \right)^2 - 1} & \forall \omega > 20. \end{cases} \quad (16.221)$$

Expresando (16.221) en dB, se puede afirmar que

$$M(\omega)_{\text{dB}} = \begin{cases} 20 \log_{10} \frac{1}{400} - 20 \log_{10} \left( 1 - \left( \frac{\omega}{20} \right)^2 \right) & \forall \omega < 20, \\ 20 \log_{10} \frac{1}{400} - 20 \log_{10} \left( \left( \frac{\omega}{20} \right)^2 - 1 \right) & \forall \omega > 20. \end{cases} \quad (16.222)$$

Estudiando las asíntotas a través de (16.222), se obtiene

$$M(\omega)_{\text{dB}} = \begin{cases} 20 \log_{10} \frac{1}{400} & \forall \omega \ll 20, \\ 20 \log_{10} \frac{1}{400} - 40 \log_{10} \left( \frac{\omega}{20} \right) & \forall \omega \gg 20. \end{cases} \quad (16.223)$$

De (16.223) se puede asegurar que el diagrama de magnitud para  $\omega \gg 20$ , tiene una pendiente de  $-40 \text{ dB/déc}$ .

Ahora, las décadas que existen entre la frecuencia de corte  $\omega_c = 20 \text{ rad/s}$  y  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ , está dada por

$$\Delta\omega = \log_{10} \left( \frac{100}{20} \right) = \log_{10}(5) \text{ déc.} \quad (16.224)$$

De (16.223) y (16.224),

$$M(100)_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \frac{1}{400} \text{ dB} - 40 \frac{\text{dB}}{\text{déc}} \log_{10}(5) \text{ déc} = -80 \text{ dB}.$$

**Parte ii)** Ahora, al calcular la fase de (16.219), se tiene

$$\text{Arg}(H(\omega)) = \text{Arg}(-1) + \text{Arg}(1 - j\omega) - \text{Arg}(1 + j\omega) - \text{Arg}\left(1 - \left(\frac{\omega}{20}\right)^2\right) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (16.225)$$

Debido al hecho de que se está considerando que  $\omega > 0$ , de (16.225), se tiene que

$$\Phi_H(\omega) = \pi - \text{tg}^{-1}(\omega) - \text{tg}^{-1}(\omega) - \pi u(\omega - 20) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (16.226)$$

donde  $u(\cdot)$  denota la función escalón unitario, y  $\Phi_H(\omega)$  denota la fase de la función de transferencia  $H(\omega)$ .

Como  $\omega = 100 \text{ rad/s}$  es mucho mayor que la frecuencia de corte  $\omega_c = 10 \text{ rad/s}$ , se tiene que el valor asintótico es

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \Phi_H(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left( \pi - \text{tg}^{-1}(\omega) - \text{tg}^{-1}(\omega) - \pi u(\omega - 20) \right) = -\pi,$$

lo cual implica que

$$\Phi_H(\omega)|_{100 \text{ rad/s}} = -\pi.$$

**8.3** De acuerdo a (8.95), se tiene que la forma canónica está dada por

$$H(s) = \frac{s - 1}{100^2(s + 1) \left( 1 + 2\frac{1}{4} \frac{s}{100} + \left( \frac{s}{100} \right)^2 \right)} \quad (16.227)$$

Reemplazando a  $s$  por  $j\omega$  en (16.227) se obtiene

$$H(\omega) = \frac{-1 + j\omega}{100^2(1 + j\omega) \left( 1 - \left( \frac{\omega}{100} \right)^2 + j2\frac{1}{4} \frac{\omega}{100} \right)}, \quad (16.228)$$

la cual

$$M(\omega) = |H(\omega)| = \frac{1}{100^2 \left[ \left( 1 - \left( \frac{\omega}{100} \right)^2 \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \frac{\omega}{100} \right)^2 \right]^{1/2}}, \quad (16.229)$$

y su magnitud en dB es

$$M(\omega)_{\text{dB}} = -20 \log_{10}(100^2) - 20 \log_{10} \left[ \left( 1 - \left( \frac{\omega}{100} \right)^2 \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \frac{\omega}{100} \right)^2 \right], \quad (16.230)$$

y cuyo análisis asintótico arroja que

$$\hat{M}(\omega)_{\text{dB}} = \begin{cases} -80, & \forall 0 < \omega \leq 100; \\ -80 - 40 \log_{10} \left( \frac{\omega}{100} \right), & \forall \omega > 100. \end{cases} \quad (16.231)$$

De (16.231) se tiene que como  $\omega_1$  está a 0,5 déc de 100 rad/s, entonces,  $\hat{M}(\omega_1)_{dB} = -100$ .

Por otra parte, en cuanto a la fase se tiene que de (16.228) se tiene que

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2\text{tg}^{-1}(\omega) - \text{tg}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{2}\frac{\omega}{100}}{1 - (\frac{\omega}{100})}\right], & \forall 0 < \omega \leq 100; \\ -2\text{tg}^{-1}(\omega) - \text{tg}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{2}\frac{\omega}{100}}{(\frac{\omega}{100}) - 1}\right], & \forall \omega > 100. \end{cases} \quad (16.232)$$

Del análisis asintótico ejecutado sobre (16.232), se tiene que

$$\hat{\Phi}(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \forall 0 < \omega \leq 0,1; \\ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \log_{10}(\omega/0,1), & \forall 0,1 < \omega \leq 1000; \\ -\frac{3\pi}{2}, & \forall \omega > 1000. \end{cases} \quad (16.233)$$

Para determinar la fase mediante la curva asintótica definida por (16.233), se tiene que determinar la frecuencia  $\omega_1$ , la cual está a 0,5 déc por encima de  $\omega_0 = 100$  rad/s.

Debido al hecho de que

$$\log \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega_1 = \omega_0 10^{1/2}. \quad (16.234)$$

Sustituyendo el valor de  $\omega_1$  dado por (16.234) en (16.233), se tiene que  $\hat{\Phi}(\omega_1) = \pi - \frac{\pi}{2} \log_{10}(1000 \times 10^{1/2})$ , el cual arroja como resultado que  $\hat{\Phi}(\omega_1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \frac{7}{2} = -\frac{5}{4}\pi$ .

**8.4.a** La Figura 16.15 muestra los comandos Scilab™ empleados para obtener el diagrama de Bode real presentado en la Figura 16.16.

```
-->s=poly(0,'s');
-->s=s/(2*pi);
-->H=syslin('c',10*(s-10)/(s+100));
-->bodew(H,0.01,10000);
```

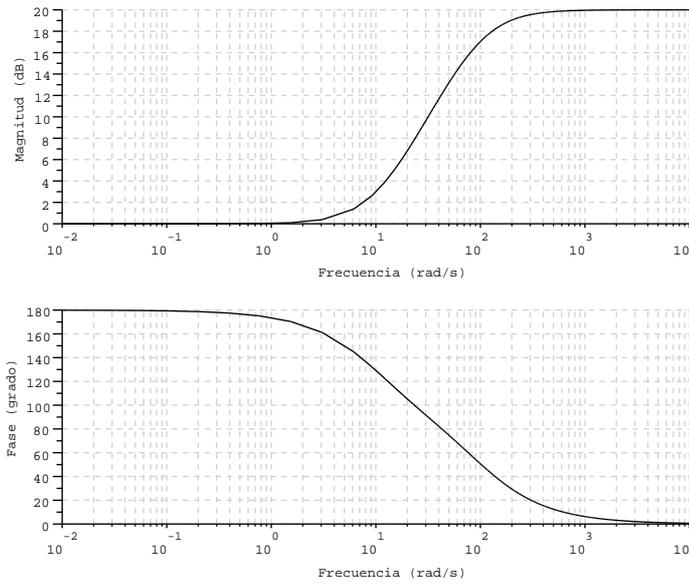
**Figura 16.15.** Comandos Scilab™ para construir el diagrama de Bode real en magnitud y fase del Problema 8.4

Note que para ejecutar los comandos de la Figura 16.15 debe ejecutarse previamente el macro `bodew.sci` a través la barra de menú en la opción FILE y luego Execute.

La Figura 16.16 de la página 431 muestra los diagramas de Bode en magnitud y en fase generados por el Scilab™.

**8.4.b** Al reexpresar la Ecuación (8.97) se tiene que

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2(200t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (16.235)$$



**Figura 16.16.** Diagrama de Bode real en magnitud y fase del Problema 8.4

**Tabla 16.1.** Valores leídos del diagrama de Bode de la Figura 16.16

Valores leídos		
Frecuencia (rad/s)	Magnitud (dB)	Fase (°)
0,01	0	180
200	19	30

Ahora, se puede asegurar que

$$x(t) = \lim_{\omega_0 \downarrow 0} \frac{1}{2} \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \cos(200t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (16.236)$$

y debido al hecho de que el diagrama de Bode está definido únicamente en el dominio de la frecuencia positiva, la expresión de la Ecuación (16.236) puede ser empleada considerando que la magnitud y fase del sistema para una frecuencia muy cercana a 0 rad/s.

Por otra parte, de acuerdo a la Figura 16.16, se tiene

De la Tabla 16.1 se puede inferir que para un valor de frecuencia positivo y cercano a 0 rad/s,

$$\lim_{\omega_0 \downarrow 0} M_{dB}(\omega_0) = 0\text{dB}, \quad \Rightarrow \quad \lim_{\omega_0 \downarrow 0} M(\omega_0) = 1, \quad (16.237)$$

y

$$\lim_{\omega_0 \downarrow 0} \Phi(\omega_0) = 180^\circ = \pi \text{ rad} \quad (16.238)$$

Además, de la Tabla 16.1 se tiene que

$$M_{dB}(200) = 19\text{dB}, \quad \Rightarrow \quad M(200) = 10^{19/20} \cong 8,9125, \quad (16.239)$$

y

$$\Phi(200) = 30^\circ = 30^\circ \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6} \text{ rad.} \quad (16.240)$$

Debido al hecho de que el sistema es lineal, se puede aplicar superposición, además del Corolario 7.1 de la página 184, lo que implica que

$$y(t) = \lim_{\omega_0 \downarrow 0} \frac{1}{2} M(\omega_0) \cos(\omega_0 t + \Phi(\omega_0)) + \frac{1}{2} M(200) \cos(200t + \Phi(200)), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (16.241)$$

lo cual aproximadamente converge a

$$y(t) \cong -\frac{1}{2} + 4,4563 \cos\left(200t + \frac{\pi}{6}\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (16.242)$$

## SOLUCIÓN DEL CAPÍTULO 9

**9.1.a** Aplicando los comandos de la Figura 16.17 se obtiene la gráfica en magnitud de la respuesta del sistema y cuya gráfica se muestra en la Figura 16.18.

```
-->deff("[Z]=z(x)", "Z=exp(%i*x*pi)")
-->deff("[M]=f(x)", "M=abs((z(x)+1)/(z(x)-1))")
-->x=[0.1:0.005:6]*pi/10;
-->fplot2d(x, f);
-->xtitle(' ', "Omega", "Magnitud")
```

**Figura 16.17.** Comandos Scilab™ para obtener el diagrama en magnitud de la respuesta en frecuencia del Problema 9.1.a

Ahora, para obtener el diagrama en fase de la respuesta en frecuencia se debe aplicar los comandos de la Figura 16.19, los cuales arrojan la gráfica mostrada en la Figura 16.20.

