

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica
"Melchor Centeno Vallenilla"

Cálculo Operacional

Prof. Ebert Brea, PhD

Ebert Brea, PhD, MSc, Ing.
Profesor Titular
Email: ebert.brea@ucv.ve

Caracas, 12 de abril de 2014

A mi amada esposa, Marlene.

Contenido

1. Teoría de Distribución	1
1.1. Preliminares	2
1.2. Distribución y propiedades	2
1.3. La función generalizada delta de Dirac	5
1.3.1. Propiedades de la función delta	6
1.4. Límite generalizado	8
1.5. Aplicaciones	8
2. Funciones y Convolución	11
2.1. Funciones	11
2.2. Representación de las funciones	12
2.2.1. Funciones en el dominio continuo	12
2.2.2. Funciones en el dominio discreto	13
2.3. Convolución en el dominio continuo	15
2.3.1. Propiedades	16
2.3.2. Un ejemplo	17
2.4. Convolución en el dominio discreto	19
2.4.1. Propiedades	19
2.4.2. Un ejemplo	20
3. Transformada de Laplace	22
3.1. Definiciones preliminares	23
3.2. Transformadas integrales lineales	24
3.2.1. Propiedades	24
Condiciones del Núcleo	25
Propiedades de la TIL	25

3.3.	Transformada Bilateral de Laplace	31
3.3.1.	Analicidad de la transformada bilateral de Laplace	32
3.3.2.	Particularización de la transformada bilateral de Laplace	33
3.4.	Transformada Inversa de Laplace	35
3.4.1.	Fórmula integral de inversión derecha de Laplace	35
3.4.2.	Fórmula integral de inversión izquierda de Laplace	37
3.4.3.	Fórmula de Inversión	39
3.5.	Transformada unilateral de Laplace	42
3.5.1.	Transformada unilateral derecha de Laplace	43
	Propiedades	43
3.5.2.	Algunos teoremas en la TUDL	44
3.5.3.	Transformada unilateral izquierda de Laplace	46
3.6.	Ejemplos de transformadas	46
3.7.	Ejemplos de transformadas inversas	49
4.	Transformada de Fourier	51
4.1.	Definiciones	52
4.2.	Propiedades	54
4.3.	Transformada de Fourier de funciones especiales	56
4.4.	Transformada Inversa de Fourier	59
4.5.	Las transformadas de Fourier y Laplace	62
4.6.	Transformadas de Fourier de funciones periódicas	63
4.6.1.	Preliminares	64
4.6.2.	Cálculo de la transformada de Fourier de funciones periódicas	66
5.	Transformada \mathcal{Z}	70
5.1.	Preliminares	71
5.2.	Definición de transformada bilateral Z	71
5.3.	Propiedades de la transformada Z	74
5.4.	Transformada inversa Z	78

Acrónimos

TIL transformada integral lineal

TF transformada de Fourier

TIF transformada inversa de Fourier

TL transformada de Laplace

TBL transformada bilateral de Laplace

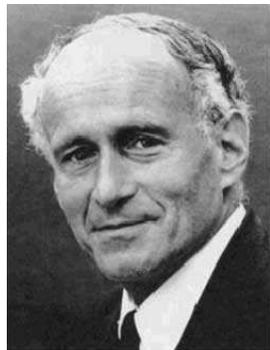
TUDL transformada unilateral derecha de Laplace

TUIL transformada unilateral izquierda de Laplace

TZ transformada \mathcal{Z}

Capítulo 1

Teoría de Distribución



Laurent Schwartz



Paul A. M. Dirac

Una síntesis de la controversial *teoría de distribución* propuesta por Schwart¹ es presentada en este capítulo. No obstante, más allá de desarrollar la teoría, el objeto es mostrar algunas propiedades importantes para establecer algunos aspectos de la notación y propiedades de la función delta de Dirac, la cual fue introducida por Paul Dirac², y es ampliamente desarrollada por Gel'fand y Shilov (1964).

El contenido de este capítulo es: en la Sección 1.1 son establecidas algunas definiciones y condiciones. Un resumen de la teoría general de las funciones generalizadas es presentada en la Sección 1.2. En la Sección 1.3 es introducida la definición de la distribución delta de Dirac. Un breve desarrollo del concepto de límite generalizado es presentado en la Sección 1.4. Finalmente, en la Sección 1.5 son desarrollados dos ejemplos básicos de aplicación de la teoría de distribución.

¹Laurent Schwartz, nació el 5 de marzo de 1915 en París, Francia y falleció el 4 de julio de 2002 en París.

²Paul Adrien Maurice Dirac, nació el 8 de agosto 1902 en Bristol, Gloucestershire, Inglaterra y falleció el 20 de octubre de 1984 en Tallahassee, Florida, USA.

Los retratos fueron obtenidos de

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Indexes/Full_Alph.html

1.1. Preliminares

Definición 1.1 (Función de Prueba). Sea K el espacio de las funciones de pruebas tal que una función $\varphi(x)$ pertenece al espacio K , si $\varphi(x)$ es una función real con derivadas n -ésima continuas en el dominio $x \in \mathbb{R}$.

Definición 1.2 (Función Generalizada). Se dice que $g(x)$ es una función continua y lineal en \mathbb{R} , si existe alguna regla que asocie a cada $\varphi(x)$ en K , un número real $N_{g(x)}[\varphi(x)]$ tal que satisfaga las siguientes condiciones:

Condición 1.1 (Linealidad de $g(x)$). Para m números reales α_i y m funciones de pruebas $\varphi_i(x)$ en K , se cumple

$$N_{g(x)} \left[\sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i(x) \right] = \sum_{i=1}^m \alpha_i N_{g(x)} [\varphi_i(x)]$$

Condición 1.2 (Continuidad de $g(x)$). Si para todo $i = 1, \dots, m$ la secuencia $\varphi_i(x) \in K$ converge a cero, entonces la secuencia $N_{g(x)}[\varphi_i(x)]$ para cada $i = 1, \dots, m$ converge a cero.

Observe el significado de linealidad y continuidad que tiene la función $g(x)$ a través de las condiciones citadas anteriormente (Gel'fand y Shilov, 1964, Pág. 3).

Como ejemplo, suponga que $g(x)$ es absolutamente integrable en su dominio $x \in \mathbb{R}$, entonces para una función de prueba $\varphi(x)$ en K puede definirse el número real $N_{g(x)}[\varphi(x)]$ dado por

$$N_{g(x)}[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)dx \quad (1.1)$$

Note que la Ecuación (1.1) satisface las condiciones 1.2 y 1.1.

1.2. Distribución y propiedades

Considerando lo anteriormente explicado se puede definir la distribución de una función generalizada $g(x)$ como el proceso de asignar a un número $N_{g(x)}[\varphi(x)]$ una función arbitraria $\varphi(x)$ del espacio K (Papoulis, 1962, Apéndice A).

Este número debe ser el resultado de algún proceso que satisfaga las Condiciones 1.2 y 1.1. Como ejemplo de un proceso supóngase el proceso dado por la Ecuación (1.1) a fin de estudiar sus propiedades por medio de los siguientes teoremas:

Teorema 1.1 (Linealidad). Sean las funciones de pruebas $\varphi_i(x) \in K$ para todo $i = 1, \dots, m$ y sea la distribución o función generalizada $g(x)$, entonces se dice que el proceso definido por la Ecuación (1.1) cumple con la linealidad si

$$N_{g(x)} \left[\sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i(x) \right] = \sum_{i=1}^m \alpha_i N_{g(x)} [\varphi_i(x)],$$

donde α_i son números reales para todo $i = 1, \dots, m$.

Demostración. Según la definición representada por la ecuación (1.1), se tiene

$$N_{g(x)} \left[\sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i(x) \right] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^m \alpha_i g(x) \varphi_i(x) dx \quad (1.2)$$

En virtud de que pueden ser permutados el orden de los operadores por su característica de linealidad, y unido al hecho que α_i no depende de la variable de integración, se tiene

$$N_{g(x)} \left[\sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i(x) \right] = \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \varphi_i(x) dx = \sum_{i=1}^m \alpha_i N_{g(x)} [\varphi_i(x)],$$

debido a la Ecuación (1.1). ■

Teorema 1.2 (Escalamiento). Sea la función de prueba $\varphi(x) \in K$ y sea la distribución o función generalizada $g(x)$, entonces

$$N_{g(ax)} [\varphi(x)] = \frac{1}{|a|} N_{g(x)} [\varphi(x/a)], \quad \forall a \neq 0 \quad (1.3)$$

Demostración. De las ecuaciones (1.3) y (1.1), se tiene

$$N_{g(ax)} [\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(ax) \varphi(x) dx \quad (1.4)$$

Si a una variable real y se le asigna el producto ax , se tiene

$$y = ax; \quad dy = a dx,$$

donde $a \neq 0$.

Empleando el cambio de variable a la Ecuación (1.4), se obtiene

$$N_{g(ax)} [\varphi(x)] = \begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \varphi(y/a) dy & \forall a > 0, \\ -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \varphi(y/a) dy & \forall a < 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Como consecuencia de la Ecuación (1.5), se puede afirmar la Ecuación (1.3). ■

Teorema 1.3 (Traslación). Sea la función de prueba $\varphi(x) \in K$ y sea la distribución o función generalizada $g(x)$, entonces

$$N_{g(x-x_0)} [\varphi(x)] = N_{g(x)} [\varphi(x+x_0)], \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad (1.6)$$

Demostración. De la ecuaciones (1.6) y (1.1), se obtiene

$$N_{g(x-x_0)}[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-x_0)\varphi(x)dx \quad (1.7)$$

Si se aplica el cambio de variable

$$y = x - x_0; \quad dy = dx,$$

donde x_0 es una constante; la Ecuación (1.7) puede ser expresada como

$$N_{g(x-x_0)}[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\varphi(y+x_0)dy \quad (1.8)$$

Como la variable de integración y en una variable muda o comodín, la integral de la Ecuación (1.8) puede ser expresada en términos de la variable x , sin que esta reasignación de variable pierda su significado. En consecuencia, la Ecuación (1.8), estaría dada por

$$N_{g(x-x_0)}[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x+x_0)dx = N_{g(x)}[\varphi(x+x_0)]$$

■

Teorema 1.4 (Derivación). *Sea la función de prueba $\varphi(x) \in K$ y sea la distribución o función generalizada $g(x)$, entonces*

$$N_{\frac{dg(x)}{dx}}[\varphi(x)] = -N_{g(x)}\left[\frac{d\varphi(x)}{dx}\right] \quad (1.9)$$

Demostración. Partiendo de la Ecuación (1.1), la Ecuación (1.9) queda como

$$N_{\frac{dg(x)}{dx}}[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dg(x)}{dx}\varphi(x)dx \quad (1.10)$$

Aplicando el método de integración por partes (Thomas, 1976, Cap. 9), se tiene

$$N_{\frac{dg(x)}{dx}}[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dg(x)}{dx}\varphi(x)dx = \varphi(x)g(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}dx \quad (1.11)$$

Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)g(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)g(x) = 0$, entonces

$$N_{\frac{dg(x)}{dx}}[\varphi(x)] = - \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}dx = -N_{g(x)}\left[\frac{d\varphi(x)}{dx}\right]$$

■

Teorema 1.5 (Derivada n -ésima). *Sea la función de prueba $\varphi(x) \in K$ y sea la distri-*

bución o función generalizada $g(x)$, entonces

$$N_{\frac{d^n g(x)}{dx^n}} [\varphi(x)] = (-1)^n N_{g(x)} \left[\frac{d^n \varphi(x)}{dx^n} \right]$$

Demostración. Aplicando el Teorema 1.4 para cada caso de n y empleando el método de inducción. ■

Teorema 1.6 (Producto). Sea la función de prueba $\varphi(x) \in K$, sea $f(x)$ una función real cualquiera y sea la distribución o función generalizada $g(x)$, entonces

$$N_{f(x)g(x)} [\varphi(x)] = N_{g(x)} [f(x)\varphi(x)] \quad \text{si } f(x)\varphi(x) \in K \quad (1.12)$$

Demostración. Empleando la definición dada por la Ecuación (1.1), se puede decir que

$$N_{f(x)g(x)} [\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) [f(x)\varphi(x)] dx = N_{g(x)} [f(x)\varphi(x)],$$

si $f(x)\varphi(x)$ es tal que pertenece al espacio de funciones K . ■

1.3. La función generalizada delta de Dirac

La función delta de Dirac $\delta(x)$ o también llamada función impulso es una distribución o función generalizada tal que cumple con

$$N_{\delta(x)} [\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0), \quad (1.13)$$

donde la función de prueba $\varphi(x)$ debe ser continua y diferenciable para $x = 0$.

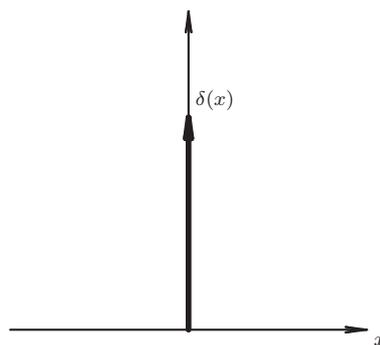


Figura 1.1. Representación de la función delta de Dirac

La Figura ?? de la página 5 muestra la forma convencional de como ha sido representada la función delta de Dirac.

Con base en la definición dada anteriormente y en las propiedades desarrolladas en la Sección 1.2, fácilmente pueden ser verificadas las siguientes propiedades para el caso particular de la distribución delta de Dirac.

1.3.1. Propiedades de la función delta

Propiedad 1.1 (Linealidad). Sean las funciones de pruebas $\varphi_i(x)$ tal que son continuas y diferenciables para $x = 0$ para todo $i = 1, \dots, m$ y sea la función delta $\delta(x)$, entonces se dice que el proceso dado por la Ecuación (1.13) cumple con

$$N_{\delta(x)} \left[\sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i(x) \right] = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i(0) \quad (1.14)$$

Propiedad 1.2 (Escalamiento). Sea la función de prueba $\varphi(x)$ continua y diferenciable para $x = 0$ y sea la función delta $\delta(x)$, entonces

$$N_{\delta(ax)} [\varphi(x)] = \frac{1}{|a|} \varphi(0) \quad \forall a \neq 0 \quad (1.15)$$

Propiedad 1.3 (Traslación). Sea la función de prueba $\varphi(x)$ continua y diferenciable para $x = 0$ y $x = x_0$, y sea la función delta $\delta(x)$, entonces

$$N_{\delta(x-x_0)} [\varphi(x)] = \varphi(x_0) \quad (1.16)$$

Propiedad 1.4 (Derivada). Sea la función de prueba $\varphi(x)$ continua y diferenciable en orden n para $x = 0$ y sea la función delta $\delta(x)$, entonces

$$N_{\frac{d\delta(x)}{dx}} [\varphi(x)] = - \left[\frac{d\varphi(x)}{dx} \right]_{x=0} = -\dot{\varphi}(0) \quad (1.17)$$

Propiedad 1.5 (Derivada n -ésima). Sea la función de prueba $\varphi(x)$ continua y diferenciable en orden n para $x = 0$ y sea la función delta $\delta(x)$, entonces

$$N_{\frac{d^n \delta(x)}{dx^n}} [\varphi(x)] = (-1)^n \left[\frac{d^n \varphi(x)}{dx^n} \right]_{x=0} \quad (1.18)$$

Note que de la Ecuación (1.15), se puede llegar a la conclusión que la función delta de Dirac es una función par de la variable independiente. Este hecho puede ser verificado si se estudia la Ecuación (1.15) para el caso particular de $a = -1$, así

$$N_{\delta(-x)} [\varphi(x)] = \varphi(0) \quad (1.19)$$

Empleando la definición dada en la Ecuación (1.13), se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx$$

Para que la Ecuación anterior sea válida debe cumplirse que

$$\delta(-x) = \delta(x) \quad \forall x$$

Adicionalmente, si $\varphi(x) = 1$ para todo x , entonces de acuerdo a la definición dada por la Ecuación (1.13)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

En conclusión la función delta es una función tal que es par y su área bajo ella debe ser igual a uno.

Teorema 1.7. *Sea $f(x)$ una real definida en $x = 0$. Si la función $f(x)$ es continua en $x = 0$, entonces*

$$f(x) \delta(x) = f(0) \delta(x)$$

Demostración. Del Teorema 1.6 se tiene que para la distribución delta de Dirac

$$N_{f(x)\delta(x)}[\varphi(x)] = N_{\delta(x)}[f(x)\varphi(x)].$$

De aquí se tiene que si $f(x)$ es continua en $x = 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) \varphi(x) dx = f(0) \varphi(0). \quad (1.20)$$

Como

$$\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx. \quad (1.21)$$

Sustituyendo la Ecuación (1.21) en la Ecuación (1.20), se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(0) \delta(x) \varphi(x) dx.$$

Esta última Ecuación es satisfecha si $f(x) \delta(x) = f(0) \delta(x)$ y $f(x)$ es continua en $x = 0$.

■

Teorema 1.8. *Sea $f(x)$ una real definida en $x = x_0$. Si la función $f(x)$ es continua en $x = x_0$, entonces*

$$f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0) \delta(x - x_0)$$

Demostración. Aplicando el mismo principio empleado en la demostración del teorema anterior se tiene que si $f(x)$ es continua en x_0 ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) \varphi(x) dx = f(x_0) \varphi(x_0). \quad (1.22)$$

De la Ecuación (1.16) se obtiene que

$$\varphi(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)\varphi(x)dx \quad (1.23)$$

Al sustituir la Ecuación (1.23) en la Ecuación (1.22), se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)f(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0)\delta(x - x_0)\varphi(x)dx,$$

lo cual es satisfecha sólo si $f(x)\delta(x - x_0) = f(x_0)\delta(x - x_0)$ y $f(x)$ es continua en x_0 . ■

1.4. Límite generalizado

Sea la sucesión de distribuciones $g_\xi(x)$ del parámetro ξ definida en el dominio de todos los $x \in \mathbb{R}$. Si existe una distribución $g(x)$ tal que para cada $\varphi(x)$ se tiene que

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \int_{-\infty}^{\infty} g_\xi(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)dx,$$

entonces

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} g_\xi(x) = g(x)$$

En consecuencia

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \int_{-\infty}^{\infty} g_\xi(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} g_\xi(x) \right] \varphi(x)dx \quad (1.24)$$

1.5. Aplicaciones

Una forma de visualizar la función delta es a través de alguna sucesión de función que converja a la función delta. Para esto, será definida la siguiente sucesión de función que converge a la función delta.

Ejemplo 1. Si la sucesión de distribuciones $f_\epsilon(x)$ del parámetro continuo $\epsilon > 0$, está dada por

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon}, & \forall |x| < \epsilon; \\ 0, & \forall |x| > \epsilon. \end{cases} \quad (1.25)$$

Entonces, $\lim_{\epsilon \downarrow 0} f_\epsilon(x) = \delta(x)$. La Figura 1.2 muestra claramente que la función $f_\epsilon(x)$ es par con respecto a la variable x y su área bajo la curva es uno, es decir, satisface dos de las propiedades de la función delta.

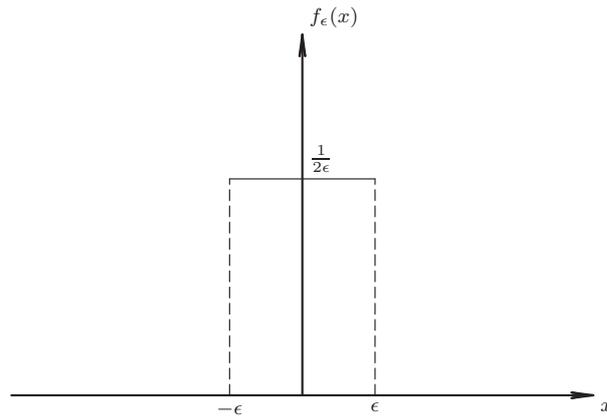


Figura 1.2. Sucesión de distribuciones $f_\epsilon(x)$

Solución 1.1. Al considerar $f_\epsilon(x)$ como una función generalizada o distribución (ver Figura 1.2), de la Ecuación (1.25) se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(x) \varphi(x) dx = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1}{2\epsilon} \varphi(x) dx \quad (1.26)$$

Dado el teorema del valor medio, si $\varphi(x)$ es continua para todo $x \in (-\epsilon, \epsilon)$, entonces existe un $x_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$, tal que

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1}{2\epsilon} \varphi(x) dx = \frac{1}{2\epsilon} \varphi(x_0) [\epsilon - (-\epsilon)] = \varphi(x_0).$$

Cuando $\epsilon \rightarrow 0$, siendo $\epsilon > 0$, el cual será denotado como $\epsilon \downarrow 0$, se tiene que al aplicar el límite a la Ecuación (1.26), se puede decir que

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\epsilon} \varphi(x) dx = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx. \quad (1.27)$$

Empleando la Ecuación (1.24) se tiene que la Ecuación (1.27), puede ser dada por

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{\epsilon \downarrow 0} f_\epsilon(x) \right] \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx$$

En consecuencia

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} f_\epsilon(x) = \delta(x)$$

El lector debe tratar de imaginar la transformación que sufre la sucesión de distribuciones $f_\epsilon(x)$ del parámetro continuo $\epsilon > 0$, cuando su parámetro tiende a cero.

Ejemplo 2. Sea la función escalón dada por

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \forall x > 0; \\ 0, & \forall x < 0. \end{cases}$$

Probar que la derivada de $u(x)$ con respecto a x converge a la distribución $\delta(x)$.

Solución 1.2. Considere la función $u(x)$ como una distribución, así

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d[u(x)]}{dx} \varphi(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \frac{d[\varphi(x)]}{dx} dx = - \int_0^{\infty} \frac{d[\varphi(x)]}{dx} dx \quad (1.28)$$

Si $\varphi(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$, la Ecuación (1.28), puede expresarse como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d[u(x)]}{dx} \varphi(x) dx = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx,$$

dada la Ecuación (1.13), en consecuencia,

$$\frac{d[u(x)]}{dx} = \delta(x)$$

Capítulo 2

Funciones y Convolución

Más allá de presentar un tratamiento purista de la convolución, el autor mostrará su definición operativa y algunas propiedades importantes que le son atribuidas a la convolución. Por otra parte, su operación tanto para funciones definidas en un dominio continuo como discreto será desarrollada en este capítulo a través de algunos ejemplos. Tomando en cuenta que la convolución puede ser definida para diversos tipos de funciones, en este escrito sólo se presentará la convolución para funciones no periódicas.

