



Optimización Entera y Entera Mixta: *un enfoque por métodos directos*

Profesor Ebert Brea, Ph.D.

`ebert.brea@ucv.ve`

Universidad Central de Venezuela

Facultad de Ingeniería

Escuela de Ingeniería Eléctrica

Caracas, 6 de octubre de 2010



Agenda

1. Introducción
 - 1.1. Motivación
 - 1.2. Propósito
 - 1.3. Visión
2. Marco Histórico
3. Marco Teórico
4. Marco Metodológico
5. Algoritmo Simplex Entero
6. Algoritmo Simplex Entero Mixto
7. Aplicaciones en la Ingeniería
8. Conclusiones
9. Futuras Investigaciones



1. Introducción

1.1. Motivación

El desarrollo y empleo de modelos de simulación de eventos discretos, bien sean mediante su representación dinámica o estática, tiene como objetivo, en algunos casos, la identificación de la óptima operación del sistema bajo estudio, para lo cual se necesitan métodos eficaces de optimización, desde la perspectiva del número de evaluaciones ejecutadas sobre el modelo de simulación.



1. Introducción

1.2. Propósito

Desarrollar dos algoritmos que permitan identificar al menos un óptimo local a problemas enteros y a problemas enteros mixtos por **búsqueda directa** y que **no relajen la naturaleza entera** de aquellas variables que así lo sean, a través de su tratamiento como variables reales para luego hacer sus respectivas aproximaciones a su próximo entero.

1. Introducción

1.2. Propósitos

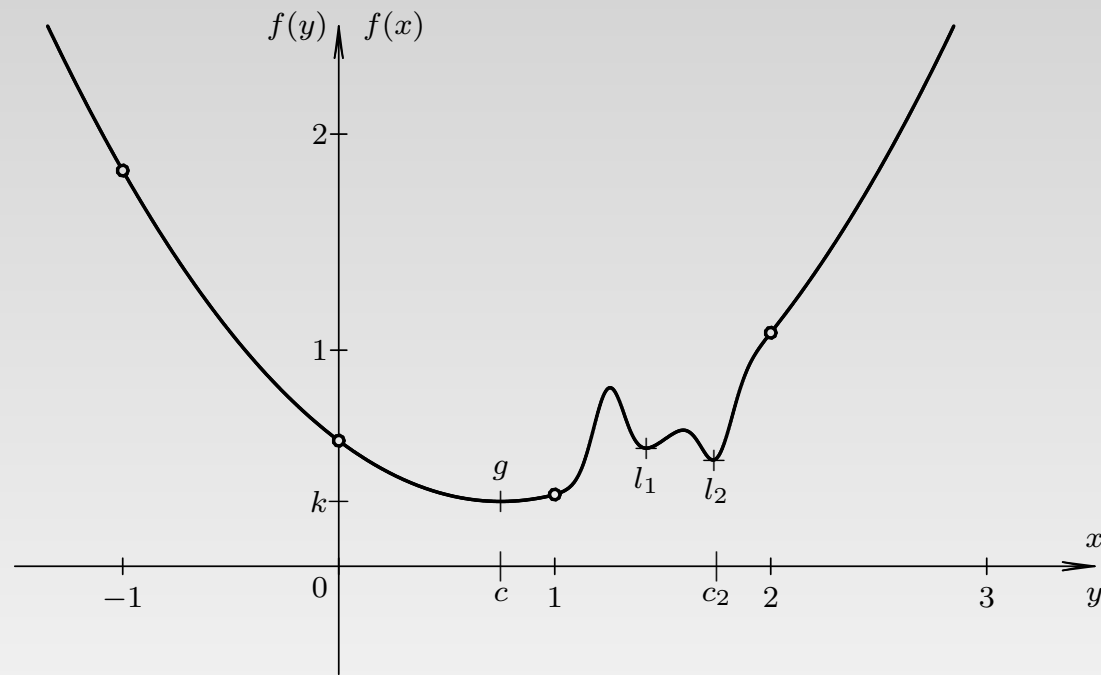


Figura 1.1. Función $f(x)$ y su correspondiente versión discreta $f(y)$

1. Introducción

1.3. Visión

Los métodos desarrollados deben contar con las siguientes características:

- Ser lo suficientemente fáciles de codificar, además de ser adaptables a problemas de optimización de sistemas por simulación.
- Ser eficaz a problemas de optimización cuando la función objetivo está sometido a ruido.



2. Marco Histórico

Hooke y Jeeves (1961) fueron los primeros en acuñar el término *búsqueda directa*, el cual lo definieron como aquellos métodos que **mediante estrategias y puntos de prueba** determinan cuál será el siguiente conjunto de puntos de prueba, y a través de un proceso iterativo de estrategias, identifican la mejor solución de un problema de optimización.

2. Marco Histórico

- Box y Behnken (1960) idean la estructura experimental del simplex.
- Spendley, Hext y Himsworth (1962) fueron los primeros en el uso de la estructura del simplex en la identificación de óptimos a problemas cuando la función objetivo está sujeta a ruido.
- Nelder y Mead (1965, 1966) desarrollan su método, el cual lleva su nombre, método de Nelder-Mead (MNM), basándose en la idea de Spendley, Hext y Himsworth (1962).
- Subrahmanyam (1989), quien desarrolló una extensión del MNM en problemas de optimización con restricciones empleando lo que él denominó, como la operación de reflexión retardada a fin de prever el colapso o degeneración del simplex cuando la solución está sobre una de las restricciones o está próxima.
- Barton y Ivey Jr. (1996) proponen una modificación del MNM, para la identificación de óptimos en sistemas estocásticos.

2. Marco Histórico

- Lagarias *et al.* (1998) por su parte, estudiaron las propiedades de convergencia del MNM en baja dimensión cuando la función objetivo es convexa.
- McKinnon (1998) presenta en su artículo una familia de funciones convexas, en donde el MNM converge a puntos no estacionarios cuando el problema de optimización no tiene restricciones.
- Kelley (1999) propone reiniciar el simplex por uno más pequeño de aristas ortogonales y con una apropiada orientación, a fin de mejorar el problema de convergencia del MNM a puntos no estacionarios
- Price *et al.* (2002) proponen una variante convergente del MNM en donde su método supera las dificultades de convergencia planteadas por McKinnon (1998)

2. Marco Histórico

- Humphrey y Wilson (2000) desarrollaron una variante del MNM para problemas de optimización por simulación estocástica, el cual emplea de forma iterativa el MNM a objeto de ejecutar etapas y de esta forma identificar el óptimo del problema.
- Otra investigación reportada en el MNM con reescalamiento del simplex para el rearranque de una nueva etapa es presentada por Ahmed (2001), en donde emplea su método algorítmico para el entrenamiento de redes neuronales artificiales.
- Chelouah y Siarry (2003) proponen un algoritmo híbrido del MNM y algoritmo genético para la identificación de óptimos globales
- Brea (2004) desarrolló un algoritmo basado en el MNM cuando el problema de optimización está linealmente restringido, sin emplear el método de penalización en virtud de que el algoritmo redefine las operaciones sobre el simplex, sin que ellas produzcan nuevos puntos de pruebas infactibles

2. Marco Histórico

- Brea (2004); Brea y Cheng (2009) estudian la convergencia del algoritmo cuando es aplicado a un problema de optimización lineal y bajo la peor condición de orientación de las restricciones lineales con relación a la dirección de la normal del plano que define la función objetivo
- Luersen *et al.* (2004), y Luersen y Le Riche (2004) desarrollan una variante del MNM para la identificación de óptimos globales a través de rearranques aleatorios del MNM con nuevos simpleces, buscando garantizar la identificación de óptimos globales.
- Wu e Ierapetritou (2006) proponen una modificación del MNM a problemas de optimización lineal, en donde emplean un enfoque de descomposición de Lagrange con actualizaciones de sus multiplicadores

2. Marco Histórico

- La convergencia del MNM sigue siendo tema de estudio, y ejemplo de esto se tiene en la investigación reportada por Han y Neumann (2006), en donde muestran los problemas de convergencia del MNM ante el aumento de la dimensión del espacio que define la función objetivo, empleando una función objetivo cuadrática simétrica.
- Zahara y Kao (2009) plantean el empleo del MNM junto a los principios de los métodos optimización por enjambres, a fin de identificar óptimos a problemas de programación no lineal restringidos.

2. Marco Histórico

- Dentro de la optimización lineal entera mixta (OLEM), se tiene el algoritmo de ramificación y bordeado (BB), conocido del inglés “*Branch-and-Bound*” (Tawarmalani y Sahinidis, 2002, capítulo 3), el cual ejecuta una enumeración de alternativas de soluciones de un problema de optimización lineal mixto de variables enteras $y \in \{0, 1\}^m$, sin examinar todas las posibles combinaciones de y
- Tawarmalani y Sahinidis (2004) presenta un resumen del BB para problemas de optimización no lineal (ONL)

2. Marco Histórico

Problema 2.1 (\mathcal{P}_1)

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathcal{X}, \mathbf{y} \in \mathcal{Y}}{\text{minimice}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

donde $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{R}$ es una función no lineal.

Sujeto a:

$$g_i : g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n_g;$$

$$h_i : h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n_h;$$

$$\mathbf{x} \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n;$$

$$\mathbf{y} \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{Z}^m.$$

Para la identificación de una solución al Problema 2.1 ha sido propuesto el método algorítmico de Descomposición Generalizada de Benders (GBD), del inglés “*Generalized Benders Decomposition*”, (Floudas, 1995, Capítulo 6).