**9.1.b** Aplicando el Corolario 7.4 de la página 192 se obtiene que

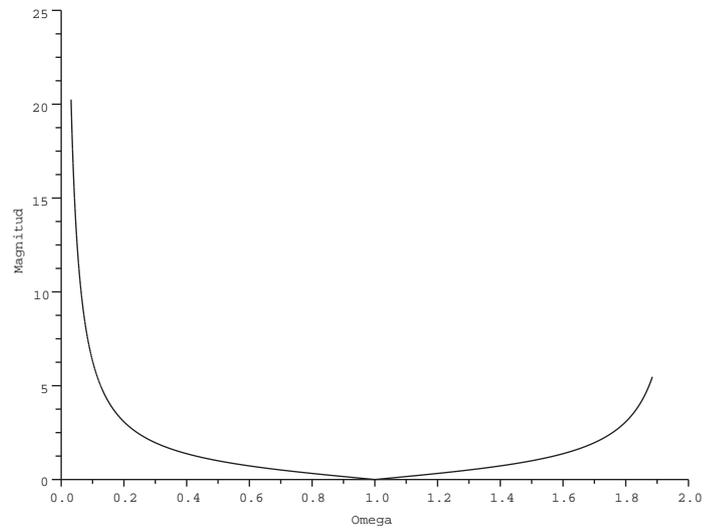
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A |H(e^{j0,5})| \text{sen} \left[ 1,5n + \Phi_h(e^{j0,5}) \right] \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (16.243)$$

donde, de las Figuras 16.18 y 16.20 se tiene que

$$\begin{aligned} M(0,5) &= |H(e^{j0,5})| \cong 1,2 \\ \Phi(0,5) &= \Phi_h(e^{j0,5}) = -\frac{\pi}{2} \text{ rad} \end{aligned} \quad (16.244)$$

Sustituyendo los valores indicados por la Ecuación (16.244) en la Ecuación (16.243) se obtiene que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 1,2 \text{sen} \left( 0,5n - \frac{\pi}{2} \right) \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (16.245)$$



**Figura 16.18.** Diagrama en magnitud de la respuesta en frecuencia del sistema

```

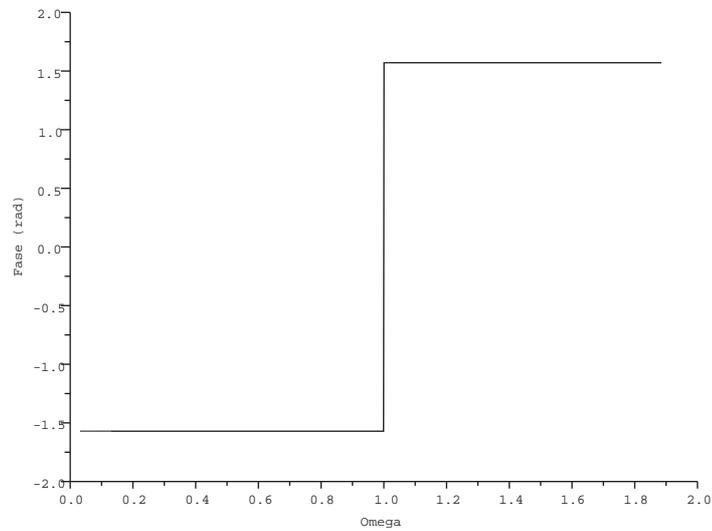
-->deff("[Z]=z(x)", "Z=exp(%i*x*pi)")
-->deff("[R]=r(x)", "R=real((z(x)+1)/(z(x)-1))")
-->deff("[I]=i(x)", "I=imag((z(x)+1)/(z(x)-1))")
-->deff("[A]=a(x)", "A=atan(i(x),r(x))")
-->x=[0.1:0.005:6]*%pi/10;
-->fplot2d(x,a);
-->xtitle('', "Omega", "Fase (rad)")

```

**Figura 16.19.** Comandos Scilab™ para obtener el diagrama en fase de la respuesta en frecuencia del Problema 9.1.a

**9.2.a** Aplicando los comandos de la Figura 16.21 se obtiene la gráfica en magnitud de la respuesta del sistema y cuya gráfica se muestra en la Figura 16.22.

Ahora, para obtener el diagrama en fase de la respuesta en frecuencia se debe aplicar los comandos de la Figura 16.23, los cuales arrojan la gráfica mostrada en la Figura 16.24.



**Figura 16.20.** Diagrama en fase de la respuesta en frecuencia del sistema

```

-->deff("[Z]=z(x)", "Z=exp(%i*x*pi)")
-->deff("[M]=f(x)", "M=abs(9.4*(z(x)-1)/(10.4*z(x)-8.4))")
-->x=[0:0.005:10]*%pi/10;
-->fplot2d(x, f);
-->xtitle(' ', "Omega", "Magnitud")

```

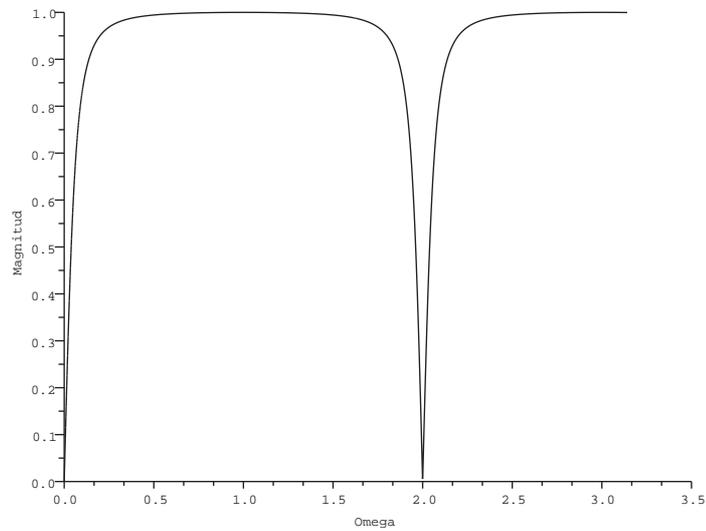
**Figura 16.21.** Comandos Scilab™ para obtener el diagrama en magnitud de la respuesta en frecuencia del Problema 9.2

**9.2.b** Aplicando el Corolario 7.3 de la página 191 se obtiene que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A |H(e^{j0.5})| \cos[0.5n + \Phi_h(e^{j0.5})] \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (16.246)$$

donde, de las Figuras 16.22 y 16.24 se tiene que

$$\begin{aligned} M(0,5) &= |H(e^{j0.5})| \cong 1 \\ \Phi(0,5) &= \Phi_h(e^{j0.5}) = 0,11 \text{ rad} \end{aligned} \quad (16.247)$$



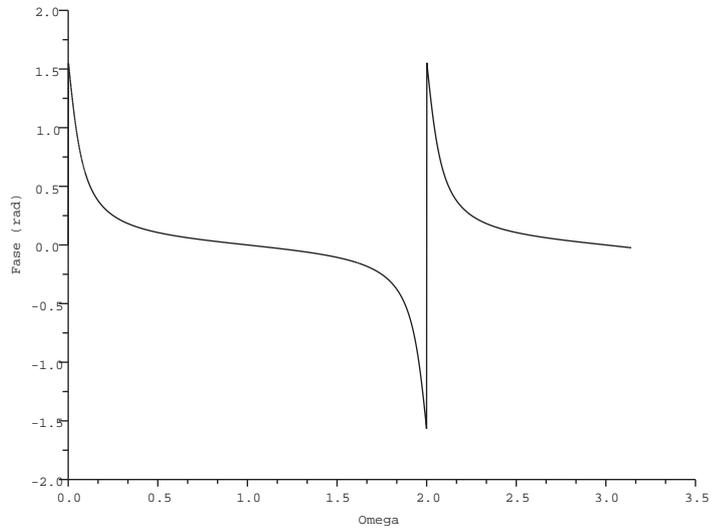
**Figura 16.22.** Diagrama en magnitud de la respuesta en frecuencia del sistema

```
-->deff("[Z]=z(x)", "Z=exp(%i*x*pi)")
-->deff("[R]=r(x)", "R=real(9.4*(z(x)-1)/(10.4*z(x)-8.4))")
-->deff("[I]=i(x)", "I=imag(9.4*(z(x)-1)/(10.4*z(x)-8.4))")
-->deff("[A]=a(x)", "A=atan(i(x), r(x))")
-->x=[0:0.005:10]*%pi/10;
-->fplot2d(x, a);
-->xtitle(' ', "Omega", "Fase (rad)")
```

**Figura 16.23.** Comandos Scilab™ para obtener el diagrama en fase de la respuesta en frecuencia del Problema 9.2

Sustituyendo los valores indicados por la Ecuación (16.247) en la Ecuación (16.246) se obtiene que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(0,5n - 0,11)\delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (16.248)$$



**Figura 16.24.** Diagrama en fase de la respuesta en frecuencia del sistema

**SOLUCIÓN DEL CAPÍTULO 10**

**10.1** Claramente puede apreciarse que la señal  $f(t)$  tiene una simetría impar oculta, la cual obviamente es determinada al sumarle una componente continua de valor  $-k/2$ . En consecuencia, los coeficientes  $a_n = 0$  para todo  $n > 0$ .

Debido a este hecho, es suficiente calcular los coeficientes  $b_n$  para determinar la serie trigonométrica de Fourier, conociendo obviamente que  $a_0 = k$ .

Se tiene que

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt \tag{16.249}$$

Empleando (10.234) en (16.249), se tiene que

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} k \text{sen}(n\omega_0 t) dt = \frac{2k}{n\omega_0 T} \cos(n\omega_0 t) \Big|_{T/2}^0,$$

la cual luego de unos simples cálculos, se obtiene que

$$b_n = \frac{k}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)] = \begin{cases} \frac{2k}{n\pi}, & \forall n \text{ impar;} \\ 0, & \forall n \text{ par.} \end{cases} \tag{16.250}$$

En consecuencia, como resultado de (16.250) se tiene que la serie trigonométrica de Fourier de la señal  $f(t)$  viene dada por

$$f(t) = \frac{k}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{2k}{n\pi} \text{sen}(n\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

10.2 Obviamente de (10.235) se tiene que

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{1}{j2\pi n}, & \forall n = \pm 1, \pm 3, \pm 5; \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases} \quad (16.251)$$

Por otra parte, de la Observación 10.10 de la página 278 se sabe que

$$a_n = \alpha_n + \alpha_{-n}. \quad (16.252a)$$

$$b_n = j(\alpha_n - \alpha_{-n}). \quad (16.252b)$$

Sustituyendo (16.251) en (16.252a) y (16.252b), se consigue que

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{j2\pi n} + \frac{1}{j2\pi(-n)}, & \forall n = \pm 1, \pm 3, \pm 5; \\ 0, & \text{en otros casos,} \end{cases} \quad (16.253a)$$

lo cual implica que  $a_n = 0$  para todo  $n \geq 0$ .

