

SÓLIDOS SOLICITADOS A CARGA AXIAL.

1.- Definición.

Se define como Sólido Solicitado a Carga Axial, a un sólido de eje recto, el cual se denomina eje longitudinal o eje axial, y en el que dicha dimensión longitudinal es grande en comparación con cualquier otra dimensión medida en una dirección perpendicular y en el que cada una de las resultantes de las cargas externas tiene por recta soporte el referido eje axial.

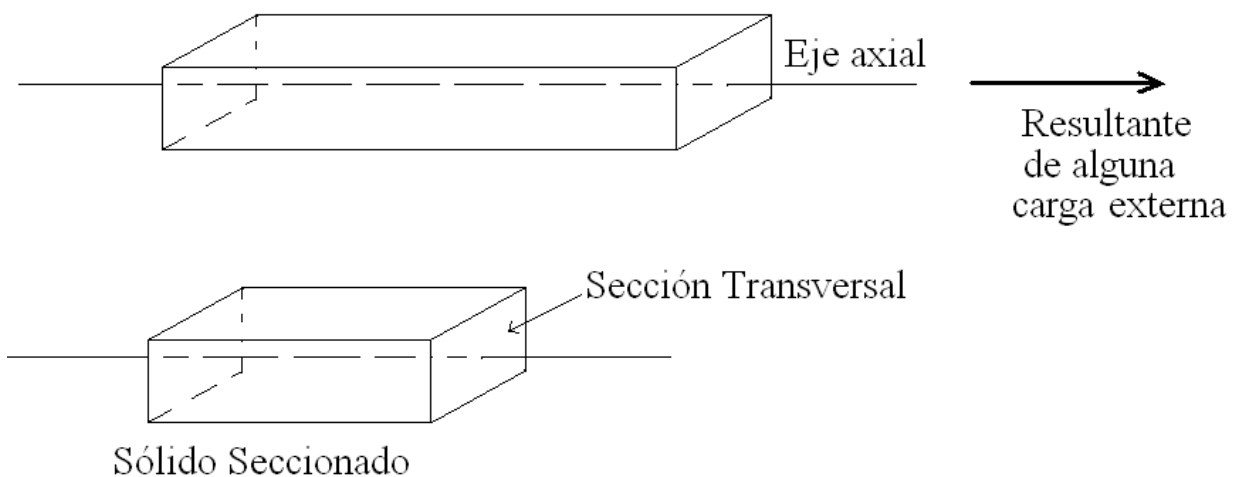


Figura N° 1. Definición de Sólido Cargado Axialmente.

2.- Comportamiento.

Considérese una barra homogénea BC de longitud L y sección transversal uniforme A , bajo la acción de una carga externa P en la sección C , perpendicular a dicha sección y cuya línea de acción coincide con el centroide de la sección transversal (figura 2). La figura muestra que por la sollicitación de la fuerza externa el sólido cambia su geometría, en este caso aumenta de longitud debido a la tracción que ejerce dicha sollicitación. Para efectos de los análisis correspondientes a este capítulo, se despreciarán todos los efectos que puedan existir en direcciones perpendiculares a la línea de acción de la carga, es decir, cualquier cambio de longitud en direcciones perpendiculares al eje axial del sólido.

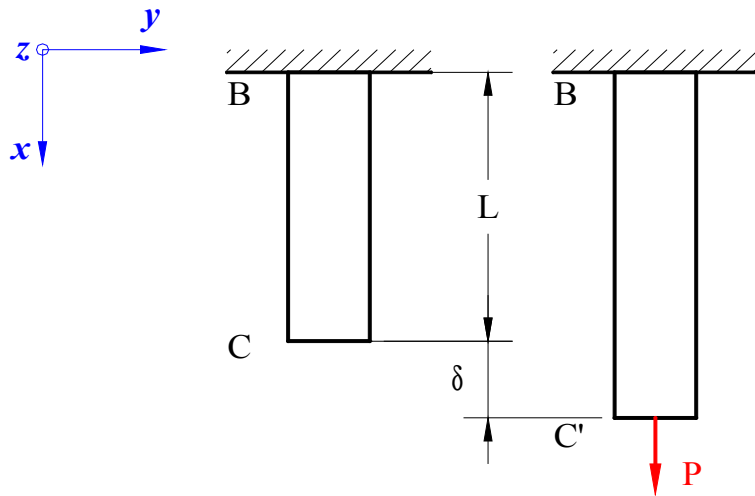


Figura N° 2. Barra solicitada axialmente.