La idea básica del GBD es generar en cada iteración una solución por exceso y otra por defecto

2. Marco Histórico

Problema 2.2 (\mathcal{P}_2)

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathcal{X}, \mathbf{y} \in \mathcal{Y}}{\text{minimice}} \mathbf{c}^t \mathbf{y} + f(\mathbf{x}),$$

Sujeto a:

$$g_i : g_i(\mathbf{x}) + b_i \mathbf{y} \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n_g;$$

$$h_i : h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n_h;$$

$$\mathbf{x} \in \mathcal{X} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A}_1 \mathbf{x} \leq \mathbf{a}_1\} \subseteq \mathbb{R}^n;$$

$$\mathbf{y} \in \mathcal{Y} = \{\mathbf{y} : \mathbf{y} \in \{0, 1\}^m, \mathbf{A}_2 \mathbf{y} \leq \mathbf{a}_2\} \subseteq \mathbb{Z}^m.$$

Los métodos algorítmicos de Aproximaciones por Fuera (OA) desarrollados por Duran y Grossmann (1986), y de Generalizada Descomposición Cruzada (GCD) propuesto por Holmberg (1990, 1994, 1998) requieren, además de conocer la expresión matemática de la función objetivo, ésta debe contar con separabilidad de las variables reales \mathbf{x} , y enteras, \mathbf{y} .

2. Marco Histórico

- Dentro de la problemática de la optimización no lineal entera mixta (ONLEM) existe otro enfoque, el cual tiene como base la identificación de la solución óptima por búsqueda directa (DS), acrónimo del inglés “*Direct Search*”. Este método, desarrollado por Audet y Dennis Jr. (2001), constituye una variante del método de *Patron de Búsqueda* para la identificación de soluciones a problemas de ONLEM.
- Algoritmos evolutivos, dentro de los cuales puede nombrarse el método de Rothberg (2007), quien propone el empleo del método de *Ramificación y Bordeo con algoritmo evolutivo*
- El método algorítmico de *Particiones Anidadas* desarrollado por Shi y Ólafsson (2000). Brea y Cheng (2003) lo emplearon para la identificación del óptimo de un sistema de colas, lo que constituyó un problema entero mixto. Más aún, Brea (2009) empleó el algoritmo de *Particiones Anidadas* para la identificación de soluciones óptimas de conexión de cargas eléctricas monofásicas en un sistema de distribución de energía eléctrica trifásico

3. Marco Teórico

Problema 3.1 (Minimización entera mixta restrictiva) Sean $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{Y} \subset \mathbb{Z}^m$ subconjuntos propios no vacíos, entonces el problema de minimización restrictivo en el contexto de variables de decisiones enteras mixtas puede ser expresado por

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathcal{X}, \mathbf{y} \in \mathcal{Y}}{\text{minimice}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (3.1)$$

Un modo alternativo de expresar el problema definido por la Ecuación (3.1) es:

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^m}{\text{minimice}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (3.2)$$

Sujeta a:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\in \mathcal{X}; \\ \mathbf{y} &\in \mathcal{Y}. \end{aligned} \quad (3.3)$$



3. Marco Teórico

Problema 3.2 (Minimización entera mixta irrestricta)

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^m}{\text{minimice}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (3.4)$$

donde \mathbf{x} y \mathbf{y} tienen el mismo significado presentado en el Problema 3.1, y $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{R}$ es la función objetivo.

3. Marco Teórico

Definición 3.8 (Vector precedente o igual) *Sea una función $f(\mathbf{w}) : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ y sean \mathbf{a} y \mathbf{b} dos vectores cualesquiera definidos en un dominio \mathcal{W} . Se dice que \mathbf{a} precede o es igual a \mathbf{b} , y es denotado por $\mathbf{a} \preceq \mathbf{b}$, si $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{b})$.*

Definición 3.9 (Vector subsecuente o igual) *Sea una función $f(\mathbf{w}) : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ y sean \mathbf{a} y \mathbf{b} dos vectores cualesquiera definidos en un dominio \mathcal{W} . Se dice que \mathbf{a} es subsecuente o es igual a \mathbf{b} , y es denotado por $\mathbf{a} \succeq \mathbf{b}$, si $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{b})$.*

3. Marco Teórico

Definición 3.10 (Vector entero mixto) Sean $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^m$ dos subvectores que conforman un vector $\mathbf{v} = [\mathbf{x}^t \ \mathbf{y}^t]^t$. Se dice que el vector \mathbf{v} es un vector entero mixto en el espacio euclidiano entero mixto de dimensión $n + m$, para indicar respectivamente la dimensión de las componentes reales y enteras, si el vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^m$.

Definición 3.11 (Subvector real) Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^m$ un vector entero mixto. Se dice entonces que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el subvector real de dimensión n , si sus componentes representan las cantidades reales del vector entero mixto \mathbf{v} .

Definición 3.12 (Subvector entero) Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^m$ un vector entero mixto. Se dice que $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^m$ es el subvector entero de dimensión m , si sus componentes representan cantidades enteras del vector entero mixto \mathbf{v} .

3. Marco Teórico

Definición 3.13 (Centroide) *Sea un conjunto de k puntos $\mathbf{p}_i = (\mathbf{x}_i^t, \mathbf{y}_i^t)^t$ definidos en el espacio euclidiano entero mixto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n$ para cada $i = 1, \dots, k$. Se dice que el centroide de los k puntos es aquel punto $\bar{\mathbf{p}}$ que equidista de cada uno de los \mathbf{p}_i definidos, y es determinado por*

$$\bar{\mathbf{p}} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbf{p}_i. \quad (3.11)$$

Observación 3.3 *Note que el punto $\bar{\mathbf{p}}$ no necesariamente pertenece al espacio euclidiano $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n$. Más aún, $\bar{\mathbf{p}} = (\bar{\mathbf{x}}^t, \bar{\mathbf{y}}^t)^t$, donde*

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbf{x}_i, \text{ e } \bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbf{y}_i. \quad (3.12)$$

3. Marco Teórico

Definición 3.14 (Simplex entero mixto) *Un simplex entero mixto en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n$ se define como un conjunto de diferentes puntos $\mathbf{v}_i = [\mathbf{x}_i^t \mathbf{y}_i^t]^t$ para todo $i = 1, \dots, \nu$, donde $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$ corresponde al i -ésimo subvector real de dimensión n , $\mathbf{y}_i \in \mathbb{Z}^n$ denota cada i -ésimo subvector entero de dimensión n , $\nu = n + 1$ representa el número de vértices del simplex entero mixto, los cuales no todos pertenecen a la misma hipercara definida en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n$, y cada uno es representado por un vector de dimensión $n + n$. El simplex entero mixto puede entonces ser representado en notación matricial como*

3. Marco Teórico

$$\mathbf{S}_{\nu}^{[q]} = [\mathbf{v}_1^{[q]} ; \mathbf{v}_2^{[q]} ; \dots ; \mathbf{v}_{\nu}^{[q]}] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1\nu} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{n\nu} \\ y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1\nu} \\ y_{21} & y_{12} & \dots & y_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{n\nu} \end{bmatrix} . \quad (3.13)$$

3. Marco Teórico

Definición 3.16 (Simplex entero mixto jerarquizado) *Sea un q -ésimo simplex entero mixto $\mathbf{S}_\nu^{[q]}$ definido en el espacio euclidiano entero mixto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n$. Se dice que el q -ésimo simplex entero mixto $\mathbf{S}_\nu^{[q]}$ es jerarquizado, si se cumple que $\mathbf{v}_1 \preceq \mathbf{v}_2 \preceq \cdots \preceq \mathbf{v}_{\nu-1} \preceq \mathbf{v}_\nu$.*

Definición 3.17 (Matriz de aristas de un simplex entero mixto) *Una p -ésima matriz de aristas de un q -ésimo simplex entero mixto $\mathbf{S}_\nu^{[q]}$ en el espacio euclidiano entero mixto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n$, se define como una matriz de dimensión $2n \times n$, cuya j -ésima columna representa la arista del simplex entero mixto $\mathbf{S}_\nu^{[q]}$ entre un vértice referencial \mathbf{v}_p y \mathbf{v}_j para todo $j = 1, \dots, \nu$ y $j \neq p$, es decir,*

$$\mathbf{A}_p^{[q]} = [\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_p ; \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_p ; \cdots ; \mathbf{v}_{j \neq p} - \mathbf{v}_p ; \cdots ; \mathbf{v}_\nu - \mathbf{v}_p], \quad \forall p = 1, \dots, \nu.$$

3. Marco Teórico

Definición 3.20 (Simplex entero mixto completo) Sean $R_c(\mathbf{A}_{x_p}^{[q]})$ y $R_c(\mathbf{A}_{y_p}^{[q]})$ los rangos de columnas de las submatrices de aristas $\mathbf{A}_{x_p}^{[q]}$ y $\mathbf{A}_{y_p}^{[q]}$, respectivamente. Se dice que un simplex entero mixto es completo o no colapsado en el espacio euclidiano entero mixto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n$, si tanto todas sus submatrices de aristas del subsimplex real como todas sus submatrices de aristas del subsimplex entero son de rangos de columnas completos. Es decir, si

$$R_c(\mathbf{A}_{x_1}^{[q]}) = R_c(\mathbf{A}_{x_2}^{[q]}) = \dots = R_c(\mathbf{A}_{x_\nu}^{[q]}) = n, \quad (3.16a)$$

$$R_c(\mathbf{A}_{y_1}^{[q]}) = R_c(\mathbf{A}_{y_2}^{[q]}) = \dots = R_c(\mathbf{A}_{y_\nu}^{[q]}) = n. \quad (3.16b)$$

En otras palabras, si existe n subvectores reales $\mathbf{x}_{j \neq p} - \mathbf{x}_p$ linealmente independientes y n subvectores enteros $\mathbf{y}_{j \neq p} - \mathbf{y}_p$ linealmente independientes para cada p -ésima matriz de aristas.

