

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

“IMPLEMENTACIÓN DE UN PROGRAMA PARA LA SIMULACIÓN DE PROBLEMAS DE ESFUERZOS DE CONTACTO MEDIANTE EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS”

Presentado ante la ilustre
Universidad Central de Venezuela
Por los bachilleres
Caro R. Francisco J.
Herrera DP. Luis A.
Para optar al título de
Ingeniero Mecánico

Caracas 2009

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

“IMPLEMENTACIÓN DE UN PROGRAMA PARA LA SIMULACIÓN DE PROBLEMAS DE ESFUERZOS DE CONTACTO MEDIANTE EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS”

Tutor Académico: Prof. Antonio Barragán

Presentado ante la ilustre
Universidad Central de Venezuela
Por los bachilleres
Caro R. Francisco J.
Herrera DP. Luis A.
Para optar al título de
Ingeniero Mecánico

Caracas 2009

Caracas, 12 de noviembre de 2009

ACTA


Los abajo firmantes, Miembros del Jurado Examinador designado por el Consejo de Escuela de Ingeniería Mecánica para evaluar el Trabajo Especial de Grado presentado por los bachilleres:


FRANCISCO CARO y LUIS HERRERA


Titulado:

"IMPLEMENTACIÓN DE UN PROGRAMA PARA LA SIMULACIÓN DE PROBLEMAS DE ESFUERZO DE CONTACTO MEDIANTE EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS"

Consideran que el mismo cumple con los requisitos exigidos por el Plan de Estudios conducente al Título de Ingeniero Mecánico.


Prof. Manuel Martínez
Jurado


Prof. Hugo Armando Guerrero
Jurado


Prof. Antonio Barragán
Tutor

Este trabajo forma parte del proyecto de investigación “*Computación de Alto Rendimiento en Problemas de Mecánica de Materiales con aplicación en la Ingeniería Mecánica*”, que desarrolla el profesor Antonio Barragán, con el patrocinio del Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico (CDCH) de la Universidad Central de Venezuela.

DEDICATORIA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

DEDICATORIA

***A mis padres Luis y Alicia por su apoyo, o mejor dicho, por su
presión constante***

A mi hermano

A toda mi familia del GSC

Luis

***A mi madre, por siempre
tener esa palabra de
aliento y ser un gran
punto de apoyo en los
momentos de dificultad.***

***A mi padre, por ser un
gran ejemplo, de que no
existen metas
imposibles cuando uno
se propone alcanzarlas.***

Francisco

AGRADECIMIENTOS

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

AGRADECIMIENTOS

Francisco quiere agradecer en primer lugar a Dios Todopoderoso por guiarme con su sabiduría durante los momentos de dificultad que se presentaron en el desarrollo de este Trabajo Especial de Grado.

Agradecemos a la ilustre Universidad Central de Venezuela por darnos la oportunidad de formarnos como Ingenieros Mecánicos.

Nuestro más profundo agradecimiento a nuestro tutor el profesor Antonio Barragán por orientarnos y ser nuestro guía en todo momento.

A la profesora Denise Santaromita por habernos permitido el acceso a la Sala de Micros de la Escuela en cualquier instante que la necesitáramos lo cual nos facilitó mucho nuestro desempeño.

A nuestros familiares y amigos que siempre estuvieron con nosotros aportándonos sus ideas y conocimientos o simplemente dándonos ánimos y fortaleza para seguir adelante.

Queremos agradecerles a todas las personas que colaboraron de una u otra forma con nosotros durante la elaboración de este trabajo y a todas aquellas que lo hicieron posible.

RESUMEN

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

RESUMEN

Caro Requena Francisco Javier /y/ Herrera Di Prisco Luis Alfredo

IMPLEMENTACIÓN DE UN PROGRAMA PARA LA SIMULACIÓN DE PROBLEMAS DE ESFUERZOS DE CONTACTO MEDIANTE EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Tutor Académico: Prof. Antonio Barragán. Caracas, U.C.V. Facultad de
Ingeniería, Escuela de Ingeniería Mecánica. 2009.

Palabras Clave: ESFUERZOS DE CONTACTO, ELEMENTOS
FINITOS, PROBLEMA ELÁSTICO, NO LINEAL, CONTACTO DE
HERTZ.

En el presente Trabajo Especial se desarrolla un método de cálculo para la simulación de problema de contacto entre cuerpos elásticos, basado en el método de los Elementos Finitos. Para esto se implementó un programa de computación que permite calcular los desplazamientos y esfuerzos en la región de contacto. La metodología para este cálculo se basa principalmente en dos subrutinas, una primera que compara los desplazamientos de los nodos con la distancia entre ellos para verificar si entraron en contacto o no (interpenetración) y una segunda que se encarga de reflejar las modificaciones en la matriz global de rigidez producto del cambio de las condiciones de borde durante el fenómeno de contacto. Se verificaron los resultados con un problema del que se posee una solución exacta y se aplicó el método para calcular los esfuerzos de contacto que se producen en un modelo bidimensional, el cual puede ser el contacto entre un cilindro y un plano o el contacto entre dos cilindros.

El programa ejecutable fue desarrollado bajo sistema operativo Linux en lenguaje C en ambiente de programación KDevelop.

ABSTRACT

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

ABSTRACT

Caro Requena Francisco Javier /y/ Herrera Di Prisco Luis Alfredo

IMPLEMENTATION OF A PROGRAM FOR THE CONTACT STRESSES SIMULATION USING THE FINITE ELEMENT METHOD

Academic Tutor: Prof. Antonio Barragán. Caracas, U.C.V. Engineering
Faculty, School of Mechanical Ingeneering. 2009.

Key Words: CONTACT STRESSES, FINITE ELEMENT METHOD,
ELASTIC PROBLEM, NON-LINEAR PROBLEM, HERTZ CONTACT.

A calculation method for the simulation of contact problems between elastic bodies is developed, based on the Finite Element Method. For this, a computer program that calculates the displacements and stresses in the region of contact was implemented. The methodology for this calculation is based primarily on two subroutines, the first compares the nodes displacements with the distance between them to determine whether or not they made contact (interpenetration), and a second one in charge to reflect the modifications in the global stiffness matrix due to the change of the boundary conditions during the contact simulation. The program was validated comparing the results with a problem wich exact results are known and the method was applied to calcúlate the contact stresses in a two-dimensional model, such as the contact between a cylinder and a plane or a two cylinder contact.

The executable program was developed under the Linux operating system in C language in KDevelop programming environment

ÍNDICE GENERAL

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

ÍNDICE GENERAL

LISTA DE FIGURAS.....	I
LISTA DE TABLAS Y GRÁFICAS.....	III
INTRODUCCIÓN.....	1
CAPÍTULO I. Antecedentes.....	4
1.1 Antecedentes.....	4
CAPÍTULO II. Marco Teórico.....	18
2.1 Introducción.....	18
2.2 Contacto Hertziano y No Hertziano.....	18
2.2.1 Ecuaciones de Contacto de Hertz.....	20
2.3 Gap Elements.....	22
2.4 No Linealidad del Contacto.....	26
2.5 Contacto de Avanzada y de Retroceso.....	27
CAPÍTULO III. Descripción del Método.....	30
3.1 Introducción.....	30
3.2 Tipos de Métodos Numéricos.....	30
3.3 Método de los Elementos Finitos.....	31
CAPÍTULO IV. Algoritmo de Contacto.....	35
4.1 Algoritmo de Contacto.....	35
4.2 Modificación de la Matriz de Rigidez.....	44

ÍNDICE GENERAL

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

4.2.1 Introducción.....	44
4.2.2 Funcionamiento de MODIPER.....	46
4.3 Funcionamiento de TRANSFOR.....	55
CAPÍTULO V. Análisis del Programa.....	58
5.1 Introducción.....	58
5.2 Principales Rutinas Empleadas en Mefcon.....	58
5.3 Alcances y Limitaciones del Programa.....	66
5.4 Sistema de Unidades.....	67
CAPÍTULO VI. Validación del Programa.....	68
6.1 Introducción.....	68
6.2 Experimento nº 1.....	70
6.2.1 Resultados.....	74
6.3 Experimento nº 2.....	79
6.3.1 Resultados.....	80
6.4 Experimento nº 3.....	85
6.4.1 Resultados.....	86
6.5 Experimento nº 4.....	91
6.5.1 Resultados.....	94

ÍNDICE GENERAL

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

CAPÍTULO VII. Análisis de Resultados.....	99
CAPÍTULO VIII. Conclusiones.....	104
CAPÍTULO IX. Recomendaciones.....	106
REFERENCIAS.....	109
BIBLIOGRAFÍA.....	114
APÉNDICES.....	116
Apéndice A. Ejemplo analítico de un problema de contacto....	117
Apéndice B. Consideraciones Generales.....	130
Apéndice C. Manual del usuario.....	131
Apéndice D. Ejemplo de un archivo de datos.....	143
Apéndice E. Lista de Variables.....	144

LISTA DE FIGURAS

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Contacto Hertziano entre dos cuerpos elásticos.....	20
Figura 2. Problema de contacto simple.....	24
Figura 3. Resorte representando un “gap element”.....	24
Figura 4. Contacto de nodo a nodo.....	25
Figura 5. Elemento para el contacto nodo-arista.....	25
Figura 6. Contacto de retroceso.....	28
Figura 7. Contacto de avanzada.....	29
Figura 8. Contacto inicial entre dos cuerpos.....	37
Figura 9. Geometría de los pares de nodos en la zona de contacto.....	37
Figura 10. Representación gráfica de la interpenetración.....	41
Figura 11. Variables principales de la rutina MODIPER.....	48
Figura 12. Modificaciones realizadas para el caso $BADIF > 0$	52
Figura 13. Modificaciones realizadas para el caso $BADIF \leq 0$	53
Figura 14. Ejemplo de la modificación de la Matriz de Rigidez.....	54
Figura 15. Representación gráfica de la rutina TRANSFOR.....	57
Figura 16. Macrodiagrama del programa MEFCON.....	65

LISTA DE FIGURAS

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

Figura 17. Diagrama de flujo de la rutina CONTACTO.....	66
Figura 18. Geometría del problema de validación.....	71
Figura 19. Zona a discretizar del modelo (experimentos 1,2 y 3).....	71
Figura 20. Discretización del modelo en la zona de contacto para experimentos 1,2 y 3 (nodos).....	72
Figura 21. Discretización del modelo en la zona de contacto para experimentos 1,2 y 3 (elementos).....	73
Figura 22. Zona a discretizar del modelo (experimento 4).....	92
Figura 23. Discretización del modelo en la zona de contacto para el experimento 4.....	93
Figura A.1. Estructura del ejemplo ilustrativo.....	117
Figura A.2. Elemento 1.....	118
Figura D.1. Ejemplo de un archivo de datos.....	143

LISTA DE TABLAS Y GRÁFICAS

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

LISTA DE TABLAS Y GRÁFICAS

EXPERIMENTO N° 1

Tabla 1.1 Tabla comparativa de la extensión de contacto.....	74
Gráfica 1.1 Longitud de contacto vs. Carga aplicada.....	75
Tabla 2.1 Tabla comparativa del esfuerzo máximo.....	76
Gráfica 2.1 Esfuerzo σ_y en la zona inicial de contacto vs. Carga aplicada.....	77
Gráfica 3.1 Error en los resultados de longitud de contacto y Esfuerzo σ_y en la zona inicial de contacto vs. Carga aplicada.....	78

EXPERIMENTO N° 2

Tabla 1.2. Tabla comparativa de la extensión de contacto.....	80
Gráfica 1.2. Longitud de contacto vs. Carga aplicada.....	81
Tabla 2.2 Tabla comparativa del esfuerzo máximo.....	82
Gráfica 2.2. Esfuerzo σ_y en la zona inicial de contacto vs. Carga aplicada.....	83
Gráfica 3.2. Error en los resultados de longitud de contacto y Esfuerzo σ_y en la zona inicial de contacto vs. Carga aplicada.....	84

LISTA DE TABLAS Y GRÁFICAS

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

EXPERIMENTO N° 3

Tabla 1.3 Tabla comparativa de la extensión de contacto.....	86
Gráfica 1.3 Longitud de contacto vs. Carga aplicada.....	87
Tabla 2.3 Tabla comparativa del esfuerzo máximo.....	88
Gráfica 2.3 Esfuerzo σ_y en la zona inicial de contacto vs. Carga aplicada.....	89
Gráfica 3.3 Error en los resultados de longitud de contacto y Esfuerzo σ_y en la zona inicial de contacto vs. Carga aplicada.....	90

EXPERIMENTO N° 4

Tabla 1.4. Tabla comparativa de la extensión de contacto.....	94
Gráfica 1.4. Longitud de contacto vs. Carga aplicada.....	95
Tabla 2.4 Tabla comparativa del esfuerzo máximo.....	96
Gráfica 2.4. Esfuerzo σ_y en la zona inicial de contacto vs. Carga aplicada.....	97
Gráfica 3.4. Error en los resultados de longitud de contacto y Esfuerzo σ_y en la zona inicial de contacto vs. Carga aplicada.....	98

INTRODUCCIÓN

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

INTRODUCCIÓN

Desde el comienzo de la historia de la Humanidad, el hombre siempre ha buscado modificar su entorno para mejorar sus condiciones de vida. De esta forma surgió lo que es el diseño de elementos que facilitaban sus tareas cotidianas y mejoraban sus condiciones de vida.

A medida que las necesidades del hombre crecían, se fueron elaborando elementos más complejos que agrupaban conjuntos de piezas mecánicas, las cuales podían resultar eficientes o defectuosas al ponerse en funcionamiento. En los comienzos este tipo de piezas eran elaboradas con pocos conocimientos sobre su comportamiento dentro de la máquina lo que ocasionaba grandes desastres inesperados si alguna de éstas fallaba.

Así pues, comienza el ensayo y experimentación de dichos elementos en laboratorios de pruebas antes de ser puestos en funcionamiento para prever su comportamiento y así disminuir riesgos de accidentes. Estas realizaciones de pruebas mediante la construcción de prototipos pueden resultar muy costosas (dependiendo del material utilizado y el costo de producción de los elementos) o requieren mucho tiempo de estudio. Igualmente se hace prácticamente inabordable el estudio del comportamiento de elementos de geometría compleja planteándolo desde el punto de vista del cálculo analítico según las teorías generales de la mecánica de sólidos.

Todas estas razones han generado la necesidad de métodos alternativos o aproximados para predecir el comportamiento de estas

INTRODUCCIÓN

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

piezas que surgen con la era de la computación con la cual se abren las puertas al estudio de las piezas mediante la simulación, sin la necesidad de construir prototipos reales, eliminando los costos de infraestructura, materiales y producción y reduciendo los tiempos de prueba en los laboratorios.

Para este tipo de cálculos se hace común la utilización de métodos numéricos o iterativos los cuales están basados en la discretización del medio continuo, es decir, en la división del objeto que está siendo analizado en subregiones finitas más pequeñas de forma geométrica definida. Sin duda alguna el procedimiento de este tipo más popular y más extensamente utilizado en la actualidad es el Método de los Elementos Finitos o M.E.F (por sus siglas), el cual nos permite simular, con grado variable de aproximación, el comportamiento de diversas piezas mecánicas bajo condiciones de contacto y el cual va a ser empleado en este trabajo.

En el caso del modelado de contacto, en el que dos cuerpos elásticos son presionados uno contra el otro, lo que generalmente queremos conocer para la resolución del problema es el área de contacto y la distribución de esfuerzos en ésta en la cual influyen bastantes factores como lo son, la forma de los cuerpos que se unen, las condiciones de apoyo y trabajo, las características de los materiales utilizados y las cargas aplicadas haciendo todo el proceso de análisis bastante complejo.

Estas áreas de contacto suelen ser muy pequeñas, sin embargo es precisamente en ese punto donde se producen las mayores concentraciones de esfuerzo en los cuerpos que están siendo

INTRODUCCIÓN

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

estudiados por lo que es allí donde se debe hacer especial énfasis en la investigación ya que en los componentes de ciertas maquinarias como lo son los cojinetes o rodamientos, las levas, los engranajes, etc., estos esfuerzos son aplicados cíclicamente , en cualquier punto de la superficie, por lo que es frecuente que ocurran fallas por fatiga superficial.

Siendo esto así, el conocimiento de los esfuerzos de contacto en este fenómeno es de gran importancia en la ingeniería, esta importancia radica en el hecho de que una vez conocidos el área de la zona de contacto y los esfuerzos en ella, se pueden calcular y diseñar nuevos materiales para la restauración y mejora de aquellas piezas que por motivos de fatiga necesiten ser reparadas.

En la escuela de Ingeniería Mecánica se llevan 18 años desarrollando sistemas computarizados que facilitan este tipo de cálculos bajo la tutoría del Prof. Barragán y en la actualidad ya existe una versión del programa que se desarrollará en este trabajo. Sin embargo, debido a su antigüedad y a la aparición de nuevos sistemas operativos en los últimos años se hace necesario un nuevo estudio.

De esta manera, como continuación de esta investigación que se viene haciendo en la escuela, se desarrolla este trabajo cuyo objetivo principal es la implementación de un programa para el estudio y cálculo de esfuerzos de contacto en piezas mecánicas mediante el Método de los Elementos Finitos.

CAPÍTULO I: ANTECEDENTES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

1.1 ANTECEDENTES

Históricamente la primera solución analítica para los problemas de contacto fue desarrollada por Hertz [4,19], sin embargo el método se restringía a cuerpos sencillos y sin fricción.

Los problemas de contacto han sido particularmente difíciles de tratar usando el Método de los Elementos Finitos ya que la determinación de la región de contacto entre dos o más mallas que representan componentes separadas produce numerosos inconvenientes al igual que el hecho de asegurar un equilibrio general de las fuerzas, incluyendo las fuerzas externas aplicadas, las fuerzas de contacto y las reacciones en los nodos restringidos.

Uno de las primeras publicaciones que trataron el problema del contacto mediante el M.E.F. fue la de Chan y Tuba [1], los cuales emplearon tanto elementos como procedimientos convencionales basados en el método de los desplazamientos, para obtener la matriz de rigidez. El método presentado estaba orientado a problemas de naturaleza plana pero este podía ser extendido para tratar problemas tridimensionales.

Existen trabajos más enfocados hacia la Ingeniería Civil como lo es la investigación de Herrmann [2] que también realizó un estudio de problemas de contacto mediante el M.E.F donde desarrolla el análisis para sistemas bidimensionales. No incluye efectos de deformación o deflexión ya que la mayoría de problemas de contacto en Ingeniería Civil no los involucran, según él. Se enfoca en casos donde existen

CAPÍTULO I: ANTECEDENTES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

interfaces entre distintos tipos de material como lo son la interacción entre el suelo y alguna estructura construida sobre él.

Herrman separa los posibles estados de contacto en tres posibles casos, con deslizamiento, sin deslizamiento y con separación de las superficies involucradas y el procedimiento para la resolución consiste en unir los pares de nodos mediante resortes, uno normal y otro tangente a la superficie para modelar los esfuerzos de contacto y el deslizamiento respectivamente, sin embargo cuando ocurría deslizamiento o separación entre las superficies se tendía a obtener características numéricas poco deseables.

La mayor parte de nuestro trabajo está basado en la tesis realizada por Rabinovich y Noya [8] los cuales implementaron un programa de computación en lenguaje Fortran 77 para el cálculo de los desplazamientos y esfuerzos tanto en la región de contacto, como en el resto de los cuerpos estudiados, basado en el Método de los Elementos Finitos. Su metodología y algoritmo de contacto estuvo basada en el trabajo realizado por Mahmoud y compañía [3]. Este programa se utilizó para calcular los esfuerzos de contacto que se producen en un modelo bidimensional, el cual representa la oclusión céntrica entre dos órganos dentarios incisivos centrales izquierdos (superior en inferior). Se validó el programa comparando resultados con un problema del que se poseía la solución exacta, calculada analíticamente.

Entre otros trabajos de esta índole realizados en la Escuela de Ingeniería Mecánica de la Universidad Central de Venezuela podemos mencionar la tesis de Fernández y Gómez [12], en la cual muestran una aplicación del Método de los Elementos Finitos en la implementación de

CAPÍTULO I: ANTECEDENTES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

un programa que permite calcular desplazamientos y esfuerzos tanto en modelos de comportamiento lineal como no lineal en el caso del estudio del fenómeno de elasticidad, y que además calcula la distribución de temperaturas y esfuerzos térmicos para fenómenos de transferencia de calor.

Bouzas y Wallis [28] presentaron en su trabajo especial una recopilación de información sobre los algoritmos de solución del sistema de ecuaciones generado en la formulación del Método de los Elementos Finitos en problemas de elasticidad lineal. En la resolución de los sistemas dispersos de ecuaciones lineales, se analizaron los métodos directos de solución y los métodos iterativos de solución. El método iterativo de solución que se utilizó fue el Método del Gradiente Conjugado. Para optimizar el sistema de resolución se utilizó el preconditionador de Elemento a Elemento. Luego se procedió a hacer una comparación entre el programa resultante (*MefetGC*) y programas comerciales de elementos finitos. Se concluyó que el método iterativo optimizado en cuestión tiene un mejor rendimiento que los sistemas de solución antiguos.

Dentro del campo de la bioingeniería también se han desarrollado estudios de contacto mediante este método como lo es la investigación presentada por Rapperport y [5] sus colegas los cuales realizaron un análisis de elementos finitos de la cadera usando elementos de contacto en la superficie de unión. En el trabajo el fémur fue presionado contra el acetábulo y se determinaron los esfuerzos principales y presiones interarticulares en la región de contacto para diferentes magnitudes y direcciones de carga así como para diferentes

CAPÍTULO I: ANTECEDENTES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

condiciones de borde. Los resultados demostraron la sensibilidad que tienen los esfuerzos de contacto en la cadera a las condiciones de borde impuestas e indican que se debe tener cuidado a la hora de simular condiciones anatómicas.

Bartos y Kestiánek [14] se enfocaron en la formulación matemática del problema de contacto lo que lleva a la desigualdad variacional. El M.E.F es utilizado para la discretización. La desigualdad variacional permite evadir elementos de contacto adicionales, donde se necesita un parámetro de rigidez adecuado. Más allá de esto, obtuvieron un modelo asintótico estimado de la articulación de la cadera humana el cual es analizado en la aplicación. Esta investigación puede resultar útil para modelar los trasplantes de cadera después de la reconstrucción quirúrgica del acetábulo.

Más recientemente, dentro del mismo campo de estudio, Bachtar y sus colegas [31] realizan también un análisis de contacto en la unión de la cadera del ser humano mediante el Método de los Elementos Finitos. Al utilizar este método y tomar en cuenta el deslizamiento puede ocurrir inestabilidad computacional cuando los nodos de contacto se sitúan cerca de los bordes de los elementos de contacto por lo que introducen un “suavizador de contacto” mediante los llamados “Gregory patches”. Estudiaron los esfuerzos de contacto en la cadera durante tres actividades diarias representativas como lo son caminar, levantarse de una silla y doblar las rodillas. Se utilizó un método de elementos finitos no lineal para determinar el máximo esfuerzo y la distribución de los mismos en la unión de la cadera durante las actividades diarias mencionadas anteriormente.

CAPÍTULO I: ANTECEDENTES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

Entre las publicaciones recientes relacionadas con el tema podemos añadir los siguientes autores:

En 1990, Jin y Liao [9] publican un artículo en el que se encargan de mejorar el método propuesto por Sachdeva y Ramakrishnan, el cual está mencionado en Rabinovich [8], para problemas de contacto elástico con fricción introduciendo el concepto de par de nodos de contacto. Los desplazamientos y fuerzas nodales de dos nodos en contacto son tratados en una sola variable. La matriz que corresponde a todos los pares de nodos de contacto es usada durante las iteraciones en vez de usar la matriz de flexibilidad de cada cuerpo. La compatibilidad de los desplazamientos a lo largo de la zona de contacto es aplicada tanto en dirección tangencial como normal para unir los pares de nodos mientras que se usa la Ley de Coulomb para nodos con deslizamiento. Todas las relaciones anteriores fueron escritas en términos de pares de nodos con lo que se obtiene grandes ahorros de memoria y tiempo. Se dan varios ejemplos para contacto estacionario, de retroceso y de avanzada para demostrar la validez del método propuesto.

Papadopoulos [10] presenta un algoritmo de elementos finitos para la solución de problemas de contacto bidimensional sin fricción los cuales involucran cuerpos bajo grandes movimientos y deformaciones arbitrarias. Para aproximar las desigualdades variacionales resultantes se emplea una formulación mixta de penalización. El algoritmo es aplicado a elementos cuadráticos en conjunto con un esquema racional para determinar las regiones de contacto. Varias simulaciones

CAPÍTULO I: ANTECEDENTES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto Mediante el Método de Elementos Finitos

numéricas ilustran la aplicabilidad y precisión del procedimiento de solución propuesto.

Mottershead y otros colegas [11] presentan un acercamiento general a problemas de esfuerzos de contacto mediante elementos finitos. Utilizan funciones de interpolación estándar para la detección del contacto entre mallas previamente separadas y para la aplicación de restricciones de desplazamiento donde exista el contacto. Instalan las rutinas de contacto para la malla de manera incremental donde las restricciones de contacto son impuestas usando bien sea multiplicadores de Lagrange o funciones de penalización.

Mottershead recalca que la mayoría de las contribuciones para la resolución de problemas de esfuerzos de contacto mediante elementos finitos utilizan multiplicadores de Lagrange o funciones de penalización para imponer las restricciones del desplazamiento en la superficie de contacto entre las mallas y los métodos que involucran los ya definidos “gap elements” suelen estar basados en su totalidad en funciones de penalización donde la rigidez del elemento es el número de penalización.

Zhu y Jin [13] se apoyan en el concepto de la Teoría de Plasticidad y establecen restricciones de contacto tanto tangenciales como normales, como condiciones complementarias con parámetros de penalización. Presentan un método de elementos finitos hecho con programación matemática para resolver problemas de contacto con fricción entre cuerpos elásticos basado en las derivadas de las condiciones de contacto y el principio de trabajo virtual.

CAPÍTULO I: ANTECEDENTES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

De nuevo Papadopoulos [15] presenta una metodología para la solución, mediante elementos finitos, de problemas de contacto que involucran cuerpos que pueden experimentar deformaciones y movimientos finitos. Basa su análisis en la descomposición del problema de contacto entre dos cuerpos en dos sub-problemas simultáneos lo que resulta en la discretización imparcial de las superficies de contacto. Propone un elemento de contacto bidimensional específicamente diseñado para permitir incondicionalmente la transmisión exacta de la tracción normal y constante a través de las superficies de contacto.

Jianfeng y sus colegas [16] proponen un método llamado Matriz de Rigidez Normal a lo Largo de la Línea de Contacto para el análisis de engranajes. Establecen modelos de sólidos tridimensionales discretizados mediante el M.E.F. Usando estos modelos se hace posible el análisis de engranajes cilíndricos, helicoidales, externos e internos y con diferentes parámetros y materiales. Se presentaron resultados tales como distribución de cargas a lo largo de la línea de contacto, deformaciones, esfuerzos de contacto y rigidez en cualquier posición de contacto. Los resultados de cálculos mostraron que la tendencia de deformación de los dientes del engranaje coincide con los puestos a prueba usando un ensayo de fotoelasticidad.

Refaat y Meguid [17] desarrollan un nuevo algoritmo heurístico para la solución de la desigualdad variacional que aparece en los problemas generales de contacto con fricción. Los algoritmos que se desarrollan generalmente para el tratamiento de la desigualdad variacional que representa el contacto con fricción se basan en la

CAPÍTULO I: ANTECEDENTES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

descomposición del problema físico en dos sub-problemas que luego son resueltos de manera iterativa como lo definió Papadopoulos [15].

Para la solución de estos sub- problemas reducidos se utiliza el método de la función de penalización y/o técnicas de regularización. Estas técnicas introducen parámetros definidos por el usuario los cuales pueden influir en la convergencia y en la precisión de la solución. El nuevo método que presentan supera estas dificultades dando una solución para la desigualdad sin la descomposición en dos sub-problemas del problema físico. Esto lo logran introduciendo un algoritmo heurístico el cual usa técnicas matemáticas de programación, evitando así el uso de los métodos de penalización o regularización. Demuestran la versatilidad y buen funcionamiento del algoritmo con la implementación de un caso de contacto con fricción entre un cilindro hueco elástico y una base rígida.

Fourment y compañía [18] analizan el contacto entre una herramienta y una pieza y entre dos cuerpos deformables durante los procesos de conformado de metal. Sólo consideran el caso para materiales visco- plásticos. Consideran primero el contacto con una herramienta rígida y luego varias formas de contacto son descritas bajo las condiciones de contacto de nodo a nodo y el uso de multiplicadores de Lagrange. Toman en cuenta el tiempo de integración lo que da como resultado varias formulaciones de contacto tanto explícitas como implícitas. Le prestan atención especial al contacto entre dos cuerpos deformables o entre el mismo cuerpo cuando se forman pliegues en éste. Realizan algunos ejemplos tanto bidimensionales como

CAPÍTULO I: ANTECEDENTES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

tridimensionales los cuales demuestran la efectividad de las formulaciones propuestas.

Hild [20] toma interés en el problema de contacto unilateral entre dos cuerpos elásticos. Para la resolución utiliza dos aproximaciones mediante el Método de Elementos Finitos y considera dos cuerpos discretizados independientemente en contacto unilateral en el cual las mallas de cada cuerpo no coinciden la una con la otra a la hora del contacto, es decir, los nodos del cuerpo contactor no necesariamente se une con los nodos del cuerpo contactado. El primer método es una extensión del M.E.F para desigualdades variacionales el cual define el contacto de manera global, el segundo expresa condiciones locales para el contacto nodo-arista. Luego compara ambos métodos para ver cual es más eficiente.

Wang, Cheng y Yao [21] proponen un nuevo algoritmo para sistemas generales de contacto. Debido a la necesidad de una gran precisión y sutileza en la descripción de la geometría a la hora del análisis de esfuerzos de contacto, trabajan en lo que llamaron algoritmo FSS (Free-Form Surface o en español, superficie de forma libre), el cual se especializa en modelar la superficie de contacto con continuidad de borde C^1 y con la definición exacta de las condiciones de borde. Por otra parte, la descripción geométrica que realizan, producto del uso del algoritmo FSS, produce los datos necesarios para determinar la dirección de contacto y calcular la penetración exacta del mismo. Por último, los resultados de la simulación numérica refleja que el algoritmo de contacto es válido y es capaz de de simular problemas de contacto tridimensionales de manera precisa.

CAPÍTULO I: ANTECEDENTES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

Sinclair, Cormier y compañía [22] presentan una investigación de cálculo bidimensional de los esfuerzos de contacto en las uniones de las aspas al disco de compresores y ventiladores de turbinas de gas mediante el M.E.F. Esta zona presenta ciertos retos debido a las grandes concentraciones de esfuerzo y a la no linealidad del contacto conforme con fricción incluida por lo que se hace necesaria la creación de una malla de resolución elevada.

Seyidmamedov [23] desarrolla una formulación basada en el Método de los Elementos Finitos con elementos de discretización triangulares para estudiar los efectos del esfuerzo interlaminar en un medio isotrópico multilaminar sujeto a cargas en el mismo plano de esfuerzo. De esta manera presentan una formulación de condición de borde unilateral. Derivan las ecuaciones variacionales de diferencias finitas obtenidas con la discretización mediante el M.E.F para obtener tanto las condiciones de borde como las de transmisión. Esto les permite analizar las distribuciones de esfuerzo interlaminar tanto normal como tangencial. Discuten también la influencia de parámetros geométricos y físicos del medio multilaminar en los esfuerzos entre láminas. Este trabajo es el primero en considerar problemas de contacto unilateral sin fricción para un medio multilaminar de dimensión finita por lo que la formulación presentada aquí puede ser extendida para otros tipos de capas o láminas.

Al trabajar con áreas de contacto rugosas se puede decir que el contacto es discontinuo por lo que el área real de contacto es una pequeña fracción del área nominal. Por lo tanto se establece que la rigidez de una superficie rugosa influye en el estado de contacto así

CAPÍTULO I: ANTECEDENTES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

como en el comportamiento de todo el sistema alrededor de esa zona. Sellgren y compañía [26] desarrollan e implementan un modelo de contacto que toma en cuenta las propiedades de las superficies rugosas usando un programa de elementos finitos. Los resultados muestran que la distribución de alturas de la topografía de la superficie tiene una influencia significativa en la rigidez de contacto mientras que la curvatura de rugosidad tiene una menor importancia. El modelo de contacto que fue desarrollado para determinar el área aparente de contacto y la distribución de presión está basado en un arreglo limitado de parámetros de altura, los cuales describen la topografía de la superficie. El área real de contacto puede ser estimada cuando el estado aparente de contacto es conocido, trabajando sobre la distribución de presiones aparente calculada con una función de transformación basada en parámetros de altura y curvatura.

Doudoumis [27] desarrolla primeramente una formulación analítica de las condiciones de borde del contacto unilateral basándose en la Ley de Coulomb de fricción seca y luego estudia un problema de contacto cuasi-estático entre cuerpos elásticos tridimensionales. Discretiza los cuerpos mediante el M.E.F, introduce las uniones de contacto ficticias o virtuales y usa el concepto de sistema estructural equivalente para formular un problema no lineal incremental el cual puede ser transformado en un problema lineal incremental usando simplificaciones adicionales.