El contenido de este capítulo es: en la Sección 2.1 serán presentadas las definiciones de tipos de funciones desde el punto de vista de sus dominios. Ejemplos de funciones en el dominio continuo y discreto son presentadas en la Sección 2.2. En la Sección 2.3 es definida la integral de convolución y algunos casos de estudios a objeto de ilustrar el método de cálculo. Finalmente en la Sección 2.4 es definida la convolución para funciones en el dominio discreto y un ejemplo de la convolución.

2.1. Funciones

De acuerdo a la naturaleza de las variables independientes, las funciones pueden ser clasificadas en funciones en el dominio continuo y funciones en el dominio discreto. Partiendo de este enfoque se presentarán las siguientes definiciones de funciones dependientes de una sola variable:

Definición 2.1 (Funciones en el dominio continuo). *Se entenderá por funciones en el dominio continuo de una variable independiente a aquellas funciones cuyo dominio y rango están definidos en el campo de los números reales. Eso quiere decir que si $f(x)$ es una función en el dominio continuo, $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.*

Definición 2.2 (Funciones en el dominio discreto). *Se entenderá por funciones en el dominio discreto de una variable independiente a aquellas funciones cuyo dominio está definido en el campo de los números enteros, mientras que su rango está definido en el campo de los números reales. Eso quiere decir que si $f[n]$ es una función en el dominio discreto, $f[n] : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$.*

2.2. Representación de las funciones

Esta Sección presentará un punto de vista de cómo representar las funciones de acuerdo al tipo de dominio. Sin embargo, dado que el lector no está familiarizado con el concepto de función en el dominio discreto, son incluidas definiciones básicas de funciones en el dominio discreto.

2.2.1. Funciones en el dominio continuo

Antes de presentar estas funciones, sería conveniente revisar algunas definiciones elementales que serán de gran utilidad en la representación de funciones en el dominio continuo.

Dos funciones que son comúnmente empleadas en los cursos de Ingeniería Eléctrica son las funciones pulso rectangular y pulso triangular las cuales serán definidas a continuación:

Definición 2.3 (Pulso rectangular). Sea $p_a(x)$ una función denominada pulso rectangular dada por la expresión

$$p_a(x) = \begin{cases} 1, & \forall |x| < a; \\ 0, & \forall |x| > a. \end{cases}$$

Una representación gráfica de esta función es mostrada en la Figura 2.1

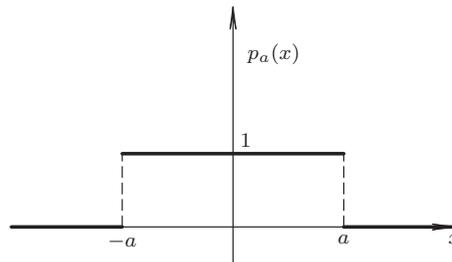


Figura 2.1. Función pulso rectangular

Definición 2.4 (Pulso triangular). Sea $q_a(x)$ una función denominada pulso triangular expresada por

$$q_a(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{a}, & \forall |x| < a; \\ 0, & \forall |x| \geq a. \end{cases}$$

Un ejemplo gráfico de esta función puede verse en la Figura de abajo

Adicionalmente, es conveniente definir la función $\text{senc}_{\omega_0}(x)$, la cual tiene mucha importancia en el análisis de Fourier.

Definición 2.5 ($\text{senc}_{\omega_0}(x)$). Sea $\text{senc}_{\omega_0}(x)$ una función en el dominio continuo representada por

$$\text{senc}_{\omega_0}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\omega_0 x)}{\omega_0 x}, & \forall x \neq 0; \\ 1, & \forall x = 0. \end{cases}$$

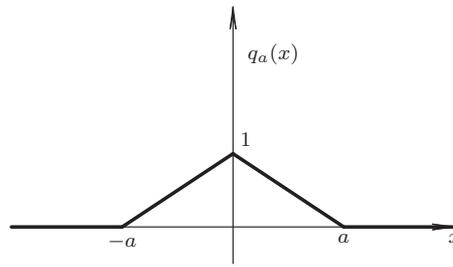


Figura 2.2. Función pulso triangular

La Figura 2.3 muestra una representación de la función $\text{senc}_{\omega_0}(x)$ para $\omega_0 = 2\pi$.

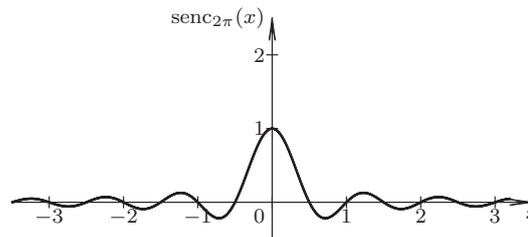


Figura 2.3. Representación gráfica de $\text{senc}_{2\pi}(x)$

Las funciones en el dominio continuo son ampliamente conocidas en los diferentes cursos de análisis matemático, donde se establece que ellas están completamente especificadas si se conoce la llamada regla de asignación junto a su dominio de validez. Un ejemplo de estas funciones es

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \forall x < 0; \\ 10 - x, & \forall 0 < x < 15; \\ 1, & \forall x > 15. \end{cases}$$

Note que la función expresada anteriormente no es continua en los puntos $x = 0$ y $x = 15$, sin embargo, la función es definida en el dominio continuo debido al hecho que $x \in \mathbb{R}$.

2.2.2. Funciones en el dominio discreto

Debido a que el lector pudiera no estar familiarizado con las funciones en el dominio discreto en el contexto de los cursos de análisis matemático, serán presentadas unas definiciones básicas para luego explicar su significado. Adicionalmente, el lector debería consultar estos conceptos en (Oppenheim *et al.*, 1997, Cap. 1) y en (Ziemer *et al.*, 1993, Cap. 8).

Definición 2.6 (Impulso unitario discreto). Denote como $\delta[n]$ la función impulso

unitario definida en el dominio discreto y cuya expresión es

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & \forall n = 0; \\ 0, & \forall n \neq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Una forma de representar la función impulso unitario discreta es mostrada en la Figura 2.4.

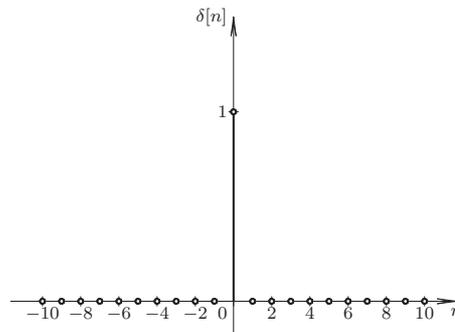


Figura 2.4. Representación de la función impulso unitario discreto

Observación 2.1. En general $\delta(n - n_0)$ es un impulso unitario discreto ubicado en $n = n_0$, es decir

$$\delta[n - n_0] = \begin{cases} 1, & \forall n = n_0; \\ 0, & \forall n \neq n_0. \end{cases}$$

Propiedad 2.1. Sea $f[n]$ una función definida en el dominio discreto. Entonces

$$f[n]\delta[n - n_0] = f[n_0]\delta[n - n_0],$$

donde n_0 es un número entero en el cual se encuentra trasladado el impulso unitario (Oppenheim et al., 1997, Cap. 1).

Definición 2.7 (Escalón unitario discreto). Denote como $u[n]$ la función escalón unitario definida en el dominio discreto y cuya expresión matemática es

$$u[n] = \begin{cases} 1, & \forall n \geq 0; \\ 0, & \forall n < 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Suponga que se coloca una cantidad de dinero C , en una cuenta de ahorro de alguna institución financiera y cuyos intereses son abonado mensualmente. Si se considera el presente mes como el mes cero y no es realizada ninguna operación de retiro, la cantidad de dinero ahorrado en esa institución financiera al término de cada futuro mes, puede ser

visto como una función definida en valores discretos de los meses dada por

$$f_n = \begin{cases} 0, & \forall n < 0; \\ C(1+i)^n, & \forall n \geq 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

donde i representa la tasa de interés mensual.

Note que mediante el empleo de las ecuaciones (??) y (2.2), la Ecuación (2.3) puede ser expresada analíticamente como

$$f[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(1+i)^k \delta[n-k]u[n], \quad \forall n.$$

Basado en esta notación, la función escalón unitario dada por la Ecuación (2.2) puede ser expresada como:

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k), \quad \forall n.$$

Ahora considere el número de llamadas telefónicas diarias que son conectadas entre dos centrales telefónicas. La Tabla 2.1 muestra los datos en millones de llamadas por día, para una semana típica.

Tabla 2.1. Número de llamadas, en millones, para una semana típica

día	Do	Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sa
ℓ	10	20	30	30	50	40	20

Además suponga como referencia del tiempo el día lunes, es decir, el lunes es considerado como $n = 0$.

De acuerdo a las consideraciones enunciadas anteriormente, los valores indicados en la Tabla 2.1 se pueden expresar mediante la siguiente función en el dominio discreto

$$\ell[n] = 10\delta[n+1] + 20\delta[n] + 30\delta[n-1] + 30\delta[n-2] + 50\delta[n-3] + 40\delta[n-4] + 20\delta[n-5]. \quad (2.4)$$

El lector debería verificar que la función descrita por la Ecuación (2.4) satisface los datos de la Tabla 2.1.

2.3. Convolución en el dominio continuo

Definición 2.8 (Convolución). *En el dominio continuo, una convolución es una integral que expresa la medida de "cobrimiento" o de "mezcla" de una función cuando es desplazada*

con relación a otra función. En términos matemáticos la convolución es definida como

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x - \tau)d\tau, \quad \forall x. \quad (2.5)$$

2.3.1. Propiedades

Las propiedades de la convolución en el dominio continuo serán estudiadas por medio de los siguientes teoremas:

Teorema 2.1 (Conmutatividad). Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones definidas en el dominio \mathbb{R} , entonces

$$f(x) * g(x) = g(x) * f(x).$$

Demostración. De la Definición 2.8, se tiene

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x - \tau)d\tau \quad (2.6)$$

Haciendo el cambio de variable $y = x - \tau$, se tiene que $dy = -d\tau$, lo cual permite expresar el lado derecho de la Ecuación (2.6) como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x - \tau)d\tau = \int_{\infty}^{-\infty} f(x - y)g(y) (-dy) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y)dy. \quad (2.7)$$

Como la última integral de la Ecuación (2.7) puede ser operada en términos de la variable muda τ , se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(x - \tau)d\tau.$$

■

Teorema 2.2 (Asociatividad). Sean $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ tres funciones definidas en el dominio \mathbb{R} , entonces

$$f(x) * g(x) * h(x) = [f(x) * g(x)] * h(x) = f(x) * [g(x) * h(x)].$$

Demostración. EL lector puede verificar fácilmente este teorema. ■

Teorema 2.3 (Distributividad). Sean $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ tres funciones definidas en el dominio \mathbb{R} , entonces

$$f(x) * [g(x) + h(x)] = f(x) * g(x) + f(x) * h(x).$$

Demostración. Empleando la definición de convolución, se tiene

$$f(x) * [g(x) + h(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) [g(x - \tau) + h(x - \tau)] d\tau. \quad (2.8)$$

Del lado derecho de la Ecuación (2.8), se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) [g(x - \tau) + h(x - \tau)] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [f(\tau)g(x - \tau) + f(\tau)h(x - \tau)] d\tau,$$

la cual claramente queda expresada como

$$f(x) * [g(x) + h(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x - \tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(x - \tau)d\tau.$$

La Ecuación anterior demuestra el teorema. ■

2.3.2. Un ejemplo

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones definidas por

$$f(x) = k_f \cdot p_1(x + 3) \quad \text{y} \quad g(x) = -k_g \cdot p_2(x - 4), \quad (2.9)$$

donde $k_f > 0$ y $k_g > 0$.

Para las funciones dadas, se tiene

$$f(\tau) = \begin{cases} k_f & \forall |\tau + 3| < 1, \\ 0 & \forall |\tau + 3| > 1 \end{cases}$$

y

$$g(x - \tau) = \begin{cases} -k_g & \forall |(x - \tau) - 4| < 2, \\ 0 & \forall |(x - \tau) - 4| > 2. \end{cases}$$

Otra manera de expresar las funciones $f(\tau)$ y $g(x - \tau)$ es

$$f(\tau) = \begin{cases} k_f & \forall -4 < \tau < -2, \\ 0 & \forall \tau < -4 \wedge \tau > -2 \end{cases}$$

y

$$g(x - \tau) = \begin{cases} -k_g & \forall x - 6 < \tau < x - 2, \\ 0 & \forall \tau < x - 6 \wedge \tau > x - 2 \end{cases}$$

La Figura 2.5 muestra una imagen “congelada” para el caso particular $x = 3$. Note que el origen de coordenadas de la función $g(x - \tau)$ se encuentra justo en $x = 3$ de la escala de x representada en la parte inferior del gráfico. El lector puede entonces imaginar lo que ocurre con la función $g(x - \tau)$ en distintas situaciones de x . Por ejemplo, cuando $x < -2$,

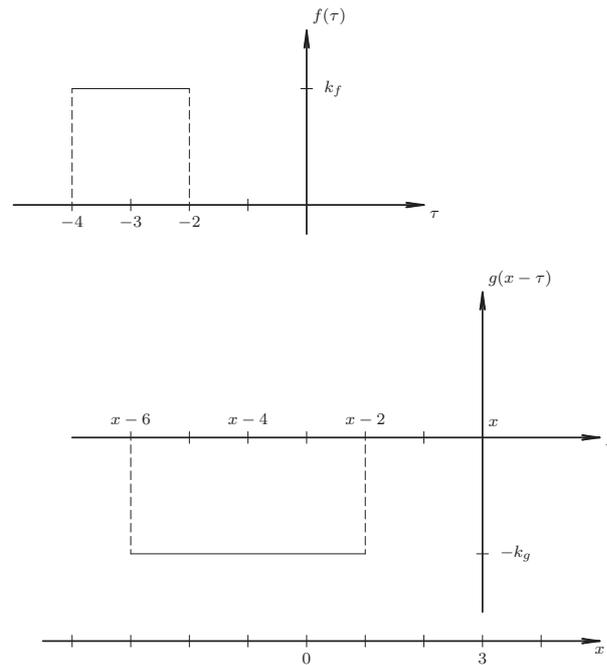


Figura 2.5. Representación de $f(\tau)$ y $g(x-\tau)$ para $x = 3$

el producto de ambas funciones se anula, así como cuando $x > 4$. Sin más preámbulos, será expresada la integral de convolución para el caso particular que se está estudiando.

$$c(x) = f(x) * g(x) = \begin{cases} 0, & \forall x < -2; \\ \int_{-4}^{x-2} -k_g k_f d\tau = -k_g k_f (x+2), & \forall -2 \leq x < 0; \\ \int_{-4}^{-2} -k_g k_f d\tau = -2k_g k_f, & \forall 0 \leq x < 2; \\ \int_{x-6}^{-2} -k_g k_f d\tau = k_g k_f (x-4), & \forall 2 \leq x < 4; \\ 0, & \forall x \geq 4. \end{cases} \quad (2.10)$$

Una representación gráfica del resultado de la convolución es mostrado en la Figura 2.6. El lector podrá verificar el resultado a través del área bajo la función producto $g(\tau)f(x-\tau)$ para los valores de $x = -2, 0, 2$ y 4 .

Un interesante ejercicio es la realización de la convolución $f(x) * f(x) * f(x)$, donde $f(x)$ está dada por la Ecuación (2.9). Otro interesante ejemplo es la convolución de $q_4(x+2)$ con la función escalón unitario $u(x)$, la cual es definida por

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \forall x > 0; \\ 0, & \forall x < 0. \end{cases}$$

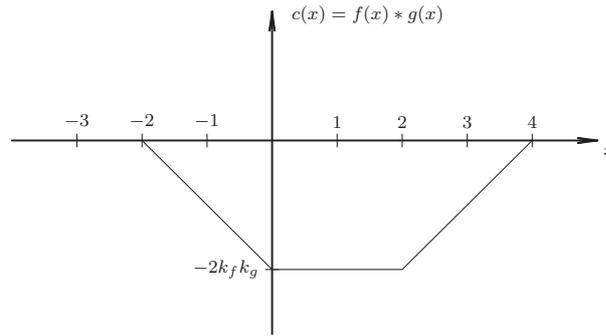


Figura 2.6. Representación gráfica de $c(x) = f(x) * g(x)$ dada por la Ecuación (2.10)

2.4. Convolución en el dominio discreto

Definición 2.9 (Convolución discreta). *En el dominio discreto, una convolución es una suma que representa la cantidad de “cubrimiento” de una función o secuencia discreta cuando es desplazada con relación a otra. En términos matemáticos la convolución puede ser definida como*

$$f[n] * g[n] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} f(q)g(n - q). \quad (2.11)$$

Una explicación basada en la discretización de la integral de convolución es ampliamente desarrollada por Papoulis (1980).

2.4.1. Propiedades

Las propiedades de la convolución en el dominio discreto también serán estudiadas a través de los siguientes teoremas:

Teorema 2.4 (Conmutatividad). *Sean $f[n]$ y $g[n]$ dos funciones o secuencias discretas definidas en el dominio \mathbb{Z} , entonces*

$$f[n] * g[n] = g[n] * f[n].$$

Demostración. De la Ecuación (2.11) se tiene

$$f[n] * g[n] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} f(q)g(n - q). \quad (2.12)$$

Haciendo el cambio de variable $k = n - q$, se obtiene

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} f(q)g(n - q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n - k)g(k). \quad (2.13)$$

Como operar la suma para variaciones de k desde ∞ hasta $-\infty$, es equivalente a realizarla desde $-\infty$ hasta ∞ , se puede expresar la Ecuación (2.13), como

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)f(n-k) = g[n] * f[n].$$

■

Teorema 2.5 (Asociatividad). Sean $f[n]$, $g[n]$ y $h[n]$ tres funciones discretas definidas en el dominio \mathbb{Z} , entonces

$$f[n] * g[n] * h[n] = [f[n] * g[n]] * h[n] = f[n] * [g[n] * h[n]].$$

Demostración. La demostración de este teorema es dejada al lector. ■

Teorema 2.6 (Distributividad). Sean $f[n]$, $g[n]$ y $h[n]$ tres funciones definidas en el dominio \mathbb{Z} , entonces

$$f[n] * [g[n] + h[n]] = f[n] * g[n] + f[n] * h[n].$$

Demostración. Empleando la definición dada por la Ecuación (2.11), se obtiene

$$\begin{aligned} f[n] * [g[n] + h[n]] &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} f(q) [g(n-q) + h(n-q)] \\ f[n] * [g[n] + h[n]] &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} f(q)g(n-q) + \sum_{q=-\infty}^{\infty} f(q)h(n-q), \end{aligned}$$

lo cual demuestra el teorema. ■

2.4.2. Un ejemplo

Sean $f[n]$ y $g[n]$ dos funciones en el dominio discreto representadas por

$$\begin{aligned} f[n] &= \sum_{k=-1}^4 k\delta(n-k) \quad \forall n, \\ g[n] &= \delta(n-1) + \delta(n-2) \quad \forall n. \end{aligned} \tag{2.14}$$

De la Ecuación (2.14), puede ser expresada la función $f[n]$ como

$$f[n] = -\delta(n+1) + \delta(n-1) + 2\delta(n-2) + 3\delta(n-3) + 4\delta(n-4).$$

En consecuencia las funciones $f(q)$ y $g(n-q)$ son

$$\begin{aligned} f(q) &= -1\delta(q+1) + \delta(q-1) + 2\delta(q-2) + 3\delta(q-3) + 4\delta(q-4) \quad \forall q, \\ g(n-q) &= \delta(n-q-1) + \delta(n-q-2) \quad \forall q. \end{aligned}$$

Para las funciones dadas, si se emplea la Ecuación (2.11), entonces se obtiene

$$c[n] = f[n] * g[n] = \begin{cases} 0, & \forall n \leq -1; \\ -1, & \forall n = 0; \\ -1, & \forall n = 1; \\ 1, & \forall n = 2; \\ 3, & \forall n = 3; \\ 5, & \forall n = 4; \\ 7, & \forall n = 5; \\ 4, & \forall n = 6; \\ 0, & \forall n \geq 7. \end{cases} \quad (2.15)$$

Otra forma de expresar la Ecuación (2.15) es empleando la notación de impulso discreto unitario, la cual está dada por

$$c[n] = -\delta[n] - \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + 3\delta[n - 3] + 5\delta[n - 4] + 7\delta[n - 5] + 4\delta[n - 6], \quad \forall n.$$

Un ejemplo interesante para el lector es la convolución $f[n] * f[n] * f[n]$, donde su representación gráfica puede ser útil en el entendimiento de la convolución en el dominio discreto.

Capítulo 3

Transformada de Laplace



Pierre Simon Laplace



Leonhard Euler

Una síntesis de la teoría de la transformada de Laplace, llamada así en honor a Pierre Simon Laplace³, es presentada en este escrito. Según lo reportado en la historia de las matemáticas, la transformada de Laplace fue introducida por Euler a través de su trabajo intitulado *De constructione aequationum*, presentado ante la Academia de San Petersburgo el 7 de febrero de 1737 y publicado en 1744. Es por esta razón que la transformada de Laplace podría ser atribuida a Euler⁴. No obstante, de acuerdo a Bäumer y Neubrander (1994), su actual definición se debe al desarrollo que ha tenido debido a las contribuciones de muchos matemáticos tales como: Euler, Lagrange, Laplace, Fourier, Poisson, Cauchy, Abel, Liouville, Boole, Riemann, Pincherle, Amaldi, Tricomi, Picard, Mellin, Borel, Heaviside, Bateman, Titchmarsh, Bernstein, Doetsch, Widder entre muchos otros.