3. Marco Teórico

Definición 3.21 (Simplex entero mixto colapsado) Sean $R_c(\mathbf{A}x_p^{[q]})$ y $R_c(\mathbf{A}y_p^{[q]})$ los rangos de columnas de las submatriz de aristas $\mathbf{A}x_p^{[q]}$ y $\mathbf{A}y_p^{[q]}$, respectivamente. Se dice que un simplex entero mixto está colapsado en el espacio euclidiano entero mixto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n$, si al menos se satisface una de las siguientes condiciones:

I) rango no completo de la submatriz de aristas del subsimplex real,

$$\min_{i \in \{1, \dots, n+1\}} R_c(\mathbf{A}_{x_i}^{[q]}) < n,$$

II) rango no completo de la submatriz de aristas del subsimplex entero,

$$\min_{i \in \{1, \dots, n+1\}} R_c(\mathbf{A}_{y_i}^{[q]}) < n,$$

es decir, si existe al menos un subvector $\mathbf{x}_{j \neq p} - \mathbf{x}_p$ o un subvector $\mathbf{y}_{j \neq p} - \mathbf{y}_p$ linealmente dependientes para alguna p -ésima matriz de arista.

3. Marco Teórico

Definición 3.22 (Hiper cara opuesta a un vértices) Sea $\mathbf{S}_\nu^{[q]}$ un q -ésimo simplex entero mixto de ν vértices en el espacio euclidiano mixto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n$. La parte del simplex definido por todos los vértices del simplex entero mixto $\mathbf{S}_\nu^{[q]}$ excepto el vértice \mathbf{v}_j es la llamada hiper cara opuesta al j -ésimo vértice, y la misma viene dada por

$$\mathbf{H}_j^{[q]} = \{\mathbf{v}_i \in \mathbf{S}_\nu^{[q]} : i = 1, \dots, \nu, i \neq j\}, \quad \forall j = 1, \dots, \nu. \quad (3.17)$$

Definición 3.23 (Simplex entero) Se define por un q -ésimo simplex entero o discreto, a un simplex cuyos vértices están contenidos únicamente en el espacio de los número enteros \mathbb{Z}^n y será representado por $\mathbf{S}_\nu^{[q]} = [\mathbf{y}_1^{[q]} ; \mathbf{y}_2^{[q]} ; \dots ; \mathbf{y}_\nu^{[q]}]$, donde \mathbf{y}_i para todo $i = 1, \dots, \nu$ representa los subvectores enteros, que en este caso serán vectores enteros. El superíndice $[q]$ representa la secuencia del simplex, el cual, por razones de simplificación de la notación, podría ser omitido.

3. Marco Teórico

Definición 3.24 (Menor simplex entero) *Sea*

$\mathbf{S}_\nu^{[q]} = [\mathbf{y}_1^{[q]} ; \mathbf{y}_2^{[q]} ; \dots ; \mathbf{y}_\nu^{[q]}]$ *un q -ésimo simplex entero en el sentido de la Definición 3.23. Se dice que $\mathbf{S}_\nu^{[q]}$ es el más pequeño simplex entero no colapsado o el menor simplex entero o discreto no colapsado contenido en $\mathbb{Z}^{n \times (n+1)}$, si existe un vértice que equidista de sus otros vértices del simplex entero $\mathbf{S}_\nu^{[q]}$ en 1.*

3. Marco Teórico

Definición 3.25 (Diámetro de un simplex) *Sea un simplex entero definido en el espacio euclidiano \mathbb{Z}^n , o considere un simplex definido en el espacio euclidiano \mathbb{R}^n . Se dice que el diámetro del simplex es la máxima distancia o máxima norma euclidiana de todas sus aristas. En términos matemáticos, el diámetro de un q -ésimo simplex $\mathbf{S}_\nu^{[q]}$ definido en el espacio euclidiano \mathbb{Z}^n puede determinarse a través de*

$$\text{diám}(\mathbf{S}_\nu^{[q]}) = \max_{i \neq j=1, \dots, \nu} \|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j\|, \quad (3.18)$$

donde \mathbf{y}_i y \mathbf{y}_j son dos vértices cualesquiera del q -ésimo simplex entero. Mientras que para un q -ésimo simplex $\mathbf{S}_\nu^{[q]}$ definido en el espacio euclidiano \mathbb{R}^n , su diámetro es definido por

$$\text{diám}(\mathbf{S}_\nu^{[q]}) = \max_{i \neq j=1, \dots, \nu} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|, \quad (3.19)$$

donde \mathbf{x}_i y \mathbf{x}_j son dos vértices cualesquiera del q -ésimo simplex real.

3. Marco Teórico

Lema 3.1 (Diámetro de un menor simplex entero) *Sea un menor simplex entero no colapsado y jerarquizado definido en el espacio euclidiano \mathbb{Z}^n , con $n \geq 2$. Entonces, su diámetro en el sentido de la Definición 3.25 es igual a $\sqrt{2}$.*

Definición 3.26 (Función signo de un entero) *Sea $k \in \mathbb{Z}$ un número escalar entero. Entonces la función signo entero de k y que es denotada por $\text{sgnd}(k)$, se define como*

$$\text{sgnd}(k) = \begin{cases} 1, & \forall k > 0; \\ 0, & \forall k = 0; \\ -1, & \forall k < 0. \end{cases}$$

Definición 3.27 (Función signo de un vector en \mathbb{Z}^n) *Sea $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^t$ un punto cualquiera en el espacio \mathbb{Z}^n . Entonces, la función signo entero del vector \mathbf{y} en el espacio \mathbb{Z}^n se define como*

$$\text{sgnd}(\mathbf{y}) = (\text{sgnd}(y_1), \dots, \text{sgnd}(y_n))^t. \quad (3.20)$$

3. Marco Teórico

Proposición 3.1 (Punto reflejado entero) *Sea*

$\mathbf{S}_\nu^{[q]} = [\mathbf{y}_1 ; \mathbf{y}_2 ; \cdots ; \mathbf{y}_\nu]$ un q -ésimo simplex entero jerarquizado en el espacio euclidiano entero \mathbb{Z}^n . Si el punto reflejado entero \mathbf{y}_r a través del centroide de su hipercara $H_\nu^{[q]} = \{\mathbf{y}_i \in \mathbf{S}_\nu^{[q]} \mid i = 1, \dots, \nu - 1\}$ opuesta al ν -ésimo vértice \mathbf{y}_ν es calculado por

$$\mathbf{y}_r = \mathbf{y}_\nu + \alpha_e \mu \operatorname{sgnd}(\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_\nu), \quad (3.31)$$

donde para un $\alpha_e \in \mathbb{N}(\geq 2)$, el cual es el denominado coeficiente de reflexión entero e $\bar{\mathbf{y}}$ es determinado por

$$\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{\nu - 1} \sum_{i=1}^{\nu-1} \mathbf{y}_i. \quad (3.32)$$

Entonces, se cumple que:

- I) \mathbf{y}_r es vector definido en el espacio entero \mathbb{Z}^n .
- II) \mathbf{y}_r e \mathbf{y}_ν están a sendos lados de la hipercara $H_\nu^{[q]}$.

3. Marco Teórico

Proposición 3.2 (Punto expandido entero) *Sea*

$\mathbf{S}_\nu^{[q]} = [\mathbf{y}_1 ; \mathbf{y}_2 ; \cdots ; \mathbf{y}_\nu]$ un q -ésimo simplex entero jerarquizado definido exclusivamente en el espacio euclidiano entero \mathbb{Z}^n .

Si el punto expandido entero \mathbf{y}_e es definido por

$$\mathbf{y}_e = \mathbf{y}_r + \beta_e \mu \operatorname{sgnd}(\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_\nu), \quad (3.33)$$

donde β_e es un número entero positivo, el cual representa el coeficiente de expansión entero, \mathbf{y}_r es determinado por la Ecuación (3.31) e $\bar{\mathbf{y}}$ es dado por la Ecuación (3.32).

Entonces se cumple que:

- I) \mathbf{y}_e es un punto en el espacio de los números enteros \mathbb{Z}^n .
- II) con respecto al vértice \mathbf{y}_ν , \mathbf{y}_e nunca está más cerca de \mathbf{y}_ν , de lo que está \mathbf{y}_r de \mathbf{y}_ν , es decir, $\|\mathbf{y}_e - \mathbf{y}_\nu\| \geq \|\mathbf{y}_r - \mathbf{y}_\nu\|$.