Solberg y Papadopoulos [30] examinan las propiedades de convergencia de formulaciones duales de elementos finitos para problemas de contacto bidimensionales sin fricción bajo la suposición

CAPÍTULO I: ANTECEDENTES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

de una cinemática infinitesimal. El centro de su análisis propuesto es la bien conocida condición de Babuska- Brezzi, convenientemente adaptada a su problema. Para ciertas geometrías canónicas demuestran que varios métodos ampliamente usados los cuales usan interpolaciones de fuerza o de presión derivadas de las discretizaciones de ambas superficies de contacto no cumplen con la condición de Babuska- Brezzi, produciendo así soluciones incrementales oscilatorias bajo el refinamiento de la malla. Por último proponen algoritmos alternativos que superan esta dificultad y corroboran que producen soluciones convergentes.

Kuss y Lebon [32] tratan métodos numéricos para resolver problemas de contacto unilaterales con fricción. Aunque este tipo de problemas normalmente se define en función de los desplazamientos, ellos desarrollan un acercamiento en base a los esfuerzos. De esta manera se usa el Método de los Elementos Finitos en el equilibrio y usando los elementos producto de la discretización se hace posible satisfacer las condiciones de equilibrio locales a priori aunque por otro lado tanto las fuerzas prescritas como las de contacto deben ser introducidas mediante multiplicadores de Lagrange. Por lo tanto obtienen un problema restrictivo no lineal y la matriz global definitiva del sistema también es no lineal. Por último proponen varios algoritmos de solución los cuales son comparados entre ellos al igual que también realizan comparaciones entre el método clásico y el desarrollado por ellos, las cuales muestran que la formulación propuesta en base a los esfuerzos arroja resultados satisfactorios en lo que a cálculo de esfuerzos se refiere.

CAPÍTULO I: ANTECEDENTES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

En la actualidad ya existen numerosos paquetes de programación a nivel comercial capaces de simular y resolver casi cualquier tipo de problema de Ingeniería mediante el Método de los Elementos Finitos, desde problemas de Elasticidad (Lineal y No Lineal) hasta de Transferencia de Calor y de Fluidos.

Tal es el caso de programas como ABAQUS o ANSYS. Sobre este último existen una serie de publicaciones entre las cuales podemos encontrar varias relacionadas con el tema de contacto como lo son la de Johnson [24] el cual expone la variedad de elementos que ofrece ANSYS, diseñados para tratar casos de contacto que van cambiando con el tiempo entre partes de un ensamblaje o entre las caras de cuerpos sencillos y los casos en que cada uno de estos elementos es más conveniente usar. Entre ellos se encuentran los elementos de nodo a nodo para casos donde no existe deslizamiento entre los cuerpos, elementos de nodo a arista para situaciones bidimensionales donde existe un deslizamiento, elementos de punto a superficie los cuales pueden ser usados para sistemas en dos o tres dimensiones y para situaciones donde hay grandes deslizamiento (sin embargo no son compatibles con elementos de sólidos de orden mayor) y por último menciona el elemento de superficie a superficie el cual supera casi todas las restricciones y limitaciones de los elementos mencionados anteriormente.

Finalmente Sezer y Sinclair [29] presentan un trabajo en el que examinan el desempeño de los diferentes elementos y algoritmos que provee ANSYS mediante experimentos numéricos. Éstos están enfocados a contacto sin fricción entre cuerpos rígidos y usan

CAPÍTULO I: ANTECEDENTES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

problemas de los cuales se conoce la solución analítica exacta para hacer posible la comparación entre el uso de los diferentes elementos y así realizar una evaluación del error para la implementación de cada una de las opciones de contacto.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

2.1 INTRODUCCIÓN

Cuando dos sólidos no conformes, es decir, dos sólidos cuyos perfiles pueden ser representados mediante una expresión cuadrática, entran en contacto estos se tocan inicialmente en un solo punto, o a lo largo de una línea. Bajo el efecto de la más mínima carga estos se deforman en la proximidad del punto de primer contacto por lo que se tocan en un área muy pequeña comparada con el tamaño de los dos cuerpos.

De esta manera es necesaria una teoría de contacto para predecir la forma del área de contacto así como el incremento de su tamaño a medida que aumenta la carga, la magnitud y distribución de esfuerzos transmitidas en la interface. A partir de aquí se hace posible el cálculo de la deformación y los esfuerzos en ambos cuerpos en la proximidad de la región de contacto.

2.2 CONTACTO HERTZIANO Y NO HERTZIANO

Así define Johnson [4] el fenómeno de contacto, sobre el cual realiza una extensa monografía dividiendo principalmente el contacto normal entre sólidos elásticos en Hertziano y No-Hertziano.

Años más tarde Adams [19] realiza un trabajo donde se basa en el escrito de Johnson y también divide el tipo de contacto en esos dos tipos. El primero está basado en las siguientes condiciones o restricciones: (a) el área de contacto es elíptica; (b) con el propósito de calcular las deformaciones locales, cada cuerpo es considerado como un semi-espacio elástico cargado sobre el plano elíptico del área de contacto; (c) las dimensiones del área de contacto son muy pequeñas

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

comparadas con las dimensiones de cada cuerpo y con el radio de curvatura de las superficies; (d) las deformaciones en el área de contacto son lo suficientemente pequeñas para que sea válida la elasticidad lineal; (e) el contacto se realiza sin fricción por lo que solo es transmitida una presión normal y por último (f) los sólidos se consideran perfectamente elásticos y no conformes.

Esto último se refiere, como se mencionó anteriormente, a que el perfil de los cuerpos puede ser representado mediante una simple expresión cuadrática, es decir, un polinomio de segundo grado. Se puede observar en la figura 1 un típico fenómeno de contacto Hertziano después de la deformación tomando como origen de un sistema de coordenadas cartesiano el primer punto de contacto entre las dos superficies. El contacto No-Hertziano se produce cuando en el fenómeno, una o varias de las condiciones descritas anteriormente no se cumplen.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

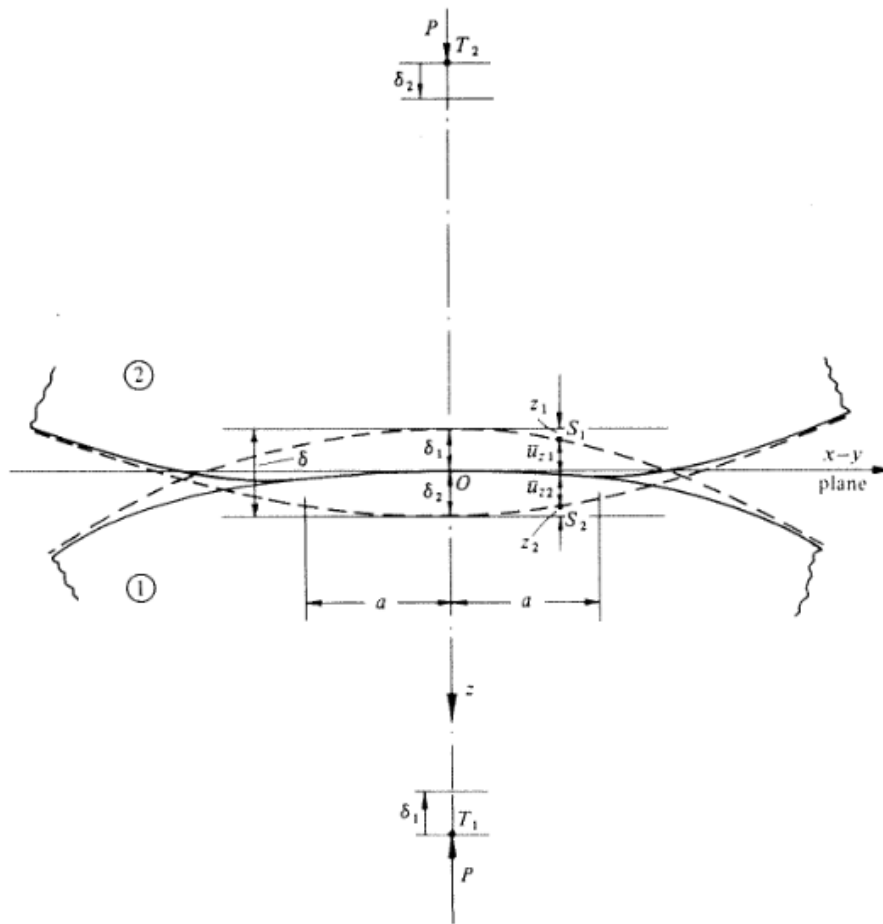


Figura 1. Contacto Hertziano entre dos cuerpos elásticos. [4]

2.2.1 ECUACIONES DE CONTACTO DE HERTZ

Las ecuaciones de esfuerzos de contacto de Hertz y proveen una solución exacta a problemas de contacto elástico entre dos cuerpos. Pueden ser encontradas en [33]. Para la unión entre dos cilindros cargados con una carga F , la presión de contacto máxima P_0 se presenta en el eje de carga. El área de contacto se define por medio de

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

las dimensiones b (longitud del área de contacto) y L que vendría siendo el espesor. Las ecuaciones para obtener b y P_0 pueden ser simplificadas si se introduce una cantidad Q , que es función del módulo de Young (E) y del coeficiente de Poisson (ν), donde para los cuerpos 1 y 2, se tiene:

$$Q = \frac{1 - (\nu_1)^2}{E_1} + \frac{1 - (\nu_2)^2}{E_2} \quad (1)$$

Para dos cilindros paralelos:

$$P_0 = 0.564 \left\{ \frac{F \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}{L * Q} \right\}^{1/2} \quad (2)$$

$$b = 1.13 \left\{ \frac{F * Q}{L \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} \right\}^{1/2} \quad (3)$$

Para el caso de un cilindro en contacto con una superficie plana se considera que R_2 es infinito y para el caso de contacto entre un cilindro y una concha cilíndrica, R_2 será negativo.

Para nuestro caso bidimensional consideramos el espesor L siempre igual a la unidad y la presión de contacto P_0 es, por supuesto, también el valor del esfuerzo de compresión superficial normal en la

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

dirección Y , en el eje de aplicación de la carga, es decir, sería el valor de la presión máxima, el cual representa el S_y en el punto inicial de contacto.

2.3 GAP ELEMENTS

Dentro de los problemas de contacto es importante la definición de los “gap elements” en base a la cual trabaja Nicholson [25]. Considerando la figura 2 se define un cuerpo contactor y un cuerpo contactado (target), relacionados por tres resortes de rigidez K iguales. Los resortes A y C están uniendo directamente los cuerpos pero el resorte B está inicialmente separado del cuerpo contactado por un “gap” que denominó g . Luego supone un nodo en el punto más bajo del resorte B y otro en el cuerpo contactor directamente debajo de este resorte los cuales no están inicialmente conectados pero lo estarán después en el problema físico.

Por lo tanto será necesario satisfacer una fuerza de “no penetración” por la cual el nodo del cuerpo contactor no se sigue moviendo dentro del cuerpo contactado. Si los nodos todavía no han hecho contacto en el modelo de elementos finitos no hay porque satisfacer esta fuerza pero si ya se considera el contacto la rigidez del resorte B será artificialmente alta. Para este caso entonces introduce un nuevo resorte llamado K_g entre los dos nodos supuestos, el cual sirve de unión entre los nodos correspondientes del cuerpo contactor y del contactado (ver figura 3).

Ahora el resorte B en serie con el nuevo resorte K_g es el llamado “gap element”, por lo que concluye que la rigidez de este

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

debería estar relacionada con la rigidez entre los dos cuerpos potenciales a entrar en contacto en la proximidad de este punto.

Nicholson describe también dos tipos posibles de contacto, el de nodo a nodo y el de nodo a arista como se muestra en las figuras 4 y 5 respectivamente.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

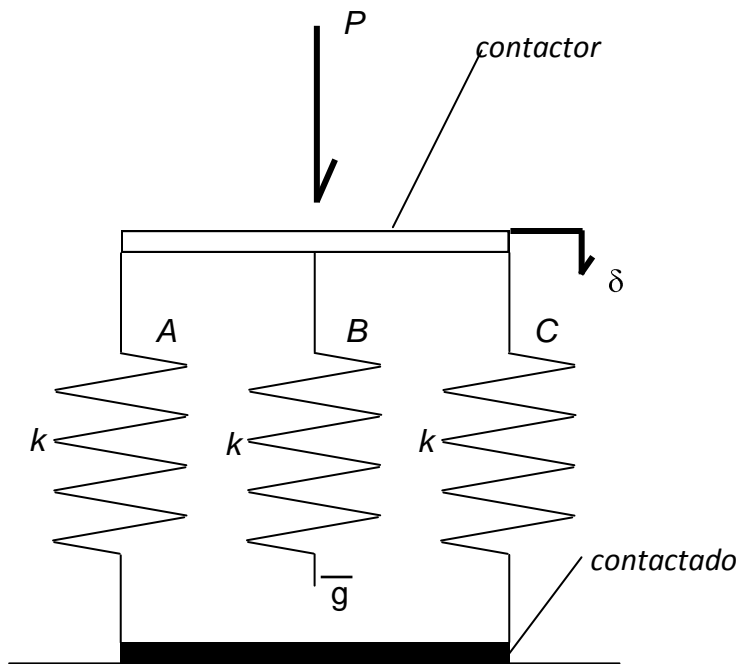


Figura 2. Problema de contacto simple. [25]

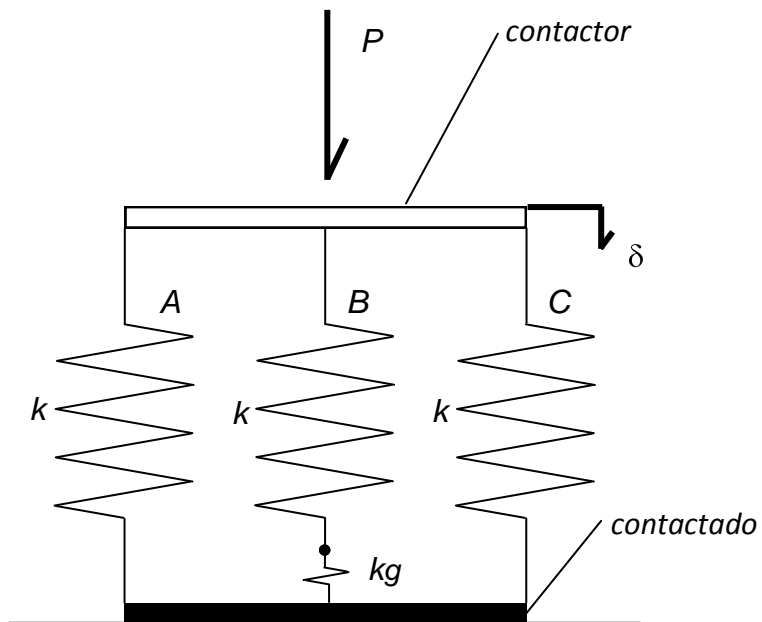


Figura 3. Resorte representando elemento de contacto (gap element).
[25]

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

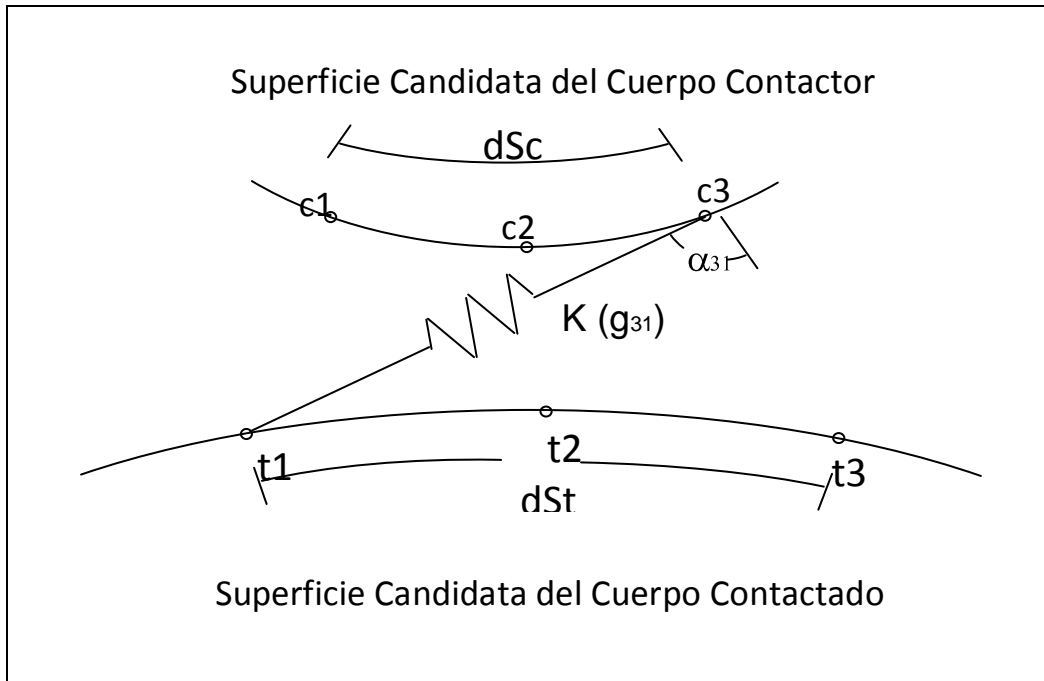


Figura 4. Contacto de nodo a nodo. [25]

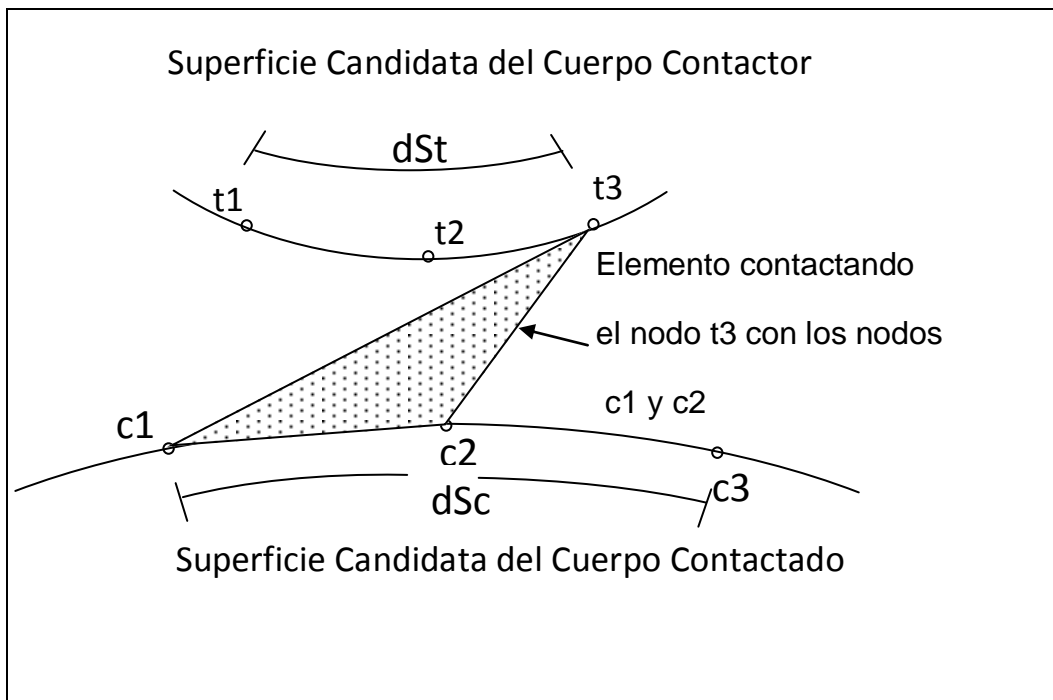


Figura 5. Elemento para el contacto nodo-arista. [25]

2.4 NO LINEALIDAD DEL CONTACTO

Numerosos problemas de análisis estructural involucran cambios progresivos en la matriz de rigidez y sus coeficientes en cada paso de la iteración. Uno de estos problemas es el fenómeno de contacto en el que es necesario reflejar los cambios que ocurren en la matriz de rigidez global como consecuencia de la variación de la zona de contacto.

Es por esta razón precisamente que el fenómeno de contacto es considerado un problema no lineal ya que al entrar un nuevo par de nodos en contacto cambia la geometría de la malla que está siendo estudiada en el sentido que esos dos nodos se convierten en uno solo por lo que cambian las condiciones de borde iniciales. Por lo tanto decimos que el problema de contacto será tratado como un problema de no linealidad geométrica el cual puede ser resuelto en un número finito de iteraciones en las cuales se trabaja de manera lineal introduciendo los conceptos de la Teoría de Elasticidad.

Law [6] se encargó de introducir un modelo de teoría de grafos para este tipo de problemas el cual es aplicable para identificar las entradas modificadas de los coeficientes de la matriz debido a cambios en la matriz original. Dicho modelo es introducido para matrices con un gran número de ceros en sus coeficientes, también conocidas como matrices dispersas (sparse matrix), tal es el caso de la matriz de rigidez global. Más adelante el mismo Law [7] realiza un nuevo trabajo donde introduce un modelo llamado “ordered-tree model” para la actualización de la matriz dispersa.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

2.5 CONTACTO DE AVANZADA Y DE RETROCESO

El contacto entre cuerpos elásticos puede ser clasificado también en dos tipos, el contacto de avanzada y el de retroceso.

En el contacto de retroceso, la región de contacto inicial C contiene la extensión final de contacto C_f (C_f pertenece a C_o) y es llamado de esta manera porque los cuerpos se están alejando entre ellos, es decir, la región de contacto se encoge o permanece estacionaria con la aplicación de la carga (Figura 6).

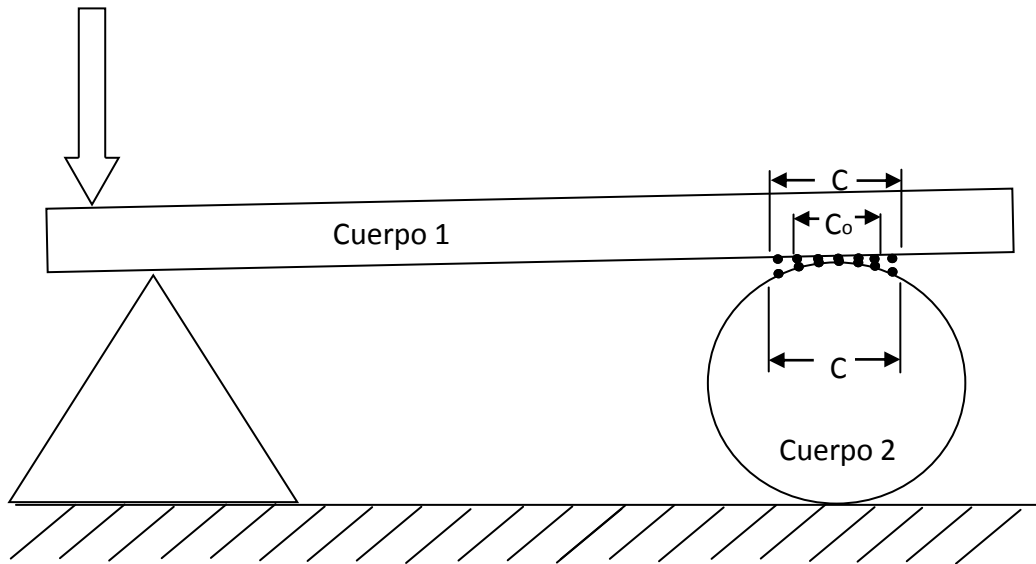
$$C_f \leq C_o$$

En el caso de contacto de avanzada, la extensión final de contacto C_f no pertenece a la región inicial C_o , es decir, los cuerpos se están uniendo cada vez más y la región de contacto entre las dos superficies se extiende más allá de la zona C_o (Figura 7).

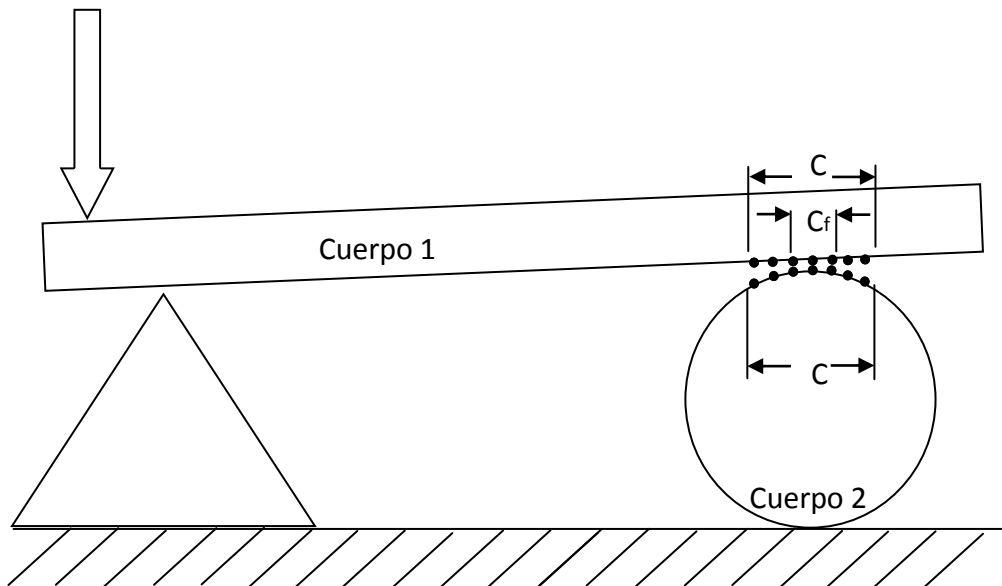
$$C_f > C_o$$

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos



a) Inicio del contacto de retroceso, donde C_0 es la región inicial de contacto

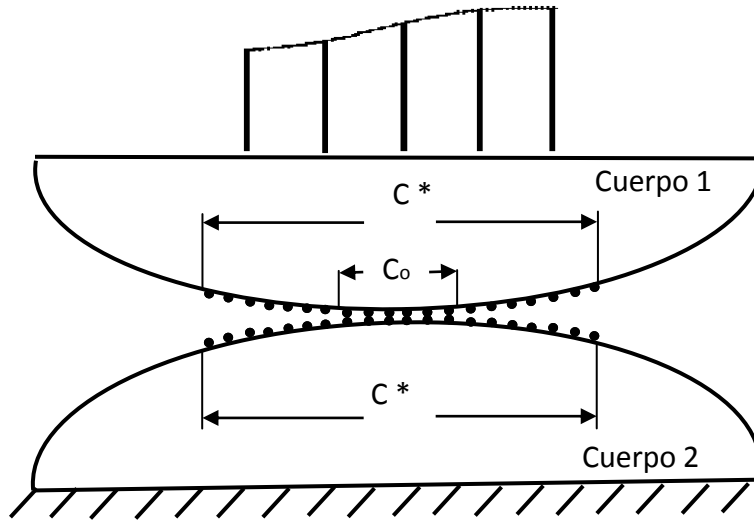


b) Fin del contacto, donde la extensión final de contacto C_f es menor que la región inicial de contacto C_0

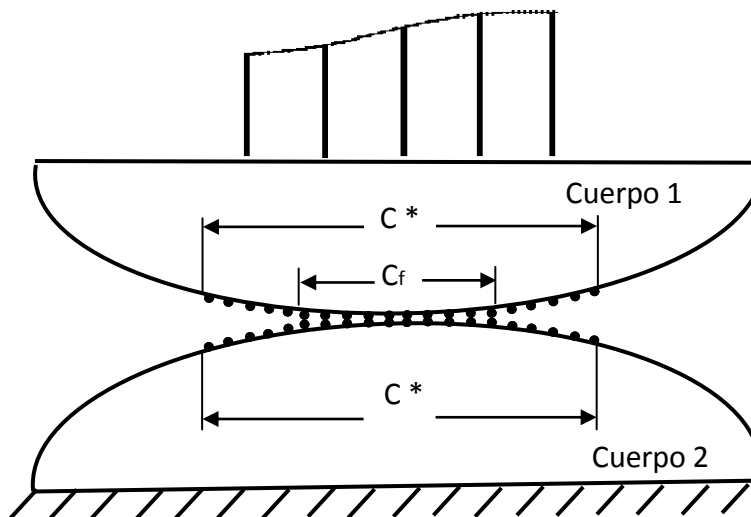
Figura 6. Contacto de retroceso.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto Mediante el Método de Elementos Finitos



a) Inicio del contacto de avance, donde C_0 es la región inicial de contacto.



b) Fin del contacto, donde la extensión final de contacto C_f es mayor que la región inicial de contacto C_0 .

Figura 7. Contacto de avanzada.

CAPÍTULO III: DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

3.1 INTRODUCCIÓN

El método para la resolución del problema de contacto utilizado en este trabajo se basa en su totalidad en el modelo de cálculo propuesto por Rabinovich [8], ya que el objetivo a perseguir en este estudio es el de actualizar el lenguaje de programación del algoritmo creado por ellos. Cabe destacar, que su trabajo estuvo basado en gran parte en el modelo propuesto por Mahmoud [3] y sus colegas ya que mediante este método no era necesaria la utilización de elementos artificiales de interface ni la generación de las matrices de flexibilidad como en el caso propuesto por Chan y Tuba [1].

Se hace entonces una modernización del trabajo ya presentado por nuestros colegas para adaptar el programa a las necesidades actuales de los usuarios bajo un ambiente de software libre y de esta manera se presenta un método de incrementos directo el cual permite calcular los desplazamientos, los esfuerzos y la extensión de la zona de contacto. Se desarrolló así una metodología sistemática teniendo en cuenta la Teoría de la Elasticidad Lineal.

3.2 TIPOS DE MÉTODOS NUMÉRICOS

Existen diversos métodos numéricos para la aproximación de de soluciones de problemas de ecuaciones en derivadas parciales entre los que podemos encontrar el Método de las Diferencias Finitas en el cual se parte directamente de la ecuación diferencial y se discretiza la misma convirtiéndola en una ecuación en diferencias en los nodos de una malla. Otros métodos numéricos de aproximación menos utilizados incluyen el Método de Volúmenes Finitos el cual tiene parte de su

CAPÍTULO III: DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

formulación en común con el M.E.F, sólo que en este las funciones de interpolación son funciones tipo “hat” (constantes en parte del dominio y nulas en el resto) y también encontramos el Método de Elementos de Contorno el cual utiliza una segunda integración por partes para obtener ecuaciones algebraicas en el contorno del dominio.

3.3 MÉTODO DE LOS DE ELEMENTOS FINITOS

El método a utilizar en este trabajo entonces es el Método de los Elementos Finitos debido a que este, comparado con las otras técnicas numéricas, tiene mayor generalidad respecto a las propiedades geométricas y de los materiales ya que permite considerar sólidos de forma compleja constituidos por diferentes materiales, pudiendo imponerse además diversas condiciones de frontera. En adición a todo esto, cabe destacar que esta técnica es una de las más utilizadas en la actualidad en cuanto a métodos numéricos de simulación se refiere, tanto por investigadores como por grandes compañías que trabajan dentro del ámbito de la Ingeniería.

En la resolución del problema utilizando el Método de los Elementos Finitos o M.E.F, el primer paso a considerar es la discretización del medio continuo, es decir, dividir éste en subregiones (elementos) de tamaño finito y forma geométrica sencilla. El elemento utilizado en este trabajo es el triángulo el cual tiene tres lados rectos o aristas, tres nodos (uno en cada vértice) y funciones de interpolación del tipo lineal. La selección de este tipo de elementos se debe a su versatilidad para modelar fronteras irregulares y para modificar su tamaño cuando sea necesario. Es conveniente discretizar las zonas de grandes concentraciones de esfuerzos con mayor número de elementos

CAPÍTULO III: DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

y de menor tamaño para lograr un estudio más detallado y con mayor precisión, un ejemplo de este tipo de zona son las partes donde ocurre el fenómeno de contacto.

Con esta discretización se logra determinar la cantidad de elementos que contiene el dominio con sus respectivos nodos. Luego se procede a identificar nodos y elementos mediante números. Es necesaria una numeración consistente de los nodos y se utilizará el sentido anti-horario como sistema convencional.

Queda entonces realizada la numeración, donde se obtiene el número total de nodos y de elementos, logrando así poder clasificar las diferentes condiciones a las cuales está sometido el nodo durante el contacto tanto en la zona donde se produce el fenómeno como en el resto del cuerpo. Estas pueden ser condiciones libres o restringidas. En el estudio del Fenómeno de Elasticidad se dice que un nodo es libre en una dirección cuando no existe restricción que impida el desplazamiento del mismo en dicha dirección. Por el contrario se dice que un nodo está restringido en una dirección cuando éste no es capaz de desplazarse en dicha dirección, por ejemplo, debido a la existencia de un apoyo o un empotramiento en dicho nodo. Si hablamos de un nodo de la zona de contacto las condiciones vendrían siendo si el mismo hizo contacto con el otro cuerpo o no lo hizo.

Cabe destacar que en este trabajo se conservan las mismas restricciones que fueron usadas en Rabinovich [8] las cuales son: solamente se trabajará con problemas bidimensionales, no se considera la fricción, tampoco se considera el desplazamiento tangencial entre los cuerpos en contacto, es decir, no hay deslizamiento. De esta manera, el

CAPÍTULO III: DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

contacto se realiza entre pares de nodos, donde cada par está formado por un nodo de cada sólido (de los sólidos que entran en contacto). Si existiera deslizamiento habría que tratar el problema con un contacto de nodo a arista.

