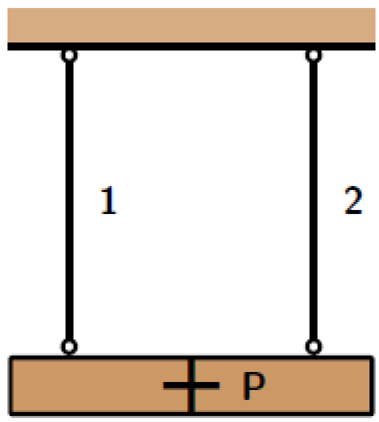
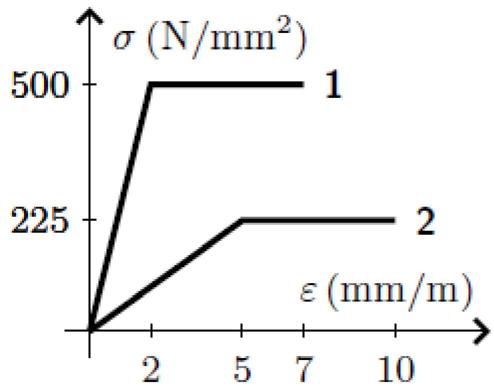
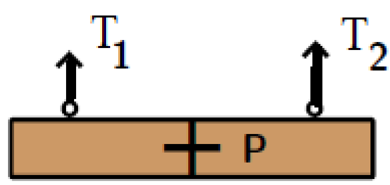
1.- En la estructura de la figura los dos cables son de la misma sección transversal, 1000 mm^2 de área, de igual longitud 2 metros, pero de distintos materiales, cuyos diagramas esfuerzo-deformación se muestra en la figura. Los dos cables soportan un cuerpo que se considera rígido. Determine el peso máximo del cuerpo rígido que el sistema puede soportar. Determine la elongación de los cables para esa carga.





Se supondrá que la coordenada horizontal del centro de gravedad está equidistante de los dos cables.
Los diagramas esfuerzo-deformación informan que los materiales de los cables tiene un comportamiento elasto-plástico. En este caso el cable del material 1 está limitado a un esfuerzo máximo de 500 N/mm^2 y el cable 2 a 225 N/mm^2.
Se elabora el diagrama de cuerpo libre del sólido rígido. El diagrama corresponde a un problema estáticamente determinado, puesto que con las ecuaciones de equilibrio es posible calcular el valor de las dos tensiones, que en este caso son iguales y cada una vale la mitad del peso del cuerpo rígido.



$$\sum F_v = 0 \rightarrow T_1 + T_2 - P = 0$$

$$\sum M_{centro} = 0 \rightarrow T_1 = T_2$$

$$T_1 = \frac{P}{2} \leq \sigma_1 \times A = 500\, N/mm^2 \times 1000\, mm^2 = 500\,000\, N \rightarrow P \leq 1\,000\, kN$$

$$T_2 = \frac{P}{2} \leq \sigma_2 \times A = 225\, N/mm^2 \times 1000\, mm^2 = 225\,000\, N \rightarrow P \leq 450\, kN$$

De lo anterior se deduce que la carga máxima que puede soportar el sistema es de 450 kN. Puesto que este valor produce la cedencia del cable 2, mientras que para este valor de carga el cable 1 aún está en rango elástico.

La elongación de los cables se obtiene determinando la deformación longitudinal unitaria de cada material para el valor de carga de 450 kN. De acuerdo al diagrama esfuerzo-deformación del cable 2, la deformación longitudinal unitaria en él es de 5 mm/m, puesto que está solicitado por esfuerzos de magnitud 225 kN/mm^2. Por lo que su elongación es $\delta=\epsilon L=5\,mm/m\times 2\,m=10\,mm$