Por otra parte,

$$b_n = \begin{cases} j \left[ \frac{1}{j2\pi n} - \frac{1}{j2\pi(-n)} \right], & \forall n = \pm 1, \pm 3, \pm 5; \\ 0, & \text{en otros casos,} \end{cases} \quad (16.253b)$$

lo que implica que

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n\pi}, & \forall n = \pm 1, \pm 3, \pm 5; \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases} \quad (16.253c)$$

Teniendo entonces los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$ , se puede afirmar que

$$f(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^5 \frac{1}{n\pi} \text{sen}(n\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (16.254)$$

10.3 De acuerdo al Teorema 10.11 de la página 289, la potencia promedio normalizada de una señal periódica real está dada por

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2. \quad (16.255)$$

Ahora bien, al identificar los coeficientes  $\alpha_n$  de (10.236) se tiene que

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi 2^{|n|}}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (16.256)$$

De (16.255) se tiene que

$$P = \alpha_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2. \quad (16.257)$$

Sustituyendo (16.256) en (16.257), se consigue que

$$P = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi 2^n}\right)^2. \quad (16.258)$$

Después de algunos sencillos cálculos sobre (16.258) se obtiene que

$$P = \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n. \quad (16.259)$$

Según Brea (2006, Pág. 65), se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a}, \quad \forall |a| < 1. \quad (16.260)$$

Empleando (16.260) en (16.259), se llega claramente a que

$$P = \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{6\pi^2} = \frac{5}{12\pi^2}. \quad (16.261)$$

**10.4** De acuerdo al binomio de Newton, se tiene que

$$(a+b)^q = \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} a^{q-k} b^k, \quad \forall q \in \mathbb{N}. \quad (16.262)$$

Por otra parte, se tiene que

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (16.263)$$

Aplicando (16.263) en (16.262), se obtiene que

$$f(t) = \cos^q(\omega_0 t) = \sum_{k=0}^q \frac{1}{2^q} \binom{q}{k} (e^{j\omega_0 t})^{q-k} (e^{-j\omega_0 t})^k, \quad \forall t \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{N}, \quad (16.264)$$

la cual al simplificar (16.264), se llega a que

$$f(t) = \cos^q(\omega_0 t) = \frac{1}{2^q} \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} e^{j(q-2k)\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{N}. \quad (16.265)$$

Note que los coeficientes de la serie exponencial de Fourier están dados por

$$\alpha_{q-2k} = \frac{1}{2^q} \binom{q}{k}, \quad \forall 0 \leq k \leq q.$$

Finalmente, de (16.265) se obtiene que

$$F(\omega) = 2\pi \frac{1}{2^q} \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} \delta(\omega - (q-2k)\omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{N}.$$

**10.5** De acuerdo a los datos suministrados del problema, se tiene que si  $g(t) = f(t - \frac{T}{4})$ . Entonces,  $f(t) = g(t + \frac{T}{4})$ .

Por otra parte, aplicando (16.269) en (10.238) se obtiene que

$$g(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{2\pi n^2} e^{jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (16.266)$$

Como  $f(t) = g(t + \frac{T}{4})$ , entonces empleando (16.266) se tiene que

$$f(t) = g(t)|_{t+\frac{T}{4}} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{2\pi n^2} e^{jn\omega_0(t+\frac{T}{4})}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (16.267)$$

la cual luego de unas pocas operaciones se obtiene que

$$f(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{e^{jn\pi/2}}{2\pi n^2} e^{jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

**10.6** Aplicando la propiedad de derivación, se puede afirmar en este caso que si  $g(t) = \frac{df(t)}{dt}$ , entonces,

$$\alpha_n^{[g]} = jn\omega_0 \alpha_n^{[f]}. \quad (16.268)$$

Por otra parte, como

$$G(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^{[g]} \delta(\omega - n\omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (16.269)$$

Al comparar (10.239) con (16.269), se obtiene que

$$\alpha_n^{[g]} = \begin{cases} \frac{1}{j2\pi nT}, & \forall n \text{ impar}; \\ 0, & \forall n \text{ par}. \end{cases} \quad (16.270)$$

Al aplicar (16.270) en (16.268), se tiene que

$$\alpha_n^{[f]} = \begin{cases} \frac{1}{-4\pi^2 n^2}, & \forall n \text{ impar}; \\ 0, & \forall n \text{ par distinto de cero}. \end{cases} \quad (16.271)$$

Debido al hecho de que la componente DC es igual a 2, se puede afirmar que

$$f(t) = 2 - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

10.7 Como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^{[f]} e^{jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (16.272a)$$

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^{[g]} e^{jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (16.272b)$$

y

$$g(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (16.272c)$$

entonces, sustituyendo (16.272a) y (16.272b) en (16.272c) se tiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^{[g]} e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n^2 \omega_0^2 \alpha_n^{[f]} e^{jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (16.273)$$

En consecuencia

$$\alpha_n^{[g]} = -n^2 \omega_0^2 \alpha_n^{[f]}. \quad (16.274)$$

Ahora, de (10.240) se tiene que

$$g_0(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \frac{4k}{t} \delta(t) - \frac{4k}{T} \delta(t - T/2), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (16.275)$$

Al calcular  $\alpha_n^{[g]}$  de  $g(t)$  a partir de (16.275), se tiene que

$$\alpha_n^{[g]} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}^-}^{\frac{T}{2}^+} \left[ \frac{4k}{T} \delta(t) - \frac{4k}{T} \delta(t - T/2) \right] e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (16.276)$$

Aplicando la Teoría de Distribución (Brea, 2006) en (16.276), se tiene

$$\alpha_n^{[g]} = \frac{4k}{T^2} (1 - e^{-jn\pi}) = \begin{cases} \frac{8k}{T^2}, & \forall n \text{ impar;} \\ 0, & \forall n \text{ par.} \end{cases} \quad (16.277)$$

Aplicando (16.277) en (16.274), se obtiene

$$\alpha_n^{[f]} = \begin{cases} \frac{2k}{-n^2 \pi^2}, & \forall n \text{ impar;} \\ 0, & \forall n \text{ par distinto de cero.} \end{cases} \quad (16.278)$$

Por otra parte, obviamente  $\alpha_0^{[f]} = k/2$ , lo cual permite asegurar que

$$f(t) = \frac{k}{2} - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{2k}{n^2 \pi^2} e^{jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (16.279)$$

Finalmente, se tiene de (16.279) que

$$F(\omega) = \pi k \delta(\omega) - \frac{4k}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \delta(\omega - n\omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

## SOLUCIÓN DEL CAPÍTULO 11

**11.1** Claramente se tiene que la onda fundamental tiene una frecuencia  $\omega_0 = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

Ahora bien, la función de transferencia para ese valor de frecuencia es

$$H(\omega_0) = \frac{1}{1+j\omega} \Big|_{\omega_0} = \frac{1}{1+j2} = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-j\text{tg}^{-1}(2)}. \quad (16.280)$$

De (16.280) se tiene que el desfase que se produce en la onda de frecuencia fundamental es de  $\Delta\Phi = -\text{tg}^{-1}(2)\text{rad}$ .

Ahora, se conoce que  $\Phi = \omega_0 t$ , en consecuencia,  $\Delta\Phi = \omega_0 \Delta t$ , donde  $\Delta t$  denota el retardo que se produce en la onda fundamental.

En consecuencia,

$$\Delta t = \frac{\Delta\Phi}{\omega_0} = \frac{-\text{tg}^{-1}(2)\text{rad}}{2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = -\frac{\text{tg}^{-1}(2)}{2} \text{ s}. \quad (16.281)$$

**11.2.a** Al escribir la Ecuación (11.59) en términos exponenciales, se tiene que

$$x(t) = \cos^3(10t) = \left[ \frac{e^{j10t} + e^{-j10t}}{2} \right]^3, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (16.282)$$

Por otra parte, se tiene que

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \quad (16.283)$$

Aplicando la Ecuación (16.283) en la Ecuación (11.59), se obtiene que

$$x(t) = \frac{1}{8} \left[ e^{j30t} + 3e^{j10t} + 3e^{-j10t} + e^{-j30t} \right], \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (16.284)$$

lo que implica que su transformada de Fourier está dada por

$$X(\omega) = 2\pi \left[ \frac{1}{8} \delta(\omega - 30) + \frac{3}{8} \delta(\omega - 10) + \frac{3}{8} \delta(\omega + 10) + \frac{1}{8} \delta(\omega + 30) \right], \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (16.285)$$

la cual puede ser expresada por

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{\substack{n=-3 \\ n \text{ impar}}}^3 \frac{|n|}{8} \delta(\omega - 10n), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (16.286)$$

Ahora, se sabe que  $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$ , y  $f(x)\delta(x - x_0) = f(x_0)\delta(x - x_0)$ . Entonces, se tiene

$$Y(\omega) = 2\pi \sum_{\substack{n=-3 \\ n \text{ impar}}}^3 \frac{10|n|}{80 - 3200n^2 + j80n} \delta(\omega - 10n), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (16.287)$$

De la Ecuación (16.287) se puede identificar que

$$\alpha_n = \frac{10|n|}{80 - 3200n^2 + j80n}, \quad \forall n \in \{-3, -1, 1, 3\}. \quad (16.288)$$

**11.2.b** De la Ecuación (16.284) de la página 441 se tiene que los coeficiente  $\alpha_n$  de la señal de excitación están dados por

$$\alpha_n = \frac{|n|}{8}, \quad \forall n \in \{-3, -1, 1, 3\}. \quad (16.289)$$

Aplicando el Teorema 10.11 de la página 289 (Teorema de Parseval), se tiene que

$$P = 2 \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^3 \left(\frac{n}{8}\right)^2 = \frac{5}{16} W = 0,3125W \quad (16.290)$$

**11.2.c** De la Ecuación (16.288) se tiene que

$$|\alpha_n|^2 = \frac{100n^2}{(80 - 3200n^2)^2 + 6400n^2}, \quad \forall n \in \{-3, -1, 1, 3\}. \quad (16.291)$$

Aplicando nuevamente el Teorema 10.11 se tiene que la potencia normalizada de la señal de respuesta es

$$p = 2 \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^3 \frac{100n^2}{(80 - 3200n^2)^2 + 6400n^2} \cong 11,357 \mu W \quad (16.292)$$

**11.3.a** Al desarrollar el binomio, se tiene

$$x(t) = \sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t) + 2 \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (16.293)$$

lo que permite simplificar a

$$x(t) = 1 + \sin(2\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (16.294)$$

Al escribir la Ecuación (16.294) en términos exponenciales,

$$x(t) = 1 + \frac{1}{j2} e^{j2\omega_0 t} + \frac{1}{-j2} e^{-j2\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (16.295)$$

la cual puede ser expresada también como

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2} e^{j3\pi/4} e^{j2\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j3\pi/4} e^{-j2\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (16.296)$$

y en consecuencia la transformada de Fourier de  $x(t)$  es

$$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega) + 2\pi\frac{1}{2}e^{j3\pi/4}\delta(\omega - 2\omega_0) + 2\pi\frac{1}{2}e^{-j3\pi/4}\delta(\omega + 2\omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (16.297)$$

Por otra parte, al evaluar la Ecuación (11.60) en  $\omega = 0$ ,  $\omega = 2\omega_0$  y  $\omega = -2\omega_0$ , se tiene que

$$\begin{aligned} H(0) &= 1; \\ H(2\omega_0) &= \frac{1}{2}e^{-j\pi/4}; \\ H(-2\omega_0) &= \frac{1}{2}e^{j\pi/4}. \end{aligned} \quad (16.298)$$

Como  $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$ , entonces, de las Ecuaciones (16.297) y (16.298), se consigue

$$Y(\omega) = 2\pi\delta(\omega) + 2\pi\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}\frac{1}{2}e^{j3\pi/4}\delta(\omega - 2\omega_0) + 2\pi\frac{1}{2}e^{j\pi/4}\frac{1}{2}e^{-j3\pi/4}\delta(\omega + 2\omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (16.299)$$

la cual al ser simplificada

$$Y(\omega) = 2\pi\delta(\omega) + 2\pi\frac{1}{4}e^{j\pi/2}\delta(\omega - 2\omega_0) + 2\pi\frac{1}{4}e^{-j\pi/2}\delta(\omega + 2\omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (16.300)$$