Básicamente este nuevo programa se desarrollo en tres partes:

Una primera parte donde se analizó a fondo el MEFET y se tomaron las subrutinas de la parte de elasticidad lineal (ya que en este trabajo de contacto la no linealidad se presenta en las condiciones de contacto que van cambiando a medida que aumenta la superficie de contacto y no a una no linealidad geométrica o del material como se refiere en Fernández [12]), referentes tanto a la construcción de la matriz de rigidez y al cálculo de esfuerzos generales como a las relacionadas con la lectura de los datos, las cuales ya estaban en lenguaje C y por lo tanto pudieron ser reutilizadas.

Una segunda parte en la que se estudió el programa MEFCO poniendo especial atención en la subrutina perteneciente al algoritmo de contacto (CONTACTO) y en la subrutina encargada de modificar la matriz de rigidez global considerando las nuevas condiciones de borde que ocurren cuando un par de nodos nuevos entran en contacto (MODIPER) y se procedió a la traducción de las mismas de lenguaje de programación FORTRAN 77 a lenguaje C.

Por último, una tercera parte en donde se acoplaron todas las subrutinas para formar el nuevo programa y se procedió a la comparación de los resultados obtenidos con los de la solución exacta

CAPÍTULO III: DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

calculada mediante el método de analítico de Hertz, todo esto para la validación de este nuevo programa implementado.

CAPÍTULO IV: ALGORITMO DE CONTACTO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

4.1 ALGORITMO DE CONTACTO

Si se consideran dos cuerpos linealmente elásticos bajo la acción de cargas externas, los cuales entran en contacto el uno con el otro, inicialmente la región de contacto puede abarcar todas las superficies adyacentes o parte de ellas. Se asume que estas superficies no están adheridas y no se toma en cuenta el efecto de la fricción.

A su vez, se requiere que uno de los cuerpos esté externamente restringido y el otro puede estar restringido inicialmente por el establecimiento de por lo menos un punto de contacto con el primero como se puede observar en la figura 6. El primer cuerpo se denomina cuerpo contactado y el segundo es el cuerpo contactor. Además de esto, la combinación de los cuerpos está limitada a aquella zona donde no ocurra desplazamiento tangencial relativo a lo largo de la superficie de contacto, es decir, que no exista deslizamiento.

Para resolver el problema se discretizaron ambos cuerpos en elementos finitos triangulares y se siguió la práctica convencional de refinar la malla en las áreas críticas, es decir se realizó un mallado más detallado con mayor número de elementos y de menor tamaño, debido a que el contacto se establece solamente en localidades finitas, esto es, en zonas de los sólidos que pueden ser identificadas por el operador como posibles a entrar en contacto. Este proceso se puede ver más adelante en el capítulo VI en las figuras 20 y 21.

Estas zonas se definen por pares de nodos, donde uno de los nodos pertenece al cuerpo contactor y el otro al cuerpo contactado, de tal manera que el par de nodos esté formado por aquellos nodos más

CAPÍTULO IV: ALGORITMO DE CONTACTO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

próximos entre los dos cuerpos a lo largo de la separación o espacio entre caras. Por esta razón y debido a las grandes concentraciones de esfuerzos que ocurren en las zonas de contacto se hace necesaria la construcción de una fina discretización en toda esta región de contacto potencialmente crítica.

Las variables y los sistemas de coordenadas utilizados para describir la superficie de contacto bidimensional se muestran en la figura 9, donde G_{ij} es la separación o el gap entre los nodos i y j después del incremento del desplazamiento, si es que éste ha ocurrido. En cada par de nodos la condición restrictiva de contacto requiere que:

$$REL = D_{in} - D_{jn} \leq G_{ij} \quad (4)$$

donde n denota la dirección desde el nodo i al nodo j que es aproximadamente normal a las dos superficies. D_{in} y D_{jn} son las componentes de desplazamiento correspondientes para i , j en el sistema de coordenadas local (n, t) , por lo que su diferencia, es decir, el vector REL es el desplazamiento relativo entre el par de nodos. Esto significa que mientras G_{ij} sea mayor que REL en ese incremento, todavía no existirá contacto entre ese par de nodos.

El origen del sistema de coordenadas generales (x, y) se localiza en el punto inicial de contacto que se resalta en la figura en la figura 8.

CAPÍTULO IV: ALGORITMO DE CONTACTO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

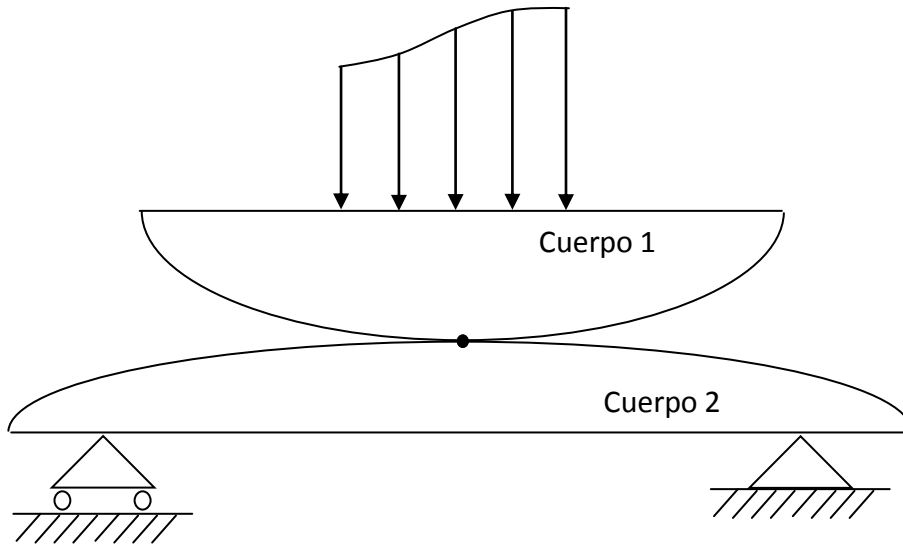


Figura 8. Contacto inicial entre dos cuerpos.

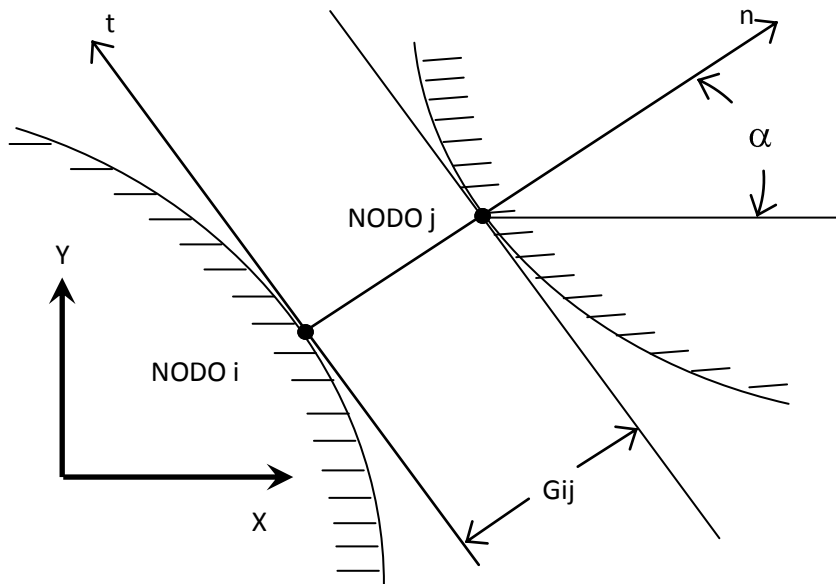


Figura 9. Geometría de los pares de nodos en la zona de contacto.

CAPÍTULO IV: ALGORITMO DE CONTACTO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

Si el cuerpo 1 no tiene relación alguna con el cuerpo 2, es decir, inicialmente no están en contacto entonces, se debe activar, inicialmente, por lo menos una restricción del contacto mediante la consolidación de un par de nodos para así relacionar ambos cuerpos. En cualquier caso, deben estar prescritos suficientes pares independientes de nodos candidatos a entrar en contacto, de tal manera que la región de contacto potencial C^* contenga la región final de contacto C_f en la configuración modificada (C_f pertenece a C^*). Así pues, la solución del problema exige el satisfacer las condiciones de equilibrio junto con las condición restrictiva mencionada en la ecuación (4).

Para la formulación del problema de contacto adoptada, el contacto siempre se trata como de avanzada, es decir, la extensión final de la zona de contacto es mayor que la zona inicial de contacto, debido a que se requiere que la zona C_o pertenezca a C_f y que a su vez C_f pertenezca a C^* . Por lo tanto se prescribe un par de nodos centrales el cual será la zona de contacto inicial C_o y se avanza hacia la extensión final de contacto C_f mediante la activación de restricciones durante la fase de solución. En otras palabras, inicialmente se restringen los cuerpos y se permite que la región de contacto avance libremente hasta que alcance el equilibrio sin que ocurra la penetración.

En resumen tenemos entonces las siguientes zonas definidas las cuales se pueden observar en la figura 7 en la página 29:

C_o : zona de contacto inicial.

C^* : zona potencial de contacto prescrita (nodos candidatos).

CAPÍTULO IV: ALGORITMO DE CONTACTO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

Cf: Zona final de contacto.

Para el contacto de avanzada, la región de contacto aumenta a medida que aumenta la magnitud de la carga externa aplicada. Para el problema discretizado, el problema es completamente lineal durante aquellos incrementos de crecimiento de carga en los cuales ocurre la consolidación de los pares de nodos candidatos.

Esto se debe a que la no linealidad en el fenómeno de contacto viene dada por el cambio en las condiciones de borde cuando un par de nodos entra en contacto por lo que el problema es resuelto entonces en un número finito de pasos lineales.

Conocido esto, se puede utilizar el principio de linealidad entre cargas y desplazamientos perteneciente a la Teoría de la Elasticidad. Este principio permite determinar un paso de incremento de la fuerza, la cual al ser aplicada induce el aumento de la región de contacto. En uno de estos pasos se producirá la unión del par de nodos candidatos cuyos nodos estén más cercanos uno del otro, es decir entrará en contacto cuyo G_{ij} sea menor.

Este proceso se realiza de manera repetida hasta conseguir que variando la carga aplicada en un diferencial el cual vale $[\Delta R]$, se cierre la separación sin causar interpenetración entre las superficies de contacto. Se denota esta interpenetración como T_{ij} . Esta variación $[\Delta R]$ de la carga aplicada se obtiene aplicando un Factor de Escala como se describe posteriormente en las ecuaciones (6) y (7).

CAPÍTULO IV: ALGORITMO DE CONTACTO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

Para un paso de incremento típico que se denomina \mathbf{k} , la carga residual $[\mathbf{R}]^k$ que queda después de haberle restado $[\Delta\mathbf{R}]^{k-1}$, es aplicada y luego se verifica el campo de los desplazamientos resultantes $[\Delta]^k$ a través de la relación:

$$(\mathbf{T}_{ij})^k = (\Delta_{in})^k - (\Delta_{jn})^k - \mathbf{G}_{ij}^k = REL^k - \mathbf{G}_{ij}^k \quad (5)$$

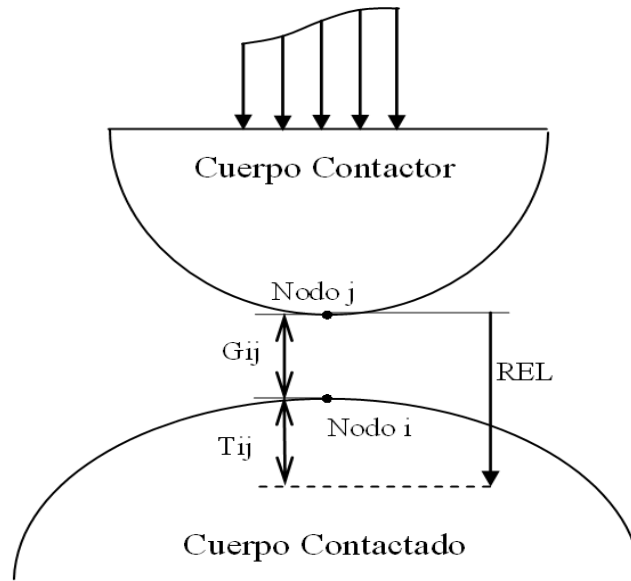
donde \mathbf{n} denota la dirección normal a las dos caras, como se indicó anteriormente e \mathbf{i}, \mathbf{j} abarcan todos los pares de nodos candidatos en la zona \mathbf{C}^* que permanecen separados. Esta verificación permite conocer el próximo par de nodos potenciales a entrar en contacto.

De lo anteriormente dicho, el campo de desplazamientos $[\Delta]^k$ es igual a $[\mathbf{K}^k]^{-1}[\mathbf{R}]^k$, donde $[\mathbf{K}^k]$ es la matriz de rigidez global que ha sido actualizada para incluir todas las nuevas condiciones de borde que se han generado durante el k -ésimo paso en el proceso de contacto. En esencia entonces, el procedimiento de discretización permite que el problema continuo y no lineal, pueda ser resuelto en un número finito de pasos lineales como se mencionó anteriormente.

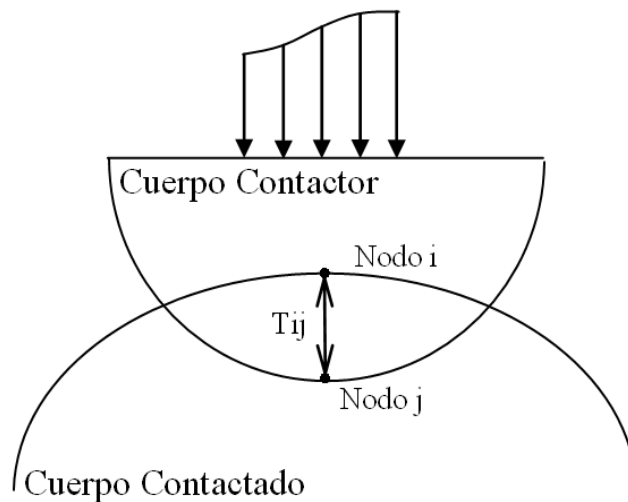
La función de interpenetración juega un gran papel en el algoritmo de contacto. Se puede ver de la ecuación (5) entonces que si \mathbf{T}_{ij} es negativo los pares de nodos \mathbf{i}, \mathbf{j} están separados, si es igual a cero los nodos están en contacto y si es positivo estarán interpenetrados. Por lo tanto, el estado del contacto de todos los pares de nodos candidatos se obtiene directamente de los desplazamientos relativos siendo, de esta manera, innecesario el cálculo de la tracción entre las caras en la zona de contacto \mathbf{C}^* . En la figura 10 se puede observar el significado geométrico de la interpenetración

CAPÍTULO IV: ALGORITMO DE CONTACTO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos



- a) Par de nodos de la zona potencial de contacto antes de ser aplicada la carga.



- b) Par de nodos interpenetrados después de aplicar el incremento de carga.

Figura 10. Representación gráfica de la interpenetración.

CAPÍTULO IV: ALGORITMO DE CONTACTO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

También se puede observar que mientras:

$$\mathbf{G}_{ij} = \mathbf{G}_{ji} \geq \mathbf{0}$$

el signo de T_{ij} se determina mediante la definición de la dirección positiva de \mathbf{n} .

Del conjunto de pares de nodos en \mathbf{C}^* asociados con valores positivos de T_{ij} , se selecciona como próximo a cerrarse, aquel con el valor máximo de interpenetración. Designando a este par de nodos como \mathbf{I}, \mathbf{J} , se deduce el factor de escala \mathbf{S}^k , como:

$$\mathbf{S}^k = \mathbf{G}_{IJ}^k / [(\Delta_{In})^k - (\Delta_{Jn})^k], \quad T_{ij} > 0 \quad (6)$$

de tal manera que la carga requerida para cerrar la separación \mathbf{G}_{IJ} es:

$$\{\Delta \mathbf{R}\}^k = \mathbf{S}^k \{\mathbf{R}\}^k \quad (7)$$

y la carga residual a ser aplicada es:

$$\{\mathbf{R}\}^{k+1} = \{\mathbf{R}\}^k - \{\Delta \mathbf{R}\}^k \quad (8)$$

En el proceso se calcula el campo de desplazamientos acumulados:

$$\{\mathbf{D}\} < \dots - \{\mathbf{D}\} + \mathbf{S}^k \{\Delta\}^k \quad (9)$$

Este campo de desplazamientos será utilizado para calcular más adelante los esfuerzos en los elementos.

Las separaciones que quedan se actualizan a:

$$(\mathbf{G}_{ij})^{k+1} = (\mathbf{G}_{ij})^k - \mathbf{S}^k [(\Delta_{in})^k - (\Delta_{jn})^k] \quad (10)$$

CAPÍTULO IV: ALGORITMO DE CONTACTO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

con el objeto de incluir los cambios relativos de desplazamiento.

El procedimiento prosigue con la aplicación de una nueva carga residual hasta que no se detecten mas interpenetraciones o todos los pares de nodos candidatos estén cerrados.

Antes de realizar el nuevo incremento de desplazamiento, se debe actualizar la matriz de rigidez, como se indicará más adelante en este mismo trabajo mediante la subrutina llamada **MODIPER**, para que se refleje la activación de nuevas restricciones de contacto en dicha matriz.

Una vez que se haya completado el ciclo de contacto, se pueden calcular los esfuerzos a partir de los desplazamientos acumulados.

Este procedimiento consolida los grados de libertad recientemente unidos, asociados con los nodos **I, J** y únicamente se puede aplicar a problemas que no presenten movimiento tangencial relativo.

CAPÍTULO IV: ALGORITMO DE CONTACTO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

4.2 MODIFICACIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

4.2.1 INTRODUCCIÓN

La siguiente sección tiene como finalidad explicar el método utilizado en este trabajo para reflejar, en la matriz de rigidez, los cambios que se producen en la zona de contacto como consecuencia de la variación de la misma. Este método es el mismo utilizado por Noya y Rabinovich [8] los cuales lo basaron en las publicaciones de Law [6, 7].

Inicialmente la zona de contacto está compuesta por al menos un nodo, el cual es común a los dos cuerpos que van a entrar en contacto al aplicarse (ver figura 8).

El cuerpo al que se le aplica la carga se le conoce como “cuerpo contactor” y el que está en contacto con éste se le conoce como “cuerpo contactado”.

Como efecto de la aplicación de la carga, la zona inicial de contacto se va a ir ampliando progresivamente, hasta alcanzar la región final de contacto. Para reflejar este fenómeno por medio del M.E.F se discretiza la zona de contacto de tal manera que a cada nodo del cuerpo contactor le corresponda un nodo del cuerpo contactado por lo que de esta forma queda definida la región de contacto por medio de los pares de nodos.

Una vez aplicada la carga, los diferentes pares de nodos se van a ir consolidando a medida que va aumentando la zona de contacto, es decir, luego de varias iteraciones, los dos nodos que forman un par se

CAPÍTULO IV: ALGORITMO DE CONTACTO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

van a unir para formar un solo nodo, común a los dos cuerpos. Este procedimiento se repite hasta que todos los pares de nodos estén consolidados, o que dependiendo de la carga aplicada, no se puedan consolidar mas pares.

Para reflejar la consolidación de los nodos en la matriz de rigidez se diseñó la subrutina **MODIPER**.

Dentro de esta rutina, $I_{m,j}$ representa el vector que contiene los n pares de nodos de la zona de contacto. Tomando j el valor 1 si el nodo pertenece al cuerpo contactor o 2 si pertenece al cuerpo contactado.

Dado que el programa presentado en este trabajo emplea un sistema bidimensional (x, y) , se puede deducir que cada nodo perteneciente al modelo tendrá dos grados de libertad (uno en cada dirección).

Suponiendo que los nodos \mathbf{a} y \mathbf{b} , que componen el par de nodos arbitrario \mathbf{m} , van a entrar en contacto, es decir, se van a consolidar, se pueden identificar, haciendo uso del algoritmo de resolución del M.E.F, los grados de libertad (G.D.L) o números de las ecuaciones correspondientes a ambos nodos, siendo \mathbf{ax} , \mathbf{ay} , \mathbf{bx} y \mathbf{by} los G.D.L en la dirección x y y de los nodos \mathbf{a} y \mathbf{b} , respectivamente.

Identificados estos grados de libertad, la rutina MODIPER considerará primero el grado libertad en la dirección x de ambos nodos ya consolidados y después el grado de libertad en la dirección y para realizar las modificaciones en la matriz de rigidez global. Por la tanto podemos decir que la rutina trabaja con un grado de libertad a la vez y cabe destacar que es indiferente el orden de trabajo con los G.D.L.

CAPÍTULO IV: ALGORITMO DE CONTACTO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

La síntesis del proceso para realizar estas modificaciones es:

- Se toman los términos de la matriz global que estén relacionados con el grado de libertad ax (ay), es decir, los términos que estén ubicados en la fila o columna que corresponda a ax (ay) y se reubican en posiciones análogas, relacionadas ahora con el grado de libertad bx (by).
- Se coloca en la posición de la diagonal ax (ay) un "1" y en la posición correspondiente a la fila ax (ay) de la columna bx (by) se coloca un "-1".

Este último paso permite igualar el G.D.L ax (ay) con el G.D.L bx (by), para así reflejar la consolidación de ambos nodos.

4.2.2 FUNCIONAMIENTO DE MODIPER

Para hacer más comprensible el funcionamiento de esta rutina se presenta a continuación una breve descripción de las operaciones que realiza:

1. CÁLCULO DE VARIABLES. Se calculan las variables relacionadas con la estructura del perfil de la matriz, tales como el tamaño de las columnas, diferencia entre los G.D.L, etc., que servirán para encontrar determinadas posiciones dentro de la matriz global (ver figura 10).
2. SELECCIÓN DEL GRADO DE LIBERTAD MAYOR. Debido a que la rutina MODIPER está diseñada para realizar modificaciones desde el G.D.L menor hacia el mayor, primero se verifica cual es el G.D.L menor y se asigna al G.D.L **A**, mientras que el G.D.L mayor se le asigna al G.D.L **B**.

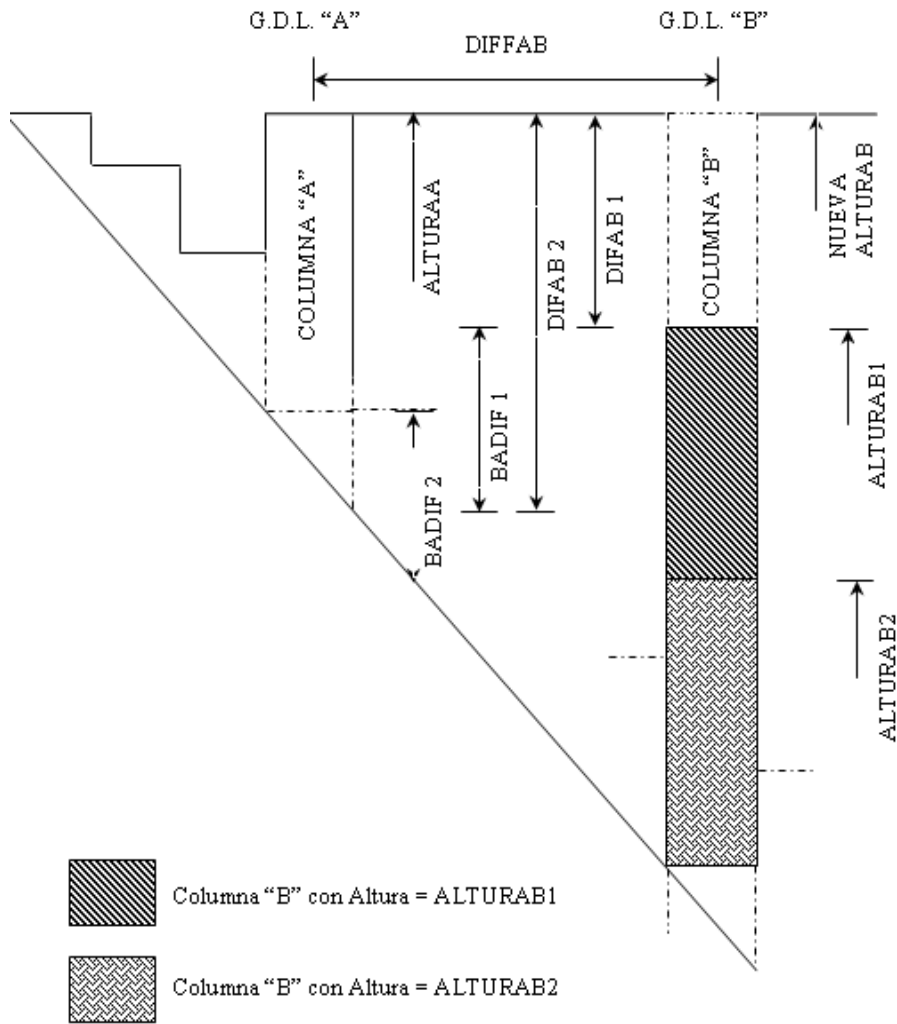
CAPÍTULO IV: ALGORITMO DE CONTACTO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

3. ALMACENAMIENTO DE LA COLUMNA **A**. Todos los términos de la columna **A**, la cual está relacionada con el G.D.L **A**, se almacenan en un vector llamado *AKA*.
4. ALMACENAMIENTO DE LA COLUMNA **B**. Se almacenan en un vector llamado *AKB*, todos los términos que forman la columna **B**, la cual está relacionada con el G.D.L **B**.
5. REDUCCIÓN DE LA COLUMNA **A**. Se reduce la columna **A** a un solo término, el de la diagonal que será puesto en "1".
6. ALMACENAMIENTO DE LA FILA **A**. Se almacenan los términos de la fila **A** en un vector llamado *FKA*. Los términos de la fila donde no existan valores, porque el perfil lo define así, se almacenarán con un valor igual a cero. Al mismo tiempo se anulan los términos de la fila **A**.
7. VERIFICACIÓN DE LA COLUMNA **B**. En esta sección se comprueba si el término superior de la columna **B**, en la matriz global, se encuentra por debajo o por arriba del término superior que tenía la columna **A** antes de ser modificada, con la finalidad de conocer si la columna **B** cambiará de tamaño o no. En el caso que la columna **B** aumente de tamaño es necesario reubicar los términos los términos posteriores a la columna **B** antes de reubicar los términos de ésta. En caso contrario, se reubicarán primero los términos que conforman la columna **B** y después los términos posteriores a ésta. Esto se hace con la finalidad de no perder ningún término en el proceso de reubicación, además de hacer eficiente la rutina. También se determina en esta sección la nueva longitud de la columna **B**, en el caso de que esta cambie.

CAPÍTULO IV: ALGORITMO DE CONTACTO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos



Para $ALTURAB1 - BADIF > 0$

Para $ALTURAB2 - BADIF < 0$

$DIFFAB = B - A$

$DIFAB = ALTURAA + DIFFAB - ALTURAB$

$BADIF = ALTURAA - DIFAB - 1$

$REST = ALTURAA - 1$

Figura 11. Variables principales de la rutina MODIPER.

CAPÍTULO IV: ALGORITMO DE CONTACTO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

8. REUBICACIÓN DE LOS TÉRMINOS SITUADOS ENTRE LAS COLUMNAS **A** Y **B**. Una vez reducida la columna **A** se pueden reubicar los términos que se encuentran entre las columnas **A** y **B**. Éstos se reubicarán en orden de menor a mayor para evitar la pérdida de algún término. La operación depende de la cantidad de términos eliminados de la columna **A**.
9. REUBICACIÓN DE LOS TÉRMINOS DE LA COLUMNA **B** SI ÉSTA NO CAMBIA DE TAMAÑO. En primer lugar se reubican todos los términos de la columna **B**, de igual forma que en el paso anterior. Luego se reubican en las posiciones correspondientes los términos de la columna **A**, que fue almacenada anteriormente.
10. REUBICACIÓN DE LOS TÉRMINOS POSTERIORES A LA COLUMNA **B** SI ÉSTA CAMBIA DE TAMAÑO. En función del tamaño de la columna **B** y de las variables calculadas inicialmente, se determina el nuevo tamaño del vector de términos de coeficientes de la matriz de rigidez. A continuación se reubican los términos posteriores a la columna **B**, esta vez de mayor a menor.
11. REUBICACIÓN DE LOS TÉRMINOS DE LA COLUMNA **B** CUANDO ÉSTA CAMBIA DE TAMAÑO Y LA VARIABLE *BADIF* ES MAYOR QUE 0. Estos cambios se efectuarán cuando la altura de la columna **B**, antes de ser modificada, menos la diferencia entre los G.D.L **A** y **B**, menos 1 sea un

CAPÍTULO IV: ALGORITMO DE CONTACTO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

valor mayor que cero. Este proceso está ilustrado en la figura 11.

12. REUBICACIÓN DE LOS TÉRMINOS DE LA COLUMNA **B**, CUANDO ÉSTA CAMBIA DE TAMAÑO Y LA VARIABLE *BADIF* ES MENOR O IGUAL QUE 0. Éstos cambios se efectuarán cuando la altura de la columna **B**, antes de ser modificada, menos la diferencia entre los G.D.L **A** y **B**, menos 1 sea un valor menor o igual que cero. Este procedimiento está ilustrado en la figura 12.
13. REUBICACIÓN DE LOS TERMINOS POSTERIORES A LA COLUMNA **B** SI *BADIF* ES MAYOR QUE 0. En este caso el vector de términos disminuye de tamaño. Los términos posteriores a la columna **B** se reubican en forma similar a como se hizo con los términos ubicados entre las columnas **A** y **B**.
14. REUBICACIÓN DE LOS TÉRMINOS DE LA FILA **A**. Cada término diferente de cero que se encuentre en la fila **A** representa una relación entre el G.D.L **A** y el G.D.L correspondiente al término. Estos términos que anteriormente estaban relacionados con el G.D.L **A**, ahora deben añadirse a una posición análoga relacionada con el G.D.L **B**.

Cada vez que se reubiquen los términos de la columna **B**, independientemente del caso, se coloca en la fila **A**, a la altura de la columna **B**, el valor "-1". Esto se hace con la finalidad de igualar los G.D.L **A** y **B**.

CAPÍTULO IV: ALGORITMO DE CONTACTO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

Es importante señalar que la rutina MODIPER trabaja principalmente con dos variables, el vector MatGlo de términos de coeficientes de rigidez y el vector IDIAG, que define el perfil de la matriz de rigidez, los cuales serán modificados por la rutina.

Mientras se conserve este sistema de almacenamiento, la rutina MODIPER estará en capacidad de trabajar con problemas en una, dos o tres dimensiones, debido a que, como se explicó anteriormente, trabaja con un grado de libertad a la vez.

En la figura 13 se ilustra una matriz de rigidez cuadrada de ocho ecuaciones. En ella se simulan las modificaciones que realiza MODIPER en base a los G.D.L A y B, que en este caso son las columnas 4 y 7, respectivamente. En la figura se muestra, tanto el perfil inicial, como el que resulta después de que se hayan realizado las modificaciones.

Se puede apreciar claramente como MODIPER trabaja únicamente con el triángulo superior de la matriz ya que la matriz de rigidez es una matriz simétrica.

Cabe remarcar que los nodos que se encuentren en la zona potencial de contacto deberán estar libres de restricciones.

CAPÍTULO IV: ALGORITMO DE CONTACTO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

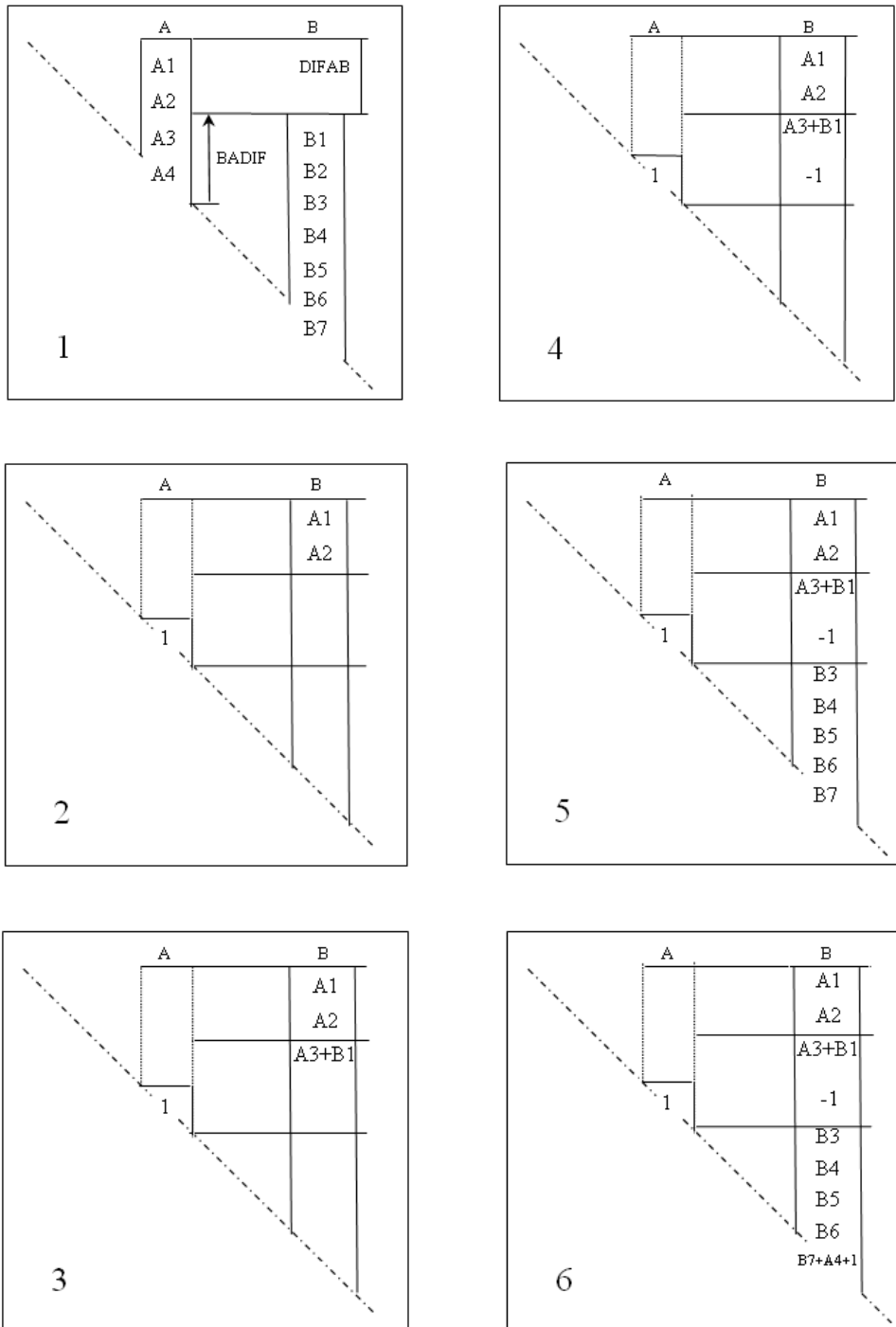


Figura 12. Modificaciones realizadas para el caso $BADIF > 0$.