Su definición desde el punto de vista de una función compleja, obliga al lector a repasar los conceptos de integrales de líneas en el campo de la variable compleja, la cual debe ser tratada tanto para las definiciones de transformada de Laplace unilateral como para su definición bilateral.

³Pierre Simon Laplace, nació el 23 de marzo de 1749 en Beaumont-en-Auge, Normandy, Francia y falleció el 5 de marzo de 1827 en París.

⁴Leonhard Euler, nació el 15 de abril de 1707 in Basel, Suiza y falleció el 18 de septiembre de 1783 en San Petersburgo, Rusia.

Los retratos fueron obtenidos de http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Indexes/Full_Alph.html

El material presentado en este capítulo muestra un punto de vista general de la transformada de Laplace, en donde se presentará una breve teoría de la transformada integral lineal propuesta por Churchill (1971).

El resto de este capítulo contiene: en la sección 3.1 son presentadas algunas definiciones básicas empleadas en el escrito. Un punto de vista general de la teoría de transformada integral lineal es introducido en la sección 3.2 demostrando algunas propiedades empleadas en las transformadas integrales lineales. La definición general de transformada de Laplace es presentada en la sección 3.3, con el objeto de estudiar posteriormente sus casos particulares en la sección 3.5. Finalmente un enfoque desde la teoría de variable compleja es presentado en la sección 3.4 para el cálculo de la transformada inversa de Laplace.

3.1. Definiciones preliminares

Definición 3.1 (Función seccionalmente continua). *Se denomina una función seccionalmente continua en el intervalo $a < t < b$ (con a y b sin restricciones de signo), a aquella función que está definida por un número finito de subintervalos interiores al intervalo (a, b) y las curvas que se encuentran en dichos subintervalos representan funciones continuas con posibles puntos de discontinuidad de saltos finitos en los extremos de cada subintervalo.*

Observación 3.1. *Las funciones seccionalmente continuas pueden o no estar definida en los posibles puntos de discontinuidades.*

Suponga que $f(t)$ está definida de modo general por la Ecuación (3.1), donde las funciones definidas en cada subintervalo son funciones continuas en el dominio definido para cada uno, esto es

$$f(t) = \begin{cases} f_a(t) & \forall -\infty < t < a, \\ f_1(t) & \forall a \leq t < T_1, \\ f_2(t) & \forall T_1 < t < T_2, \\ f_3(t) & \forall T_2 < t < b, \\ f_b(t) & \forall b < t < \infty. \end{cases} \quad (3.1)$$

La Figura 3.1 muestra un ejemplo de una función seccionalmente continua donde la función no está definida en los saltos de discontinuidades a excepción en $t = a$.

Definición 3.2 (Función de orden exponencial). *Se dice que una función es de orden exponencial, denotándola por $\mathcal{O}(e^{\alpha t})$, si es de orden exponencial cuando su variable independiente, denótese por t , tiende a menos infinito y cuando tiende a infinito.*

Observación 3.2. *$f(t)$ es de orden exponencial cuando t tiende a menos infinito, si el producto de $|f(t)|e^{-\alpha_1 t}$ está acotado para un $t < T_1$.*

Observación 3.3. *$f(t)$ es de orden exponencial cuando t tiende a infinito, si el producto de $|f(t)|e^{-\alpha_2 t}$ está acotado para un $t > T_1$.*

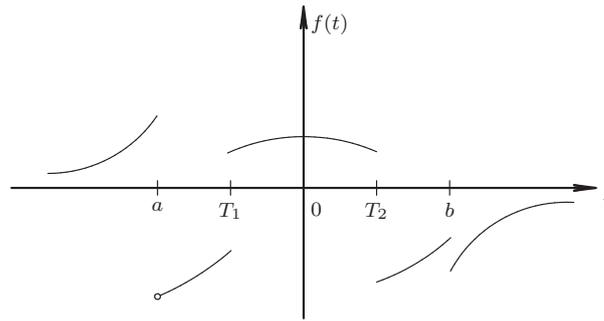


Figura 3.1. Un ejemplo de una función seccionalmente continua

De las observaciones anteriores se tiene que si una función $f(t)$ es de orden exponencial, para una función $f(t)$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & \forall t < 0, \\ f_2(t) & \forall t > 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

entonces $f_1(t)$ es $\mathcal{O}(e^{\alpha_1 t})$ para $t < -T_1 < 0$, y $f_2(t)$ es $\mathcal{O}(e^{\alpha_2 t})$ para $t > T_2 > 0$.

De la observaciones 3.2 y 3.3, se puede deducir fácilmente que si la función $f(t)$ dada por la Ecuación (3.2) es de orden exponencial, entonces $|f_1(t)| \leq M_1 e^{\alpha_1 t}$ para $t < -T_1$, donde M_1 y T_1 son constantes no negativas. De igual modo puede concluirse que $|f_2(t)| \leq M_2 e^{\alpha_2 t}$ para $t > T_2$, donde M_2 y T_2 son también constantes no negativas. Tanto α_1 como α_2 no tienen restricciones de signo.

3.2. Transformadas integrales lineales

La transformada integral lineal (TIL) de una función $f(t)$ puede definirse como

$$F(\lambda) = \mathcal{T}[f(t)] = \int_a^b f(t)N(\lambda, t)dt, \quad \forall \lambda \in D, \quad (3.3)$$

donde λ es la variable independiente de $F(\lambda)$ en el dominio transformado, D es el dominio en el cual se garantiza la convergencia de la integral dada por la Ecuación (3.3), y $N(\lambda, t)$ es el llamado núcleo de la TIL definida para cada caso. Este último suele denotarse también como $K(\lambda, t)$ del término inglés *kernel* (Churchill, 1971, Cap. 10).

3.2.1. Propiedades

A objeto de definir algunas propiedades generales de la TIL, se considerarán las siguientes condiciones sobre el núcleo de la transformada definida como $N(\lambda, t)$.

Condiciones del Núcleo

Condición 3.1. El núcleo $N(\lambda, t)$ es una función derivable sobre el dominio t y tiene derivada n -ésima con respecto a t

$$\frac{d^n N(\lambda, t)}{dt^n} = \lambda^n N(\lambda, t).$$

Condición 3.2. El núcleo $N(\lambda, t)$ es una función entera sobre el dominio λ y tiene derivada n -ésima con respecto a λ

$$\frac{d^n N(\lambda, t)}{d\lambda^n} = t^n N(\lambda, t).$$

Condición 3.3. El núcleo $N(\lambda, t)$ es una función tal que

$$N(\lambda, t + \alpha) = N(\lambda, t)N(\lambda, \alpha),$$

donde α es una constante.

Condición 3.4. El núcleo $N(\lambda, t)$ es una función tal que

$$N(\lambda + \beta, t) = N(\lambda, t)N(\beta, t),$$

donde β es una constante.

Condición 3.5. El núcleo $N(\lambda, t)$ es una función tal que puede ser expresada como una función del producto de λt , esto es

$$N(\lambda, t) = N(\lambda \cdot t).$$

Propiedades de la TIL

Las propiedades de la TIL serán estudiadas a través de los siguientes teoremas.

Teorema 3.1 (Linealidad). Sea $f_k(t)$ funciones con TIL dada por $F_k(\lambda) = \mathcal{T}[f_k(t)]$ $\forall \lambda \in D_k$, donde D_k es la región de convergencia. Entonces

$$\mathcal{T}\left[\sum_{k=1}^n a_k f_k(t)\right] = \sum_{k=1}^n a_k F_k(\lambda), \quad \forall \lambda \in \bigcap_{k=1}^n D_k,$$

donde a_k son constantes para todo k .

Demostración. De la Ecuación (3.3) se tiene

$$\mathcal{T}\left[\sum_{k=1}^n a_k f_k(t)\right] = \int_a^b \sum_{k=1}^n a_k f_k(t) N(\lambda, t) dt = \sum_{k=1}^n \int_a^b a_k f_k(t) N(\lambda, t) dt = \sum_{k=1}^n a_k F_k(\lambda),$$

donde a_k son constantes para todo k .

Note que la convergencia de cada TIL se cumple si $\lambda \in \bigcap_{k=1}^n D_k$ ■

Teorema 3.2 (Traslación en t). Sea $f(t)$ una función tal que $f(t) = 0, \forall t \notin [a, b]$ y con TIL dada por $F(\lambda) = \mathcal{T}[f(t)], \forall \lambda \in D$. Si la condición 3.3 es satisfecha, entonces

$$\mathcal{T}[f(t - T_0)] = N(\lambda, T_0)F(\lambda), \quad \forall \lambda \in D$$

Demostración. De acuerdo a la condición de $f(t)$ se tiene que

$$f(t) = 0, \quad \forall t < a \vee t > b$$

lo cual implica que

$$f(t - T_0) = 0, \quad \forall t < a + T_0 \vee t > b + T_0$$

Dado lo anterior y de la Ecuación (3.3) se tiene

$$\mathcal{T}[f(t - T_0)] = \int_{a+T_0}^{b+T_0} f(t - T_0)N(\lambda, t)dt, \quad (3.4)$$

debido a la traslación de la función $f(t - T_0)$.

Haciendo un cambio de variable, eso es, $x = t - T_0$, se obtiene

$$\mathcal{T}[f(t - T_0)] = \int_a^b f(x)N(\lambda, x + T_0)dx.$$

Como la condición 3.3 es satisfecha, $N(\lambda, x + T_0) = N(\lambda, x)N(\lambda, T_0)$, entonces

$$\mathcal{T}[f(t - T_0)] = N(\lambda, T_0) \int_a^b f(x)N(\lambda, x)dx = N(\lambda, T_0)F(\lambda) \quad \forall \lambda \in D.$$

■

Teorema 3.3 (Cambio de escala). Sea $f(t)$ una función tal que $f(t) = 0 \forall t \notin [a, b]$. Si la TIL de la función $f(t)$ está dada por $F(\lambda) = \mathcal{T}[f(t)] \forall \lambda \in D$, entonces

$$\mathcal{T}[f(ct)] = \frac{1}{|c|}F(\lambda/c), \quad \forall \lambda/c \in D,$$

donde c es una constante diferente de cero.

Demostración. Dada la condición de $f(t)$ se tiene que

$$f(t) = 0 \quad \forall t < a \vee t > b$$

De aquí se puede asegurar que $f(ct) = 0$ si:

i) para $c > 0, t < a/c \vee t > b/c$.

ii) para $c < 0$, $t < b/c \vee t > a/c$.

Empleando la Ecuación (3.3), se tiene

$$\mathcal{T}[f(ct)] = \begin{cases} \int_{a/c}^{b/c} f(ct)N(\lambda, t)dt & \forall c > 0 \wedge \lambda \in D, \\ \int_{b/c}^{a/c} f(ct)N(\lambda, t)dt & \forall c < 0 \wedge \lambda \in D. \end{cases}$$

Si se define una variable $x = ct$, entonces

$$\mathcal{T}[f(ct)] = \begin{cases} \frac{1}{c} \int_a^b f(x)N(\lambda, x/c)dx & c > 0 \wedge \lambda/c \in D, \\ -\frac{1}{c} \int_a^b f(x)N(\lambda, x/c)dx & c < 0 \wedge \lambda/c \in D. \end{cases} \quad (3.5)$$

Dada la condición 3.5, la Ecuación (3.5) puede reexpresarse como

$$\mathcal{T}[f(ct)] = \begin{cases} \frac{1}{c} \int_a^b f(x)N(\lambda/c, x)dx & c > 0 \wedge \lambda/c \in D, \\ -\frac{1}{c} \int_a^b f(x)N(\lambda/c, x)dx & c < 0 \wedge \lambda/c \in D. \end{cases}$$

En consecuencia, ambas integrales dadas arriba convergen a $F(\lambda/c)$ si $\lambda/c \in D$, lo cual implica que

$$\mathcal{T}[f(ct)] = \frac{1}{|c|}F(\lambda/c) \quad \forall \lambda/c \in D.$$

■

Teorema 3.4 (Traslación en λ). Sea $f(t)$ funciones con TIL dada por $F(\lambda) = \mathcal{T}[f(t)]$, $\forall \lambda \in D$. Si la condición 3.3 es satisfecha, entonces

$$\mathcal{T}[N(c, t)f(t)] = F(\lambda + c) \quad \forall (\lambda + c) \in D.$$

Demostración. De la Ecuación (3.3), se obtiene

$$\mathcal{T}[N(c, t)f(t)] = \int_a^b f(t)N(c, t)N(\lambda, t)dt \quad (3.6)$$

Como las condiciones 3.3 y 3.5 son satisfechas, se tiene

$$N(c, t)N(\lambda, t) = N(c + \lambda, t). \quad (3.7)$$

Empleando la Ecuación (3.7) en la Ecuación (3.6), se obtiene

$$\mathcal{T}[N(c, t)f(t)] = \int_a^b f(t)N(c + \lambda, t)dt = F(\lambda + c), \quad \forall (\lambda + c) \in D.$$

■

Teorema 3.5 (Convulación). Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones definidas en t , las cuales valen cero para $t \notin [a, b]$. Si la TIL de $f(t)$ está dada por $F(\lambda) = \mathcal{T}[f(t)] \forall \lambda \in D_f$ y la TIL de $g(t)$ está definida por $G(\lambda) = \mathcal{T}[g(t)]$, $\forall \lambda \in D_g$, entonces

$$\mathcal{T}[f(t) * g(t)] = F(\lambda)G(\lambda), \quad \forall \lambda \in D_f \cap D_g$$

Demostración. De la definición de convulación Brea (2004a), se tiene

$$\mathcal{T}[f(t) * g(t)] = \int_a^b \left[\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right] N(\lambda, t)dt \quad (3.8)$$

Bajo el supuesto de convergencia de ambas integrales, puede ser reexpresada la Ecuación (3.8) como

$$\mathcal{T}[f(t) * g(t)] = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{a+\tau}^{b+\tau} g(t-\tau)N(\lambda, t)dt \right] d\tau = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)N(\lambda, \tau)G(\lambda)d\tau \quad (3.9)$$

La Ecuación (3.9) puede ser escrita

$$\mathcal{T}[f(t) * g(t)] = \left[\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)N(\lambda, \tau)d\tau \right] G(\lambda) = F(\lambda)G(\lambda).$$

Como $f(t) = 0$ para todo $t \notin [a, b]$

$$\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)N(\lambda, \tau)d\tau = \int_a^b f(\tau)N(\lambda, \tau)d\tau,$$

y por tanto $F(\lambda)$ y $G(\lambda)$ existen para $\lambda \in D_f \cap D_g$. ■

Teorema 3.6 (Derivación en t). Sea $f(t)$ funciones con TIL dada por $F(\lambda) = \mathcal{T}[f(t)]$, $\forall \lambda \in D$. Si $\frac{df(t)}{dt}$ existe, entonces

$$\mathcal{T}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = f(t)N(\lambda, t)|_a^b - \lambda F(\lambda) \quad \forall \lambda \in D. \quad (3.10)$$

Demostración. De la definición de TIL, se tiene que

$$\mathcal{T}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_a^b \frac{df(t)}{dt} N(\lambda, t)dt.$$

Aplicando el método de integración por partes, se tiene

$$\int_a^b \frac{df(t)}{dt} N(\lambda, t)dt = f(t)N(\lambda, t)|_a^b - \int_a^b f(t)\lambda N(\lambda, t)dt, \quad (3.11)$$

dada la condición 3.1. Esto permite escribir la Ecuación (3.11), como

$$\mathcal{T} \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = f(t)N(\lambda, t)|_a^b - \lambda F(\lambda) \quad \forall \lambda \in D.$$

■

Teorema 3.7 (Derivada n -ésima en t). *Sea $f(t)$ funciones con TIL dada por $F(\lambda) = \mathcal{T}[f(t)] \forall \lambda \in D$. Si $\frac{d^n f(t)}{dt^n}$ existe, entonces*

$$\mathcal{T} \left[\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] = \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} N(\lambda, t)|_a^b + \sum_{k=1}^{n-1} (-\lambda)^k \left[\frac{d^k f(t)}{dt^k} N(\lambda, t)|_a^b \right] + (-\lambda)^n F(\lambda),$$

$\forall \lambda \in D$.

Demostración. A objeto de demostrar el teorema, será empleado el método de inducción.

Para el caso $n = 2$ de la Ecuación 3.10, se tiene que para $\lambda \in D$

$$\mathcal{T} \left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right] = \frac{df(t)}{dt} N(\lambda, t)|_a^b - \lambda \mathcal{T} \left[\frac{df(t)}{dt} \right]. \quad (3.12)$$

Aplicando la Ecuación (3.10) nuevamente en la Ecuación (3.12), se obtiene que

$$\mathcal{T} \left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right] = \frac{df(t)}{dt} N(\lambda, t)|_a^b - \lambda \left[f(t)N(\lambda, t)|_a^b - \lambda F(\lambda) \right].$$

De esta última expresión se tiene que

$$\mathcal{T} \left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right] = \frac{df(t)}{dt} N(\lambda, t)|_a^b - \lambda \left[f(t)N(\lambda, t)|_a^b \right] + \lambda^2 F(\lambda). \quad (3.13)$$

Para el caso $n = 3$, se puede decir que para $\lambda \in D$

$$\mathcal{T} \left[\frac{d^3 f(t)}{dt^3} \right] = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} N(\lambda, t)|_a^b - \lambda \mathcal{T} \left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right]. \quad (3.14)$$

Sustituyendo la Ecuación (3.13) en la Ecuación (3.14), obtiene

$$\mathcal{T} \left[\frac{d^3 f(t)}{dt^3} \right] = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} N(\lambda, t)|_a^b - \lambda \mathcal{T} \left[\frac{df(t)}{dt} N(\lambda, t)|_a^b - \lambda f(t)N(\lambda, t)|_a^b + \lambda^2 F(\lambda) \right],$$

la cual puede ser reexpresada como

$$\mathcal{T} \left[\frac{d^3 f(t)}{dt^3} \right] = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} N(\lambda, t)|_a^b - \lambda \left[\frac{df(t)}{dt} N(\lambda, t)|_a^b \right] + \lambda^2 \left[f(t)N(\lambda, t)|_a^b \right] - \lambda^3 F(\lambda)$$

De los casos $n = 1, 2$ y 3 , se puede proponer la hipótesis de inducción la cual sería para el caso $n - 1$,

$$\mathcal{T} \left[\frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} \right] = \frac{d^{n-2} f(t)}{dt^{n-2}} N(\lambda, t) \Big|_a^b + \sum_{k=1}^{n-2} (-\lambda)^k \left[\frac{d^k f(t)}{dt^k} N(\lambda, t) \Big|_a^b \right] + (-\lambda)^{n-1} F(\lambda). \quad (3.15)$$

La tesis de inducción, es decir, el caso n , se puede probar aplicando una vez más la Ecuación (3.10) al cálculo de la TIL de $\frac{d^n f(t)}{dt^n}$, quedando que

$$\mathcal{T} \left[\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] = \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} N(\lambda, t) \Big|_a^b - \lambda \mathcal{T} \left[\frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} \right] \quad (3.16)$$

Sustituyendo la Ecuación (3.15) en la Ecuación (3.16), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \left[\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] &= \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} N(\lambda, t) \Big|_a^b \\ &- \lambda \mathcal{T} \left[\frac{d^{n-2} f(t)}{dt^{n-2}} N(\lambda, t) \Big|_a^b + \sum_{k=1}^{n-2} (-\lambda)^k \left[\frac{d^k f(t)}{dt^k} N(\lambda, t) \Big|_a^b \right] + (-\lambda)^{n-1} F(\lambda) \right]. \end{aligned}$$

Reescribiendo esta última Ecuación, se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \left[\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] &= \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} N(\lambda, t) \Big|_a^b - \lambda \left[\frac{d^{n-2} f(t)}{dt^{n-2}} N(\lambda, t) \Big|_a^b \right] + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-2} (-\lambda)^{k+1} \left[\frac{d^k f(t)}{dt^k} N(\lambda, t) \Big|_a^b \right] + (-\lambda)^n F(\lambda), \end{aligned}$$

la cual puede ser reagrupada como

$$\mathcal{T} \left[\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] = \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} N(\lambda, t) \Big|_a^b + \sum_{k=1}^{n-1} (-\lambda)^k \left[\frac{d^k f(t)}{dt^k} N(\lambda, t) \Big|_a^b \right] + (-\lambda)^n F(\lambda),$$

$\forall \lambda \in D$. ■

Teorema 3.8 (Derivada n -ésima en λ). *Sea $f(t)$ funciones con TIL dada por $F(\lambda) = \mathcal{T}[f(t)] \forall \lambda \in D$. Si la condición 3.2 se cumple para todo n , entonces*

$$\frac{d^n F(\lambda)}{d\lambda^n} = \int_a^b t^n f(t) N(\lambda, t) dt, \quad \forall \lambda \in D$$

Demostración. Basado en la condición 3.2 y derivando la Ecuación (3.3) con respecto a λ se demuestra el teorema. ■

3.3. Transformada Bilateral de Laplace

En la sección 3.1 se establecieron algunas definiciones básicas que deben cumplir las funciones para que las mismas posean transformada bilateral de Laplace (TBL). En función de eso se puede definir la TBL como

$$F_{II}(s) = \mathcal{L}_{II}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad \forall s \in D, \quad (3.17)$$

donde $s = x + jy$ es la llamada frecuencia compleja, la cual debe pertenecer al denotado dominio de convergencia D para garantizar la convergencia de la integral y e^{-st} es el núcleo de la TBL el cual cumple con las condiciones impuestas en la subsección 3.2.1.

Note que el subíndice II es empleado para distinguir la TBL de la transformada unilateral derecha de Laplace (TUDL) y de la transformada unilateral izquierda de Laplace (TUIL), las cuales serán definidas posteriormente.

Suponga que $f(t)$ es seccionalmente continua y de orden exponencial, esto último implica que

$$|f(t)| \leq \begin{cases} M_1 e^{\alpha_1 t} & \forall t < -T_1 \wedge \alpha_1 > 0, \\ M_2 e^{\alpha_2 t} & \forall t > T_2 \wedge \alpha_2 < 0, \end{cases}$$

donde M_1 , T_1 , M_2 y T_2 son constantes reales positivas.