Identificando en la Ecuación (16.300) los coeficientes de la serie exponencial de Fourier, se obtiene que

$$y(t) = 1 + \frac{1}{4}e^{j\pi/2}e^{j2\omega_0 t} + \frac{1}{4}e^{-j\pi/2}e^{-j2\omega_0 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (16.301)$$

lo que conduce a escribir

$$y(t) = 1 + \frac{1}{-j4}e^{j2\omega_0 t} + \frac{1}{j4}e^{-j2\omega_0 t} = 1 - \frac{1}{2}\text{sen}(2\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (16.302)$$

**11.3.b** Aplicando el Corolario 10.3 de la página 290 y tomando en cuenta la Ecuación (16.294),

$$P = \frac{1}{4}(1)^2 + \frac{1}{2}(1)^2 = \frac{3}{4}W. \quad (16.303)$$

**11.3.c** Aplicando el Corolario 10.3 nuevamente a la Ecuación (16.302), se tiene

$$P = \frac{1}{4}(1)^2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}W. \quad (16.304)$$

## SOLUCIÓN DEL CAPÍTULO 12

**12.1.a** De acuerdo a las relaciones definidas, la respuesta del sistema ante una señal  $x_1(t)$  es

$$y_1(t) = x_1(t) + u[x_1(t)]. \quad (16.305)$$

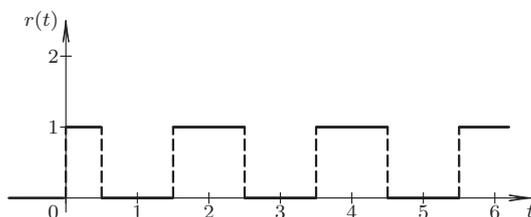
Suponga ahora que se cuenta con una señal de excitación dada por  $kx_1(t)$ , con  $k > 0$ , que de ser lineal el sistema la respuesta debe ser  $ky_1(t)$

Al aplicar la señal de excitación  $kx_1(t)$  al sistema se obtiene que

$$y(t) = kx_1(t) + u[kx_1(t)] = kx_1(t) + u[x_1(t)] \neq ky_1(t), \quad (16.306)$$

lo que implica que el sistema es no lineal.

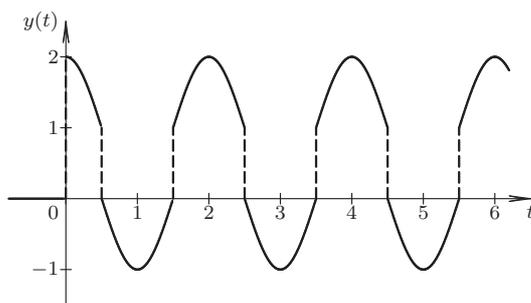
**12.1.b** Al evaluar la Ecuación (12.29) cuando la señal de excitación es la señal de la Ecuación (12.30), se obtiene



**Figura 16.25.** Respuesta  $r(t)$

Observe que los instantes en donde se producen los cambios de niveles de la curva mostrada en la Figura 16.25 son  $t \in \{x \in \mathbb{R} : k + 0,5\}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

**12.1.c** Debido a que  $y(t) = x(t) + r(t)$ , se tiene que la respuesta del sistema es la suma de las curvas de la Figura 16.25 y la señal definida por la Ecuación (12.30), obteniéndose la Figura 16.26 de la página 444.



**Figura 16.26.** Respuesta  $y(t)$

### SOLUCIÓN DEL CAPÍTULO 13

**13.1.a** Debido a que la señal  $p(t)$  es una señal periódica de simetría par y además de simetría de media onda, es decir, la señal portadora  $p(t)$  posee simetría de cuarto de onda par, se tiene que

$$p(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (16.307)$$

donde se tiene que  $\omega_0 = 100$  rad/s.

Por otra parte se tiene que

$$\mathcal{F}[x(t) \cos(n\omega_0 t)] = \frac{1}{2} X(\omega + n\omega_0) + \frac{1}{2} X(\omega - n\omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (16.308)$$

donde  $n \in \mathbb{N}$ .

Como  $y(t) = x(t)p(t)$ . Entonces, se puede asegurar que

$$\mathcal{F}[y(t)] = \mathcal{F}\left[x(t) \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t)\right], \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (16.309)$$

lo que implica que al aplicar la Ecuación (16.308) en la Ecuación (16.309), se puede afirmar que

$$Y(\omega) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{a_n}{2} [X(\omega + n\omega_0) + X(\omega - n\omega_0)], \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (16.310)$$

Ahora, para la determinación de  $a_n$ , se puede emplear muchos enfoques. Sin embargo, se tiene que al sumar uno para todo  $t \in \mathbb{R}$ , se afecta únicamente la componente continua de la señal  $p(t)$ , quedando entonces que

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} 2 \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{4}{n\pi} \text{sen}(n\pi/2), \quad \forall n \in \mathbb{N}_+. \quad (16.311)$$

Por otra parte, se tiene que  $a_0 = 0$ .

Sustituyendo la Ecuación (16.311) en la Ecuación (16.310), se consigue que

$$Y(\omega) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \text{sen}(n\pi/2) [X(\omega + n\omega_0) + X(\omega - n\omega_0)], \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (16.312)$$

**13.1.b** De acuerdo a la relación entre la salida  $z(t)$  y la entrada  $y(t)$ , se puede afirmar que

$$Y(\omega) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^3 \frac{2}{n\pi} \text{sen}(n\pi/2) [X(\omega + n\omega_0) + X(\omega - n\omega_0)], \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (16.313)$$

debido al hecho de que la función de transferencia  $H(\omega)$ , deja pasar sin alteración para los casos de  $n = 1, 3$ , anulando el resto.

**13.2.a** Se sabe que

$$\mathcal{F}[x(t) \cos(\omega_0 t)] = \frac{1}{2} X(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (16.314)$$

donde en este caso  $\omega_0 = 100 \text{ rad/s}$ .

Por otra parte, se tiene que

$$X(\omega) = \mathcal{F}[1 + \text{sen}(10t)] = \mathcal{F}[1_t] + \mathcal{F}[\text{sen}(10t)], \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (16.315)$$

donde se denota a  $1_t$  a la función de valor constante igual a uno para todo el dominio  $t$ . Es decir,

$$1_t = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (16.316)$$

Sustituyendo la transformada de Fourier (TF) en la Ecuación (16.314), se obtiene que

$$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega) - j\pi\delta(\omega - 10) + j\pi\delta(\omega + 10), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (16.317)$$

Al emplear la Ecuación (16.317) en la Ecuación (16.314), se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(t)\cos(\omega_0 t)] &= \pi\delta(\omega + \omega_0) - j\frac{\pi}{2}\delta(\omega + \omega_0 - 10) + j\frac{\pi}{2}\delta(\omega + \omega_0 + 10) - \\ &\quad \pi\delta(\omega - \omega_0) + j\frac{\pi}{2}\delta(\omega - \omega_0 - 10) - j\frac{\pi}{2}\delta(\omega - \omega_0 + 10), \end{aligned} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (16.318)$$

**13.2.b** En el caso de que la señal portadora sea una función seno, se tiene que

$$\mathcal{F}[x(t)\sin(\omega_0 t)] = \frac{1}{j2}X(\omega - \omega_0) - \frac{1}{j2}X(\omega + \omega_0), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (16.319)$$

Sustituyendo la Ecuación (16.317) en la Ecuación (16.319), se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(t)\sin(\omega_0 t)] &= \frac{\pi}{j}\delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{2}\delta(\omega - \omega_0 - 10) + \frac{\pi}{2}\delta(\omega - \omega_0 + 10) + \\ &\quad \frac{\pi}{j}\delta(\omega + \omega_0) - \frac{\pi}{2}\delta(\omega + \omega_0 - 10) + \frac{\pi}{2}\delta(\omega + \omega_0 + 10), \end{aligned} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (16.320)$$

## SOLUCIÓN DEL CAPÍTULO 14

**14.1** La relación que define una transformación bilineal entre las variables  $s$  y  $z$ , está definida por

$$s = \frac{2}{h} \frac{z-1}{z+1}, \quad \forall z \neq -1, \quad (16.321)$$

donde  $h$  es el paso de discretización.

Al sustituir  $s$  de acuerdo con la relación definida por la Ecuación (16.321) en la función de transferencia mostrada por la Ecuación (14.90), se tiene luego de algunos procedimientos algebraicos que

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z+1}{k_1 z + k_2}, \quad (16.322)$$

donde  $k_1 = 1 + \frac{2RC}{h}$  y  $k_2 = 1 - \frac{2RC}{h}$ .

Tomando en cuenta que las condiciones iniciales del sistema son cero, se tiene que de la Ecuación (16.322)

$$k_1 z Y(z) + k_2 Y(z) = X(z) + z X(z). \quad (16.323)$$

Al dividir toda la Ecuación (16.323) entre  $k_1 z$ , y luego determinando la antitransformada  $\mathcal{L}$ , se obtiene que

$$y[n] = \frac{1}{k_1} (x[n] + x[n-1]) - \frac{k_2}{k_1} y[n-1], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (16.324)$$

**14.2** De acuerdo a las condiciones impuestas para el muestreo de la señal, se tiene que la máxima frecuencia de la señal  $x(t)$  es  $f_{\text{máx}} = 100$  kHz.

En consecuencia, la señal debe ser muestreada según el teorema de muestreo (Teorema 13.1 de la página 339), al menos con una tasa de muestreo del doble de la frecuencia máxima. Esto significa que la frecuencia de muestreo debe ser por lo menos  $\tilde{f} = 200$  kHz.

Si se considera que la frecuencia de muestreo es  $\tilde{f} = 200\text{kHz}$ . Entonces, el paso de discretización es

$$h = \frac{1}{200\text{kHz}} = 5\mu\text{s}. \quad (16.325)$$

Tomando en cuenta la Ecuación (16.325) y sabiendo que la frecuencia de corte  $f_c = 20\text{kHz}$ , se tiene que

$$\Omega_o = 2\text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega_c h}{2}\right) = 2\text{tg}^{-1}(\pi f_c h) = 2\text{tg}^{-1}(\pi 20\text{kHz} 5\mu\text{s}). \quad (16.326)$$

Resultando,

$$\Omega_o = 2\text{tg}^{-1}(0, 1\pi) \cong 0.6087916\text{rad}. \quad (16.327)$$

## SOLUCIÓN DEL CAPÍTULO 15

15.1 Considere la secuencia  $f_m$  definida por

$$f_m = \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}\} \quad (16.328)$$

Al emplear la notación definida en la Subsección 15.5.3, se tiene que la secuencia de posición par de  $f_m$  está definida por

$$g_m = \{f_0, f_2, f_4, f_6, f_8, f_{10}\}, \quad (16.329)$$

donde su secuencia de posición par de  $g_m$  es

$$a_m = \{f_0, f_4, f_8\}, \quad (16.330)$$

y la secuencia de posición impar de  $g_m$  es

$$b_m = \{f_2, f_6, f_{10}\}. \quad (16.331)$$

Por otra parte, se tiene que la secuencia de posición impar de  $f_m$  viene dada por

$$h_m = \{f_1, f_3, f_5, f_7, f_9, f_{11}\}, \quad (16.332)$$

donde la secuencia de posición par de  $h_m$  es

$$c_m = \{f_1, f_5, f_9\}, \quad (16.333)$$

y la secuencia de posición impar de  $h_m$  es definida por

$$d_m = \{f_3, f_7, f_{11}\}. \quad (16.334)$$

Para poder iniciar el cálculo de la FFT se debe determinar la TDF de  $a_m$ ,  $b_m$ ,  $c_m$  y  $d_m$ , para lo cual se empleará el enfoque matricial de la TDF.