CAPÍTULO IV: ALGORITMO DE CONTACTO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

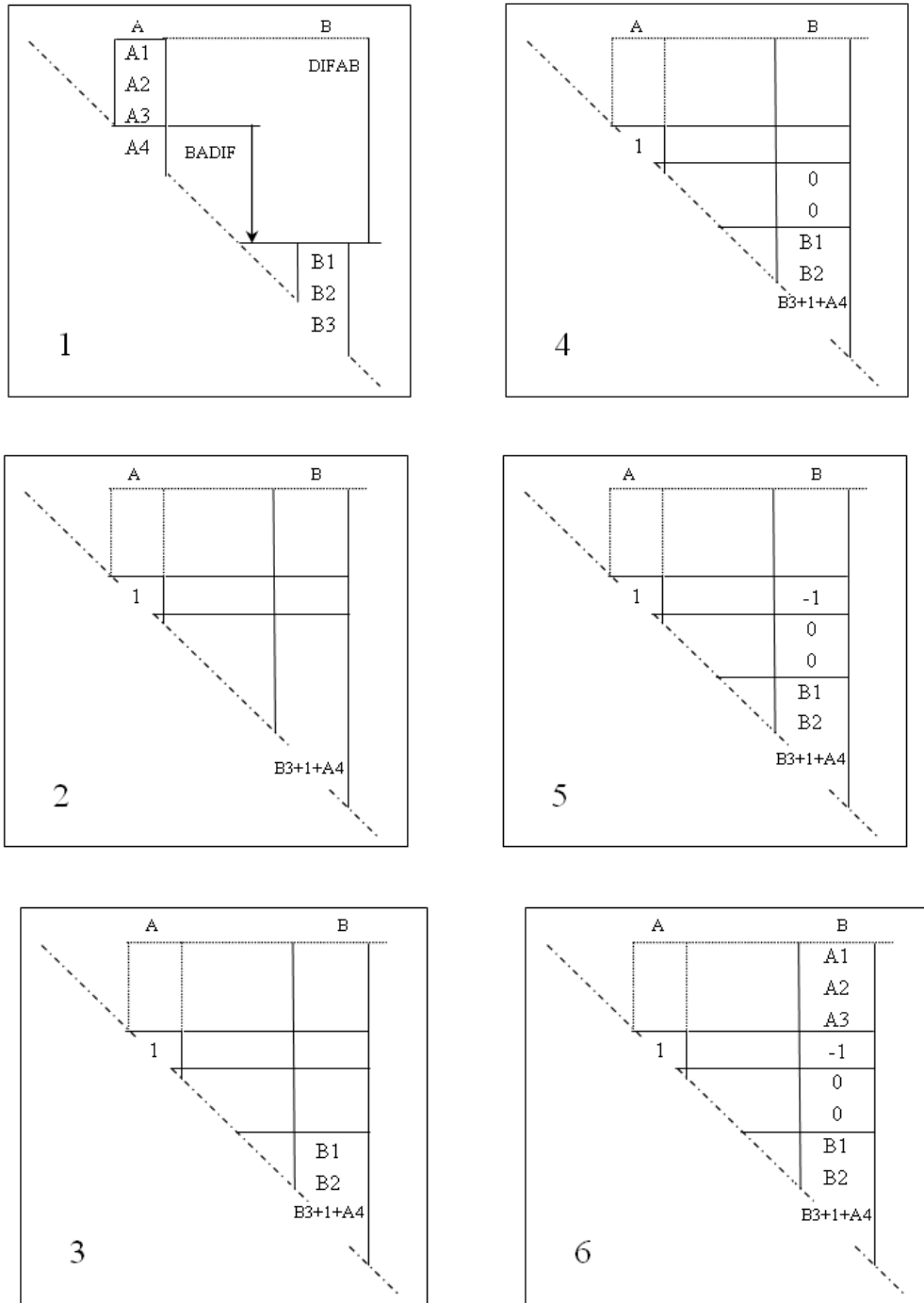


Figura 13. Modificaciones realizadas para el caso $BADIF \leq 0$.

CAPÍTULO IV: ALGORITMO DE CONTACTO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

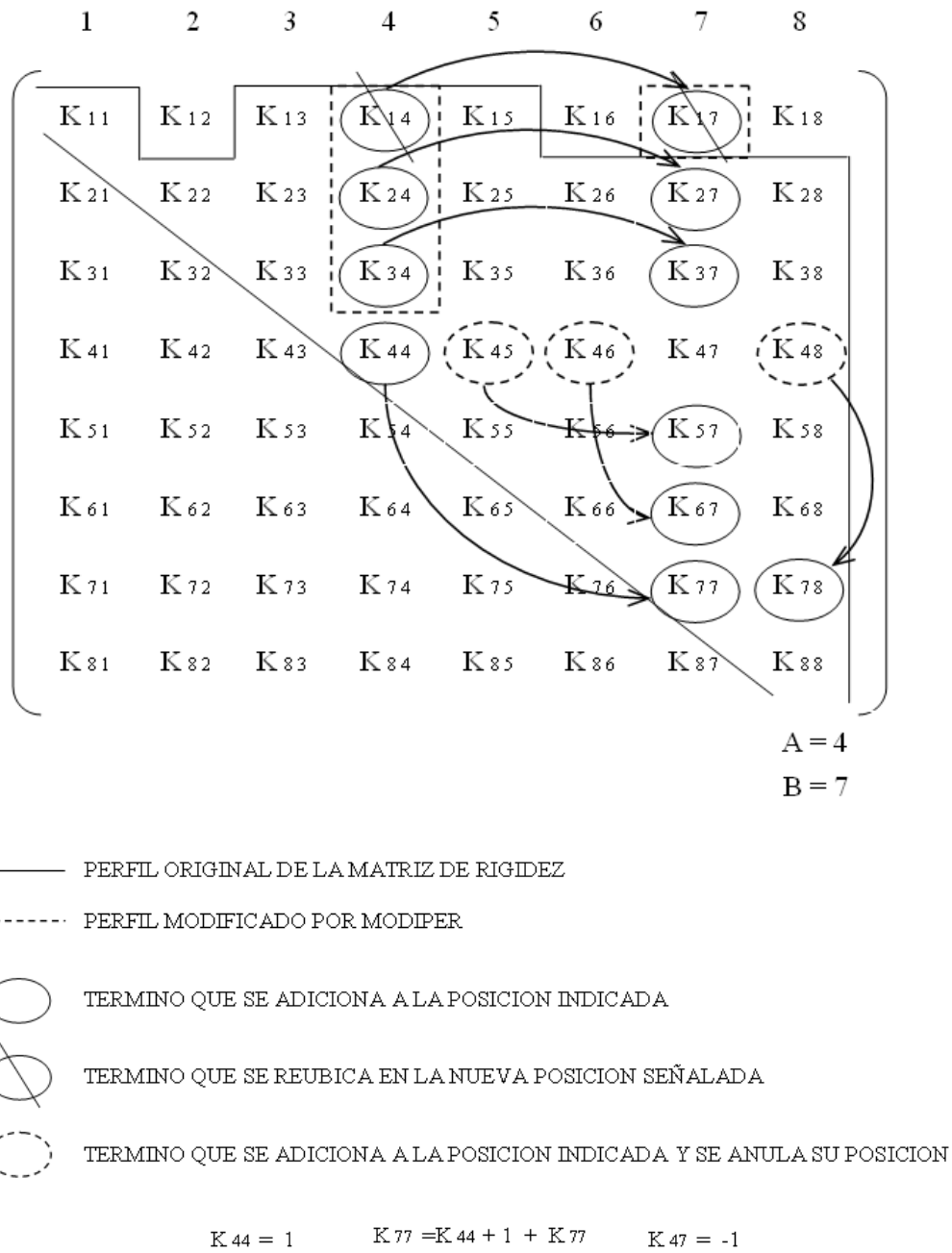


Figura 14. Ejemplo de la modificación de la matriz de rigidez.

CAPÍTULO IV: ALGORITMO DE CONTACTO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

4.3 FUNCIONAMIENTO DE TRANSFOR

Esta subrutina se encuentra dentro de CONTACTO y es la encargada de calcular los desplazamientos relativos entre los pares de nodos de la zona potencial de contacto para determinar si estos entraron en contacto o no. Esta subrutina funciona mediante los siguientes pasos para obtener el vector de la diferencia de desplazamientos relativos entre el par de nodos candidatos:

1. Mediante las componentes de desplazamiento x y y de uno de los nodos del par se calcula el desplazamiento resultante \mathbf{B} y su ángulo β de la siguiente manera:

$$\bar{B} = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \quad (11)$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{B_y}{B_x}\right) \quad (12)$$

2. Ahora dependiendo del cuadrante en donde se encuentre el desplazamiento resultante la subrutina corregirá el ángulo β del desplazamiento. Si el desplazamiento se encuentra en el cuarto cuadrante el ángulo quedará como:

$$\beta' = 2\pi - \beta \quad (13)$$

Si se encuentra en el tercero:

$$\beta' = \pi + \beta \quad (14)$$

Y si el desplazamiento está situado en el segundo cuadrante el ángulo resultante será:

$$\beta' = \pi - \beta \quad (15)$$

CAPÍTULO IV: ALGORITMO DE CONTACTO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

3. Ahora con las distancias Δx y Δy entre los dos nodos la subrutina calcula el ángulo α mediante la siguiente ecuación:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \quad (16)$$

Este ángulo determina la diferencia entre el sistema de coordenadas generales y el sistema de coordenadas locales.

4. Por último se proyecta el vector B en el sistema de coordenadas particulares de la siguiente manera:

$$B' = \bar{B} * \cos(\alpha - \beta) \quad (17)$$

Teniendo ya los dos vectores de desplazamiento de cada nodo del par se restan para obtener el vector de desplazamientos relativos **REL** con la siguiente ecuación:

$$REL = B'_{uv} - B'_{vu} \quad (18)$$

CAPÍTULO IV: ALGORITMO DE CONTACTO

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

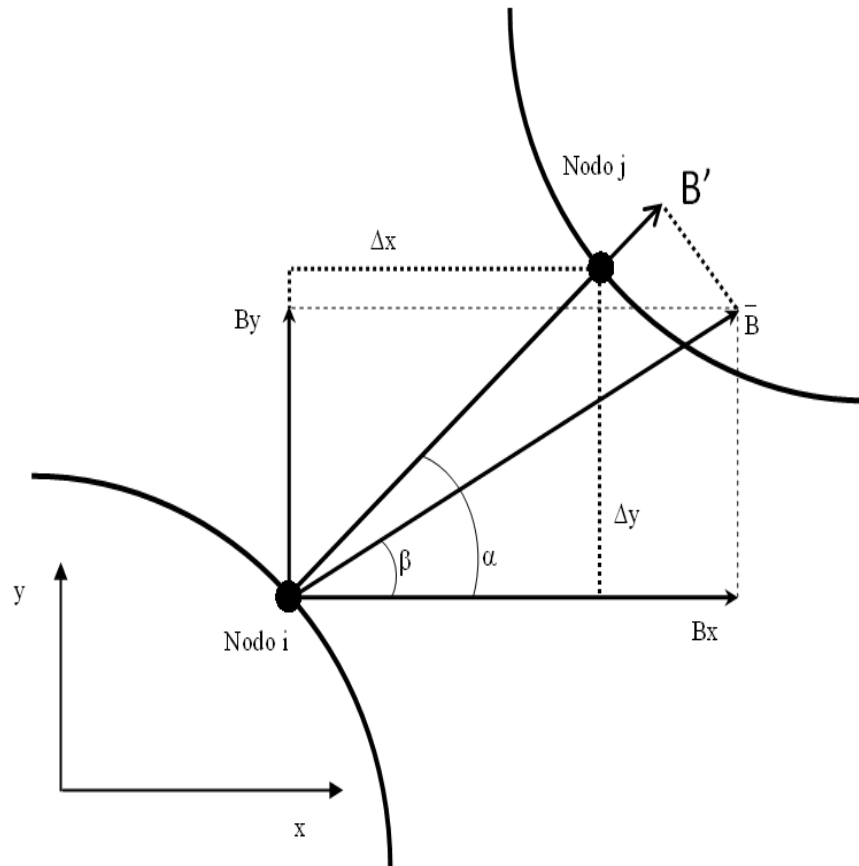


Figura 15. Representación gráfica de la subrutina TRANSFOR.

CAPÍTULO V: ANÁLISIS DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

5.1 INTRODUCCIÓN

El programa MEFCON permite al usuario obtener las deformaciones y los esfuerzos en cuerpos de geometría compleja, en cualquier parte del cuerpo, así como la extensión de la zona de contacto, únicamente durante el fenómeno de contacto.

5.2 PRINCIPALES RUTINAS EMPLEADAS EN MEFCON.

El programa está compuesto por una rutina principal llamada "MAIN" y una serie de subrutinas que permiten la ejecución del mismo. Durante la ejecución del programa principal se hacen llamadas a dichas subrutinas, algunas de las cuales, a su vez, llaman a otras que cumplen con una función específica dentro de la misma para así cumplir con sus objetivos previstos. A continuación se nombran y explican brevemente algunas de las subrutinas más importantes del programa:

RUTINA MAIN (PRINCIPAL):

Esta rutina tiene como función principal controlar las tareas a realizar por el programa desde el inicio de su ejecución hasta la obtención de los resultados. Es decir es la que inicia el programa y la que lo finaliza. Además de esto, realiza otros tipos de tareas entre las cuales una de las más importantes es la de asignar el espacio total de memoria que puede ser utilizado por arreglos principales de trabajo. El tamaño asignado a dicho espacio depende de la memoria directa disponible. En nuestro caso el espacio total de memoria es controlado por la variable "max" cuyo valor equivale a 13210001 bytes, la cual constituye una cifra adaptable a problemas de tamaño relativamente.

CAPÍTULO V: ANÁLISIS DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

SUBROUTINA PERFELASLIN:

Durante su ejecución se establece el número de ecuaciones del problema y asigna el número de ecuación correspondiente a cada grado de libertad no restringido para luego llamar a otra subrutina llamada **CALCIDIAG** la cual calcula los indicadores de la diagonal quedando así formado el perfil del sistema de ecuaciones.

SUBROUTINA ENSAME:

La tarea realizada por esta subrutina depende del valor enviado durante la ejecución del programa a una variable entera denominada "rig".

Si el valor enviado es "true", definido como 1, se encarga de determinar los coeficientes de la matriz de rigidez correspondiente a cada elemento y ensamblarlos en la matriz de rigidez global.

Para determinar los coeficientes de la matriz de rigidez del elemento, la rutina llama a una serie de subrutinas, cada una de las cuales cumple con una determinada función para el cálculo de dichos coeficientes. Las subrutinas llamadas y la función que cumplen son:

PROPMAT: Se encarga de calcular las constantes elásticas del material y formar la matriz D, a partir de los valores de los módulos de Young y Poison, referente a las relaciones constitutivas del material para los casos de estado plano de esfuerzos y estado plano de esfuerzos.

MATRIZE: Esta subrutina asigna los datos correspondientes al elemento como son: propiedades constitutivas, coordenadas de los

CAPÍTULO V: ANÁLISIS DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

nodos que lo conforman y el número de ecuación correspondiente a cada grado de libertad de los mismos.

ELEME: Esta subrutina calcula los coeficientes de la matriz de rigidez del elemento. Para el cálculo de estos coeficientes se siguen una serie de pasos que son realizados por otras subrutinas llamadas por esta. Dichas subrutinas y los pasos que realizan son, en este orden:

RIGI2D: Forma las funciones de interpolación y sus derivadas para el triángulo de tres nodos, el Jacobiano de la transformación, el determinante del Jacobiano y transforma las derivadas naturales en derivadas cartesianas. Todas estas tareas son realizadas a través de una llamada a la rutina **DFIN**. Por último calcula los coeficientes de la matriz de rigidez del elemento (arreglo S).

MONRIGLIN: Esta subrutina se encarga de ensamblar la matriz de rigidez del elemento en la matriz de rigidez global.

Si por el contrario el valor asignado a la variable “rig” es “false”, definido como 0, la rutina procederá al cálculo de los esfuerzos y deformaciones de contacto en los elementos que sean parte de la zona de contacto. La ejecución de esta rutina es similar a la descrita anteriormente excepto que para este caso la rutina ELEME no realiza la llamada a RIGI2D para llamar en su lugar, a la subrutina **ESFUER2D**, la cual a su vez llama también a la subrutina DFIN que cumple la misma función descrita anteriormente, para el cálculo de las deformaciones a partir de las cuales se obtienen los esfuerzos.

SUBROUTINA CONTACTO

Esta subrutina es la encargada de resolver el algoritmo de contacto que se describió anteriormente. Para esto se siguen una serie de pasos que son ejecutados por otras subrutinas llamadas por esta. Estos pasos se realizan en el siguiente orden:

1. Inicializa las variables.
2. Llama a la subrutina **GAPS** que es la que se encarga de calcular la separación inicial entre los dos nodos que forman el par.
3. Llama a la subrutina **FACT** la cual reduce la matriz de rigidez global a forma triangular superior mediante eliminación de Gauss.
4. Llama a la subrutina **SOLV** que es la encargada de resolver el sistema de ecuaciones, es decir, aquí se obtiene el vector de desplazamientos (U).
5. Selecciona la máxima interpenetración.
6. Hace una llamada a **TRANSFOR**, esta subrutina se ocupa de transformar las coordenadas generales (x, y) a las coordenadas particulares de la pareja de nodos (t, n), calculando además, el vector de desplazamientos relativos REL.
7. Realiza el cómputo de la interpenetración máxima.
8. Actualiza el par de nodos candidato a entrar en contacto.
9. Verifica si no ocurrió contacto.
10. Calcula el factor de escalamiento "S".
11. Actualiza la separación de cada par de nodos candidatos.

CAPÍTULO V: ANÁLISIS DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

12. Actualiza los desplazamientos.
13. Almacena las nuevas posiciones de los nodos de izona con el fin de poder graficar el perfil de las superficies.
14. Si la carga residual anterior fue justo lo suficiente para causar el contacto entre los pares de nodos más cercanos se producirá un mensaje: “El último incremento de carga fue justo lo suficiente para causar contacto”.
15. Realiza el cómputo de la carga residual.
16. Escribe las cargas actualizadas.
17. Llama la subrutina **VCARELAS** que se encarga de ensamblar el vector de cargas.
18. Realiza una llamada a la subrutina **MODIPER** la cual se encarga de actualizar la matriz de rigidez debido a las nuevas condiciones de borde que se producen cuando un nuevo par de nodos entra en contacto. Es una de las rutinas más importantes en el programa ya que es la que pone en evidencia la no linealidad en las condiciones de borde durante el fenómeno de contacto. En el capítulo “Algoritmo de Contacto” se explicó con detalle su funcionamiento.
19. Se inicia el nuevo incremento. Se producirá una parada si todos los pares de nodos candidatos entrasen en contacto y en este caso la zona potencial de contacto deberá ser más extensa.
20. Si $izonarest$ es igual a nnz sólo ocurre contacto en la zona inicial, el programa escribe un mensaje y se produce una parada. Si $izonarest$ no es igual a nnz entonces el programa

CAPÍTULO V: ANÁLISIS DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

escribe los pares de nodos que entraron en contacto y retorna
al MAIN para calcular los esfuerzos de contacto.

CAPÍTULO V: ANÁLISIS DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

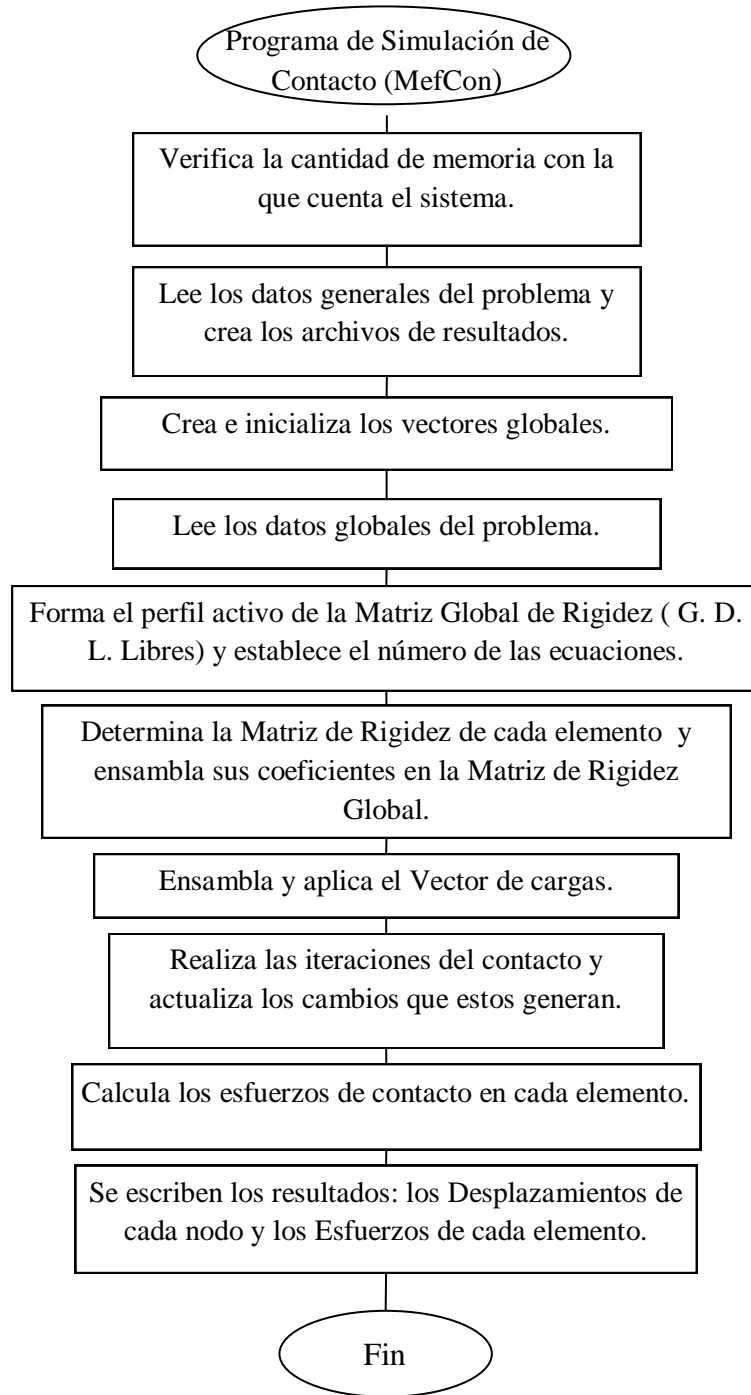


Figura 16. Macrodiagrama del Programa MEFCON

CAPÍTULO V: ANÁLISIS DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

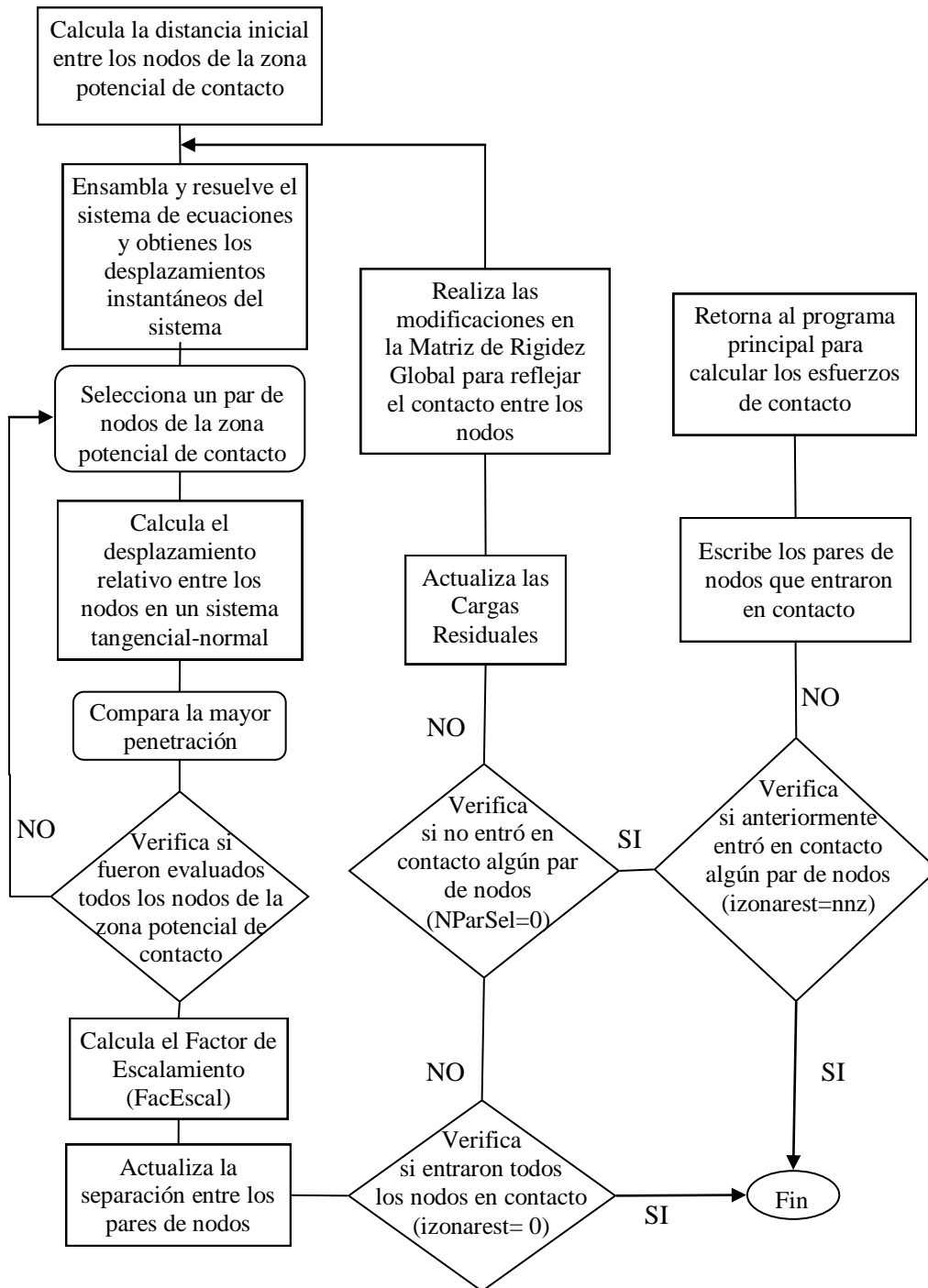


Figura 17. Diagrama de flujo de la rutina CONTACTO

CAPÍTULO V: ANÁLISIS DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

5.3 ALCANCES Y LIMITACIONES DEL PROGRAMA.

A través del programa MEFCON el usuario podrá obtener la siguiente información:

Calcular los esfuerzos y desplazamientos a lo largo de todo el cuerpo en aquellos casos en que dos cuerpos se encuentren en contacto, uno con otro.

Aunque tiene una amplia aplicación, el programa MEFCON tiene ciertas limitaciones las cuales son:

- a) Fricción: Debido al hecho de que el contacto se debe realizar entre nodo y nodo, en la zona de contacto, el desplazamiento entre los cuerpos se limita a aquel donde no ocurra desplazamiento tangencial entre los mismos. Este hecho restringe el uso del programa a situaciones donde no exista fricción ni deslizamiento o éstas sean despreciables.
- b) Zona de Contacto: El programa trabaja con una única zona de contacto. Esto se hizo con la finalidad de simplificar el procedimiento.
- c) Dimensiones: El programa fue desarrollado para tratar modelos de cuerpos bidimensionales.
- d) Elementos: Los elementos que se utilizan son los triangulares de tres nodos.
- e) Propiedades de los materiales: Las propiedades de los materiales, como son el módulo de Young y el coeficiente de

CAPÍTULO V: ANÁLISIS DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

Poisson, no dependen de las coordenadas espaciales ni del tiempo.

- f) Linealidad: Las relaciones esfuerzo-deformación son del tipo lineal.

5.4 SISTEMA DE UNIDADES.

Con el presente programa se puede utilizar cualquier sistema de unidades, siempre y cuando se mantenga una coherencia en el sistema que se escoja para todas las medidas. En el caso de este trabajo se utilizó el sistema de unidades internacional c.g.s.

CAPÍTULO VI: VALIDACIÓN DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

6.1 INTRODUCCIÓN.

Para comprobar el buen funcionamiento del programa se resolvió un problema de contacto entre un cilindro y una superficie plana como el que se muestra en la figura 18. Este problema constituye un caso muy frecuente en la Ingeniería y se puede conocer su comportamiento mediante las ecuaciones de Esfuerzos de Contacto de Hertz expuestas anteriormente en la sección 2.2.1 del presente trabajo. Se plantearon varios casos del mismo problema de contacto con los cuales se realizaron diferentes experimentos numéricos.

Debido a la simetría del modelo, no fue necesario discretizar todo el modelo, ya que con las áreas delimitadas en las figuras 19 y 20 se considera que es suficiente para obtener una aproximación. Para los experimentos 1,2 y 3 se discretizó únicamente la zona señalada en la figura 19 mientras que para el experimento número 4 se utilizó la discretización de la zona mostrada en la figura 22, la cual vendría siendo la cuarta parte del cilindro y la mitad del plano que se están estudiando. Se consideró como punto inicial de contacto entre el cilindro y la superficie plana, el nodo que se encuentra más alejado del centro del cilindro en la dirección de la carga.

En base a los pares de nodos que hicieron contacto se obtuvo la extensión de contacto b para cada iteración ya que se conoce la distancia entre dichos nodos. Esta longitud obtenida se compara con la predicha por las ecuaciones de Hertz en la Tablas 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4 y en las Gráficas 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4 se muestra la tendencia del programa en comparación con la curva de Hertz.

CAPÍTULO VI: VALIDACIÓN DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

El programa arrojó los resultados de esfuerzos en ciertos elementos seleccionados tanto del cilindro como de la superficie, concretamente en los elementos más próximos al punto inicial de contacto. Con el fin de realizar comparaciones se calculó el valor de Presión Máxima para cada carga aplicada, el cual representa el valor de σ_y en el punto inicial de contacto. Se obtuvieron así, de los archivos de resultados, los esfuerzos de compresión en los elementos 153, 154, 479 y 480 para los casos 1,2 y 3 mientras que para el caso 4 se estudiaron los elementos 1501, 1502, 1773 y 1774. Todos estos datos se tabularon en las Tablas 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4 respectivamente para cada experimento, y se calcularon sus respectivos errores. En las Gráficas 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4 se observa la tendencia de las magnitudes de los esfuerzos σ_y de los elementos mencionados contra la curva de Presión Máxima calculada mediante las ecuaciones de Hertz. En las Gráficas 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4 se visualizan los errores obtenidos en las comparaciones anteriores para cada experimento.

CAPÍTULO VI: VALIDACIÓN DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

6.2 EXPERIMENTO Nº 1.

Se simula el contacto entre un cuerpo cilíndrico y una superficie plana. Por conveniencia, se simula el cilindro como un cuerpo rígido, con un Módulo de Young bastante alto, mientras que el plano posee uno normal (el del acero) y es considerado por lo tanto un cuerpo elástico. Debido a esto, no es necesario distribuir la carga F a lo largo de la longitud del cilindro y se aplica de manera puntual en el centro del mismo como se indica en la figura 18. Dicha carga F se varía desde 0 hasta 220 KgF. La geometría y las propiedades mecánicas consideradas para los cuerpos son:

$$r = 5,001 \text{ mm}$$

$$\text{Módulo de Young (cilindro)} = E_1 = 9999999 \text{ Kgf/mm}^2$$

$$\text{Relación de Poisson (cilindro)} = \nu_1 = 0,15$$

$$\text{Módulo de Young (plano)} = E_2 = 21000 \text{ Kgf/mm}^2$$

$$\text{Relación de Poisson (plano)} = \nu_2 = 0,30$$

CAPÍTULO VI: VALIDACIÓN DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

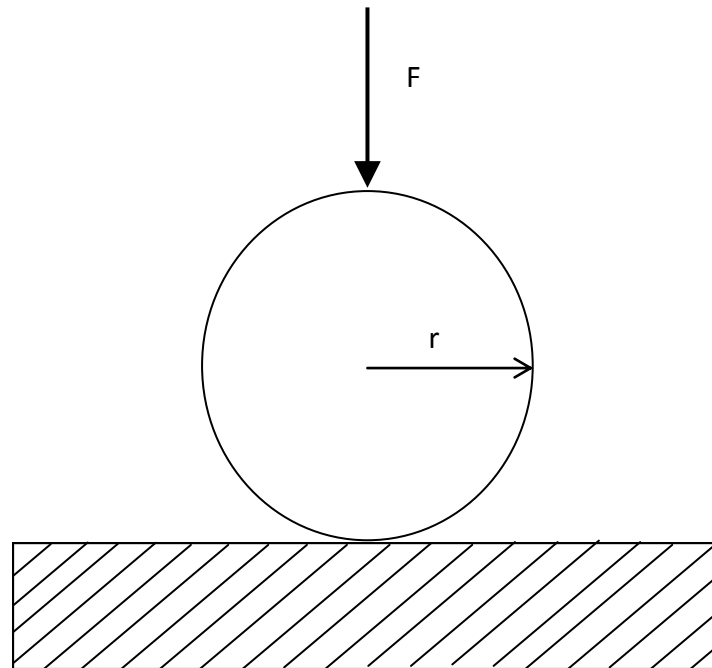


Figura 18. Geometría del problema de validación.