Con respecto al cable 1, el esfuerzo actuante es

$$\sigma_1=T_1/A=P/(2\mathrm{A})=450\,000\,N/(2\times 1000\,mm^2)=225\,N/mm^2$$

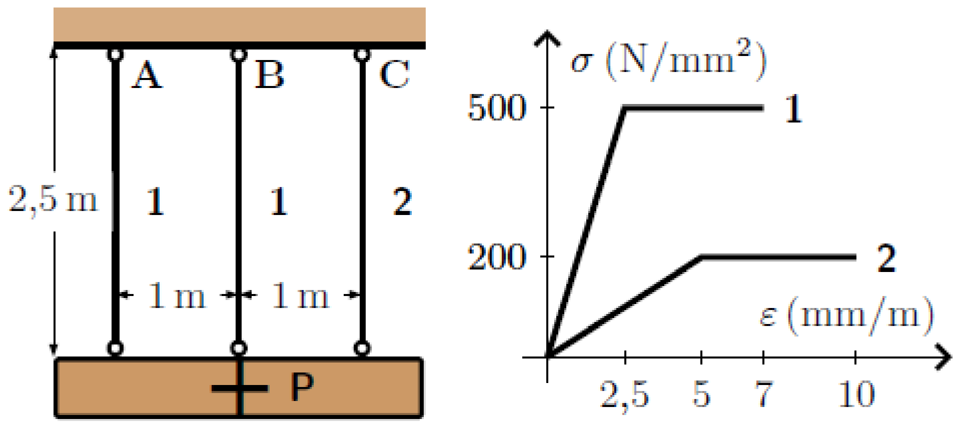
Para esta magnitud de esfuerzo, la deformación longitudinal unitaria se obtiene mediante la expresión $\epsilon=\sigma/E$ siendo E el módulo de Young, que corresponde al valor de la pendiente del diagrama esfuerzo-deformación del material 1. De acuerdo a la gráfica

$$E_1=\frac{500\,N/mm^2}{2\,mm/m}=\frac{500\,N/mm^2}{0{,}002\,m/m}=250000\,N/mm^2=250\,GPa$$

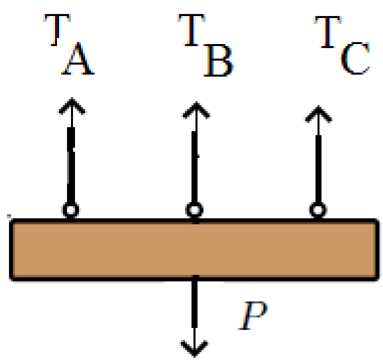
y

$$\delta_1=\epsilon_1\times L=\frac{\sigma_1}{E_1}L=\frac{225\,N/mm^2}{250000\,N/mm^2}*2\,m=0{,}0018\,m=1{,}8\,mm$$

2.- En la estructura de la figura los tres cables tienen la misma sección transversal de 800 mm2 y el diagrama esfuerzo-deformación de los materiales es el indicado. Los cables soportan un cuerpo rígido. Construya el diagrama carga-alargamiento de cada cable, conforme la carga crece desde el valor cero hasta el valor máximo que puede soportar el sistema.



Se elabora el diagrama de cuerpo libre

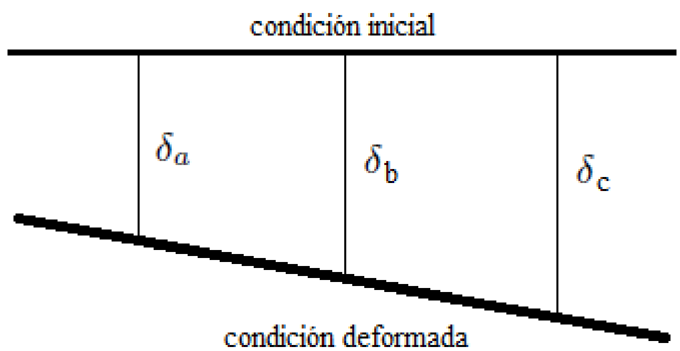


Se escriben las ecuaciones de equilibrio

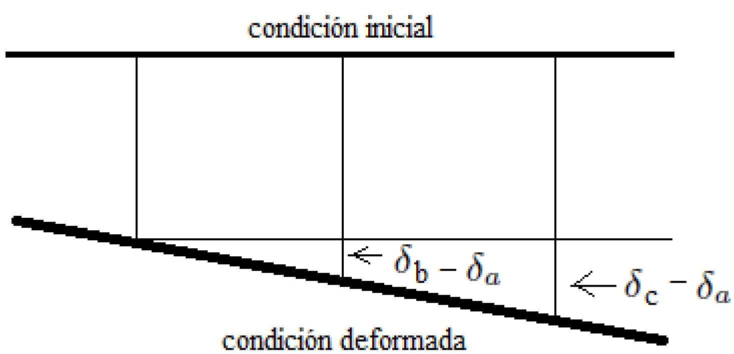
$$\sum F_v = 0 \rightarrow T_A + T_B + T_C - P = 0$$

$$\sum M_{centro} = 0 \rightarrow T_A = T_C$$

Se obtiene un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas. Indicando que es un sistema estáticamente indeterminado y de grado 1. Se requiere una ecuación de compatibilidad. Ésta se establece por el hecho que el cuerpo rígido, inicialmente horizontal, debe seguir siendo recto cuando los cables se alarguen, por lo que es válido el siguiente diagrama cinemático



