

## **TRABAJO ESPECIAL DE GRADO**

### **EVALUACIÓN DEL DESEMPEÑO DE UN MÉTODO MIMÉTICO APLICADO A LA ECUACIÓN DE CONDUCCIÓN UNIDIMENSIONAL DE CALOR EN RÉGIMEN TRANSITORIO.**

Presentado ante la Ilustre  
Universidad Central de Venezuela

Por los bachilleres:

**Fernández De F., Fernando J.**

**Rocha C., Francisco J.**

Para optar al título de Ingeniero Mecánico.

Profesor Guía: Francisco García.

Caracas 2006

**TRABAJO ESPECIAL DE GRADO**

**EVALUACIÓN DEL DESEMPEÑO DE UN MÉTODO MIMÉTICO  
APLICADO A LA ECUACIÓN DE CONDUCCIÓN UNIDIMENSIONAL DE  
CALOR EN RÉGIMEN TRANSITORIO.**

TUTOR ACADÉMICO: **Prof. Francisco García**

Presentado ante la ilustre  
Universidad Central de Venezuela

Por los bachilleres:

**Fernández De F., Fernando J.**

**Rocha C., Francisco J.**

Para optar al título de Ingeniero Mecánico.

Caracas 2006

Caracas, febrero del 2006

## ACTA

Los abajo firmantes, miembros de Jurado por el Consejo de Escuela de Ingeniería Mecánica, para evaluar el Trabajo Especial de Grado presentado por los bachilleres Fernández De Freitas Fernando José y Rocha Caldeira Francisco Javier, Titulado:

**“EVALUACIÓN DEL DESEMPEÑO DE UN MÉTODO MIMÉTICO  
APLICADO A LA ECUACIÓN DE CONDUCCIÓN UNIDIMENSIONAL DE  
CALOR EN RÉGIMEN TRANSITORIO”**

Consideran que el mismo cumple con los requisitos exigidos por el plan de estudios conducente al Título de Ingeniero Mecánico.

Prof. Manuel Martínez  
Jurado



Prof. Juan Guevara  
Jurado

Prof. Francisco García  
Profesor Guía



Los suscritos, Miembros del Jurado Examinador designado por el Consejo de la Escuela de Ingeniería Mecánica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Central de Venezuela, para evaluar el Trabajo Especial de Grado presentado por los bachilleres: FERNANDO FERNANDEZ , portador de la Cedula de Identidad N° 13.042.791 y FRANCISCO ROCHA portador de la Cédula de Identidad N° 15.200.802, el cual lleva por título:


**“ EVALUACION DEL DESEMPEÑO DE UN METODO MIMETICO APLICADO A LA ECUACION DE CONDUCCION UNIDIMENSIONAL DE CALOR EN REGIMEN TRANSITORIO”.**

**Decidimos conferirle una:**

## **MENCION HONORIFICA**

En reconocimiento al esfuerzo realizado como estímulo a la actividad creativa desmostrada en el transcurso de la elaboración de este Trabajo Especial de Grado, el cual constituye un aporte importante.

En fe de lo anteriormente expuesto se levanta la presente Acta en la ciudad de Caracas, a los diecisiete días del mes de febrero de 2.005, dejando constancia que, de acuerdo a la normativa vigente, actuó como Coordinador del Jurado Examinador el Prof. Francisco Garcia.

  
Prof. JUAN GUEVARA



  
Prof. MANUEL MARTINEZ

  
Prof. FRANCISCO GARCIA  
Coordinador

## **DEDICATORIA**

*A Dios que hace que todo lo imposible sea posible,*

*A la Virgen María y todos los santos que interceden por nosotros,*

*A nuestras familias,*

*A la Universidad Central de Venezuela,*

*A todos nuestros amigos y compañeros de clase,*

*A nuestros tutores,*

*Y en definitiva a todos aquellos que creyeron en nosotros y no dudaron en ningún momento.*

## **AGRADECIMIENTOS (Francisco Rocha)**

Este es quizás el momento más ansiado y esperado a lo largo del trabajo y probablemente de mi vida. Es la oportunidad que tengo para agradecer y reconocer la labor y el amor de todas aquellas personas que hacen creíble un sueño que en estos momentos se hace realidad. Son muchas personas a las cuales debo hacer referencia, así que pido disculpas si se me llegara a escapar alguien por allí, créanme que si no están aquí las llevo con certeza en mi corazón.

En primer lugar quiero agradecer a Dios, a Jesucristo, a la Virgen María y a todos los santos que interceden día a día por mí para que cada minuto sea mejor en todo lo que hago. También a mi familia (papá, mamá y hermano), mi triunfo es su triunfo, gracias por confiar en mí, les debo lo que soy y sin Uds. No lo hubiera logrado jamás.

A mis tutores, el profesor Francisco García, a quien admiro de manera muy especial, profesor sepa que marcó huella en mi vida y sin duda alguna usted es un ejemplo a seguir. Al profesor Juan Guevara, del cual tuve la oportunidad de aprender y trabajar cosas que en mi vida jamás me imaginé que iba a hacer. Gracias a los dos por dedicarnos su tiempo y sus conocimientos.

A mi Universidad Central de Venezuela a la cual defenderé y nunca olvidaré.

A mi compañero de tesis y hermano Fernando Fernández (Futto) por haber asumido el reto de realizar y acompañarme en este trabajo especial, ahora sí podemos decir con certeza lo logramos. A mi hermanex Fátima Fernández y a la señora Concepción por todo el apoyo que siempre nos brindó y nos seguirá dando, se lo agradezco de manera especial.

A todos los profesores que me inculcaron sus conocimientos, les agradezco la formación que me dieron no sólo en lo académico y profesional, sino también para la vida.

A la familia Da Corte y a mis hermanos José Pérez, Leonel Aguero, Miguel González y Claudio Bracho que me ayudaron en mi pasantía.

A pesar de que ya no estén físicamente en este mundo mi corazón no los puede olvidar. A la Sra María Teresa Bouyer, a monseñor Francisco Hawa y a mi padrino Avelino les agradezco todas sus oraciones y sé que en donde estén, siempre estarán pidiendo por mí.

No podría dejar pasar esta ocasión para agradecer de manera muy especial a mis amigos: Ismael García a quien aprecio de verdad y con el cual he vivido grandes momentos (sólo tengo que decir después de todo que eres como mi hermano), Aurimar León y flia (Negrita, ojalá que siempre nos mantengamos unidos como lo estuvimos a lo largo de estos años... a tu mami (Auristela), a la tía María y a Luis les estaré eternamente agradecidos.). A Laura (Mi deseo es verte triunfando y logrando todas tus metas y estoy seguro que así será... Gracias por todo lo que hiciste en esta tesis y por ser MI MEJOR AMIGA. También hazle llegar mi agradecimiento a la Sra Carmen, al Sr Raúl, a Moniquita y a todas tus amigas que también son mis amigas. A Orangel Romero y Keyrin, a Natalí (mi gran amiga

con la cual luché todos estos años), a mi pana Luis Liendo arquero y estrella de la selección de futbolito de mecánica (Luis no fuimos campeones en los Interescuelas pero al menos nos graduamos...), a mi pana Daniel Insausti. Tampoco olvidaré a mis otros compañeros de clases que por razones de espacio no los nombro aquí. A la familia Orta y de manera particular a Zulay quien me dio la oportunidad y siempre creyó en mí. A mi amiga, la Dra. Elizabeth de Gouveia... al fin lo logré.

Finalmente no puedo dejar de lado a mi super María Verónica Martínez, quien siempre me permitió realizar todos los cambios que le pedí durante todo este tiempo (de la mañana para la tarde) y a quien tengo mucho cariño y aprecio (gracias por entenderme mi Vero), así como también a mis amigos del trabajo (Adriana, Karina, Claudia, Marianela, Alexander, Fátima, Vanesa, a mis dos comadres Zayrubi y Emma) y todos aquellos que de alguna u otra forma me ayudaron haciendo cambios para terminar este TEG, y por supuesto a la más especial de todas, a mi Yelitza Casola (tú sabes por qué te coloco aquí, has sido un gran apoyo para mí y sencillamente no tengo palabras para explicarte todo lo que te quiero).

Ahora lo que queda es colocar en práctica lo que he aprendido de todos uds. Y ahora que soy Ingeniero nunca los olvidaré...

## **AGRADECIMIENTOS ( Fernando Fernández)**

Quiero dedicar enteramente este trabajo a DIOS, a mi virgen de Fátima y de Betania, por haberme permitido lograr este sueño.

A mi familia, gracias a ellos que creyeron en mi, en especial a mis dos seres amados, queridos, adorados, sin ellas no sería nada de lo que soy... Mi mamá y mi Fatimexxx !!! Sepan que este trabajo fue logrado por todo el apoyo incondicional que me dieron lo largo de mi carrera y por haberme motivado a retomar mis estudios después de una larga ausencia. Quiero que sepan que son todo en mi vida, son mi razón de vivir y de luchar, por ustedes trataré de seguir creciendo tanto personal como profesionalmente. Por esta razón les digo que este trabajo es de ustedes y por ustedes. A mi padre, por haberme enseñado a quererlo y por haberse ganado mi respeto y admiración después de tanto tiempo, y por ayudarme tanto con sus oraciones.

A mi nueva familia, mi hermano Francisco Rocha ( El enano ) al cual agradezco haberme convencido de tomar esta locura como un reto y demostrarme que no tenemos límites, que pudimos cumplir esta meta después de mucho tiempo compartiendo juntos. A su madre y padre, la Señora Dolores y el Señor Javier, quien durante este trabajo se comportaron como unos padres, gracias por todos sus consejos, oraciones y palabras de aliento cuando más lo necesitábamos... Los llevó en lo más adentro de mi corazón.

A mis tutores, Francisco García, a quien no sé como expresarle la admiración que tengo por usted, es un prof. excelente, humano, dedicado, enamorado de su trabajo, es para mí un ejemplo a seguir. A mi profesor Juan Guevara ( Sr. Matlab ), del cual aprendimos cosas que nunca nos pasó por la mente que manejaríamos, quien nos dedicó mucho de sus fines de semana, nos dio más que una tutoría, su amistad.... Sepan, señores profesores, que estamos eternamente agradecidos con ustedes.

A mis profesores, por creer en mí y haberme permitido aprender tanto de ellos. A una profesora en especial que no descansó hasta verme retomar mis estudios y demostrar que aparte de profesora fue una gran amiga, mi Tibizay Zambrano ( Mi chench), espero que estés muy orgullosa de mí, TQM. A mis amigos profesores Gladys Bruzual, Angela Tocco, Vona, J.M. Sanz y especial a la Profesora Thais León, que desde un primer momento me permitieron ser parte de sus vidas... Sepan que nunca me olvidaré de ustedes.

A mis amistades de la UCV, a quienes nunca podré olvidar y a los cuales quiero agradecer de manera individual a continuación: A mi gran amiga TATI, quien desde el comienzo fue parte de mi vida, quiero que sigas luchando y sepas que lo vas a lograr, yo confié en ti!!!. A mi Nataly por haberme permitido ser su gran confidente y amigo durante la carrera. A mi gran amigo Ismamal García quien supo aprender a no ser tan individual, a ser compañero y haberme enseñado, luego de mucho tiempo, que tenía sentimientos y poderle llamar... HERMANO!!! ( lo de FUTOTE lo llevaré por el resto de mi vida y los de las pastillas ni se diga ). A mi negra bella, Aurimier, fuiste parte de mi carrera, el desorden viviente, y yo tu secretario, a tu familia (Auristela, Tía María, a Luisa ) mil gracias por todo. A Eduardo Cabrera (Cabeza de motor), quiero que sigas luchando y veas que si puedes lograr tus metas. A mi Scarlete, quiero que sepas que este portu te adora, Jesús,

Gustavo, simplemente son parte de mi vida. A mi novia Betsy, mi Liendo, al cuñado Ernesto, Insausti, al chino Carrera, Jerónimo, etc... sin alguno me faltó por nombrar sepan que les pido disculpas y los llevo en mi corazón.

A mis hermanos por parte de Dios, CHELINO y LELA, quienes desde hace 15 años me han permitido decirles hermanos, los quiero mucho, espero que nadie nos separe nunca, por eso les digo que este trabajo también es de ustedes.

A Carolina de Farmacia, gracias por ser un apoyo durante todos estos años de carrera... Gracias por haber creído en mí cuando retomé mis estudios... Te adoro.

A mi comadre e hija, Coralia, Yiya, la tía Negra y mis morochos... Gracias por confiar en mí y haberme permitido entrar en sus vidas... Los amo!!!

A mi gente de la U.E.I SIMÓN RODRÍGUEZ: a usted Sra Edilia Pinto, sepa que el cariño que se ha ganado de mi corazón es muy grande, por eso cada día trato de hacerlo mejor, a mí Yaya gracias por tus consejos y paciencia, a mi Jovita y Anaís ( mis negritas bellas ), a mis profesores amigos: Arelys, Giovanni, Esther, Mayra, María, Dalma, etc, A tí, Erinm, espero que con esto entiendas que no hay mejor liceo para mí que este. A mis alumnos: Rossana, Paulo, Carelys, Lezama, Pipiolo, Mancha, Asfour, etc, a todos lo que no nombro, igual gracias por permitirles enseñarles lo poco que sé.

A tí, innombrable, y a tu familia, gracias por enseñarme que puedo lograr mis metas a pesar de los obstáculos que se presentan, por haberme dado, EN EL PASADO (Vacío...), los mejores momentos de compañía, de apoyo y de ti. Gracias.

Fernández De Freitas, Fernando José

Rocha Caldeira, Francisco Javier

**EVALUACIÓN DEL DESEMPEÑO DE UN MÉTODO MIMÉTICO  
APLICADO A LA ECUACIÓN DE CONDUCCIÓN UNIDIMENSIONAL DE  
CALOR EN RÉGIMEN TRANSITORIO**

Profesor Guía: **Francisco García. Trabajo especial de grado. Caracas, UCV**

**Facultad de Ingeniería, Escuela de Ingeniería Mecánica, 2006, 104 Pág.**

Palabras claves: **mimético, gradiente, divergencia, diferencias finitas, orden de convergencia, puntos fantasmas, capa límite**

**RESUMEN**

Los métodos numéricos son una herramienta muy empleada para poder resolver una gran cantidad de problemas en los cuales el modelo matemático que describe el problema físico no tiene solución analítica. En el área de transferencia de calor, especialmente cuando se estudia la ecuación unidimensional en régimen transitorio se utiliza normalmente el método tradicional, conocido con el nombre de diferencias finitas. Sin embargo, recientemente se desarrollaron otros métodos que permiten obtener la solución de esta ecuación. Uno de los métodos creados recientemente recibe el nombre de método mimético y ha sido desarrollado por Castillo-Yasuda (2005) y Castillo y Grone (2003). Este método está basado en esquemas de diferencias finitas que mimetizan las propiedades de simetría de los operadores continuos y satisfacen versiones discretas de identidades diferenciales e integrales entre ellos, además generan ecuaciones lineales separadas para las condiciones de borde y la ecuación diferencial, lo cual representa una innovación si se le compara contra el método tradicional, en el cual el orden de aproximación en los nodos internos y los bordes no son los mismos, igualmente, las discretizaciones propuestas en los bordes y en los nodos interiores no son compatibles con los operadores diferenciales continuos y teoremas generales de cálculo diferencial e integral que los relaciona. De acuerdo a esto, el objetivo del presente trabajo fue realizar una evaluación de desempeño del método mimético aplicado a la ecuación unidimensional de calor en régimen transitorio. Para ello, se especificaron las discretizaciones de ambos métodos tanto para segundo como para cuarto orden. Luego de ello se realizaron las pruebas necesarias utilizando algunos ejemplos conceptuales particulares que evidenciaron el inconveniente que pueden llegar a ocasionar los puntos fantasmas, presentes en el esquema tradicional. Finalmente, utilizando los parámetros adimensionales de Biot y Fourier se efectuó un análisis del fenómeno físico, para de esta forma, tener una tendencia más clara del comportamiento de ambos métodos en el estudio de una aplicación real del ejercicio de la profesión. Los errores encontrados mostraron una tendencia a que el método mimético aproxima mejor la solución analítica en términos del error y de la convergencia en la mayoría de las pruebas realizadas.

## NOMENCLATURAS Y SÍMBOLOS

$k$ : conductividad térmica.

$q''$ : intensidad de flujo de calor o tasa de flujo de calor.

$h$ : coeficiente de transferencia de calor por convección.

$T_s$ : temperatura de la superficie.

$T_\infty$ : temperatura del fluido.

$A$ : área.

$\rho c$ : capacidad térmica volumétrica.

$\alpha$ : difusividad térmica.

$\dot{E}_g$ : generación de energía.

$\dot{E}_{alm}$ : almacenamiento de energía.

$\dot{q}$ : generación interna de calor.

$G$ : gradiente.

$D$ : divergencia.

$Bi$ : número de Biot.

$Fo$ : número de Fourier.

## ÍNDICE GENERAL

<b>DEDICATORIA</b> .....	<b>I</b>
<b>AGRADECIMIENTOS (Francisco Rocha)</b> .....	<b>II</b>
<b>AGRADECIMIENTOS ( Fernando Fernández)</b> .....	<b>IV</b>
<b>RESUMEN</b> .....	<b>VI</b>
<b>NOMENCLATURAS Y SÍMBOLOS</b> .....	<b>VI</b>
<b>ÍNDICE GENERAL</b> .....	<b>VIII</b>
<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b> .....	<b>IX</b>
<b>ÍNDICE DE TABLAS</b> .....	<b>X</b>
<b>CAPÍTULO 1: Problema en estudio</b> .....	<b>1</b>
1.1 INTRODUCCIÓN.....	1
1.2 Planteamiento del problema .....	3
1.3 Antecedentes.....	5
1.4 Objetivos.....	7
1.4.1 Objetivo general .....	7
1.4.2 Objetivos específicos.....	7
1.5 Alcances .....	8
<b>CAPÍTULO 2: Deducción de la ecuación de calor</b> .....	<b>10</b>
2.1 Ecuación de difusión de calor.....	10
2.2 Condiciones iniciales y de frontera .....	16
<b>CAPÍTULO 3: Descripción de los métodos numéricos</b> .....	<b>18</b>
3.1 Método de diferencias finitas .....	18
3.2.1 Método de diferencias finitas para segundo orden .....	19
3.3 Definición de los métodos miméticos .....	24
3.3.1. Método mimético de Castillo Yasuda con aproximación de segundo orden .....	25
3.4 Método de Diferencias Finitas con aproximación de cuarto orden.....	33
3.5 Método mimético de Castillo-Yasuda con aproximación de cuarto orden .....	36
<b>CAPÍTULO 4: Resultados (Problemas con soluciones analíticas exactas)</b> .....	<b>42</b>
4.1 Problema 1 (Segundo Orden) .....	42
4.1.1 Estudio comparativo .....	44
4.2. Problema 1 (Cuarto orden) .....	49
4.3 Problema 2 (Segundo orden).....	52
<b>CAPÍTULO 5: Problemas con soluciones del tipo Serie de Fourier (Resultados)</b> .....	<b>58</b>
5.1. Parámetros adimensionales .....	58
5.2 Problema 3 (Segundo orden).....	60
5.4.1 Estudio comparativo .....	63
<b>SUMARIO Y CONCLUSIONES</b> .....	<b>66</b>
<b>RECOMENDACIONES</b> .....	<b>68</b>
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>69</b>
<b>APÉNDICE A</b> .....	<b>70</b>
<b>APÉNDICE B</b> .....	<b>81</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura [1]. Transferencia unidimensional de calor por conducción (difusión de energía)...	10
Figura [2]. Volumen de control diferencial, $dx.dy.dz$ , para el análisis de conducción en coordenadas cartesianas. ....	12
Figura [3]. Malla de diferencias finitas con aproximación de segundo orden. ....	19
Figura [4]. Forma resultante de la matriz a resolver para el método de diferencias finitas con aproximación de segundo orden. ....	24
Figura [5]. Malla de Castillo con aproximación de segundo orden.....	25
Figura [6]. Forma resultante de la matriz a resolver para el método de Castillo-Yasuda con aproximación de segundo orden. ....	32
Figura [7]. Malla de diferencias finitas con aproximación de cuarto orden.....	33
Figura [8]. Forma resultante de la matriz a resolver para el método de diferencias finitas con aproximación de cuarto orden.....	36
Figura [9]. Forma resultante de la matriz a resolver para el método de Castillo-Yasuda. ...	41
Figura [10]. Gráficas descriptivas de la solución analítica vs métodos numéricos estudiados con aproximaciones de segundo orden. ....	44
Figura [11]. Gráfico de convergencia para Segundo Orden.....	46
Figura [12]. Solución numérica obtenida mediante el método de Castillo y Yasuda .....	48
Figura [13]. Solución numérica obtenida mediante el método de Diferencias Finitas.....	48
Figura [14]. Gráfico de convergencia para Cuarto Orden.....	50
Figura [15]. Gráfico comparativo de convergencias utilizando ambos métodos en estudio.	52
Figura [16]. Gráficas de comparación de soluciones para el problema 2 con aproximaciones de segundo orden. ....	54
Figura [17]. Solución numérica obtenida mediante el método de Castillo y Yasuda .....	56
Figura [18]. Solución numérica obtenida mediante el método Diferencias Finitas. ....	56
Figura [19]. Distribución de temperaturas transitorias para diferentes números de Biot en una pared plana enfriada simétricamente mediante convección. ....	58
Figura [20]. Pared Plana sujeta a condiciones de convección.....	60
Figura [21]. Gráfica representativa de las raíces positivas de la ecuación trascendente. ....	63
Figura [22]. Gráfica de comparación de soluciones para el problema de pared plana.....	64

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla [ 1]. Errores absolutos utilizando aproximaciones de Segundo Orden .....	45
Tabla [2]. Tasa de convergencia para Segundo Orden.....	47
Tabla [3]. Errores globales para Segundo Orden .....	47
Tabla [ 4]. Errores absolutos para Cuarto Orden.....	49
Tabla [ 5]. Tasa de convergencia para Cuarto Orden .....	51
Tabla [ 6]. Errores globales para Cuarto Orden.....	51
Tabla [ 7]. Errores absolutos para Segundo Orden.....	55

## **CAPÍTULO 1: Problema en estudio**

### **1.1 INTRODUCCIÓN:**

El estudio de la transferencia de calor constituye un área apasionante e influyente en la formación de un ingeniero mecánico. Ella misma, contiene en su estructura múltiples conceptos, teorías y leyes que a veces no son fáciles de asimilar, pero que al mismo tiempo permiten la resolución de problemas y aplicaciones que pueden llegar a ser muy complejos. También es capaz de despertar y desarrollar en el estudiante de ingeniería una capacidad de raciocinio, análisis y comprensión de los distintos fenómenos físicos que están presentes. Su relación con otras áreas del conocimiento como por ejemplo la termodinámica, las turbomáquinas, la dinámica de fluidos y todo aquello en donde exista intercambio energético y térmico la convierten en una herramienta poderosa en el mundo de la ingeniería y sobre todo en la formación del ingeniero integral. Es allí donde tiene su máximo poder, en la afinidad con otras áreas del pensamiento aportando una visión global y completa de los fenómenos físicos existentes en nuestro entorno, esa afinidad abarca también, al mundo de la computación y las matemáticas, entre otros.