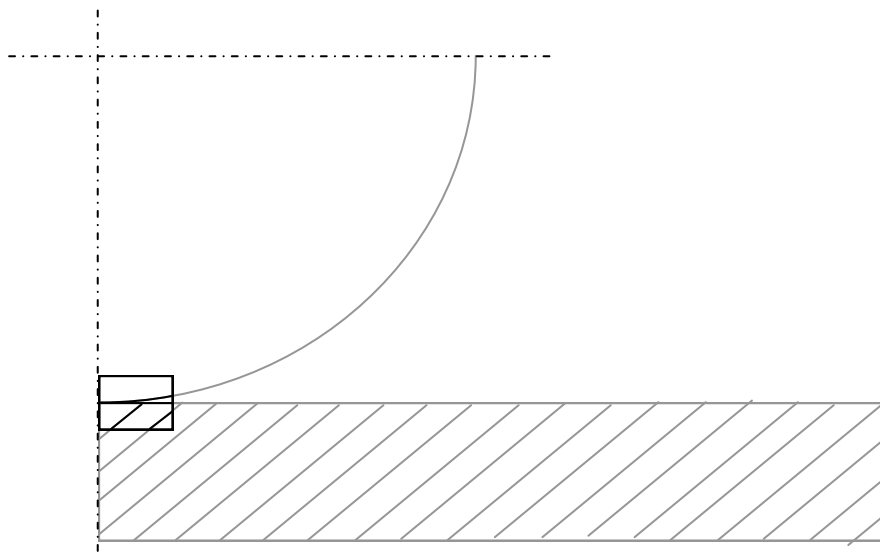


Figura 19. Zona a discretizar del modelo (experimentos 1,2 y 3).

CAPÍTULO VI: VALIDACIÓN DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

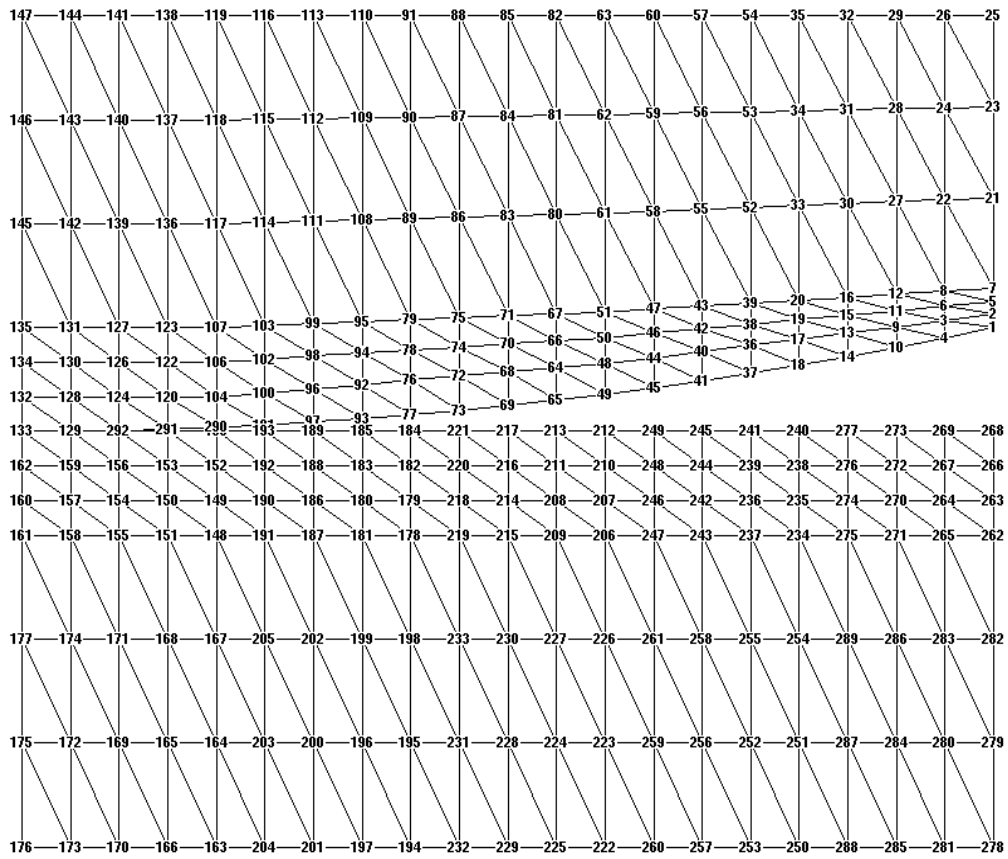


Figura 20. Discretización del modelo en la zona de contacto para los experimentos 1,2 y 3 (nodos).

CAPÍTULO VI: VALIDACIÓN DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

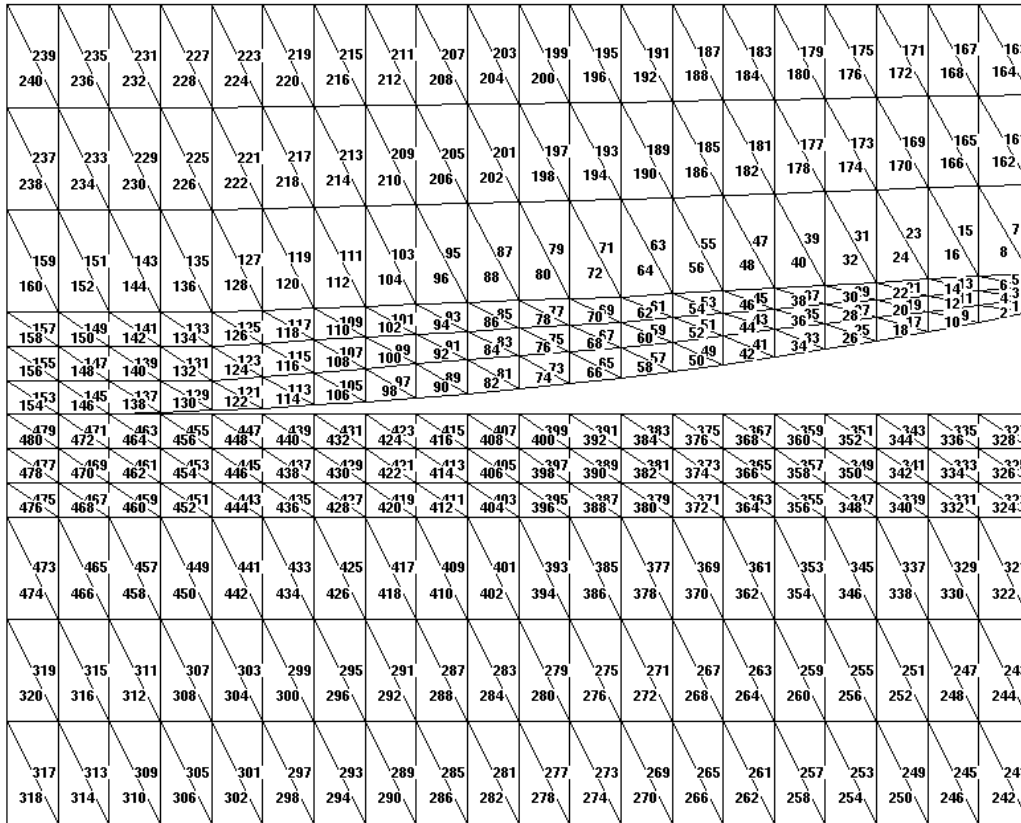


Figura 21. Discretización del modelo en la zona de contacto para los experimentos 1,2 y 3 (elementos).

CAPÍTULO VI: VALIDACIÓN DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

6.2.1 RESULTADOS EXPERIMENTO Nº 1.

Carga KgF.	b(Hertz) mm.	# de Pares de nodos Contactados	b (MefCon) mm.	ERROR %
0	0,000	0	0,000	0,00%
20	0,075	0	0,050	32,93%
40	0,105	1	0,100	5,14%
60	0,129	2	0,150	16,18%
80	0,149	2	0,150	0,61%
100	0,167	2	0,150	10,01%
120	0,183	2	0,150	17,85%
140	0,197	3	0,200	1,41%
160	0,211	3	0,200	5,14%
180	0,224	3	0,200	10,57%
200	0,236	3	0,200	15,16%
220	0,247	3	0,200	19,11%

ERROR PROMEDIO	11,17%
-----------------------	---------------

Tabla 1.1. Tabla comparativa de la extensión de contacto
(Experimento nº 1).

CAPÍTULO VI: VALIDACIÓN DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

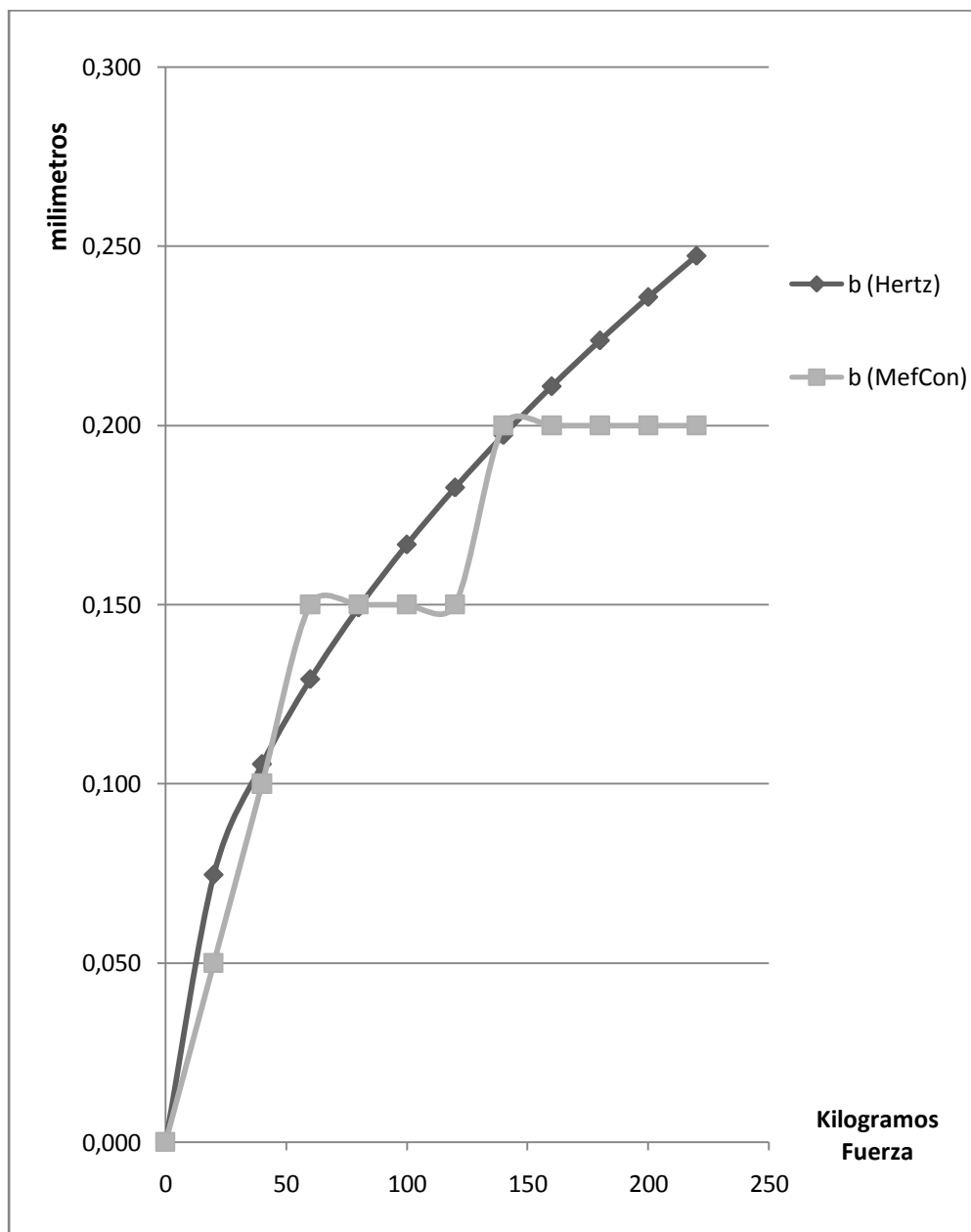


Gráfico 1.1. Longitud de contacto vs. Carga aplicada
(Experimento nº 1).

CAPÍTULO VI: VALIDACIÓN DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

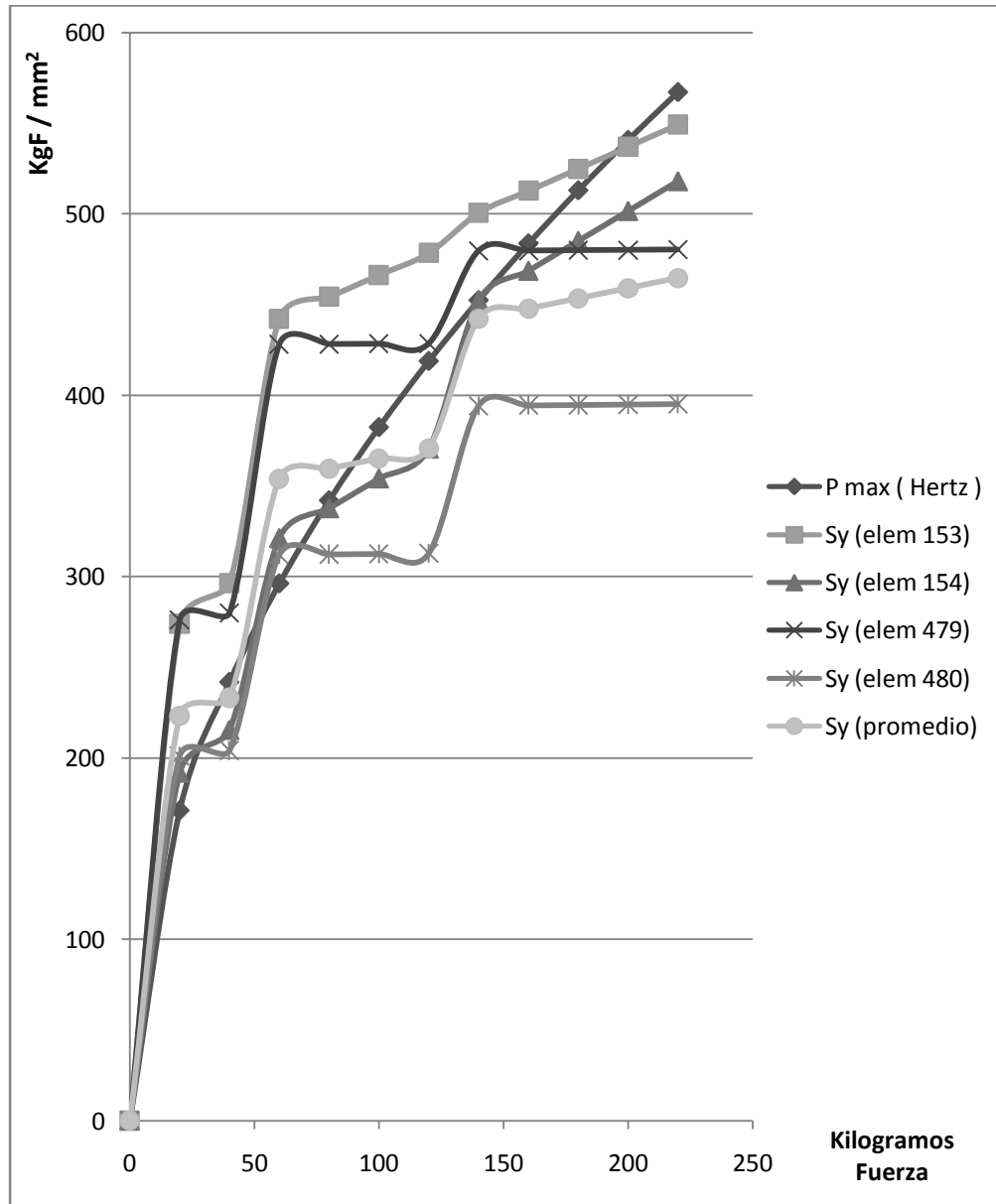
Carga KgF.	Pmax (Hertz) Kgf/mm ²	ESFUERZO EN LA DIRECCIÓN Y Kgf/mm ²				σ_y Kgf/mm ²	ERROR %
		elem 153	elem 154	elem 479	elem 480	promedio	
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
20	170,99	273,87	191,85	276,14	201,20	223,06	30,45%
40	241,82	296,37	215,44	279,96	204,12	233,17	3,57%
60	296,17	442,05	321,23	428,22	312,19	353,88	19,49%
80	341,98	454,16	337,68	428,36	312,42	359,48	5,12%
100	382,35	466,27	354,12	428,50	312,64	365,09	4,51%
120	418,84	478,38	370,57	428,64	312,86	370,69	11,50%
140	452,40	500,48	452,15	479,73	394,31	442,06	2,29%
160	483,64	512,65	468,62	479,91	394,56	447,70	7,43%
180	512,97	524,82	485,09	480,10	394,80	453,33	11,63%
200	540,72	537,00	501,55	480,29	395,05	458,96	15,12%
220	567,12	549,17	518,02	480,47	395,30	464,60	18,08%

ERROR PROMEDIO	10,77%
----------------	--------

Tabla 2.1. Tabla comparativa del esfuerzo máximo (Experimento nº 1).

CAPÍTULO VI: VALIDACIÓN DEL PROGRAMA

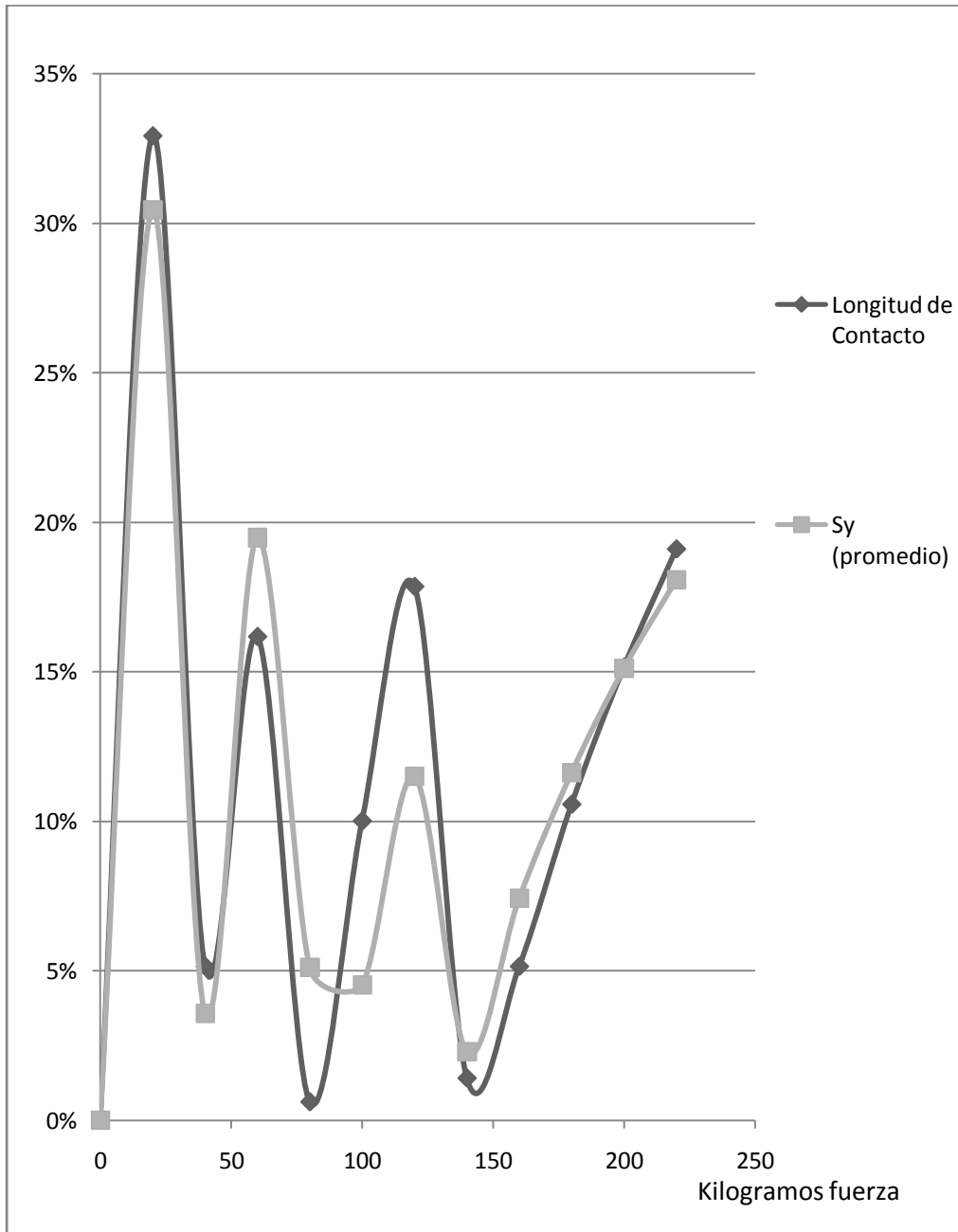
Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos



Gráfica 2.1. Esfuerzo s_y en la zona inicial de contacto vs. Carga aplicada (Experimento nº 1).

CAPÍTULO VI: VALIDACIÓN DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos



Gráfica 3.1. Error en los resultados de longitud de contacto y Esfuerzo σ_y en la zona inicial de contacto vs. Carga aplicada (Experimento nº 1).

CAPÍTULO VI: VALIDACIÓN DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

6.3 EXPERIMENTO N° 2.

Se resuelve el mismo problema que en el experimento n° 1 pero esta vez aplicando la carga de manera uniformemente distribuida a lo largo del cilindro rígido, con la finalidad de establecer comparaciones. En este caso se varía la carga desde 0 hasta 120 KgF.

CAPÍTULO VI: VALIDACIÓN DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

6.3.1 RESULTADOS EXPERIMENTO N° 2.

Carga KgF.	b(Hertz) mm.	# de Pares de nodos Contactados	b (MefCon) mm.	ERROR %
0	0,000	0	0,000	0,00%
10	0,053	0	0,050	5,14%
20	0,075	1	0,100	-34,15%
30	0,091	1	0,100	-9,53%
40	0,105	1	0,100	5,14%
50	0,118	1	0,100	15,16%
60	0,129	2	0,150	-16,18%
70	0,139	2	0,150	-7,56%
80	0,149	2	0,150	-0,61%
90	0,158	2	0,150	5,14%
100	0,167	2	0,150	10,01%
110	0,175	2	0,150	14,20%
120	0,183	2	0,150	17,85%

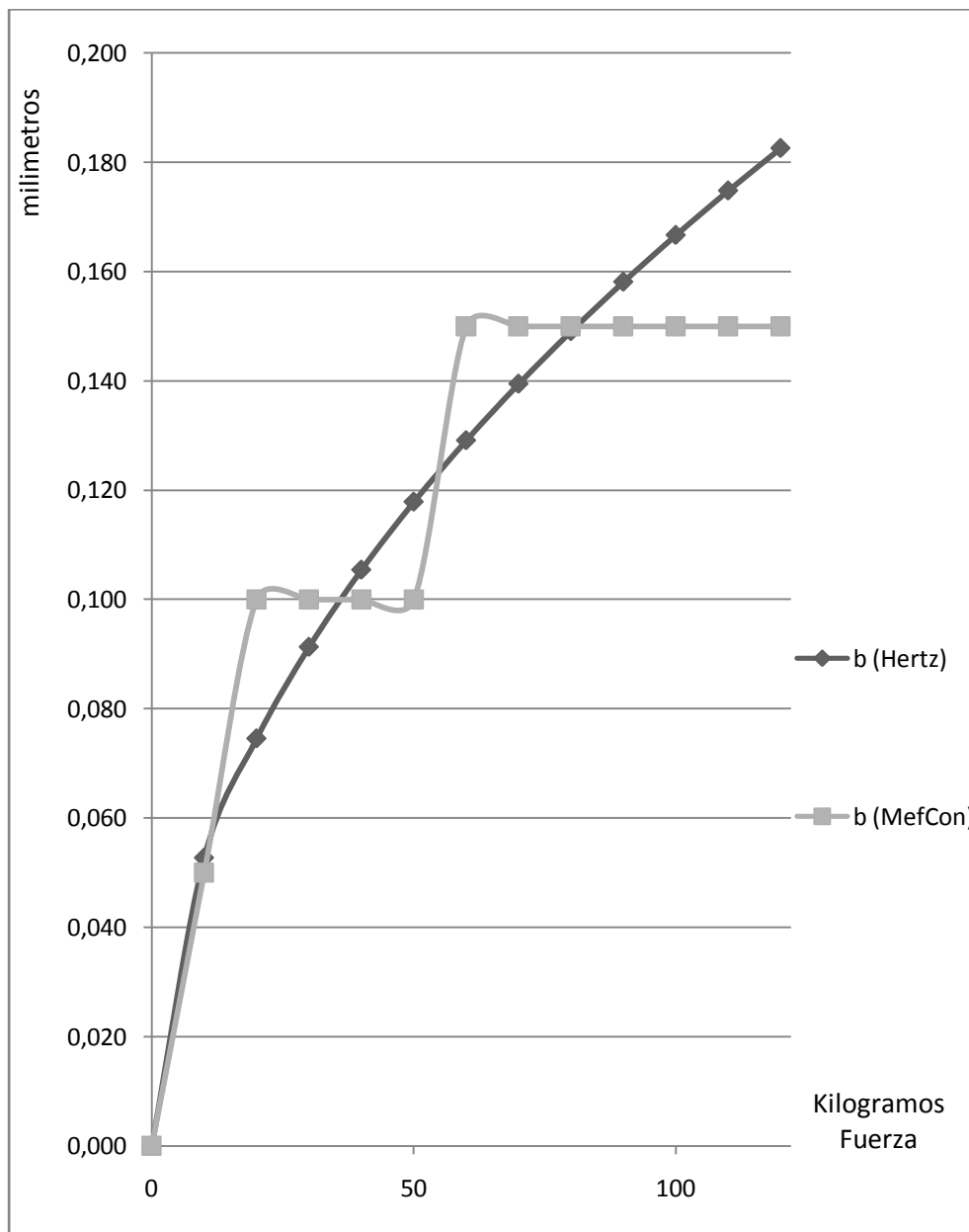
ERROR PROMEDIO	10,82%
-----------------------	---------------

Tabla 1.2. Tabla Comparativa de la extensión de contacto

(Experimento n° 2).

CAPÍTULO VI: VALIDACIÓN DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos



Gráfica1.2. Longitud de contacto vs. Carga aplicada (Experimento nº 2).

CAPÍTULO VI: VALIDACIÓN DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

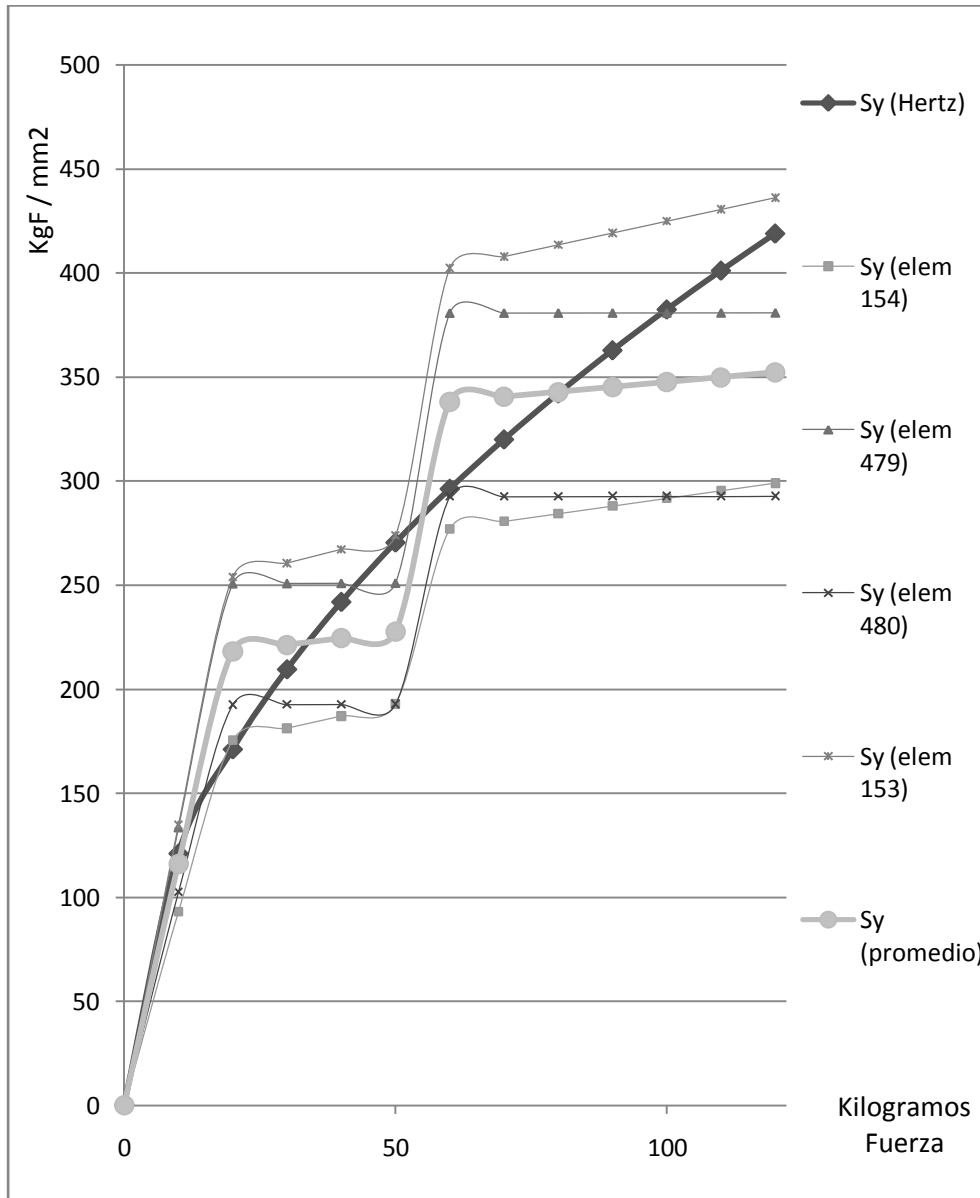
Carga KgF.	Pmax (Hertz) Kg/mm ²	ESFUERZO EN LA DIRECCIÓN Y Kg/mm ²				σ_y Kg/mm ²	ERROR %
		elem 153	elem 154	elem 479	elem 480	promedio	
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00%
10	120,91	134,78	93,06	133,50	102,50	115,96	4,09%
20	170,99	253,85	175,41	250,65	192,46	218,09	27,55%
30	209,42	260,49	181,22	250,74	192,53	221,24	5,64%
40	241,82	267,12	187,02	250,84	192,60	224,39	7,21%
50	270,36	273,75	192,82	250,94	192,67	227,54	15,84%
60	296,17	402,08	276,89	380,67	292,40	338,01	14,13%
70	319,90	407,74	280,57	380,69	292,44	340,36	6,40%
80	341,98	413,40	284,25	380,71	292,49	342,71	0,21%
90	362,73	419,06	287,93	380,74	292,54	345,07	4,87%
100	382,35	424,72	291,61	380,76	292,59	347,42	9,14%
110	401,01	430,37	295,30	380,78	292,54	349,75	12,78%
120	418,84	436,03	298,98	380,80	292,68	352,12	15,93%

ERROR PROMEDIO	9,52%
----------------	-------

Tabla 2.2. Tabla comparativa del esfuerzo máximo (Experimento n^o 2).