Por triángulos semejantes se obtiene la ecuación de compatibilidad



$$\frac{\delta_b - \delta_a}{1} = \frac{\delta_c - \delta_a}{2}$$

Los valores de los alargamientos se relacionan con las fuerzas internas de cada cable mediante

$$\delta_a = \frac{T_A L_a}{E_a A_a}; \qquad \delta_b = \frac{T_B L_b}{E_b A_b}; \qquad \delta_c = \frac{T_C L_c}{E_c A_c}$$

La sustitución de las expresiones anteriores en la ecuación de compatibilidad y en conjunción con las ecuaciones de equilibrio, conduce al siguiente resultado

$$T_A = P/5\,; \qquad T_B = 3\mathrm{P}/5\,; \qquad T_C = P/5$$

Todo lo anterior modela la estructura mientras todos los elementos que la forman se mantengan dentro del rango elástico. Por ello, si requiere elaborase una gráfica de la carga total vs la elongación de cada una, es necesario calcular cual es el valor de carga total externa que produce el inicio de la cedencia, la cual se denomina *carga cedente.*

Si la carga cedente es aquélla que inicia la cedencia, su valor se determina calculando los esfuerzos en los diferentes elementos que forman la estructura en función de la carga externa y estableciendo que dichos esfuerzos no pueden ser superiores al esfuerzo cedente de los materiales. Lo anterior conduce al siguiente conjunto de inecuaciones

$$\sigma_A = T_A / A_a = \frac{P/5}{800\,mm^2} < 500\,\frac{N}{mm^2} \rightarrow P < 2000\,kN$$

$$\sigma_B = T_B / A_b = \frac{3\mathrm{P}/5}{800\,mm^2} < 500\,\frac{N}{mm^2} \rightarrow P < 667\,kN$$

$$\sigma_C = T_C / A_c = \frac{P/5}{800\,mm^2} < 200\,\frac{N}{mm^2} \rightarrow P < 800\,kN$$

Las tres inecuaciones anteriores se cumple para P < 667 kN. Esta carga es la de cedencia puesto que ese valor produce el inicio de la cedencia del sistema, en este caso en la barra central. Para ese valor de carga externa, en las otras dos barras el esfuerzo normal presente es inferior al esfuerzo cedente de los respectivos materiales.

Para este valor de carga de 667 kN, los esfuerzos en cada barra son

$$\sigma_A = T_A / A_a = \frac{667/5}{800\,mm^2} = 167\,\frac{N}{mm^2} < 500\,\frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_B = T_B / A_b = \frac{3*667/5}{800\,mm^2} = 500\,\frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_C = T_C / A_c = \frac{667/5}{800\,mm^2} = 167\,\frac{N}{mm^2} < 200\,\frac{N}{mm^2}$$

Los módulos elásticos de los materiales son

$$E_1 = \frac{500\,N/mm^2}{2{,}5\times10^{-3}\,m/m} = 200\,GPa\,; \qquad E_2 = \frac{200\,N/mm^2}{5\times10^{-3}\,m/m} = 40\,GPa$$

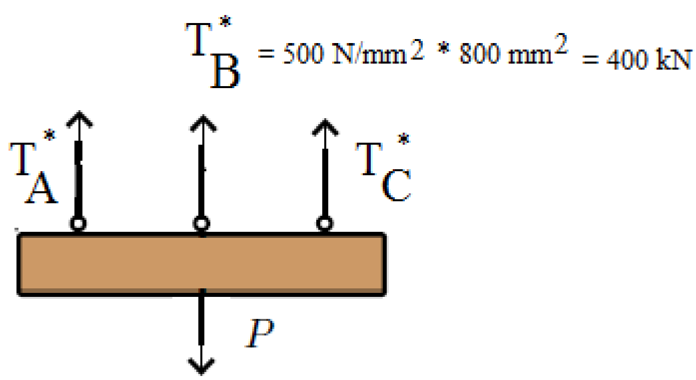
Con los módulos de Young de los materiales y los esfuerzos en cada barra, puede determinarse la deformación de cada barra y a su vez, los cambios de longitud