3. Marco Teórico

Proposición 3.3 (Punto contraído entero) *Sea un q -ésimo simplex entero jerarquizado $\mathbf{S}_\nu^{[q]} = [\mathbf{y}_1 ; \mathbf{y}_2 ; \cdots ; \mathbf{y}_\nu]$ definido únicamente en el espacio euclidiano entero \mathbb{Z}^n . Si el punto contraído entero \mathbf{y}_c es determinado por*

$$\mathbf{y}_c = \mathbf{y}_r - \gamma_e \mu \operatorname{sgnd}(\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_\nu), \quad (3.34)$$

donde γ_e es un número positivo entero llamado coeficiente de contracción entero, \mathbf{y}_r es determinado por la Ecuación (3.31) e $\bar{\mathbf{y}}$ es dado por la Ecuación (3.32).

Entonces, se tiene que:

- I) \mathbf{y}_c es un punto en el espacio de los números enteros \mathbb{Z}^n .
- II) con respecto al vértice \mathbf{y}_ν está más cerca, de lo que está \mathbf{y}_r de \mathbf{y}_ν .

3. Marco Teórico

Proposición 3.5 (Construcción de un simplex entero encogido) *Sea un q -ésimo simplex entero jerarquizado $\mathbf{S}_\nu^{[q]} = [\mathbf{y}_1^{[q]} ; \mathbf{y}_2^{[q]} ; \dots ; \mathbf{y}_\nu^{[q]}]$ definido solamente en el espacio euclidiano entero \mathbb{Z}^n . Si $0 < \delta_e < 1$ es el coeficiente de encogimiento entero, y además,*

$$\mathbf{D}^{[q]} = [\mathbf{d}_1^{[q]} ; \mathbf{d}_2^{[q]} ; \dots ; \mathbf{d}_{\nu-1}^{[q]}] = \lceil \delta_e A_1^{[q]} \rceil, \quad (3.35)$$

donde $A_1^{[q]}$ es la matriz de arista de $\mathbf{S}_\nu^{[q]}$ con respecto al vértice $\mathbf{y}_1^{[q]}$. Entonces, se cumple que:

I) la matriz formada por

$$\tilde{\mathbf{S}}_\nu^{[q+1]} = [\mathbf{y}_1^{[q]} ; \mathbf{y}_1^{[q]} + \mathbf{d}_1^{[q]} ; \mathbf{y}_1^{[q]} + \mathbf{d}_2^{[q]} ; \dots ; \mathbf{y}_1^{[q]} + \mathbf{d}_{\nu-1}^{[q]}], \quad (3.36)$$

es un simplex compuesto de elementos enteros.

II) Las aristas del simplex $\tilde{\mathbf{S}}_\nu^{[q+1]}$ con respecto al vértice $\mathbf{y}_1^{[q]}$ nunca son mayores a las aristas del simplex $\mathbf{S}_\nu^{[q]}$ con respecto al vértice $\mathbf{y}_1^{[q]}$, en consecuencia el nuevo simplex es igual o menor en tamaño.

3. Marco Teórico

Proposición 3.6 (Construcción de un simplex entero) Sea \mathbb{Z}^n el espacio euclidiano de los números enteros y un punto

$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^t \in \mathbb{Z}^n$. Entonces, la matriz \mathbf{E} de dimensión $n \times (n + 1)$ dada por

$$\mathbf{E} = \underbrace{[\mathbf{y}; \cdots; \mathbf{y}]}_{n+1} + [\mathbf{0}_n; \underbrace{\text{diag}\{k, \dots, k\}}_n], \quad (3.37)$$

donde $\mathbf{0}_n$ es un vector nulo de dimensión n , $\text{diag}\{k, \dots, k\}$ denota

una matriz diagonal de dimensión $n \times n$, y $k \neq 0$, es un número perteneciente a \mathbb{Z} , constituye un simplex entero completo en el sentido de la Definición 3.20 de la lámina 25.



4. Marco Metodológico

- Desarrollo de algoritmos
- Análisis teórico de algoritmos de optimización
- Análisis estadístico de algoritmos de optimización

5. ASE

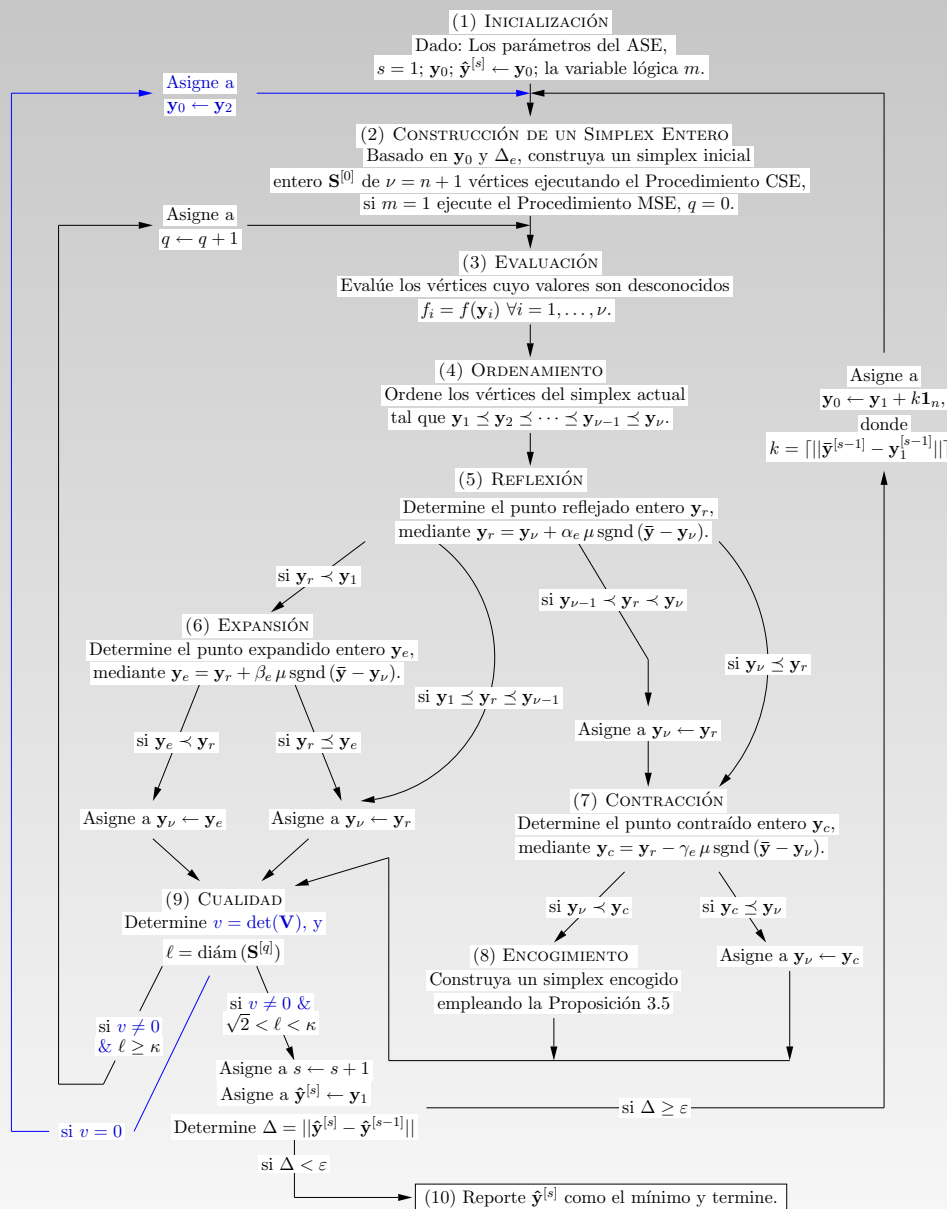


Figura 5.1. Grafo del Algoritmo Simplex Entero

5. ASER: sintonización

Tabla 5.8. Parámetros de sintonización del ASER

Parámetros	Δ	α	β	γ	δ
Valores	1	2	2	1	0,4

5. ASER: ejemplos numéricos

Tabla 5.9. Resultados de ejemplos numéricos: grupo 1

Problema	d	NE	DPC	Óptimo		Vértice inicial
				$f(\hat{y})$	\hat{y}	y_0
FCZ[2]	2	46	0	0	$\mathbf{0}_d$	$\mathbf{10}_d$
FCZ[5]	5	350	0	0	$\mathbf{0}_d$	$\mathbf{10}_d$
FCZ[16]	16	1341	0	0	$\mathbf{0}_d$	$\mathbf{10}_d$
FMcKZ[2]	2	44	0	-1	$\mathbf{0}_d$	$\mathbf{10}_d$
FMcKZ[6]	6	271	0	-3	$\mathbf{0}_d$	$\mathbf{10}_d$
FMcKZ[10]	10	269	0	-5	0_d	$\mathbf{10}_d$
FMcKZ[16]	16	549	0	-8	0_d	$\mathbf{10}_d$
FRZ[2]	2	47	15,3	9	$(4, 16)^t$	$\mathbf{10}_d$
FRZ[2]	2	27	1	1	$(1, 2)^t$	$-\mathbf{10}_d$
FRZ[2]	2	52	0	0	$\mathbf{1}_d$	$-\mathbf{8}_d$
FRZ[2]	2	35	0	0	$\mathbf{1}_d$	$-\mathbf{5}_d$
FRZ[6]	6	109	0	0	$\mathbf{1}_d$	$-\mathbf{8}_d$
FRZ[10]	10	163	0	0	$\mathbf{1}_d$	$-\mathbf{8}_d$
FRZ[16]	16	247	0	0	$\mathbf{1}_d$	$-\mathbf{8}_d$
FFRZ[2]	2	53	0	0	$(5, 4)^t$	$\mathbf{10}_d$
FFRZ[2]	2	18	0	0	$(5, 4)^t$	$\mathbf{5}_d$