Para el estudio de los efectos que se producen internamente, se dibuja una retícula en la superficie exterior del sólido antes de la aplicación de la carga y se observa que forma adquiere dicha retícula con la deformación que sufre el sólido por la aplicación de la carga. Esto es lo que se muestra en la figura N° 3, (exagerando la deformación para poder visualizarla). De la observación de esta figura se concluye que todos los cuadrados iguales de la retícula se han transformado en rectángulos iguales. Esta transformación de cada elemento, es la que se observa en la parte inferior izquierda de la figura N° 3. Si ésta es la deformación, se concluye que cada uno de los elementos de la retícula tiene que estar solicitado por la misma carga.

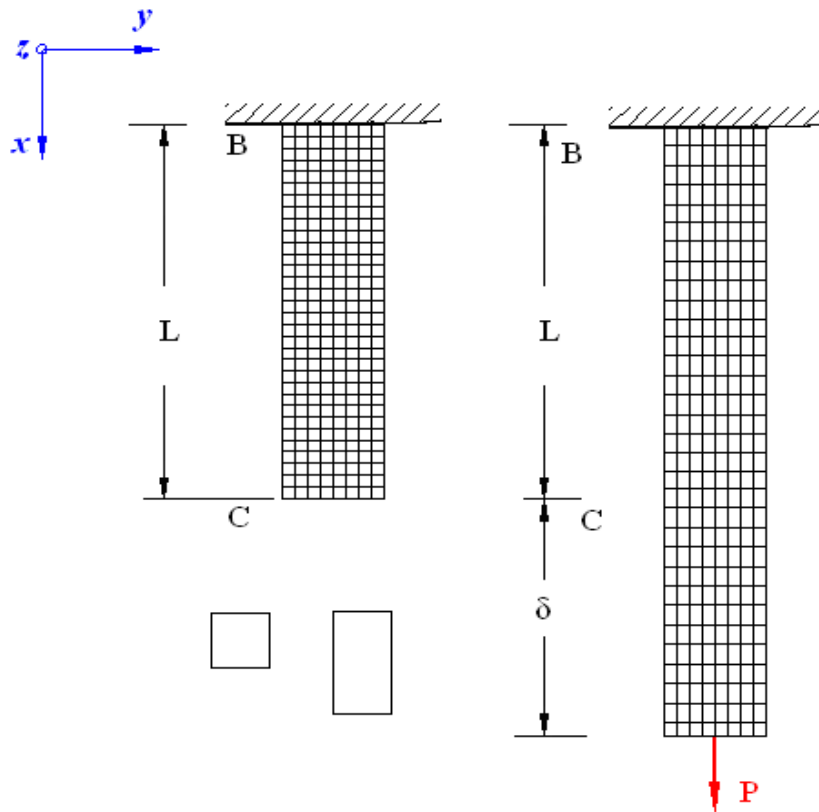


Figura N° 3. Deformación de sólido de prismático y detalle.

Por ello cuando la barra se secciona con un plano transversal imaginario, como el plano c-c de la figura N° 4b, el equilibrio del diagrama de cuerpo libre de esta parte de la barra se obtiene con una distribución de vectores esfuerzos iguales que solo tienen componente normal y que se desarrollan en la sección transversal. Esta distribución tiene una resultante N que es normal a la superficie expuesta, es igual a P en magnitud y tiene una línea de acción que es colineal con la línea de acción de P . Se supondrá que la distribución de esfuerzos normales en un elemento cargado axialmente es uniforme, excepto en la inmediata vecindad de los puntos de aplicación de las fuerzas (ver figura N° 4a y 4c). Del equilibrio de fuerzas verticales se tiene $\sigma A = N$ y el valor σ del esfuerzo se será:

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

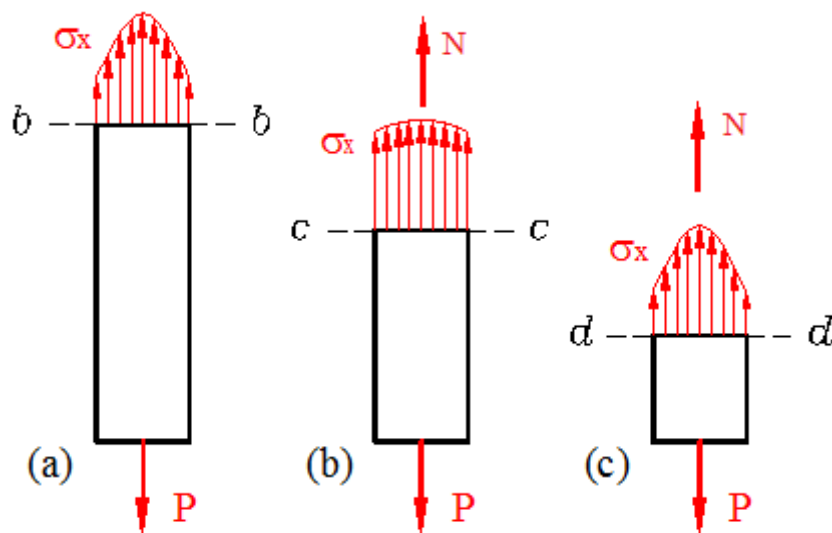


Figura N° 4. Distribución del esfuerzo normal en diferentes secciones de la barra.

Si se desea encontrar el cambio de longitud de la barra, causado por la fuerza aplicada (para este tipo de problema no se considerará el cambio de las dimensiones transversales), puede dividirse la barra en elementos de longitud infinitesimal dx , la cantidad por determinar será la suma de los alargamientos que ocurren en cada elemento que componen la barra (ver figura N° 5).

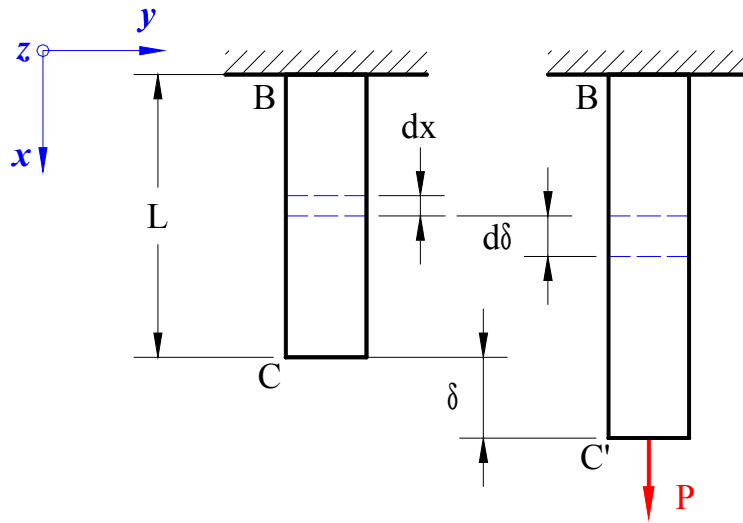


Figura N° 5. Estudio del alargamiento de una barra solicitada axialmente.

Si el esfuerzo axial $\sigma_x = \frac{N}{A}$ no excede el límite de proporcionalidad del material, puede aplicarse la ley de Hooke y escribir:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$$

de la cual se halla que:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N/A}{E}$$

Recordando que la deformación longitudinal unitaria ε_x se definió como $\varepsilon_x = \frac{d\delta}{dx}$, se tiene:

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{N}{EA}$$

Puesto que se conoce la elongación del elemento individual, la elongación total de la barra BC será la suma, es decir,

$$\delta = \int d\delta = \int_0^L \frac{N}{EA} dx$$

o

$$\delta = \frac{N}{EA} \cdot x \Big|_0^L = \frac{N \cdot L}{EA}$$

Expresión que permite determinar la elongación de una barra de longitud L , con la condición de que en esa longitud L sean constantes el resto de las variables, es decir, sean constantes el módulo elástico, la sección transversal y la carga axial interna.

$$\delta = \frac{N}{EA} L$$

Si se despeja de la ecuación la variable correspondiente a la fuerza interna, quedando en función del desplazamiento, se obtiene:

$$N = \frac{EA}{L} \delta$$

lo que demuestra que el comportamiento de una barra solicitada axialmente es análogo al de un resorte, es decir,

$$F = Kx$$

Por ello, la expresión EA/L se la conoce como *rigidez axial*.

Si la barra tiene otras cargas, si no es prismática (la sección transversal no es constante), o está constituida por diversos materiales, debe dividirse en fracciones que satisfagan individualmente las condiciones para usar la ecuación, es decir, para dicha fracción de longitud, denotada como L_i , la carga axial, la sección transversal y el módulo elástico del material deben permanecer constantes. Llamando respectivamente N_i , A_i , y E_i , a la fuerza interna, al área de la sección transversal y módulo de elasticidad que corresponde a la parte i , el alargamiento de esta fracción se obtiene mediante:

$$\delta_i = \frac{N_i L_i}{E_i A_i}$$

y el alargamiento de la barra completa será:

$$\delta = \sum_i \frac{N_i L_i}{E_i A_i}$$

3.- Ejemplo.