Con el pasar de los años, el crecimiento de la tecnología y de la investigación ha ido en aumento y los métodos numéricos, que constituyen una alternativa importante para la resolución de problemas en numerosas áreas no han escapado a esta condición. Las múltiples revistas, artículos, libros y publicaciones en general que se han hecho al respecto dan cuenta de ello. En muchas aplicaciones de la transferencia de calor se utilizan los métodos numéricos, siendo quizá uno de los más empleados el método de diferencias finitas, ampliamente usado por la literatura especializada para la resolución de problemas en el área de conducción de calor. La razón por la cual se utilizan los métodos numéricos tiene que ver en primer lugar con la imposibilidad de obtener una solución analítica del modelo matemático que describe al fenómeno físico en estudio y en segundo lugar con la simplificación de cálculos que algunas veces resultan ser muy extensos y porque producen en la mayoría de los casos aproximaciones muy buenas, al compararlos con los resultados analíticos esperados. Sin embargo, una buena aproximación al problema real dependerá en gran escala del método numérico que se utilice y del problema que se quiera

resolver. Debido a esto, cuando surge o se crea un nuevo método numérico una alternativa para evaluar su desempeño es a través de problemas o aplicaciones donde se conoce la solución analítica. En este contexto, se puede ubicar un nuevo método numérico desarrollado por Castillo y Grone (2003) y Castillo y Yasuda (2005) que recibe el nombre de método mimético, ya que satisface el teorema de Green. Por ser un método creado recientemente resulta necesario evaluar su desempeño en problemas de transferencia de calor específicamente aplicados a la ecuación de conducción unidimensional de calor en régimen transitorio.

Esta evaluación comprende dos aspectos fundamentales que son: el resultado matemático y el estudio del fenómeno físico, y es en el último, donde el ingeniero mecánico tiene un papel protagónico. En la actualidad, se utilizan herramientas computacionales que ayudan en la solución de problemas de cálculo. Uno de los paquetes más utilizados para la resolución de problemas de álgebra lineal según Kolman (1999) es el Matlab, ya que a su juicio es un paquete versátil y poderoso cuyo poder radica en sus capacidades de solución de sistemas lineales. Según Nakamura (1997) la programación es mucho más sencilla, hay continuidad entre valores enteros, reales y complejos, la amplitud de intervalo y la exactitud de los números son mayores, cuenta con una biblioteca matemática amplia, abundantes herramientas gráficas y su capacidad de vincularse con los lenguajes de programación tradicionales. Kolman (1999) recomienda combinar el uso de Matlab con otro paquete conocido con el nombre de Maple para tener una alta capacidad computacional simbólica.

Este Trabajo Especial de Grado (TEG) está dividido en cinco capítulos. El primer capítulo abarca el planteamiento del problema, los antecedentes, los objetivos y alcances. En un segundo capítulo se realiza la deducción de la ecuación de calor. El tercer capítulo describe los métodos numéricos y las discretizaciones empleadas para la solución de la ecuación unidimensional de calor en régimen transitorio. En el cuarto capítulo, titulado “problemas con soluciones analíticas exactas” se presentan los errores y las convergencias encontradas y se realiza un análisis exhaustivo y detallado de los resultados obtenidos con ambos métodos. Finalmente, en el quinto capítulo que lleva por título “problemas con

soluciones del tipo serie de Fourier”, se introducen los parámetros adimensionales para el estudio del régimen transitorio y se realiza el análisis del fenómeno físico para un problema cuya solución en series de Fourier es conocida. Al igual que en el capítulo cuatro la comparación se efectúa analizando los errores encontrados y la convergencia obtenida. La última parte de este TEG contempla las conclusiones, recomendaciones y los apéndices, donde se incluyen las matrices de los sistemas resultantes explicados en el tercer capítulo y las tablas de los errores para el problema expuesto en el quinto capítulo, así como también las superficies de las soluciones analíticas utilizadas en el capítulo cuatro.

La realización de este TEG tiene como objetivo impulsar la investigación, específicamente en el área relacionada con métodos numéricos aplicados a la ecuación de conducción unidimensional de calor en régimen transitorio así como también establecer nexos entre la escuela de Ingeniería Mecánica de la UCV y otras facultades o dependencias como lo son la Escuela de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UCV y la Universidad del Estado de San Diego.

## **1.2 Planteamiento del problema:**

Muchos problemas en ciencia aplicada, física e ingeniería se modelan matemáticamente mediante ecuaciones en derivadas parciales. Smith (1985) establece que una ecuación diferencial en la que aparecen dos o más variables independientes se llaman ecuación en derivadas parciales.

Una ecuación en derivadas parciales tiene la siguiente forma:

$$A\Phi_{xx} + B\Phi_{xy} + C\Phi_{yy} = f(x, y, \Phi, \Phi_x, \Phi_y) \quad (1)$$

Donde A, B, C son constantes. Hay tres tipos de ecuaciones:

Si  $B^2 - 4AC < 0$  la ecuación se llama elíptica.

Si  $B^2 - 4AC = 0$  la ecuación se llama parabólica.

Si  $B^2 - 4AC > 0$  la ecuación se llama hiperbólica.

Smith (1989) establece que con la ecuación parabólica se puede estudiar el modelo unidimensional del flujo de calor. Sin embargo, las soluciones de la ecuación de calor unidimensional en régimen transitorio no pueden ser obtenidas de forma general mediante términos analíticos o su solución está dada en términos de series. Es por ello que existen una amplia variedad de métodos numéricos que tienen por objetivo aproximar de forma sistemática las soluciones de dicha ecuación. Entre los métodos más empleados se encuentra el de diferencias finitas que se caracteriza por su simplicidad y fácil implantación. No obstante, el gran inconveniente que tienen es que su orden de aproximación en los nodos internos y los bordes no son los mismos. Además, las discretizaciones propuestas en los bordes y en los nodos interiores no son compatibles con los operadores diferenciales continuos y teoremas generales de cálculo diferencial e integral que los relaciona. Este último punto es decisivo y establece una debilidad importante en la aproximación del método tradicional de diferencias finitas cuando se compara contra la solución analítica de la ecuación unidimensional de calor en régimen transitorio. Es por ello que han sido desarrollados los métodos miméticos que consisten en esquemas de diferencias finitas que mimetizan las propiedades de simetría de los operadores continuos y satisfacen versiones discretas de identidades diferenciales e integrales entre ellos. Es importante destacar que los métodos miméticos no discretizan ecuaciones directamente sino a los operadores diferenciales que componen la ecuación. Además estos métodos generan ecuaciones lineales separadas para las condiciones de borde y la ecuación diferencial. Debido a estas propiedades anteriormente explicadas los esquemas miméticos presentan resultados favorables en el estudio de la ecuación de calor unidimensional en régimen transitorio. En este trabajo especial de grado se hace una presentación y un estudio comparativo exhaustivo de todas estas técnicas y del fenómeno físico presente comparando el método tradicional o de diferencias finitas contra el método mimético.

### 1.3 Antecedentes:

Por ser un método desarrollado en los últimos años aún no se han realizados muchos trabajos al respecto. Freites (2004) realizó un estudio comparativo de los métodos miméticos para la ecuación unidimensional de calor en régimen permanente. En este trabajo se compara el método mimético de Castillo con el método de Shashkov y el método de diferencias finitas. En una primera prueba aplicó los métodos numéricos anteriormente nombrados a la solución de la ecuación de Laplace no homogénea y unidimensional, cuya solución analítica era conocida y a través de la cual era posible evaluar la calidad de las soluciones obtenidas. En esta primera prueba encontró los órdenes de los errores obtenidos en cada uno de los métodos siendo el de diferencias finitas el que arrojó mayor orden de error. Tanto el método mimético de Castillo como el método de Shashkov no presentaron diferencias significativas. La manera como logró realizar estas comparaciones fue colocando un cuadro en donde en el eje x representaba el logaritmo del tamaño del bloque y el eje y el logaritmo de los órdenes de los errores en norma  $L^2$ . La tasa de convergencia para el método de diferencias finitas fue casi lineal, mientras que para los otros métodos fue casi cuadrática. En una segunda prueba resolvió una ecuación de Laplace no homogénea en dos dimensiones utilizando los esquemas numéricos nombrados anteriormente, igualmente la solución analítica era conocida, de manera de comparar las aproximaciones obtenidas por los diferentes métodos. Nuevamente el comportamiento de los resultados fue similar al caso unidimensional. El método que presentó mayor error fue el de diferencias finitas, seguido por los métodos miméticos. Las tasas de convergencia para el caso bidimensional se conservaron de la misma manera que en el caso unidimensional. Con el de diferencias finitas se obtuvo una tasa de convergencia casi lineal mientras que los métodos miméticos registraron una tasa casi cuadrática.

En una segunda parte del trabajo, Freites (2004) realizó un análisis comparativo de los resultados numéricos obtenidos al aplicar el método de Shashkov, diferencias finitas y el método mimético de Castillo sobre la ecuación de calor en régimen permanente. Para ello realizó cuatro pruebas, todas con condiciones de borde de tercera clase o de Robin. En una primera prueba resolvió la ecuación unidimensional de calor en régimen permanente, la

cual era completamente no homogénea incluyendo sus condiciones de borde para la cual conocía su solución analítica. De esta prueba el método que presentó mayor error fue el de Shashkov, seguido por el de diferencias finitas. El mejor comportamiento lo registró el método de Castillo. Tanto el método de diferencias finitas como el de Shashkov arrojaron tasas de convergencias casi cuadráticas, mientras que el método de Castillo registró una tasa de convergencia cuadrática. En una segunda prueba resolvió una ecuación de calor bidimensional en régimen permanente cuya solución analítica no afectaba a la condición de Neumann. En este problema el efecto de la condición de Neumann dentro de la condición de Robin fue nula y la condición de Dirichlet era la que dominada el problema. En cuanto a los errores, el método mimético de Castillo fue el de menor orden, mientras que las tasas de convergencias para diferencias finitas fueron lineales y para los otros métodos fue cuadrática. En una tercera prueba resolvió numéricamente la ecuación bidimensional de calor en régimen permanente, cuya solución analítica no afecta a la condición de Dirichlet. En este problema la condición de Neumann dentro de la condición de Robin es no nula y en consecuencia el efecto de la derivada direccional en el borde deteriora el orden de convergencia del método de diferencias finitas. Por otra parte, los órdenes de convergencia para los métodos miméticos de Castillo fueron cuadráticos, mientras que para diferencias finitas fue sublineal. El método de Castillo fue el que registró menor error. En una cuarta prueba resolvió numéricamente la ecuación bidimensional de calor en régimen transitorio cuya solución analítica no afectaba ni la condición de Neumann en la dirección  $x$  ni la condición de Dirichlet en la dirección  $y$ . Los resultados de este ejemplo mostraron una leve mejoría para el método de diferencias finitas, el cual se mantuvo con una tasa de convergencia casi lineal mientras que los métodos miméticos arrojaron una tasa casi cuadrática.

Adicionalmente, para la realización de este trabajo especial de grado se utilizaron fundamentalmente dos artículos. En el primero, elaborado por Castillo y Grone (2003), se expone la discretización de orden superior para el gradiente y la divergencia satisfaciendo la ley de conservación. El segundo desarrollado por Castillo y Yasuda (2005), explica la discretización de segundo orden tanto para el gradiente como para la divergencia.

En la revisión bibliográfica realizada no se evidencia un estudio del método mimético desarrollado por Castillo y Grone (2003) y Castillo y Yasuda (2005) aplicado a la ecuación de conducción unidimensional de calor en régimen transitorio.

El tema de la presente investigación se refiere a evaluar el desempeño del método mimético desarrollado por Castillo y Grone (2003) y Castillo y Yasuda (2005) aplicado a la ecuación de conducción unidimensional de calor en régimen transitorio.

#### **1.4 Objetivos:**

##### **1.4.1 Objetivo general:**

El objetivo general del TEG aquí propuesto es evaluar el desempeño del método mimético desarrollado por Castillo y Grone (2003) y Castillo y Yasuda (2005) aplicado a la ecuación de conducción unidimensional de calor en régimen transitorio.

##### **1.4.2 Objetivos específicos:**

- 1) Aplicar los operadores Divergencia, Gradiente, Laplaciano,  $\hat{B}$ ,  $A$ ,  $k$ ,  $b$  y las condiciones de Robin o de tercera clase, para obtener el sistema lineal que se aplica mediante el método de Castillo y Yasuda (2005) a la ecuación de conducción unidimensional de calor en régimen transitorio con aproximaciones de segundo orden.
- 2) Definir el sistema de ecuaciones lineal resultante aplicado a la ecuación de conducción unidimensional de calor en régimen transitorio para aproximaciones de segundo orden.
- 3) Desarrollar el algoritmo de cálculo de solución numérica al sistema de ecuaciones lineal especificado en el punto anterior.
- 4) Codificar el algoritmo de cálculo del punto anterior por medio de una herramienta para cálculo numérico (Matlab).
- 5) Aplicar los operadores Divergencia, Gradiente, Laplaciano,  $\hat{B}$ ,  $A$ ,  $k$ ,  $b$  y las condiciones de Robin o de tercera clase, para obtener el sistema lineal que se aplica

mediante el método de Castillo y Grone (2003) a la ecuación de conducción unidimensional de calor en régimen transitorio con aproximaciones de cuarto orden.

- 6) Definir el sistema de ecuaciones lineal resultante aplicado a la ecuación de conducción unidimensional de calor en régimen transitorio para aproximaciones de cuarto orden.
- 7) Desarrollar el algoritmo de cálculo de solución numérica al sistema de ecuaciones lineal especificado en el punto anterior.
- 8) Codificar el algoritmo de cálculo del punto anterior por medio de una herramienta para cálculo numérico (Matlab).
- 9) Evaluar el desempeño del método de Castillo y Grone (2003) y Castillo y Yasuda (2005) contra el método de diferencias finitas utilizando aproximaciones de segundo y cuarto orden.

### **1.5 Alcances:**

Los alcances de este TEG consisten en:

- 1) Aplicación de los operadores Divergencia, Gradiente, Laplaciano,  $\hat{B}$ , A, k, b y las condiciones de Robin o de tercera clase, de manera que se pueda obtener el sistema lineal que se aplica mediante el método de Castillo y Yasuda (2005) a la ecuación de conducción unidimensional de calor en régimen transitorio con aproximaciones de segundo orden para definir el sistema de ecuaciones lineal resultante  $(\alpha A + \beta \hat{B}kG - L + t)T = b$ , establecido según Castillo y Yasuda (2005).
- 2) Desarrollo y codificación del algoritmo de cálculo de solución numérica con todos los operadores, teniendo definido el sistema de ecuaciones lineal aplicado a la ecuación de conducción unidimensional de calor en régimen transitorio con aproximaciones de segundo orden.

- 3) Aplicando los operadores Divergencia, Gradiente, Laplaciano,  $\hat{B}$ ,  $A$ ,  $k$ ,  $b$  y las condiciones de Robin o de tercera clase, de manera que se pueda obtener el sistema lineal que se aplica mediante el método de Castillo y Grone (2003) a la ecuación de conducción unidimensional de calor en régimen transitorio con aproximaciones de cuarto orden para definir el sistema de ecuaciones lineal resultante  $(\alpha A + \beta \hat{B}kG - L + t)T = b$ , establecido según Castillo y Grone (2003).
- 4) Desarrollo y codificación del algoritmo de cálculo de solución numérica con todos los operadores, teniendo definido el sistema de ecuaciones lineal aplicado a la ecuación de conducción unidimensional de calor en régimen transitorio con aproximaciones de cuarto orden.
- 5) Utilizando la literatura especializada se seleccionarán casos típicos de conducción unidimensional de calor en régimen transitorio, para evaluar el desempeño del método de Castillo y Grone (2003) y Castillo y Yasuda (2005) versus el método de diferencias finitas estableciendo las posibles diferencias que puedan existir desde el punto de vista matemático, así como también con el estudio del fenómeno físico. Para ambos casos se utilizarán esquemas de segundo y cuarto orden y ambos métodos serán comparados contra la solución analítica conocida.

## CAPÍTULO 2: Deducción de la ecuación de calor

En este capítulo se presenta la deducción de la ecuación de calor unidimensional en régimen transitorio y se describen las distintas condiciones de borde bajo las cuales se suministra la información necesaria para obtener una solución única y estable.

### 2.1 Ecuación de difusión de calor:

Es posible cuantificar los procesos de transferencia de calor en términos de las ecuaciones o modelos apropiados. Estas ecuaciones o modelos sirven para calcular la cantidad de energía que se transfiere por unidad de tiempo. Para la conducción de calor, la ecuación o modelo se conoce como Ley de Fourier. Para la pared plana unidimensional que se muestra en la Figura [1], la cual tiene una distribución de temperatura  $T(x)$ , la ecuación o modelo se expresa como:

$$q_x'' = -k \frac{dT}{dx} \quad (2)$$

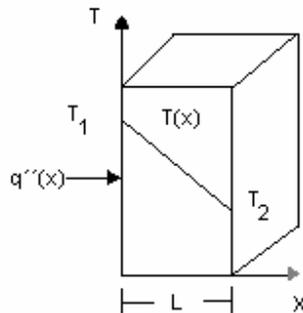


Figura [1]. Transferencia unidimensional de calor por conducción (difusión de energía)

La intensidad de flujo de calor o tasa de flujo de calor por unidad de área  $q_x''$  ( $W/m^2$ ) es la velocidad con que se transfiere el calor en la dirección  $x$  por área unitaria perpendicular a la dirección del flujo, y es proporcional al gradiente de temperatura,  $dT/dx$  en esta dirección. La constante de proporcionalidad,  $k$  es una propiedad de

transporte conocida como conductividad térmica ( $W/m \cdot K$ ) y es una característica del material de la pared. El signo menos es una consecuencia del hecho de que el calor se transfiere en la dirección de la temperatura decreciente. En las condiciones de régimen permanente que se muestran en la Figura [1] donde la distribución de temperatura es lineal, el gradiente se expresa como:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

Y la intensidad de flujo de calor entonces es:

$$q_x'' = -k \frac{T_2 - T_1}{L}$$

ó

$$q_x'' = k \frac{T_1 - T_2}{L} = k \frac{\Delta T}{L} \quad (3)$$

Esta ecuación permite determinar la intensidad de flujo de calor, es decir, la tasa de flujo transferido por unidad de área. La tasa de flujo de calor  $q_x$  (W), a través de una pared plana de área  $A$ , es entonces el producto del flujo y el área:

$$q_x = q_x'' \cdot A$$

Por otra parte, sin importar la naturaleza particular del proceso de transferencia de calor por convección, la ecuación o modelo apropiado es de la forma:

$$q'' = h(T_s - T_\infty) \quad (4)$$

Donde  $q''$ , la intensidad de flujo de calor por convección ( $W/m^2$ ), es proporcional a la diferencia entre las temperaturas de la superficie y del fluido,  $T_s$  y  $T_\infty$ , respectivamente. Esta expresión se conoce como la ley de enfriamiento de Newton, y la constante de proporcionalidad  $h$  ( $W/m^2.K$ ) se denomina coeficiente de transferencia de calor por convección.

Para realizar la deducción de la ecuación de calor se considera un medio homogéneo dentro del cual no hay movimiento de volumen y en el que la distribución de temperaturas  $T(x,y,z)$  se expresa en coordenadas cartesianas. El primer paso consiste en definir un volumen de control infinitesimalmente pequeño ( $dx.dy.dz$ ) según como se muestra en la Figura [2],

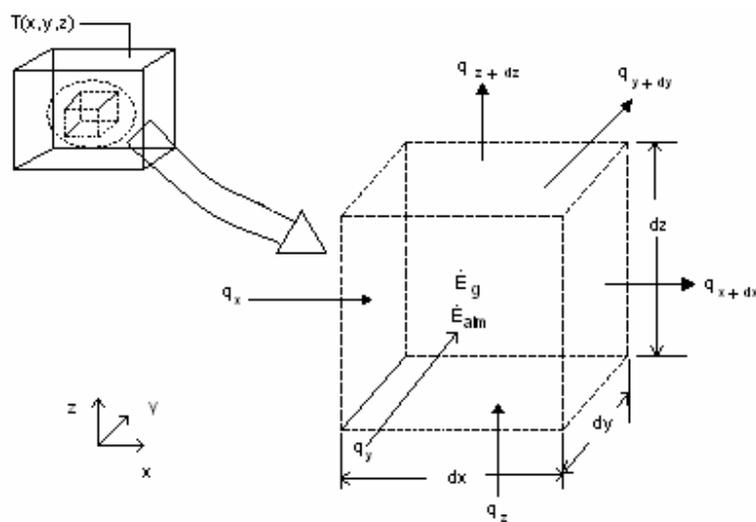


Figura [2]. Volumen de control diferencial,  $dx.dy.dz$ , para el análisis de conducción en coordenadas cartesianas.

El segundo paso es considerar los procesos de energía que son relevantes para este volumen de control. Las tasas de flujo de calor por conducción perpendiculares a cada una de las superficies de control en las coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$  se indican con los términos  $q_x, q_y, q_z$  respectivamente. Las tasas de flujo de calor por convección en las superficies

opuestas se expresan como una expansión en series de Taylor donde, dejando de lado términos de orden superior queda:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (5)$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \quad (6)$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \quad (7)$$

La ecuación (5) establece que el componente  $x$  de la tasa de flujo de calor en  $x + dx$  es igual al valor de este componente en  $x$  más la cantidad por la que cambia con respecto a  $x$  veces  $dx$ .

Dentro del medio también puede haber un término fuente de energía asociado con la velocidad de generación de energía térmica. Este término se representa como:

$$\dot{E}_g = \dot{q}.dx.dy.dz \quad (8)$$

donde  $\dot{q}$  es la generación interna de calor por unidad de volumen del medio ( $W/m^3$ ). Además, pueden ocurrir cambios en la cantidad de la energía térmica interna almacenada por el material en el volumen de control. Si el material no experimenta un cambio de fase, los efectos de energía latente no existen, y el término de almacenamiento de energía se expresa como:

$$\dot{E}_{alm} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (9)$$

donde  $\rho c \frac{\partial T}{\partial t}$  es la rapidez de cambio temporal de la energía sensible del medio por unidad de volumen.

Es importante advertir que los términos  $\dot{E}_g$  y  $\dot{E}_{alm}$  representan diferentes procesos físicos. El término de generación de energía  $\dot{E}_g$  es una manifestación de algún proceso de conversión de energía que incluye energía térmica por un lado y energía química, eléctrica o nuclear por el otro. El término es positivo (fuente) si la energía térmica se genera a expensas de alguna otra forma de energía; es negativo (sumidero) si la energía térmica se consume. En cambio, el término de almacenamiento de energía  $\dot{E}_{alm}$  se refiere a la tasa de cambio de la energía térmica almacenada por la materia.