CAPÍTULO VI: VALIDACIÓN DEL PROGRAMA

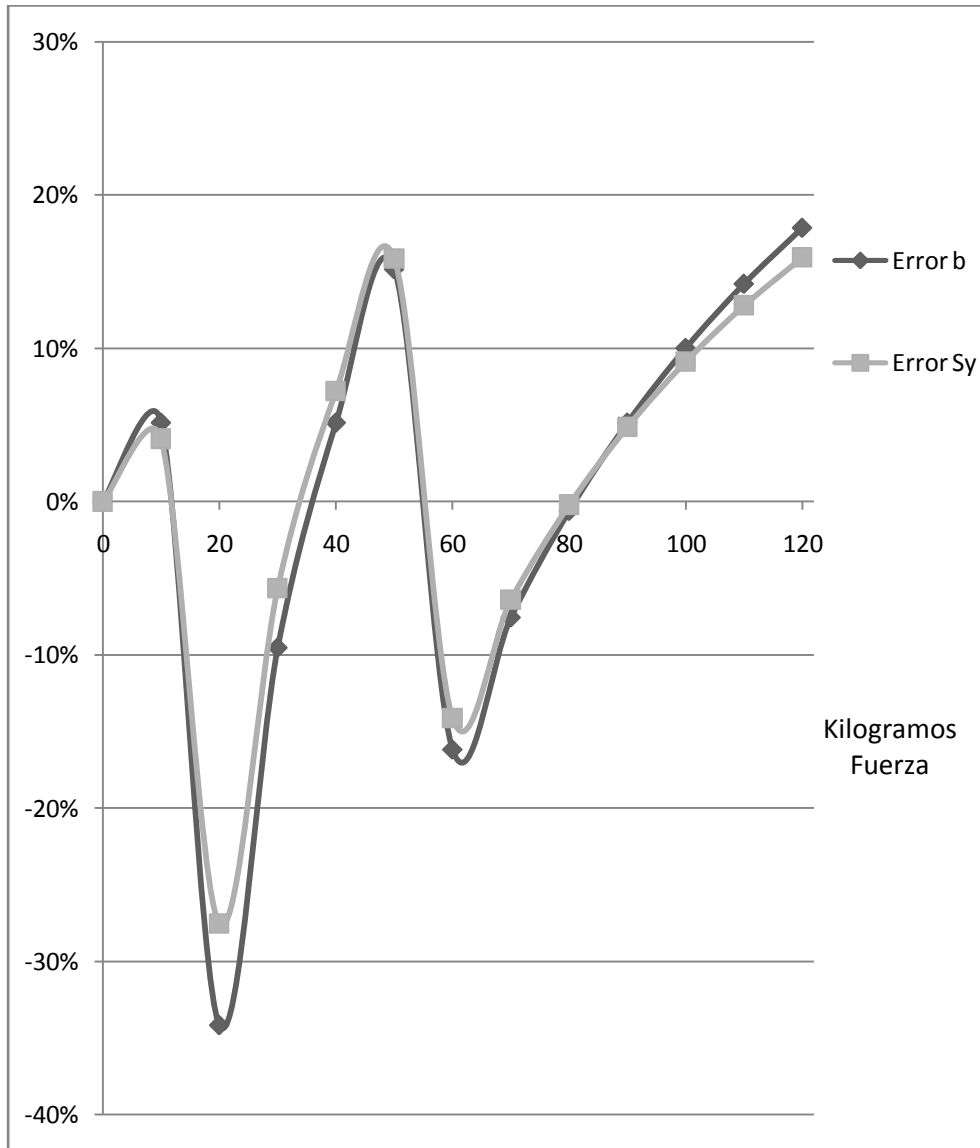
Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto Mediante el Método de Elementos Finitos



Gráfica 2.2. Esfuerzo s_y en la zona inicial de contacto vs. Carga aplicada (Experimento nº 2).

CAPÍTULO VI: VALIDACIÓN DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos



Gráfica 3.2. Error en los resultados de longitud de contacto y Esfuerzo σ_y en la zona inicial de contacto vs. Carga aplicada (Experimento n° 2).

CAPÍTULO VI: VALIDACIÓN DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

6.4 EXPERIMENTO N° 3.

Se toma el mismo problema de los dos casos anteriores pero para este experimento se simulan ambos cuerpos como elásticos (tanto el cilindro como el plano) con un Módulo de Young y Relación de Poisson iguales. La carga se varía desde 0 hasta 120 KgF y es aplicada distribuidamente a lo largo de la longitud del cilindro, al igual que en el experimento n° 2. Las propiedades mecánicas para ambos cuerpos son:

$$r = 5,001 \text{ mm}$$

$$\text{Módulo de Young (cilindro)} = E_1 = 21000 \text{ Kgf/mm}^2$$

$$\text{Relación de Poisson (cilindro)} = \nu_1 = 0,30$$

$$\text{Módulo de Young (plano)} = E_2 = 21000 \text{ Kgf/mm}^2$$

$$\text{Relación de Poisson (plano)} = \nu_2 = 0,30$$

CAPÍTULO VI: VALIDACIÓN DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

6.4.1 RESULTADOS EXPERIMENTO N° 3.

Carga KgF.	b(Hertz) mm	# de Pares de nodos Contactados	b (MefCon) mm.	ERROR %
0	0,000	0	0,0000	0,00%
10	0,074	0	0,0500	32,85%
20	0,105	1	0,1000	5,04%
30	0,129	1	0,1000	22,46%
40	0,149	2	0,1500	-0,73%
50	0,166	2	0,1500	9,91%
60	0,182	2	0,1500	17,76%
70	0,197	5	0,3000	-52,28%
80	0,211	5	0,3000	-42,45%
90	0,223	4	0,2500	-11,92%
100	0,235	4	0,2500	-6,17%
110	0,247	5	0,3000	-21,48%
120	0,258	5	0,3000	-16,31%

ERROR PROMEDIO	18,41%
-----------------------	---------------

Tabla 1.3. Tabla comparativa de la extensión de contacto
(Experimento n° 3).

CAPÍTULO VI: VALIDACIÓN DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

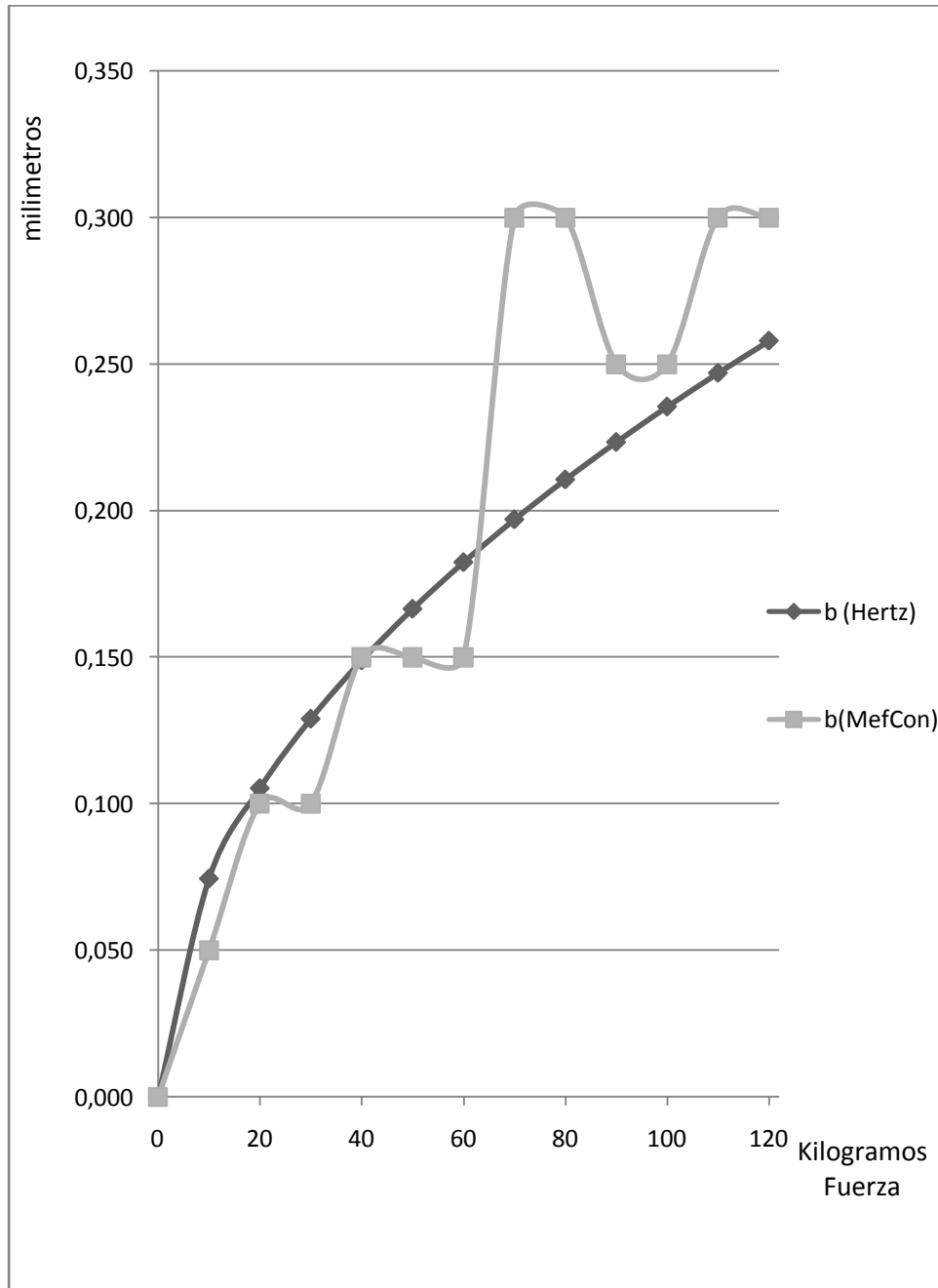


Gráfico 1.3. Longitud de contacto vs. Carga aplicada
(Experimento nº 3).

CAPÍTULO VI: VALIDACIÓN DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

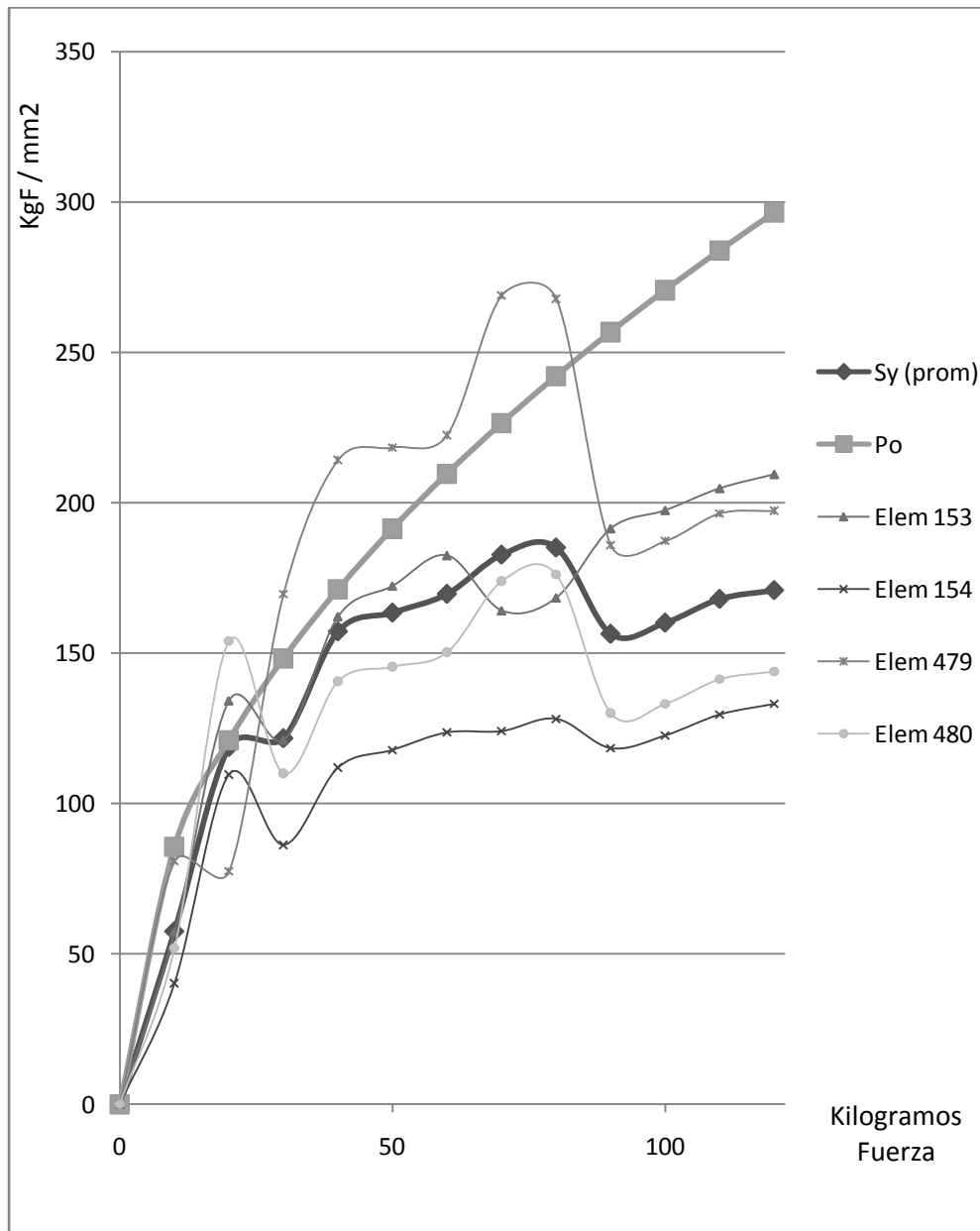
Carga KgF.	Pmax (Hertz) Kgf/mm ²	ESFUERZO EN LA DIRECCIÓN Y Kgf/mm ²				σ_y Kgf/mm ²	ERROR %
		elem 153	elem 154	elem 479	elem 480	promedio	
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00%
10	85,59	57,28	40,20	80,73	51,84	57,51	32,81%
20	121,05	134,13	109,59	77,34	153,93	118,75	1,90%
30	148,25	121,02	86,19	169,54	109,98	121,68	17,92%
40	171,18	162,12	111,94	214,13	140,55	157,18	8,18%
50	191,39	172,29	117,78	218,30	145,39	163,44	14,60%
60	209,66	182,42	123,60	222,45	150,20	169,67	19,07%
70	226,46	164,08	124,03	268,86	173,83	182,70	19,32%
80	242,09	168,35	128,13	267,78	176,02	185,07	23,55%
90	256,78	191,38	118,36	185,81	129,97	156,38	39,10%
100	270,67	197,45	122,59	187,25	133,07	160,09	40,85%
110	283,88	204,74	129,56	196,39	141,24	167,98	40,82%
120	296,50	209,40	133,10	197,26	143,82	170,89	42,36%

ERROR PROMEDIO	23,12%
----------------	--------

Tabla 2.3. Tabla comparativa del esfuerzo máximo (Experimento nº 3).

CAPÍTULO VI: VALIDACIÓN DEL PROGRAMA

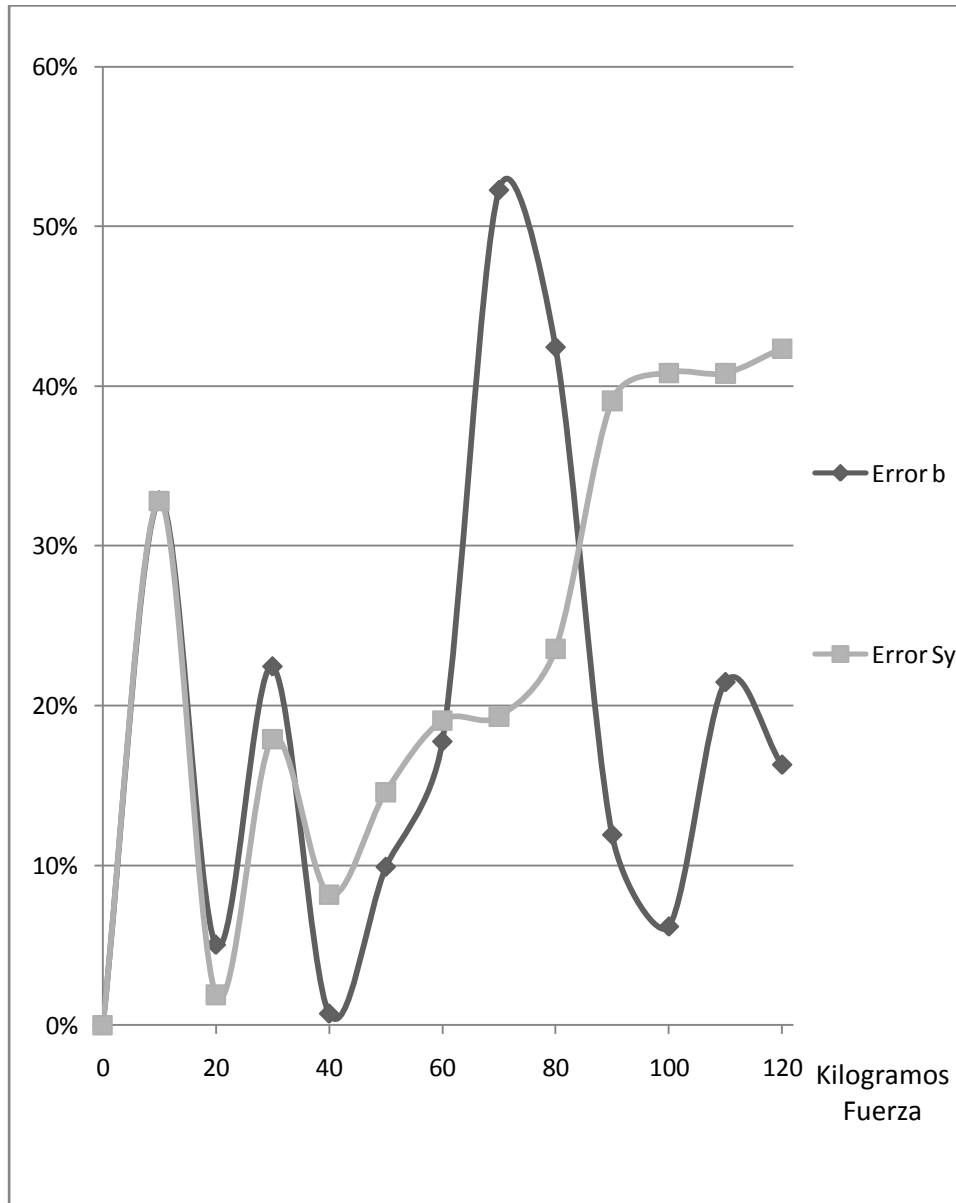
Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos



Gráfica 2.3. Esfuerzo σ_y en la zona inicial de contacto vs. Carga aplicada (Experimento nº 3).

CAPÍTULO VI: VALIDACIÓN DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos



Gráfica 3.3. Error en los resultados de longitud de contacto y Esfuerzo s_y en la zona inicial de contacto vs. Carga aplicada (Experimento nº 3).

CAPÍTULO VI: VALIDACIÓN DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

6.5 EXPERIMENTO N° 4.

Para este último caso se simula el mismo caso que se presenta en la figura 18, del contacto entre un cilindro y un plano (ambos elásticos), pero esta vez se realiza una malla mucho más grande discretizando el cuarto inferior derecho del cilindro que se aprecia en la figura 22. La zona ya discretizada se puede apreciar en la figura 23. Para este experimento la carga es aplicada uniformemente distribuida al igual que en las dos secciones anteriores y varía desde 0 hasta 40 KgF. ya que a partir de esta iteración los errores aumentaban considerablemente. Las propiedades mecánicas a considerar son:

$$r = 5,000 \text{ mm}$$

$$\text{Módulo de Young (cilindro)} = E_1 = 21000 \text{ Kgf/mm}^2$$

$$\text{Relación de Poisson (cilindro)} = \nu_1 = 0,30$$

$$\text{Módulo de Young (plano)} = E_2 = 21000 \text{ Kgf/mm}^2$$

$$\text{Relación de Poisson (plano)} = \nu_2 = 0,30$$

CAPÍTULO VI: VALIDACIÓN DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

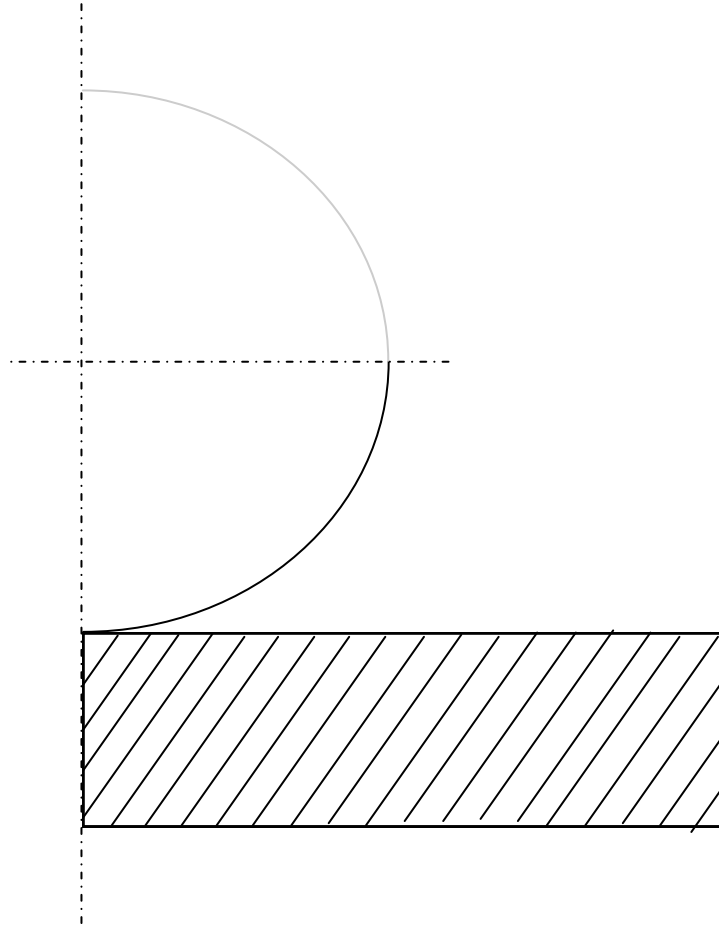


Figura 22. Zona a discretizar del modelo (experimento 4).

CAPÍTULO VI: VALIDACIÓN DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

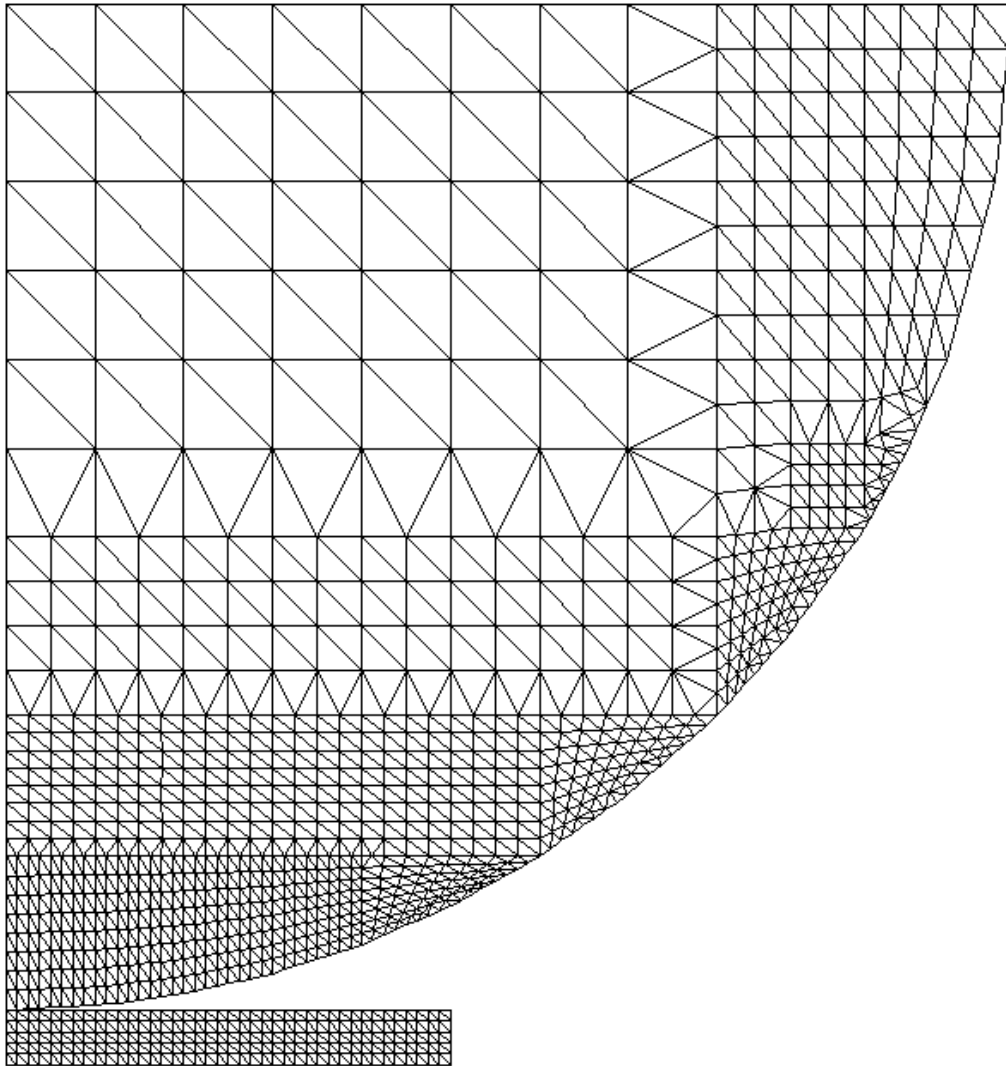


Figura 23. Discretización del modelo en la zona de contacto para el experimento 4.

CAPÍTULO VI: VALIDACIÓN DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

6.5.1 RESULTADOS EXPERIMENTO N° 4.

Carga KgF.	b(Hertz) mm	# de Pares de nodos Contactados	b (MefCon) mm.	ERROR %
0	0,000	0	0,0000	0,00
10	0,074	0	0,0550	26,06%
20	0,105	0	0,0550	47,72%
30	0,129	0	0,0550	57,31%
40	0,149	1	0,1100	26,06%

ERROR PROMEDIO	31,43%
-----------------------	---------------

Tabla 1.4. Tabla comparativa de la extensión de contacto
(Experimento n° 4).

CAPÍTULO VI: VALIDACIÓN DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

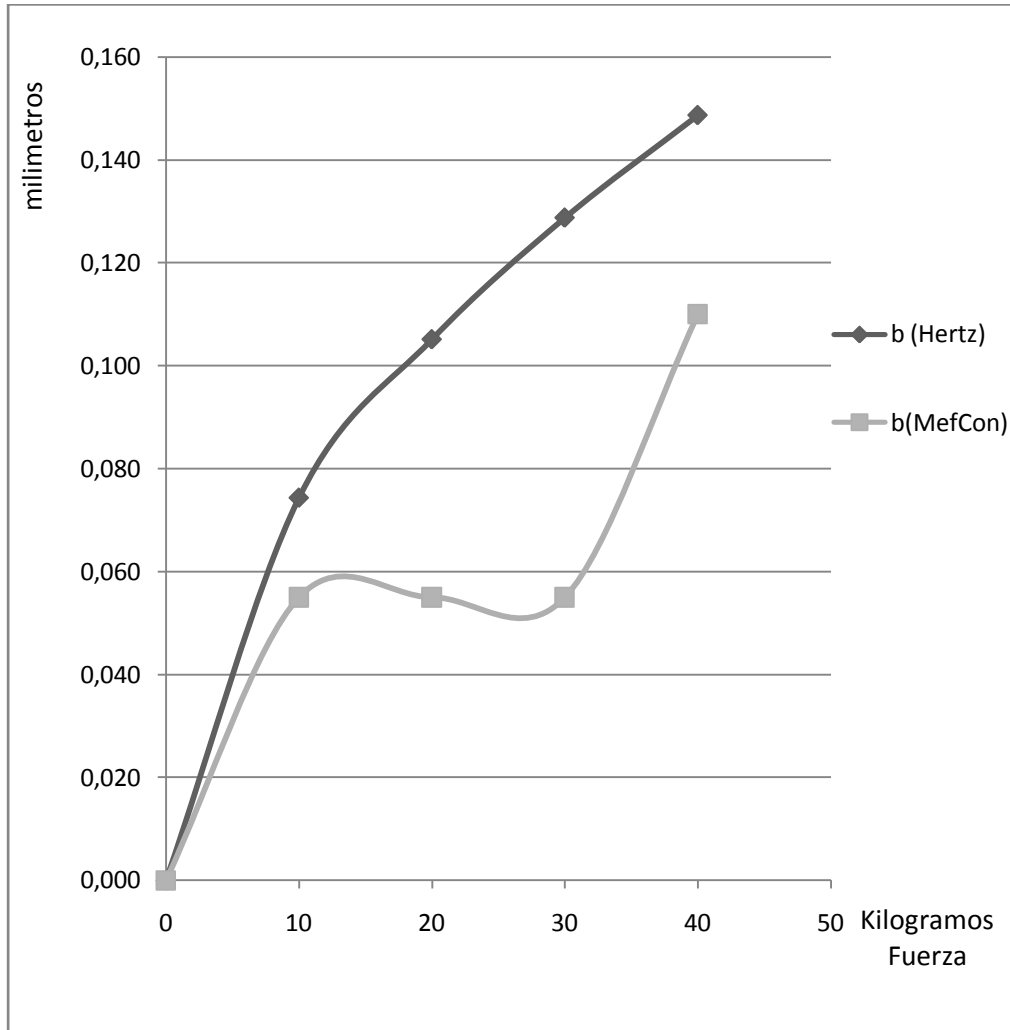


Gráfico 1.4. Longitud de contacto vs. Carga aplicada

(Experimento nº 4).

CAPÍTULO VI: VALIDACIÓN DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

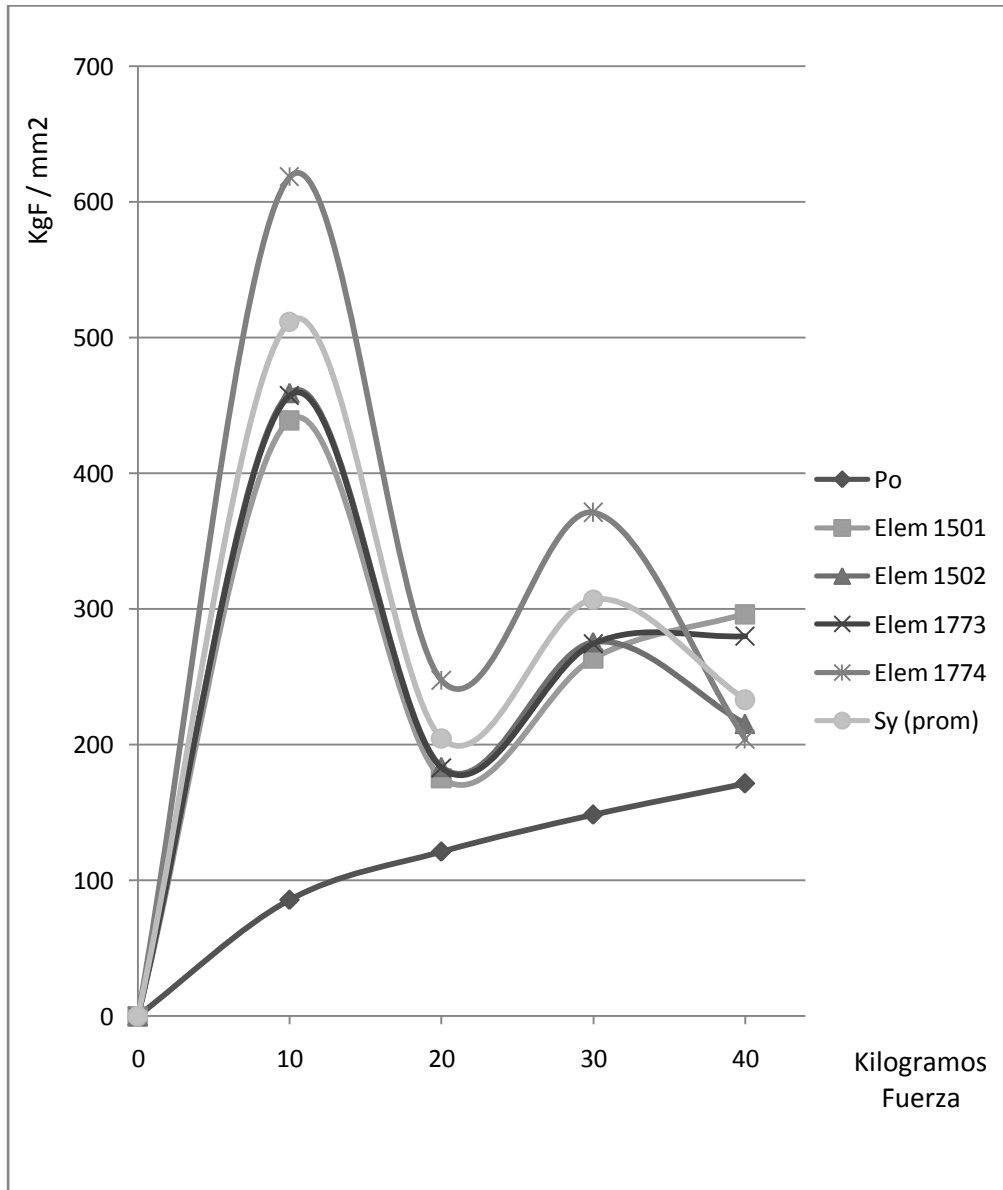
Carga KgF.	Pmax (Hertz) Kgf/mm ²	ESFUERZO EN LA DIRECCIÓN Y Kgf/mm ²				σ_y Kgf/mm ²	ERROR %
		elem 1501	elem 1502	elem 1773	elem 1774	promedio	
0	0,00	0	0	0	0	0,00	0
10	85,68	439,07	459,23	457,35	618,42	511,67	-497,20%
20	121,17	175,63	183,69	182,94	247,37	204,67	-68,91%
30	148,40	263,53	275,63	274,50	371,18	307,10	-106,95%
40	171,36	296,37	215,44	279,96	204,12	233,17	-36,08%

ERROR PROMEDIO	141,83%
----------------	---------

Tabla 2.4. Tabla comparativa del esfuerzo máximo (Experimento nº 4).