Considérese el problema de la figura N° 6. Corresponde a un sólido con cambio de sección transversal, tres cargas axiales y módulo elástico constante. Se requiere determinar el cambio de longitud del sólido.

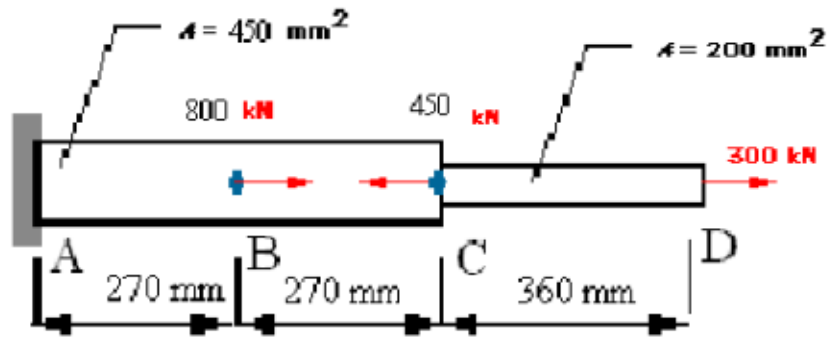


Figura N° 6. Sólido no prismático cargado axialmente.

La figura N° 7 muestra el diagrama de cuerpo libre. Nótese que la reacción desconocida se ha indicado en el sentido que ejerce tracción. La aplicación de la única ecuación de equilibrio permite determinar el valor de la reacción $R = 650 \text{ kN}$.

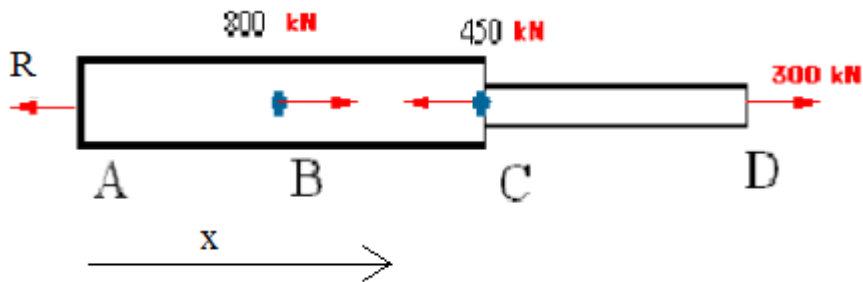


Figura N° 7. Diagrama de cuerpo libre del problema de la figura N° 6.

Al observar la figura N° 7, se concluye que es necesario hacer un estudio por fracciones en las cuales se cumplan las condiciones indicadas anteriormente. Del diagrama de cuerpo libre debe entenderse que entre las secciones comprendidas entre A y B , hay un valor de fuerza axial interna constante. Lo mismo ocurre entre las secciones comprendidas entre B y C , y entre las secciones entre C y D . En los mismo intervalos anteriores se mantienen constantes las áreas de las secciones transversales. De acuerdo a esta explicación se han construido los respectivos diagramas de cuerpo libre de las figuras N° 8, N° 9, N° 10 y N° 11.