De la definición de TBL se puede establecer que

$$\mathcal{L}_{II}[f(t)] = \int_{-\infty}^{-T_1} f(t)e^{-st} dt + \int_{-T_1}^{T_2} f(t)e^{-st} dt + \int_{T_2}^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad \forall s \in D \quad (3.18)$$

Observe que la convergencia de la TBL depende de las integrales $\int_{-\infty}^{-T_1} f(t)e^{-st} dt$ y $\int_{T_2}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$, a las cuales se le estudiarán sus condiciones de convergencias.

Basado en el hecho de que la función $f(t)$ es de orden exponencial, se puede establecer que

$$\left| \int_{-\infty}^{-T_1} f(t)e^{-st} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{-T_1} |f(t)e^{-st}| dt \leq \int_{-\infty}^{-T_1} M_1 e^{(\alpha_1-x)t} dt. \quad (3.19)$$

De la Ecuación (3.19), tiene

$$\left| \int_{-\infty}^{-T_1} f(t)e^{-st} dt \right| \leq \frac{M_1 e^{-(\alpha_1-x)T_1}}{\alpha_1 - x} - \lim_{T \rightarrow -\infty} \frac{M_1 e^{(\alpha_1-x)T}}{\alpha_1 - x}. \quad (3.20)$$

Analizando la Ecuación (3.20), el valor del límite cuando T tiende a $-\infty$ converge si $\alpha_1 - x > 0$, esto implica

$$\operatorname{Re}[s] < \alpha_1 \quad (3.21)$$

Haciendo un análisis similar en la integral $\int_{T_2}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$, se tiene que

$$\left| \int_{T_2}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \right| \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{M_2 e^{(\alpha_2-x)T}}{\alpha_2 - x} - \frac{M_2 e^{(\alpha_2-x)T_2}}{\alpha_2 - x}. \quad (3.22)$$

Como puede notarse fácilmente, la integral converge si el límite de la Ecuación (3.22) converge, para lo cual $\alpha_2 - x < 0$, quedando

$$\operatorname{Re}[s] > \alpha_2 \quad (3.23)$$

En conclusión, la TBL existe si se cumplen simultáneamente las Ecuaciones (3.21) y (3.23), para esto

$$\alpha_2 < \operatorname{Re}[s] < \alpha_1 \quad (3.24)$$

3.3.1. Analiticidad de la transformada bilateral de Laplace

Debido a que la convergencia de la TBL sólo se garantiza si $\alpha_2 < \operatorname{Re}[s] < \alpha_1$, se considerará el estudio de analiticidad de $F_{II}(s)$ en la región de convergencia.

Si la TBL es vista como una función de la variable compleja $s = x + jy$, para ser analítica en esa región deberá satisfacer las condiciones necesarias y suficientes de Cauchy-Riemann en cada punto de la región (Churchill y Brown, 1992, Cap. 2).

De la definición de TBL, se tiene

$$F_{II}(s) = u(x, y) + jv(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-xt} \cos(yt)dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-xt} \sin(yt)dt \quad (3.25)$$

$\forall \alpha_2 < \text{Re } [s] < \alpha_1$.

De la Ecuación (3.25), se obtiene que para $\alpha_2 < \text{Re } [s] < \alpha_1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} &= - \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) e^{-xt} \cos(yt) dt & \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} &= \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) e^{-xt} \sin(yt) dt \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} &= - \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) e^{-xt} \sin(yt) dt & \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} &= - \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) e^{-xt} \cos(yt) dt \end{aligned} \quad (3.26)$$

De la Ecuación (3.26) se puede ver fácilmente que las condiciones necesarias de Cauchy-Riemann son satisfechas. En virtud de que en la región de convergencia corresponde a $\alpha_2 < \text{Re } [s] < \alpha_1$, se garantiza la convergencia de las integrales. Por otra parte, debido a que las derivadas parciales son continuas en la región de convergencia, puede asegurarse que $F_{II}(s)$ es analítica para cada punto $s \in \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha_2 < \text{Re } [z] < \alpha_1\}$ y su derivada primera con respecto a s está dada por

$$\frac{dF_{II}(s)}{ds} = - \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) e^{-st} dt, \quad \forall \alpha_2 < \text{Re } [s] < \alpha_1$$

Observación 3.4. La conclusión sobre la analiticidad de $F_{II}(s)$ para cada $s \in \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha_2 < \text{Re } [z] < \alpha_1\}$, permite asegurar que la función es analítica en esta región. Esto no significa que $F_{II}(s)$ pueda ser analítica en puntos $s \notin \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha_2 < \text{Re } [z] < \alpha_1\}$.

Observación 3.5. La integral $\int_{-\infty}^{-T_1} f(t)e^{-st}dt$ converge para $\text{Re } [s] < \alpha_1$, es decir, de existir algún o algunos puntos singulares o rama, existirán en la región $\text{Re } [s] > \alpha_1$. En otras palabras, a la derecha de la región de convergencia $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha_2 < \text{Re } [z] < \alpha_1\}$.

Observación 3.6. La integral $\int_{T_2}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ converge para $\text{Re } [s] > \alpha_2$, es decir, de existir algún o algunos puntos singulares o rama, existirán en la región $\text{Re } [s] < \alpha_2$. Dicho de otra manera, a la izquierda de la región de convergencia $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha_2 < \text{Re } [z] < \alpha_1\}$.

3.3.2. Particularización de la transformada bilateral de Laplace

Una forma de ver la TBL es particularizando su definición con relación al origen de coordenada del dominio. Desde este punto de vista se puede decir que la función $f(t)$ es definida como

$$f(t) = \begin{cases} f_-(t) & \forall t < 0, \\ f_+(t) & \forall t > 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Note que la función puede o no estar definida en el origen.

Basado en esta definición de la función $f(t)$, se puede definir la transformada bilateral

de Laplace como

$$\mathcal{L}_{II} [f(t)] = \int_{-\infty}^0 f_{-}(t)e^{-st} dt + \int_0^{\infty} f_{+}(t)e^{-st} dt \quad \forall \alpha_2 < \text{Re} [s] < \alpha_1 \quad (3.28)$$

Al realizar un análisis similar se obtiene la región de convergencia de la TBL. La Figura 3.2 muestra un ejemplo de una región de convergencia, en donde se representa por medio del símbolo “+” una singularidad aislada.

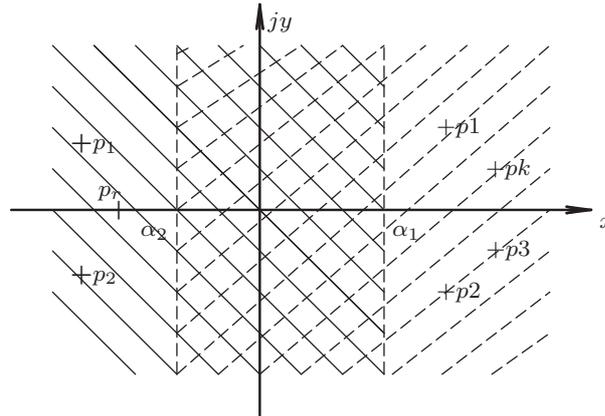


Figura 3.2. Representación de la región de convergencia

De igual forma la Figura muestra las regiones de convergencias de las integrales definidas para el dominio de tiempo positivo y negativo. Note que en la franja definida por los puntos s dada por $\alpha_2 < \text{Re} [s] < \alpha_1$ no existen singularidades y corresponde a la región de convergencia de la función $f(t)$ definida por la Ecuación (3.27).

Ejemplo 3. Si $f(t) = -e^{\alpha t}u(-t)$, donde α es una cantidad compleja y $u(t)$ es la función escalón unitario Brea (2004b), entonces

$$\mathcal{L}_{II} [-e^{\alpha t}u(-t)] = \frac{1}{s - \alpha} \quad \forall \text{Re} [s] < \text{Re} [\alpha]$$

Solución 3.1. Aplicando la definición dada por la Ecuación (3.28), se tiene

$$\mathcal{L}_{II} [-e^{\alpha t}u(-t)] = \int_{-\infty}^{\infty} -e^{\alpha t}u(-t)e^{-st} dt = - \int_{-\infty}^0 e^{-(s-\alpha)t} dt$$

Calculando la primitiva, se obtiene

$$\mathcal{L}_{II} [-e^{\alpha t}u(-t)] = \frac{1}{s - \alpha} - \lim_{T \rightarrow -\infty} \frac{e^{-(s-\alpha)T}}{s - \alpha} = \frac{1}{s - \alpha},$$

si $\text{Re} [s - \alpha] < 0$, lo cual implica que $\text{Re} [s] < \text{Re} [\alpha]$.

Ejemplo 4. Si $f(t) = e^{\alpha t}u(t)$, donde α es una cantidad compleja, entonces

$$\mathcal{L}_{II} [e^{\alpha t}u(t)] = \frac{1}{s - \alpha} \quad \forall \operatorname{Re} [s] > \operatorname{Re} [\alpha].$$

Solución 3.2. Aplicando nuevamente la definición dada por la Ecuación (3.28), se obtiene

$$\mathcal{L}_{II} [e^{\alpha t}u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha t}u(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt.$$

Por cálculo de la primitiva, se obtiene

$$\mathcal{L}_{II} [e^{\alpha t}u(t)] = \frac{1}{s - \alpha} - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{-(s-\alpha)T}}{s - \alpha} = \frac{1}{s - \alpha},$$

si $\operatorname{Re} [s - \alpha] > 0$, lo cual implica que $\operatorname{Re} [s] > \operatorname{Re} [\alpha]$.

El lector debería dibujar en el plano s las transformadas estudiadas a objeto de observar las semejanzas y diferencias en los ejemplos. Adicionalmente, el lector debería determinar los elementos que definen completamente la TBL de una función.

3.4. Transformada Inversa de Laplace

En esta sección será deducida la fórmula de la transformada inversa de Laplace, basada en la definición de la fórmula integral de Cauchy para ambos casos, es decir, para la función $f(t)$ en su dominio positivo y en su dominio negativo. Estos casos están claramente determinados de acuerdo a la región de convergencia, los cuales fueron destacados en la observaciones 3.5 y 3.6.

3.4.1. Fórmula integral de inversión derecha de Laplace

Sea el contorno c_d orientado en sentido positivo con relación al origen de coordenadas descrito por la porción arco circular c_r de radio R que une los puntos $\gamma - j\beta$ y $\gamma + j\beta$ y el segmento que une también los puntos antes mencionados. La Figura ?? muestra el contorno descrito y sobre él se encuentra un punto z . Adicionalmente dentro de la región está definido un punto interior s , en la cual está definida una función analítica $F(z)$ en la región $\operatorname{Re} [z] > \alpha$.

Por otra parte la función $F(z)$ cumple con la siguiente condición

Condición 3.6 (Orden z^{-n}). Sea $F(z)$ una función analítica en la región $\operatorname{Re} [z] > \alpha$ y de orden $\mathcal{O}(z^{-n})$, es decir, $|F(z)| \leq M z^{-n}$, donde M es el módulo máximo de la función en el dominio dado por $\operatorname{Re} [z] > \alpha$.

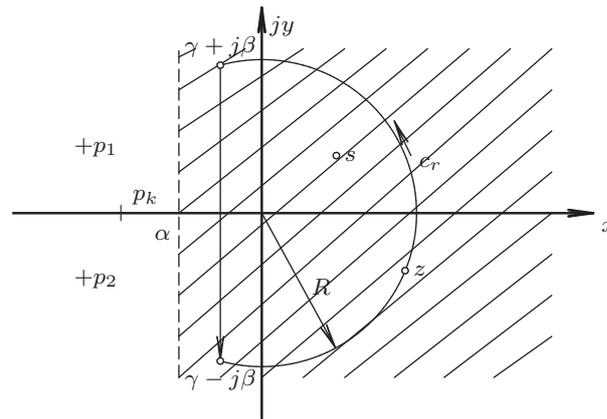


Figura 3.3. Región de convergencia y contorno de integración para la función de dominio de t positivo

De acuerdo a la fórmula integral de Cauchy (Churchill y Brown, 1992, Cap. 4), se puede expresar $F(s)$ como

$$F(s) = \frac{1}{j2\pi} \int_{c_d} \frac{F(z)}{z-s} dz = \frac{1}{j2\pi} \int_{c_r} \frac{F(z)}{z-s} dz + \frac{1}{j2\pi} \int_{\gamma+j\beta}^{\gamma-j\beta} \frac{F(z)}{z-s} dz \quad (3.29)$$

Si la Ecuación (3.29) es estudiada cuando R tiende a infinito, se tiene que

$$\int_{c_r} \frac{F(z)}{z-s} dz \rightarrow 0,$$

debido a que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{c_r} \frac{F(z)}{z-s} dz \right| = \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{-\pi + \tan^{-1}(-\beta/\gamma)}^{\pi + \tan^{-1}(\beta/\gamma)} \frac{F(z)}{z-s} dz \right|_{z=R e^{j\theta}}$$

y

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{-\pi + \tan^{-1}(-\beta/\gamma)}^{\pi + \tan^{-1}(\beta/\gamma)} \frac{F(z)}{z-s} dz \right|_{z=R e^{j\theta}} \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \frac{F(R e^{j\theta})}{R e^{j\theta} - s} \right| [2\pi + 2 \tan^{-1}(\beta/\gamma)] R$$

entonces

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{c_r} \frac{F(z)}{z-s} dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \frac{F(R e^{j\theta})}{R e^{j\theta} - s} \right| [2\pi + 2 \tan^{-1}(\beta/\gamma)] R, \quad (3.30)$$

donde γ es negativo.

Bajo el supuesto dado por la condición 3.6 y que $|z-s| \geq ||z| - |s||$, se tiene que

$$\left| \frac{F(R e^{j\theta})}{R e^{j\theta} - s} \right| \leq \frac{M}{R^n} \frac{1}{R - |s|} \quad (3.31)$$

Empleando la Ecuación (3.31) en la Ecuación (3.30), se obtiene que el valor límite converge claramente a cero. Este hecho permite afirmar que

$$F(s) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{j2\pi} \int_{\gamma+j\beta}^{\gamma-j\beta} \frac{F(z)}{z-s} dz = \frac{1}{j2\pi} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} \frac{F(z)}{s-z} dz \quad \forall \text{Re} [z] > \alpha \quad (3.32)$$

Si $F(s) = \mathcal{L} [f_+(t)]$, entonces $f_+(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(s)]$, lo cual permite escribir la Ecuación (3.32) como

$$f_+(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{j2\pi} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} \frac{F(z)}{s-z} dz \right] = \frac{1}{j2\pi} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} F(z) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-z} \right] dz \quad \forall \text{Re} [z] > \alpha \quad (3.33)$$

Aplicando el resultado obtenido en el ejemplo 4 a la Ecuación (3.33), se tiene

$$f_+(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} F(z) e^{zt} u(t) dz \quad \forall \text{Re} [z] > \alpha$$

Cambiando la variable z por s , se obtiene que la transformada inversa de Laplace para la parte de dominio positivo es definida por

$$f_+(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} F(s) e^{st} ds \cdot u(t), \quad \forall \text{Re} [s] > \alpha \quad (3.34)$$

3.4.2. Fórmula integral de inversión izquierda de Laplace

Para el caso $\text{Re} [z] < \alpha$, se tiene que el contorno de integración c_d es dado por la porción de circunferencia c_r que une los puntos $\gamma + j\beta$ y $\gamma - j\beta$, y por el segmento que va desde el punto $\gamma - j\beta$ al punto $\gamma + j\beta$. La Figura 3.4 muestra un ejemplo de un función $F(z)$ con singularidades a la izquierda de la región de convergencia $\text{Re} [z] < \alpha$.

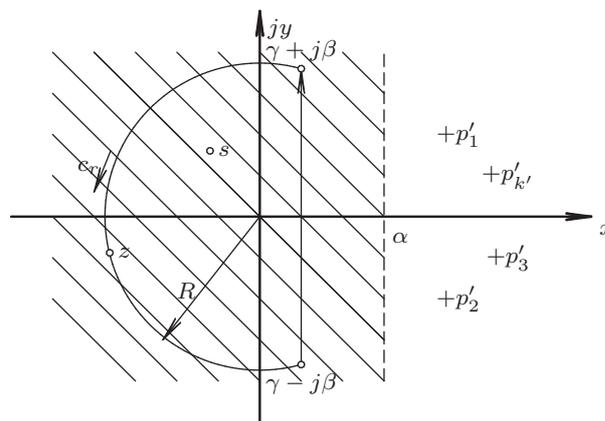


Figura 3.4. Región de convergencia y contorno de integración para la función de dominio de t negativo

Al igual que el caso anterior, la función $F(z)$ cumple con la siguiente condición:

Condición 3.7 (Orden z^{-n}). Sea $F(z)$ una función analítica en la región $\text{Re } [z] < \alpha$ y de orden $\mathcal{O}(z^{-n})$, es decir, $|F(z)| \leq M z^{-n}$, donde M es el módulo máximo de la función en el dominio dado por $\text{Re } [z] < \alpha$.

Note que la condición 3.7 también es satisfecha para el caso que está siendo estudiado.

Empleando nuevamente la fórmula integral de Cauchy se obtiene que

$$F(s) = \frac{1}{j2\pi} \int_{c_d} \frac{F(z)}{z-s} dz = \frac{1}{j2\pi} \int_{c_r} \frac{F(z)}{z-s} dz + \frac{1}{j2\pi} \int_{\gamma-j\beta}^{\gamma+j\beta} \frac{F(z)}{z-s} dz \quad (3.35)$$

Estudiando la integral sobre c_r cuando $R \rightarrow \infty$, se tiene que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{c_r} \frac{F(z)}{z-s} dz \right| = \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\tan^{-1}(-\beta/\gamma)}^{\tan^{-1}(\beta/\gamma)} \frac{F(z)}{z-s} dz \right|_{z=R e^{j\theta}}$$

y

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\tan^{-1}(-\beta/\gamma)}^{\tan^{-1}(\beta/\gamma)} \frac{F(z)}{z-s} dz \right|_{z=R e^{j\theta}} \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \frac{F(R e^{j\theta})}{R e^{j\theta} - s} \right| [2 \tan^{-1}(\beta/\gamma)] R,$$

entonces

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{c_r} \frac{F(z)}{z-s} dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \frac{F(R e^{j\theta})}{R e^{j\theta} - s} \right| [2 \tan^{-1}(\beta/\gamma)] R,$$

donde de acuerdo a la Figura ??, γ es positivo, sin que este hecho limite el estudio. Por otra parte, dado que la condición 3.7 es satisfecha, se puede afirmar que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{c_r} \frac{F(z)}{z-s} dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{M}{R^n} \frac{1}{R - |s|} [2 \tan^{-1}(\beta/\gamma)] R,$$

lo cual implica que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{c_r} \frac{F(z)}{z-s} dz = 0$$

De esta forma puede ser asegurado que

$$F(s) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{j2\pi} \int_{\gamma-j\beta}^{\gamma+j\beta} \frac{F(z)}{z-s} dz \quad \forall \text{Re } [z] < \alpha \quad (3.36)$$

Empleando el operador de transformada inversa a la Ecuación (3.36),

$$f_-(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{j2\pi} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} \frac{F(z)}{z-s} dz \right] = \frac{1}{j2\pi} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} F(z) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-1}{s-z} \right] dz \quad (3.37)$$

$\forall \text{Re } [z] < \alpha$.

Ahora aplicando el resultado del ejemplo 3 en la Ecuación (3.37) se obtiene

$$f_{-}(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} F(z) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-1}{s-z} \right] dz = \frac{1}{j2\pi} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} F(z) e^{zt} u(-t) dz$$

$\forall \text{Re} [z] < \alpha$. donde la expresión de $f_{-}(t)$ puede ser definida en término de s , quedando

$$f_{-}(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} F(s) e^{st} dz \cdot u(-t) \quad \forall \text{Re} [s] < \alpha \quad (3.38)$$

3.4.3. Fórmula de Inversión

En general la función $F(s)$ que representa la transformada de Laplace, puede estar definida por un conjunto denso de puntos no analíticos. No obstante, en muchas aplicaciones de la ingeniería, la función $F(s)$ puede dejar de ser analítica en puntos aislados, los cuales son comúnmente llamados singularidades aisladas o simplemente polos. En este punto serán tratado este tipo de casos, en donde la función $F(s)$, de tener puntos no analíticos, son aislados.

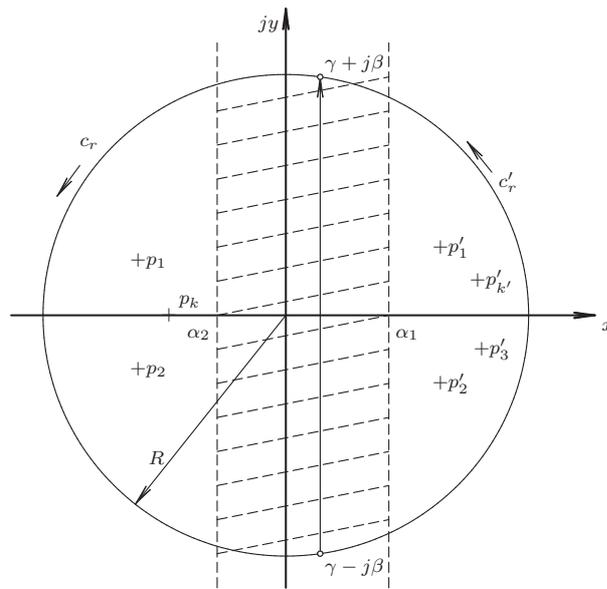


Figura 3.5. Contorno de integración c_r y c'_r

La Figura 3.5 de la página 39 muestra los contornos de integración empleados para la determinación de la transformada inversa de Laplace vía teorema de residuos y polos.