5. ASER: ejemplos numéricos

Tabla 5.10. Resultados de ejemplos numéricos: grupo 2

Problema	d	NE	DPC	Óptimo		Vértice inicial
				$f(\hat{y})$	\hat{y}^t	y_0
FBZ[2]	2	47	0	0	(5,2)	10_d
FBZ[2]	2	97	0	0	(5,2)	$(-10, 2)^t$
FPSZ[4]	4	130	1,41	6	(1,0,0,1)	10_d
FPSZ[4]	4	71	0	0	(0,0,0,0)	-5_d
FEBZ[2]	2	46	0	1	(0,0)	10_d
FEBZ[2]	2	55	0	1	(0,0)	20_d
FEBZ[2]	2	44	0	1	(0,0)	-10_d
FEBZ[3]	3	37	0	1	(7,14,7)	10_d
FEBZ[3]	3	51	0	1	(-7,-13,-6)	-10_d
FEBZ[3]	3	34	0	1	(4,7,3)	5_d
FPUR-T1-6Z[2]	2	134	26,04	4	(3,27)	10_d
FPUR-T1-6Z[2]	2	37	7,07	1	(2,8)	5_d
FPUR-T1-6Z[2]	2	63	0	0	(1,1)	3_d
FSUR-T1-8Z[3]	3	174	0	0	(1,10,1)	10_d
FSUR-T1-8Z[3]	3	47	0	0	(1,10,1)	$(10, 0, 10)^t$
FSUR-T1-8Z[3]	3	82	0	0	(1,10,1)	$(20, -10, 20)^t$
FSUR-T1-8Z[3]	3	240	0	0	(1,10,1)	$(-20, -10, -20)^t$
FSUR-T1-8Z[3]	3	294	0	0	(1,10,1)	$(-20, -20, -20)^t$
FG-Z[4]	4	369	0	$7,77863 \times 10^{-7}$	(12,32,12,31)	10_d

5. ASER: ejemplos numéricos

Tabla 5.11. Resultados de ejemplos numéricos: grupo 3

Problema	d	NE	DPC	Óptimo		Vértice
				$f(\hat{y})$	\hat{y}^t	y_0
FCVRZ[1]	1	26	0	0,226757	(0)	10_d
FCVRZ[2]	2	38	0	0,229969	(0,1)	10_d
FCVRZ[3]	3	70	0	0,364423	(0,0,1)	10_d
FCVRZ[4]	4	113	0	0,408304	(0,0,1,1)	10_d
FCVRZ[5]	5	124	0	0,527278	(0,0,0,1,1)	10_d
FCVRZ[6]	6	136	0	0,579845	(0,0,0,1,1,1)	10_d
FCVRZ[7]	7	202	0	0,689377	(0,0,0,0,1,1,1)	10_d
FCVRZ[8]	8	255	0	0,749185	(0,0,0,0,1,1,1,1)	10_d
FCVRZ[9]	9	311	0	0,853250	(0,0,0,0,0,1,1,1,1)	10_d
FCVRZ[10]	10	339	0	0,917539	(0,0,0,0,0,1,1,1,1,1)	10_d
FCVRZ[12]	12	305	0	1,085368	(0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1)	10_d
FCVRZ[16]	16	813	0	1,420198	(0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1)	10_d
FCVRZ[19]	19	948	0	1,680874	(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1)	10_d
FCVRZ[20] ^a	20	1395	0	1,754453	(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)	10_d
FCVRZ[20] ^b	20	1621	0	1,754453	(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)	10_d
FCVRZ[2]	2	46	0	0,229969	(0,1)	-10_d
FCVRZ[4]	4	73	0	0,408304	(0,0,1,1)	-10_d
FCVRZ[8]	8	224	0	0,749185	(0,0,0,0,1,1,1,1)	-10_d
FCVRZ[12]	12	302	0	1,085368	(0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1)	-10_d
FCVRZ[16]	16	1093	0	1,420198	(0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1)	-10_d
FCVRZ[20] ^c	20	1396	0	1,754453	(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)	-10_d

6. ASEM

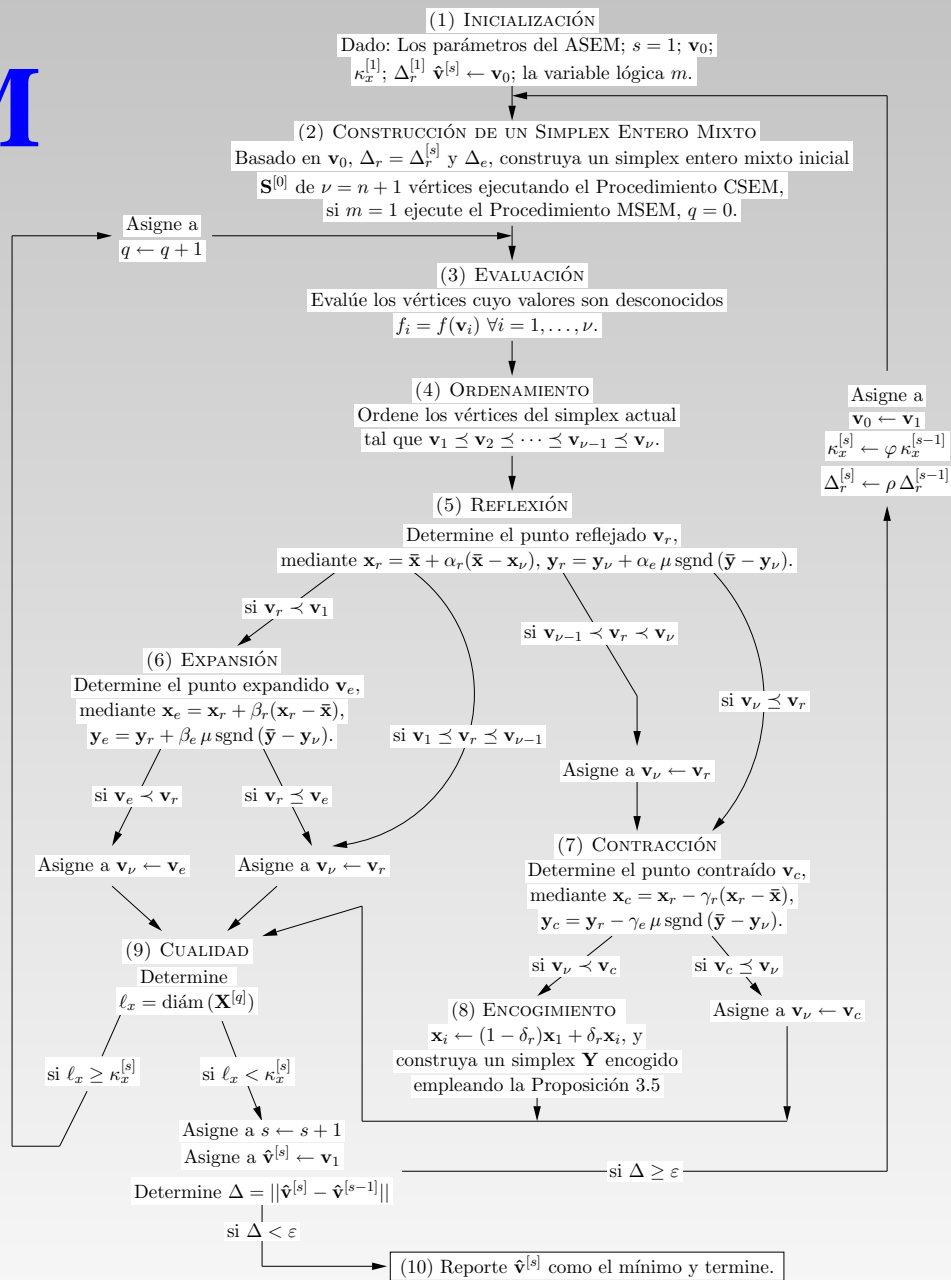


Figura 6.1. Grafo del Algoritmo Simplex Entero Mixto

6. ASEM: sintonización

Tabla 6.3. Parámetros establecidos para el ASEM

Parámetros	ε	ρ	φ	$k_x^{[1]}$	
Valores	0,1	0,8	0,3	1	
Parámetros	Δ_r	α_r	β_r	γ_r	δ_r
Valores	1	1	2	0,5	0,5
Parámetros	Δ_e	α_e	β_e	γ_e	δ_e
Valores	1	2	2	1	0,4

6. ASEM: comparación

Tabla 6.6. Esfuerzo computacional de los problemas enteros mixtos $\mathbb{R}^{10} \times \mathbb{Z}^{10}$ y $\mathbb{R}^{20} \times \mathbb{Z}^{20}$

Problema	Reportado en	$f(\hat{\mathbf{v}})$			Total	
		ASEM	Teórico	$\mathcal{O}(e)$	NE	NI
FCDRZ[10 + 10]	Figura 6.4	0,777777777837533	$\frac{7}{9}$	10^{-10}	15.428	10.553
FPMRZ[10 + 10]	Figura 6.6	0,00596898501698284	0	10^{-3}	2.172	927
FRRZ[10 + 10]	Figura 6.10	$6,1531 \times 10^{-13}$	0	10^{-13}	10.213	6.677
FCDRZ[20 + 20]	Figura 6.5	1,55555555557834	$\frac{14}{9}$	10^{-11}	68.884	53.399
FPMRZ[20 + 20]	Figura 6.7	$3,07 \times 10^{-5}$	0	10^{-5}	27.897	17.457
FRRZ[20 + 20]	Figura 6.11	$4,75 \times 10^{-6}$	0	10^{-6}	48.777	36.038