CAPÍTULO VI: VALIDACIÓN DEL PROGRAMA

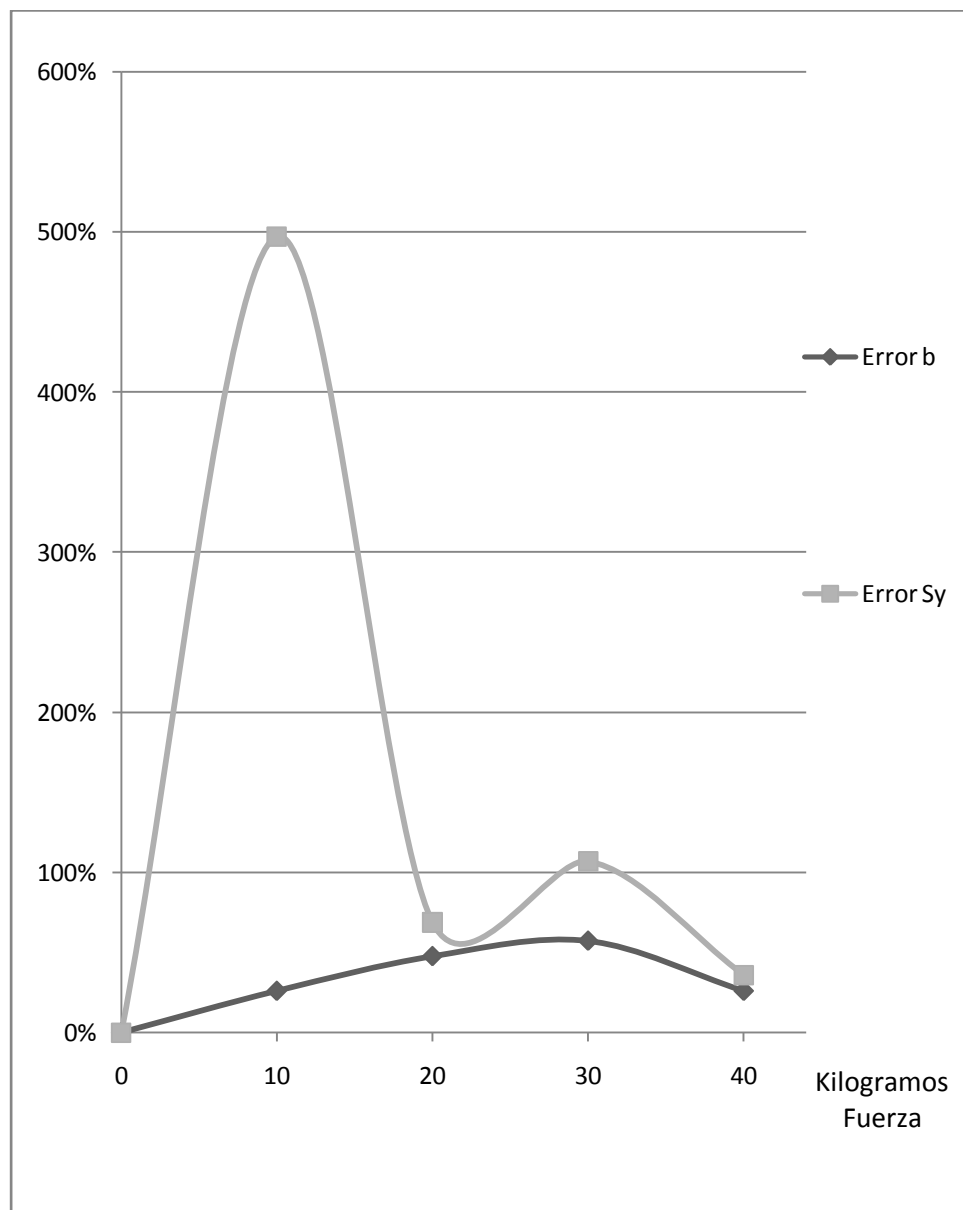
Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos



Gráfica 2.4. Esfuerzo σ_y en la zona inicial de contacto vs. Carga aplicada (Experimento n° 4).

CAPÍTULO VI: VALIDACIÓN DEL PROGRAMA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos



Gráfica 3.4. Error en los resultados de longitud de contacto y Esfuerzo σ_y en la zona inicial de contacto vs. Carga aplicada (Experimento n° 4).

CAPÍTULO VII: ANÁLISIS DE RESULTADOS

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Tras haber resuelto los 4 casos del capítulo anterior tanto con MefCon como por medio de las ecuaciones de contacto de Hertz, podemos utilizar los resultados obtenidos para analizar el funcionamiento del programa creado.

➤ **Para el experimento nº1.**

En cuanto a la extensión de la zona de contacto se obtuvo un error promedio de 11,17%.

Nótese en la Tabla 1.1 que el mayor error obtenido se registró durante la aplicación de menor carga (20 KgF.) y los menores errores de 0,61% y 1,41% se obtuvieron de una carga de 80 y 140 KgF. respectivamente.

Durante la aplicación de menor carga (20 KgF.) observamos que la b obtenida por Hertz es exactamente el punto medio entre el nodo de contacto inicial y el primer par de nodos de la zona potencial. Esto se puede tomar en cuenta para una recomendación futura, que al refinar la malla el doble de lo que se refinó la utilizada, el error en esta iteración sería prácticamente nulo.

Se observa también que se repite el mismo número de pares de nodos contactados para diferentes iteraciones de carga. Entre 60 y 120 KgF. entran en contacto dos pares de nodos y entre 140 y 220 KgF. siempre entran en contacto los tres primeros pares de nodos según el

CAPÍTULO VII: ANÁLISIS DE RESULTADOS

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

programa razón por la cual la extensión de contacto se mantiene constante en este rango de iteraciones, según lo calculado por MefCon.

También es notable, en la Tabla 1.1, que la extensión de contacto obtenida por Hertz se encuentra siempre entre la b calculada mediante el programa y la b que se obtendría si entrara el contacto el par de nodos siguiente o el anterior al que entra en contacto en la iteración estudiada. Esto es otro indicio de que con una malla mucho más precisa los errores disminuirían considerablemente.

En cuanto a la parte del cálculo del esfuerzo máximo, en el eje de aplicación de la carga, se obtuvo un error promedio ligeramente menor que el anterior, de 10,77%.

Al igual que en el caso de la extensión de contacto, el mayor error obtenido, de 30,45%, fue obtenido en la primera iteración con una carga de 20 KgF.

Puede observarse claramente en la Gráfica 2.1, que en casi todas (excepto en las de mayor carga) las iteraciones la curva del elemento 153 queda más alejada de la curva calculada mediante Hertz que el resto de los elementos. Esto puede deberse a que a pesar de que el elemento se encuentre en el eje de aplicación de la carga, el mismo no contiene el punto inicial de contacto, siendo éste el nodo 133 (Véanse figuras 20 y 21).

También se observa en la misma Gráfica 2.1 que el elemento 154, perteneciente al cilindro, fue el que obtuvo una curva más ajustada a la de la solución exacta.

CAPÍTULO VII: ANÁLISIS DE RESULTADOS

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

En cuanto a los elementos estudiados pertenecientes al plano (elementos 479 y 480), cabe resaltar el hecho de que entre 60 y 120 kgF. y entre 140 y 220 KgF. los resultados de S_y son prácticamente iguales dentro de cada rango. Esto coincide con lo mencionado anteriormente acerca de la extensión de la zona de contacto, la cual se mantiene constante dentro de estos mismos rangos.

Por último si observamos la Gráfica 3.1 podemos notar que la curva del error resultante para la extensión de contacto tiene prácticamente la misma forma que la curva obtenida del error del cálculo de los esfuerzos de contacto.

➤ Para el experimento nº 2.

Al comparar los resultados obtenidos de los experimentos 1 y 2 se observa que los errores promedios son prácticamente iguales.

Para este caso también se puede ver en la Gráfica 3.2 que ambas curvas de error (tanto la de b como la de esfuerzo máximo) tienen casi el mismo perfil por lo que se corrobora que los errores que se obtienen del cálculo de los esfuerzos dependen directamente de los nodos que han entrado en contacto para cada iteración.

➤ Para el experimento nº 3.

Este experimento es el mismo caso que los dos anteriores pero los ambos cuerpos se simulan como elástico. Aquí se puede apreciar un aumento notable en los errores promedio tanto para la extensión de la zona de contacto como para los esfuerzos σ_y , sin embargo todavía son aceptables. En las gráficas 1.3 y 2.3 se puede observar que las

CAPÍTULO VII: ANÁLISIS DE RESULTADOS

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

curvas obtenidas por MefCon están mucho más alejadas de la curva obtenida por Hertz que en los dos primeros casos.

Es curioso remarcar, analizando la Tabla 1.3, el hecho de que con una aplicación de carga de 70 y 80 KgF, entran 5 nodos en contacto mientras que al aplicar unas cargas mayores, de 90 y 100 KgF, tan sólo entran 4 pares de nodos en contacto, según MefCon.

Todavía se observa el carácter lineal en las curvas en los rangos donde no cambia el número de pares de nodos que hicieron en contacto, tanto para la curva de b como para la de σ_y , aunque no son muy notables en la curva de los esfuerzos máximos.

En cuanto a ambas curvas de error, se observa en la Gráfica 3.3 un perfil parecido en las primeras iteraciones pero a partir de 60 KgF, las curvas pierden por completo su relación.

➤ Para el experimento nº 4.

Este ensayo, realizado con una malla mucho más grande que la de los tres primeros experimentos, arrojó unos errores muy por fuera de los aceptables y al aumentar la carga aumentaban aun más los errores.

Al estudiar mallas más grandes como esta, se observa un comportamiento irregular en el sistema, el cual se comprueba al ver que el programa presenta fallas de segmentación al ampliar las cargas. Esto ocurre porque el espacio de memoria de cada arreglo (vector) es asignado en un principio y en la medida que se van desarrollando cálculos, estos se van llenando, pero si el arreglo ocupa todo su espacio asignado y se le añade algún valor adicional, este comenzará a

CAPÍTULO VII: ANÁLISIS DE RESULTADOS

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

ocupar los espacios asignados a los arreglos siguientes y sobre escribiendo algún valor de otra variable.

Esta situación fue detectada en los arreglos que dependen del Perfil de la Matriz Global de Rigidez, puesto que al entrar un par de nodos en contacto, la Modificación de esta matriz, incide directamente en algunos arreglos como MATGLO y COPIA, los cuales almacenan el Perfil de la Matriz de Rigidez, este problema se solucionó, otorgándole desde un principio el máximo espacio de memoria que dichos arreglos pudieran utilizar, con lo cual se hace ineficiente el uso de la memoria, puesto que parte de esa asignación no será utilizada.

CAPÍTULO VIII: CONCLUSIONES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

CONCLUSIONES

- Se dispone de un programa de computación actualizado que calcula problemas de esfuerzos de contacto, los cuales son problemas de tipo no lineal, mediante el Método de los Elementos Finitos.
- Se corrobora el hecho de que en la mayoría de los problemas de contacto entre sólidos, la extensión del área de contacto es de una magnitud muy pequeña comparada con las dimensiones de los cuerpos.
- Queda cumplido el objetivo principal de este trabajo al haber actualizado y traducido por completo el programa ya existente en **[8]** de lenguaje de programación FORTRAN 77 a un lenguaje más moderno como lo es C.
- Queda cumplido el objetivo de validar el programa y se comprobó que funciona correctamente ya que se obtuvo un error bajo para el rango de cargas aplicado y para una relación de contacto entre un cuerpo rígido y otro elástico.
- Puede apreciarse en el problema de validación que la extensión de contacto que arroja MefCon viene dada por la separación entre nodos, dependiendo de la cantidad de pares que entraron en contacto. Con una malla más refinada, en la que exista menos

CAPÍTULO VIII: CONCLUSIONES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

distancia entre los nodos, se obtendrán resultados más precisos de esta longitud de contacto.

- Queda comprobado que en problemas de geometría simétrica, tal como son los casos de los problemas de validación, no es necesario discretizar todos los cuerpos para obtener buenos resultados, es suficiente con tomar una porción de los mismos, teniendo en cuenta siempre los ejes de simetría de la geometría.
- Se comprueba que, los errores obtenidos para los esfuerzos (en un contacto de cuerpos rígido-elástico) están directamente relacionados con los errores resultantes de la longitud de contacto, por lo que como se menciona anteriormente, ambos errores mejorarían considerablemente con una malla más refinada.
- Se comprueba que para un cuerpo rígido es equivalente la aplicación de una carga distribuida uniformemente a lo largo de la longitud del cilindro que la de una carga puntual de la misma magnitud en el centro de masas del mismo cilindro.
- Quedan asentadas las bases para futuras actualizaciones del programa MefCon con motivo de mejorar la precisión de los cálculos de los esfuerzos de contacto entre dos cuerpos.

CAPÍTULO IX: RECOMENDACIONES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

RECOMENDACIONES

Con la finalidad de ampliar los alcances de este programa, en futuros trabajos se recomienda:

1. Ampliar los tipos de elementos que el programa usa, de triángulos de 3 nodos a triángulos de 6 nodos y cuadriláteros de 4 y 8 nodos.
2. Discretizar en una forma más óptima los modelos, con especial énfasis en la zona de contacto.
3. Limitar el uso del programa para casos de contacto entre un cuerpo rígido al cual se le aplica la carga, bien sea distribuida o puntual, y un cuerpo elástico.
4. Implementar o acoplar una rutina o un programa que permita la salida gráfica de colores de los resultados para de esta manera poder visualizar rápida y claramente el comportamiento de los esfuerzos producidos.
5. Implementar un programa extensivo de pruebas con la finalidad de obtener más información acerca del comportamiento de MefCon.

CAPÍTULO IX: RECOMENDACIONES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

6. Buscar medios o alternativas más eficientes para la distribución de memoria, que permita modificar los tamaños de los arreglos ya asignados previamente.
7. Expandir las posibilidades de estudio a ejercicios de tres dimensiones.
8. Tomar en cuenta las condiciones de Fuerza de Roce y Deslizamiento entre los Nodos.
9. Considerar el estudio de Deformaciones Plásticas.
10. Permitir el contacto entre nodos y aristas.

Para la evaluación de este programa, se utilizaron otro grupo de programas, para los cuales se deberían considerar algunas recomendaciones para mejorar sus limitaciones:

- **Dib2m:** es un programa de dibujo de mallas con el cual se puede verificar la ubicación de los nodos y las conectividades de los elementos. Para este programa se recomienda:
 1. Ampliar los tipos de elementos que el programa usa, de cuadriláteros de 8 nodos a triángulos de 3 y 6 nodos.

CAPÍTULO IX: RECOMENDACIONES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

2. Permitir que la función “*contraer*” separe los elementos en cantidades regulables por el usuario.
- **Genera2D:** es un programa que desarrolla mallas a partir de mallas de súper elementos. Para este programa recomendamos:
 1. Ampliar los tipos de elementos que el programa usa, de cuadriláteros de 4 y 8 nodos a triángulos de 3 y 6 nodos.
 2. Permitir que el usuario decida si quiere o no nodos intermedios en la malla resultante.

REFERENCIAS

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

REFERENCIAS

[1] CHAN S.K. y TUBA I.S., 1971, “*A Finite Element Method for Contact Problems of Solid bodies- Part I. Theory and Validation*”. Int. J. Mech. Sci. Vol 13, p.615-625. (Citado por Rabinovich [8]).

[2] HERRMANN L.R., October 1978, “*Finite Element Analysis of Contact Problems*”. Journal of the Engineering Mechanics Division, p.1043-1057.

[3] MAHMOUD F.F., SALAMON N.J. y MARKS W.R., 1982, “*A direct automated procedure for frictionless contact problems*”. Int. J. Num. Meth. Engng., Vol 18, p.245-257. (Citado por Rabinovich [8]).

[4] JOHNSON K.L., 1985, “*Contact Mechanics*”. Cambridge University Press, Capítulo 4. Gran Bretaña.

[5] RAPPERPORT D.J., CARTER D.R. y SCHURMAN D.J., 1985, “*Contact Finite Element Stress Analysis of the Hip Joint*”. Journal of Orthopaedic Research. Volume 3, Nº 4, p435 – 446.

[6] LAW K.H., 1985, “*Sparse Matrix Factor Modification in Structural Reanalysis*”. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 21, p37-63.

[7] LAW K.H., 1989, “*On Updating the Structures of Sparse Matrix Factors*”. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 28, p.2339-2360.

REFERENCIAS

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto Mediante el Método de Elementos Finitos

[8] NOYA J.V. y RABINOVICH R.F., 1990, "*Implementación de Modelos de Cálculo para Problemas No Lineales mediante el Método de los Elementos Finitos y Aplicación al Cálculo de Esfuerzos de Contacto en un Órgano Dentario*". Trabajo Especial de Grado, U.C.V., Caracas.

[9] JIN H.S. y LIAO M.L., 1990, "An improved finite element scheme for elastic contact problems with friction". *Computers and Structures*, Vol 35, nº 5, p571-578.

[10] PAPADOPOULOS P. y TAYLOR R.L., 1992, "A Mixed Formulation for the Finite Element Solution of Contact Problems". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol 94, nº 3, p373-389.

[11] MOTTERSHEAD J.E., PASCOE S.K. y ENGLISH R.G., 1992, "A General Finite Element Approach for Contact Stress Analysis". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 33, p765-779.

[12] FERNÁNDEZ A. y GÓMEZ G., 1993, "*Desarrollo e Implantación de un Sistema Computacional Unificado para la Resolución de Problemas de Elasticidad y Transferencia de Calor, en Base al Método de los Elementos Finitos*". Trabajo Especial de Grado, U.C.V., Caracas.

[13] ZHU C. y JIN Y., 1994, "*The Solution of Frictional Contact Problems Using a Finite Element- Mathematical Programming Method*". *Computers & Structures*, Vol 52, p149-155.

REFERENCIAS

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

[14] BARTOS M., KESTIÁNEK Z., 1995, “*Numerical Solution of the Contact Problem. Application to a Simple Model of the Human Hip Joint*”. Journal of Computation and Applied Mathematics, Vol 63, nº 1-3, p.439-497.

[15] PAPADOPOULOS P, JONES R.E. y SOLBERG J.M., 1995, “*A Novel Finite Element Formulation for Frictionless Contact Problems*”. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 38, p2603-2617.

[16] JIANFENG L., ZHUN Z., LIN J. y SHOUYOU W., 1998, “*Finite Element Analysis of Spherical Gears*”. Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol 14, nº 10, p.963-975.

[17] REFAAT M.H. y MEGUID S.A., 1998, “*A New Strategy for the Solution of Frictional Contact Problems*”. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 43, p1053- 1068.

[18] FOURMENT L., CHENOT J.L. y MOCELLIN K., 1999, “*Numerical Formulation and Algorithms for Solving Contact Problems in Metal Forming Simulation*”. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 46, p1435-1462.

[19] ADAMS G.G. y NOSONOVSKY M., 2000, “*Contact Modeling-Forces*”. Tribology International, Vol 33, p431-442.

[20] HILD P., 2000, “*Numerical Implementation of Two Nonconforming Finite Element Methods for Unilateral Contact*”. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol 1, nº 1, p99-123.

REFERENCIAS

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto Mediante el Método de Elementos Finitos

[21] WANG F., CHENG J. y YAO Z., 2001, “*FSS Contact Searching Algorithm for Dynamic Finite Element Analysis*”. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 52, p655-672.

[22] SINCLAIR G.B., CORMIER N.G., GRIFFIN J.H. y MEDA G., 2002, “*Contact Stresses in Dovetail Attachments: Finite Element Modeling*”. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol 124, p.182-189.

[23] SEYIDMAMEDOV Z., 2002, “*Finite-element Analysis of Frictionless Contact Problem for a Laminated Medium*”. Mathematics and Computers in Simulation, Vol 58, nº 2, p111-123.

[24] JOHNSON D.H., 2003, “*Principles of Simulating Contact Between Parts using ANSYS*”. ANSYS Inc., Erie, Pennsylvania, USA.

[25] NICHOLSON D.W., 2003, “*Finite Element Analysis, Thermomechanics of Solids*”. CRC Press, Capítulo 15, Estados Unidos.

[26] SELLGREN U., BJORKLUND S. y ANDERSSON S., 2003, “*A Finite Element-Based Model of Normal Contact Between Rough Surfaces*”. Wear, Vol 254, nº 11, p1180-1188.

[27] DOUDOUMIS I.N., 2003, “*A Mathematical Programming Incremental Formulation for Unilateral Frictional Contact Problems of Linear Elasticity*”. Applicable Analysis, Vol 82:6, p.503-515.

[28] BOUZAS J.M. y WALLIS R., 2004, “*Implementación de un algoritmo para resolver sistemas grandes de ecuaciones lineales mediante el método de elemento a elemento*”. Trabajo especial de Grado, U.C.V., Caracas.

REFERENCIAS

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

[29] SEZER S. y SINCLAIR G.B., 2005, “*An assessment of ANSYS Contact Elements*”. ANSYS Inc., Louisiana State University, Baton Rouge, USA.

[30] SOLBERG J.M. y PAPADOPOULOS P., 2005, “*An Analysis of Dual Formulations for the Finite Element Solution of Two-body Contact Problems*”. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol 194, nº 25-26, p2734-2780.

[31] BACHTAR F., CHEN X. y HISADA T., 2006, “*Finite Element Analysis of the Hip Joint*”. Med. Bio. Eng. Comput., Vol 44, p643-651.

[32] KUSS F. y LEBON F., 2009, “*Stress Based Finite Element Methods for Solving Contact Problems: Comparisons Between Various Solution Methods*”. Advances in Engineering Software, Vol 40, nº 8, p697-706.

[33] JUVINALL R.C., 1983, “*Fundamentals of Machine Component Design*”. Ed. Jhon Wiley & Sons Inc., Estados Unidos.

[34] BROWN D.K., 1984, “*An Introduction to the Finite Element Method using BASIC Programs*”. Surrey University Press, New York.

BIBLIOGRAFÍA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

BIBLIOGRAFÍA

- ZIENKIEWICZ O.C. y TAYLOR R.L., 2005, "*The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*". 6ta Edición, Elsevier Butterworth-Heinemann. Gran Bretaña.
- ZIENKIEWICZ O.C. y TAYLOR R.L., 2000, "*The Finite Element Method: The Basis*". 5ta Edición, Butterworth-Heinemann. Gran Bretaña.
- NICHOLSON D.W., 2003, "*Finite Element Analysis: Thermomechanics of Solids*". CRC Press. Estados Unidos.
- JOHNSON K.L., 1985, "*Contact Mechanics*". Cambridge University Press. Gran Bretaña.
- CHANDRUPATLA T.R. y BELEGUNDU A.D., 1991, "*Introduction to Finite Elements in Engineering*". Prentice Hall, Englewood Cliffs. Gran Bretaña.
- KERNIGHAN B.W. y RITCHIE D.M., 1991, "*El Lenguaje de Programación C*". Prentice-Hall Hispanoamericana. México.
- SCHILDT H., 2000, "*C: The Complete Reference*". 4ta Edición, Osborne/McGraw-Hill. Estados Unidos.

BIBLIOGRAFÍA

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

- STALLMAN R., MCGRATH R. y SMITH P., 2006, “*GNU Make*”.
Versión 3.81, The Free Software Foundation. Estados Unidos.
- FORTRAN 77 disponible,
http://fismat.umich.mx/mn1/tutor_fort/index.html,
(consultado
2009, septiembre, 17).

APÉNDICES

APÉNDICES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

APÉNDICE A

EJEMPLO ANÁLITICO DE UN PROBLEMA DE CONTACTO

Con la finalidad de ilustrar la aplicación de los elementos finitos a un problema en particular de contacto se considera la siguiente estructura:

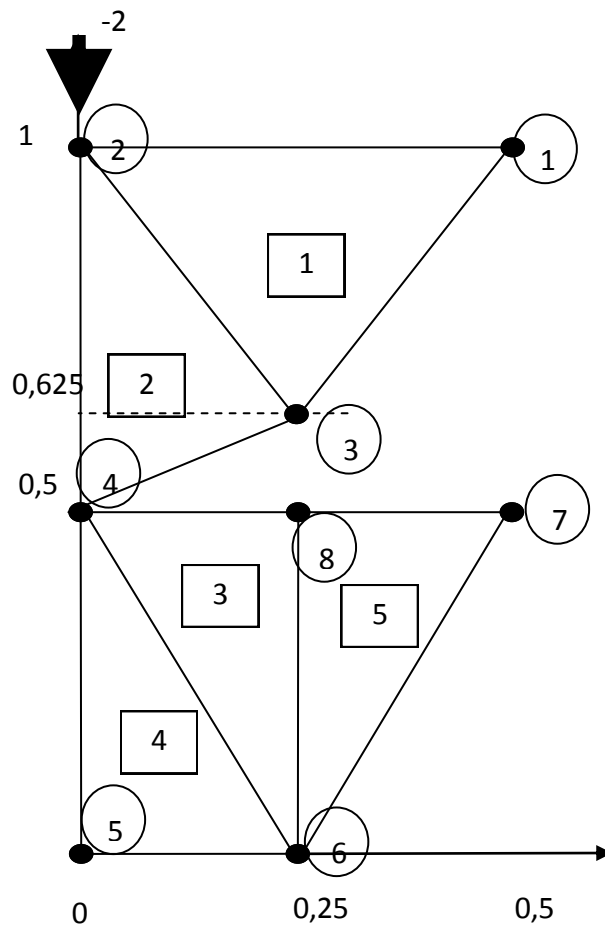


Figura A.1. Estructura del ejemplo ilustrativo.

APÉNDICES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

Se enumeran los nodos del 1 al 8 (dentro de los círculos) y se definen los elementos del 1 al 5 (dentro de cuadrados) como se indica en la figura. Los elementos son enumerados en sentido antihorario. Se asume que el problema está en un estado plano de esfuerzos con $E=1$ y $\nu=0,3$.

Tenemos entonces dos pares de nodos en la zona potencial de contacto los nodos 3 y 8 (par1) y los nodos 1 y 7 (par2).

1. Cálculo de los desplazamientos de los desplazamientos nodales.

Primero que todo se considera cada elemento en orden y se establece su matriz de rigidez:

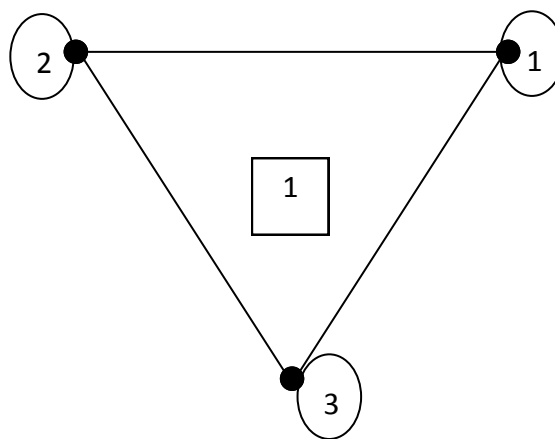


Figura A.2. Elemento 1.

APÉNDICES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

Sus coordenadas son:

$x_1 = 0,5$	$y_1 = 1$
$x_2 = 0$	$y_2 = 1$
$x_3 = 0,25$	$y_3 = 0,625$

Donde el valor del área es:

$$A = \frac{Base * Altura}{2} = \frac{0,5 * (1 - 0,625)}{2} = 0,09375$$

Y la del espesor:

$$h = 1$$

Ahora se procede al cálculo de la matriz de rigidez del elemento. Las ecuaciones para este paso se pueden encontrar en el trabajo de grado realizado por Bouzas y Wallis [28] los cuales se basaron en el procedimiento expuesto por Brown [34].

Repitiendo el procedimiento de ensamblaje para cada uno de los elementos existentes en la malla, se obtienen las once ecuaciones del sistema que permite calcular los desplazamientos desconocidos. Colocado de forma matricial el sistema queda como:

APÉNDICES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

$$A \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ v_4 \\ u_6 \\ u_7 \\ v_7 \\ u_8 \\ v_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donde A es igual a:

$$A = \begin{pmatrix} 0,4760875 & 0,178425 & -0,013575 & -0,128 & -0,16485 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,178425 & 0,32715 & 0,03915 & -0,192 & -0,3663 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,013575 & 0,03915 & 0,625875 & 0,35685 & -0,4623 & -0,202725 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,128 & -0,192 & 0,35685 & 1,3549 & 0 & -0,16485 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,16485 & -0,3663 & -0,4623 & 0 & 1,1166 & -0,288 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,202725 & -0,16485 & -0,288 & 1,14945 & 0,35685 & 0 & 0 & -0,192 & -0,384 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,35685 & 1,2909 & 0 & -0,192 & -0,192 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0989 & 0 & -1,0989 & 0,54945 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,192 & 0 & 0,384 & 0,192 & -0,384 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,192 & -0,192 & -1,0989 & 0,192 & 2,3898 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,384 & 0 & 0,54945 & -0,384 & 0 & 131745 \end{pmatrix}$$

APÉNDICES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

A Continuación se calculan los GAPS o distancias entre los nodos de los pares potenciales de la zona de contacto que en este caso vienen siendo los nodos 3 y 8 (Par1) y el 1 y 7 (Par2). Como los nodos de cada par tienen la misma coordenada x , nada más se toma en cuenta su coordenada en la dirección y para calcular su separación inicial, de esta manera:

$$G_1 = y_3 - y_8 = 0,625 - 0,5 = 0,125$$

$$G_2 = y_1 - y_7 = \Delta y = 1 - 0,5 = 0,5$$

3. Cálculo del desplazamiento relativo entre los nodos de los pares de la zona potencial de contacto.

Siguientemente se procede a calcular los vectores de movimiento relativo entre los nodos de cada par tal y como se explica en la rutina TRANSFOR:

Para el Par1 queda:

Nodo 3:

$$\bar{B}_3 = \sqrt{u_3 + v_3} = 7,054$$

$$\beta = \arctan v_3/u_3 = 79,016^\circ$$

Como el vector se localiza en el cuarto cuadrante entonces lo ajustamos como se explicó anteriormente:

$$\beta' = 2\pi - \beta = 280,984^\circ$$

APÉNDICES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

Ahora se realiza el cálculo del ángulo α de la siguiente manera $\alpha = \arctan(\Delta y / \Delta x)$. Este es el ángulo de diferencia entre el sistema de coordenadas local y el general. Como en este caso no hay separación en la dirección x entre los nodos del par $\alpha=90^\circ$ y $B'_3 = v_3$.

$$B'_3 = -6,925$$

Realizamos el mismo procedimiento para el nodo 8 y obtenemos su desplazamiento relativo:

$$B'_8 = -0,975$$

Por último calculamos el desplazamiento relativo entre ambos nodos restando el desplazamiento del nodo contactado menos el del nodo contactor:

$$REL_1 = B'_8 - B'_3 = 5,95$$

Exactamente lo mismo se hace para el Par2 y obtenemos el desplazamiento relativo entre los nodos 1 y 7:

$$REL_2 = B'_7 - B'_1 = 5,118$$

4. Cálculo de la interpenetración máxima y del Factor de Escala.

Posteriormente se procede a calcular la interpenetración de ambos pares y se escoge el par con mayor interpenetración como el que entró en contacto y con él se calcula el Factor de Escala:

$$T_{par} = REL_{par} - G_{par}$$

APÉNDICES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

$$T_1 = REL_1 - G_1 = 5,95 - 0,125 = 5,825$$

$$T_2 = REL_2 - G_2 = 5,118 - 0,5 = 4,618$$

El Par1 es el par con la mayor interpenetración por lo que:

$$FacEscal = G_1 / REL_1 = 0,125 / 5,95 = 0,021008$$

5. Actualización de los GAPS.

Con este factor se actualizan las distancias entre los nodos de cada par de la siguiente manera:

$$G_{par}^k = G_{par}^{k-1} - FacEscal * REL_{par}$$

Siendo k el paso incremental donde nos encontramos. De esta manera:

$$G_1 = 0,125 - (0,021008 * 5,95) = 0$$

$$G_2 = 0,5 - (0,021008 * 5,118) = 0,3925$$

6. Actualización de los desplazamientos.

Posteriormente se actualizan los desplazamientos, es decir se procede a calcular el campo de desplazamientos acumulados:

$$DD^k = DD^{k-1} + FacEscal * B$$

Donde en este caso B es el campo de desplazamientos (u,v) calculado anteriormente con la matriz de rigidez global. De esta manera obtenemos los desplazamientos acumulados:

APÉNDICES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

$$u_1' = 0 + 0,021008 * (-0,191799) = -0,004029$$

$u_1' = -0,004029$	$u_3' = 0,028234$	$u_6' = 0,019627$	$u_8' = 0,002049$
$v_1' = -0,119223$	$v_3' = -0,145473$	$u_7' = 0,012295$	$v_8' = -0,020492$
$v_2' = -0,207993$	$v_4' = -0,076195$	$v_7' = -0,01170$	

7. Revisión de contacto.

En este paso se evalúa si todos los nodos potenciales de la zona entraron en contacto o si nada más hubo contacto en la zona inicial. En este caso observamos que entre el Par2 todavía existe una distancia y que el Par1 ya ha entrado en contacto por lo que se procede a actualizar las cargas aplicadas.