$$\epsilon_A = \sigma_A / E_1 = \frac{167\,N/mm^2}{200\,GPa} = 0{,}000835 \rightarrow \delta_A = \epsilon_A\,L_A = 0{,}000835 * 2500 = 2{,}09\,mm$$

$$\epsilon_B = \sigma_B / E_1 = \frac{500\,N/mm^2}{200\,GPa} = 0{,}0025 \rightarrow \delta_B = \epsilon_B\,L_B = 0{,}0025 * 2500 = 6{,}25\,mm$$

$$\epsilon_C = \sigma_C / E_2 = \frac{167\,N/mm^2}{40\,GPa} = 0{,}004175 \rightarrow \delta_C = \epsilon_C\,L_C = 0{,}004175 * 2500 = 10{,}44\,mm$$

Posterior al inicio de la cedencia, la estructura inicialmente hiperestática, aún puede soportar incrementos de la carga externa. Estos incrementos por encima de 667 kN, son soportados por las dos barras que aún están en rango elástico, mientras que la barra central estará traccionada por una fuerza que se mantedrá constante y cuyo valor es el esfuerzo cedente del material multiplicado por el área de la sección transversal. Por ello, el diagrama e cuerpo libre luego del inicio de la cedencia es el siguiente



Lo que conduce ahora a un sistema estáticamente determinado, y las ecuaciones de equilibrio conducen a

$$T_A^* + 400 + T_C^* - P = 0$$
$$T_A^* = T_C^*$$

cuya solución es

$$T_A^* = T_C^* = \frac{P-400}{2}$$

Cuando alguna de las dos barras elásticas alcance la cedencia, la estructura se transforma en un mecanismo. La carga que produce esa condición se denomina *carga de agotamiento.*

En este caso la carga de agotamiento se obtiene mediante el planteamiento y análisis de las dos siguientes inecuaciones

$$\sigma_A^* = T_A^* / A_a = \frac{P-400}{2A_a} < 500\, N/mm^2 \rightarrow P < 1200\, kN\ ;$$
$$\sigma_C^* = T_C^* / A_c = \frac{P-400}{2A_c} < 200\, N/mm^2 \rightarrow P < 720\, kN$$

De lo que se concluye que la carga de agotamiento es 720 kN

Las fuerzas internas en cada barra son

$$T_A^* = T_C^* = \frac{P-400}{2} = \frac{720-400}{2} = 160\, kN$$

$$T_B = 400\, kN$$

Los esfuerzos son

$$\sigma_A = T_A^* / A_a = \frac{160}{800\, mm^2} = 200\, \frac{N}{mm^2} < 500\, \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_B = T_B / A_b = 500\, \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_C = T_C^* / A_c = \frac{160}{800\, mm^2} = 200\, \frac{N}{mm^2}$$

Las deformaciones y alargamientos de las barras son

$$\epsilon_A=\sigma_A/E_1=\frac{200\,N/mm^2}{200\,Gpa}=0{,}001\rightarrow\delta_A=\epsilon_A L_A=0{,}001*2500=2{,}5\,mm$$

$$\epsilon_C=\sigma_C/E_2=\frac{200\,N/mm^2}{40\,Gpa}=0{,}005\rightarrow\delta_C=\epsilon_C L_C=0{,}004175*2500=12{,}5\,mm$$

El alargamiento de la barra *B* no es posible obtenerlo mediante relaciones constitutivas, puesto que plastificó y su valor es indeterminado en el diagrama esfuerzo-deformación una vez alcanzado el valor del esfuerzo cedente. Este alargamiento se obtiene mediante el diagrama de compatibilidad usado en la primera parte del desarrollo

$$\frac{\delta_b-\delta_a}{1}=\frac{\delta_c-\delta_a}{2}$$

puesto que la barra central debe adaptar su geometría a la deformación de la estructura impuesto por la región elástica. De la ecuación anterior se obtiene

$$\delta_b=7{,}5\,mm$$

Los valores de carga y desplazamiento calculados en este problema se resumen en la gráfica siguiente