Lema 3.1. *Sea la porción de circunferencia c_r que une los puntos $\gamma + j\beta$ y $\gamma - j\beta$, de radio R y orientado en sentido positivo con relación a la región interna y sea c'_r el resto de la circunferencia que une los puntos $\gamma - j\beta$ y $\gamma + j\beta$, de radio R y orientado en sentido positivo con relación a la región interna. Si la función $F(s)$ es analítica sobre el contorno*

c_r y c'_r , y es de orden $\mathcal{O}(s^{-n}) \forall n \geq 1$, entonces

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{c_r} F(s) e^{st} ds = 0 \text{ y } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{c'_r} F(s) e^{st} ds = 0,$$

donde $s = R e^{j\theta}$.

Demostración. Suponga primero que c_r es el contorno dado por la Figura 3.5 y que $F(s)$ es analítica sobre el contorno c_r y es de orden $\mathcal{O}(s^{-n})$, es decir, $|F(z)| \leq M z^{-n}$, donde M es el módulo máximo de la función sobre el contorno de integración.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{c_r} F(s) e^{st} ds \right| = \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\theta_0}^{\theta_1} F(R e^{j\theta}) e^{R e^{j\theta} t} d(R e^{j\theta}) \right| \quad \forall \text{Re}[s] > \alpha,$$

debido a que $s = R e^{j\theta}$, $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2} < \theta_1 < 2\pi$.

De aquí se tiene que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\theta_0}^{\theta_1} F(R e^{j\theta}) e^{R e^{j\theta} t} d(R e^{j\theta}) \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \frac{M}{R^n} \right| \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left| e^{R e^{j\theta} t} d(R e^{j\theta}) \right|,$$

y

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \frac{M}{R^n} \right| \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left| e^{R e^{j\theta} t} d(R e^{j\theta}) \right| = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{M}{R^n} \int_{\theta_0}^{\theta_1} e^{tR \cos \theta} R \cdot d\theta,$$

entonces

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\theta_0}^{\theta_1} F(R e^{j\theta}) e^{R e^{j\theta} t} d(R e^{j\theta}) \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{M}{R^n} \int_{\theta_0}^{\theta_1} e^{tR \cos \theta} R \cdot d\theta.$$

Note que cuando $R \rightarrow \infty$, $\theta_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ y $\theta_1 \rightarrow \frac{3\pi}{2}$. Esto permite afirmar que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{M}{R^n} \int_{\theta_0}^{\theta_1} e^{tR \cos(\theta)} R \cdot d\theta = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{M}{R^{n-1}} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{tR \cos \theta} d\theta \quad (3.39)$$

Si se aplica el cambio de variable $\phi = \theta - \pi/2$, el lado derecho de la Ecuación (3.39) es transformado en

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{M}{R^{n-1}} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{tR \cos \theta} d\theta = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{M}{R^{n-1}} \int_0^\pi e^{-tR \sin \phi} d\phi. \quad (3.40)$$

Como $\sin \phi > 2\phi/\pi$ para $0 < \phi < \pi/2$, entonces por transitividad y empleando la Ecuación (3.40) se obtiene que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{c_r} F(s) e^{st} ds \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{M}{R^{n-1}} \int_0^\pi e^{-tR \sin \phi} d\phi \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{2M}{R^{n-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-tR \cdot 2\phi/\pi} d\phi,$$

lo cual implica,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{c_r} F(s) e^{st} ds \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{M}{R^n} \frac{\pi}{t} [1 - e^{-Rt}] = 0$$

debido a que la integral de línea sobre el contorno c_r es definida para $t > 0$.

De aquí se concluye que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{c_r} F(s) e^{st} ds = 0$$

Haciendo un análisis similar para el contorno c'_r descrito en la Figura 3.5, se obtiene que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{c'_r} F(s) e^{st} ds = 0$$

■

Teorema 3.9. Sea $F(s)$ la transformada bilateral de Laplace de una función $f(t)$, definida para una región de convergencia dada por $\alpha_2 < \text{Re}[s] < \alpha_1$ y con singularidades aisladas a ambos lados de su región de convergencia. Entonces la transformada inversa de Laplace de $F(s)$ está dada por

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^k \text{Res} [F(s)e^{st}]|_{p_i} \cdot u(t) - \sum_{i=1}^{k'} \text{Res} [F(s)e^{st}]|_{p'_i} \cdot u(-t), \quad (3.41)$$

donde p_i son las singularidades o polos que están ubicados a la izquierda de la región de convergencia y p'_i son las singularidades que están a la derecha de la región de convergencia.

Demostración. Dado que la función $F(s)$ puede tener singularidades aisladas a la derecha e izquierda de la región de convergencia, se analizará por separado la contribución de los polos en la expresión de la función $f(t)$. Para esto serán distinguidos dos casos:

Caso 1: Contribución de las singularidades a la izquierda de la región de convergencia.

Al emplear la observación 3.6 de la página 33, se puede afirmar que los polos ubicados a la izquierda contribuirán en la definición de la función $f(t)$ en el dominio del tiempo positivo. Este hecho unido a la expresión de la fórmula de transformada inversa dada por la Ecuación (3.34), permite establecer que al calcular la integral de línea sobre el contorno c_r y sobre el segmento que une los puntos $\gamma - j\beta$ y $\gamma + j\beta$, se tiene

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{j2\pi} \left[\int_{\gamma - j\beta}^{\gamma + j\beta} F(s) e^{st} ds + \int_{c_r} F(s) e^{st} ds \right] u(t) = \sum_{i=1}^k \text{Res} [F(s)e^{st}]|_{p_i} u(t) \quad (3.42)$$

debido al teorema de Residuos y Polos (Churchill y Brown, 1992, Cap. 6).

Al aplicar el lema 3.1, se tiene que la integral sobre c_r converge a cero cuando $R \rightarrow \infty$,

quedando entonces la Ecuación (3.42)

$$\frac{1}{j2\pi} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} F(s)e^{st} ds \cdot u(t) = \sum_{i=1}^k \text{Res} [F(s)e^{st}]|_{p_i} u(t)$$

En consecuencia,

$$f_+(t) = \sum_{i=1}^k \text{Res} [F(s)e^{st}]|_{p_i} u(t) \quad (3.43)$$

Caso 2: Contribución de las singularidades a la derecha de la región de convergencia.

De la observación 3.5, se tiene que los polos localizados a la derecha de la región de convergencia definen la parte de la función $f(t)$ en el dominio negativo de t . Si se calcula la integral de línea sobre el contorno c'_r y sobre el segmento que une los puntos $\gamma + j\beta$ y $\gamma - j\beta$ de forma tal que los polos estén en el interior de la región, se tiene

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{j2\pi} \left[\int_{\gamma+j\beta}^{\gamma-j\beta} F(s)e^{st} ds + \int_{c'_r} F(s)e^{st} ds \right] u(-t) = \sum_{i=1}^{k'} \text{Res} [F(s)e^{st}]|_{p'_i} u(-t) \quad (3.44)$$

Empleando el lema 3.1, la integral sobre c'_r converge a cero cuando $R \rightarrow \infty$. De esta forma, la Ecuación (3.44) puede expresarse como

$$\frac{1}{j2\pi} \int_{\gamma+j\beta}^{\gamma-j\beta} F(s)e^{st} ds \cdot u(-t) = \sum_{i=1}^{k'} \text{Res} [F(s)e^{st}]|_{p'_i} u(-t)$$

Debido a la Ecuación (3.38),

$$f_-(t) = - \sum_{i=1}^{k'} \text{Res} [F(s)e^{st}]|_{p'_i} u(-t) \quad (3.45)$$

Sumando las contribuciones dadas por las ecuaciones (3.43) y (3.45) se obtiene la Ecuación (3.41). ■

3.5. Transformada unilateral de Laplace

En esta sección serán presentadas las dos definiciones de transformada de Laplace, siendo la más ampliamente conocida la transformada unilateral derecha de Laplace, o simplemente denominada transformada de Laplace. Claro está, la aplicación de una u otra definición dependerá de las necesidades y de la función en tiempo continuo a transformar.

3.5.1. Transformada unilateral derecha de Laplace

La TUDL la cual será representada por medio del subíndice I^+ , se define como

$$F_{I^+}(s) = \mathcal{L}_{I^+} [f(t)] = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad \forall \operatorname{Re} [s] > \alpha, \quad (3.46)$$

donde la función $f(t)$ es de orden exponencial, es decir, $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ para $t > T$ y tanto M como T son constantes reales positivas y, α sin condiciones sobre su signo.

Note que los eventuales puntos singulares deberán estar ubicados a la izquierda de la región de convergencia $\operatorname{Re} [s] > \alpha$.

Propiedades

Basado en el estudio realizado de la TIL, al particularizar sus propiedades, se puede probar fácilmente las propiedades que se enumeran a continuación:

Sea $F(s) = \mathcal{L} [f(t)] \quad \forall \operatorname{Re} [s] > \alpha$ y $F_k(s) = \mathcal{L} [f_k(t)]$, $\forall \operatorname{Re} [s] > \alpha_k \quad \forall k = 1, \dots, n$, entonces

- Linealidad

$$\mathcal{L} \left[\sum_{k=1}^n a_k f_k(t) \right] = \sum_{k=1}^n a_k F_k(s), \quad \forall \operatorname{Re} [s] > \max[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n],$$

donde a_k son constantes para todo k .

- Traslación en t

$$\mathcal{L} [f(t - T_0)] = F(s)e^{-sT_0}, \quad \forall \operatorname{Re} [s] > \alpha$$

- Cambio de escala

$$\mathcal{L} [f(ct)] = \frac{1}{|c|} F(s/c), \quad \forall \operatorname{Re} [s/c] > \alpha$$

- Traslación en s

$$\mathcal{L} [f(t)e^{s_0 t}] = F(s - s_0), \quad \forall \operatorname{Re} [s - s_0] > \alpha$$

- Convolución

$$\mathcal{L} [f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s), \quad \forall \operatorname{Re} [s] > \max[\alpha_1, \alpha_2]$$

- Derivación en t

$$\mathcal{L} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] = sF(s) - f(0^-), \quad \forall \operatorname{Re} [s] > \alpha$$

- Derivada n -ésima en t

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{[k]}(0^-), \quad \forall \text{Re} [s] > \alpha,$$

donde $f^{[k]}(0^-) = \left. \frac{d^k f(t)}{dt^k} \right|_{t=0^-}$

- Derivada n -ésima en s

$$\mathcal{L} [t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s), \quad \forall \text{Re} [s] > \alpha$$

- Integración en t

$$\mathcal{L} \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right] = \mathcal{L} [f(t) * u(t)] = \frac{F(s)}{s}, \quad \forall \text{Re} [s] > \alpha,$$

dado que

$$\mathcal{L} [u(t)] = \frac{1}{s} \quad \forall \text{Re} [s] > 0$$

Dos importantes libros textos que pueden coadyuvar al estudio de la transformada de Laplace son los textos escritos por (Ziemer *et al.*, 1993, Cap. 5) y por (Oppenheim *et al.*, 1997, Cap. 9).

El lector debería verificar las transformadas de Laplace de las funciones elementales que puede obtener del libro texto escrito por (Oppenheim *et al.*, 1997, Cap. 9).

3.5.2. Algunos teoremas en la TUDL

Una de las aplicaciones de la transformada de Laplace es el cálculo de los valores iniciales y finales de la función $f(t)$. En este punto serán enunciados y demostrados dos importantes teoremas, llamados teorema de valor inicial y teorema de valor final.

Teorema 3.10 (Teorema de valor inicial). *Sea $F(s) = \mathcal{L} [f(t)]$ para todo s tal que $\text{Re} [s] > \alpha$. Si la función $f(t)$ es continua para todo $t > 0$ y eventualmente tiene una discontinuidad de salto finito en $t = 0$, entonces*

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

Demostración. De la propiedad de derivación se puede afirmar

$$\mathcal{L} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = sF(s) - f(0^-) \quad \forall \text{Re} [s] > \alpha \quad (3.47)$$

La Ecuación (3.47) puede ser expresada como

$$\int_{0^-}^{0^+} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt + \int_{0^+}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = sF(s) - f(0^-) \quad \forall \operatorname{Re} [s] > \alpha \quad (3.48)$$

Por medio de la teoría de distribución Brea (2004b), el valor de la integral

$$\int_{0^-}^{0^+} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = [f(0^+) - f(0^-)],$$

dado que puede existir una discontinuidad finita de la función $f(t)$ en $t = 0$.

Por otra parte, cuando $s \rightarrow \infty$, se tiene

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0^+}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = 0$$

Aplicando estos hechos a la Ecuación (3.48), se obtiene que

$$f(0^+) - f(0^-) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) - f(0^-),$$

lo cual implica

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

■

Teorema 3.11 (Teorema de valor final). *Sea $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ para todo s tal que $\operatorname{Re} [s] > \alpha$. Entonces*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} f(T) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Demostración. Empleando la propiedad de derivación se tiene

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{0^-}^T \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = sF(s) - f(0^-) \quad \forall \operatorname{Re} [s] > \alpha$$

Al hacer tender s a cero de la Ecuación anterior, se obtiene

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ T \rightarrow \infty}} \int_{0^-}^T \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{0^-}^T \frac{df(t)}{dt} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} [f(T) - f(0^-)] = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0^-)$$

Lo que implica

$$\lim_{T \rightarrow \infty} f(T) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

■

3.5.3. Transformada unilateral izquierda de Laplace

La TUIL, y ella es simbolizada por el subíndice I^- , es definida como

$$F_{I^-}(s) = \mathcal{L}_{I^-} [f(t)] = \int_{-\infty}^0 f(t)e^{-st} dt \quad \forall \operatorname{Re} [s] < \alpha,$$

donde la función $f(t)$ es de orden exponencial, es decir, $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ para $t < T$ y tanto M como T son constantes reales positivas y, α sin condiciones sobre su signo.

No obstante, el empleo de esta transformada en el campo de la ingeniería eléctrica tiene aplicaciones limitadas, por cuanto los sistemas eléctricos son sistema causales y ellos conllevan al estudio de las respuestas del sistema durante o después de la excitación del sistema, a objeto de estudiar su desempeño en instantes de tiempo futuro (Oppenheim *et al.*, 1997, Cap. 1).

Es por esta razón que no será profundizado su estudio en este curso. Sin embargo, el lector podría demostrar algunas propiedades a fin de profundizar la teoría general de la transformada de Laplace.

3.6. Ejemplos de transformadas

En esta sección se ilustrarán la definición y las propiedades de la transformada de Laplace, a los efectos de aplicar algunas propiedades estudiadas en este capítulo.

Ejemplo 5. Hallar la transformada de Laplace del impulso unitario.

Solución 3.3. Por definición 3.17 de la página 31,

$$F_{II}(s) = \mathcal{L}_{II} [\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = 1 \quad \forall s$$

Este resultado permite afirmar que $\mathcal{L}_{II} [\delta(t)]$ es entera.

Ejemplo 6. Hallar la transformada de Laplace de la función escalón unitaria.

Solución 3.4. Por definición de la función escalón unitario $u(t)$ se tiene

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

Empleando la definición de TBL (Ecuación (3.17)) se tiene

$$\mathcal{L}_{II} [u(t)] = \mathcal{L}_{I^+} [u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} dt$$

quedando

$$\mathcal{L}_{I^+} [u(t)] = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-st} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-st}}{s} \right|_R^0 = \frac{1}{s} - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{-sR}}{s}$$

Ahora

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{-sR}}{s} = 0,$$

si el valor absoluto de $\frac{e^{-sR}}{s}$ converge a cero, es decir,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \frac{e^{-sR}}{s} \right| = \lim_{R \rightarrow \infty} |e^{-sR}| \left| \frac{1}{s} \right| = \lim_{R \rightarrow \infty} |e^{-sR}| \left| \frac{1}{s} \right| = \lim_{R \rightarrow \infty} e^{-xR} \left| \frac{1}{s} \right| = 0,$$

con lo cual debe cumplirse que $x > 0$, lo que significa que $\text{Re} [s] > 0$.

En conclusión

$$\mathcal{L}_{I^+} [u(t)] = F_{I^+}(s) = \frac{1}{s} \quad \forall \text{Re} [s] > 0$$

Ejemplo 7. Sea la función exponencial dada por

$$f(t) = e^{-at} u(t).$$

Hallar la transformada de Laplace de $f(t)$.

Solución 3.5. Empleando la definición nuevamente se tiene que

$$\mathcal{L}_{II} [u(t)] = \mathcal{L}_{I^+} [e^{-at} u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt,$$

la cual puede ser formalmente expresada como

$$F_{I^+}(s) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-(s+a)t} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-(s+a)t}}{s+a} \right|_R^0 = \frac{1}{s+a},$$

siempre y cuando

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{-(s+a)R}}{s+a} = 0,$$

lo cual puede ser garantizado si

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \frac{e^{-(s+a)R}}{s+a} \right| = \lim_{R \rightarrow \infty} |e^{-(s+a)R}| \left| \frac{1}{s+a} \right| = \lim_{R \rightarrow \infty} e^{-\text{Re} [s+a]R} \left| \frac{1}{s+a} \right| = 0,$$

cuando $\text{Re} [s+a] > 0$.

En definitiva

$$F_{I^+}(s) = \frac{1}{s+a} \quad \forall \text{Re} [s] > -\text{Re} [a]$$

Este resultado puede ser obtenido aplicando la propiedad de traslación en s , es decir,

aplicando

$$\mathcal{L} [f(t)e^{s_0 t}] = F(s - s_0) \quad \forall \text{Re} [s - s_0] > \alpha$$

donde $f(t) = u(t)$ y $s_0 = -a$. Dado que

$$\mathcal{L} [u(t)] = \frac{1}{s} \quad \forall \text{Re} [s] > 0,$$

se tiene que

$$\mathcal{L}_{I^+} [e^{-at}u(t)] = \frac{1}{s} \Big|_{s+\alpha} \quad \forall \text{Re} [s + a] > 0$$

$$\mathcal{L}_{I^+} [e^{-at}u(t)] = \frac{1}{s + a} \quad \forall \text{Re} [s] > -\text{Re} [a]$$

Note que a puede ser una cantidad compleja.

Ejemplo 8. Determine la transformada de Laplace de

$$f(t) = \cos(\omega t)u(t)$$

Solución 3.6. Por la definición de $\cos(\omega t)$ se tiene que

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

De esta forma se puede expresar $f(t)$ como

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{j\omega t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-j\omega t}u(t)$$

Aplicando el resultado del Ejemplo 7 y la propiedad de linealidad se tiene que

$$\mathcal{L}_{I^+} [f(t)] = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{I^+} [e^{j\omega t}u(t)] + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{I^+} [e^{-j\omega t}u(t)],$$

quedando

$$\mathcal{L}_{I^+} [f(t)] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right) \quad \forall \{ \text{Re} [s - j\omega] > 0 \} \cap \{ \text{Re} [s + j\omega] > 0 \}$$

En consecuencia se tiene que

$$\mathcal{L}_{I^+} [f(t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad \forall \text{Re} [s] > 0$$

Ejemplo 9. Determine la transformada de Laplace de

$$f(t) = e^{-rt} \cos(\omega t)u(t)$$

Solución 3.7. Aplicando la propiedad de traslación en frecuencia compleja y el resultado

del Ejemplo 8, se tiene que

$$\mathcal{L}_{I^+} [f(t)] = \mathcal{L}_{I^+} [\cos(\omega t)u(t)]|_{s+r} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \Big|_{s+r} \quad \forall \text{Re} [s + r] > 0$$

De esta forma se tiene que

$$\mathcal{L}_{I^+} [f(t)] = \frac{s + r}{(s + r)^2 + \omega^2} \quad \forall \text{Re} [s] > -r$$

3.7. Ejemplos de transformadas inversas

En esta sección, será ilustrada la fórmula de inversión desarrollada en la Sección 3.4.3, la cual está particularizada para el caso en donde los polos de la transformada de Laplace, están representado por singularidades aisladas.

Ejemplo 10. Hallar la expresión en tiempo de la transformada de Laplace

$$F(s) = \frac{1}{s} \quad \forall \text{Re} [s] > 0$$

Solución 3.8. De la fórmula de inversión (3.41) de la página 41, se tiene que

$$\mathcal{L}^{-1} [F(s)] = \sum_{i=1}^1 \text{Res} \left[\frac{1}{s} e^{st} \right] \Big|_{p_i} \cdot u(t) = \text{Res} \left[\frac{1}{s} e^{st} \right] \Big|_{p_1=0} \cdot u(t)$$

Dado que (véase Teorema ?? en página ??)

$$\text{Res} \left[\frac{1}{s} e^{st} \right] \Big|_{p_1=0} = 1,$$

se tiene que

$$\mathcal{L}^{-1} [F(s)] = u(t)$$

Ejemplo 11. Sea $F(s)$ la transformada de Laplace dada por

$$F(s) = \frac{1}{s^2 - s - 6} \quad \forall -2 < \text{Re} [s] < 3$$

Determine la transformada inversa de Laplace.

Solución 3.9. Claramente se ve que $s^2 - s - 6 = (s + 2)(s - 3)$, lo cual implica que el polo $p_1 = -2$ está ubicado a la izquierda de la región de convergencia, mientras el polo $p_1 = 3$ se encuentra a la derecha de la región. Este hecho permite establecer que la función $f(t)$ correspondiente puede ser calculada aplicando la Ecuación (3.41), quedando

$$f(t) = \text{Res} \left[\frac{1}{s^2 - s - 6} e^{st} \right] \Big|_{p_1=-2} \cdot u(t) - \text{Res} \left[\frac{1}{s^2 - s - 6} e^{st} \right] \Big|_{p_1=3} \cdot u(-t).$$

En consecuencia,

$$f(t) = \lim_{s \rightarrow -2} \left[\frac{(s+2)}{s^2 + 5s + 6} e^{st} \right] u(t) - \lim_{s \rightarrow 3} \left[\frac{(s-3)}{s^2 + 5s + 6} e^{st} \right] u(-t),$$

y cuyo valor de convergencia es

$$f(t) = -\frac{1}{5} e^{-2t} u(t) - \frac{1}{5} e^{3t} u(-t).$$

Capítulo 4

Transformada de Fourier



Jean Baptiste Joseph Fourier

La transformada de Fourier, llamada así en honor a Jean Baptiste Joseph Fourier¹ y a su contribución en la denominada serie de Fourier, ha tenido un importante lugar en el análisis de las señales tanto en el dominio continuo como en el discreto. Sin embargo, es importante señalar que uno de los pioneros en el análisis de fenómenos oscilatorios a través de lo que hoy se conoce como series de Fourier fue Euler con sus trabajos Euler, Leonhard (1749) y Euler, Leonhard (1750).