El último paso es expresar la conservación de la energía con el uso de las ecuaciones anteriores. La forma general del requerimiento de conservación de la energía es:

$$\dot{E}_{Ent} + \dot{E}_g - \dot{E}_{Sale} = \dot{E}_{alm} \quad (10)$$

Así, al reconocer que las tasas de flujo de calor por conducción constituyen el flujo entrante de energía,  $\dot{E}_{ent}$ , y el flujo de salida,  $\dot{E}_{sale}$ , y al sustituir las ecuaciones (8) y (9), obtenemos

$$q_x + q_y + q_z + \dot{q} dx dy dz - q_{x+dx} - q_{y+dy} - q_{z+dz} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (11)$$

Sustituyendo de las ecuaciones (5), (6) y (7) se sigue que:

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz + \dot{q} dx dy dz = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (12)$$

La tasa de flujo de calor se evalúa a partir de la ley de Fourier:

$$q_x = -k_x dy dz \frac{\partial T}{\partial x} \quad (13)$$

$$q_y = -k_y dx dz \frac{\partial T}{\partial y} \quad (14)$$

$$q_z = -k_z dx dy \frac{\partial T}{\partial z} \quad (15)$$

Al sustituir las ecuaciones (13) en la ecuación (12) y dividir las dimensiones del volumen de control ( $dx \cdot dy \cdot dz$ ), obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (16)$$

A menudo es posible trabajar con versiones simplificadas de la ecuación (16). Por ejemplo, si la conductividad térmica es una constante, la ecuación de calor es:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (17)$$

En la ecuación (16) y (17) “k” representa la conductividad térmica y depende del material, viene expresada en (W/m.K). El producto “ $\rho c_p$ ” (J/m<sup>3</sup>.K) normalmente denominado capacidad térmica volumétrica mide la capacidad de un material para almacenar energía térmica. Por otro lado, el término  $\alpha = k / \rho c_p \left( \frac{m^2}{s} \right)$  se conoce con el nombre de difusividad térmica y mide la capacidad de un material para conducir energía térmica en relación con su capacidad para almacenar energía térmica. Finalmente, de este análisis surge la simplificación para definir la ecuación de calor unidimensional en régimen transitorio que será objeto de estudio en este trabajo y que es presentada a continuación:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (18)$$

## 2.2 Condiciones iniciales y de frontera:

Para determinar la distribución de temperaturas en un medio es necesario resolver la forma apropiada de la ecuación de calor. Sin embargo, esta solución depende de las condiciones físicas que existan en las fronteras del medio y, si la situación depende del tiempo, también dependerá de las condiciones que existan en el medio en algún tiempo inicial. Con respecto a las condiciones de frontera, hay varias posibilidades comunes que simplemente se expresan en forma matemática. Como la ecuación de calor es de segundo orden en las coordenadas espaciales, deben expresarse dos condiciones de frontera para cada coordenada necesaria en la descripción del sistema. Sin embargo, dado que la ecuación es de primer orden en el tiempo, debe especificarse sólo una condición, denominada condición inicial.

Existen cuatro clases de condiciones de frontera que normalmente se encuentran en la transferencia de calor como se muestran a continuación:

2.11.1 Temperatura superficial constante:  $T(0, t) = T_s$

2.11.2 Flujo de calor superficial constante

2.11.2.1. Flujo finito de calor: 
$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = q_s''$$

2.11.2.2. Superficie adiabática o aislada: 
$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = 0$$

2.11.3 Condición de convección superficial: 
$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h[T_\infty - T(0, t)]$$

Las condiciones se especifican en la superficie  $x = x_0$  para un sistema unidimensional. La transferencia de calor es en la dirección  $x$  positiva con la distribución de temperaturas, que puede ser dependiente del tiempo, designada como  $T(x, t)$ . La primera condición corresponde a una situación en la que la superficie se mantiene a una temperatura fija  $T_s$ , se denomina normalmente condición de Dirichlet, o condición de frontera de primera clase. La segunda condición corresponde a la existencia de un flujo de calor fijo o constante  $q_s''$  en la superficie. Esta se denomina condición de Neumann, o condición de frontera de segunda clase. La condición de frontera de tercera clase definida en 2.11.3, utilizada en este trabajo, corresponde a la existencia de calentamiento (o enfriamiento) por convección en la superficie.

## **CAPÍTULO 3: Descripción de los métodos numéricos**

En este capítulo se presenta una descripción detallada del método tradicional de diferencias finitas y del método mimético desarrollado por Castillo y Grone (2003) y Castillo y Yasuda (2005) para la resolución de la ecuación unidimensional de calor en régimen transitorio con aproximaciones de segundo orden y de cuarto orden para mallas uniformes.

### **3.1 Método de diferencias finitas**

Como una solución numérica a la ecuación unidimensional del calor en régimen transitorio definida en el capítulo dos se utiliza el método de diferencias finitas, Incropera y DeWitt (1999) indican que este método es muy eficiente en términos de tiempos de ejecución y de fácil implantación.

Incropera y DeWitt (1999) señalan que en contraste con una solución analítica, que permite la determinación de la temperatura en cualquier punto de interés en un medio, una solución numérica permite determinar la temperatura sólo en puntos discretos. El primer paso en cualquier análisis numérico debe ser, por tanto, seleccionar estos puntos, seguidamente se debe subdividir el medio de interés en un número de pequeñas regiones y asignar a cada una un punto de referencia en su centro. El punto de referencia suele denominarse punto nodal o nodo, y el agregado de puntos se conoce como red nodal o malla. Cada nodo representa cierta región y su temperatura es una medida de la temperatura promedio de la región. Incropera y DeWitt (1999) también señalan que la selección de puntos nodales rara vez es arbitraria y a menudo, depende de cuestiones como la conveniencia geométrica y la precisión que se desea. La precisión deseada de los cálculos depende en gran medida del número de puntos nodales designados. Si este número es grande (malla fina) es posible obtener soluciones extremadamente precisas.

La determinación numérica de la distribución de temperaturas establece que se debe escribir una ecuación de conservación apropiada para cada uno de los puntos nodales de temperatura desconocida. El conjunto de ecuaciones resultantes se resuelve de manera simultánea para la temperatura en cada nodo. Incropera y De Witt (1999) afirman que una

vez que se establece la red nodal y se escribe una ecuación en diferencias finitas apropiada para cada nodo, es posible determinar la distribución de temperaturas. El problema se reduce a resolver un sistema de ecuaciones algebraicas lineales. No obstante, además de discretizar el espacio, el problema debe discretizarse en el tiempo. Por ello, los cálculos deben llevarse a cabo en tiempos sucesivos separados por el intervalo  $\Delta t$ , y como una solución en diferencias finitas restringe la determinación de temperaturas a puntos discretos en el espacio, también la restringe a puntos discretos en el tiempo. El entero  $p$  se introduce con este propósito, donde:

$$t = p.\Delta t$$

El superíndice  $p$  presente en cada uno de los nodos se utiliza para denotar la dependencia con respecto al tiempo de  $T$  y la derivada con respecto al tiempo se expresa en términos de la diferencia en temperaturas asociadas con los tiempos nuevos  $(p+1)$  y anteriores  $(p)$ . En el esquema implícito se evalúan todas las otras temperaturas en el nuevo tiempo  $(p+1)$ , en lugar del tiempo anterior  $(p)$ , por tanto, para determinar las temperaturas nodales desconocidas en  $t+\Delta t$ , las correspondientes ecuaciones nodales deben resolverse simultáneamente.

### 3.2.1 Método de diferencias finitas para segundo orden:

Para describir el método consideramos la siguiente malla:

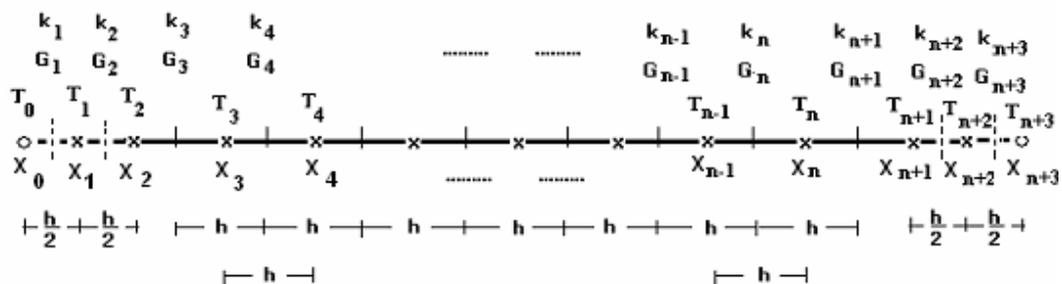


Figura [3]. Malla de diferencias finitas con aproximación de segundo orden.

En la Figura [3] cada una de las “x” representa la posición de los nodos, los “T” las temperaturas que deseamos conocer, las “k” representan la conductividad térmica; generalmente T y k están dadas en los mismos puntos pero como k es conocida entonces se evalúa en los extremos, y finalmente los “G” son los gradientes también evaluados en los extremos. Como se puede observar los nodos internos se encuentran a una distancia h de sus nodos vecinos y su discretización corresponde a un esquema de diferencias centradas. Además, todos estos bloques son uniformes, sin embargo, debido a que la discretización es de diferencias centradas a lo largo de toda la malla la desventaja se presenta en el primer nodo ( $x_0$ ) y último nodo ( $x_{n+3}$ ), los cuales son conocidos con el nombre de “puntos fantasmas” ya que están localizados fuera de la malla y generalmente producen errores de aproximación.

Una vez hechas estas observaciones se presenta la ecuación que deseamos discretizar con todas las condiciones:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \text{ en el intervalo de dominio } \Omega = (0,1)$$

Las condiciones de borde son del tipo:

$$\alpha_0 T(0) + \beta_0 \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) (0) = f(0) \text{ en } x = 0$$

$$\alpha_1 T(1) + \beta_1 \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) (1) = f(1) \text{ en } x = 1$$

Y en donde la condición inicial es del tipo:

$$T(x, t) = f(x)$$

Para poder resolver la ecuación y debido a que el método empleado es implícito la discretización para el tiempo es de la forma:

$$\frac{p_i^{m+1} - p_i^m}{\Delta t}$$

Y el gradiente se aproxima como:

$$G_{x_1} = \frac{T_i^{m+1} - T_i^m}{h}$$

Con la ecuación del calor ya definida se procede a realizar la discretización para cada uno de los nodos presentes en la malla de la Figura [3] de acuerdo a lo explicado en la sección anterior de manera de poder generar la matriz resultante y un sistema de ecuaciones lineal. La discretización para cada nodo se presenta a continuación:

Nodo X<sub>1</sub>:

$$\rho c \left[ \frac{T_1^{p+1}}{\Delta t} - \frac{T_1^p}{\Delta t} \right] - \left[ \frac{k_2 T_2^{p+1} - (k_2 + k_1) T_1^{p+1} + k_1 T_0^{p+1}}{\frac{h^2}{4}} \right] = \dot{q}_1$$

Resolviendo queda:

$$\left[ \frac{-4}{h^2} k_1 \right] T_0^{p+1} + \left[ \frac{4(k_2 + k_1)}{h^2} + \frac{\rho c}{\Delta t} \right] T_1^{p+1} + \left[ \frac{-4}{h^2} k_2 \right] T_2^{p+1} = \dot{q}_1 + \frac{\rho c}{\Delta t} T_1^p \quad (19)$$

Nodo X<sub>2</sub>:

$$\rho c \left[ \frac{T_2^{p+1}}{\Delta t} - \frac{T_2^p}{\Delta t} \right] - \left[ \frac{\frac{k_3}{2} T_3^{p+1} - \left( \frac{k_3}{2} + k_2 \right) T_2^{p+1} + k_2 T_1^{p+1}}{\frac{3h^2}{8}} \right] = \dot{q}_2$$

Resolviendo queda:

$$\left[ \frac{-8}{3h^2} k_2 \right] T_1^{p+1} + \left[ \frac{8 \left( \frac{k_3}{2} + k_2 \right)}{3h^2} + \frac{\rho c}{\Delta t} \right] T_2^{p+1} + \left[ \frac{-4}{3h^2} k_3 \right] T_3^{p+1} = \dot{q}_2 + \frac{\rho c}{\Delta t} T_2^p \quad (20)$$

Nodo  $X_i$ :  $3 \leq i \leq n$

$$\rho c \left[ \frac{T_i^{p+1}}{\Delta t} - \frac{T_i^p}{\Delta t} \right] - \left[ \frac{k_{i+1} T_{i+1}^{p+1} - (k_{i+1} + k_i) T_i^{p+1} + k_i T_{i-1}^{p+1}}{h^2} \right] = \dot{q}_i$$

Resolviendo queda:

$$\left[ \frac{-1}{h^2} k_i \right] T_{i-1}^{p+1} + \left[ \frac{(k_{i+1} + k_i)}{h^2} + \frac{\rho c}{\Delta t} \right] T_i^{p+1} + \left[ \frac{-1}{h^2} k_{i+1} \right] T_{i+1}^{p+1} = \dot{q}_i + \frac{\rho c}{\Delta t} T_i^p \quad (21)$$

Nodo  $X_{n+1}$ :

$$\rho c \left[ \frac{T_{n+1}^{p+1}}{\Delta t} - \frac{T_{n+1}^p}{\Delta t} \right] - \left[ \frac{k_{n+2} T_{n+2}^{p+1} - \left( k_{n+2} + \frac{k_{n+1}}{2} \right) T_{n+1}^{p+1} + \frac{k_{n+1}}{2} T_n^{p+1}}{\frac{3h^2}{8}} \right] = \dot{q}_{n+1}$$

Resolviendo queda:

$$\left[ \frac{-4}{3h^2} k_{n+1} \right] T_n^{p+1} + \left[ \frac{8 \left( k_{n+2} + \frac{k_{n+1}}{2} \right)}{3h^2} + \frac{\rho c}{\Delta t} \right] T_{n+1}^{p+1} + \left[ \frac{-8}{3h^2} k_{n+2} \right] T_{n+2}^{p+1} = \dot{q}_{n+1} + \frac{\rho c}{\Delta t} T_{n+1}^p \quad (22)$$

Nodo  $X_{n+2}$ :

$$\rho c \left[ \frac{T_{n+2}^{p+1}}{\Delta t} - \frac{T_{n+2}^p}{\Delta t} \right] - \left[ \frac{k_{n+3} T_{n+3}^{p+1} - (k_{n+2} + k_{n+3}) T_{n+2}^{p+1} + k_{n+2} T_{n+1}^{p+1}}{\frac{h^2}{4}} \right] = \dot{q}_{n+2}$$

Resolviendo queda:

$$\left[ \frac{-4}{h^2} k_{n+3} \right] T_{n+3}^{p+1} + \left[ \frac{4(k_{n+2} + k_{n+3})}{h^2} + \frac{\rho c}{\Delta t} \right] T_{n+2}^{p+1} + \left[ \frac{-4}{h^2} k_{n+2} \right] T_{n+1}^{p+1} = \dot{q}_{n+2} + \frac{\rho c}{\Delta t} T_{n+2}^p \quad (23)$$

Donde las condiciones de borde, al ser evaluadas de acuerdo a la malla en estudio quedan definidas de la siguiente manera:

$$\alpha_0 T_1^{p+1} + \beta_0 \left( \frac{T_2^{p+1} - T_0^{p+1}}{h} \right) = f_0$$

El término  $f_0$  corresponde al valor de la temperatura en el nodo  $x_1$ . Una vez discretizada la ecuación resulta:

$$-\frac{\beta}{h} [T_0^{p+1}] + \alpha [T_1^{p+1}] + \frac{\beta}{h} [T_2^{p+1}] = f_0 \quad (24)$$

Para el lado derecho se procede de manera similar y queda:

$$-\frac{\beta_1}{h} [T_{n+1}^{p+1}] + \alpha_1 [T_{n+2}^{p+1}] + \frac{\beta_1}{h} [T_{n+3}^{p+1}] = f_1 \quad (25)$$

Sin embargo, es importante destacar que  $f_1$  corresponde al valor de la temperatura evaluada en el nodo  $x_{n+2}$ .

Finalmente se presenta la estructura que tiene la matriz a resolver. La matriz en su forma generalizada se muestra en el Apéndice A-1.

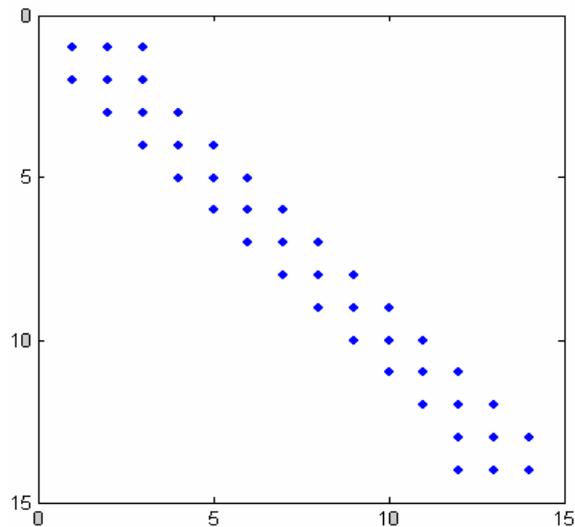


Figura [4]. Forma resultante de la matriz a resolver para el método de diferencias finitas con aproximación de segundo orden.

### 3.3 Definición de los métodos miméticos:

Un método numérico es mimético si ellos son obtenidos a partir de discretizaciones de los siguientes operadores:

- Divergencia, denotado por  $D$
- Gradiente, denotado por  $G$
- Derivada direccional en el borde, denotado por  $\hat{B}$

Los cuales satisfacen la identidad de Green generalizada:

$$\langle Dv, f \rangle_Q + \langle v, Gf \rangle_P = \langle \hat{B}v, f \rangle$$

Para algún producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  donde  $P$  y  $Q$  son sus pesos.

### 3.3.1. Método mimético de Castillo Yasuda con aproximación de segundo orden:

El método mimético desarrollado por Castillo-Yasuda (2005) consiste en aproximar de manera discreta los operadores gradiente ( $G$ ) definidos sobre los extremos y la divergencia ( $D$ ) definida en los nodos como se muestra en la malla de la Figura [5]. Hay que resaltar que todos estos operadores de dimensiones finitas pueden ser expresados en forma de matrices. En la Figura [5] también se observa que las “x” representan los nodos mientras que las “T” son las temperaturas desconocidas. Igualmente, las “k” corresponden a la conductividad térmica y son evaluadas en los extremos. La discretización para el tiempo es igual que para el método de diferencias finitas de segundo orden y el método empleado es nuevamente el implícito.

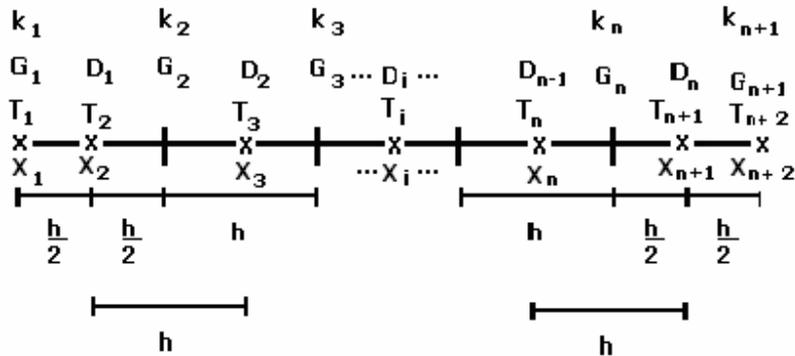


Figura [5]. Malla de Castillo con aproximación de segundo orden.

De acuerdo a la malla de la Figura [5] se define el operador gradiente  $G$  en los nodos externos como una aproximación de la derivada lateral con un error de truncamiento de orden dos, mientras que los nodos internos se aproximan por diferencias centrales de segundo orden obteniendo de esta forma las discretizaciones siguientes:

$$(G_T)_1 = \frac{-\frac{8}{3}T_1 + 3T_2 - \frac{1}{3}T_3}{h}$$

$$(G_T)_i = \frac{T_{i+1} - T_i}{h} \quad \text{para } 2 \leq i \leq n$$

$$(G_T)_n = \frac{\frac{8}{3}T_{n+2} - 3T_{n+1} + \frac{1}{3}T_n}{h}$$

La forma matricial del operador  $G$  es ahora:

$$G = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \frac{-8}{3} & 3 & \frac{-1}{3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{3} & -3 & \frac{8}{3} \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{(n+1) \times (n+2)}$$

Por otro lado el operador Divergencia se define como:

$$(Dv)_i = \frac{v_{i+1} - v_i}{h} \quad \text{para } 1 \leq i \leq n$$

Las “ $v$ ” son los valores que se encuentran en los extremos y que permiten hallar la divergencia. Escrito en forma matricial la divergencia sería:

$$D = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{(n) \times (n+1)}$$

Las derivadas especificadas en las condiciones de borde se aproximan por:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) (0) = \left( \frac{-\frac{8}{3}T_1 + 3T_2 - \frac{1}{3}T_3}{h} \right)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) (1) = \left( \frac{\frac{1}{3}T_n - 3T_{n+1} + \frac{8}{3}T_{n+2}}{h} \right)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores resultan las siguientes condiciones de borde:

$$\alpha_0 T_1^{p+1} + \beta_0 \left( \frac{-\frac{8}{3}T_1^{p+1} + 3T_2^{p+1} - \frac{1}{3}T_3^{p+1}}{h} \right) = f_0$$

$$\alpha_1 T_{n+2}^{p+1} + \beta_1 \left( \frac{\frac{1}{3}T_n^{p+1} - 3T_{n+1}^{p+1} + \frac{8}{3}T_{n+2}^{p+1}}{h} \right) = f_1$$

Agrupando términos nos queda:

$$\left(\alpha_0 - \frac{8\beta_0}{3h}\right)T_1^{p+1} + \frac{3\beta_0}{h}T_2^{p+1} - \frac{\beta_0}{3h}T_3^{p+1} = f_0 \quad (26)$$

y

$$\frac{\beta_1}{3h}T_n^{p+1} - \frac{3\beta_1}{h}T_{n+1}^{p+1} + \left(\alpha_1 + \frac{8\beta_1}{3h}\right)T_{n+2}^{p+1} = f_1 \quad (27)$$

Donde  $f_0$  es la temperatura en el nodo  $x_1$  y  $f_1$  es la temperatura en el nodo  $x_{n+2}$ .

La matriz  $A$  de frontera se define como se presenta a continuación:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{(n+2) \times (n+2)}$$

y la matriz  $\alpha$  es:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{(n+2) \times (n+2)}$$

La matriz utilizada para describir la conductividad térmica es:

$$k = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & k_n & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & k_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{(n+1) \times (n+1)}$$

Donde cada una de las  $k$  están definidas en la malla en los mismos puntos donde se evalúa el operador  $G$ .

La matriz  $\hat{B}$  empleada por Castillo-Yasuda (2005) es la siguiente:

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{(n+2) \times (n+1)}$$

que al ser multiplicada por  $\beta$  queda:

$$\beta \hat{B} = \begin{pmatrix} -\beta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \beta_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{(n+2) \times (n+1)}$$

De la multiplicación matricial  $DkG$  se obtiene el Laplaciano ( $L$ ) presentado a continuación. Es importante destacar que al Laplaciano se le agregan una fila de ceros al comienzo y otra al final para colocar las condiciones de borde.

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{8k_1}{3h^2} & \frac{3k_1+k_2}{h^2} & -\frac{k_1}{3h^2} - \frac{k_2}{h^2} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_2}{h^2} & \frac{k_2+k_3}{h^2} & -\frac{k_3}{h^2} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k_3}{h^2} & \frac{k_3+k_4}{h^2} & -\frac{k_4}{h^2} & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -\frac{k_{n-2}}{h^2} & \frac{k_{n-2}+k_{n-1}}{h^2} & -\frac{k_{n-1}}{h^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{k_{n-1}}{h^2} & \frac{k_{n-1}+k_n}{h^2} & -\frac{k_n}{h^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & -\frac{k_n}{h^2} - \frac{k_{n+1}}{3h^2} & \frac{k_n+3k_{n+1}}{h^2} & -\frac{8k_{n+1}}{3h^2} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{(n+2) \times (n+2)}$$

Para poder realizar el estudio de la ecuación del calor en régimen transitorio es necesario agregar al sistema lineal final la matriz que denominamos tiempo (t), la cual tiene la siguiente forma:

$$t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho c_p}{\Delta t} & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \frac{\rho c_p}{\Delta t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{(n+2) \times (n+2)}$$

Igualmente hay que resaltar el hecho que se han agregado dos columnas de ceros, una al principio y otra al final para colocar las condiciones de borde.