Según la Proposición 15.1 de la página 377, la TDF de una secuencia de datos  $f_m$  es definida por

$$\mathbf{F} = \mathbf{W}_N \mathbf{f}. \quad (16.335)$$

Para el caso de  $a_m$ ,  $b_m$ ,  $c_m$  y  $d_m$ ,  $N=3$ , lo que permite definir

$$\mathbf{W}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_3^0 & \mathbf{W}_3^0 & \mathbf{W}_3^0 \\ \mathbf{W}_3^0 & \mathbf{W}_3^1 & \mathbf{W}_3^2 \\ \mathbf{W}_3^0 & \mathbf{W}_3^2 & \mathbf{W}_3^4 \end{pmatrix} \quad (16.336)$$

Al reemplazar  $\mathbf{W}_3 = e^{-j2\pi/3}$  en la Ecuación (16.336), ésta arroja

$$\mathbf{W}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-j2\pi/3} & e^{-j4\pi/3} \\ 1 & e^{-j4\pi/3} & e^{-j8\pi/3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-j2\pi/3} & e^{-j\pi/3} \\ 1 & e^{-j\pi/3} & e^{-j2\pi/3} \end{pmatrix}. \quad (16.337)$$

Empleando los siguientes comandos Scilab™ se obtienen las TDF de las secuencias  $a_m$ ,  $b_m$ ,  $c_m$  y  $d_m$ , y cuyos resultados son reportados en la Figuras 16.27 y 16.28 de la página 449.

```
-->W3=[1,1,1;
        1,exp(-2*i*pi/3),exp(-1*i*pi/3);
        1,exp(-1*i*pi/3),exp(-2*i*pi/3)];

-->a=[6;2;0];

-->A=W3*a
A =

      8.
      5. - 1.7320508i
      7. - 1.7320508i

-->b=[4;0;0];

-->B=W3*b
B =

      4.
      4.
      4.
```

**Figura 16.27.** Comandos Scilab™ para el cálculo de TDF de secuencias de tres muestras

Sustituyendo los valores de  $A_q$ ,  $B_q$ ,  $C_q$  y  $D_q$  en las Ecuaciones (16.338), se obtiene que

$$G_q = A_q + \mathbf{W}_6^q B_q, \quad \forall q = 0, 1, 2. \quad (16.338a)$$

$$G_{q+3} = A_q - \mathbf{W}_6^q B_q, \quad \forall q = 0, 1, 2. \quad (16.338b)$$

$$H_q = C_q + \mathbf{W}_6^q D_q, \quad \forall q = 0, 1, 2. \quad (16.338c)$$

$$H_{q+3} = C_q - \mathbf{W}_6^q D_q, \quad \forall q = 0, 1, 2. \quad (16.338d)$$

```

-->c=[5;1;0];
-->C=W3*c
C =
    6.
    4.5 - 0.8660254i
    5.5 - 0.8660254i
-->d=[3;0;0];
-->D=W3*d
D =
    3.
    3.
    3.

```

**Figura 16.28.** Comandos Scilab™ para el cálculo de TDF de secuencias de tres muestras (continuación)

Sustituyendo las Ecuaciones (16.338) en las Ecuaciones (16.339), se consigue la FFT de la secuencia  $f_m$

$$F_q = G_q + W_{12}^q H_q, \quad \forall q = 0, 1, \dots, 5. \quad (16.339a)$$

$$F_{q+6} = G_q - W_{12}^q H_q, \quad \forall q = 0, 1, \dots, 5. \quad (16.339b)$$

**15.2** Se conoce que  $W_4 = e^{-j2\pi/4} = -j$ . Además, se tiene que

$$\mathbf{W}_4 = \left[ W_4^{(m-1)(q-1)} \right]_{4 \times 4}, \quad \forall m, q = 0, 1, 2, 3. \quad (16.340)$$

De la Ecuación (16.340), se puede afirmar que

```

-->W4=[1,1,1,1;1,-1*i,-1,%i;1,-1,1,-1;1,%i,-1,-1*i]
W4 =

    1.    1.    1.    1.
    1.   -i   -1.    i
    1.  -1.    1.  -1.
    1.    i   -1.   -i

-->invW4=inv(W4)
invW4 =

    0.25    0.25    0.25    0.25
    0.25    0.25i  -0.25  -0.25i
    0.25  -0.25    0.25  -0.25
    0.25  -0.25i  -0.25    0.25i

-->4*invW4
ans =

    1.    1.    1.    1.
    1.    i   -1.   -i
    1.  -1.    1.  -1.
    1.   -i   -1.    i

```

**Figura 16.29.** Comandos Scilab™ para el cálculo de  $\overline{W}_4^{-1}$  del Problema 15.2

De lo reportado en la Figura 16.29 se puede afirmar que  $\text{invW4}$  corresponde a  $\frac{1}{4}\overline{W}_4$ . Por otra parte, note que  $4*\text{invW4}$  viene a ser  $\overline{W}_4$ .

**15.3** De acuerdo con la base del algoritmo, se tiene que  $r_1 = 3$ ,  $r_2 = 4$  y  $r_3 = 5$ , lo que resulta un número total de muestras de  $N = r_1 r_2 r_3 = 60$ .

Se tiene que

$$q = r_1 r_2 q_2 + r_1 q_1 + q_0, \quad \forall q_{i-1} = 0, 1, \dots, r_i - 1, \forall i = 1, 2, 3. \quad (16.341a)$$

$$m = r_2 r_3 m_2 + r_3 m_1 + m_0, \quad \forall m_i = 0, 1, \dots, r_{3-i} - 1, \forall i = 0, 1, 2. \quad (16.341b)$$

Por otra parte, la ecuación fundamental del algoritmo de FFT para este caso es

$$F_{(q_2, q_1, q_0)} = \sum_{m_0}^{r_3-1} \sum_{m_1}^{r_2-1} \sum_{m_2}^{r_1-1} f_{(m_2, m_1, m_0)}^{[0]} \overline{W}_N^{qm}, \quad \forall q_{i-1} = 0, 1, \dots, r_i - 1, \forall i = 1, 2, 3. \quad (16.342)$$

Al sustituir el valor de  $m$  dado por la Ecuación (16.341b) en la Ecuación (16.342), se tiene que para todo  $q_{i-1} = 0, 1, \dots, r_i - 1$  con  $i = 1, 2, 3$ ,

$$F_{(q_2, q_1, q_0)} = \sum_{m_0}^{r_3-1} \sum_{m_1}^{r_2-1} \sum_{m_2}^{r_1-1} f_{(m_2, m_1, m_0)}^{[0]} \overline{W}_N^{q(m_2 r_2 r_3 + m_1 r_3 + m_0)}. \quad (16.343)$$

Al reescribir el núcleo de acuerdo a  $i$ -ésimo  $m_i$ , se obtiene que para todo  $q_{i-1} = 0, 1, \dots, r_i - 1$  con  $i = 1, 2, 3$ ,

$$F_{(q_2, q_1, q_0)} = \sum_{m_0}^{r_3-1} \sum_{m_1}^{r_2-1} \sum_{m_2}^{r_1-1} f_{(m_2, m_1, m_0)}^{[0]} \mathbf{W}_N^{q m_2 r_2 r_3} \mathbf{W}_N^{q m_1 r_3} \mathbf{W}_N^{q m_0}. \quad (16.344)$$

Sustituyendo el valor de  $q$  de la Ecuación (16.341 a) en la Ecuación (16.344), y sabiendo que  $r_1 r_2 r_3 = N$  se tiene que para todo  $q_0 = 0, 1, 2$ ,  $q_1 = 0, 1, 2, 3$  y  $q_2 = 0, 1, 2, 3, 4$ ,

$$f_{(q_0, m_1, m_0)}^{[1]} = \sum_{m_2}^{r_1-1} f_{(m_2, m_1, m_0)}^{[0]} \mathbf{W}_N^{r_2 r_3 q_0 m_2}; \quad (16.345a)$$

$$f_{(q_0, q_1, m_0)}^{[2]} = \sum_{m_1}^{r_2-1} f_{(q_0, m_1, m_0)}^{[1]} \mathbf{W}_N^{(r_1 r_3 q_1 + r_3 q_0) m_1}; \quad (16.345b)$$

$$f_{(q_0, q_1, q_2)}^{[3]} = \sum_{m_0}^{r_3-1} f_{(q_0, q_1, m_0)}^{[2]} \mathbf{W}_N^{(r_2 r_1 q_2 + r_1 q_1 + q_0) m_0}. \quad (16.345c)$$

De las Ecuaciones (16.345), se obtiene entonces que

$$F_q = F_{(q_0, q_1, q_2)} = f_{(q_0, q_1, q_2)}^{[3]} \quad (16.346)$$

Sustituyendo los parámetros  $r_i$  para todo  $i = 1, 2, 3$  en las Ecuaciones (16.345), éstas arrojan para todo  $q_0 = 0, 1, 2$ ,  $q_1 = 0, 1, 2, 3$  y  $q_2 = 0, 1, 2, 3, 4$ ,

$$f_{(q_0, m_1, m_0)}^{[1]} = \sum_{m_2}^{r_1-1} f_{(m_2, m_1, m_0)}^{[0]} \mathbf{W}_N^{20 q_0 m_2}; \quad (16.347a)$$

$$f_{(q_0, q_1, m_0)}^{[2]} = \sum_{m_1}^{r_2-1} f_{(q_0, m_1, m_0)}^{[1]} \mathbf{W}_N^{(15 q_1 + 5 q_0) m_1}; \quad (16.347b)$$

$$F_{(q_0, q_1, q_2)} = f_{(q_0, q_1, q_2)}^{[3]} = \sum_{m_0}^{r_3-1} f_{(q_0, q_1, m_0)}^{[2]} \mathbf{W}_N^{(12 q_2 + 3 q_1 + q_0) m_0}. \quad (16.347c)$$

Las Ecuaciones (16.347) representan las ecuaciones básicas del algoritmo de FFT base 3+4+5 de la secuencias de  $N=60$  datos.



# Appendix A

## El Scilab™

---

### A.1 Scilab™ Y SUS CARACTERÍSTICAS

El Scilab™ es un lenguaje de programación de alto nivel, el cual permite ejecutar cálculos científicos con mucha facilidad. Entre sus principales características está que es un *software* gratuito y abierto, y está disponible en múltiples sistemas operativos, tales como Windows®, Mac OS X y *General Public License* (GNU GPL)/Linux<sup>1</sup>. El Scilab™ ha sido desarrollado con esfuerzo conjunto de Scilab Consortium (2010a), quienes han dedicado una gran inversión para producir un *software* de aplicaciones el cálculo científico capaz de competir con otros softwares propietarios.

Existe una amplia literatura sobre el Scilab™, entre los cuales se tiene el texto de Campbell *et al.* (2006), además de la información disponible en internet (Scilab Consortium, 2010b).

