Potencia Promedio de una Señal Periódica

Ebert Brea*

19 de mayo de 2014

Resumen

Este documento presenta un lema, el cual establece la equivalencia entre determinar la potencia promedio normalizada de una señal periódica real, a través de su cálculo en todo el dominio y un período de la señal.

1. Definición y teorema preliminar

Definición 1 (Señal periódica) *Sea $f(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una señal determinista y definida en el dominio del tiempo continuo, en donde no necesariamente corresponde a una función continua. Se dice que $f(t)$ es una señal periódica si*

$$f(t) = f(t-nT), \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

donde $n\in\mathbb{Z}$ representa el número de la extensión periódica.

Condición 1 *Sea $f(t)$ una señal periódica. Entonces, $f^2(t)$ es también una señal periódica.*

Teorema 1 *Sea $f(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una señal periódica de período $T>0$. Entonces:*

i)

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha+nT}^{\beta+nT} f(t)dt, \tag{1}$$

donde obviamente $\alpha<\beta$ y ambos son reales, y n tiene el mismo significado al presentado en la Definición 1;

ii)

$$\int_{\gamma-T/2}^{\gamma+T/2} f(t)dt = \int_{-T/2}^{+T/2} f(t)dt, \tag{2}$$

donde $\gamma\in\{x\in\mathbb{R}: -\frac{T}{2}\le x\le \frac{T}{2}\}$.

Demostración. Parte i) Debido al hecho de que $f(t)$ es periódica, se puede afirmar que

$$f(t) = f(t-nT), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

donde $n\in\mathbb{Z}$ representa la posición de la extensión periódica.

Si se define la variable $t=\tau-nT$, entonces al considerar la integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha+nT}^{\beta+nT} f(\tau-nT)d\tau. \tag{4}$$

*Email: ebert.brea@ucv.ve; ebertbrea@gmail.com

Debido a la propiedad de periodicidad de $f(t)$, se tiene que al aplicar la Ecuación (3) en la Ecuación (4), la

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha+nT}^{\beta+nT} f(\tau)d\tau = \int_{\alpha+nT}^{\beta+nT} f(t)dt, \tag{5}$$

por cuanto τ es una variable muda de integración y ésta puede ser cambiada a t.

Parte ii) Para demostrar lo enunciado, se estudiarán dos posibles casos de γ. El primero considera que $-\frac{T}{2} \leq \gamma \leq 0$. Entonces, al subdividir el intervalo de integración de la integral del lado izquierdo de la Ecuación (2) se tiene que

$$\int_{\gamma-T/2}^{\gamma+T/2} f(t)dt = \int_{\gamma-T/2}^{-T/2} f(t)dt + \int_{-T/2}^{\gamma+T/2} f(t)dt. \tag{6}$$

Aplicando la Ecuación (5) bajo el caso particular de $n = 1$ en la integral definida desde $\gamma - T/2$ hasta $-T/2$ de la Ecuación (6), ésta arroja que

$$\int_{\gamma-T/2}^{\gamma+T/2} f(t)dt = \int_{\gamma+T/2}^{T/2} f(t)dt + \int_{-T/2}^{\gamma+T/2} f(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt. \tag{7}$$

Para el caso en que $0 < \gamma \leq \frac{T}{2}$, se obtiene que al subdividir el intervalo de integración de la integral del lado izquierdo de la Ecuación 2

$$\int_{\gamma-T/2}^{\gamma+T/2} f(t)dt = \int_{\gamma-T/2}^{T/2} f(t)dt + \int_{T/2}^{\gamma+T/2} f(t)dt. \tag{8}$$

Nuevamente, al aplicar la Ecuación (5), pero en este caso con $n = -1$, y sobre la integral definida desde $T/2$ hasta $\gamma + T/2$ de la Ecuación (8), se consigue que

$$\int_{\gamma-T/2}^{\gamma+T/2} f(t)dt = \int_{\gamma-T/2}^{T/2} f(t)dt + \int_{-T/2}^{\gamma-T/2} f(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt. \tag{9}$$

■

2. Potencia promedio normalizada

Lema 1 *Sea la función $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una señal determinista, periódica de período T y definida en el dominio continuo t, en donde no necesariamente corresponde a una función continua. Entonces, la potencia promedio normalizada de la señal $f(t)$ puede ser determinada por*

$$P = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f^2(t)\,dt = \frac{1}{T} \int_{T} f^2(t)\,dt.$$

Demostración. Al considerar que $\tau = nT$ y n un entero par, se tiene que

$$P = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nT} \sum_{k=-n/2}^{n/2} \int_{kT-T/2}^{kT+T/2} f^2(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n/2}^{n/2} \frac{1}{nT} \int_{kT-T/2}^{kT+T/2} f^2(t)\,dt. \tag{10}$$

Ahora, como

$$\int_{kT-T/2}^{kT+T/2} f^2(t)\,dt = \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)\,dt, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \tag{11}$$

por ser la señal $f(t)$ periódica y debido al Teorema 1 de la página 1.

Aplicando la Ecuación (11) en la Ecuación (10), se obtiene

$$P = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n/2}^{n/2} \frac{1}{nT} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} (n+1) \frac{1}{nT} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)\,dt. \tag{12}$$

De la Ecuación (12) se tiene claramente que,

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)\,dt = \frac{1}{T} \int_{T} f^2(t)\,dt.$$

■