Así, definidos todos los operadores  $\alpha$ , G, D, A,  $\hat{B}$ , k, t y obtenemos la discretización del sistema lineal para resolver la ecuación del calor unidimensional en régimen transitorio al realizar las siguientes operaciones matriciales:

$$\left( \alpha A + \beta \hat{B} G - L + t \right) T = b \quad (28)$$

Donde la matriz del lado izquierdo del sistema explicado anteriormente está mostrada en el Apéndice A-2.

El lado derecho del sistema, representado por el vector ( $\mathbf{b}$ ) de la ecuación (28), se sustituye por el lado derecho de las condiciones de borde, ecuación (26) y ecuación (27), representados por  $f_0$  y  $f_1$  respectivamente, mientras que el resto de las filas se sustituyen por el resultado que se obtiene del lado derecho cuando se despejan los términos en la discretización de la ecuación unidimensional de calor en régimen transitorio.

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} f_0 \\ \dot{q}_2 + \frac{T_2^p}{\Delta t} \\ \dot{q}_3 + \frac{T_3^p}{\Delta t} \\ \vdots \\ \dot{q}_{n-1} + \frac{T_{n-1}^p}{\Delta t} \\ f_1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{(n+2) \times 1}$$

Las ecuaciones para cada uno de los nodos son:

Nodo  $X_2$ :

$$\left[ -\frac{1}{3h} - \frac{8k_1}{3h} \right] T_1^{p+1} + \left[ \frac{1}{2h} + \frac{3k_1}{h^2} + \frac{k_2}{h^2} + \frac{\rho c}{\Delta t} \right] T_2^{p+1} + \left[ -\frac{1}{6h} - \frac{k_1}{3h^2} - \frac{k_2}{h^2} \right] T_3^{p+1} = \dot{q}_2 + \frac{T_2^p}{\Delta t} \quad (29)$$

Nodo  $X_3$ :

$$\left[ \frac{1}{3h} \right] T_1^{p+1} + \left[ -\frac{1}{2h} - \frac{k_2}{h^2} \right] T_2^{p+1} + \left[ \frac{1}{6h} + \frac{k_2}{h^2} + \frac{k_3}{h^2} + \frac{\rho c}{\Delta t} \right] T_3^{p+1} + \left[ -\frac{k_3}{h^2} \right] T_4^{p+1} = \dot{q}_3 + \frac{T_3^p}{\Delta t} \quad (30)$$

Nodo  $X_i$ : para  $4 \leq i \leq n-2$

$$\left[ -\frac{k_{i-1}}{h^2} \right] T_{i-1}^{p+1} + \left[ \frac{k_{i-1} + k_i}{h^2} + \frac{\rho c}{\Delta t} \right] T_i^{p+1} + \left[ -\frac{k_i}{h^2} \right] T_{i+1}^{p+1} = \dot{q}_i + \frac{T_i^p}{\Delta t} \quad (31)$$

Nodo  $X_n$ :

$$\left[ -\frac{k_{n-1}}{h^2} \right] T_{n-1} + \left[ \frac{1}{6h} + \frac{k_{n-1}}{h^2} + \frac{k_n}{h^2} + \frac{\rho c}{\Delta t} \right] T_n + \left[ -\frac{1}{2h} - \frac{k_n}{h^2} \right] T_{n+1} + \left[ \frac{1}{3h} \right] T_{n+2} = \dot{q}_n + \frac{T_n^p}{\Delta t} \quad (32)$$

Nodo  $X_{n+1}$ :

$$\left[ -\frac{1}{6h} + \frac{k_n}{h^2} - \frac{k_{n+1}}{3h^2} \right] T_n + \left[ \frac{1}{2h} + \frac{k_n}{h^2} + \frac{3k_{n+1}}{h^2} + \frac{\rho c}{\Delta t} \right] T_{n+1} + \left[ -\frac{1}{3h} - \frac{8k_{n+1}}{3h^2} \right] T_{n+2} = \dot{q}_{n+1} + \frac{T_{n+1}^p}{\Delta t} \quad (33)$$

Y la primera y última fila se sustituyen por las condiciones de borde de la ecuación (26) y ecuación (27).

Finalmente podemos observar que la estructura del sistema a resolver.

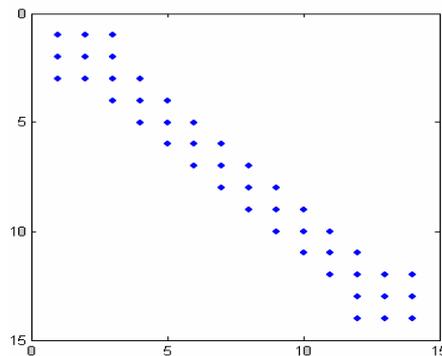


Figura [6]. Forma resultante de la matriz a resolver para el método de Castillo-Yasuda con aproximación de segundo orden.

Es muy importante observar que cuando se realizó la discretización en los contornos no fue necesario emplear puntos fantasmas. Como se dijo anteriormente esto representa una ventaja numérica en la obtención de la solución porque disminuye el error de aproximación que se pueda generar. La matriz del sistema a resolver  $(\alpha A + \beta \hat{B}G - L + t)$  se muestra en el Apéndice A-2.

### 3.4 Método de Diferencias Finitas con aproximación de cuarto orden:

Para describir este método se utiliza la malla presentada a continuación:

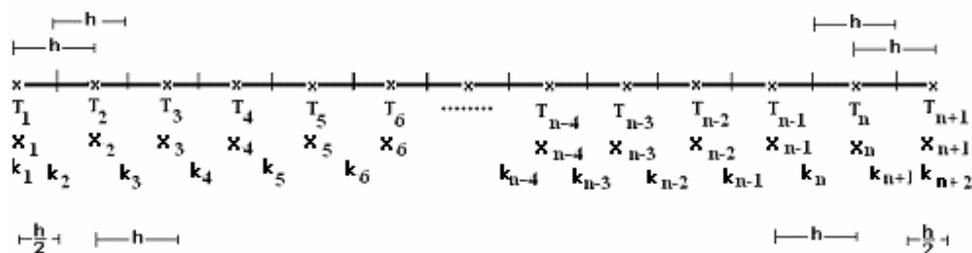


Figura [7]. Malla de diferencias finitas con aproximación de cuarto orden.

En la Figura [7] cada uno de los “T” son las temperaturas que deseamos conocer, las “x” las posiciones de los nodos a lo largo de la malla y la “k” la conductividad térmica evaluada en los extremos. Los nodos internos están a una distancia “h” de los nodos vecinos y su discretización corresponde a un esquema de diferencias centradas, sin embargo, en los bordes no existen puntos fantasmas debido a la imposibilidad de establecer u obtener una aproximación que sea de cuarto orden. En vista de este inconveniente se utiliza para poder discretizar, un esquema lateral para los bordes de acuerdo a lo establecido según Ledanois et al.,(2000). Como consecuencia del esquema explicado anteriormente la ecuación del calor ya no puede ser discretizada en su forma original, como se describe en la ecuación (18), la ecuación modificada se presenta a continuación:

$$\frac{\rho c}{k} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dot{q} \quad (34)$$

Las condiciones de borde del lado izquierdo se hallan de la siguiente manera:

$$\alpha_0 T + \frac{\partial T}{\partial x} \beta_0 = f_0$$

Resolviendo queda:

$$T_1^{p+1} \left( \alpha_0 - \frac{137}{60h} \beta_0 \right) + T_2^{p+1} \left( \frac{300\beta_0}{60h} \right) + T_3^{p+1} \left( \frac{-300\beta_0}{60h} \right) + T_4^{p+1} \left( \frac{200\beta_0}{60h} \right) + T_5^{p+1} \left( \frac{-75\beta_0}{60h} \right) + T_6^{p+1} \left( \frac{12\beta_0}{60h} \right) = f_0 \quad (35)$$

De manera similar para el lado derecho la condición de borde es:

$$\alpha_1 T + \frac{\partial T}{\partial x} \beta_1 = f_1$$

Resolviendo queda:

$$T_{n+1}^{p+1} \left( \alpha_1 + \frac{137}{60h} \beta_1 \right) + T_n^{p+1} \left( \frac{-300\beta_1}{60h} \right) + T_{n-1}^{p+1} \left( \frac{300\beta_1}{60h} \right) + T_{n-2}^{p+1} \left( \frac{-200\beta_1}{60h} \right) + T_{n-3}^{p+1} \left( \frac{75\beta_1}{60h} \right) + T_{n-4}^{p+1} \left( \frac{-12\beta_1}{60h} \right) = f_1 \quad (36)$$

Donde  $f_0$  es el valor de la temperatura del nodo  $x_1$  y  $f_1$  la temperatura del nodo  $x_{n+1}$ .

El análisis de cada uno de los nodos para obtener la matriz que genera el sistema lineal se presenta como sigue:

Nodo  $X_2$ :

$$\frac{\rho c}{k} \left( \frac{T_1^{p+1}}{\Delta t} - \frac{T_1^p}{\Delta t} \right) = \frac{11T_1^{p+1} - 20T_2^{p+1} + 6T_3^{p+1} + 4T_4^{p+1} - T_5^{p+1}}{12h^2} + \dot{q}_1^{p+1}$$

Resolviendo queda:

$$T_1^{p+1} \left[ \frac{-11}{12h^2} \right] + T_2^{p+1} \left[ \frac{20}{12h^2} + \frac{\rho c}{k(\Delta t)} \right] + T_3^{p+1} \left[ \frac{-6}{12h^2} \right] + T_4^{p+1} \left[ \frac{-4}{12h^2} \right] + T_5^{p+1} \left[ \frac{1}{12h^2} \right] = \dot{q}_1^{p+1} + \frac{\rho c}{k} \frac{T_1^p}{\Delta t} \quad (37)$$

Nodo  $X_i$ :  $3 \leq i \leq n-1$

$$\frac{\rho c}{k} \left( \frac{T_i^{p+1}}{\Delta t} - \frac{T_i^p}{\Delta t} \right) = \frac{-T_{i-2}^{p+1} + 16T_{i-1}^{p+1} - 30T_i^{p+1} + 16T_{i+1}^{p+1} - T_{i+2}^{p+1}}{12h^2} + \dot{q}_i^{p+1}$$

Resolviendo queda:

$$T_{i-2}^{p+1} \left[ \frac{1}{12h^2} \right] + T_{i-1}^{p+1} \left[ \frac{-16}{12h^2} \right] + T_i^{p+1} \left[ \frac{30}{12h^2} + \frac{\rho c}{k(\Delta t)} \right] + T_{i+1}^{p+1} \left[ \frac{-16}{12h^2} \right] + T_{i+2}^{p+1} \left[ \frac{1}{12h^2} \right] = \dot{q}_i^{p+1} + \frac{\rho c}{k} \frac{T_i^p}{\Delta t} \quad (38)$$

Nodo  $X_n$ :

$$\frac{\rho c}{k} \left( \frac{T_n^{p+1}}{\Delta t} - \frac{T_n^p}{\Delta t} \right) = \frac{11T_{n+1}^{p+1} - 20T_n^{p+1} + 6T_{n-1}^{p+1} + 4T_{n-2}^{p+1} - T_{n-3}^{p+1}}{12h^2} + \dot{q}_n^{p+1}$$

Resolviendo queda:

$$T_{n-3}^{p+1} \left[ \frac{1}{12h^2} \right] + T_{n-2}^{p+1} \left[ \frac{-4}{12h^2} \right] + T_{n-1}^{p+1} \left[ \frac{-6}{12h^2} \right] + T_n^{p+1} \left[ \frac{20}{12h^2} + \frac{\rho c}{k(\Delta t)} \right] + T_{n+1}^{p+1} \left[ \frac{-11}{12h^2} \right] = \dot{q}_n^{p+1} + \frac{\rho c}{k} \frac{T_n^p}{\Delta t} \quad (39)$$

Finalmente presentamos a continuación la estructura que tiene la matriz del sistema lineal a resolver por diferencias finitas para cuarto orden. La matriz en su forma generalizada se muestra en el Apéndice A-3.

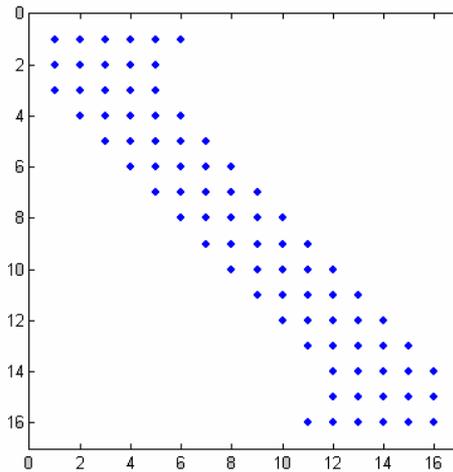


Figura [8]. Forma resultante de la matriz a resolver para el método de diferencias finitas con aproximación de cuarto orden.

### 3.5 Método mimético de Castillo-Yasuda con aproximación de cuarto orden:

La malla empleada para describir el método es la presentada en la Figura [5]. Nuevamente los nodos están representados por las “x”, las temperaturas que se desean conocer por “T” y las “k” corresponden a la conductividad térmica evaluada en los extremos. En el método mimético desarrollado por Castillo-Grone (2003) se aproximan de manera discreta los operadores gradiente ( $G$ ) sobre los extremos y la divergencia ( $D$ ) está definida en los nodos. Todos estos operadores de dimensiones finitas pueden ser expresados en forma de matrices.

Castillo y Grone (2003) definen el operador Gradiente ( $G$ ) de la siguiente forma:

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} & g_{15} & g_{16} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{16}{105} - \alpha \frac{128}{35} & \frac{-31}{24} + \alpha 9 & \frac{29}{24} - \alpha 12 & \frac{-3}{40} + \alpha \frac{54}{5} & \frac{1}{168} - \alpha \frac{36}{7} & \alpha & 0 & 0 & \dots \\ -\beta \frac{128}{35} & \frac{1}{24} + \beta 9 & \frac{-27}{24} - \beta 12 & \frac{27}{24} + \beta \frac{54}{5} & \frac{-1}{24} - \beta \frac{36}{7} & \beta & 0 & 0 & \dots \\ \frac{-16}{105} - \gamma \frac{128}{35} & \frac{3}{8} + \gamma 9 & \frac{-11}{24} - \gamma 12 & \frac{-27}{40} + \gamma \frac{54}{5} & \frac{51}{56} - \gamma \frac{36}{7} & \gamma & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & \frac{-27}{24} & \frac{27}{24} & \frac{-1}{24} & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

$$g_{11} = -\frac{124832}{42735} + \alpha \frac{16512}{1295} + \beta \frac{18816}{2035} + \gamma \frac{13696}{1295},$$

$$g_{12} = \frac{10789}{3256} - \alpha \frac{1161}{37} - \beta \frac{9261}{407} - \gamma \frac{963}{37},$$

$$g_{13} = -\frac{421}{9768} + \alpha \frac{1548}{37} + \beta \frac{12348}{407} + \gamma \frac{1284}{37},$$

$$g_{14} = -\frac{12189}{16280} - \alpha \frac{6966}{185} - \beta \frac{55566}{2035} - \gamma \frac{5778}{185},$$

$$g_{15} = \frac{11789}{22792} + \alpha \frac{4644}{259} + \beta \frac{5292}{407} + \gamma \frac{3852}{259},$$

$$g_{16} = -\frac{48}{407} - \alpha \frac{129}{37} - \beta \frac{1029}{407} - \gamma \frac{107}{37},$$

Utilizando los valores de  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$  y  $\gamma = \frac{-1}{24}$  se obtiene la matriz gradiente simplificada que se muestra a continuación:

$$G = \begin{pmatrix} \frac{47888}{16} & \frac{1790}{31} & -\frac{14545}{29} & \frac{8997}{3} & -\frac{2335}{1} & \frac{25}{9768} & 0 & 0 \\ \frac{14245}{105} & \frac{407}{24} & -\frac{9768}{24} & \frac{16280}{40} & -\frac{22792}{168} & \frac{9768}{0} & \dots & \dots \\ 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 \\ \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{168} & \frac{3}{40} & -\frac{29}{24} & \frac{31}{24} & -\frac{16}{105} \\ 0 & 0 & -\frac{25}{9768} & \frac{2335}{22792} & -\frac{8997}{16280} & \frac{14545}{9768} & -\frac{1790}{407} & \frac{47888}{14245} \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{(n+1) \times (n+2)}$$

mientras que la divergencia es la siguiente:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4751}{5192} & \frac{909}{1298} & \frac{6091}{15576} & -\frac{1165}{5192} & \frac{129}{2596} & -\frac{25}{15576} & 0 & 0 \\ \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} \\ 0 & 0 & \frac{25}{15576} & -\frac{129}{2596} & \frac{1165}{5192} & -\frac{6091}{15576} & -\frac{909}{1298} & \frac{4751}{5192} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{(n+2) \times (n+1)}$$

La matriz  $\alpha A$  es :

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{(n+2) \times (n+2)}$$

La conductividad térmica se define mediante la siguiente matriz:

$$k = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & k_n & 0 \\ 0 & \cdots & & \cdots & k_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{(n+1) \times (n+1)}$$

La matriz  $\hat{B}$  empleada por Castillo-Grone (2003) es la siguiente:

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{(n+2) \times (n+1)}$$

que multiplicada por  $\beta$  queda de la siguiente forma:

$$\beta \hat{B} = \begin{pmatrix} -\beta_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \beta_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{(n+2) \times (n+1)}$$

El Laplaciano (L) se obtiene de la multiplicación matricial  $DkG$ . Nuevamente y al igual que en segundo orden al Laplaciano se le agregan dos filas de cero, una al principio y otra al final para poder colocar las condiciones de borde.

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & DkG & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{(n+2) \times (n+2)}$$

A la matriz tiempo ( $t$ ), indispensable en el estudio del régimen transitorio se le agregan dos columnas de ceros al principio y al final para colocar las condiciones de borde de manera que queda de la siguiente forma:

$$t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho c_p}{\Delta t} & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \frac{\rho c_p}{\Delta t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{(n+2) \times (n+2)}$$

Así, definidos todos los operadores  $\alpha, \beta, G, D, A, \hat{B}, k$  y  $t$  obtenemos la discretización del sistema lineal para resolver la ecuación del calor unidimensional en régimen transitorio al realizar las siguientes operaciones matriciales:

$$\left( \alpha A + \beta \hat{B} G - L + t \right) T = b \quad (40)$$

El vector  $b$ , de la ecuación (40), es de la forma:

$$b = \begin{pmatrix} f_0 \\ \dot{q}_2 + \frac{T_2^p}{\Delta t} \\ \dot{q}_3 + \frac{T_3^p}{\Delta t} \\ \vdots \\ \dot{q}_{n-1} + \frac{T_{n-1}^p}{\Delta t} \\ f_1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{(n+2) \times 1}$$

Donde la primera y última fila son las condiciones de borde y las filas restantes representan lo que queda del lado derecho una vez que se despeja y discretiza la ecuación unidimensional de calor en régimen transitorio.

Finalmente podemos observar que la estructura de la matriz del sistema lineal a resolver es:

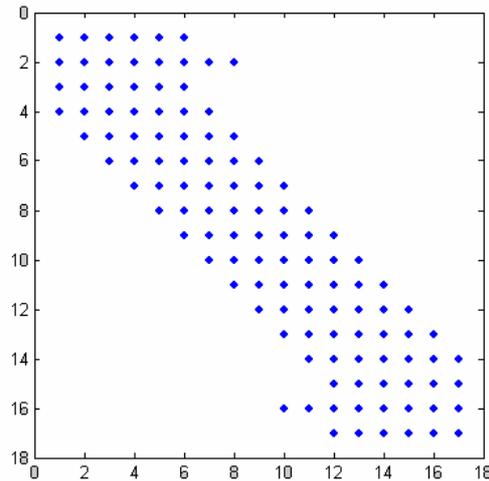


Figura [9]. Forma resultante de la matriz a resolver para el método de Castillo-Yasuda.

La discretización para cada uno de los nodos se encuentra en el Apéndice A-4. Para la solución de los sistemas resultantes que se obtuvieron mediante ambos métodos, se utilizó la descomposición LU, debido a su simplicidad en la utilización de matrices triangulares inferiores y superiores y de su fácil adaptación a los esquemas que aquí se estudian. Es de hacer notar que la elección de este método por encima del método de inversión de matrices y del método de Gauss-Seidel se debió principalmente a que el primero requiere una gran cantidad de operaciones que dificulta en algunos casos particulares su aplicabilidad y el último es normalmente utilizado para sistemas lineales con gran cantidad de incógnitas que no se corresponde con el caso que estamos estudiando.

## CAPÍTULO 4: Resultados (Problemas con soluciones analíticas exactas)

En este capítulo se desarrollan dos problemas desde el punto de vista conceptual y adimensional. En el primer problema se emplearon ambos métodos para segundo y cuarto orden respectivamente, mientras que, el segundo problema se resolvió solamente para segundo orden. Para cada una de los problemas se presentan las tablas que muestran los errores obtenidos y en algunos casos en los que se utilizó aproximaciones de segundo orden se agregaron las convergencias encontradas.

### 4.1 Problema 1 (Segundo Orden):

El problema 1 consiste, dada la solución analítica en resolver la ecuación unidimensional en régimen transitorio para, de esta forma, realizar el estudio comparativo utilizando aproximaciones de segundo orden para ambos métodos.

El intervalo de dominio para el cual se realizó este análisis es:  $\Omega = [0,1]$

La ecuación a ser resuelta es:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

A la ecuación anterior se le realizan las simplificaciones necesarias de manera que todos los términos utilizados sean adimensionales. Donde “k” y el término “ $\rho c_p$ ” son constantes unitarias por conveniencia.