### A.2 INSTALACIÓN DEL Scilab™

La instalación del Scilab™ dependerá del sistema operativo de que disponga el usuario. No obstante, en la página [www.scilab.org/download](http://www.scilab.org/download) puede obtenerse el Scilab™ para el sistema operativo en el cual trabaje el computador junto a las instrucciones para su

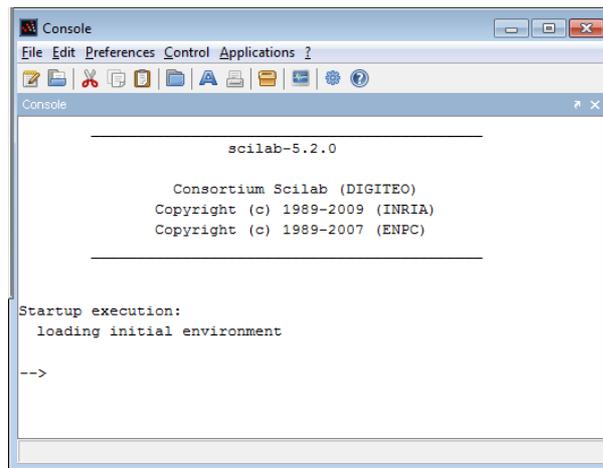
<sup>1</sup>GNU es un recursivo acrónimo corto de “GNU’s Not Unix”.

instalación, el cual el programa instalador va guiando al futuro usuario Scilab™ a través de una secuencia de pantallas

Una página internet que puede ser de gran utilidad es <http://wiki.scilab.org>, la cual contiene suficiente información para la instalación del Scilab™ en los distintos sistemas operativos.

### A.3 EDICIÓN EN EL Scilab™

Una vez instalado el Scilab™, el usuario podrá ver en la pantalla del computador, después de ejecutado el programa, la consola de edición como la presentada en la Figura A.1.



**Figura A.1.** Consola del Scilab™ empleada para introducir datos, editar comandos y visualizar resultados, entre otras funciones

Alfonso y Valero (2004) presentan una excelente introducción al Scilab™, en ella el lector podrá adquirir los principios del Scilab™.

### A.4 PRINCIPALES COMANDOS DEL Scilab™

En el Scilab™ puede definirse escalares, vectores y matrices  $n$  dimensional.

Como ejemplo, observe los siguientes comandos

En la Figura A.2 se ilustran los vectores  $A$  y  $B$ , los cuales representan vectores columna y fila, respectivamente.

Note que se ejecuta el producto de vectores  $B*A$ , arrojando como resultado la respuesta  $ans=14$ .

El Scilab™ define operaciones sobre vectores. Como ejemplo observe la operaciones  $2^A$ , donde  $A$  es el vector columna definido en la Figura A.2; y la operación  $3^B$ , donde también el vector fila  $B$  fue definido en la Figura A.2.

En general, operaciones sobre matrices pueden también ser ejecutadas por el Scilab™. Al respecto vea el siguiente ejemplo:

```

-->A=[1;2;3]
A =

    1.
    2.
    3.

-->B=[1,2,3]
B =

    1.    2.    3.

-->B*A
ans =

    14.

```

**Figura A.2.** Comandos Scilab™ para edición y operación de vectores

```

-->2^A
ans =

    2.
    4.
    8.

-->3^B
ans =

    3.    9.   27.

```

**Figura A.3.** Comandos Scilab™ para la ejecución de operaciones vectoriales

La Figura A.4 ilustra algunas de las tantas operaciones sobre matrices, tales como:  $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , donde  $\mathbf{A} = (1, 2, 3)^T$  y  $\mathbf{B} = (1, 2, 3)$ .

En la Figura A.4 también se presentan las operaciones:  $\mathbf{D} = 2^{\mathbf{C}}$ ; la matriz en el campo complejo  $\mathbf{Z} = \mathbf{C} + j\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ ; el conjugado de una matriz, la cual es asignada a la matriz  $\mathbf{Z1}$  a través de la operación Scilab™  $\mathbf{Z1} = \text{conj}(\mathbf{Z})$ ; y finalmente la magnitud de la matriz  $\mathbf{Z1}$  mediante la operación Scilab™  $\mathbf{M} = \text{abs}(\mathbf{Z1})$ , la cual arroja la magnitud de cada elemento complejo de la matriz  $\mathbf{Z1}$ .

Note que la unidad imaginaria  $j$  se representa en Scilab™ como  $\%i$ , y ésta es reportada como  $i$ . Es decir, para editar el número complejo  $z = 2 + j3$ , donde  $j$  es la cantidad imaginaria empleada en este texto, se debe editar sobre la consola Scilab™  $z = 2 + \%i * 3$ .

El Scilab™ ofrece además la posibilidad de hacer gráficas de funciones. Como ejemplo se tiene que al ejecutar los comandos:

En la Figura A.5 se muestran los comandos Scilab™ básicos necesarios para generar un gráfico de funciones. El comando  $\mathbf{t} = [0:0.1:2*\%pi]'$ ; define el vector  $\mathbf{t}$  de 0 a  $2\pi$  en intervalos de 0,1, mientras el comando `plot2d` permite graficar las funciones  $\text{sen}(t)$ ,  $\text{sen}(2t)$  y  $\text{sen}(3t)$ .

```

-->C=A*B
C =

    1.    2.    3.
    2.    4.    6.
    3.    6.    9.

-->D=2^C
D =

    2.    4.    8.
    4.   16.   64.
    8.   64.  512.

-->Z=C+%i*D
Z =

    1. + 2.i    2. + 4.i    3. + 8.i
    2. + 4.i    4. + 16.i   6. + 64.i
    3. + 8.i    6. + 64.i   9. + 512.i

-->Z1=conj(Z)
Z1 =

    1. - 2.i    2. - 4.i    3. - 8.i
    2. - 4.i    4. - 16.i   6. - 64.i
    3. - 8.i    6. - 64.i   9. - 512.i

-->M=abs(Z1)
M =

    2.236068    4.472136    8.5440037
    4.472136    16.492423   64.280635
    8.5440037    64.280635   512.0791

```

**Figura A.4.** Comandos Scilab™ para el cálculo operaciones sobre matrices

```

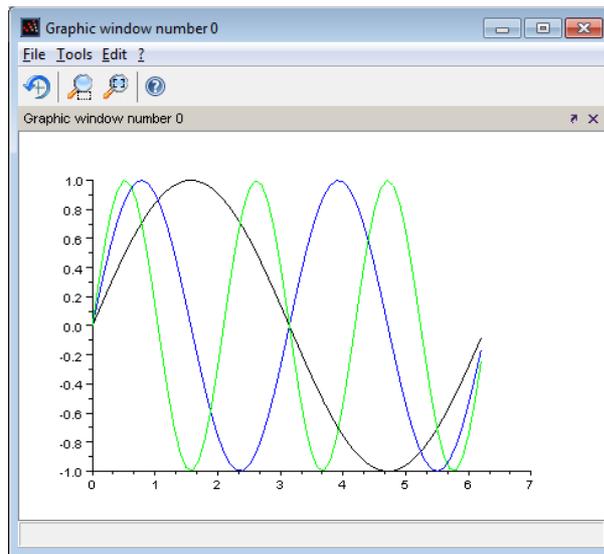
--> t=[0:0.1:2*pi]';
-->plot2d(t,[sin(t) sin(2*t) sin(3*t)]);

```

**Figura A.5.** Comandos Scilab™ para gráficas de funciones

La Figura A.6 ilustra el resultado arrojado por el Scilab™ en la representación de las funciones  $\sin(t)$ ,  $\sin(2t)$  y  $\sin(3t)$ .

Es oportuno destacar que el Scilab™ cuenta con un gran número de opciones para la realización de gráficas, las cuales puedes ser consultadas en la sección de ayuda(Help) del Scilab™.



**Figura A.6.** Resultado del Scilab™ en la representación gráfica de las funciones  $\text{sen}(t)$ ,  $\text{sen}(2t)$  y  $\text{sen}(3t)$

## A.5 MODIFICACIÓN DEL MACRO BODE

En esta sección se muestra el macro bode modificado a los efectos de traducir y expresar las unidades de frecuencias en rad/s, y de esta forma poder representar los gráficos de Bode como los mostrados en la obra.

Las modificaciones que deben realizarse sobre el código del macro bode, con el propósito de expresar el dominio en español y de acuerdo a las unidades son:

```
xtitle("",_("Frecuencia (rad/s)"),_("Magnitud (dB)"));
```

```
xtitle("",_("Frecuencia (rad/s)"),_("Fase (grado)"));
```

La lista presentada a continuación muestra el macro bode modificado.

```
// Scilab ( http://www.scilab.org/ ) - This file is part of Scilab
// Copyright (C) INRIA Serge Steer
// This file must be used under the terms of the CeCILL.
// This source file is licensed as described in the file COPYING, which
// you should have received as part of this distribution. The terms
// are also available at
// http://www.cecill.info/licences/Licence_CeCILL_V2-en.txt

function []=bodew(varargin)
rhs=size(varargin)
if type(varargin($))~=10 then
  comments=varargin($),rhs=rhs-1;
else
  comments=[];
end
fname="bodew";//for error messages
fmax=[]
if or(typeof(varargin(1))=['state-space' 'rational']) then
  //sys,fmin,fmax [,pas] or sys,frq
  reldim=1 //for error message
  if rhs==1 then //sys
    [frq,repf]=repfreq(varargin(1),1d-3,1d3)
  elseif rhs==2 then //sys,frq
    if size(varargin(2),2)<2 then
      error(msprintf(_("%s: Wrong size for input argument #%d: A row vector with length>%d expected.\n"),...
        fname,2,1))
    end
    [frq,repf]=repfreq(varargin(1:rhs))
  end
```

```

elseif or(rhs==(3:4)) then //sys,fmin,fmax [,pas]
    [frq,repf]=repfreq(varargin(1:rhs))
else
    error(msprintf(_("%s: Wrong number of input arguments: %d to %d expected.\n"),fname,1,5))
end
[phi,d]=phasemag(repF)
if rhs>=3 then fmax=varargin(3),end
elseif type(varargin(1))=1 then
    //frq,db,phi [,comments] or frq, repf [,comments]
    refdim=2
    select rhs
    case 2 then //frq,repf
        frq=varargin(1);
        if size(frq,2)<2 then
            error(msprintf(_("%s: Wrong size for input argument #%d: A row vector with length>%d expected.\n"),...
                fname,1,1))
        end
        if size(frq,2)<>size(varargin(2),2) then
            error(msprintf(_("%s: Incompatible input arguments #%d and #%d: Same column dimensions expected.\n"),...
                fname,1,2))
        end
        [phi,d]=phasemag(varargin(2))
    case 3 then //frq,db,phi
        [frq,d,phi]=varargin(1:rhs)
        if size(frq,2)<>size(d,2) then
            error(msprintf(_("%s: Incompatible input arguments #%d and #%d: Same column dimensions expected.\n"),...
                fname,1,2))
        end
        if size(frq,2)<>size(phi,2) then
            error(msprintf(_("%s: Incompatible input arguments #%d and #%d: Same column dimensions expected.\n"),...
                fname,1,3))
        end
    end
else
    error(msprintf(_("%s: Wrong number of input arguments: %d to %d expected.\n"),fname,2,4))
end
end
error(msprintf(_("%s: Wrong type for input argument #%d: Linear dynamical system or row vector of floats expected.\n"),fname,1))
end;
frq=frq';d=d';phi=phi'
[n,mn]=size(d)

if comments==[] then
    hx=0.48
else
    if size(comments,'*')<mn then
        error(msprintf(_("%s: Incompatible input arguments #%d and #%d: Same number of elements expected.\n"),...
            fname,refdim,rhs+1))
    end
    hx=0.43
end;

drawlater()
sciCurAxes=gca();
axes=sciCurAxes;
wrect=axes.axes_bounds;

//magnitude
axes.axes_bounds=[wrect(1)+0,wrect(2)+0,wrect(3)*1.0,wrect(4)*hx*0.95]
axes.data_bounds = [min(frq),min(d);max(frq),max(d)];
axes.log_flags = "lnn" ;
axes.grid=color('lightgrey')*ones(1,3);
axes.axes_visible="on";
axes.clip_state = "clipgrf";
if size(d,2)>1&size(frq,2)=1 then
    xpolys(frq(:,ones(1,mn)),d,1:mn)
else
    xpolys(frq,d,1:mn)
end
if fmax<>[]&max(frq)<fmax then
    xpoly(max(frq)*[1;1],axes.y_ticks.locations([1 $]));e=gce();
    e.foreground=5;
end
xtitle("",_("%Frecuencia (rad/s)"),_("%Magnitud (dB)"));

//phase
axes=newaxes();
axes.axes_bounds=[wrect(1)+0,wrect(2)+wrect(4)*hx,wrect(3)*1.0,wrect(4)*hx*0.95];
axes.data_bounds = [min(frq),mini(phi);maxi(frq),maxi(phi)];
axes.log_flags = "lnn" ;
axes.grid=color('lightgrey')*ones(1,3);
axes.axes_visible="on";
axes.clip_state = "clipgrf";
if size(phi,2)>1&size(frq,2)=1 then
    xpolys(frq(:,ones(1,mn)),phi,1:mn)
else
    xpolys(frq,phi,1:mn)
end
ephi=gce()

if fmax<>[]&max(frq)<fmax then
    xpoly(max(frq)*[1;1],axes.y_ticks.locations([1 $]));e=gce();
    e.foreground=5;
end
xtitle("",_("%Frecuencia (rad/s)"),_("%Fase (grado)"));
// create legend
if comments<>[] then