El material presentado en este capítulo muestra un punto de vista de la transformada de Fourier en el dominio continuo, analizando la transformada de Fourier de funciones reales y su eventual vinculación con la transformada bilateral de Laplace Brea (2004c).

El resto del capítulo contiene: definiciones básicas de la transformada de Fourier en la sección 4.1. En la sección 4.2 son presentadas algunas de las propiedades más importantes de la transformada de Fourier. Una breve introducción a algunas transformadas de Fourier de funciones especiales son desarrolladas en la sección 4.3. En la sección 4.4 se estudia la transformada inversa de Fourier y se incluyen ejemplos para ilustrar el método de cálculo de transformada inversa. Una breve discusión de la eventual relación entre las transformadas

¹Jean Baptiste Joseph Fourier, nació el 21 de marzo de 1768 en Auxerre, Bourgogne, Francia y falleció el 16 de mayo de 1830 en París. El retrato fue obtenido de http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Indexes/Full_Alph.html

de Laplace y Fourier es tratada en la sección ???. Finalmente, en la Sección 4.6 se estudiará la transformada de Fourier de funciones periódicas, siendo este último concepto de gran utilidad para la determinación de las llamadas series de Fourier, la cual será tratada en el Capítulo ???.

4.1. Definiciones

La transformada de Fourier (TF) puede verse como un caso particular de la transformada integral lineal (TIL) ampliamente presentada por Brea (2004c), la cual puede ser introducida por medio de la siguiente definición. No obstante, existe un enfoque que parte de la definición de series de Fourier, en donde algunos autores desarrollan su definición a través de un proceso de límite de la serie de Fourier para establecer la definición de transformada de Fourier.

Definición 4.1. Sea f una función real definida en el dominio continuo, dígase $f(t)$ definida en el dominio t , la TF se define como

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad \forall -\infty < \omega < \infty \quad (4.1)$$

De la definición anterior puede notarse que si $f(t)$ es una función real, $F(\omega)$ puede ser definida claramente por

$$F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \quad (4.2)$$

Adicionalmente, la función $F(\omega)$ es usualmente representada por medio de su espectro de magnitud o amplitud, denotado por $A(\omega)$, y su denominado espectro de fase, el cual es denotado por $\Phi(\omega)$ en virtud de que usualmente se define como su argumento Papoulis (1962). De esta forma la función $F(\omega)$ es usualmente definida como

$$F(\omega) = A(\omega)e^{j\Phi(\omega)},$$

donde:

$$A(\omega) = |F(\omega)| = +\sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)},$$

$\Phi(\omega)$ es dada por su argumento para todo $\omega \neq 0$, como

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} -\pi/2 + \pi \cdot \text{sgn}(\omega) & \text{si } R(\omega) = 0 \wedge X(\omega) > 0, \\ \pi/2 + \pi \cdot \text{sgn}(\omega) & \text{si } R(\omega) = 0 \wedge X(\omega) < 0, \\ \tan^{-1} \left[\frac{X(\omega)}{R(\omega)} \right] - 2\pi \cdot u(-\omega) & \text{si } R(\omega) > 0 \wedge X(\omega) > 0, \\ \tan^{-1} \left[\frac{X(\omega)}{R(\omega)} \right] + 2\pi \cdot u(\omega) & \text{si } R(\omega) > 0 \wedge X(\omega) < 0, \\ \tan^{-1} \left[\frac{X(\omega)}{R(\omega)} \right] + \pi \cdot \text{sgn}(\omega) & \text{si } R(\omega) < 0. \end{cases}$$

Note que $u(x)$ es la función escalón unitario en el dominio x .

Sin embargo, la función $F(\omega)$ puede estar definida en términos más generales como

$$F(\omega) = A(\omega)e^{j[\Phi(\omega) + \text{sgn}(\omega)2k\pi]},$$

donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Observación 4.1 (Determinación de $\Phi(\omega)$). *Debe tomarse como regla general para la determinación del argumento $\Phi(\omega)$ el signo de ω , en virtud de que cuando $\omega > 0$ se supondrá que la determinación del ángulo o argumento de la cantidad compleja $F(\omega)$ debe hacerse en sentido antihorario. Mientras que si $\omega < 0$ se supondrá que la determinación del argumento de la cantidad compleja $F(\omega)$ debe hacerse en sentido horario.*

Observación 4.2. *Note que cuando $\omega = 0$, $R(\omega)|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ y $X(\omega)|_{\omega=0} = 0$, es decir, $F(\omega) = R(\omega)$ para $\omega = 0$.*

Observación 4.3 (Argumento cuando $\omega = 0$). *En el caso que ω sea igual a cero la fase de la transformada de Fourier es definida como*

$$\Phi(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } F(0) > 0, \\ \# & \text{si } F(0) \leq 0. \end{cases}$$

No obstante, los valores límites para el caso $F(0) < 0$ están dados por

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \Phi(\omega + \epsilon) = \pi \quad \text{y} \quad \lim_{\epsilon \downarrow 0} \Phi(\omega - \epsilon) = -\pi.$$

Observación 4.4. *La definición de TF puede además ser establecida de manera general para funciones complejas. Sin embargo, en este escrito será supuesto que las funciones son reales.*

Definición 4.2 (Transformada inversa de Fourier). *La conocida fórmula de inversión o fórmula de transformada inversa de Fourier, permite representar cualquier función $f(t)$*

por medio de la TF de la función $f(t)$, es decir,

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1} [F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.3)$$

4.2. Propiedades

Con el propósito de estudiar algunas propiedades de la TF, serán establecidas algunas condiciones y teoremas.

Condición 4.1. Si $f(t)$ es absolutamente integrable en el sentido de que

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty,$$

entonces su TF existe (Papoulis, 1962, Cap. 2).

Observación 4.5. La condición 4.1 debe entenderse como una condición suficiente pero no necesaria, es decir, existen funciones que no son absolutamente integrables en el sentido de la condición 4.1, pero poseen TF, es decir, satisfacen la definición 4.1.

Dado que la función $f(t)$ se supondrá real, se puede establecer que su espectro de amplitud es una función par de la variable ω y su espectro de fase es una función impar de su variable independiente.

Teorema 4.1. Si $f(t)$ es una función real con TF $F(\omega)$, entonces

$$F(-\omega) = F^*(\omega),$$

donde $F^*(\omega)$ es la función conjugada de $F(\omega)$.

Demostración. De la ecuación (4.2) se tiene que

$$F(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(-\omega t) dt + j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(-\omega t) dt$$

Debido a que la función $\cos(x)$ es una función par y la función $\sin(x)$ es una función impar,

$$F(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt = R(\omega) - jX(\omega) = F^*(\omega)$$

□

Corolario 4.1. Sea $f(t)$ una función real con TF $F(\omega) = A(\omega)e^{j\Phi(\omega)}$, entonces $A(\omega)$ es una función par y $\Phi(\omega)$ es una función impar de la variable independiente ω .

Demostración. Del teorema 4.1, se tiene que

$$F(-\omega) = F^*(\omega) \Rightarrow A(-\omega)e^{j\Phi(-\omega)} = A(\omega)e^{-j\Phi(\omega)}$$

De esta última ecuación se puede asegurar que

$$\begin{aligned} A(\omega) &= A(-\omega) \\ \Phi(-\omega) &= -\Phi(\omega) \end{aligned}$$

□

Teorema 4.2 (Simetría). Si $F(\omega)$ es la TF de $f(t)$, es decir, $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, entonces

$$\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$$

Demostración. De la ecuación (4.3) se obtiene que

$$f(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-j\omega t} d\omega \quad (4.4)$$

Al intercambiar las variables t y ω en la ecuación (4.4), se tiene

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}[F(t)]$$

□

Del estudio de la TIL realizado por Brea (2004c), pueden ser claramente demostradas las propiedades que son enumeradas a continuación:

Sea $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ y $F_k(\omega) = \mathcal{F}[f_k(t)] \forall k = 1, \dots, n$, entonces

- Linealidad

$$\mathcal{F}\left[\sum_{k=1}^n a_k f_k(t)\right] = \sum_{k=1}^n a_k F_k(\omega),$$

donde a_k son constantes para todo k .

- Traslación en t

$$\mathcal{F}[f(t - T_0)] = F(\omega)e^{-j\omega T_0}$$

- Cambio de escala

$$\mathcal{F}[f(ct)] = \frac{1}{|c|} F(\omega/c)$$

- Traslación en ω

$$\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = F(\omega - \omega_0)$$

- Convolución

$$\mathcal{F} [f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

- Derivación en t

$$\mathcal{F} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] = j\omega F(\omega)$$

- Derivada n -ésima en t

$$\mathcal{F} \left[\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right] = (j\omega)^n F(\omega), \quad \text{si } F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0$$

- Derivada n -ésima en ω

$$\mathcal{F} [(-jt)^n f(t)] = \frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega)$$

- Integración en t

$$\mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right] = \mathcal{F} [f(t) * u(t)] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0) \delta(\omega)$$

dado que

$$\mathcal{F} [u(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega) ,$$

la cual es estudiada en el Ejemplo 15 de la página 57.

4.3. Transformada de Fourier de funciones especiales

En esta sección serán tratados algunos ejemplos de funciones especiales, a objeto de emplear algunas propiedades de la TF.

Ejemplo 12. Sea la función delta de Dirac $\delta(t)$. Entonces

$$\mathcal{F} [\delta(t)] = 1 \quad \forall \omega$$

Solución 4.1. De la ecuación (4.1), se tiene que

$$\mathcal{F} [f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \quad \forall \omega.$$

Ejemplo 13. Sea la función $f_{dc}(t) = 1$ para todo t , la cual será representada por 1_t . Entonces

$$\mathcal{F} [f_{dc}(t)] = \mathcal{F} [1_t] = 2\pi \delta(\omega)$$

Solución 4.2. Dado que $\mathcal{F} [\delta(t)] = 1_\omega$, entonces aplicando el teorema 4.2, se tiene que

$$\mathcal{F} [1_t] = 2\pi \delta(-\omega) = 2\pi \delta(\omega)$$

Ejemplo 14. Sea la función $\text{sgn}(t)$ definida por

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \forall t > 0, \\ -1 & \forall t < 0. \end{cases}$$

Entonces

$$\mathcal{F}[\text{sgn}(t)] = \frac{2}{j\omega} \quad \forall \omega \neq 0$$

Solución 4.3. Para calcular la TF de la función $\text{sgn}(t)$, emplearemos la siguiente sucesión de función definida por

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & \forall t > 0, \\ -e^{\alpha t} & \forall t < 0, \end{cases}$$

donde $\alpha > 0$.

Note que

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} f_\alpha(t) = \text{sgn}(t)$$

Este hecho permite afirmar que

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \mathcal{F}[f_\alpha(t)] = \mathcal{F}[\text{sgn}(t)]$$

Calculando la $\mathcal{F}[f_\alpha(t)]$, se tiene

$$\mathcal{F}[f_\alpha(t)] = - \int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt,$$

lo cual implica

$$\mathcal{F}[f_\alpha(t)] = \frac{-j2\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Al determinar el límite, se obtiene

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \mathcal{F}[f_\alpha(t)] = \mathcal{F}[\text{sgn}(t)] = \frac{2}{j\omega} \quad \forall \omega \neq 0$$

Note que debido a que $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(t) dt = 0$, entonces el cálculo de la $\mathcal{F}[\text{sgn}(t)]$ puede ser hecho empleando la propiedad de derivación.

Ejemplo 15. Sea la función escalón unitario $u(t)$ dada por

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \forall t > 0, \\ 0 & \forall t < 0. \end{cases}$$

Entonces

$$\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

Solución 4.4. Es fácil ver que

$$u(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t) + \frac{1}{2} 1_t$$

Aplicando la propiedad de linealidad, se obtiene que

$$\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{2} \mathcal{F}[\operatorname{sgn}(t)] + \frac{1}{2} \mathcal{F}[1_t],$$

lo cual implica

$$\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

Esta última expresión formalmente puede ser dada por

$$\mathcal{F}[u(t)] = \begin{cases} \frac{1}{j\omega} & \forall \omega \neq 0, \\ \pi\delta(\omega) & \forall \omega = 0. \end{cases}$$

Ejemplo 16. Sea la función pulso unitario de semiancho a , es decir, $p_a(t)$ la cual es definida por

$$p_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < a, \\ 0 & \text{si } |t| > a. \end{cases}$$

Determine la transformada de Fourier de $p_a(t)$.

Solución 4.5. Aplicando la definición dada por la ecuación (4.1), se tiene

$$\mathcal{F}[p_a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} p_a(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-a}^a e^{-j\omega t} dt$$

De aquí puede establecerse que para $\omega \neq 0$

$$\mathcal{F}[p_a(t)] = \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_{-a}^a = \frac{e^{j\omega a} - e^{-j\omega a}}{j\omega} = 2a \frac{\sin(a\omega)}{a\omega},$$

mientras que para $\omega = 0$

$$\mathcal{F}[p_a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} p_a(t) dt = \int_{-a}^a dt = 2a.$$

En resumen, la transformada de Fourier de $p_a(t)$ es

$$\mathcal{F}[p_a(t)] = F(\omega) = \begin{cases} 2a \frac{\sin(a\omega)}{a\omega} & \forall \omega \neq 0, \\ 2a & \forall \omega = 0. \end{cases}$$

Note que $\mathcal{F}[p_a(t)]$ es continua para todo ω , como consecuencia de que

$$\lim_{\omega \downarrow 0} 2a \frac{\sin(a\omega)}{a\omega} = 2a \quad \text{y} \quad \lim_{\omega \uparrow 0} 2a \frac{\sin(a\omega)}{a\omega} = 2a,$$

y los valores límites son iguales a el valor de $F(0) = 2a$

Ejemplo 17. Determine la transformada de Fourier de la función $\text{senc}_4(t)$ (véase la definición 2.5 de la página 12)

Solución 4.6. De acuerdo a la definición 2.5, se tiene que

$$\text{senc}_4(t) = \begin{cases} \frac{\sin(4t)}{4t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

Aplicando el Teorema 4.2 (simetría) se tiene que

$$\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$$

y unido al hecho de que (véase ejemplo 16)

$$\mathcal{F}[p_a(t)] = 2a \text{senc}_a(\omega) = \begin{cases} 2a \frac{\sin(a\omega)}{a\omega} & \forall \omega \neq 0, \\ 2a & \forall \omega = 0. \end{cases}$$

se tiene que

$$\mathcal{F}[2a \text{senc}_a(t)] = 2\pi p_a(-\omega)$$

Como la función pulso rectangular es una función par, se tiene que

$$\mathcal{F}[\text{senc}_a(t)] = \frac{\pi}{a} p_a(\omega)$$

Ahora, para el caso de la función $\text{senc}_4(t)$, el parámetro $a = 4$, lo cual permite decir que

$$\mathcal{F}[\text{senc}_4(t)] = \frac{\pi}{4} p_4(\omega)$$

El lector debería representar gráficamente los espectros de amplitud y fase de cada uno de los ejemplos desarrollados y estudiar su significado. Por otra parte, el lector puede encontrar un número importante de TF en el libro texto escrito por (Oppenheim *et al.*, 1997, Cap. 4).

4.4. Transformada Inversa de Fourier

Ahora será demostrada la fórmula de inversión de la transformada de Fourier, partiendo de la integral

$$f_{\Omega}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (4.5)$$

la cual converge a $f(t)$ cuando Ω tiende a infinito.

Teorema 4.3. Sea $F(\omega)$ la transformada de Fourier de una función $f(t)$ seccionalmente continua en el sentido de la definición 3.1. Si se define $f_\Omega(t)$ de acuerdo a la ecuación (4.5), entonces

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} f_\Omega(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.6)$$

Demostración. Se conoce que la transformada de Fourier de una función $f(t)$ está dada por

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad \forall -\infty < \omega < \infty \quad (4.7)$$

Al sustituir la ecuación (4.7) en la ecuación (4.5), se obtiene que

$$f_\Omega(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\Omega}^{\Omega} e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \right] d\tau,$$

calculando la primitiva de la integral interna y evaluándola, se tiene que

$$f_\Omega(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\frac{e^{j\omega(t-\tau)}}{j(t-\tau)} \Big|_{\omega=-\Omega}^{\Omega} \right] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\frac{\sin[\Omega(t-\tau)]}{\pi(t-\tau)} \right] d\tau.$$

Dado que (véase (Papoulis, 1962, Apéndice I))

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin ax}{\pi x} = \delta(x),$$

se puede asegurar que

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} f_\Omega(\tau) = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\frac{\sin[\Omega(t-\tau)]}{\pi(t-\tau)} \right] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = f(t),$$

debido a que para aquellos puntos donde $f(t)$ es continua, la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$ converge a $f(\tau)$ y τ es considerada una variable muda o comodín. \square

Observación 4.6. La definición de transformada inversa de Fourier también puede ser aplicada al caso de funciones $F(\omega)$ cuya transformada contenga términos impulsivos.

Para ilustrar esta afirmación véase el siguiente ejemplo, en donde la transformada de Fourier contiene dos términos impulsivos.

Ejemplo 18. Sea la función $f(t)$ una función con transformada de Fourier dada por

$$F(\omega) = \pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0).$$

Determine la transformada inversa de $F(\omega)$.

Solución 4.7. Empleando (4.6) se tiene

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0)] e^{j\omega t} d\omega.$$

Aplicando los conceptos de la distribución delta de Dirac (Cap. ??), se obtiene que

$$f(t) = \frac{e^{-j\omega_0 t} + e^{j\omega_0 t}}{2} = \cos(\omega_0 t)$$

Ejemplo 19. Sea la función $f(t)$ una función con transformada de Fourier dada por

$$F(\omega) = j\pi\delta(\omega + \omega_0) - j\pi\delta(\omega - \omega_0).$$

Determine la transformada inversa de $F(\omega)$.

Solución 4.8. Dado que

$$F(\omega) = j\pi\delta(\omega + \omega_0) - j\pi\delta(\omega - \omega_0) = \pi\delta(\omega + \omega_0) e^{-j3\pi/2} + \pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j3\pi/2}.$$

Aplicando la ecuación (4.6) se obtiene

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\pi\delta(\omega + \omega_0) e^{-j3\pi/2} + \pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j3\pi/2}] e^{j\omega t} d\omega,$$

lo cual implica que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\pi\delta(\omega + \omega_0) e^{j(\omega t - 3\pi/2)} + j\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j(\omega t + 3\pi/2)}] d\omega,$$

resultando así que

$$\frac{e^{-j(\omega_0 t + 3\pi/2)} + e^{j(\omega_0 t + 3\pi/2)}}{2} = \cos(\omega_0 t + 3\pi/2) = \sin(\omega_0 t)$$

Otra vía para determinar la transformada inversa es aplicando nuevamente la ecuación (4.6), pero empleando

$$F(\omega) = j\pi\delta(\omega + \omega_0) - j\pi\delta(\omega - \omega_0),$$

quedado así que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [j\pi\delta(\omega + \omega_0) - j\pi\delta(\omega - \omega_0)] e^{j\omega t} d\omega,$$

lo cual resulta

$$f(t) = \frac{1}{-j2} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] e^{j\omega t} d\omega = \frac{e^{-j\omega_0 t} - e^{j\omega_0 t}}{-j2},$$

teniendo entonces que

$$f(t) = \sin(\omega_0 t)$$

Note que ambos modos dan resultados equivalentes, permitiendo verificar la validez de la representación de la transformada de Fourier a través de su magnitud y fase.

4.5. Las transformadas de Fourier y Laplace

De la definición de la transformada bilateral de Laplace (TBL) se tiene que

$$\mathcal{L}_{II}[f(t)] = F_{II}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad \forall \alpha_2 < \operatorname{Re}[s] < \alpha_1, \quad (4.8)$$

donde $s = \sigma + j\omega$, Brea (2004c).

De aquí se puede establecer que sólo si el eje $j\omega$ pertenece a la región de convergencia, σ puede ser cero, quedando $s = j\omega$. En consecuencia la ecuación (4.8) es expresada sólo para el caso particular $\sigma = 0$, quedando como

$$\mathcal{L}_{II}[f(t)]_{\sigma=0} = F_{II}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt,$$

lo cual representa la TF.

Esto no quiere decir que la TF es un caso particular de la TBL, pero sólo en el caso que la región de convergencia de la TBL contenga el eje imaginario $j\omega$, la TF puede verse como un caso particular de la TBL.

El lector debería comparar la

$$\mathcal{L}_{II}[u(t)] = 1/s \quad \forall \operatorname{Re}[s] > 0 \quad \text{con} \quad \mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

y dar una explicación del por qué no puede encontrarse una relación entre ellas.

Por el contrario, si $\alpha > 0$, existe una relación entre

$$\mathcal{L}_{II}[e^{-\alpha t}u(t)] = \frac{1}{s+\alpha} \quad \forall \operatorname{Re}[s] > -\alpha \quad \text{y} \quad \mathcal{F}[e^{-\alpha t}u(t)] = \frac{1}{j\omega+\alpha}$$

El conocimiento de la TBL permite de esta manera emplearla como método de cálculo de la TF, facilitando así la determinación de la TF a partir de la TBL.