De acuerdo a esto el término  $\dot{q}$  es de la forma:

$$\dot{q}_{(x,t)} = \text{sen}(10\pi x) e^{(-t)} (10\pi)^2 - \text{sen}(10\pi x) e^{(-t)}$$

Con condiciones de borde de tercer tipo evaluadas en los extremos del intervalo:

$$\alpha_0 T(0,t) + \beta_0 \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = f_0(t) \text{ resultando } f_0 = 0$$

$$\alpha_1 T(1, t) + \beta_1 \frac{\partial T}{\partial x}(1, t) = f_1(t) \text{ resultando } f_1 = (10\pi)e^{(-t)}$$

Y la condición inicial viene dada por:

$$T(x, 0) = \text{sen}(10\pi x)$$

La solución analítica del problema tiene la siguiente forma:

$$\text{Solución Analítica} = e^{-t} \text{sen}(10\pi x)$$

#### 4.1.1 Estudio comparativo:

La solución del problema para una de las pruebas realizadas (130 bloques y tiempo igual a 1) se presenta en la Figura [10]:

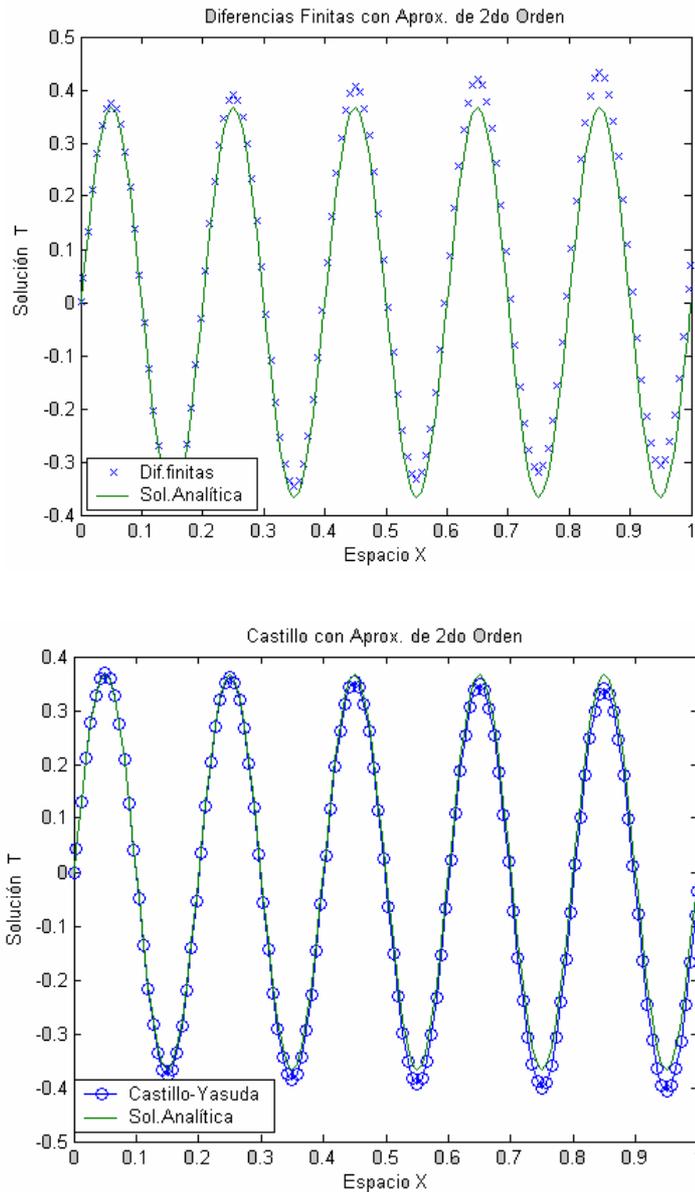


Figura [10]. Gráficas descriptivas de la solución analítica vs métodos numéricos estudiados con aproximaciones de segundo orden. .

Donde el gráfico superior representa la solución obtenida mediante el método de diferencias finitas y la inferior mediante Castillo y Yasuda (2005). Para la obtención de estas gráficas se variaron principalmente dos parámetros, por una parte el número de bloques, que siempre fue igual al número de pasos de tiempo en todas las pruebas y así mismo, se varió el tiempo de manera de poder observar lo que sucedía. Para todas las pruebas realizadas se procedió a registrar el error absoluto, el cual se define de la siguiente manera:

$$\text{Error Absoluto} = \text{Max} | \text{solución numérica obtenida} - \text{Solución analítica} | \quad (41)$$

La siguiente tabla muestra un resumen de los errores absolutos para ambos métodos de acuerdo a las pruebas realizadas y se presenta a continuación:

<b>Problema 1 Segundo orden</b>			
<b>Tiempo</b>	<b>Núm. De bloques = pasos de tiempo</b>	<b>Cálculos de errores</b>	
		<b>Error Absoluto Dif.Finitas</b>	<b>Error Absoluto Castillo-Yasuda</b>
0,01	50	0,10224	0,06611
	100	0,02822	0,01625
	130	0,01703	0,00963
	150	0,01290	0,00725
0,25	50	0,45710	0,26233
	100	0,11972	0,06585
	130	0,07144	0,03920
	150	0,05384	0,02960
0,5	50	0,52711	0,30299
	100	0,13765	0,07605
	130	0,08208	0,04544
	150	0,06184	0,03435
1	50	0,44579	0,25780
	100	0,11561	0,06492
	130	0,06882	0,03889
	150	0,05182	0,02948

Tabla [ 1]. Errores absolutos utilizando aproximaciones de Segundo Orden

Se observa que en todas las pruebas realizadas el método mimético desarrollado por Castillo-Yasuda (2005) presentó un error absoluto menor que el método de diferencias

finitas tradicional independientemente del tiempo evaluado o del refinamiento de mallas que se produzca. Esto se debe en gran parte a la ventaja que ofrece el método mimético cuando se utilizan condiciones de borde de tercer tipo conocida como capa límite, que consiste en que las mismas son evaluadas dentro de la malla en estudio directamente, lo cual no sucede con el método tradicional de diferencias finitas en donde las condiciones de borde (de tercer tipo) necesariamente tienen que ser evaluadas utilizando puntos fantasmas fuera de la malla en estudio, para poder desarrollar el método bajo un esquema de diferencias centradas y producir una aproximación de segundo orden. Desde el punto de vista teórico estos puntos fantasmas son vistos como una debilidad del método tradicional y en este ejemplo queda claramente demostrado, aunque los errores conseguidos con ambos métodos sean pequeños. Adicionalmente se desarrolló el estudio del error global, el cual considera todos los posibles errores que se puedan producir, tanto para el espacio como para el tiempo. En base a este planteamiento, el primer paso para el estudio del error global consiste en obtener y analizar la convergencia para ambos métodos. La siguiente figura muestra las convergencias obtenidas:

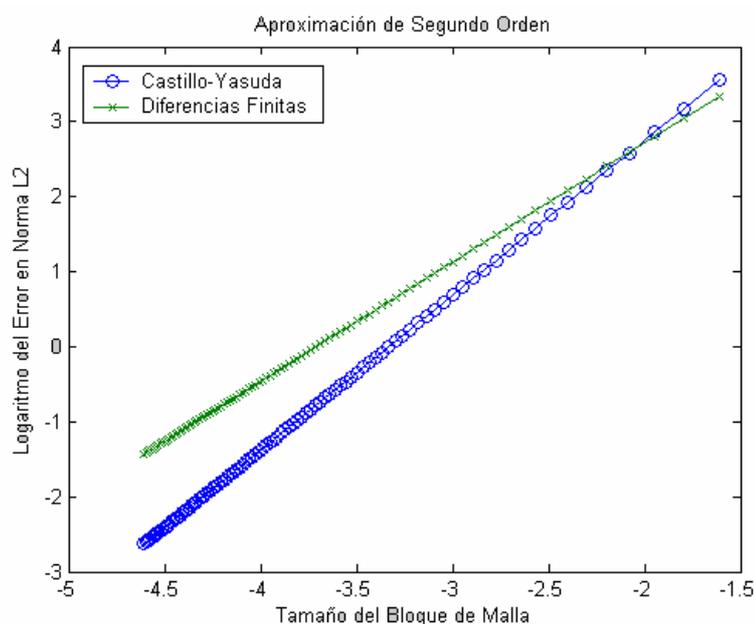


Figura [11]. Gráfico de convergencia para Segundo Orden

<b>Método</b>	<b>Orden de Convergencia</b>
Castillo-Yasuda	2.0653
Diferencias Finitas	1.5918

Tabla [2]. Tasa de convergencia para Segundo Orden

De la Tabla [2] se puede observar que la tasa de convergencia para el método mimético es cuadrática mientras que para el método tradicional es lineal.

Utilizando los valores de la convergencia se procede a registrar los errores globales asociados para ambos métodos. Estos errores se muestran en la Tabla [3]:

<b>Número de bloques</b>	<b>Error Global de Diferencias Finitas Segundo Orden</b>	<b>Error Global de Castillo-Yasuda Segundo Orden</b>
20	3,1064	2,0008
40	1,0306	0,4781
50	0,7224	0,3015
60	0,5405	0,2069
80	0,3419	0,1142
100	0,2397	0,0720

Tabla [3]. Errores globales para Segundo Orden8

Donde el intervalo de dominio es  $[0,1] \times [0,1]$  para el espacio y para el tiempo. Nuevamente se puede observar el comportamiento que presentan los resultados a favor del método desarrollado por Castillo y Yasuda (2005). De acuerdo a esto, se puede establecer que independientemente que se consideren todos los errores presentes el método mimético supera al método tradicional.

Como consecuencia de este estudio, se presentan las superficies que permiten obtener una visión más clara en términos del espacio y del tiempo para el problema en estudio.

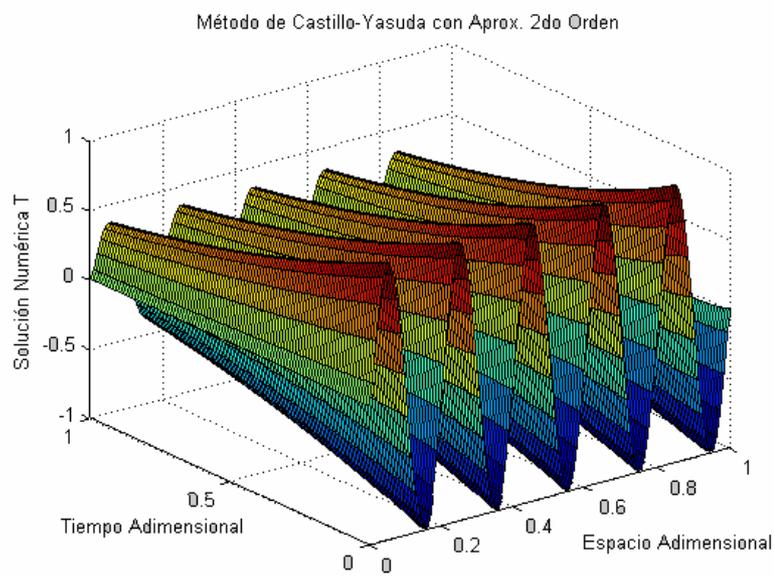


Figura [12]. Solución numérica obtenida mediante el método de Castillo y Yasuda

Mientras que la obtenida mediante el esquema tradicional es:

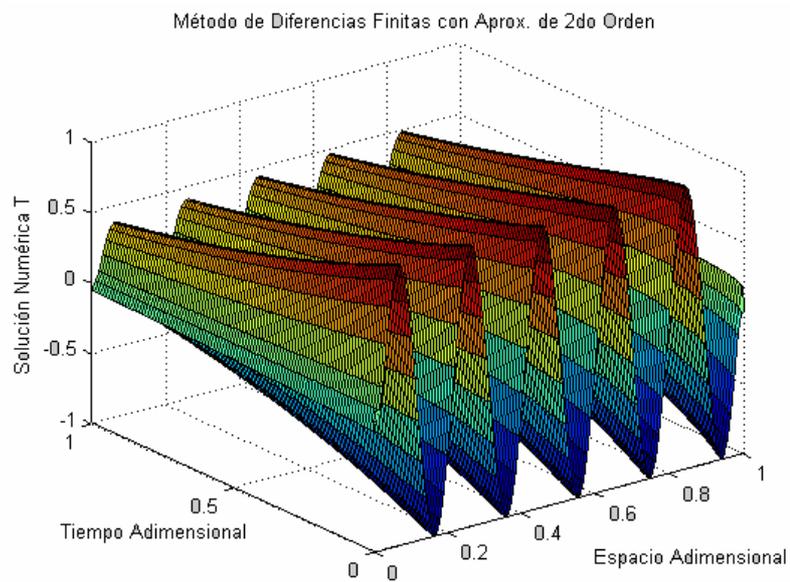


Figura [13]. Solución numérica obtenida mediante el método de Diferencias Finitas

Ambas figuras permiten visualizar la solución numérica en términos del espacio adimensional y del tiempo adimensional contra la solución exacta que se muestra en el Apéndice A-5. Como se observa el método de Castillo y Yasuda aproxima mejor la solución exacta en comparación con el método tradicional.

#### 4.2. Problema 1 (Cuarto orden):

Al igual que para segundo orden, el problema 1 consiste, dada la solución analítica en resolver la ecuación unidimensional en régimen transitorio para, de esta forma, poder realizar el estudio comparativo utilizando aproximaciones de segundo orden para ambos métodos.

La solución analítica, la ecuación a resolver, las condiciones de borde, el término  $\dot{q}$  y la condición inicial son iguales al problema 1 (segundo orden).

##### 4.2.1 Estudio comparativo:

Para todas las pruebas realizadas se procedió a registrar el error absoluto, el cual fue definido en la ecuación (41).

La siguiente tabla muestra un resumen de los errores absolutos para ambos métodos:

<b>Problema 1 Cuarto orden</b>			
<b>Tiempo</b>	<b>Núm. De bloques = pasos de tiempo</b>	<b>Cálculos de errores</b>	
		<b>Error Absoluto Dif.Finitas</b>	<b>Error Absoluto Castillo-Yasuda</b>
0,01	50	0,0999	0,0118
	70	0,0271	0,0061
	100	0,0065	0,0065
0,25	50	0,4413	0,0496
	70	0,1193	0,0259
	100	0,0285	0,0275
0,5	50	0,5085	0,0567
	70	0,1373	0,0295
	100	0,0327	0,0313
1	50	0,4298	0,0494
	70	0,1156	0,0269
	100	0,0278	0,0263

Tabla [ 4]. Errores absolutos para Cuarto Orden

Se puede apreciar, independientemente de que los errores entre ambos métodos sean pequeños, que en todas las pruebas realizadas para este problema el método mimético desarrollado por Castillo-Yasuda (2003) presentó un error absoluto menor que el método de diferencias finitas de cuarto orden. Como se puede observar también en esta tabla, aunque se varíe el tiempo o se produzca un refinamiento de mallas existe una tendencia a que el método mimético siga superando al método tradicional a pesar de que el esquema de diferencias finitas para cuarto orden no posea puntos fantasmas, que como se evidenció en aplicaciones anteriores originaba una desventaja del punto de vista matemático a la hora de aproximar la solución analítica. La diferencia tan pequeña entre los errores encontrados se debe principalmente a que ambos esquemas utilizan aproximaciones laterales similares. Hay que recalcar que los errores absolutos encontrados son menores que los registrados en segundo orden para todas las pruebas. El gráfico de la convergencia se presenta a continuación:

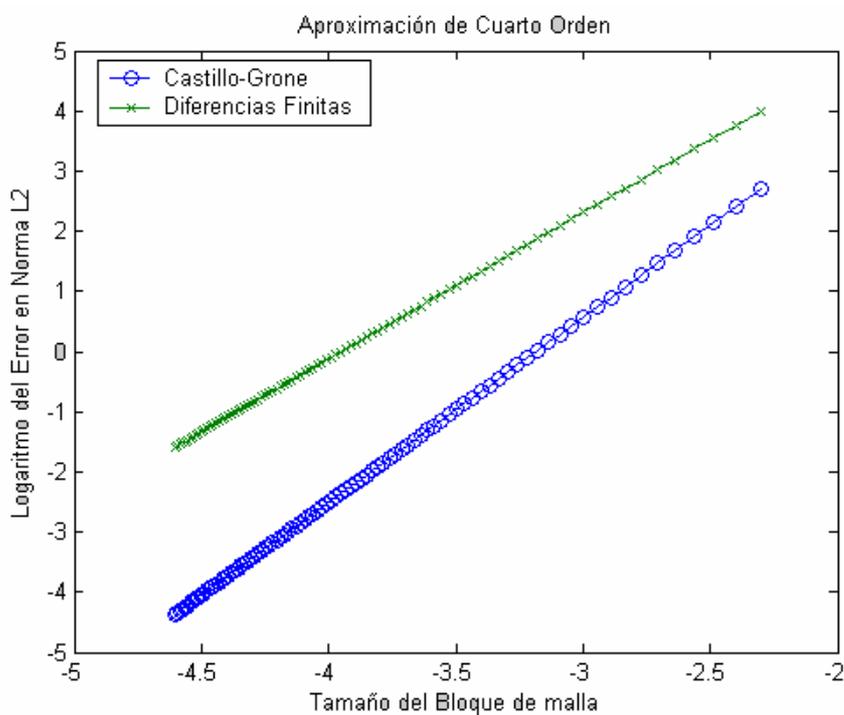


Figura [14]. Gráfico de convergencia para Cuarto Orden

<b>Método</b>	<b>Orden de Convergencia</b>
Castillo-Yasuda	3.0745
Diferencias Finitas	2.4294

Tabla [ 5]. Tasa de convergencia para Cuarto Orden

Se puede apreciar de la Tabla [ 5] que la tasa de convergencia es mayor para el método mimético que para el método tradicional. Los errores globales para ambos métodos se presentan en la siguiente tabla:

<b>Número de bloques</b>	<b>Error Global de Diferencias Finitas Cuarto Orden</b>	<b>Error Global de Castillo-Yasuda Finitas Cuarto Orden</b>
20	10,1167	1,7765
40	1,8825	0,2114
50	1,0955	0,1065
60	0,7039	0,0608
80	0,3503	0,0251
100	0,2039	0,0127

Tabla [ 6]. Errores globales para Cuarto Orden

El intervalo de dominio es  $[0,1] \times [0,1]$ . Para todos los casos presentados el método mimético reporta un error en términos del espacio y del tiempo menor al de diferencias finitas a pesar que los esquemas son similares.

Finalmente se muestra el gráfico comparativo de convergencia tanto para segundo orden y cuarto orden empleando ambos métodos.

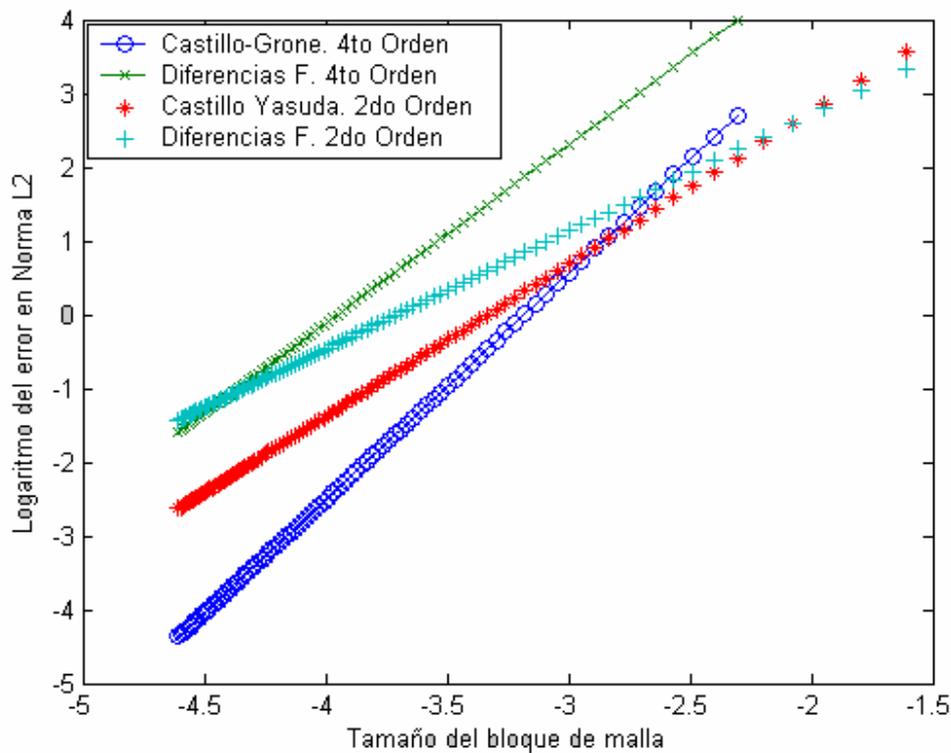


Figura [15]. Gráfico comparativo de convergencias utilizando ambos métodos en estudio.

Se puede observar que la convergencia para el método de Castillo-Grone (2003) y Castillo-Yasuda (2005) supera a la obtenida mediante el método tradicional.

### 4.3 Problema 2 (Segundo orden):

El problema 2 consiste, dada la solución analítica, en resolver la ecuación unidimensional en régimen transitorio para, de esta forma, poder realizar el estudio comparativo utilizando aproximaciones de segundo orden para ambos métodos.

El intervalo de dominio para el cual se realizó este análisis es  $\Omega = [0,1]$ .

La ecuación a resolver es la que se especificó en el problema 1, todos los términos utilizados son adimensionales por conveniencia, donde “ $k$ ” y el término “ $\rho c_p$ ” son constantes unitarias.

De acuerdo a esto el término  $\dot{q}$  es igual a:

$$\dot{q}_{(x,t)} = -\frac{4}{3} x^{\left(\frac{3}{2}\right)} e^{-t} - \frac{e^{-t}}{\sqrt{x}}$$

Con condiciones de borde de tercer tipo evaluadas en los extremos del intervalo:

$$\alpha_0 T(0,t) + \beta_0 \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = f_0(t) \text{ resultando } f_0 = 0$$

$$\alpha_1 T(1,t) + \beta_1 \frac{\partial T}{\partial x}(1,t) = f_1(t) \text{ resultando } f_1 = \frac{10}{3} e^{-t}$$

Y la condición inicial viene dada por:

$$T(x,0) = \frac{4}{3} x^{\left(\frac{3}{2}\right)}$$

La solución analítica en este caso tiene la siguiente forma:

$$\text{Solución analítica} = \frac{4}{3} x^{\left(\frac{3}{2}\right)} e^{-t}$$

#### 4.3.1 Estudio comparativo:

La solución del problema y la comparación de soluciones para uno de los casos estudiados (con un tiempo igual a 0.1 y un total de cinco bloques) se presentan en la siguiente figura:

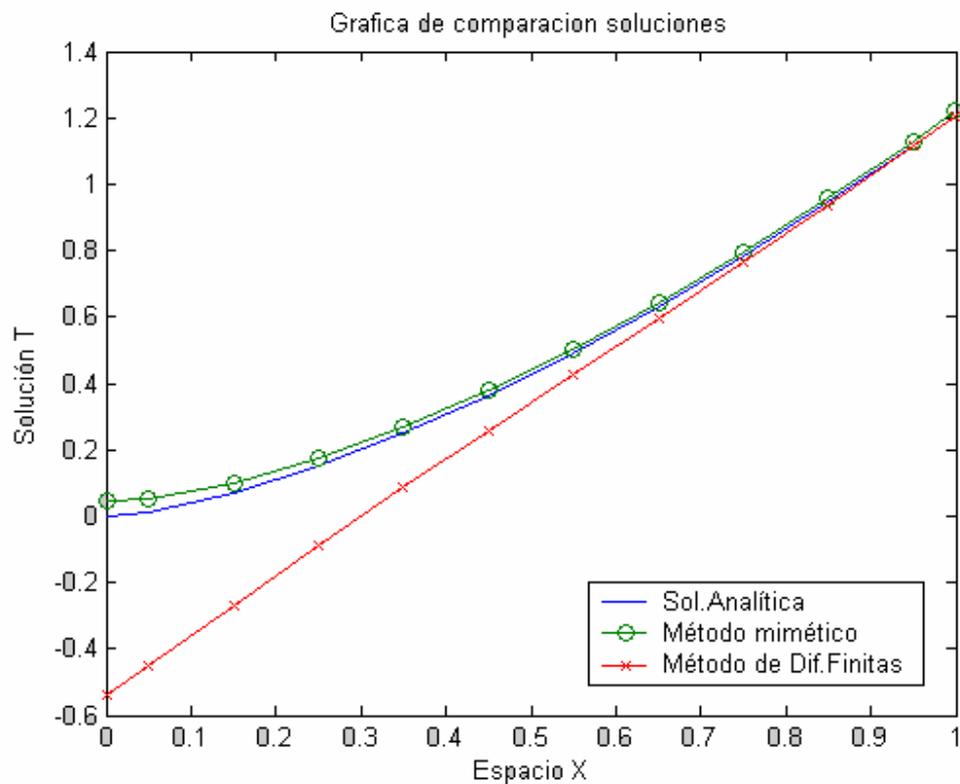


Figura [16]. Gráficas de comparación de soluciones para el problema 2 con aproximaciones de segundo orden.