7. Aplicaciones en la Ingeniería

7.1. Tanque presurizado

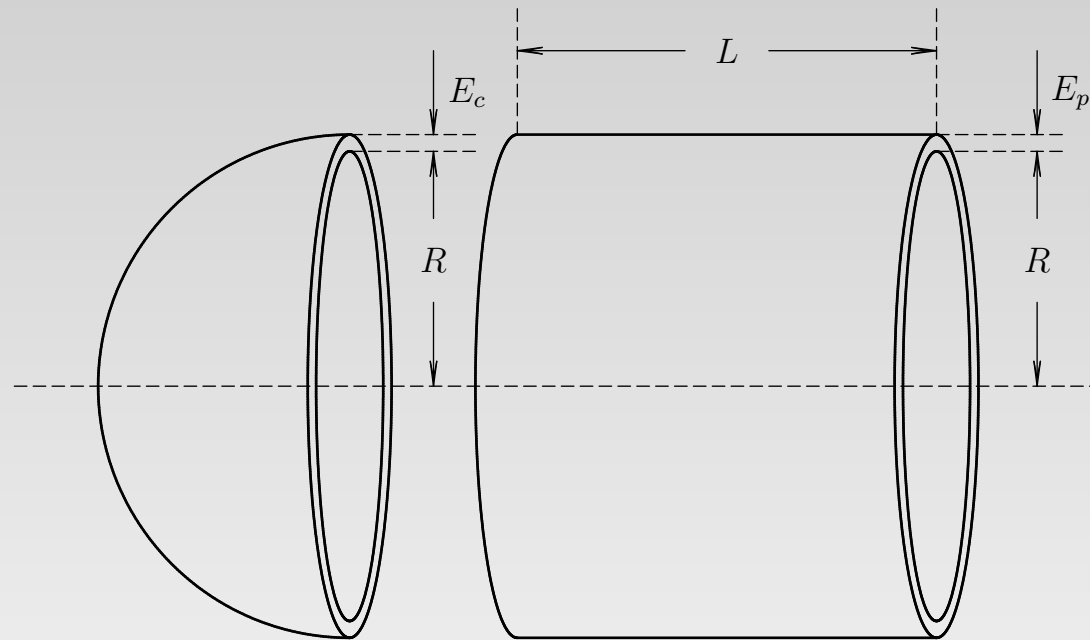


Figura 7.1. Diseño óptimo de un tanque cilíndrico presurizado

7. Aplicaciones en la Ingeniería

7.1. Tanque presurizado

Problema 7.1.

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^2}{\text{minimice}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

donde

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0,6224y_1x_1x_2 + 1,7781y_2x_1^2 + 3,1661y_1^2x_2 + 19,84y_2^2x_1, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^2. \quad (7.1)$$

Sujeto a:

$$g_1 : 0,0193x_1 - y_1 \leq 0;$$

$$g_2 : 0,00954x_1 - y_2 \leq 0;$$

$$g_3 : 1296000 - \pi x_1^2 x_2 - \frac{4}{3} \pi x_1^3 \leq 0;$$

$$g_4 : x_2 - 240 \leq 0;$$

$$b_1 : 0 \leq x_1 \leq 200;$$

$$b_2 : 0 \leq x_2 \leq 200;$$

$$b_3 : 0 \leq y_1 \leq 100;$$

$$b_4 : 0 \leq y_2 \leq 100.$$

(7.2)

7. Aplicaciones en la Ingeniería

7.1. Tanque presurizado

Tabla 7.1. Resultados comparativos en el problema del diseño óptimo de un envase presurizado

Algoritmo	$f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	$S(L, R)$ [in ²]	Variables medidas en pulgadas [in]			
			$R(x_1)$	$L(x_2)$	$E_p(y_1)$	$E_c(y_2)$
GADYM	6.062,65	69.026,731	42,098	176,769	0,4357	0,8125
GRTA	6.059,58	68.992,022	42,098	176,634	0,4375	0,8125
NM-PSO	5.930,31	69.511,951	41,639	182,412	0,3972	0,8036
GRG	9.664,09	74.691,075	37,692	240,000	$1 \left(\frac{1}{16}\right)$	$1 \left(\frac{1}{16}\right)$
ASEM*	8.796,92	60.623,882	51,807	82,627	$1 \left(\frac{1}{16}\right)$	$1 \left(\frac{1}{16}\right)$

* Resultado obtenido con 440 evaluaciones de la función objetivo.

7. Aplicaciones en la Ingeniería

7.2. Resorte

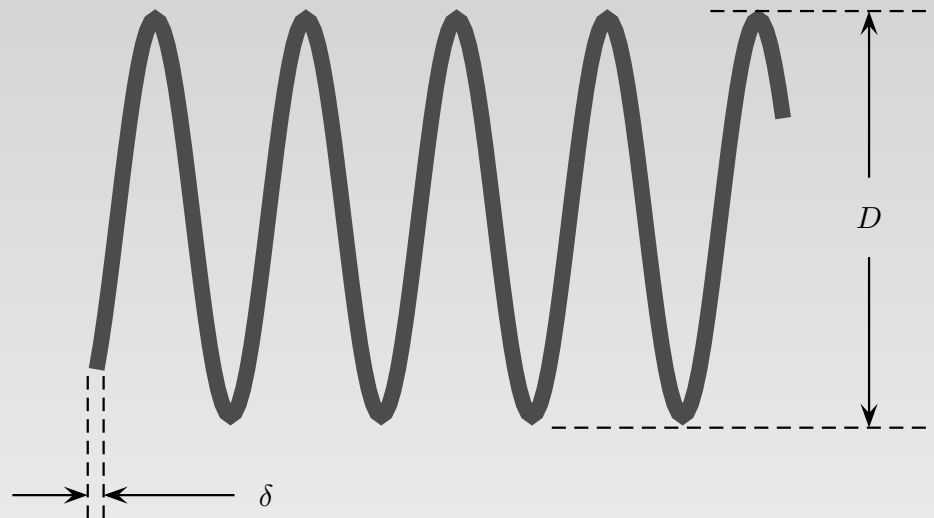


Figura 7.2. Diseño óptimo de un resorte helicoidal de compresión y extensión

7. Aplicaciones en la Ingeniería

7.2. Resorte

Problema 7.2.

minimice $f(\mathbf{x}, y_1)$,
 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, y_1 \in \mathbb{Z}$

donde

$$f(\mathbf{x}, y) = (2 + y_1)x_1^2x_2, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, y_1 \in \mathbb{Z}. \quad (7.3)$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} g_1 &: 1 - \frac{x_2^2 y_1}{71785 x_1^4} \leq 0; \\ g_2 &: \frac{4x_2^2 - x_1 x_2}{12566(x_2 x_1^3 - x_1^4)} + \frac{1}{5108 x_1^2} - 1 \leq 0; \\ g_3 &: 1 - \frac{140,45 x_1}{x_2^2 y_1} \leq 0; \\ g_4 &: \frac{x_1 + x_2}{1,5} - 1 \leq 0; \\ b_1 &: 0,05 \leq x_1 \leq 2; \\ b_2 &: 0,25 \leq x_2 \leq 1,3; \\ b_3 &: 2 \leq y_1 \leq 15. \end{aligned} \quad (7.4)$$

7. Aplicaciones en la Ingeniería

7.2. Resorte

Tabla 7.2. Resultados comparativos en el problema del diseño óptimo de un resorte

Algoritmo	$f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	Variables de decisión o diseño		
		Reales en pulgadas [in]		Entera
		$d(x_1)$	$D(x_2)$	$N(y_1)$
NM-PSO	0,0126302	0,051706	0,357126	11,265083
ASEM*	0,0119269	0,050953	0,765656	4

* Resultado obtenido con 172 evaluaciones de la función objetivo.