A objeto de ilustrar la interpretación de la relación entre la transformada de Laplace y Fourier, será estudiado el siguiente caso:

Suponga que la transformada bilateral de una función en tiempo $f(t)$ está definida por

$$\mathcal{L}_{II}[f(t)] = F_{II}(s) = \frac{1}{(s-p)(s-\bar{p})} \quad \forall \operatorname{Re}[s] > \operatorname{Re}[p],$$

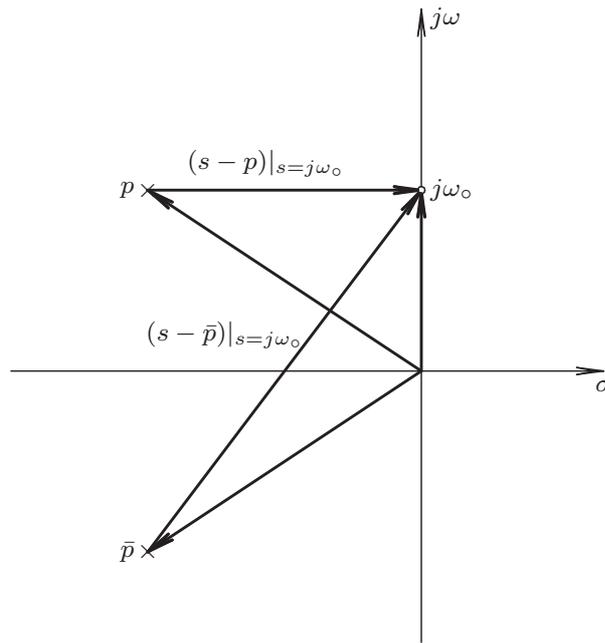


Figura 4.1. Interpretación gráfica de la transformada de Fourier

donde $p = -\alpha + j\beta$ y $\bar{p} = -\alpha - j\beta \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

La Figura 4.1 ilustra el caso particular para un $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. Observe que vector que va desde el punto p hasta el punto $j\omega_0$ representa el factor $(s - p)$ cuando $s = j\omega_0$, y de igual manera puede ser interpretado el vector que va desde \bar{p} hasta el punto $j\omega_0$. Esto significa que para el caso particular cuando $\omega = \omega_0$ se tiene que

$$\mathcal{F}[f(t)]|_{\omega=\omega_0} = F(\omega_0) = \frac{1}{(j\omega_0 - p)(j\omega_0 - \bar{p})} \quad (4.9)$$

De la ecuación (4.9) se tiene que

$$|F(\omega_0)| = \frac{1}{|j\omega_0 - p|} \frac{1}{|j\omega_0 - \bar{p}|} \quad (4.10)$$

$$\phi(\omega_0) = -\arg(j\omega_0 - p) - \arg(j\omega_0 - \bar{p})$$

Al permitir que ω_0 sea cualquier valor $\omega \in \mathbb{R}$, se obtendría $|F(\omega)|$ y $\phi(\omega)$ para todo $\omega \in \mathbb{R}$, los cuales constituiría la información necesaria para determinar la transformada de Fourier de $f(t)$, es decir, $F(\omega)$ para todo $\omega \in \mathbb{R}$.

4.6. Transformadas de Fourier de funciones periódicas

En esta sección será estudiada la transformada de Fourier de funciones periódicas a partir de un modelo matemático que mediante la convolución permite representar cualquier

función periódica. Este hecho ayudará a presentar el concepto de series de Fourier de funciones periódicas.

4.6.1. Preliminares

Definición 4.3 (Función periódica). Se dice que una función es periódica si satisface que

$$f(t) = f(t - nT) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z} \wedge T \in (0, \infty),$$

donde T representa el período de la función.

Para ilustrar esta definición véase la siguiente figura, la cual muestra una función periódica de período T . Como puede verse de la Figura 4.2, para todo t se verifica que $f(t) = f(t - nT)$.

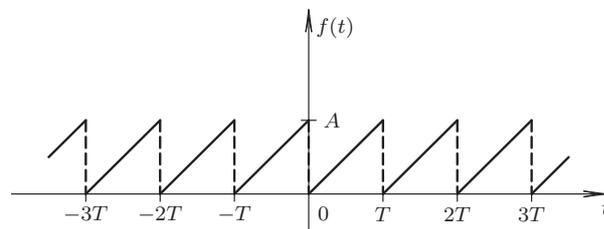


Figura 4.2. Función periódica diente de sierra

Definición 4.4 (Extensión principal). Se denomina la extensión principal, ésta denotada por $f_0(t)$, de una función periódica $f(t)$ como la parte de $f(t)$ definida en el intervalo $-\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2}$ o definida en el intervalo $-\frac{T}{2} < t \leq \frac{T}{2}$, y cero para todo $t \notin \{-\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2}\}$ o $t \notin \{-\frac{T}{2} < t \leq \frac{T}{2}\}$, respectivamente.

De la Figura ?? se tiene que la extensión principal es

$$f_0(t) = \begin{cases} \frac{A}{T}t + A & \forall -\frac{T}{2} \leq t < 0, \\ \frac{A}{T}t & \forall 0 < t < \frac{T}{2}, \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases} \quad (4.11)$$

Más aún, de la ecuación (4.11) se puede reescribir $f(t)$ como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t - nT) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Definición 4.5 (Tren de impulsos unitarios). Denótese $\delta_T(t)$ como el tren de impulsos

unitarios de período T , el cual es definido por

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (4.12)$$

donde $\delta(t)$ es la función delta de Dirac.

Lema 4.1. Sea $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica con período T , entonces la función puede ser representada como

$$f(t) = f_0(t) * \delta_T(t) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

donde $\delta_T(t)$ es un tren de impulsos unitarios de período T .

Demostración. Se conoce que toda función periódica puede ser expresada por

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t - nT) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (4.13)$$

donde $f_0(t)$ es la llamada extensión principal de $f(t)$.

Debido al hecho que

$$f_0(t) * \delta(t - nT) = f_0(t - nT),$$

se obtiene de la ecuación (4.13) que

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t) * \delta(t - nT) = f_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Aplicando la definición 4.5, se tiene que

$$f(t) = f_0(t) * \delta_T(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

□

La transformada de Fourier del tren de impulso unitario constituye el punto clave para la representación de la transformada de Fourier de funciones periódicas.

Teorema 4.4. Sea $\delta_T(t)$ el tren de impulso unitario definido por

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

el cual representa una secuencia de impulsos unitarios con periodicidad T . Entonces

$$\mathcal{F}[\delta_T(t)] = \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \quad \forall \omega \in \mathbb{R},$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$ es la denominada frecuencia fundamental.

Demostración. Véase Apéndice ?? en página ??.

□

4.6.2. Cálculo de la transformada de Fourier de funciones periódicas

Una de las vías para estudiar las funciones periódicas es a través de sus transformadas de Fourier. Para eso, se enunciará el siguiente teorema que permitirá establecer la representación espectral de las funciones periódicas.

Teorema 4.5 (Transformada de Fourier de funciones periódicas). *Sea una función periódica $f(t)$ definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces, la transformada de Fourier de $f(t)$ es definida mediante*

$$\mathcal{F}[f(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \delta(\omega - n\omega_0) \quad \forall \omega \in \mathbb{R},$$

donde α_n está definido por

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. Del Lema 4.1, se tiene que toda función periódica $f(t)$ puede ser representada por

$$f(t) = f_0(t) * \delta_T(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (4.14)$$

donde $f_0(t)$ es la denominada extensión principal en el sentido de la Definición 4.4. Por otra parte, de acuerdo a la propiedad de convolución, la cual establece que

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega),$$

se obtiene que la ecuación (4.14) tiene como transformada de Fourier

$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}[f_0(t)] \mathcal{F}[\delta_T(t)]. \quad (4.15)$$

Aplicando el Teorema 4.4 a la ecuación (4.15), se obtiene que

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \mathcal{F}[f_0(t)] \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \mathcal{F}[f_0(t)] \delta(\omega - n\omega_0) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Ahora, al aplicar el Teorema 1.8 de la página 7, se tiene que

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \mathcal{F}[f_0(t)]|_{n\omega_0} \delta(\omega - n\omega_0) \quad \forall \omega \in \mathbb{R},$$

donde

$$\mathcal{F}[f_0(t)]|_{n\omega_0} = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t)e^{-j\omega t} dt \Big|_{n\omega_0} = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt,$$

quedando definido α_n como

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \mathcal{F}[f_0(t)]|_{n\omega_0} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

y

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \delta(\omega - n\omega_0) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

□

Observación 4.7. Considera que α_n es también definido para el caso $n = 0$, es decir, α_0 el cual está definido como

$$\alpha_0 = \frac{1}{T} \mathcal{F}[f_0(t)]|_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt,$$

el cual representa el valor promedio temporal de $f(t)$.

Observación 4.8. Tome en cuenta que el término α_n representa la discretización de la transformada de Fourier de la extensión principal para cada $n\omega_0$ divididos por el período de la función $f(t)$. Además, note que en general α_n es una cantidad compleja, es decir, $\alpha_n \in \mathbb{C}$.

Observación 4.9. Debido al hecho que α_n está definido por medio de la transformada de Fourier de $f(t)$. Si la función periódica $f(t)$ es real, entonces se puede demostrar fácilmente que la magnitud de α_n es una función par de n , es decir,

$$|\alpha_n| = |\alpha_{-n}| \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

y su argumento o fase es una función impar de n , en otras palabras,

$$\arg(\alpha_n) = -\arg(\alpha_{-n}) \quad \forall n \in \{\mathbb{Z} | n \neq 0\}$$

Más aún,

$$\alpha_{-n} = \bar{\alpha}_n,$$

donde $\bar{\alpha}_n$ es el conjugado de α_n .

Ejemplo 20. Sea la función periódica $f(t)$ con extensión principal definida por

$$f_0(t) = \begin{cases} A & \forall |t| < \frac{T}{4}, \\ 0 & \forall |t| > \frac{T}{4}. \end{cases}$$

Para la función periódica determine su transformada de Fourier.

Solución 4.9. De lo definido se tiene que

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} A e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{A}{T} \left. \frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0} \right|_{-T/4}^{T/4} \quad \forall n \neq 0$$

Después de algunos cálculos elementales se tiene que

$$\alpha_n = \frac{A}{jn2\pi} \left(e^{jn\pi/2} - e^{-jn\pi/2} \right) = \frac{A}{n\pi} \sin(n\pi/2) \quad \forall n \neq 0. \quad (4.16)$$

Por otra parte, como la ecuación (4.16) no está definida para el caso $n = 0$, se debe calcular el valor de α_n para ese caso particular, es decir,

$$\alpha_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} A dt = \frac{1}{2} A.$$

En consecuencia,

$$F(\omega) = 2\pi \frac{A}{2} \delta(\omega) + 2\pi \frac{A}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n} \delta(\omega - n\omega_0) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Por otra parte, de la ecuación (4.16), se puede deducir fácilmente que para n par distinto de cero, α_n es igual a cero, quedando entonces como

$$\alpha_{2k+1} = \frac{A(-1)^k}{(2k+1)\pi} \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

lo cual empleando esta última forma, la transformada de Fourier puede ser expresada como

$$F(\omega) = 2\pi \frac{A}{2} \delta(\omega) + 2\pi \frac{A}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \delta[\omega - (2k+1)\omega_0] \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

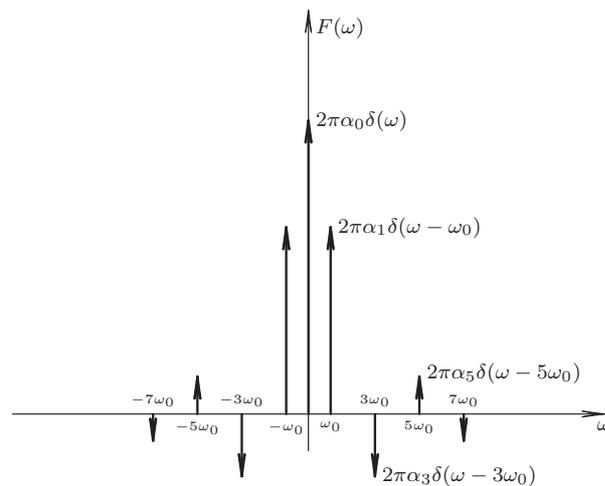


Figura 4.3. Espectro de la función periódica $f(t)$

La Figura 4.3 muestra algunos términos de la transformada de Fourier de la función $f(t)$. Note como la amplitud de los impulsos se reducen conforme la frecuencia aumenta. Además, observe la paridad en la amplitud del espectro, e imparidad de la fase del espectro..

Capítulo 5

Transformada \mathcal{Z}



Witold Hurewicz

El concepto de calcular la transformada de una muestra de una señal o secuencia fue propuesto por Witold Hurewicz¹, la cual fue posteriormente denominada como transformada Z por John R. Ragazzini, L. A. Zadeh, E. I. Jury, R. E. Kalman, J. E. Bertram, B. Friedland y G. F. Franklin quienes conformaban el grupo de investigación “sampled-data control group” de la Universidad de Columbia ?. Es por esta razón que la transformada Z debería ser llamada **transformada de Hurewicz**, sin embargo, este honor no le ha sido conferido a Hurewicz todavía. La transformada Z ha tenido una gran importancia en el análisis de fenómenos discretos, así como en el análisis de señales y sistemas en el dominio discreto.

Es importante destacar que el enfoque empleado obliga al lector a actualizar sus conceptos de serie de Laurent a objeto de determinar la expresión analítica que define cualquier transformada Z , en función de su región de convergencia.

Este capítulo está organizado como sigue: en la Sección 5.1 son definidas la discretización de una función en tiempo continuo y la secuencia discreta. En la Sección 5.2 es definida la transformada Z y además son mostrados algunos ejemplos. Las propiedades de

¹ Witold Hurewicz, nació el 29 de junio de 1904 en Lodz, antiguo Imperio de Rusia, lo que es ahora Polonia y falleció el 6 de septiembre de 1956 en Uxmal, Mexico. El retrato fue obtenido de http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Indexes/Full_Alph.html

la transformada Z son desarrolladas a través de teoremas en la Sección 5.3. Finalmente, es definida la transformada inversa Z como el desarrollo de la serie de Laurent, la cual es de mucha utilidad para la determinación de la secuencia que corresponde a una transformada Z dada.

5.1. Preliminares

En esta sección se definirá el significado de discretización de una función continua, a los efectos de emplearla en el desarrollo de la definición de la transformada Z , así como en la definición de secuencia.

Definición 5.1 (Discretización). Sea $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, es decir, una función en el dominio continuo. La función muestreada o discretizada de $f(t)$ se puede representar como

$$f_m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - nT), \quad (5.1)$$

donde T es el período de muestreo o discretización.

De acuerdo al teorema 4.2 demostrado en Brea (2004b), la Ecuación (5.1) puede ser reescrita de acuerdo a

$$f_m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \cdot \delta(t - nT) \quad (5.2)$$

Definición 5.2 (Secuencia discreta). Se define secuencia discreta o simplemente secuencia $f(n) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ como una función cuyo dominio está dado por los números enteros y rango por el conjunto de los números reales. La secuencia puede estar definida por medio de la función impulso discreto y un peso dado por el valor numérico de la función en el punto. De esta forma se tiene que una secuencia es dada por

$$f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \cdot \delta(n - k),$$

donde f_k es el valor numérico para $n = k$, ver Brea (2004a).

5.2. Definición de transformada bilateral Z

Al calcular la transformada bilateral de Laplace (TBL) a la Ecuación (5.2), se obtiene

$$L_{II}[f_m(t)] = F_{m,II}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \cdot \delta(t - nT) \right] e^{-st} dt \quad \forall s \in D_s.$$

Si la $L[f_m(t)]$ se puede intercambiar los operadores, quedando

$$F_{m,II}(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-st} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \cdot e^{-snT} \quad \forall s \in D_s, \quad (5.3)$$

dado que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-st} dt = e^{-snT}$$

Si se define la variable $z = e^{sT}$, el lado derecho de la Ecuación (5.3) puede ser escrita como

$$F_{II}(z) = \mathcal{Z}_{II}[f(nT)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \cdot z^{-n} \quad \forall s \in D_s,$$

donde la supresión de T no deforma su significado, quedando entonces definida lo que es conocida hoy en día como transformada Z y cuya expresión está dada por

$$F_{II}(z) = \mathcal{Z}_{II}[f(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \cdot z^{-n} \quad \forall z \in D_Z, \quad (5.4)$$

donde D_Z es la región de convergencia de la transformada Z obtenida de transformar la región D_s a través de la relación $z = e^{sT}$, y el símbolo \mathcal{Z} representa el operador transformada Z.

La Figura 5.1 muestra la transformación del semiplano $\text{Re}[s] < 0$ al plano z . Note como la familia de líneas rectas verticales son transformadas en circunferencias con centro común en el origen de coordenadas del plano z , y en especial el eje $j\omega$ es transformado en la circunferencia de radio uno.

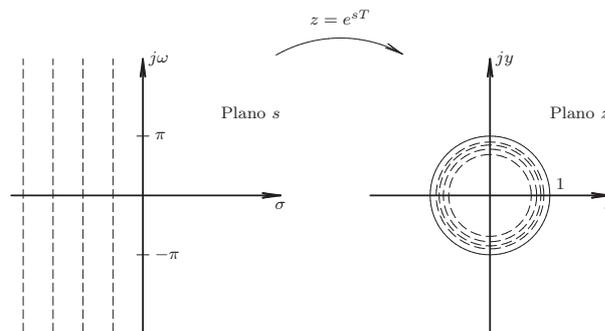


Figura 5.1. Transformación del plano s al plano z a través de la función $z = e^{sT}$

Observación 5.1. Note que al emplear la definición de transformada unilateral derecha de Laplace (TUDL), la definición de transformada unilateral derecha Z sería

$$F_{I+}(z) = \mathcal{Z}_{I+}[f(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot z^{-n} \quad \forall z \in D'_Z, \quad (5.5)$$

donde D'_Z es la región transformada proveniente de la región de convergencia de la TUDL

Es importante destacar que algunos autores definen la transformada Z empleando el núcleo z^n en lugar del núcleo z^{-n} . Sin embargo, aquí será empleado el núcleo z^{-n} debido a su sencilla interpretación con el núcleo de la transformada de Laplace, el cual es e^{-st} y donde la variable z puede ser vista como e^{sT} .

Ejemplo 21. Sea la secuencia $f(n) = 2\delta(n+1) + 5\delta(n) + 10\delta(n-1)$. Entonces, la transformada bilateral Z de la secuencia $f(n)$ esta dada por

$$F_{II}(z) = \mathcal{Z}_{II}[f(n)] = 2z + 5 + 10z^{-1}$$

Solución 5.1. De la definición dada por la Ecuación (5.4) se tiene

$$F_{II}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [2\delta(n+1) + 5\delta(n) + 10\delta(n-1)] \cdot z^{-n} = 2z + 5 + 10z^{-1},$$

como consecuencia de aplicar

$$x(n)\delta(n-n_0) = x(n_0)\delta(n-n_0),$$

(Oppenheim et al., 1997, Cap. 1).

Note que en el ejemplo anterior, la secuencia está definida por una muestra finita en tiempo discreto y el exponente de la variable z proporciona la información de la ubicación de cada impulso discreto. Identificando los exponentes, puede ser determinada la secuencia que produce la transformada Z, es decir, la transformada inversa Z.

Ejemplo 22. Sea la secuencia discreta por

$$f(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cdot \delta(n-k).$$

Entonces, la transformada bilateral Z de la secuencia es

$$F_{II}(z) = \mathcal{Z}_{II}[f(n)] = \frac{z}{z-a} \quad \forall |z| > |a|.$$

Solución 5.2. Por la definición de transformada bilateral Z, se obtiene

$$F_{II}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} a^k \cdot \delta(n-k) \right] \cdot z^{-n}$$

Si se supone convergencia, se puede asegurar que

$$F_{II}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[a^k \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-k) \cdot z^{-n} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (az^{-1})^k,$$

lo cual, si $|az^{-1}| < 1$ $F(z)$ converge a

$$F_{II}(z) = \frac{z}{z-a} \quad \forall |z| > |a|$$

Ejemplo 23. Sea la secuencia discreta

$$f(n) = \sum_{k=-\infty}^{-1} -a^k \cdot \delta(n-k).$$

Entonces, la transformada bilateral Z está dada por

$$F_{II}(z) = \mathcal{Z}_{II}[f(n)] = \frac{z}{z-a} \quad \forall |z| < |a|.$$

Solución 5.3. Nuevamente, de la definición se tiene

$$F_{II}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{-1} -a^k \cdot \delta(n-k) \right] \cdot z^{-n}$$

Dado que los signos de sumas pueden intercambiarse,

$$F_{II}(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} -a^k \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-k) \cdot z^{-n} \right] = - \sum_{k=-\infty}^{-1} a^k \cdot z^{-k} = - \sum_{k=1}^{\infty} a^{-k} z^k,$$

$$F_{II}(z) = - \sum_{k=1}^{\infty} (a^{-1}z)^k,$$

quedando como

$$F_{II}(z) = \frac{a^{-1}z}{a^{-1}z-1} = \frac{z}{z-a} \quad \text{si } |a^{-1}z| < 1,$$

esto significa que

$$F_{II}(z) = \frac{z}{z-a} \quad \forall |z| < |a|.$$

Observación 5.2. Observe que la expresión matemática de las transformadas Z de los ejemplos 22 y 23 son idénticas, sin embargo, sus regiones de convergencia son absolutamente diferentes. Esto significa entonces que para definir la transformada bilateral Z se requieren tanto su expresión matemática como su región de convergencia.

5.3. Propiedades de la transformada Z

En este punto serán definidas las propiedades más importante de la transformada bilateral Z mediante el enunciado de los siguientes teoremas. No obstante, las propiedades propuestas pueden ser aplicadas también a la transformada unilateral derecha Z, dada por la Ecuación (5.5).

Teorema 5.1 (Linealidad). Sea $F_{II,k}(z) = \mathcal{Z}_{II}[f_k(n)] \forall k = 1, \dots, m$, es decir, la transformada bilateral Z de cada k -ésima secuencia $f_k(n)$. Si $F_{II,k}(z)$ converge para todo $z \in D_k$, entonces

$$\mathcal{Z}_{II} \left[\sum_{k=1}^m a_k f_k(n) \right] = \sum_{k=1}^m a_k F_{II,k}(z) \quad \forall z \in \bigcap_{k=1}^m D_k,$$

donde a_k son constantes para todo $k = 1, \dots, m$.