Este problema permite apreciar la influencia que tienen los puntos fantasmas en las soluciones numéricas obtenidas, y por otra parte, lo favorable de poder disponer de un esquema cuya fortaleza se apoya en la capa límite. Al observar en la figura se puede apreciar algo muy particular, el método mimético aproxima de muy buena forma la solución analítica mientras que no sucede de la misma manera con el método de diferencias finitas, cuya solución obtenida en ningún momento se acerca a dicha solución analítica. Una vez más, la explicación tiene que ver directamente con los puntos fantasmas. En todos los problemas donde la generación interna de calor incluya algún término en el que se pueda anular el denominador para algún valor específico ocurrirán situaciones muy similares a la presentada en la figura anterior. El término  $\sqrt{x}$  que está dividiendo dentro de la generación interna de calor produce una discontinuidad cuando  $x$  vale cero, de manera

que se produce una discontinuidad que es decisiva y crucial en la solución obtenida con diferencias finitas, tanto así que si somos rigurosos, el método de diferencias finitas numéricamente no podría resolver este problema. Decimos esto porque para poder conseguir la solución presentada en la figura fue necesario sumar al término  $\sqrt{x}$  una constante muy pequeña de manera que el problema desde el punto de vista computacional pudiese ser resuelto cuando se produzca la discontinuidad en cero. Al contrario de lo que sucede con el método de diferencias finitas el método mimético posee una ventaja clara para este tipo de problemas dada por las condiciones de borde de tercer tipo o capa límite, la cual es notable en estas aplicaciones y cuyo beneficio se puede apreciar de manera visual y numérica en la figura y en la tabla que presenta los errores para ambos métodos. La tabla de los errores se presenta a continuación y es claro poder observar en ella que los valores obtenidos tienen una diferencia significativa.

<b>Problema 2 Segundo orden</b>			
<b>Tiempo</b>	<b>Núm. De bloques = pasos de tiempo</b>	<b>Cálculos de errores</b>	
		<b>Error Absoluto Dif.Finitas</b>	<b>Error Absoluto Castillo-Yasuda</b>
0,1	5	2,19338	0,05021
	10	1,16912	0,03605
0,5	5	3,09469	0,11177
	10	1,5791	0,06111
1	5	2,7526	0,1496
	10	1,36258	0,07969

Tabla [ 7]. Errores absolutos para Segundo Orden

Las superficies que permiten visualizar las soluciones numéricas en términos del espacio y del tiempo se muestran a continuación:

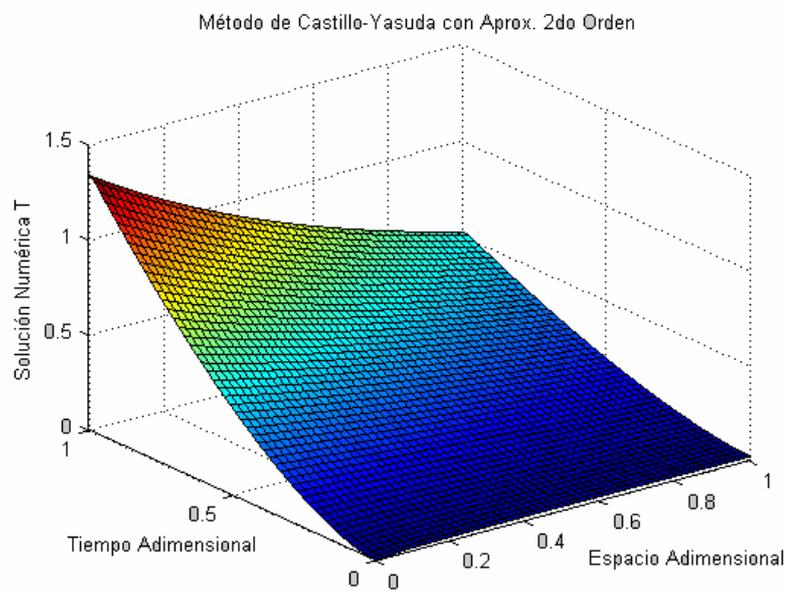


Figura [17]. Solución numérica obtenida mediante el método de Castillo y Yasuda

Y para el método de diferencias finitas:

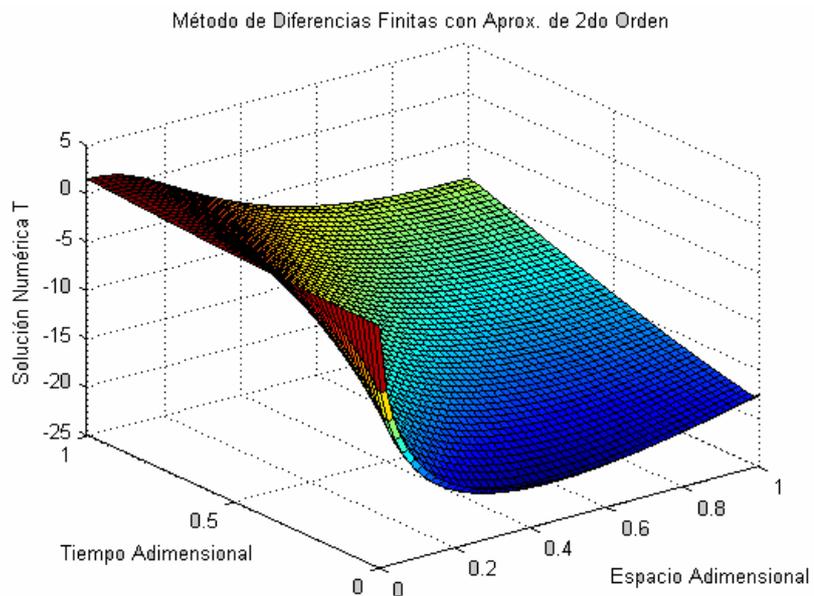


Figura [18]. Solución numérica obtenida mediante el método Diferencias Finitas.

La diferencia en términos de aproximación es notable al comparar ambas gráficas contra la solución exacta localizada en el Apéndice A-6 y se debe, como se explicó anteriormente, a la presencia de los puntos fantasmas.

Hay que resaltar que no se realizó esta prueba para cuarto orden ya que el método de diferencias finitas no posee puntos fantasmas, es decir los resultados que se podrían obtener serían similares entre ambos métodos y no se notaría visualmente la ventaja de un método sobre el otro.

## CAPÍTULO 5: Problemas con soluciones del tipo Serie de Fourier (Resultados)

Como se dijo en capítulos anteriores muchos problemas de transferencia de calor dependen del tiempo. Este tipo de problemas transitorios, normalmente surgen cuando cambian las condiciones de frontera de un sistema. Debido a esto, en este capítulo se presentan los parámetros adimensionales como son el número de Biot y el número de Fourier, indispensables para el estudio del régimen transitorio. Finalmente se realizan algunos análisis numéricos entre el método tradicional y el método de Castillo-Grone (2003) y Castillo y Yasuda (2005).

### 5.1. Parámetros adimensionales:

El número de Biot es la relación que existe entre la resistencia a la conducción y la resistencia a la convección, y se define de la siguiente manera:

$$Bi = \frac{R_{\text{cond}}}{R_{\text{conv}}} = \frac{hL}{k} \quad (42)$$

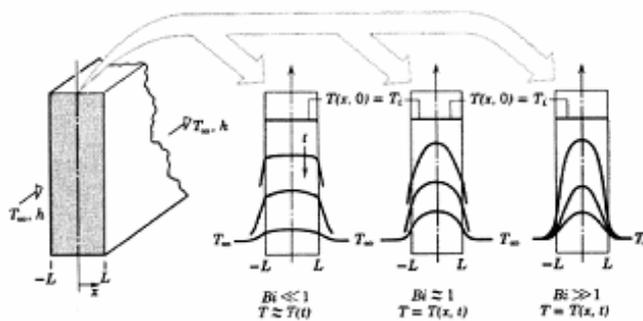


Figura [19]. Distribución de temperaturas transitorias para diferentes números de biot en una pared plana enfriada simétricamente mediante convección.

La introducción del número de Biot se debe a la importancia que tiene en problemas de conducción transitoria. Para su estudio se considera la pared plana de la Figura [19], que inicialmente está a una temperatura uniforme a  $T_i$  y experimenta enfriamiento por convección cuando se sumerge en un fluido con  $T_\infty < T_i$ . Es posible tratar el problema como unidimensional en  $x$ . El interés fundamental se centra en el conocimiento de la variación de temperaturas con la posición y el tiempo,  $T(x, t)$ . Esta variación es una función fuerte del número de Biot, y se muestran tres condiciones en la Figura [19]. Para  $Bi \ll 1$  el gradiente de temperatura en el sólido es pequeño y  $T(x, t) \approx T(t)$ . De hecho, toda la diferencia de temperaturas está entre el sólido y el fluido, y la temperatura del sólido permanece casi uniforme conforme desciende a  $T_\infty$ . No obstante, para valores de moderados a grandes del número de Biot, los gradientes de temperaturas dentro del sólido son significativos, por ello  $T = T(t)$ . Para  $Bi \gg 1$ , la diferencia de temperaturas a través del sólido es ahora mucho más grande que la que hay entre la superficie y el fluido.

Por otra parte, el número de Fourier se define por:

$$Fo \equiv \frac{\alpha t}{L_c^2} \quad (43)$$

Donde  $L_c$  (longitud característica) representa la relación entre el volumen del sólido y el área de la superficie  $\left( L_c \equiv \frac{V}{A_s} \right)$ .

El número de Fourier es un tiempo sin dimensión que, junto con el número de Biot caracteriza los problemas de conducción transitoria. Es importante establecer que para valores de  $Fo > 0.2$  la solución en serie infinita se aproxima con el primer término de una serie.

## 5.2 Problema 3 (Segundo orden):

El problema a estudiar se presenta en la Figura [20] que se muestra a continuación:

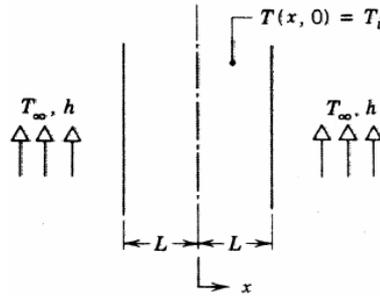


Figura [20]. Pared Plana sujeta a condiciones de convección.

La ecuación a trabajar es la siguiente:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (44)$$

Siendo la condición inicial:

$$T(x, 0) = T_i \quad (45)$$

Y las condiciones de borde:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (46)$$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x \rightarrow L} = h (T(L, t) - T_\infty) \quad (47)$$

Antes de resolver la ecuación (44) es conveniente realizar un análisis dimensional:

$$\Theta = \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \quad \eta = \frac{x}{L} \quad \zeta = \frac{\alpha t}{L^2}$$

Expresando (44),(45),(46) y (47) en términos de las nuevas variables se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} = \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} \quad (48)$$

$$\Theta(\eta, 0) = 1 \quad (49)$$

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right|_{\eta \rightarrow 1} = 0 \quad (50)$$

$$-\left. \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right|_{\eta \rightarrow 1} = \text{Bi} \Theta(1, \zeta) \quad (51)$$

El método de separación de variables supone que:

$$\Theta(\eta, \zeta) = H(\eta) \cdot Z(\zeta) \quad (52)$$

Derivando adecuadamente (52) y sustituyendo el resultado en (48) resulta:

$$\frac{1}{H} \frac{d^2 H}{d \eta^2} = \frac{1}{Z} \frac{d Z}{d \zeta}$$

Como cada miembro de la ecuación anterior es función de una sola variable:

$$\frac{1}{H} \frac{d^2 H}{d \eta^2} = \frac{1}{Z} \frac{d Z}{d \zeta} = -\lambda^2$$

ó

$$\frac{d^2 H}{d \eta^2} + \lambda^2 H = 0 \quad (53)$$

$$\frac{d Z}{d \zeta} + \lambda^2 Z = 0 \quad (54)$$

donde la solución de las ecuaciones (53) y (54):

$$H(\eta) = C_1 \cos(\lambda \eta) + C_2 \operatorname{sen}(\lambda \eta) \quad (55)$$

$$Z(\zeta) = C_3 e^{-\lambda^2 \zeta} \quad (56)$$

Sustituyendo (55) y (56) en (52):

$$\Theta(\eta, \zeta) = (A \cos(\lambda \eta) + B \operatorname{sen}(\lambda \eta)) e^{-\lambda^2 \zeta} \quad (57)$$

Con la condición de borde (50) en (57)  $\Rightarrow B = 0$

Con la condición de borde (51) en (57)  $\Rightarrow A e^{-\lambda^2 \zeta} \lambda \operatorname{sen} \lambda = B i A e^{-\lambda^2 \zeta} \cos \lambda$

ó

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(\lambda \eta)} = \frac{\lambda \eta}{B i} \quad (58)$$

La ecuación (58) tiene un número infinito de raíces (autovalores)

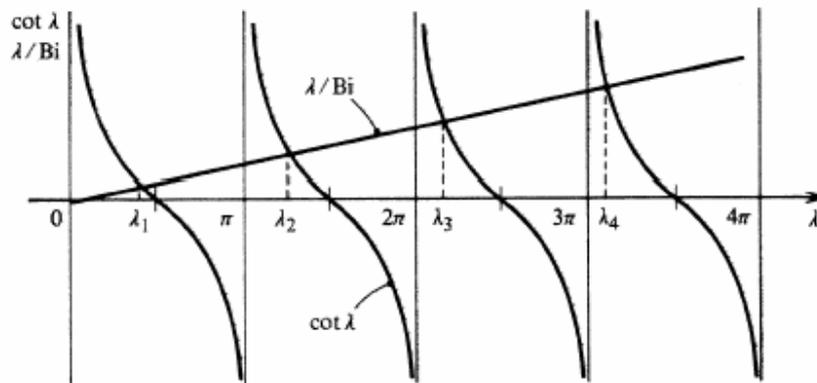


Figura [21]. Gráfica representativa de las raíces positivas de la ecuación trascendente.

Finalmente la ecuación (57) se expresa como:

$$\Theta(\eta, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 \zeta} \cos(\lambda_n \eta) \quad (59)$$

donde  $A_n$  se evalúa a partir de la condición inicial (49)

$$A_n = \frac{4 \operatorname{sen}(\lambda_n)}{2\lambda_n + \operatorname{sen}(2\lambda_n)} \quad (60)$$

De esta manera podemos graficar la temperatura adimensional  $\theta$  vs la coordenada adimensional  $\eta = \frac{x}{L}$

#### 5.4.1 Estudio comparativo:

Para poder realizar el estudio del fenómeno físico presente, la prueba efectuada consistió en modificar ambos parámetros adimensionales, es decir, se varió el número de Biot y el número de Fourier de manera de poder observar el comportamiento de ambos

métodos y los diferentes errores registrados. También se procedió a variar el tamaño de mallas para cada uno de los casos de manera de poder registrar lo que ocurría al realizar un refinamiento de mallas. El gráfico representativo para una de las soluciones obtenidas se presenta a continuación:

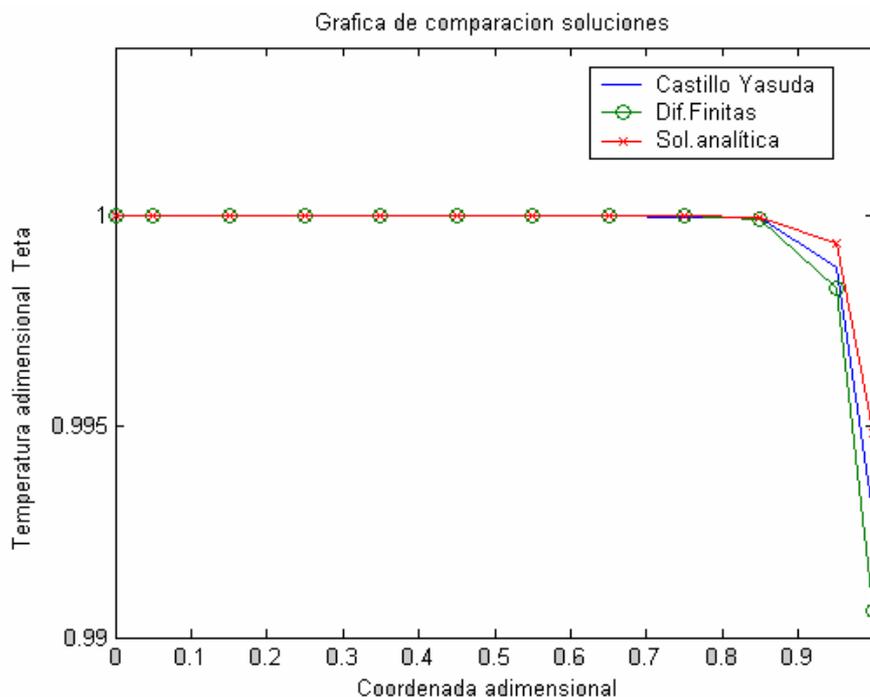


Figura [22]. Gráfica de comparación de soluciones para el problema de pared plana.

Los errores absolutos fueron hallados según la ecuación (41), mientras que el error porcentual se halló según que el error porcentual según la siguiente manera:

$$\text{Error Porcetual} = \frac{\text{Max} | \text{solución numérica obtenida} - \text{Solución analítica} |}{\text{Max} | \text{Solución Analítica} |} * 100 \quad (61)$$

Las tablas que presentan los errores absolutos y porcentuales para segundo orden y cuarto orden son presentadas en los Apéndice B-1 y Apéndice B-2 respectivamente.

El objetivo principal de este análisis era poder establecer un intervalo de valores bajo el cual se pudiera concluir para qué casos era mejor utilizar un método u otro, sin embargo, como se observa en las tablas, es muy difícil poder determinar ese intervalo particular ya que los errores obtenidos entre ambos métodos son muy parecidos y pequeños y realmente no resultan significativos. Para todos los casos estudiados ambos métodos aproximan de muy buena forma la solución analítica. En el caso de segundo orden no se aprecia de manera significativa la posible desventaja que en términos del error producen los puntos fantasmas, y esto se debe al valor que tienen las condiciones de borde de tercer tipo o de tercera clase para este problema. En términos del error obtenido, podría decirse para el caso de segundo orden, que existe una tendencia que es independiente del número de Biot y que depende más bien del número de Fourier, es decir, para valores de Fourier menores a 0.01 el método de diferencias finitas aproxima mejor la solución mientras que ocurre lo contrario para valores de Fourier mayores de 0.01, sin embargo, como se especificó es sólo una tendencia.

En el caso de cuarto orden esa posible tendencia es muy difícil de establecer porque los resultados no muestran un comportamiento constante y los errores obtenidos igualmente son bastante pequeños para ambos métodos. Aunque los errores no sean considerables el método mimético no deja de tener una buena aproximación de la solución en términos de series de Fourier para aproximaciones de cuarto orden y supera en una gran cantidad de casos al método de diferencias finitas. Sin embargo, debido a que la diferencia es tan pequeña en términos del error, lo más lógico sería emplear la discretización del método tradicional cuando se desee utilizar aproximaciones de cuarto orden, ya que, es mucho más sencilla su discretización.

## SUMARIO Y CONCLUSIONES

En este trabajo especial de grado hemos presentado una extensión original del método mimético desarrollado recientemente por Castillo-Grone (2003) y Castillo-Yasuda (2005). La extensión permite resolver numéricamente la ecuación unidimensional del calor en régimen transitorio bajo condiciones de tercer tipo o clase. Igualmente se esbozaron los esquemas tradicionales de diferencias finitas para segundo y cuarto orden. Todos los métodos descritos fueron implementados en Matlab en sus versiones unidimensionales los cuales permitieron realizar un estudio comparativo entre el método mimético y el esquema de diferencias finitas.

Los resultados de estos estudios comparativos muestran una tendencia a que las aproximaciones producidas por el método mimético superan a aquellas obtenidas mediante el esquema de diferencias finitas tanto en términos del error como en los órdenes de convergencia. Se pudo demostrar a través de ejemplos numéricos la desventaja o debilidad que desde el punto de vista matemático y computacional originan los puntos fantasmas que se utilizan en el esquema tradicional o de diferencias finitas, especialmente cuando la generación de calor incluya algún término que produzca una discontinuidad. En todas las pruebas se demostró que el error relativo obtenido era menor para cuarto orden en comparación con segundo orden, de igual manera, el análisis del error global, el cual contempla tanto al espacio como al tiempo fue menor para el método mimético.

A pesar de contar con un esquema tradicional de cuarto orden para diferencias finitas, que carecía de puntos fantasmas, los resultados obtenidos mediante el esquema mimético mostraron una tendencia a superar en una amplia cantidad de casos a diferencias finitas aunque los errores encontrados no hayan sido significativos.

El estudio del fenómeno físico, realizado a través de los parámetros adimensionales de Biot y Fourier, permitió conocer el comportamiento del método mimético en la solución de un problema con solución del tipo serie de Fourier. A pesar de que no exista una tendencia o un rango claro que pueda ser generalizado para todos los problemas en régimen transitorio el análisis comparativo permitió tener una idea general de los resultados que

podrían esperarse si se estudiaran otros ejemplos similares. Para el caso de segundo orden la tendencia indica que independientemente del valor de Biot para valores de Fourier menores a 0.01 el método de diferencias finitas aproxima mejor la solución del tipo serie de Fourier, mientras que ocurre lo contrario para valores de Fourier mayores de 0.01. En el caso de cuarto orden los resultados no muestran un comportamiento constante y los errores para ambos métodos son muy pequeños.

## RECOMENDACIONES

- Se recomienda utilizar Matlab para la elaboración de todos los programas que se puedan realizar en futuras investigaciones. Asimismo, podría ser de gran utilidad dominar otro tipo de aplicaciones como por ejemplo Maple, o cualquier otra herramienta poderosa de carácter simbólico y algebraico de manera de corroborar que los cálculos teóricos encontrados estén correctos.
- Ya que los errores encontrados utilizando aproximaciones de cuarto orden no son significativos se recomienda en el caso que sea necesario, utilizar diferencias finitas, ya que este esquema es mucho más sencillo de discretizar y se evitarían posibles equivocaciones cuando se esté empleando.
- Utilizar el trabajo aquí expuesto como referencia de futuras investigaciones que se puedan llevar a cabo en el área de transferencia de calor, por ejemplo, sería interesante evaluar el desempeño entre ambos métodos para problemas numéricos en los que la conductividad térmica sea variable. Otra posible investigación podría ser considerar el régimen transitorio pero para el caso bidimensional.
- A lo largo de todo el trabajo la comparación del método mimético se realiza contra el método tradicional de diferencias finitas, sin embargo, también deberían considerarse otros métodos para realizar el estudio comparativo en futuras investigaciones.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Castillo, J., Grone, R., 2003. A Matrix Analysis to Higher Order Approximations for Divergence and Gradients Satisfying a Global Conservation Law. *SIAM Journal Matrix Analysis Applications*, Vol. 25 , N 1, páginas 128-142.
- Castillo, J., Yasuda, M., 2005. Linear Systems Arising for Second Order Mimetic Divergence and Gradient Discretizations. *Journal of mathematics modeling and algorithm*.
- Freites, M., 2004. *Un estudio comparativo de los métodos miméticos para la ecuación estacionaria de difusión*. Trabajo especial de grado, Facultad de Ciencias, Escuela de Matemática de la Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela.
- Freites, M., Guevara, J.M., 2004. A mimetic finite difference scheme for solving the steady state diffusion equation with singular functions. *Memorias del séptimo congreso internacional de métodos numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas*. Tm25-tm32.
- Incropera, F., DeWitt, D., 1999. *Fundamentos de transferencia de calor*. Cuarta Edición. Prentice Hall. México.
- Kolman, B. 1999. *Álgebra Lineal con aplicaciones y Matlab*. Sexta edición. Prentice Hall. México.
- Ledanois J., De Ramos A., Pimentel J., Pironti F., 2000. *Métodos numéricos aplicados en Ingeniería*. Mc Graw Hill. Colombia
- Nakamura, S. 1997. *Análisis numérico y visualización gráfica con Matlab*. Segunda edición. Pearson educación. México.
- Smith, G. 1986. *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. Tercera edición. Oxford University Press. New York.