7. Aplicaciones en la Ingeniería

7.3. Caja reductora

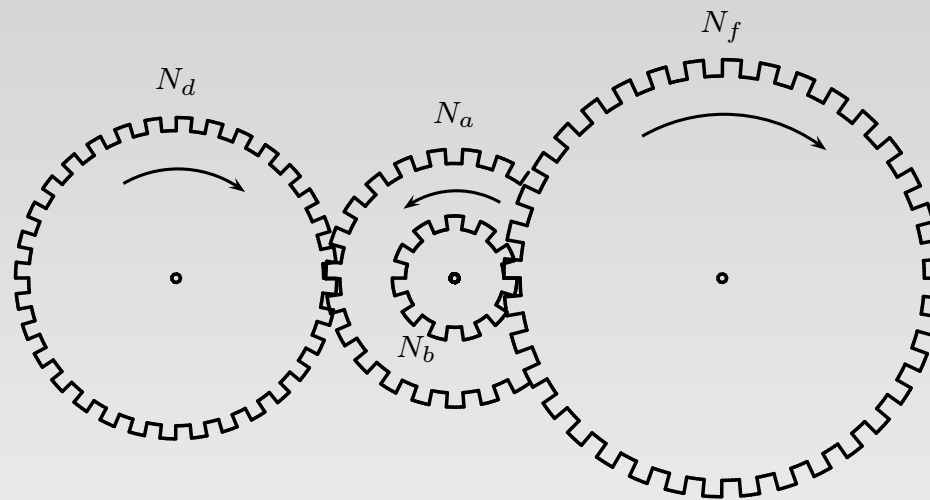


Figura 7.3. Esquema de una caja reductora de cuatro engranajes

7. Aplicaciones en la Ingeniería

7.3. Caja reductora

Problema 7.3

minimice $f(\mathbf{y})$,
 $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^4$

donde

$$f(\mathbf{y}) = \left(\frac{1}{6,931} - \frac{y_1 y_2}{y_3 y_4} \right)^2, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^4. \quad (7.5)$$

Sujeto a:

$$b_i : 12 \leq y_i \leq 60 \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}. \quad (7.6)$$

7. Aplicaciones en la Ingeniería

7.3. Caja reductora

Tabla 7.3. Resultados comparativos en el problema del diseño óptimo de una caja reductora

Algoritmo	$f(\mathbf{y})$	Número de dientes			
		$N_d(y_1)$	$N_b(y_2)$	$N_a(y_3)$	$N_f(y_4)$
PSOSA	$2,70 \times 10^{-12}$	19	16	43	49
GA	$1,83 \times 10^{-8}$	12	12	27	37
QIPSO	$2,33 \times 10^{-11}$	15	26	51	53
ASER*	$7,78 \times 10^{-7}$	12	12	32	31

* Resultado obtenido con 396 evaluaciones de la función objetivo.

7. Aplicaciones en la Ingeniería

7.4. Motor eléctrico

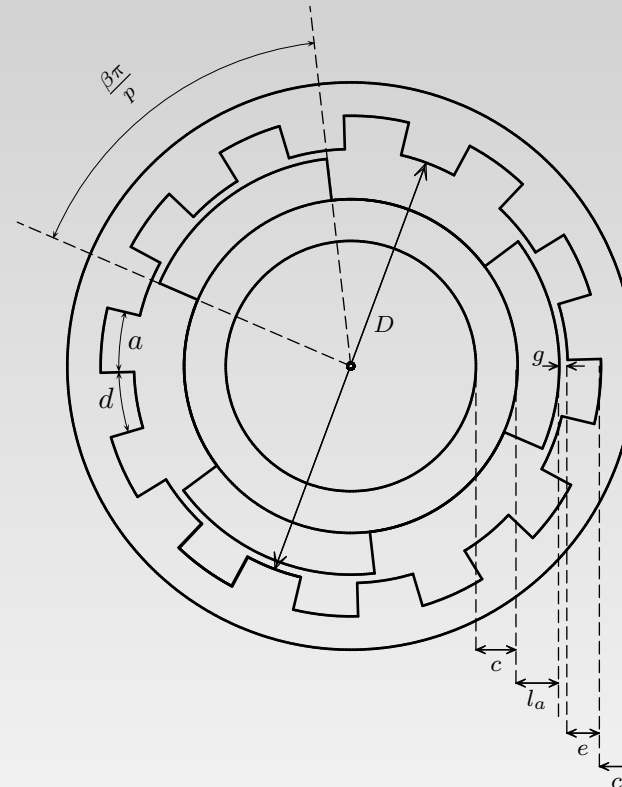


Figura 7.4. Motor de imán permanente de configuración de rotor interno

7. Aplicaciones en la Ingeniería

7.4. Motor eléctrico

Del modelo matemático de Fitan *et al.* (2003),

$$P_J(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \pi k_t J^2 \rho_{cu} \frac{x_1 x_3 x_5 x_7}{x_6 + x_7}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^7, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^2, \quad (7.7)$$

y el par de la máquina es

$$T_{em}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} M(\sigma_m) k_t J \frac{x_1 x_2 x_3 x_5 x_7}{x_6 + x_7} \frac{1}{\ln\left(\frac{x_1}{x_1 - 2(x_2 + g)}\right)} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^7, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^2. \quad (7.8)$$

7. Aplicaciones en la Ingeniería

7.4. Motor eléctrico

Problema 7.4 (Mínima pérdida y máximo par).

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^7, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^2}{\text{minimice}} \frac{P_J(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{T_{em}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}. \quad (7.9)$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} h_1 : \pi(x_1 + x_3) - 6y_1y_2(x_6 + x_7) &= 0; \\ g_1 : 2x_4 + 2(x_2 + g) - x_1 &\leq 0; \\ b_1 : 60 \leq x_1 &\leq 200; \\ b_2 : 3 \leq x_2 &\leq 50; \\ b_3 : 3 \leq x_3 &\leq 50; \\ b_4 : 3 \leq x_4 &\leq 50; \\ b_5 : 20 \leq x_5 &\leq 200; \\ b_6 : 4 \leq x_6 &\leq 50; \\ b_7 : 2 \leq x_7 &\leq 50; \\ b_8 : 1 \leq y_1 &\leq 6; \\ b_9 : 1 \leq y_2 &< \infty. \end{aligned} \quad (7.10)$$

7. Aplicaciones en la Ingeniería

7.4. Motor eléctrico

Problema 7.5 (Máximo par).

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^7, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^2}{\text{minimice}} \frac{1}{T_{em}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}. \quad (7.11)$$

Sujeto a:

$$h_1 : \pi(x_1 + x_3) - 6y_1y_2(x_6 + x_7) = 0;$$

$$g_1 : 2x_4 + 2(x_2 + g) - x_1 \leq 0;$$

$$b_1 : 60 \leq x_1 \leq 200;$$

$$b_2 : 3 \leq x_2 \leq 50;$$

$$b_3 : 3 \leq x_3 \leq 50;$$

$$b_4 : 3 \leq x_4 \leq 50;$$

$$b_5 : 20 \leq x_5 \leq 200;$$

$$b_6 : 4 \leq x_6 \leq 50;$$

$$b_7 : 2 \leq x_7 \leq 50;$$

$$b_8 : 1 \leq y_1 \leq 6;$$

$$b_9 : 1 \leq y_2 < \infty.$$

(7.12)

7. Aplicaciones en la Ingeniería

7.4. Motor eléctrico

Tabla 7.4. Resultados de los diseños óptimos de un motor de imán permanente

Variables de diseño del motor: Problema 7.4										
		Reales [mm]							Enteras	
NE	P_J/T_{em}	$D(x_1)$	$l_a(x_2)$	$e(x_3)$	$c(x_4)$	$L(x_5)$	$d(x_6)$	$a(x_7)$	$p(y_1)$	$m(y_2)$
17508	0,003519	94,41	35,18	11,77	11,08	20,00	8,77	9,76	1	3
Variables de diseño del motor: Problema 7.5										
		Reales [mm]							Enteras	
NE	$1/T_{em}$	$D(x_1)$	$l_a(x_2)$	$e(x_3)$	$c(x_4)$	$L(x_5)$	$d(x_6)$	$a(x_7)$	$p(y_1)$	$m(y_2)$
44581	0,042707	93,69	34,91	10,76	10,978	20,40	9,34	8,90	1	3

8. Conclusiones

- a) La estructura del simplex junto a operaciones en el campo de los números enteros resultó apropiado para la identificación de óptimos en problema irrestrictos.
- b) Los problemas de optimización enteros mixtos han requerido propuestas de métodos libres de derivadas, dentro de los cuales se ha formulado el Algoritmo Simplex Entero Mixto (ASEM)
- c) Tanto el Algoritmo Simplex Entero Relajado (ASER) como el Algoritmo Simplex Entero Mixto (ASEM) mostraron ser lo suficientemente eficientes ante problemas de diseño óptimo.

9. Futuras investigaciones

- a) El estudio teórico de condiciones de optimalidad dentro de la programación no lineal entera mixta sería un interesante tema de investigación. Un tratado que puede ser guía en el desarrollo de este tema es el propuesto por Guignard (2003).
- b) El desarrollo de funciones de penalización para el empleo del Algoritmo Simplex Entero (ASE) y Algoritmo Simplex Entero Mixto (ASEM) a problemas bajo restricciones, puede constituir un importante trabajo de investigación, debido a las innumerables aplicaciones que tiene este tipo de problemas.

9. Futuras investigaciones

- c) El desarrollo de una interfaz para la aplicación del ASEM como método de optimización por simulación de sistemas dinámicos de eventos discretos (SDEDs). En esta propuesta debería incluirse criterios de optimización de número de muestras o réplicas para cada punto de evaluación del modelo de simulación del sistema dinámico de eventos discretos (SDED) bajo estudio, tal como los criterios propuestos por Shi y Chen (2000); Chen *et al.* (2000a,b, 2008), para lograr maximizar la probabilidad de distinguir la precedencia de los distintos puntos de diseño definidos por los vértices del simplex entero mixto.
- d) El desarrollo de un método híbrido formado por el método de *particiones anidadas* de Shi y Ólafsson (2000) y el ASEM, a objeto de identificar el óptimo global a problemas bajo restricciones.



¡Gracias realmente por su atención!

Ebert



¿Preguntas?