```

```
    captions(ephi.children,comments,'lower_caption')
end
drawnow()
// return to the previous scale
set( "current_axes", sciCurAxes );
endfunction
```



## Glosario

---

**impulso** También conocido como función delta de Dirac, para referirse a la función impulso definida en el dominio continuo. La función delta de Dirac es denotada como  $\delta(x)$ , donde  $x$  representa la variable continua definida en  $\mathbb{R}$ .

**impulso discreto** Modo simplificado al referirse a la función impulso definido en el dominio discreto. La función delta discreta es denotada como  $\delta[n]$ , donde  $n$  representa la variable discreta definida en  $\mathbb{Z}$ .

**nodo** Término empleado comúnmente en Venezuela para designar un nudo. Sin embargo, de acuerdo al diccionario de la Real Academia Española, disponible en [www.rae.es](http://www.rae.es), el término *nodo* en su sentido físico significa: “cada uno de los puntos que permanecen fijos en un cuerpo vibrante. En una cuerda vibrante son siempre nodos los extremos, y puede haber varios nodos intermedios”.

**nudo** Punto de conexión de un elemento en una red. En el contexto de las redes eléctricas es el punto de conexión galvánica de un elemento eléctrico en una red eléctrica.

**osciloscopio** De acuerdo a la definición de la Real Academia Española es un aparato que representa las variaciones de tensión en la pantalla de un tubo de rayos catódicos. En general, puede decirse que es un instrumento empleado para registrar en una pantalla, las variaciones de magnitudes de señales electromagnéticas en función del tiempo.

**Scilab™** Lenguaje de programación gratuito y abierto de alto nivel, el cual permite ejecutar cálculos científicos, además de representaciones gráficas de funciones en una y dos dimensiones.



## Referencias

---

- Alfonso, A. y Valero, C. 2004. Fundamentos de SciLab y Aplicaciones. Disponible en <http://www.scilab.org> y obtenido en enero 2008.
- Arias-de Reyna, E. y Acha, J. I. 2004. A new method for designing efficient linear phase recursive filters. *Digital Signal Processing*, 14(1):1–17.
- Box, G. E. P., Jenkins, G. M., y Reinsel, G. C. 1994. *Time series analysis: forecasting and control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 3rd edition.
- Brea, E. 2006. *Cálculo Operacional*. Escuela de Ingeniería Eléctrica, Universidad Central de Venezuela, Caracas, 1ra edition.
- Brea, E., Barroso, R., Acevedo, J., y Peña, L. 1999. Impedancia: un enfoque discreto. *Revista de la Facultad de Ingeniería de la UCV*, 14(1):53–57.
- Brigham, E. O. 1974. *The fast Fourier transform*. Prentice-Hall signal processing series. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- Brown, J. W. y Churchill, R. V. 2004. *Variable Compleja y Aplicaciones*. McGraw-Hill, Madrid, España, 7 edition. Obra traducida de *Complex Variable and Applications* escrita por: Ruel V. Churchill, James W. Brown y Roger F. Verhey.
- Bäumer, B., Lumer, G., y Neubrandner, F. 2004. Convolution Kernels and Generalized Functions. Obtenido de la página <http://citeseer.ist.psu.edu/515846.html> el 26 diciembre 2004.
- Campbell, S. L., Chancelier, J.-P., y Nikoukhah, R. 2006. *Modeling and simulation in Scilab/Scicos*. Springer Science+Business Media, New York.

- Carlson, A. B. y Crilly, P. B. 2009. *Communication systems: an introduction to signals and noise in electrical communication*. McGraw-Hill Higher Education, Boston, 5th edition.
- Cheng, M.-H. y Tsai, J.-L. 2006. A new IIR adaptive notch filter. *Signal Processing*, 86(7):1648–1655.
- Churchill, R. V. 1971. *Operational mathematics*. McGraw-Hill, New York,, 3d edition. First ed. published in 1944 under title: Modern operational mathematics in engineering.
- Cooley, J. W., Lewis, P. A. W., y Welch, P. D. 1969. The Fast Fourier Transform and Its Applications. *IEEE Transactions on Education*, 12(1):27–34.
- Cooley, J. W. y Tukey, J. W. 1965. An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. *Mathematics of Computation*, 19(90):297–301. American Mathematical Society.
- De Freitas, J. M. 2005. *Digital Filter Design Solutions*. Artech House, Incorporated, Norwood, MA, USA.
- Dirichlet, P. G. L. 1829. Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 4:157–169.
- Dorf, R. C. y Bishop, R. H. 2008. *Modern control systems*. Pearson/Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 11th edition.
- Duoandikoetxea, J. 2007. 200 años de convergencia de las series de Fourier. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)*, 10(3):651–688.
- Edelman, A., McCorquodale, P., y Toledo, S. 1998. The future Fast Fourier Transform? *SIAM Journal on Scientific Computing*, 20(3):1094–1114.
- Euler, L. 1753. De Serieum determinatione seu nova methodus inveniendi terminosgenerales serierum. *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, 3:36–85. Reimpreso en Leonhardi Euleri Opera Omnia, Serie I, Volumen 14, pp. 463-515.
- Fernandez-Vazquez, A. y Jovanovic-Dolecek, G. 2006. A new method for the design of IIR filters with flat magnitude response. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 53(8):1761–1771.
- Fourier, J. 1822. *Théorie analytique de la chaleur*. Firmin Didot, Père et Fils, Paris.
- Gel'fand, I. M. y Shilov, G. E. 1964. *Generalized functions*. Academic Press, New York,. Traducido por E. Saletan de la obra en Ruso “Obobshchennye Funktsii I Deistviya Nad Nimi”.
- Gleick, J. 1988. *Caos: la creación de una ciencia*. Seix-Barral, Barcelona, 1a edition. James Gleick; traducción del inglés por Juan Antonio Gutiérrez-Larraya.
- Greengard, L. y Lee, J.-Y. 2004. Accelerating the Nonuniform Fast Fourier Transform. *SIAM Review*, 46(3):443–454.
- Heideman, M. T., Johnson, D. H., y Burrus, C. S. 1985. Gauss and the history of the fast Fourier transform. *Archive for History of Exact Sciences*, 34(3):265–277.

- Hewitt, E. y Hewitt, R. E. 1979. The Gibbs- Wilbraham phenomenon: an episode in Fourier analysis. In Truesdell, C., editor, *Archive for History of Exact Sciences*, volume 21. Springer-Verlag.
- Hsue, C.-W., Chen, Y.-J., y Tsai, Y.-H. 2007. Design of bandstop filters using discrete-time notch filter, two-section stub, and frequency-scaling method. *Microwave & Optical Technology Letters*, 49(5):1098–1101.
- Hsue, C.-W., Tsai, L.-C., y Kan, S.-T. 2006. Implementation of a trapezoidal-rule microwave integrator. *Microwave & Optical Technology Letters*, 48(4):822–825.
- Kahane, J.-P. 2007. El retorno de Fourier. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)*, 10(3):678–688.
- Karaboga, N. 2009. A new design method based on artificial bee colony algorithm for digital IIR filters. *Journal of the Franklin Institute*, 346(4):328–348.
- Khan, I. R. 2010. Flat magnitude response FIR halfband low/high pass digital filters with narrow transition bands. *Digital Signal Processing*, 20(2):328–336.
- Klir, G. J. 1980. *Teoría General de los Sistemas*. Ediciones ICE, Madrid, 1ra edition. Traducido por Francisco José Valero López de la obra: An Approach to General Systems Theory.
- Krasnov, M. L., Kiselev, A. I., y G. I. M. 1983. *Funciones de variables compleja, Cálculo operacional y Teoría de la estabilidad*. Editorial MIR, Moscú. Traducido del ruso por T. I. Shapovalova de la obra original impresa en URSS, 1981.
- Kuo, F. F. 1966. *Network analysis and synthesis*. Wiley, New York, 2d edition.
- Lai, X. y Lin, Z. 2010. Minimax Design of IIR Digital Filters Using a Sequential Constrained Least-Squares Method. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 58(7):3901–3906.
- Lathi, B. P. y Ding, Z. 2009. *Modern digital and analog communication systems*. Oxford University Press, New York, 4th edition.
- Markushevich, A. 1970. *Teoría de las Funciones Analíticas*, volume 1. Editorial MIR, Moscú.
- Mello, R., Oliveira, L. F., y Nadal, J. 2007. Digital Butterworth filter for subtracting noise from low magnitude surface electromyogram. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 87(1):28–35.
- Michelson, A. A. y Stratton, S. W. 1898a. A new harmonic analyzer. *American Journal of Science*, s4-5(25):1–13.
- Michelson, A. A. y Stratton, S. W. 1898b. Michelson and Stratton's Harmonic Analyzer. Imagen disponible en [www-03.ibm.com/ibm/history/exhibits/attic3/attic3\\_157.html](http://www-03.ibm.com/ibm/history/exhibits/attic3/attic3_157.html) de la página de International Business Machines (IBM).
- Nyquist, H. 1928. Certain Topics in Telegraph Transmission Theory. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, 47:617–644.