## **APÉNDICE A**

**Apéndice A-1. Sistema Lineal Resultante para Diferencias Finitas con Aprox. De Segundo Orden**

$$\begin{pmatrix}
 \frac{-\beta_0}{h} & \alpha_0 & \frac{\beta_0}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{-4k_1}{h^2} & \frac{4(k_1+k_2)}{h^2} + \frac{\rho c}{\Delta t} & \frac{-4k_2}{h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{-8k_2}{3h^2} & \frac{8\left(\frac{k_3}{2}+k_2\right)}{3h^2} + \frac{\rho c}{\Delta t} & \frac{-4k_3}{3h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{-k_i}{h^2} & \frac{k_i+k_{i+1}}{h^2} + \frac{\rho c}{\Delta t} & \frac{-k_{i+1}}{h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-4k_{n+1}}{3h^2} & \frac{8\left(\frac{k_{n+1}}{2}+k_{n+2}\right)}{3h^2} + \frac{\rho c}{\Delta t} & \frac{-8k_{n+2}}{3h^2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-4k_{n+2}}{h^2} & \frac{4(k_{n+2}+k_{n+3})}{h^2} + \frac{\rho c}{\Delta t} & \frac{-4k_{n+3}}{h^2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\beta_1}{h} & \alpha_1 & \frac{\beta_1}{h} & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 T_0 \\
 T_1 \\
 T_2 \\
 T_i \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 T_{n+1} \\
 T_{n+2} \\
 T_{n+3}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 f_0 \\
 \dot{q}_1 + \frac{\rho c}{\Delta t} T_1^p \\
 \dot{q}_2 + \frac{\rho c}{\Delta t} T_2^p \\
 \dot{q}_i + \frac{\rho c}{\Delta t} T_i^p \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \dot{q}_{n+1} + \frac{\rho c}{\Delta t} T_{n+1}^p \\
 \dot{q}_{n+2} + \frac{\rho c}{\Delta t} T_{n+2}^p \\
 f_1
 \end{pmatrix}$$

**Apéndice A-2. Sistema Lineal Resultante para Castillo con Aprox. De Segundo Orden**

$$\begin{pmatrix}
 \alpha_0 + \frac{8\beta_0}{3h} & -\frac{3\beta_0}{h} & \frac{\beta_0}{3h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{1}{3h} - \frac{8k_1}{3h} & \frac{1}{2h} + \frac{3k_1}{h^2} + \frac{k_2}{h^2} + \frac{\rho c}{\Delta t} & -\frac{1}{6h} - \frac{k_1}{3h^2} - \frac{k_2}{h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{3h} & -\frac{1}{2h} - \frac{k_2}{h^2} & \frac{1}{6h} + \frac{k_2}{h^2} + \frac{k_3}{h^2} + \frac{\rho c}{\Delta t} & -\frac{k_3}{h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{k_{i-1}}{h^2} & \frac{k_{i-1} + k_i}{h^2} + \frac{\rho c}{\Delta t} & -\frac{k_i}{h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_{n-1}}{h^2} & \frac{1}{6h} + \frac{k_{n-1}}{h^2} + \frac{k_n}{h^2} + \frac{\rho c}{\Delta t} & -\frac{1}{2h} - \frac{k_n}{h^2} & \frac{1}{3h} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6h} + \frac{k_n}{h^2} - \frac{k_{n+1}}{3h^2} & \frac{1}{2h} + \frac{k_n}{h^2} + \frac{3k_{n+1}}{h^2} + \frac{\rho c}{\Delta t} & -\frac{1}{3h} - \frac{8k_{n+1}}{3h^2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_1}{3h} & -\frac{3\beta_1}{h} & \alpha_1 + \frac{8\beta_1}{3h} & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 T_1 \\
 T_2 \\
 T_3 \\
 \vdots \\
 T_i \\
 \vdots \\
 T_n \\
 T_{n+1} \\
 T_{n+2}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 f_0 \\
 \dot{q}_2 + \frac{T_2^P}{\Delta t} \\
 \dot{q}_3 + \frac{T_3^P}{\Delta t} \\
 \vdots \\
 \dot{q}_i + \frac{T_i^P}{\Delta t} \\
 \vdots \\
 \dot{q}_n + \frac{T_n^P}{\Delta t} \\
 \dot{q}_{n+1} + \frac{T_{n+1}^P}{\Delta t} \\
 f_1
 \end{pmatrix}$$

**Apéndice A-3. Sistema Lineal Resultante para Diferencias Finitas con Aprox. de Cuarto Orden**

$$\begin{pmatrix}
 \alpha - \frac{137\beta_0}{60h} & \frac{300\beta_0}{60h} & -\frac{300\beta_0}{60h} & \frac{200\beta_0}{60h} & -\frac{75\beta_0}{60h} & \frac{12\beta_0}{60h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{-11}{12h^2} & \frac{20}{12h^2} + \frac{\rho c}{k\Delta t} & \frac{-6}{12h^2} & \frac{-4}{12h^2} & \frac{1}{12h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{12h^2} & \frac{-16}{12h^2} & \frac{30}{12h^2} + \frac{\rho c}{k\Delta t} & \frac{-16}{12h^2} & \frac{1}{12h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12h^2} & \frac{-16}{12h^2} & \frac{30}{12h^2} + \frac{\rho c}{k\Delta t} & \frac{-16}{12h^2} & \frac{1}{12h^2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12h^2} & \frac{-4}{12h^2} & \frac{-6}{12h^2} & \frac{20}{12h^2} + \frac{\rho c}{k\Delta t} & \frac{-11}{12h^2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12\beta_1}{60h} & \frac{75\beta_1}{60h} & -\frac{200\beta_1}{60h} & \frac{300\beta_1}{60h} & \frac{-300\beta_1}{60h} & \alpha_1 + \frac{137\beta_1}{60h}
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 T_0 \\
 T_1 \\
 T_1 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 T_n \\
 T_{n+1}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 f_0 \\
 \dot{q}_1^p + \frac{\rho c}{k} \cdot \frac{T_1^p}{\Delta t} \\
 \dot{q}_1^p + \frac{\rho c}{k} \cdot \frac{T_1^p}{\Delta t} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \dot{q}_n^p + \frac{\rho c}{k} \cdot \frac{T_n^p}{\Delta t} \\
 f_1
 \end{pmatrix}$$

#### Apéndice A-4. Discretización para cada uno de los nodos utilizando el Método Mimético

**Nodo X<sub>1</sub>: (Condición de borde del lado izquierdo)**

$$\left(\alpha_0 + \frac{47888 \beta_0}{14245 h}\right) T_1^{p+1} + \left(\frac{-1790 \beta_1}{407 h}\right) T_2^{p+1} + \left(\frac{14545 \beta_1}{9768 h}\right) T_3^{p+1} + \left(\frac{-8997 \beta_1}{16280 h}\right) T_4^{p+1} + \left(\frac{2335 \beta_1}{22792 h}\right) T_5^{p+1} + \left(\frac{-25 \beta_1}{9768 h}\right) T_6^{n+1} = f_0$$

**Nodo X<sub>2</sub>:**

$$(a_1)T_1^{p+1} + (a_2)T_2^{p+1} + (a_3)T_3^{p+1} + (a_4)T_4^{p+1} + (a_5)T_5^{p+1} + (a_6)T_6^{p+1} + (a_7)T_7^{p+1} + (a_8)T_8^{p+1} = \dot{q}_2 + \frac{T_2^p}{\Delta t}$$

donde:

$$a_1 = \left(-\frac{28439486 k_1}{9245005 h^2} - \frac{2424 k_2}{22715 h^2}\right); a_2 = \left(\frac{4252145 k_1}{1056572 h^2} + \frac{9393 k_2}{10384 h^2} - \frac{6091 k_3}{373824 h^2} + \frac{\rho c_p}{\Delta t}\right)$$

$$a_3 = \left(-\frac{69103295 k_1}{50715456 h^2} - \frac{8787 k_2}{10384 h^2} + \frac{18273 k_3}{41536 h^2} + \frac{1165 k_4}{124608 h^2}\right); a_4 = \left(\frac{42744747 k_1}{84525760 h^2} + \frac{2727 k_2}{51920 h^2} - \frac{18273 k_3}{41536 h^2} - \frac{10485 k_4}{41536 h^2} - \frac{43 k_5}{20768 h^2}\right)$$

$$a_5 = \left(-\frac{11093585 k_1}{118336064 h^2} - \frac{303 k_2}{72688 h^2} + \frac{6091 k_3}{373824 h^2} + \frac{10485 k_4}{41536 h^2} + \frac{1161 k_5}{20768 h^2} + \frac{25 k_6}{373824 h^2}\right);$$

$$a_6 = \left(\frac{118775 k_1}{50715456 h^2} - \frac{1165 k_4}{124608 h^2} - \frac{1161 k_5}{20768 h^2} - \frac{75 k_6}{41536 h^2}\right); a_7 = \left(\frac{43 k_5}{20768 h^2} + \frac{75 k_6}{41536 h^2}\right)$$

$$a_8 = \left(-\frac{25 k_6}{373824 h^2}\right)$$

**Continuación. Discretización para cada uno de los nodos utilizando el Método Mimético.**

**Nodo X<sub>3</sub>:**

$$(b_1)T_1^{p+1} + (b_2)T_2^{p+1} + (b_3)T_3^{p+1} + (b_4)T_4^{p+1} + (b_5)T_5^{p+1} + (b_6)T_6^{p+1} = \dot{q}_3 + \frac{T_3^p}{\Delta t}$$

$$b_1 = \left( \frac{5986 k_1}{42735 h^2} + \frac{6 k_2}{35 h^2} \right); b_2 = \left( -\frac{895 k_1}{4884 h^2} - \frac{93 k_2}{64 h^2} - \frac{3 k_3}{64 h^2} \right); b_3 = \left( \frac{14545 k_1}{234432 h^2} + \frac{87 k_2}{64 h^2} + \frac{81 k_3}{64 h^2} + \frac{k_4}{576 h^2} + \frac{\rho c_p}{\Delta t} \right)$$

$$b_4 = \left( -\frac{2999 k_1}{130240 h^2} - \frac{27 k_2}{320 h^2} - \frac{81 k_3}{64 h^2} - \frac{3 k_4}{64 h^2} \right); b_5 = \left( \frac{2335 k_1}{547008 h^2} + \frac{3 k_2}{448 h^2} + \frac{3 k_3}{64 h^2} + \frac{3 k_4}{64 h^2} \right)$$

$$b_6 = \left( -\frac{25 k_1}{234432 h^2} - \frac{k_4}{576 h^2} \right)$$

**Nodo X<sub>4</sub>:**

$$(c_1)T_1^{p+1} + (c_2)T_2^{p+1} + (c_3)T_3^{p+1} + (c_4)T_4^{p+1} + (c_5)T_5^{p+1} + (c_6)T_6^{p+1} + (c_7)T_7^{p+1} = \dot{q}_4 + \frac{T_4^p}{\Delta t}$$

$$c_1 = \left( -\frac{2 k_2}{315 h^2} \right); c_2 = \left( \frac{31 k_2}{576 h^2} + \frac{3 k_3}{64 h^2} \right); c_3 = \left( -\frac{29 k_2}{576 h^2} - \frac{81 k_3}{64 h^2} - \frac{3 k_4}{64 h^2} \right); c_4 = \left( \frac{k_2}{320 h^2} + \frac{81 k_3}{64 h^2} + \frac{81 k_4}{64 h^2} + \frac{k_5}{575 h^2} + \frac{\rho c_p}{\Delta t} \right)$$

$$c_5 = \left( -\frac{k_2}{4032 h^2} - \frac{3 k_3}{64 h^2} - \frac{81 k_4}{64 h^2} - \frac{3 k_5}{64 h^2} \right); c_6 = \left( \frac{3 k_4}{64 h^2} + \frac{3 k_5}{64 h^2} \right); c_7 = \left( -\frac{k_5}{576 h^2} \right)$$

**Continuación. Discretización para cada uno de los nodos utilizando el Método Mimético.**

**Nodo  $X_i$ :**  $5 \leq i \leq n-2$

$$(d_1)T_{i-3}^{p+1} + (d_2)T_{i-2}^{p+1} + (d_3)T_{i-1}^{p+1} + (d_4)T_i^{p+1} + (d_5)T_{i+1}^{p+1} + (d_6)T_{i+2}^{p+1} + (d_7)T_{i+3}^{p+1} = \dot{q}_i + \frac{T_i^p}{\Delta t}$$

$$d_1 = \left( -\frac{k_{i-2}}{576 h^2} \right); d_2 = \left( \frac{3 k_{i-2}}{64 h^2} + \frac{3 k_{i-1}}{64 h^2} \right); d_3 = \left( -\frac{3 k_{i-2}}{64 h^2} - \frac{81 k_{i-1}}{64 h^2} - \frac{3 k_i}{64 h^2} \right)$$

$$d_4 = \left( \frac{k_{i-2}}{576 h^2} + \frac{81 k_{i-1}}{64 h^2} + \frac{81 k_i}{64 h^2} + \frac{k_{i+1}}{576 h^2} + \frac{\rho c_p}{\Delta t} \right); d_5 = \left( -\frac{3 k_{i-1}}{64 h^2} - \frac{81 k_i}{64 h^2} - \frac{3 k_{i+1}}{64 h^2} \right)$$

$$d_6 = \left( \frac{3 k_i}{64 h^2} + \frac{3 k_{i+1}}{64 h^2} \right); d_7 = \left( -\frac{k_{i+1}}{576 h^2} \right)$$

**Nodo  $X_{n-1}$ :**

$$(e_1)T_{n-3}^{p+1} + (e_2)T_{n-2}^{p+1} + (e_3)T_{n-1}^{p+1} + (e_4)T_n^{p+1} + (e_5)T_{n+1}^{p+1} + (e_6)T_{n+2}^{p+1} = \dot{q}_{n-1} + \frac{T_{n-1}^p}{\Delta t}$$

$$e_1 = \left( -\frac{k_{n-3}}{576 h^2} \right) T_{n-4}^{p+1}; e_2 = \left( \frac{3 k_{n-3}}{64 h^2} + \frac{3 k_{n-2}}{64 h^2} \right) T_{n-3}^{p+1}; e_3 = \left( -\frac{3 k_{n-3}}{64 h^2} - \frac{81 k_{n-2}}{64 h^2} - \frac{3 k_{n-1}}{64 h^2} - \frac{k_n}{4032 h^2} \right) T_{n-2}^{p+1};$$

$$e_4 = \left( \frac{k_{n-3}}{576 h^2} + \frac{81 k_{n-2}}{64 h^2} + \frac{81 k_{n-1}}{64 h^2} + \frac{k_n}{320 h^2} + \frac{\rho c_p}{\Delta t} \right) T_{n-1}^{p+1}; e_5 = \left( -\frac{3 k_{n-2}}{64 h^2} - \frac{81 k_{n-1}}{64 h^2} - \frac{29 k_n}{576 h^2} \right) T_n^{p+1}$$

$$e_6 = \left( -\frac{3 k_{n-2}}{64 h^2} - \frac{81 k_{n-1}}{64 h^2} - \frac{29 k_n}{576 h^2} \right) T_n^{p+1}; e_7 = \left( \frac{3 k_{n-1}}{64 h^2} + \frac{31 k_n}{576 h^2} \right) T_{n+1}^{p+1}; e_8 = \left( -\frac{2 k_n}{315 h^2} \right) T_{n+2}^{p+1}$$

**Continuación. Discretización para cada uno de los nodos utilizando el Método Mimético.**

**Nodo  $X_n$ :**

$$(f_1)T_{n-3}^{p+1} + (f_2)T_{n-2}^{p+1} + (f_3)T_{n-1}^{p+1} + (f_4)T_n^{p+1} + (f_5)T_{n+1}^{p+1} + (f_6)T_{n+2}^{p+1} = \dot{q}_n + \frac{T_n^p}{\Delta t}$$

$$f_1 = \left( -\frac{k_{n-2}}{576 h^2} - \frac{25 k_{n+1}}{234432 h^2} \right); f_2 = \left( \frac{3 k_{n-2}}{64 h^2} + \frac{3 k_{n-1}}{64 h^2} + \frac{3 k_n}{448 h^2} + \frac{2335 k_{n+1}}{547008 h^2} \right)$$

$$f_3 = \left( -\frac{3 k_{n-2}}{64 h^2} - \frac{81 k_{n-1}}{64 h^2} - \frac{27 k_n}{320 h^2} - \frac{2999 k_{n+1}}{130240 h^2} \right); f_4 = \left( \frac{k_{n-2}}{576 h^2} + \frac{81 k_{n-1}}{64 h^2} + \frac{87 k_n}{64 h^2} + \frac{14545 k_{n+1}}{234432 h^2} + \frac{\rho c_p}{\Delta t} \right)$$

$$f_5 = \left( -\frac{3 k_{n-1}}{64 h^2} - \frac{93 k_n}{64 h^2} - \frac{895 k_{n+1}}{4884 h^2} \right); f_6 = \left( \frac{6 k_n}{35 h^2} + \frac{5986 k_{n+1}}{42735 h^2} \right)$$

**Nodo  $X_{n+1}$ :**

$$(g_1)T_{n-5}^{p+1} + (g_2)T_{n-4}^{p+1} + (g_3)T_{n-3}^{p+1} + (g_4)T_{n-2}^{p+1} + (g_5)T_{n-1}^{p+1} + (g_6)T_n^{p+1} + (g_7)T_{n+1}^{p+1} + (g_8)T_{n+2}^{p+1} = \dot{q}_{n+1} + \frac{T_{n+1}^p}{\Delta t}$$

$$g_1 = \left( -\frac{25 k_{n-4}}{373824 h^2} \right); g_2 = \left( \frac{75 k_{n-4}}{41536 h^2} + \frac{43 k_{n-3}}{20768 h^2} \right)$$

$$g_3 = \left( -\frac{75 k_{n-4}}{41536 h^2} - \frac{1161 k_{n-3}}{20768 h^2} - \frac{1165 k_{n-2}}{124608 h^2} + \frac{118775 k_{n+1}}{50715456 h^2} \right)$$

**Continuación. Discretización para cada uno de los nodos utilizando el Método Mimético.**

$$g_4 = \left( \frac{25 k_{n-4}}{373824 h^2} + \frac{1161 k_{n-3}}{20768 h^2} + \frac{10485 k_{n-2}}{41536 h^2} + \frac{6091 k_{n-1}}{373824 h^2} - \frac{303 k_n}{72688 h^2} - \frac{11093585 k_{n+1}}{118336064 h^2} \right)$$

$$g_5 = \left( -\frac{43 k_{n-3}}{20768 h^2} - \frac{10485 k_{n-2}}{41536 h^2} - \frac{18273 k_{n-1}}{41536 h^2} + \frac{2727 k_n}{51920 h^2} + \frac{42744747 k_{n+1}}{84525760 h^2} \right)$$

$$g_6 = \left( \frac{1165 k_{n-2}}{124608 h^2} + \frac{18273 k_{n-1}}{41536 h^2} - \frac{8787 k_n}{10384 h^2} - \frac{69103295 k_{n+1}}{50715456 h^2} \right)$$

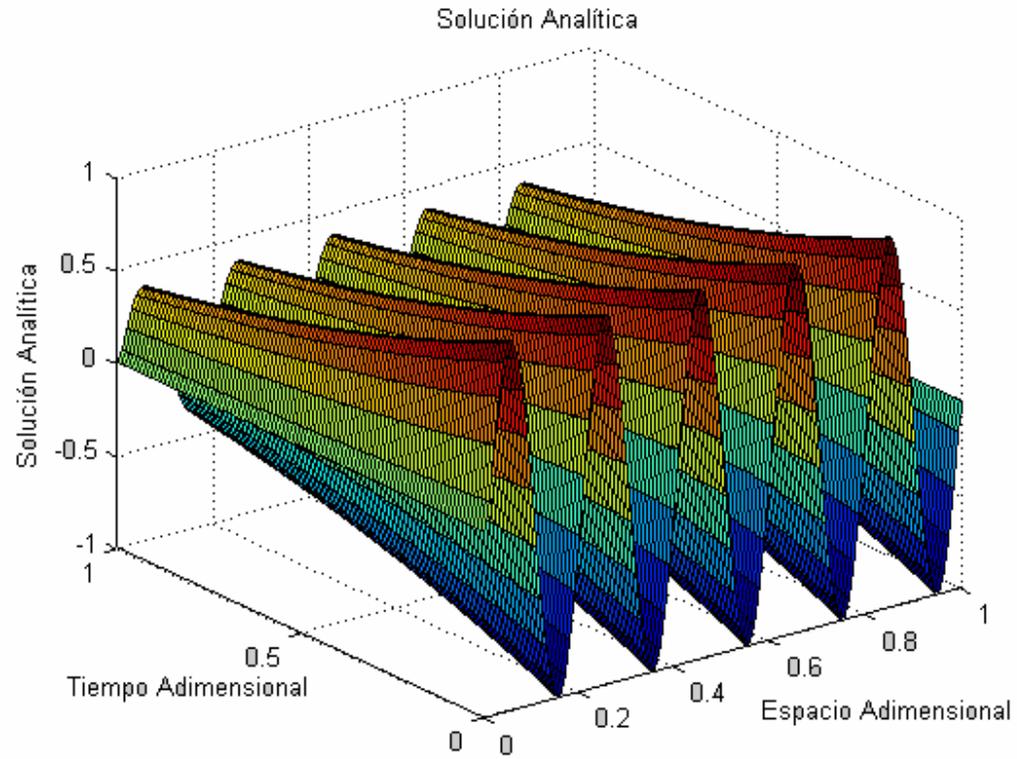
$$g_7 = \left( -\frac{6091 k_{n-1}}{373824 h^2} + \frac{9393 k_n}{10384 h^2} + \frac{4252145 k_{n+1}}{1056572 h^2} + \frac{\rho c_p}{\Delta t} \right)$$

$$g_8 = \left( -\frac{2424 k_n}{22715 h^2} - \frac{28439486 k_{n+1}}{9245005 h^2} \right)$$