Función gear train: FG-Z[4]

La propuesta original es:

$$f(\mathbf{y}) = \left(\frac{1}{6,931} - \frac{y_1 y_3}{y_2 y_4} \right)^2, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^4,$$

sujeto a:

$$12 \leq y_i \leq 60, \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

El problema fue definido como

$$f(\mathbf{y}) = \left(\frac{1}{6,931} - \frac{y_1 y_3}{y_2 y_4} \right)^2 + 1000 \sum_{i=1}^4 (\max(12 - y_i, 0) + \max(y_i - 60, 0)),$$
$$\forall \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^4.$$

Solución. La mejor solución reportada (Leyffer, 2009) para este problema es

$$f(\hat{\mathbf{y}}) = 7,77863 \times 10^{-7}$$

Referencias

- Ahmed, S. 2001. Derivative Free Optimization in Higher Dimension. *International Transactions in Operational Research*, 8(3):285–304.
- Audet, C. y Dennis Jr., J. E. 2001. Pattern Search Algorithms for Mixed Variable Programming. *SIAM Journal on Optimization*, 11(3):573–594.
- Barton, R. R. y Ivey Jr., J. S. 1996. Nelder-Mead simplex modifications simulation optimization. *Management Science*, 42(7):954–973.
- Box, G. E. P. y Behnken, D. W. 1960. Simplex-Sum Designs: A Class of Second Order Rotatable Designs Derivable From Those of First Order. *The Annals of Mathematical Statistics*, 31(4):838–864.
- Brea, E. 2004. *Nelder-Mead Optimization Under Linear Constraints*. Ph.D. Thesis, University of Southampton.
- Brea, E. 2009. Optimización de balance de cargas en sistemas de distribución de energía eléctrica. *Revista de la Facultad de Ingeniería de la UCV*, 24(3). Aceptado para su publicación.
- Brea, E. y Cheng, R. C. H. 2003. Optimisation of four queue network via Nested Partition method. *International Journal of Simulation, Systems, Science & Technology*, 4(1/2):23–28.
- Brea, E. y Cheng, R. C. H. 2009. Slow convergence of the Nelder-Mead method when constraints are present: An example. *Applied Mathematics and Computation*. Submitted in May 2009.
- Chelouah, R. y Siarry, P. 2003. Genetic and Nelder-Mead algorithms hybridized for a more accurate global optimization of continuous multimimima functions. *European Journal of Operational Research*, 148(2):335–348.
- Chen, C.-H., Chen, H.-C., y Yücesan, E. 2000a. Computing efforts allocation for ordinal optimization and discrete event simulation. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 45(5):960–964.

- Chen, C.-H., He, D., Fu, M., y Lee, L. H. 2008. Efficient Simulation Budget Allocation for Selecting an Optimal Subset. *INFORMS Journal on Computing*, 20(4):579–595.
- Chen, C.-H., Lin, J., Yücesan, E., y Chick, S. E. 2000b. Simulation budget allocation for further enhancing the efficiency of ordinal optimization. *Discrete Event Dynamic Systems. Theory and Applications*, 10(3):251–270.
- Duran, M. y Grossmann, I. 1986. An outer-approximation algorithm for a class of mixed-integer nonlinear programs. *Mathematical Programming*, 36(3):307–339.
- Fitan, E., Messine, F., y Nogarede, B. 2003. A general analytical model of electrical permanent magnet machine dedicated to optimal design. *COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 22(4):1037–1050. Emerald Group Publishing Limited.
- Floudas, C. A. 1995. *Nonlinear and mixed-integer optimization: fundamentals and applications*. Oxford University Press, New York. Christodoulos A. Floudas. Topics in chemical engineering.
- Guignard, M. 2003. Lagrangean relaxation. *TOP*, 11(2):151–200. Journal of the Spanish Society of Statistics and Operations Research (Sociedad de Estadística e Investigación Operativa).
- Han, L. y Neumann, M. 2006. Effect of dimensionality on the Nelder-Mead simplex method. *Optimization Methods & Software*, 21(1):1–16.
- Holmberg, K. 1990. On the convergence of cross decomposition. *Mathematical Programming*, 47(1):269–296.
- Holmberg, K. 1994. A convergence proof for linear mean value cross decomposition. *Mathematical Methods of Operations Research*, 39(2):157–186.
- Holmberg, K. 1998. Creative modeling: Variable and constraint duplication in primal - dual decomposition methods. *Annals of Operations Research*, 82(0):355–390.
- Hooke, R. y Jeeves, T. A. 1961. “Direct Search” Solution of Numerical and Statistical Problems. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 8(2):212–229.
- Humphrey, D. G. y Wilson, J. R. 2000. A revised simplex procedure for stochastic simulation response surface optimization. *INFORMS Journal on Computing*, 12(4):272–283.
- Kelley, C. T. 1999. Detection and remediation of stagnation in the Nelder-Mead algorithm using a sufficient decrease condition. *SIAM Journal on Optimization*, 10(1):43–55.
- Lagarias, J. C., Reeds, J. A., Wright, M. H., y Wright, P. E. 1998. Convergence properties of the Nelder-Mead Simplex method in low dimensions. *SIAM Journal on Optimization*, 9(1):112–147.
- Leyffer, S. 2009. MacMINLP: AMPL collection of Mixed Integer Nonlinear Programming (MINLP) test problems. Available at <http://wiki.mcs.anl.gov/leyffer/index.php/MacMINLP>.

- Luersen, M., Le Riche, R., y Guyon, F. 2004. A constrained, globalized, and bounded Nelder-Mead method for engineering optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 27(1):43–54.
- Luersen, M. A. y Le Riche, R. 2004. Globalized Nelder-Mead method for engineering optimization. *Computers & Structures: Computational Structures Technology*, 82(23-26):2251–2260.
- McKinnon, K. I. M. 1998. Convergence of the Nelder-Mead Simplex method to a nonstationary point. *SIAM Journal on Optimization*, 9(1):148–158.
- Nelder, J. A. y Mead, R. 1965. A simplex method for function minimization. *The Computer Journal*, 7:308–313.
- Nelder, J. A. y Mead, R. 1966. A simplex method for function minimization-Errata. *The Computer Journal*, 8:27.
- Price, C. J., Coope, I. D., y Byatt, D. 2002. A convergent variant of the Nelder-Mead algorithm. *Journal of Optimization: Theory and Applications*, 113(1):5–19.
- Rothberg, E. 2007. An Evolutionary Algorithm for Polishing Mixed Integer Programming Solutions. *INFORMS Journal on Computing*, 19(4):534–541.
- Shi, L. y Chen, C.-H. 2000. A new algorithm for stochastic discrete resource allocation optimization. *Discrete Event Dynam. Systems: Theory and Applications*, 10(3):271–294.
- Shi, L. y Ólafsson, S. 2000. Nested Partitions method for global optimization. *Operations Research*, 48(3):390–407.
- Spendley, W., Hext, G. R., y Himsworth, F. R. 1962. Sequential application of simplex designs in optimisation and evolutionary operation. *Technometrics*, 4(4):441–461.
- Subrahmanyam, M. B. 1989. An extension of the simplex method to constrained nonlinear optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 62(2):311–319.
- Tawarmalani, M. y Sahinidis, N. V. 2002. *Convexification and global optimization in continuous and mixed-integer nonlinear programming: theory, algorithms, software, and applications*. Nonconvex optimization and its applications; v. 65. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston.
- Tawarmalani, M. y Sahinidis, N. V. 2004. Global optimization of mixed-integer nonlinear programs: A theoretical and computational study. *Mathematical Programming*, 99(3):563–591.
- Wu, D. e Ierapetritou, M. 2006. Lagrangean decomposition using an improved Nelder-Mead approach for Lagrangean multiplier update. *Computers & Chemical Engineering*, 30(5):778–789.
- Zahara, E. y Kao, Y.-T. 2009. Hybrid Nelder-Mead simplex search and particle swarm optimization for constrained engineering design problems. *Expert Systems with Applications*, 36(2, Part 2):3880–3886.

Acrónimos

ASE Algoritmo Simplex Entero

ASEM Algoritmo Simplex Entero Mixto

ASER Algoritmo Simplex Entero Relajado

BB ramificación y borde

BD búsqueda directa

BSR Búsqueda de Simplex Revisado

CSE Construcción de un Simplex Entero

CSEM Construcción de un Simplex Entero Mixto

DDE diseño de experimentos

DPC distancia al punto cierto

DS búsqueda directa

GBD Descomposición Generalizada de Benders

GA Algoritmo Genético

GADYM estructura de Genero y Edad sintonizando parámetros Dinámicos y esquemas de autoperfección Mandatoria

GCD Generalizada Descomposición Cruzada

GMPSO Optimización de Enjambre de Partículas con Mutación Gaussiana

GRG Gradiente Reducido Generalizado

GRTA Algoritmo de Excavación de Túnel Aleatorio Generalizado

MANM método algorítmico de Nelder-Mead

MFP método de Función de Penalización

MNM método de Nelder-Mead

MSE Mejoramiento de un Simplex Entero

MSEM Mejoramiento de un Simplex Entero Mixto

NE número de evaluaciones

NI número de iteraciones

NM-PSO método de búsqueda simplex de Nelder-Mead y Optimización de Enjambre de Partículas

PSO Optimización de Enjambre de Partículas

PSOSA Optimización de Enjambre de Partículas y Templado Simulado

OA Aproximaciones por Fuera

OE optimización entera

OEM optimización entera mixta

OLEM optimización lineal entera mixta

ONL optimización no lineal

ONLEM optimización no lineal entera mixta

QIPSO Optimización de Interpolación Cuadrática de Enjambre de Partículas

SDED sistema dinámico de eventos discretos

SDEDS sistemas dinámicos de eventos discretos