- Oberst, U. 2007. The Fast Fourier Transform. *SIAM Journal on Control & Optimization*, 46(2):1–45.
- Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., y Nawab, S. H. 1998. *Señales y sistemas*. Prentice Hall Hispanoamericana, S. A., Naucalpan de Juárez, México, 2a edition. Traducido de la obra original “Signals and systems”, 2a edición por Gloria Mata Hernández.
- Papoulis, A. 1962. *The Fourier integral and its applications*. McGraw-Hill electronic sciences series. McGraw-Hill, New York,.
- Papoulis, A. 1978. *Sistemas digitales y analógicos, transformadas de Fourier, estimación espectral*. Marcombo, Barcelona.
- Papoulis, A. 1980. *Circuits and systems: a modern approach*. HRW series in electrical and computer engineering. Holt, Rinehart, and Winston, New York.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., y Flannery, B. P. 2007. *Numerical recipes: the art of scientific computing*. Cambridge University Press, Cambridge, UK; New York, 3rd edition. Hardback with source code CD ROM.
- Proakis, J. G. y Manolakis, D. G. 1996. *Tratamiento digital de señales: principios, algoritmos y aplicaciones*. Prentice Hall, Madrid, 3a edition. Traducido por Verónica Santalla del Río y José Luis Alba Castro de la obra original “Digital signal processing : principles, algorithms, and applications” 3a ed.
- Ramos, G., López, J. J., y Pueo, B. 2009. Cascaded warped-FIR and FIR filter structure for loudspeaker equalization with low computational cost requirements. *Digital Signal Processing*, 19(3):393–409.
- Ruston, H. y Bordogna, J. 1966. *Electric networks: functions, filters, analysis*. McGraw-Hill, New York,.
- Schiff, J. L. 1999. *The Laplace Transform: Theory and Applications*. Springer-Verlag, New York.
- Scilab Consortium 2010a. Scilab. Disponible en <http://www.scilab.org>.
- Scilab Consortium 2010b. Scilab Wiki. Disponible en <http://wiki.scilab.org>.
- Selesnick, I. W. y Sidney Burrus, C. 1998. Generalized digital Butterworth filter design. *IEEE Transaction on Signal Processing*, 46(6):1688–1694.
- Sinha, N. K. 1991. *Linear systems*. Wiley, New York.
- Thomas, G. B. 1976. *Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica*. Colección ciencias y técnica. Aguilar, Madrid, España, 6. edition. Traducido de la obra original “Calculus and analytic geometry”, Addison-Wesley Pub. Co, illus. 24 cm.
- Varona Malumbres, J. L. 1996. *Métodos Clásicos de Resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Servicios de Publicaciones, Universidad de La Rioja, Logroño, España, 1ra edition. Disponible en internet en la página <http://www.unirioja.es/cu/jvarona/downloads/LibroED.pdf>, accedido el 20 de marzo de 2008. Reimpreso en 2007.

- Ware, A. F. 1998. Fast Approximate Fourier Transforms for Irregularly Spaced Data. *SIAM Review*, 40(4):838.
- Wikipedia 1940. Original puente colgante Tacoma Narrows. Obtenida en [http://en.wikipedia.org/wiki/Tacoma\\_Narrows\\_Bridge\\_\(1940\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Tacoma_Narrows_Bridge_(1940)) el 10 de agosto de 2010.
- Yusuf Bilah, K. y Scanian, R. H. 1991. Resonance, Tacoma Narrows bridge failure, and undergraduate physics textbooks. *American Journal of Physics*, 59(2):118–124.
- Ziemer, R. E., Tranter, W. H., y Fannin, D. R. 1993. *Signals and systems: continuous and discrete*. Macmillan; Maxwell Macmillan Canada; Maxwell Macmillan International, New York Toronto, 3rd edition.



# ÍNDICE

---

- Algoritmo
  - simulación, 79
- Ambiente
  - definición, 4
- Ancho de banda
  - definición, 332
- Argumento
  - de  $\mathcal{F}[f(t)]$ , 249
- Armónica  $n$ -ésima
  - definición, 264
- Composición de subsistemas
  - cascada, 175
  - paralelo, 177
  - realimentado, 177
  - serie, 175
- Condiciones
  - discretización
    - sistema primer orden, 65
    - sistema segundo orden, 67
- Demodulación en amplitud, 336
- Diagrama de Bode
  - fase
- factor  $G(s) = s^{1/n}$ , 223
- factor  $G(s) = s^n$ , 222
- factor cuadrático, 220
- factor cuadrático con raíces imaginarias puras, 222
- factor lineal, 219
- método, 223
- magnitud
  - factor  $G(s) = s$ , 202
  - factor  $G(s) = s^{1/n}$ , 207
  - factor  $G(s) = s^n$ , 206
  - factor cuadrático, 202
  - factor cuadrático con raíces imaginarias puras, 203
  - factor lineal, 200
  - método, 208
- Discretización, 64
  - integración rectangular, 64
  - integración trapezoidal, 68
- Distorsión
  - fase, 347
  - magnitud, 347

- Ecuación
  - en diferencias, 64
  - recurrente
    - ejemplo, 87
- Energía
  - teorema, 287
- Energía normalizada
  - definición, 250
- Entorno
  - definición, 4
- Equilibrio
  - definición, 134
- Espectro
  - de amplitud, 249
  - de fase, 249
- Espectro de línea
  - fase
    - ejemplo, 266, 269, 271
  - magnitud
    - ejemplo, 265, 269, 270
- Espectro de un señal periódica
  - fase
    - ejemplo, 267
  - magnitud
    - ejemplo, 266
- Estabilidad
  - definición, 134
- Estabilidad dominio continuo
  - Criterio
    - convergencia de  $h(t)$ , 135
    - Integrabilidad absoluta de  $h(t)$ , 135
    - polinomio característico, 135
    - polos, 135
- Estabilidad dominio discreto
  - Criterio
    - convergencia de  $h[n]$ , 162
    - polinomio característico, 163
    - polo, 162
    - suma absoluta, 163
- Estado
  - espacio, 69
  - variables continuas, 69
  - variables discretas, 73
- Fórmula
  - inversión
    - de la transformada de Fourier, 250
- FFT
  - forma canónica, 381
- forma no canónica, 387
- Frontera
  - definición, 4
- Función
  - $\delta(t)$ , 9
  - delta de Dirac, 9
  - escalón discreto desplazado, 12
  - escalón en el dominio continuo, 9
  - $u(t)$ , 9
  - exponencial discreta
    - ejemplo, 15
  - impulso discreto desplazado, 11
  - impulso en el dominio continuo, 9
  - $\mathcal{N}(t)$ , definición, 40
  - nula, 40
  - $p_a(t - T_0)$ , 110
  - pulso rectangular, 110
  - pulso rectangular en el dominio continuo, 10
  - pulso triangular en el dominio continuo, 10
  - $p_a(t)$ , 10, 291
  - $q_a(t)$ , 10
  - $\text{senc}_{\omega_0}(t)$ , definición, 291
  - $\text{senc}_a(t)$ , 10
  - seno discreto
    - ejemplo, 17
  - $\text{sgnz}(x)$ , definición, 324
- Función de transferencia
  - definición, 175
  - dominio continuo
    - definición, 125
  - dominio discreto
    - Definición, 157
  - relación
    - dominio  $s$  y  $\mathcal{Z}$ , 163
- fundamental
  - definición, 264
- Impedancia
  - capacitancia, 304
  - conexión paralelo, 306
  - conexión serie, 305
  - inductancia, 304
  - resistencia, 303
- Método
  - de determinación de la respuesta por Transformada  $\mathcal{Z}$ , 152

- de los residuos, 151
- determinación de la respuesta por transformada de Laplace, 123
- determinación de la respuesta transitoria
  - dominio continuo, 41
  - dominio discreto, 82
- Magnitud
  - de  $\mathcal{F}[f(t)]$ , 249
- Modelo dinámico
  - dominio continuo
    - por  $H(s)$ , 136
- Modelo matemático
  - definición, 6
  - dominio continuo, 32
    - orden superior, 40
    - prime orden, 33
  - dominio discreto, 62
    - primer orden, 64
    - segundo orden, 65
- Modulación en amplitud
  - comparación, 334
  - con portadora, 333
  - con portadora suprimida, 330
- Operador
  - $p$ , definición, 40
  - $q$ , definición, 82
- Parseval
  - teoremas, 287
- Polinomio característico, 41
  - ejemplo, 127, 136
- Potencia promedio
  - teorema, 289
- Potencia promedio normalizada
  - definición, 250
- Propiedad
  - homogeneidad, 20
  - superposición, 20
- Relación
  - $\alpha_n, a_n$  y  $b_n$ , 278
- Respuesta
  - completa, 40
  - forzada, 40
  - natural, 40
  - permanente, 35, 40
  - transitoria, 35, 40
- Respuesta de sistema
  - continuo
    - por convolución, 108
    - por transformada, 122
  - discreto
    - por convolución, 98
    - por transformada, 151
- Respuesta en frecuencia en dominio continuo
  - teorema, 183
- Respuesta en frecuencia en dominio discreto
  - teorema, 190
- Respuesta impulsiva
  - antisimétrica, 349, 350
  - simétrica, 349, 350
- Símbolo
  - $e_i(t)$ , 69
  - $e_i[n]$ , 73
  - $h(t)$ , 48
  - $h[n]$ , 88
  - $\mathcal{N}(t)$ , 40
- Scilab™
  - cálculo de  $\mathbf{W}_4^{-1}$ , 448
  - cálculo de TDF, 446, 447
  - cálculo de TIDF, 394, 395
  - cálculo de conjugado, 394
  - cálculo de convolución, 105, 108
  - cálculo de FFT, 391–393
  - cálculo de IFFT, 394, 395
  - cálculo de raíces, 43, 46, 85, 124, 127, 363
  - comando atan(y,x), 194
  - comandos sobre matrices, 454
  - construcción del diagrama de Bode, 428
  - construcción del diagrama de Bode en magnitud, 210, 213, 218
  - construcción del diagrama de Bode en magnitud y fase, 225, 229, 231
  - diagrama en fase
    - respuesta en frecuencia, 242, 431, 433
  - diagrama en magnitud
    - respuesta en frecuencia, 241, 430, 432
  - ejemplo de edición, 453
  - evaluación de función, 363
  - gráfica de respuesta de un sistema, 39
  - gráficas, 454
  - operaciones vectoriales, 453
  - respuesta en frecuencia en dominio discreto, 194

- sistema de ecuaciones lineales, 47, 51, 53, 87, 90, 92, 129
- verificación de datos, 87
- Señal
  - analógica, 8
  - continua, 8
  - definición, 7
  - determinista, 8
  - digital, 8
  - discreta, 8
  - estocástica, 8
  - excitación, 8
  - externa, 8
  - interna, 8
  - respuesta, 8
  - taxonomía, 8
- Señal de energía
  - definición, 251
- Señal de potencia
  - definición, 251
- Señal modulada
  - definición, 330
- Señal moduladora
  - definición, 329
- Señal portadora
  - definición, 329
- Sistema
  - causal, 22
  - definición, 4
  - determinista, 24
  - dinámico, 22
  - dominio continuo, 23
  - dominio discreto, 23
  - estático, 22
  - estable, 134
  - estocástico, 24
  - invariante en el dominio, 22
  - lineal, 20
  - linealmente incremental, 21
  - no causal, 22
  - taxonomía, 20
  - variante en el dominio, 23
  - variante en tiempo
    - ejemplo, 32
- Solución
  - completa, 40
  - homogénea, 40
  - particular, 40
- TDF
  - definición, 372
  - forma matricial, 375
  - linealidad, 379
  - simetría, 381
  - traslación en frecuencia discreta, 381
  - traslación en tiempo discreto, 380
- Teorema
  - convolución
    - dominio continuo, 109
    - dominio discreto, 98
  - Muestreo, 337
  - Nyquist, 337
- TIDF
  - definición, 374
- Transformada
  - de Fourier
    - definición, 248
- Transformada  $\mathcal{L}$ 
  - definición, 142
  - linealidad, 144
  - Multiplicación por  $n^m$ , 147
  - traslación
    - adelanto en el dominio, 145
    - retardo en el dominio, 144
- Transformada discreta de Fourier
  - definición, 372
- Transformada inversa  $\mathcal{L}$ 
  - ejemplo
    - método de división, 154
    - método de expansión en fracciones parciales, 154
    - método de los residuos, 153
  - método, 148
- Transformada inversa discreta de Fourier
  - definición, 374
- Valor final
  - transformada  $\mathcal{L}$ 
    - teorema, 161
  - transformada de Laplace
    - teorema, 133
- Valor inicial
  - transformada  $\mathcal{L}$ 
    - teorema, 160
  - transformada de Laplace
    - teorema, 132