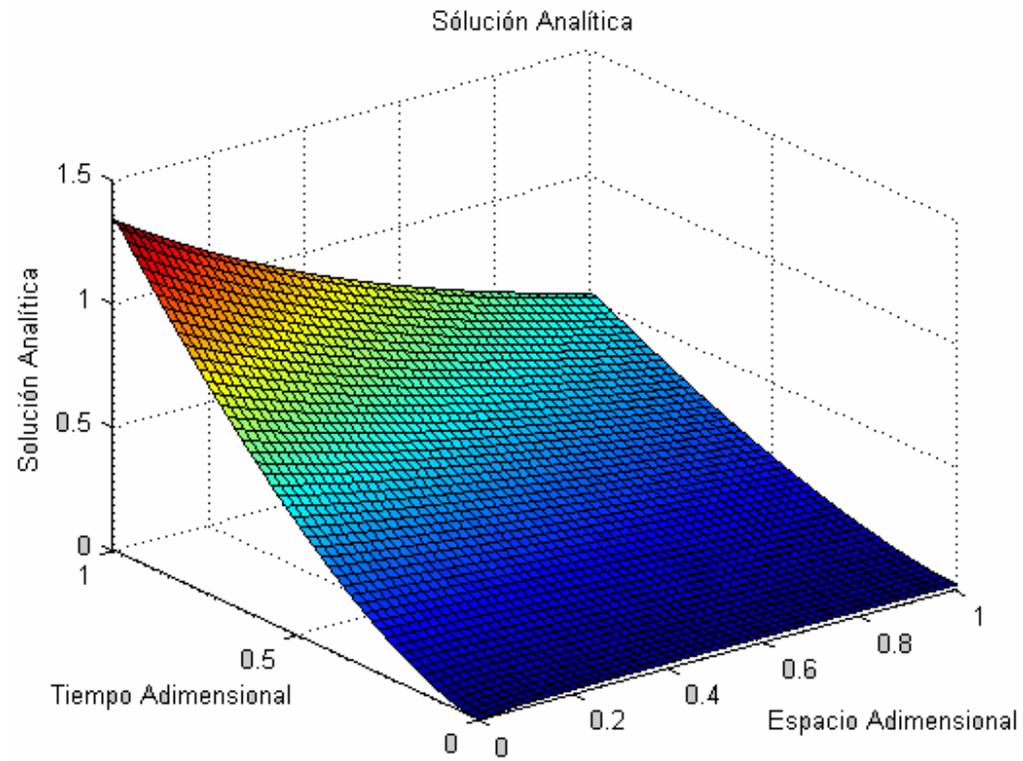
**Nodo  $T_{n+2}$ : (Condición de borde del lado derecho)**

$$\left( -\frac{25 \beta_1}{9768 h} \right) T_{n-3}^{p+1} + \left( \frac{2335 \beta_1}{22792 h} \right) T_{n-2}^{p+1} + \left( -\frac{8997 \beta_1}{16280 h} \right) T_{n-1}^{p+1} + \left( -\frac{14545 \beta_1}{9768 h} \right) T_n^{p+1} + \left( -\frac{1790 \beta_1}{407 h} \right) T_{n+1}^{p+1} + \left( \alpha_1 + \frac{47888 \beta_1}{14245 h} \right) T_{n+2}^{n+1} = f_1$$

**Apéndice A-5. Superficie para la Solución analítica del Problema 1 con Aprox. De Segundo Orden**



**Apéndice A-6. Superficie para la Solución analítica del Problema 2 con Aprox. De Segundo Orden**



## **APÉNDICE B**

**Apéndice B-1. Estudio de Biot y Fourier con Aprox. de Segundo Orden**

Biot	Fourier	Número de Bloques	Cálculos de errores			
			Error Absoluto Diferencias Finitas	Error Absoluto Castillo	Error Porcentual Diferencias Finitas	Error Porcentual Castillo
0.01	0.000001	10	0,00003	0,00038	0,00305	0,03809
		30	0,00003	0,00013	0,00319	0,01312
		60	0,00003	0,00007	0,00318	0,00691
	0.00001	10	0,00003	0,00036	0,00302	0,03578
		30	0,00003	0,00011	0,00312	0,01101
		60	0,00003	0,00005	0,00322	0,00509
	0.0001	10	0,00006	0,00029	0,00599	0,02906
		30	0,00003	0,00006	0,00300	0,00617
		60	0,00003	0,00003	0,00312	0,00312
	0.001	10	0,00008	0,00014	0,00770	0,01372
		30	0,00003	0,00003	0,00255	0,00273
		60	0,00003	0,00003	0,00255	0,00255
	0.01	10	0,00011	0,00004	0,01116	0,00365
		30	0,00002	0,00002	0,00157	0,00157
		60	0,00002	0,00002	0,00157	0,00157
	0.1	10	0,00024	0,00022	0,02440	0,02171
		30	0,00007	0,00007	0,00680	0,00654
		60	0,00003	0,00003	0,00285	0,00278
	1	10	0,00099	0,00098	0,10041	0,09927
		30	0,00033	0,00032	0,03287	0,03274
		60	0,00016	0,00016	0,01614	0,01611
	3	10	0,00294	0,00293	0,30232	0,30118
		30	0,00097	0,00096	0,09934	0,09921
		60	0,00047	0,00047	0,04870	0,04866

**Continuación. Estudio de Biot y Fourier con Aprox. de Segundo Orden.**

Biot	Fourier	Número de Bloques	Cálculos de errores			
			Error Absoluto Diferencias Finitas	Error Absoluto Castillo	Error Porcentual Diferencias Finitas	Error Porcentual Castillo
0.20	0.000001	10	0,00030	0,00714	0,02973	0,71439
		30	0,00028	0,00220	0,02814	0,21965
		60	0,00026	0,00096	0,02580	0,09575
	0.00001	10	0,00067	0,00672	0,06683	0,67298
		30	0,00052	0,00182	0,05160	0,18205
		60	0,00033	0,00064	0,03278	0,06395
	0.0001	10	0,00159	0,00537	0,15903	0,53788
		30	0,00058	0,00084	0,05804	0,08382
		60	0,00025	0,00008	0,02508	0,00850
	0.001	10	0,00198	0,00224	0,19931	0,22530
		30	0,00057	0,00012	0,05769	0,01209
		60	0,00022	0,00009	0,02195	0,00945
	0.01	10	0,00258	0,00115	0,26385	0,11634
		30	0,00063	0,00047	0,06443	0,04842
		60	0,00029	0,00025	0,02910	0,02525
	0.1	10	0,00461	0,00417	0,49459	0,44283
		30	0,00141	0,00137	0,15087	0,14630
		60	0,00069	0,00068	0,07345	0,07237
	1	10	0,01754	0,01736	2,05099	2,03094
		30	0,00582	0,00580	0,68075	0,67863
		60	0,00290	0,00289	0,33865	0,33813
	3	10	0,04255	0,04255	7,23845	7,22489
		30	0,01408	0,01407	2,39521	2,39395
		60	0,00700	0,00700	1,19124	1,19094

**Continuación. Estudio de Biot y Fourier con Aprox. de Segundo Orden.**

Biot	Fourier	Número de Bloques	Cálculos de errores			
			Error Absoluto Diferencias Finitas	Error Absoluto Castillo	Error Porcentual Diferencias Finitas	Error Porcentual Castillo
0.5	0.000001	10	0,00071	0,01769	0,07057	1,76995
		30	0,00067	0,00550	0,06659	0,55081
		60	0,00061	0,00243	0,06073	0,24268
	0.00001	10	0,00163	0,01664	0,16346	1,66736
		30	0,00125	0,00456	0,12535	0,45696
		60	0,00078	0,00163	0,07828	0,16314
	0.0001	10	0,00392	0,01325	0,39395	1,33255
		30	0,00140	0,00211	0,14117	0,21175
		60	0,00059	0,00024	0,05896	0,02449
	0.001	10	0,00483	0,00545	0,49176	0,55528
		30	0,00137	0,00027	0,13977	0,02724
		60	0,00050	0,00020	0,05103	0,02023
	0.01	10	0,00611	0,00281	0,64591	0,29081
		30	0,00147	0,00112	0,15571	0,11819
		60	0,00066	0,00057	0,06927	0,06026
	0.1	10	0,01022	0,00937	1,18296	1,08404
		30	0,00316	0,00308	0,36533	0,35646
		60	0,00156	0,00154	0,17962	0,17745
	1	10	0,03632	0,03608	5,20086	5,16628
		30	0,01210	0,01207	1,73192	1,72849
		60	0,00605	0,00605	0,86681	0,86598
	3	10	0,06447	0,06446	21,67527	21,67229
		30	0,02108	0,02108	7,08613	7,08678
		60	0,01050	0,01050	3,52974	3,52996

**Continuación. Estudio de Biot y Fourier con Aprox. de Segundo Orden.**

Biot	Fourier	Número de Bloques	Cálculos de errores			
			Error Absoluto Diferencias Finitas	Error Absoluto Castillo	Error Porcentual Diferencias Finitas	Error Porcentual Castillo
1	0.000001	10	0,00219	0,03393	0,21928	3,40058
		30	0,00211	0,01015	0,21131	1,01763
		60	0,00199	0,00405	0,19958	0,40618
	0.00001	10	0,00338	0,03250	0,33937	3,26224
		30	0,00262	0,00892	0,26304	0,89577
		60	0,00168	0,00312	0,16880	0,31273
	0.0001	10	0,00772	0,02591	0,78119	2,62061
		30	0,00272	0,00421	0,27470	0,42549
		60	0,00110	0,00054	0,11090	0,05442
	0.001	10	0,00933	0,01043	0,96630	1,08077
		30	0,00260	0,00049	0,26928	0,04999
		60	0,00091	0,00033	0,09385	0,03424
	0.01	10	0,01119	0,00546	1,24810	0,58357
		30	0,00266	0,00205	0,29246	0,22555
		60	0,00116	0,00102	0,12871	0,11264
	0.1	10	0,01677	0,01566	2,21165	2,06508
		30	0,00523	0,00513	0,65333	0,65793
		60	0,00257	0,00254	0,32249	0,31942
	1	10	0,05463	0,05443	10,23253	10,19476
		30	0,01808	0,01807	3,38702	3,38382
		60	0,00901	0,00901	1,68795	1,68722
	3	10	0,06259	0,06266	51,51186	51,56639
		30	0,01960	0,01961	16,13183	16,13973
		60	0,00963	0,00963	7,92555	7,92760

**Continuación. Estudio de Biot y Fourier con Aprox. de Segundo Orden.**

Biot	Fourier	Número de Bloques	Cálculos de errores			
			Error Absoluto Diferencias Finitas	Error Absoluto Castillo	Error Porcentual Diferencias Finitas	Error Porcentual Castillo
3	0.000001	10	0,00410	0,09694	0,41221	9,73459
		30	0,00387	0,03202	0,38823	3,21587
		60	0,00351	0,01438	0,35299	1,44450
	0.00001	10	0,00959	0,09070	0,96978	9,16810
		30	0,00732	0,02638	0,73955	2,66682
		60	0,00451	0,00962	0,45585	0,97228
	0.0001	10	0,02269	0,07058	2,34681	7,29872
		30	0,00789	0,01179	0,81605	1,21914
		60	0,00321	0,00141	0,33217	0,14532
	0.001	10	0,02506	0,02565	2,77990	2,84565
		30	0,00696	0,00165	0,77234	0,17546
		60	0,00244	0,00103	0,26446	0,11121
	0.01	10	0,02601	0,01492	3,12817	1,79446
		30	0,00601	0,00500	0,78015	0,64926
		60	0,00275	0,00252	0,34996	0,31984
	0.1	10	0,02946	0,02877	4,72481	4,61394
		30	0,00933	0,00926	1,41612	1,40558
		60	0,00462	0,00460	0,69264	0,69007
	1	10	0,07380	0,07379	25,28108	25,27620
		30	0,02402	0,02403	8,22916	8,23079
		60	0,01195	0,01195	4,09181	4,09234
	3	10	0,03248	0,03254	191,21891	191,56623
		30	0,00862	0,00863	50,76990	50,80281
		60	0,00405	0,00405	23,83818	23,84579

**Continuación. Estudio de Biot y Fourier con Aprox. de Segundo Orden.**

Biot	Fourier	Número de Bloques	Cálculos de errores			
			Error Absoluto Diferencias Finitas	Error Absoluto Castillo	Error Porcentual Diferencias Finitas	Error Porcentual Castillo
8	0.000001	10	0,01076	0,21977	1,08842	22,22220
		30	0,01013	0,08007	1,02407	8,09688
		60	0,00919	0,03705	0,92951	3,74630
	0.00001	10	0,02506	0,20333	2,57801	20,91715
		30	0,01901	0,06514	1,95558	6,70097
		60	0,01159	0,02442	1,19247	2,51172
	0.0001	10	0,05697	0,15136	6,22045	16,52784
		30	0,01893	0,02708	2,06754	2,95701
		60	0,00783	0,00302	0,81329	0,32933
	0.001	10	0,05056	0,04341	6,58158	5,65073
		30	0,01468	0,00465	1,71206	0,54226
		60	0,00476	0,00232	0,58332	0,28440
	0.01	10	0,04237	0,02983	6,36621	4,48145
		30	0,00967	0,00884	1,45266	1,32828
		60	0,00451	0,00430	0,65289	0,62269
	0.1	10	0,03670	0,03663	6,32276	6,31071
		30	0,01165	0,01163	1,87569	1,87341
		60	0,00575	0,00575	0,94164	0,94117
	1	10	0,07413	0,07417	41,61339	41,63293
		30	0,02355	0,02355	13,21645	13,22067
		60	0,01162	0,01162	6,52051	6,52168
	3	10	0,01624	0,01624	453,82462	454,36467
		30	0,00353	0,00353	98,62359	98,66426
		60	0,00156	0,00156	43,63967	43,64826

**Apéndice B-2. Estudio de Biot y Fourier con Aprox. de Cuarto Orden**

Biot	Fourier	Número de Bloques	Cálculos de errores			
			Error Absoluto Diferencias Finitas	Error Absoluto Castillo	Error Porcentual Diferencias Finitas	Error Porcentual Castillo
0.01	0.000001	10	0,00044	0,00030	0,04438	0,03035
		30	0,00015	0,00011	0,01522	0,01061
		60	0,00008	0,00006	0,00795	0,00590
	0.00001	10	0,00042	0,00028	0,04205	0,02811
		30	0,00013	0,00009	0,01306	0,00915
		60	0,00006	0,00007	0,00605	0,00658
	0.0001	10	0,00035	0,00022	0,03519	0,02213
		30	0,00008	0,00010	0,00782	0,01040
		60	0,00003	0,00025	0,00317	0,02459
	0.001	10	0,00019	0,00014	0,01854	0,01369
		30	0,00003	0,00047	0,00282	0,04745
		60	0,00003	0,00118	0,00255	0,11849
	0.01	10	0,00004	0,00041	0,00392	0,04093
		30	0,00002	0,00196	0,00157	0,19578
		60	0,00002	0,00422	0,00157	0,42225
	0.1	10	0,00022	0,00175	0,02221	0,17576
		30	0,00007	0,00663	0,00654	0,66541
		60	0,00003	0,01369	0,00279	1,37422
	1	10	0,00099	0,00685	0,09968	0,69461
		30	0,00033	0,02467	0,03279	2,50016
		60	0,00016	0,04979	0,01612	5,04556
	3	10	0,00293	0,01621	0,30157	1,67603
		30	0,00096	0,05906	0,09925	6,10526
		60	0,00047	0,11702	0,04868	12,09745

**Continuación. Estudio de Biot y Fourier con Aprox. de Cuarto Orden.**

Biot	Fourier	Número de Bloques	Cálculos de errores			
			Error Absoluto Diferencias Finitas	Error Absoluto Castillo	Error Porcentual Diferencias Finitas	Error Porcentual Castillo
0.20	0.000001	10	0,00838	0,00561	0,83829	0,56137
		30	0,00261	0,00168	0,26131	0,16833
		60	0,00116	0,00070	0,11649	0,07041
	0.00001	10	0,00796	0,00520	0,79664	0,52019
		30	0,00223	0,00132	0,22284	0,13208
		60	0,00083	0,00043	0,08298	0,04256
	0.0001	10	0,00657	0,00387	0,65882	0,38773
		30	0,00116	0,00046	0,11662	0,04649
		60	0,00016	0,00018	0,01566	0,01764
	0.001	10	0,00318	0,00100	0,32062	0,10053
		30	0,00011	0,00023	0,01083	0,02305
		60	0,00012	0,00106	0,01178	0,10657
	0.01	10	0,00122	0,00113	0,12441	0,11593
		30	0,00049	0,00144	0,05049	0,14729
		60	0,00025	0,00386	0,02542	0,39475
	0.1	10	0,00425	0,00263	0,45596	0,27510
		30	0,00137	0,00479	0,14609	0,51384
		60	0,00068	0,01182	0,07227	1,26807
	1	10	0,01744	0,01351	2,03972	1,57974
		30	0,00581	0,01305	0,67944	1,68101
		60	0,00289	0,03360	0,33832	4,32950
	3	10	0,04250	0,03314	7,23048	5,63703
		30	0,01407	0,01780	2,39441	3,33488
		60	0,00700	0,05285	1,19104	9,88847

**Continuación. Estudio de Biot y Fourier con Aprox. de Cuarto Orden.**

Biot	Fourier	Número de Bloques	Cálculos de errores			
			Error Absoluto Diferencias Finitas	Error Absoluto Castillo	Error Porcentual Diferencias Finitas	Error Porcentual Castillo
0.5	0.000001	10	0,02071	0,01394	2,07245	1,39478
		30	0,00654	0,00423	0,65416	0,42322
		60	0,00294	0,00179	0,29433	0,17911
	0.00001	10	0,01966	0,01290	1,96947	1,29244
		30	0,00557	0,00331	0,55821	0,33178
		60	0,00210	0,00106	0,21055	0,10579
	0.0001	10	0,01619	0,00957	1,62855	0,96257
		30	0,00292	0,00109	0,29321	0,10940
		60	0,00042	0,00018	0,04229	0,01827
	0.001	10	0,00775	0,00234	0,78902	0,23857
		30	0,00025	0,00009	0,02505	0,00872
		60	0,00026	0,00093	0,02621	0,09474
	0.01	10	0,00300	0,00338	0,31751	0,35765
		30	0,00116	0,00073	0,12312	0,07740
		60	0,00058	0,00338	0,06079	0,35753
	0.1	10	0,00943	0,00781	1,06799	0,86802
		30	0,00308	0,00239	0,35366	0,28286
		60	0,00154	0,00933	0,17807	1,10601
	1	10	0,03619	0,03324	5,18221	4,76005
		30	0,01208	0,00336	1,72986	0,48043
		60	0,00605	0,01811	0,86630	3,25167
	3	10	0,06445	0,05989	21,67126	20,13582
		30	0,02108	0,00844	7,08620	2,83615
		60	0,01050	0,01466	3,52979	6,18291

**Continuación. Estudio de Biot y Fourier con Aprox. de Cuarto Orden.**

Biot	Fourier	Número de Bloques	Cálculos de errores			
			Error Absoluto Diferencias Finitas	Error Absoluto Castillo	Error Porcentual Diferencias Finitas	Error Porcentual Castillo
1	0.000001	10	0,04058	0,02752	4,06404	2,75545
		30	0,01303	0,00847	1,30518	0,84852
		60	0,00592	0,00363	0,59285	0,36340
	0.00001	10	0,03848	0,02544	3,86212	2,55339
		30	0,01110	0,00663	1,11438	0,66569
		60	0,00424	0,00214	0,42565	0,21451
	0.0001	10	0,03157	0,01879	3,19239	1,90060
		30	0,00580	0,00214	0,58663	0,21634
		60	0,00089	0,00024	0,08963	0,02398
	0.001	10	0,01481	0,00441	1,53376	0,45720
		30	0,00046	0,00056	0,04777	0,05782
		60	0,00045	0,00077	0,04618	0,07946
	0.01	10	0,00587	0,00676	0,65463	0,75383
		30	0,00212	0,00081	0,23690	0,08465
		60	0,00102	0,00271	0,11242	0,30182
	0.1	10	0,01604	0,01448	2,02900	1,76686
		30	0,00514	0,00238	0,64963	0,26959
		60	0,00254	0,00629	0,32148	0,86916
	1	10	0,05452	0,05253	10,21264	9,83991
		30	0,01807	0,01268	3,38501	2,37533
		60	0,00901	0,00610	1,68747	1,73837
	3	10	0,06260	0,06076	51,52409	50,00552
		30	0,01960	0,01527	16,13425	12,56960
		60	0,00963	0,00176	7,92621	1,44558

**Continuación. Estudio de Biot y Fourier con Aprox. de Cuarto Orden.**

Biot	Fourier	Número de Bloques	Cálculos de errores			
			Error Absoluto Diferencias Finitas	Error Absoluto Castillo	Error Porcentual Diferencias Finitas	Error Porcentual Castillo
3	0.000001	10	0,11194	0,07774	11,24101	7,80737
		30	0,03782	0,02478	3,79819	2,48850
		60	0,01738	0,01066	1,74517	1,07099
	0.00001	10	0,10566	0,07155	10,68013	7,23222
		30	0,03205	0,01927	3,23966	1,94757
		60	0,01236	0,00616	1,24899	0,62266
	0.0001	10	0,08512	0,05181	8,80297	5,35761
		30	0,01627	0,00581	1,68226	0,60125
		60	0,00239	0,00028	0,24671	0,02910
	0.001	10	0,03655	0,01023	4,05478	1,13539
		30	0,00177	0,00252	0,19671	0,27947
		60	0,00134	0,00028	0,14870	0,02952
	0.01	10	0,01608	0,01696	2,18927	2,30893
		30	0,00520	0,00382	0,64790	0,45965
		60	0,00252	0,00080	0,31363	0,08824
	0.1	10	0,02882	0,02762	4,26769	4,43097
		30	0,00924	0,00772	1,36845	1,11598
		60	0,00460	0,00227	0,68100	0,28975
	1	10	0,07375	0,07299	25,26262	25,00405
		30	0,02402	0,02248	8,22699	7,70053
		60	0,01194	0,00929	4,09127	3,18312
	3	10	0,03247	0,03220	191,12582	189,54838
		30	0,00862	0,00826	50,76246	48,60393
		60	0,00405	0,00349	23,83649	20,55146

**Continuación. Estudio de Biot y Fourier con Aprox. de Cuarto Orden.**

Biot	Fourier	Número de Bloques	Cálculos de errores			
			Error Absoluto Diferencias Finitas	Error Absoluto Castillo	Error Porcentual Diferencias Finitas	Error Porcentual Castillo
8	0.000001	10	0,24845	0,18124	25,12220	18,32610
		30	0,09370	0,06270	9,47489	6,33984
		60	0,04452	0,02766	4,50216	2,79664
	0.00001	10	0,23191	0,16490	23,85757	16,96415
		30	0,07843	0,04811	8,06785	4,94891
		60	0,03121	0,01570	3,21109	1,61494
	0.0001	10	0,17899	0,11396	19,54535	12,44376
		30	0,03731	0,01311	4,07423	1,43160
		60	0,00578	0,00124	0,58562	0,13515
	0.001	10	0,06284	0,01479	8,18065	1,92523
		30	0,00572	0,00634	0,74470	0,82483
		60	0,00298	0,00144	0,38845	0,16168
	0.01	10	0,03022	0,02911	6,17939	4,37353
		30	0,00888	0,00778	1,24140	1,16849
		60	0,00428	0,00308	0,64272	0,41748
	0.1	10	0,03612	0,03574	5,64004	6,15678
		30	0,01160	0,01105	1,93034	1,77874
		60	0,00575	0,00492	0,92564	0,75693
	1	10	0,07402	0,07374	41,54694	41,39042
		30	0,02353	0,02314	13,20682	12,99160
		60	0,01161	0,01106	6,51799	6,20629
	3	10	0,01620	0,01615	45,26999	45,22615
		30	0,00353	0,00349	98,54826	97,49612
		60	0,00156	0,00152	43,62399	42,39649