Demostración. De la Ecuación (5.4) se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{II} \left[\sum_{k=1}^m a_k f_k(n) \right] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^m a_k f_k(n) \right] \cdot z^{-n} = \sum_{k=1}^m a_k \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_k(n) \cdot z^{-n}, \\ \mathcal{Z}_{II} \left[\sum_{k=1}^m a_k f_k(n) \right] &= \sum_{k=1}^m a_k F_{II,k}(z), \end{aligned}$$

donde la expresión anterior obviamente existe si $z \in \bigcap_{k=1}^m D_k$. ■

Teorema 5.2 (Traslación en el tiempo discreto). Sea $F_{II}(z) = \mathcal{Z}_{II}[f(n)]$. Si $F_{II}(z)$ converge para todo $z \in D$, entonces

$$\mathcal{Z}_{II}[f(n - n_0)] = z^{-n_0} F_{II}(z) \quad \forall z \in D \cup \{0\} \vee z \in D \setminus \{0\}$$

Demostración. Nuevamente, empleando la Ecuación (5.4) se obtiene que

$$\mathcal{Z}_{II}[f(n - n_0)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n - n_0) \cdot z^{-n} \quad (5.6)$$

Haciendo el cambio de variable $m = n - n_0$, la Ecuación (5.6) es reexpresada como

$$\mathcal{Z}_{II}[f(n - n_0)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) \cdot z^{-(m+n_0)} = z^{-n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) \cdot z^{-m} = z^{-n_0} F_{II}(z),$$

la cual sólo existe si z pertenece al dominio D modificado por la presencia del factor z^{-n_0} . ■

Teorema 5.3 (Traslación en el plano z). Sea $F_{II}(z) = \mathcal{Z}_{II}[f(n)]$. Si $F_{II}(z)$ converge para todo $z \in D = \{z \mid R_{\min} < |z| < R_{\max}\}$, entonces

$$\mathcal{Z}_{II}[z_0^n \cdot f(n)] = F_{II}(z/z_0) \quad \forall z \in D' = \{z \mid |z_0| R_{\min} < |z| < |z_0| R_{\max}\}$$

Demostración. Por medio de la Ecuación (5.4) se obtiene que

$$\mathcal{Z}_{II}[z_0^n \cdot f(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [z_0^n \cdot f(n)] \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \cdot (z/z_0)^{-n} = F_{II}(z/z_0),$$

si $R_{\min} < \left| \frac{z}{z_0} \right| < R_{\max}$, lo cual implica que z tiene que pertenecer al conjunto $D' = \{z \mid |z_0| R_{\min} < |z| < |z_0| R_{\max}\}$. ■

Teorema 5.4 (Escalamiento en tiempo discreto). Sea $F_{II}(z) = \mathcal{Z}_{II}[f(n)]$. Si $F_{II}(z)$ converge para todo $z \in D = \{z \mid R_{\min} < |z| < R_{\max}\}$, entonces

$$\mathcal{Z}_{II}[f(an)] = F_{II}\left(z^{1/a}\right) \quad \forall z \in D' = \{z \mid R_{\min} < |z^{1/a}| < R_{\max}\}$$

donde $a \in \{n \in \mathbb{Z} \mid n \neq 0\}$.

Demostración. De la Ecuación (5.4) se tiene que

$$\mathcal{Z}_{II}[f(an)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(an) \cdot z^{-n}$$

Si se propone el cambio de variable $m = an$, se tiene que

$$\mathcal{Z}_{II}[f(an)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) \cdot z^{-m/a} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) \cdot \left(z^{1/a}\right)^{-m} \quad \text{si } a \neq 0.$$

En consecuencia

$$\mathcal{Z}_{II}[f(an)] = F_{II}\left(z^{1/a}\right) \quad \forall z \in D' = \{z \mid R_{\min} < |z^{1/a}| < R_{\max}\}$$

■

Teorema 5.5 (Diferencia n_0 -ésima). Sea $F_{II}(z) = \mathcal{Z}_{II}[f(n)]$. Si $F_{II}(z)$ converge para todo $z \in D = \{z \mid R_{\min} < |z| < R_{\max}\}$, entonces

$$\mathcal{Z}_{II}[f(n) - f(n - n_0)] = [1 - z^{-n_0}] F_{II}(z) \quad \forall z \in D \cup \{0\} \vee z \in D \setminus \{0\}$$

Demostración. Aplicando los teoremas 5.1 y 5.2, se obtiene

$$\mathcal{Z}_{II}[f(n) - f(n - n_0)] = [1 - z^{-n_0}] F_{II}(z),$$

donde obviamente converge para la misma región de convergencia. ■

Teorema 5.6 (Acumulación). Sea $F_{II}(z) = \mathcal{Z}_{II}[f(n)]$. Si $F_{II}(z)$ converge para todo $z \in D = \{z \mid R_{\min} < |z| < R_{\max}\}$, entonces

$$\mathcal{Z}_{II}\left[\sum_{k=0}^{\infty} f(n - k)\right] = \frac{1}{1 - z^{-1}} F_{II}(z) \quad \forall z \in D \setminus \{1\}$$

Demostración. Aplicando los teoremas 5.1 y 5.2,

$$\mathcal{Z}_{II} \left[\sum_{k=0}^{\infty} f(n-k) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{Z}_{II} [f(n-k)] = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} F_{II}(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} F_{II}(z),$$

la cual converge para todo $z \in D$ excepto $z = 1$. ■

Teorema 5.7 (diferenciación en z). Sea $F_{II}(z) = \mathcal{Z}_{II} [f(n)]$. Si $F_{II}(z)$ converge para todo $z \in D = \{z \mid R_{\min} < |z| < R_{\max}\}$, entonces

$$\mathcal{Z}_{II} [nf(n)] = -z \frac{d}{dz} F_{II}(z), \quad \forall z \in D$$

Demostración. Si calculamos la derivada de la Ecuación (5.4) con respecto a z , se obtiene

$$\frac{d}{dz} F_{II}(z) = \frac{d}{dz} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \cdot z^{-n} \right] = -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} nf(n) \cdot z^{-n} \quad (5.7)$$

dado que

$$\frac{d}{dz} z^{-n} = -nz^{-n-1}$$

De la Ecuación (5.7), se puede afirmar que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} nf(n) \cdot z^{-n} = -z \frac{d}{dz} F_{II}(z) \quad \forall z \in D$$

■

Teorema 5.8 (Convolución). Sean $F_{II}(z) = \mathcal{Z}_{II} [f(n)]$ y $G_{II}(z) = \mathcal{Z}_{II} [g(n)]$. Si $F_{II}(z)$ converge para todo $z \in D_f = \{z \mid R_{\min,f} < |z| < R_{\max,f}\}$ y $G_{II}(z)$ converge para todo $z \in D_g = \{z \mid R_{\min,g} < |z| < R_{\max,g}\}$, entonces

$$\mathcal{Z}_{II} [f(n) * g(n)] = F_{II}(z) G_{II}(z) \quad \forall z \in D_f \cap D_g$$

Demostración. De la definición de convolución en el dominio discreto Brea (2004a) y de la definición de transformada Z, se tiene

$$\mathcal{Z}_{II} [f(n) * g(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)g(n-k) \cdot z^{-n}$$

Por intercambio de las operaciones de sumas

$$\mathcal{Z}_{II} [f(n) * g(n)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n-k) \cdot z^{-n} \quad (5.8)$$

Aplicando el teorema 5.2 a la Ecuación (5.8), se obtiene

$$\mathcal{L}_{II} [f(n) * g(n)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k}G_{II}(z) = G_{II}(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k} = F_{II}(z)G_{II}(z),$$

$\forall z \in D_f \cap D_g$

Dado que las regiones de convergencias no se ven alteradas. ■

Teorema 5.9 (Valor inicial). *Sea $F_{II}(z) = \mathcal{L}_{II}[f(n)]$. Si $f(n) = 0 \forall n < 0$ y si $F_{II}(z)$ converge para todo $z \in D = \{z \mid 1 < |z| < R_{\text{máx}}\}$, entonces*

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F_{II}(z)$$

Demostración. De la Ecuación (5.4) se tiene que

$$\mathcal{L}_{II} [f(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \cdot z^{-n} \quad (5.9)$$

Como $f(n) = 0 \forall n < 0$, la Ecuación (5.9), se obtiene

$$\mathcal{L}_{II} [f(n)] = F_{II}(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot z^{-n} \quad \forall z \in D = \{z \mid 1 < |z| < R_{\text{máx}}\} \quad (5.10)$$

Al aplicar el límite cuando z tiende a infinito a la Ecuación (5.10), se tiene que debido a que $R_{\text{máx}} \rightarrow \infty$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F_{II}(z) = f(0)$$

■

5.4. Transformada inversa Z

La operación de transformada inversa Z, la cual será denotado por el operador \mathcal{Z}^{-1} , está definida por la serie de Laurent de acuerdo a la región de convergencia definida (Churchill y Brown, 1992, Cap. 5). En función de este concepto, el método de transformada inversa Z está basado exclusivamente en la obtención de la serie de Laurent tomando en cuenta la región de convergencia.

Ejemplo 24. *Sea la transformada Z dada en el ejemplo 22, esto es*

$$F_{II}(z) = \frac{z}{z-a}, \quad \forall |z| > |a|.$$

Entonces su transformada inversa Z está definida por

$$f(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cdot \delta(n-k).$$

Solución 5.4. A fin de determinar la transformada inversa Z, será calculada la serie de Laurent para la región de convergencia $|z| > |a|$. De esta forma se tiene que

$$F_{II}(z) = \frac{z}{z-a} = \frac{1}{z} \frac{z}{1-(a/z)} = \frac{1}{1-(a/z)}, \quad \forall |z| > |a|$$

Como

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}, \quad \forall |r| < 1,$$

se tiene que

$$F_{II}(z) = \frac{1}{1-(a/z)} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k},$$

lo cual implica por identificación de términos con la Ecuación (5.4) que

$$f(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cdot \delta(n-k).$$

Sin embargo, (Ziemer *et al.*, 1993, Cap. 8) desarrolló el concepto de transformada inversa Z a través de la definición de integral curvilínea cerrada a lo largo del contorno C, dado por la región de convergencia. Así, la transformada inversa Z es definida como

$$f(n) = \frac{1}{j2\pi} \oint F_{II}(z) z^{n-1} dz,$$

donde el contorno de integración queda determinado por la región de convergencia. No obstante esta definición no se escapa de la definición de serie de Laurent desarrollada en (Churchill y Brown, 1992, Cap. 5).

Una importante serie que debería tenerse presente es

$$\sum_{k=n_0}^N r^k = \frac{r^{n_0} - r^{N+1}}{1-r}, \quad \forall r \neq 1 \quad (5.11)$$

Note que cuando $N \rightarrow \infty$, la serie representada por la Ecuación (5.11) converge sólo si $|r| < 1$, quedando entonces

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} r^k = \frac{r^{n_0}}{1-r}, \quad \forall |r| < 1$$

Otra importante serie que puede ser derivada es

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} (-1)^k r^k = \frac{(-1)^{n_0} r^{n_0}}{1+r}, \quad \forall |r| < 1$$

Cálculo de Residuos

Este apéndice tiene el objeto de establecer el método de cálculo de residuo de una función en una singularidad o polo aislado de orden m .

Teorema .10. Sea $f(z)$ una función en el campo complejo tal que es analítica en la región $0 < |z - z_0| \leq r$, es decir, para la región $|z - z_0| \leq r$ la función $f(z)$ deja de ser analítica en el punto z_0 . Si la singularidad o polo z_0 es de orden m , con $m = 1, 2, \dots$, entonces el residuo de la función de $f(z)$ en el punto z_0 viene dado por

$$\text{Res } [f(z)]|_{z_0} = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{d^{m-1} \Phi(z)}{dz^{m-1}} \right|_{z_0}, \quad (.12)$$

donde $\Phi(z) = (z - z_0)^m f(z)$ es analítica y no nula en z_0 .

Demostración. Dado que $f(z)$ es analítica en la región $0 < |z - z_0| \leq r$, puede ser desarrollada su serie de Laurent, la cual viene dada por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}, \quad (.13)$$

donde

$$a_n = \frac{1}{j2\pi} \oint_{c_1} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots,$$

y

$$b_n = \frac{1}{j2\pi} \oint_{c_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots,$$

siendo c_1 un contorno simple cerrado en la región $r_0 < |z - z_0| \leq r_1 < r$ orientado en sentido antihorario y c_0 otro contorno simple cerrado en la región $0 < |z - z_0| \leq r_0$ orientado en sentido antihorario, donde ambos contornos contiene el punto z_0 .

No obstante, como $\Phi(z) = (z - z_0)^m f(z)$ la cual es analítica en la región $|z - z_0| \leq r$ se tiene que

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi^{[n]}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad \forall |z - z_0| \leq r, \quad (.14)$$

donde

$$\Phi^{[n]}(z_0) = \left. \frac{d^n \Phi(z)}{dz^n} \right|_{z_0}.$$

De esta forma por medio de la Ecuación (.14), $\Phi(z)$ puede ser expandida en una serie

dada por

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{m-2} \frac{\Phi^{[n]}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + \frac{\Phi^{[m-1]}(z_0)}{(m-1)!} (z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\Phi^{[n]}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Al expresar $f(z) = \Phi(z)/(z - z_0)^m$, se tiene que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{m-2} \frac{\Phi^{[n]}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-m} + \frac{\Phi^{[m-1]}(z_0)}{(m-1)!} (z - z_0)^{-1} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\Phi^{[n]}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-m}.$$

De acuerdo al concepto de residuo de una función en un punto z_0 , el mismo corresponde al coeficiente que multiplica el término $(z - z_0)^{-1}$, eso significa que

$$\text{Res } [f(z)]|_{z_0} = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{d^{m-1} \Phi(z)}{dz^{m-1}} \right|_{z_0}$$

■

Referencias

- Brea, E. 2004a. Funciones y Convolución: su enfoque en los dominios continuo y discreto. Notas de clases para el curso Variable Compleja y Cálculo Operacional. Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ingeniería, Escuela de Ingeniería Eléctrica. Dpto. Electrónica, Computación y Control.
- Brea, E. 2004b. Teoría de Distribución. Notas de clases para el curso Variable Compleja y Cálculo Operacional. Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ingeniería, Escuela de Ingeniería Eléctrica. Dpto. Electrónica, Computación y Control.
- Brea, E. 2004c. Transformada de Laplace. Notas de clases para el curso Variable Compleja y Cálculo Operacional. Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ingeniería, Escuela de Ingeniería Eléctrica. Dpto. Electrónica, Computación y Control.
- Bäumer, B. y Neubrandner, F. 1994. Laplace transform methods for evolution equations. Conferenze del Seminario di Matematica dell'Università di Bari. Obtenido de <http://citeseer.ist.psu.edu/48209.html> el 26 diciembre 2004.
- Churchill, R. V. 1971. *Operational mathematics*. McGraw-Hill, New York,, 3d edition. First ed. published in 1944 under title: Modern operational mathematics in engineering.
- Churchill, R. V. y Brown, J. W. 1992. *Variable Compleja y Aplicaciones*. Churchill-Brown series. McGraw-Hill, Madrid, España, 5th edition.
- Euler, Leonhard 1744. De constructione aequationum. In *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, volume IX, pages 85–97. Obtenido de <http://math.dartmouth.edu/~euler/pages/E070.html> el 26 diciembre 2004.
- Euler, Leonhard 1749. De vibratione chordarum exercitatio. In *Nova Acta Euditorum*, pages 512–527. Obtenido de <http://math.dartmouth.edu/~euler/pages/E119.html> el 28 diciembre 2004. De acuerdo a C. G. J. Jacobi, un formal trabajo con este título fue leído a La Academia de Berlín, el de 16 mayo de 1748.
- Euler, Leonhard 1750. Sur la vibration des cordes. In *Memoires de L'academie des Sciences de Berlin*, volume 4, pages 69–85. Obtenido

- de <http://www3.bbaw.de/bibliothek/digital/struktur/02-hist/1748/jpg-0600/00000071.htm> el 28 diciembre 2004. De acuerdo a C. G. J. Jacobi, un formal trabajo en Latín intitulado *De vibratione cordarum* fue leído a La Academia de Berlín, el 16 de mayo de 1748.
- Gel'fand, I. M. y Shilov, G. E. 1964. *Generalized functions*. Academic Press, New York,. Traducido por E. Saletan de la obra en Ruso “*Obobshchennye Funktsii I Deistviya Nad Nimi*”.
- Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., y Nawab, S. H. 1997. *Señales y sistemas*. Prentice Hall Hispanoamericana, S. A., Naucalpan de Juárez, México, 2a edition. Traducido de la obra original “*Signals and systems*”, 2a edición por Gloria Mata Hernández.
- Papoulis, A. 1962. *The Fourier integral and its applications*. McGraw-Hill electronic sciences series. McGraw-Hill, New York,.
- Papoulis, A. 1980. *Circuits and systems : a modern approach*. HRW series in electrical and computer engineering. Holt, Rinehart, and Winston, New York.
- Thomas, G. B. 1976. *Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica*. Colección ciencias y técnica. Aguilar, Madrid, España, 6. edition. Traducido de la obra original “*Calculus and analytic geometry*”, Addison-Wesley Pub. Co, illus. 24 cm.
- Ziemer, R. E., Tranter, W. H., y Fannin, D. R. 1993. *Signals and systems : continuous and discrete*. Macmillan ; Maxwell Macmillan Canada ; Maxwell Macmillan International, New York Toronto, 3rd edition.

Índice Alfabético

- Argumento
 - de $\mathcal{F}[f(t)]$, véase Espectro de fase
- Convolución
 - dominio continuo
 - asociatividad, 16
 - conmutatividad, 16
 - definición, 15
 - distributividad, 16
 - ejemplo, 17
 - dominio discreto
 - asociatividad, 20
 - conmutatividad, 19
 - definición, 19
 - distributividad, 20
 - ejemplo, 20
- Definición
 - α_n , 67
- Delta
 - características
 - área, 7
 - par, 6
 - función, 5
 - propiedad
 - derivada, 6
 - derivada: ejemplo, 9
 - escalamiento, 6
 - linealidad, 6
 - traslación, 6
- Distribución
 - propiedad
 - derivación, 4
 - escalamiento, 3
 - linealidad, 2
 - producto, 5
 - traslación, 3
- Espectro
 - de amplitud, 52
 - de fase, 52
- Fórmula
 - inversión
 - de la transformada de Fourier, 53, **59**
 - de la transformada de Laplace, 39
- Función
 - 1_t , 56
 - $\delta(x)$, véase Delta, función
 - $\delta_T(t)$, véase Función periódica
 - $\delta[n]$, véase Función impulso unitario
 - discreto
 - $\text{senc}_{\omega_0}(x)$, 12
 - $p_a(x)$
 - , véase Función pulso rectangular
 - $q_a(x)$
 - , véase Función pulso triangular
 - $u(x)$, véase Función escalón dominio continuo
 - $u[n]$, véase Función escalón tiempo discreto
 - dominio
 - continuo, 11
 - discreto, 11
 - escalón

- dominio continuo, 9
- dominio discreto, 14
- generalizada, 2
 - continuidad, 2
 - linealidad, 2
- impulso uniratio
 - discreto, 13
 - dominio continuo, *véase* Delta, función
- orden exponencial, 23
- prueba, 2
- pulso
 - rectangular, 12
 - triangular, 12
- seccionalmente continua, 23
- Función periódica
 - definición, 64
 - extensión principal, 64
 - tren de impulsos unitarios, 64
- Límite
 - generalizado
 - definición, 8
 - ejemplo, 8
- Laplace
 - transformada
 - definición, *véase* Transformada bilateral de Laplace
- Magnitud
 - de $\mathcal{F}[f(t)]$, *véase* Espectro de amplitud
- Relación
 - transformada de Fourier y Laplace, 62
- Residuo
 - definición, 81
 - teorema, 80
- Serie de Laurent
 - definición, 80
- Serie numérica
 - $\sum_{k=n_0}^N r^k$, 79
 - $\sum_{k=n_0}^{\infty} (-r)^k$, 79
 - $\sum_{k=n_0}^{\infty} r^k$, 79
- Teorema
 - fórmula de inversión
 - de la transformada de Laplace, 41
- Transformada
 - bilateral de Laplace
 - ejemplo $\mathcal{L}_{II}[-e^{\alpha t}u(-t)]$, 34
 - ejemplo $\mathcal{L}_{II}[e^{\alpha t}u(t)]$, 34
 - analiticidad, 32
 - definición, 31
 - de Fourier
 - derivación en ω , 56
 - derivación en t , 56
 - integración en t , 56
 - traslación en ω , 55
 - traslación en t , 55
 - cambio de escala, 55
 - condición de existencia, 54
 - convolución, 56
 - definición, 52
 - dualidad, *véase* transformada de Fourier, simetría
 - ejemplos, 56
 - linealidad, 55
 - simetría, 55
 - de Laplace, inversa
 - ejemplos, 49
 - integral lineal
 - derivación en λ , 31
 - traslación en λ , 27
 - cambio de escala, 26
 - convolución, 28
 - definición, 24
 - derivación en tiempo, 28
 - linealidad, 25

- núcleo, 25
- traslación en tiempo, 26
- inversa
 - de Fourier, 59
 - de Laplace, *véase* Fórmula inversión
 - de la transformada de Laplace
- inversa de Laplace
 - definición, 35
- inversa Z
 - definición, 78
- Z
 - diferenciación en z , 77
 - traslación en z , 75
 - acumulación, 76
 - convolución , 77
 - escalamiento, 76
 - linealidad, 75
 - traslación en tiempo, 75
 - valor inicial, teorema, 78
- Transformada
 - bilateral Z
 - definición, 71
 - ejemplos, 73
 - de Laplace
 - ejemplos, 46
 - unilateral derecha de Laplace
 - derivación en s , 44
 - derivación en t , 43
 - integración en t , 44
 - traslación en s , 43
 - traslación en t , 43
 - cambio de escala, 43
 - convolución, 43
 - definición, 43
 - linealidad, 43
 - valor final, teorema, 45
 - valor inicial, teorema, 44
 - unilateral izquierda de Laplace
 - definición, 46
- Transformada de Fourier
 - $\delta_T(t)$, 65