8. Cómputo de la carga residual.

$$P^k = P^{k-1} * (1 - FacEscal)$$

Por lo que la nueva carga queda como:

$$P^k = -2 * (1 - 0,021008) = -1,95798$$

Y se ensambla el nuevo vector de cargas.

9. Actualización de la matriz de rigidez.

Con el procedimiento explicado anteriormente en el funcionamiento de la rutina MODIPER se procede a actualizar la matriz global de rigidez incluyendo las nuevas restricciones de los nodos que

APÉNDICES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto Mediante el Método de Elementos Finitos

ya están en contacto y junto con el nuevo vector de cargas obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones de forma matricial:

$$A \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ v_4 \\ u_6 \\ u_7 \\ v_7 \\ u_8 \\ v_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1,95798 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0,4760875 & 0,178425 & -0,013575 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,128 & -0,16485 \\ 0,178425 & 0,32715 & 0,03915 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,192 & -0,3663 \\ -0,013575 & 0,03915 & 0,625875 & 0 & 0 & -0,202725 & 0 & 0 & 0 & 0,35685 & -0,4623 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -0,202725 & 0 & 0 & 1,14945 & 0,35685 & 0 & 0 & -0,35685 & -0,672 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,35685 & 1,2909 & 0 & -0,192 & -0,192 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0989 & 0 & -1,0989 & 0,54945 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,192 & 0 & 0,384 & 0,192 & -0,384 \\ -0,128 & -0,192 & 0,35685 & -1 & 0 & -0,35685 & -0,192 & -1,0989 & 0,192 & 4,7447 & 0 \\ -0,16485 & -0,3663 & -0,4623 & 0 & -1 & -0,672 & 0 & 0,54945 & -0,384 & 0 & 3,43405 \end{pmatrix}$$

APÉNDICES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

La cual tiene el siguiente perfil:

$$\begin{pmatrix} 0,4760875 & 0,178425 & -0,013575 & & & & & & & & -0,128 & -0,16485 \\ & 0,32715 & 0,03915 & & & & & & & & -0,192 & -0,3663 \\ & & 0,625875 & & -0,202725 & & & & & & 0,35685 & -0,4623 \\ & & & 1 & 0 & & & & & & -1 & 0 \\ & & & & 1 & 0 & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & 1,14945 & 0,35685 & & & & -0,35685 & -0,672 \\ & & & & & & 1,2909 & & & & -0,192 & -0,192 & 0 \\ & & & & & & & 1,0989 & 0 & & -1,0989 & 0,54945 \\ & & & & & & & & 0,384 & 0,192 & -0,384 & & \\ & & & & & & & & & & 4,7447 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & 3,43405 \end{pmatrix}$$

Con este sistema se obtienen los nuevos desplazamientos los cuales son:

$u_1 = -0,292618$	$u_3 = 0,875007$	$u_6 = 0,305175$	$u_8 = 0,875007$
$v_1 = -0,226559$	$v_3 = -1,34925$	$u_7 = 1,54963$	$v_8 = -1,34925$
$v_2 = -5,10596$	$v_4 = -1,51242$	$v_7 = -1,63416$	

Ahora con estos nuevos desplazamientos se inicia el nuevo incremento y calculamos el desplazamiento relativo entre el par de nodos que queda sin entrar en contacto como lo hicimos anteriormente. Así obtenemos:

APÉNDICES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

$$REL_{par2} = -1,63416 - (-0,226559) = -1,407601$$

Calculamos la nueva interpenetración:

$$T_2 = REL_2 - G_2 = -1,407601 - 0,3925 = -1,8$$

La nueva interpenetración calculada resulta negativa lo que quiere decir que este par de nodos no entra en contacto. Automáticamente el programa considera $FacEscal = 1$ y se procede a calcular los nuevos desplazamientos acumulados.

$$DD^k = DD^{k-1} + FacEscal * B$$

$$u_1' = -0,004029 + (-0,292618) = -0,296647$$

$u_1'' = -0,296647$	$v_3'' = -1,494753$	$v_7'' = -1,64646$
$v_1'' = -0,345782$	$v_4'' = -1,588615$	$u_8'' = 0,877056$
$v_2'' = -5,313953$	$u_6'' = 0,324802$	$v_8'' = -1,369742$
$u_3'' = 0,903241$	$u_7'' = 1,561825$	

Estos son los desplazamientos empleados para calcular los esfuerzos en los elementos.

Aquí termina la rutina CONTACTO y se procede ahora a calcular los esfuerzos de cada elemento.

APÉNDICES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

10. Cálculo de los esfuerzos en los elementos.

Los esfuerzos son calculados con el producto de las siguientes matrices [34]:

$$\{\sigma\} = [D][B]\{U\}$$

$\{U\}$ es el vector de los desplazamientos acumulados de cada elemento (DD).

	Elemento 1	Elemento 2	Elemento 3	Elemento 4	Elemento 5
σ_x	-0,0160471	0,00591327	0,01153117	0,00148503	0,00822954
σ_y	-0,03610572	-0,02732951	-0,00724124	-0,01196527	-0,00823182
τ_{xy}	0,02407107	0,00615118	0,00297	0	-3,564E-06

APÉNDICES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

APÉNDICE B

CONSIDERACIONES GENERALES

1. El archivo de datos debe ser realizado en formato de texto (.dat).
2. Cada punto listado en el archivo de datos, representa la separación de unidades y decimales (no es válido el uso de comas “,”).
3. El sistema reconoce los espacios en blanco, como la separación de datos, para separar palabras se debe usar los símbolos underscore (_) ó guión (-).
4. Los datos numéricos se pueden separar con espacios en blanco ó tabuladores, sin importar el numero de espacios o tabulaciones que se dejen entre cada dato numérico
5. Para escribir las conectividades de los elementos, se deben enunciar los nodos en sentido anti horario.
6. El sistema puede manejar un material diferente para cada cuerpo.
7. El programa no trabaja con un sistema de unidades específico, por lo cual hay que mantener una coherencia con el sistema que se escoja.

APÉNDICES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

APÉNDICE C

MANUAL DEL USUARIO

El siguiente manual tiene la finalidad de servir como guía de trabajo a aquellas personas que deseen aplicar el programa MEFCON a diferentes modelos, donde esté presente el fenómeno de contacto. Se asume que estas personas están familiarizadas con el Método de los Elementos Finitos, o al menos, con la creación de mallas de elementos.

El programa MefCon, fue creado bajo el sistema operativo openSUSE 11.0 (i586) con KDE 3.5.9 "release 49.1" con kernel 2.6.25.5-1.1-pae i686. La programación se realizó en Kdevelop 3.5.1, el cual no es un requisito para la compilación del programa, puesto que el mismo se puede compilar por medio de la consola usando el comando *make*. En el CD anexado, se puede encontrar el programa. Para la instalación (compilación) y corrida del programa se deben seguir los siguientes pasos:

C.1. Instalación del Programa (compilación)

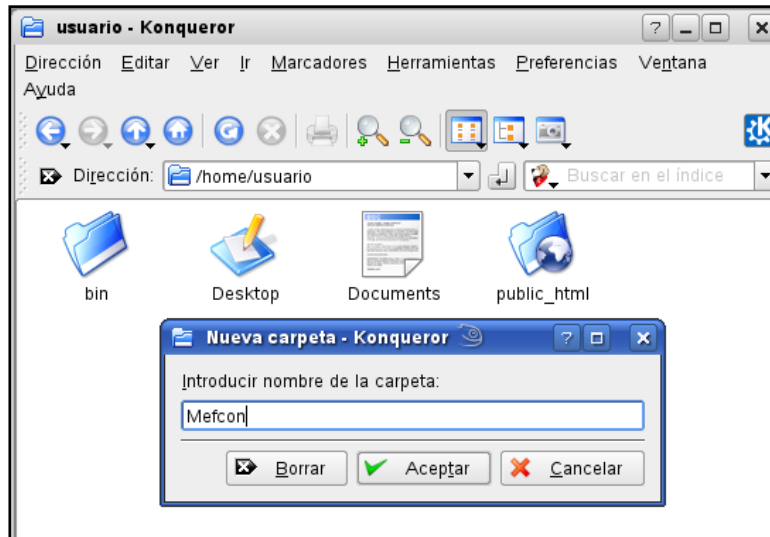
Estas instrucciones se pueden realizar mediante el uso de la consola proporcionada por Linux, así como puede realizarse por medio de la interfaz KDE, esta explicación se hará con el uso de la interfaz KDE:

- 1.- Crear en el directorio HOME del usuario, una carpeta

APÉNDICES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

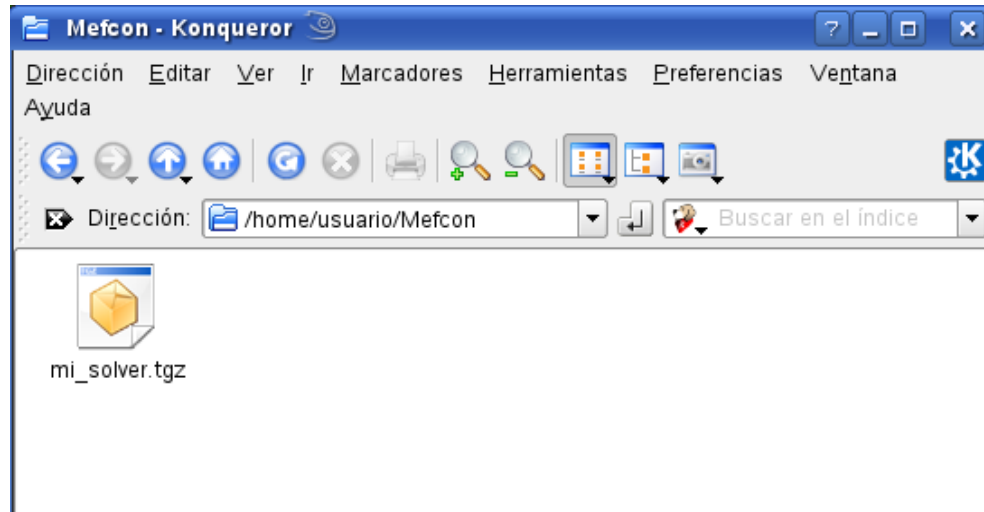
Mefcon (ej. */home/usuario*), haciendo clic con el botón secundario del ratón y utilizando la opción *crear*→*carpeta*.



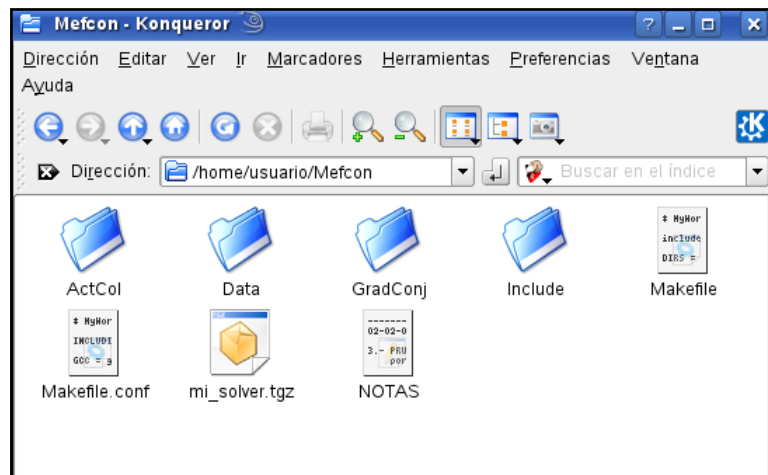
2.- Copiar el archivo *mi_solver.tgz* en la carpeta anteriormente creada, primero haga clic con el botón secundario sobre el icono del archivo ubicado en el CD y seleccione la opción *copiar* y después en la carpeta *Mefcon*, haga clic con el botón secundario del ratón y seleccione la opción *pegar archivo*.

APÉNDICES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos



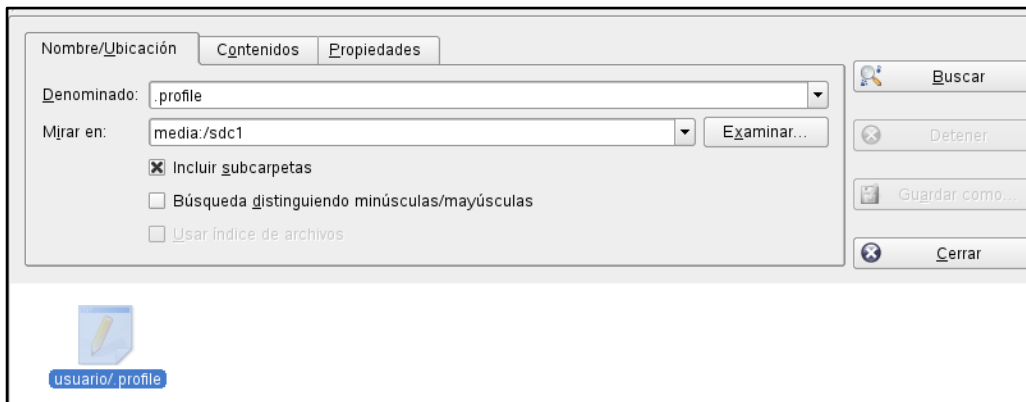
3.-Descomprimir el archivo `mi_solver.tgz` haciendo clic con el botón secundario del ratón sobre el icono del archivo y utilizando la opción extraer → extraer aquí.



4.-Agregar al archivo `.profile` la línea `PATH = $PATH:./.` y a la variable de ambiente `PATH` la ruta `"/home/usuario/bin"` usando:
`PATH=$PATH:/home/usuario/bin.`

APÉNDICES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto Mediante el Método de Elementos Finitos



```
.profile [modificado] - KWrite
Archivo  Editar  Ver  Marcadores  Herramientas  Preferencias  Ayuda
# Sample .profile for SuSE Linux
# rewritten by Christian Steinruecken <cstein@suse.de>
#
# This file is read each time a login shell is started.
# All other interactive shells will only read .bashrc; this is particularly
# important for language settings, see below.

test -z "$PROFILEREAD" && . /etc/profile || true

# Most applications support several languages for their output.
# To make use of this feature, simply uncomment one of the lines below or
# add your own one (see /usr/share/locale/locale.alias for more codes)
# This overwrites the system default set in /etc/sysconfig/language
# in the variable RC_LANG.
#
#export LANG=de_DE.UTF-8      # uncomment this line for German output
#export LANG=fr_FR.UTF-8      # uncomment this line for French output
#export LANG=es_ES.UTF-8      # uncomment this line for Spanish output

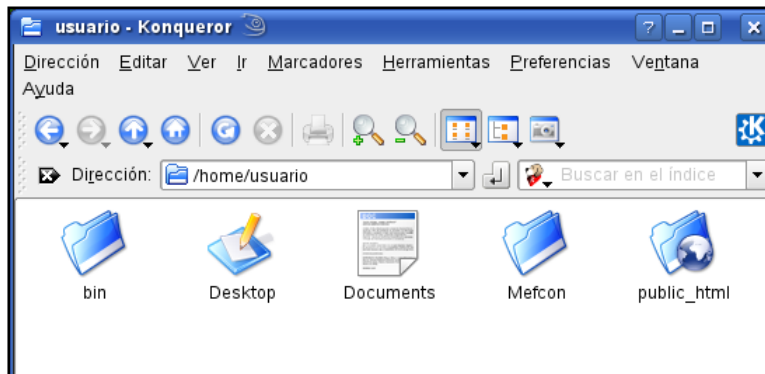
# Some people don't like fortune. If you uncomment the following lines,
# you will have a fortune each time you log in ;-)

#if [ -x /usr/bin/fortune ] ; then
#   echo
#   /usr/bin/fortune
#   echo
#fi
PATH = $PATH:./
```

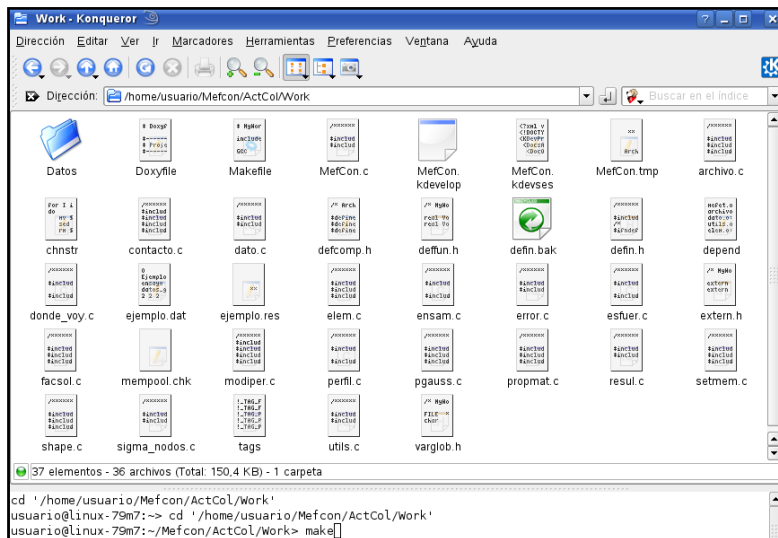
APÉNDICES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto Mediante el Método de Elementos Finitos

5.- Crear en el directorio HOME la carpeta bin (usando el mismo método para la creación de la carpeta Mefcon).

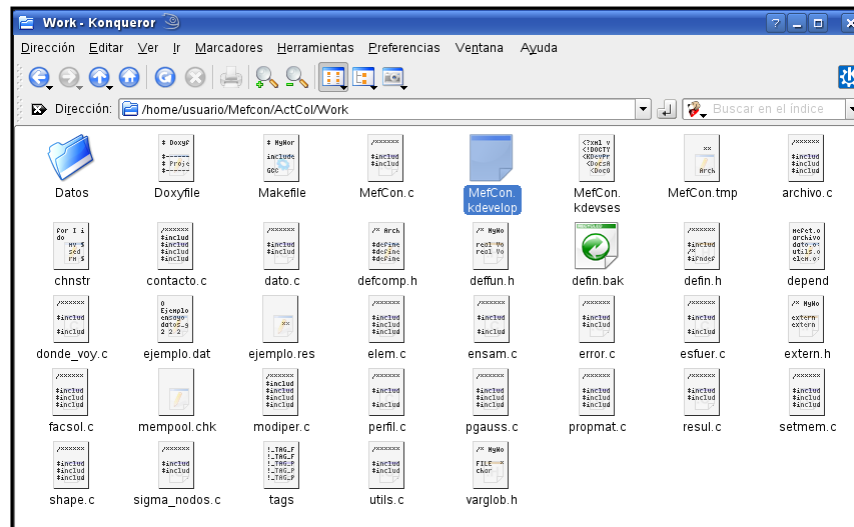


6.- En el directorio `/home/usuario/Mefcon/ActCol/Work` compile el programa utilizando la consola de Linux y el comando `make` ó haciendo clic con el botón primario del ratón en el archivo `MefCon.kdevelop` y posteriormente apretando `F8`.

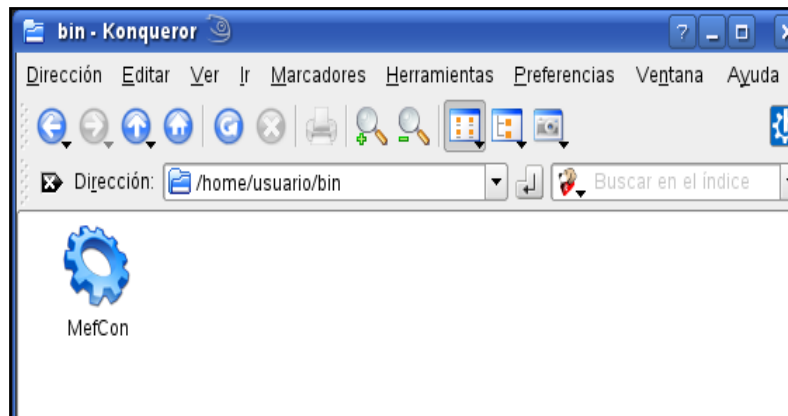


APÉNDICES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto Mediante el Método de Elementos Finitos



7.- De esta manera queda instalado (compilado) el programa MefCon. Podemos ver el icono del programa en el directorio */home/usuario/bin*.



C.2. Antes de utilizar el programa.

Antes de utilizar el programa MEFCON se deben seguir las siguientes instrucciones:

a) Discretizar el medio continuo en elementos triangulares de tres nodos. Se debe tener cuidado cuando se discretiza la zona potencial de contacto ya que esta zona debe estar compuesta por un número considerable de elementos, de tal manera que quede bien definida. No debe olvidarse que a cada nodo del cuerpo contactor que se encuentre en la zona de contacto, le debe corresponder otro nodo del cuerpo contactado que también se encuentre en la zona de contacto. Hay que procurar que los nodos que integran los pares estén lo más próximos posible, uno del otro.

b) Una vez discretizado el medio continuo, se procede a enumerar los nodos y los elementos, asignándole a cada uno, el número de material que le corresponda, de acuerdo a su conformación. En base a la numeración de los nodos se procede a realizar una lista de las coordenadas x e y , de cada uno de los nodos y a continuación se hace la lista de las conectividades de los elementos, lo cual consiste en asignarle a cada elemento la lista de los nodos que lo conforman.

c) El paso siguiente es definir, para cada nodo, las restricciones, o condiciones de carga que posea. Si es un nodo que posee

APÉNDICES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

restricciones, hay que definirlas y si es un nodo cargado hay que especificar la carga.

C.3 Realización de un archivo de datos.

Una vez realizados los pasos anteriores se procede a crear el archivo de datos del problema. A continuación se describe la forma en que se debe realizar este archivo para que pueda ser interpretado por el programa MEFCON, un ejemplo de este archivo se puede ver en el apéndice D.

Línea 1: Se coloca una variable lógica. Si es uno (1), en la corrida del programa aparecerán los datos del problema en la pantalla o en la impresora, según como se haga la elección. Si es cero (0), no aparecerán estos valores durante la corrida. Esta variable (*ver*) se utiliza como verificación de los datos de entrada.

Línea 2: Se identifica el nombre del archivo de datos (*nombre*).

Línea 3: Se le asigna un título al archivo (*ftit*).

Línea 4: Se coloca el título de los datos que prosiguen, en este caso, *datos_generales*.

Línea 5: En esta línea se identifican tres variables separadas por un espacio entre ellas: número de dimensiones (*ndim*), grados de libertad por nodo (*igln*) y número de propiedades de los materiales (*nprop*). Para efectos de este programa todas ellas son constantes y tienen el valor de dos (2).

APÉNDICES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

Línea 6: Se debe identificar el valor de los siguientes datos, los cuales deben ir separados por espacios y tienen que mantener el mismo orden que aquí se muestra:

Número de nodos, número de elementos, número de nodos cargados, número de nodos restringidos, número de materiales, orden del tensor de esfuerzos, orden de integración, escala, número de nodos por elemento y número de pares de nodos en la zona potencial de contacto y número de elementos de los que se desea conocer el resultado. Si se desea conocer la información de todos los elementos simplemente se coloca un cero.

En esta línea el orden del tensor de esfuerzos toma los siguientes valores:

3 Si es un caso de esfuerzo plano.

4 Si es un caso de deformación plana.

Para definir el número de pares de nodos de la zona potencial de contacto hay que hacer una estimación de la cantidad de pares con posibilidad de entrar en contacto, esto es, aquellos pares cuyos nodos cumplan con estar próximos uno del otro. Es recomendable que esta zona potencial de contacto sea lo suficientemente grande, de tal manera que al finalizar el contacto entre los cuerpos, haya cierta cantidad de pares de nodos sin consolidarse, lo cual implica que con las condiciones de borde impuestas, la región de contacto final será la indicada por los pares de nodos que se consolidaron. Por el contrario, si la zona potencial no es lo suficientemente extensa, al finalizar el contacto, todos los pares de nodos de dicha zona habrán entrado en

APÉNDICES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

contacto y no sabremos si la región final de contacto es tan solo la indicada por los pares de nodos de la zona potencial o es mayor.

Línea 7: *Materiales.*

Línea 8: A partir de esta línea y dependiendo de la cantidad de materiales, se coloca los siguiente (un material por línea):

Número del material, Módulo de Young y Coeficiente de Poisson, separados entre ellos por un espacio.

Seguidamente se colocan las coordenadas de los nodos, precedidas por el número de nodos (un nodo por línea), así:

Número del nodo, Coordenada x, Coordenada y, separados entre ellos por un espacio.

Luego se colocan las conectividades de los elementos, las cuales indican los nodos que conforman a estos elementos y el material del que está compuesto. Los nodos deben estar enumerados en sentido antihorario y escritos de esta misma forma (debe haber un elemento por línea), como se muestra aquí:

Número del elemento, Número del nodos i, Número del nodo j, Número del nodo k y el Número del material.

A continuación y en líneas sucesivas se colocan los nodos cargados de la siguiente manera:

Número del nodo cargado, Carga en la dirección x, Carga en la dirección y.

APÉNDICES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto Mediante el Método de Elementos Finitos

Finalizada la numeración anterior, se colocan los nodos que posean uno o ambos grados de libertad restringidos, colocando un uno (1) si el grado de libertad no está restringido y un cero (0) si el g.d.l está restringido. Aquellos nodos que no posean ninguna restricción, no se colocan. Se escribe el número del nodo restringido (uno por línea) seguido de la restricción en la dirección x y luego de la dirección y.

A continuación se enumeran los pares de nodos que están en la zona de contacto, esta numeración debe ir en orden creciente del uno (1) hasta el número que le corresponda al último par. Dicha numeración se hace de esta manera:

Número del par de nodos de la zona de contacto, Número del nodo del cuerpo contactor, Número del nodo del cuerpo contactado.

Por último se indican los números de los N elementos a estudiar (un elemento por línea).

C.4. Corrida del Programa

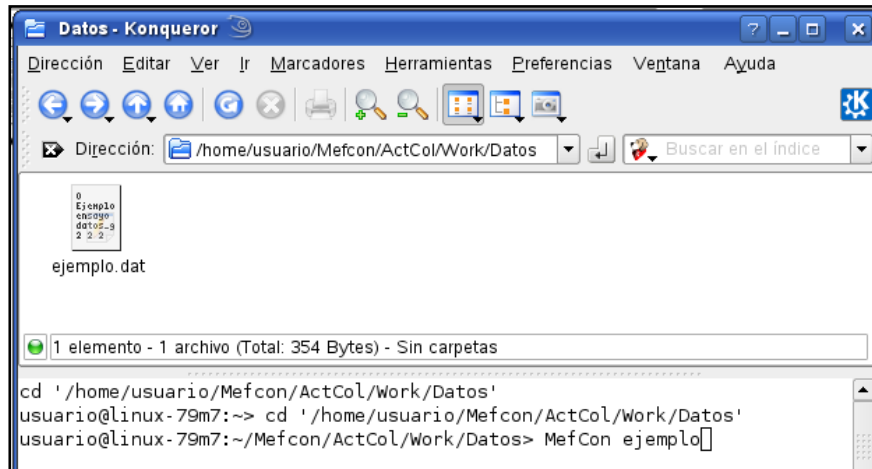
1. Ubique la carpeta con el archivo de datos (se recomienda que este se encuentre en la carpeta de datos que está en el directorio *Mefcon/ActCol/Work/Datos*), el cual debe contener los datos como se indicó en el Apéndice C.

2. Abra la consola de Linux, estando ubicados en la carpeta donde se encuentra el archivo de Datos, y teclee el comando *MefCon* seguido de un espacio en blanco y el nombre del archivo de datos sin

APÉNDICES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto Mediante el Método de Elementos Finitos

la extensión (sin el “.dat”).



```
Numero de Ecuaciones:      11
Perfil                    :      37

  Ensambla la Matriz Global

  Resolucion del Algoritmo de Contacto

  Calcula la separacion inicial entre nodos

  Factor de Escala [S] =      0.0199

  Entro en contacto el par de nodos  1 (Nodos:  3 ,  8)

No Ocurrio Contacto Total, Los Pares de Nodos que Entraron en Contacto son

  PAR (  3 ,  8) = (  1 )
Presione ENTER para Continuar

Escribe Desplazamientos Nodales

Escribe esfuerzos en elementos

Fin del Programa

usuario@linux-79m7:~/Mefcon/ActCol/Work/Datos> █
```

APÉNDICES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

APÉNDICE D

EJEMPLO DE UN ARCHIVO DE DATOS

A continuación se muestra el archivo de datos que emplea el programa para el problema del apéndice A. El proceso de su realización se puede ver con detalle en la sección C.3 del apéndice C.

0	linea1
Ejemplo	linea2
ensayo	linea3
datos_generales	linea4
2 2 2	linea5
8 5 1 4 1 3 1 1 3 2 3	linea6
materiales	linea7
1 1 0.3	linea8
coordenadas	linea9
1 0.5 1	linea10
2 0 1	linea11
3 0.25 0.625	linea12
4 0 0.5	linea13
5 0 0	linea14
6 0.25 0	linea15
7 0.5 0.5	linea16
8 0.25 0.5	linea17
conectividades	linea18
1 1 2 3 1	linea19
2 3 2 4 1	linea20
3 8 4 6 1	linea21
4 6 4 5 1	linea22
5 6 7 8 1	linea23
cargas	linea24
2 0 -2	linea25
restricciones	linea26
2 0 1	linea27
4 0 1	linea28
5 0 0	linea29
6 1 0	linea30
zona_potencial	linea31
1 3 8	linea32
2 1 7	linea33
elem_estudio	linea34
2	linea35
3	linea36
4	linea37

Figura D.1. Ejemplo de un archivo de datos.

APÉNDICES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

APÉNDICE E

LISTADO DE VARIABLES

aka: Arreglo que almacena los elementos de la columna de la matriz de rigidez correspondiente al G.D.L. "A".

akb: Arreglo que almacena los elementos de la columna de la matriz de rigidez correspondiente al G.D.L. "B".

B: Vector que almacena las cargas o los desplazamientos.

d(ij): Términos de la matriz de propiedades constitutivas del material.

db(ij): Términos de la matriz $d * b$.

DD: Arreglo que almacena los desplazamientos acumulados de los nodos.

dfi: Arreglo que almacena los coeficientes de las funciones de interpolación y sus derivadas para cada elemento.

Diago: Respaldo del vector "s", para futura verificación.

dm: Vector que almacena los coeficientes de estado plano de esfuerzo o estado plano de deformación.

esc: Escala.

fdat: Almacena el nombre del archivo de datos 1.

fka: Arreglo que almacena los elementos de la fila de la matriz de rigidez correspondiente al G.D.L. "A".

APÉNDICES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

G: Arreglo que almacena la distancia que separa a los nodos que conforman una pareja.

icon: Vector que almacena las conectividades de los elementos.

icond: Variable que indica la condición de deformación ó esfuerzo plano (orden del tensor de esfuerzos).

id: Vector que almacena las restricciones en los nodos ó el numero de la ecuación si es un nodo libre.

idiag: Vector que almacena las posiciones de los términos de la diagonal de la matriz de rigidez.

igln: Grados de libertad por nodo.

iorden: Orden de integración.

ipi: Constante que indica el espacio de memoria que ocupa un número entero.

ipk: Arreglo que almacena los números correspondientes a los nodos cargados.

ipr: Constante que indica el espacio de memoria que ocupa un número real.

ir: Define la unidad de salida de resultados.

iver: Pares de nodos que se consolidaron.

izona: Arreglo que almacena los pares de nodos de la zona potencial de contacto.

APÉNDICES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

Im: Arreglo que almacena el número de ecuación correspondiente a cada uno de los grados de libertad no restringido de los nodos pertenecientes a un elemento.

mat: Vector que almacena el material de cada elemento.

MatGlo: Vector que almacena los coeficientes de la matriz de rigidez global.

n: Número del nodo por elemento (1, 2 ó 3).

nad: Perfil. Número total de términos del vector VecA.

ndim: Número de dimensiones.

nec: Número total de ecuaciones.

nevab: Número total de variables por elemento.

nncar: Número total de nodos cargados.

nne: Número de nodos por elemento.

nnrest: Número total de nodos restringidos.

nnz: Número de nodos de la zona potencial de contacto.

nombre: Nombre del archivo de datos.

nprop: Número de propiedades de los elementos.

ntotv: Número total de variables.

NumEle: Número total de elementos.

APÉNDICES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

NumMat: Número total de materiales.

NumNod: Número total de nodos.

p: Vector que almacena las magnitudes de las cargas aplicadas en los nodos.

prop: Vector que almacena las propiedades de los materiales (Modulo de Young y Coeficiente de Poisson).

pver: Variable que indica si se escriben o no los datos de salida.

rel: Arreglo que almacena la variación relativa de desplazamientos entre los nodos que conforman un par de nodos.

s: Arreglo que almacena los coeficientes de la matriz de rigidez del elemento.

sx: Esfuerzo en la dirección x.

sy: Esfuerzo en la dirección y.

sz: Esfuerzo en la dirección z.

T: Arreglo que almacena la penetración para cada pareja de nodos.

ue: Arreglo que almacena los desplazamientos de los nodos de un elemento.

ver: Indicador de visualización de datos.

x: Vector que almacena las coordenadas de los nodos.

APÉNDICES

Implementación de un Programa para la Simulación de Problemas de Esfuerzos de Contacto
Mediante el Método de Elementos Finitos

xe: Arreglo que almacena las coordenadas de los nodos de un elemento.