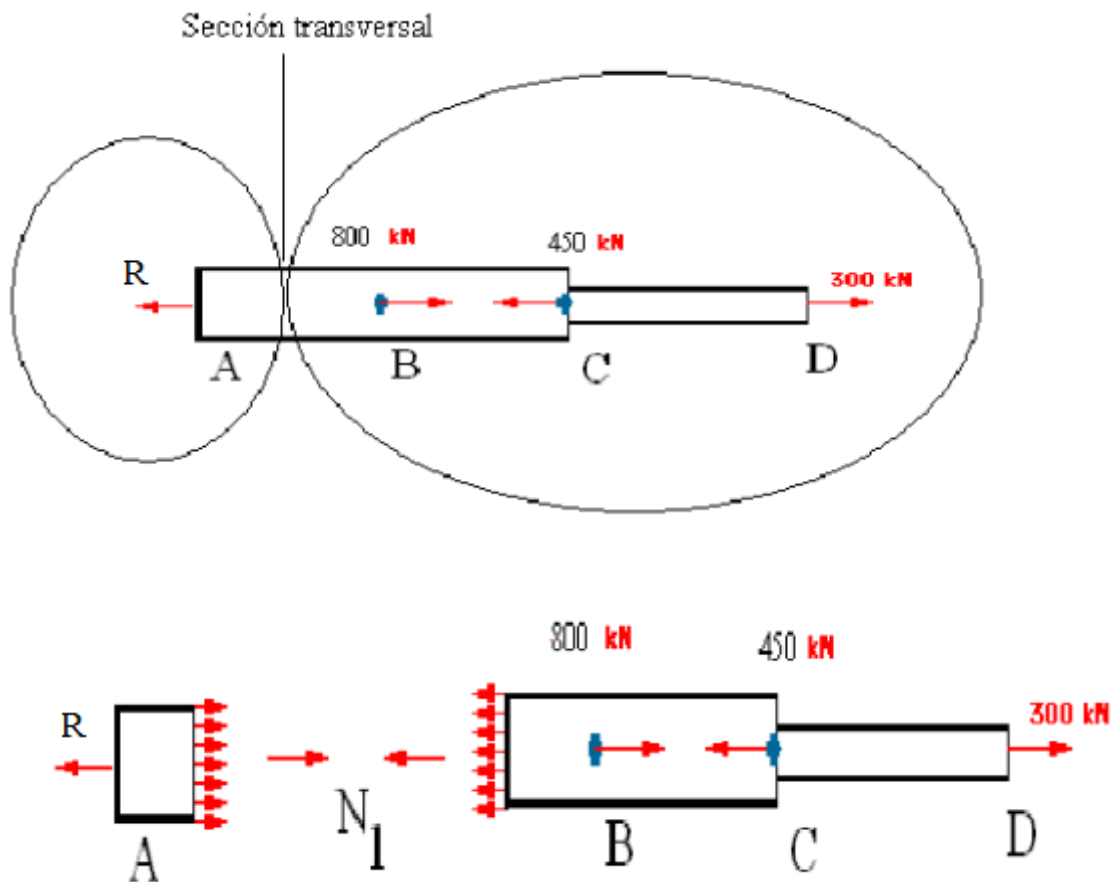


Figura N° 8. Corte genérico del sólido en una sección transversal entre A y B.

La figura N° 8 presenta un corte del sólido en una sección transversal genérica entre A y B. La figura muestra que es una vez seleccionada la sección que desea estudiarse, puede utilizarse el corte izquierdo o el corte derecha para determinar la magnitud de los esfuerzos normales y/o el valor de la fuerza axial interna. El corte izquierdo representa cualquier sección comprendida en el intervalo $0 < x < 270$. La determinación correcta del intervalo es importante puesto que este establece el rango donde son válidas las ecuaciones que se aplican al diagrama de cuerpo libre y los valores de las variables correspondientes. De este corte izquierdo se concluye, una vez considerado su equilibrio que $N_1 = R = 650 \text{ kN}$.

La figura N° 9, representa un corte exactamente antes de la sección B. El análisis de esta figura establece que si el corte se realiza justo antes de la sección B, siendo esta sección donde está aplicada la fuerza externa de 800 kN , esta fuerza estaría contenida en el diagrama de cuerpo libre de la derecha.

La figura N° 10 presenta un corte del sólido en una sección transversal genérica entre B y C. La figura tiene el mismo fin indicado en la figura N° 8, es decir, muestra que es una vez seleccionada la sección que desea estudiarse, puede utilizarse el corte izquierdo o el corte derecha para determinar la magnitud de los esfuerzos normales y/o el valor de la fuerza axial interna. El corte izquierdo representa cualquier sección comprendida en el intervalo $270 < x < 540$, y del equilibrio $N_2 = -150 \text{ kN}$. La figura N° 11 corresponde al corte genérico entre las secciones C y D, y el corte izquierdo está comprendido en el intervalo $540 < x < 900$, y del equilibrio se obtiene $N_3 = 300 \text{ kN}$.

Una vez establecida el valor de la fuerza axial interna en todas las secciones transversales, conocida la sección transversal, el módulo elástico del material del sólido y longitud, se está en capacidad de determinar el cambio de longitud mediante

$$\delta_i = \sum_i \frac{N_i L_i}{E_i A_i} = \frac{650 \text{ kN} \times 270 \text{ mm}}{200 \text{ GPa} \times 400 \text{ mm}^2} + \frac{-150 \text{ kN} \times 270 \text{ mm}}{200 \text{ GPa} \times 400 \text{ mm}^2} + \frac{300 \text{ kN} \times 360 \text{ mm}}{200 \text{ GPa} \times 200 \text{ mm}^2}$$

$$2,19 - 0,51 + 2,70 = 4,38 \text{ mm}$$

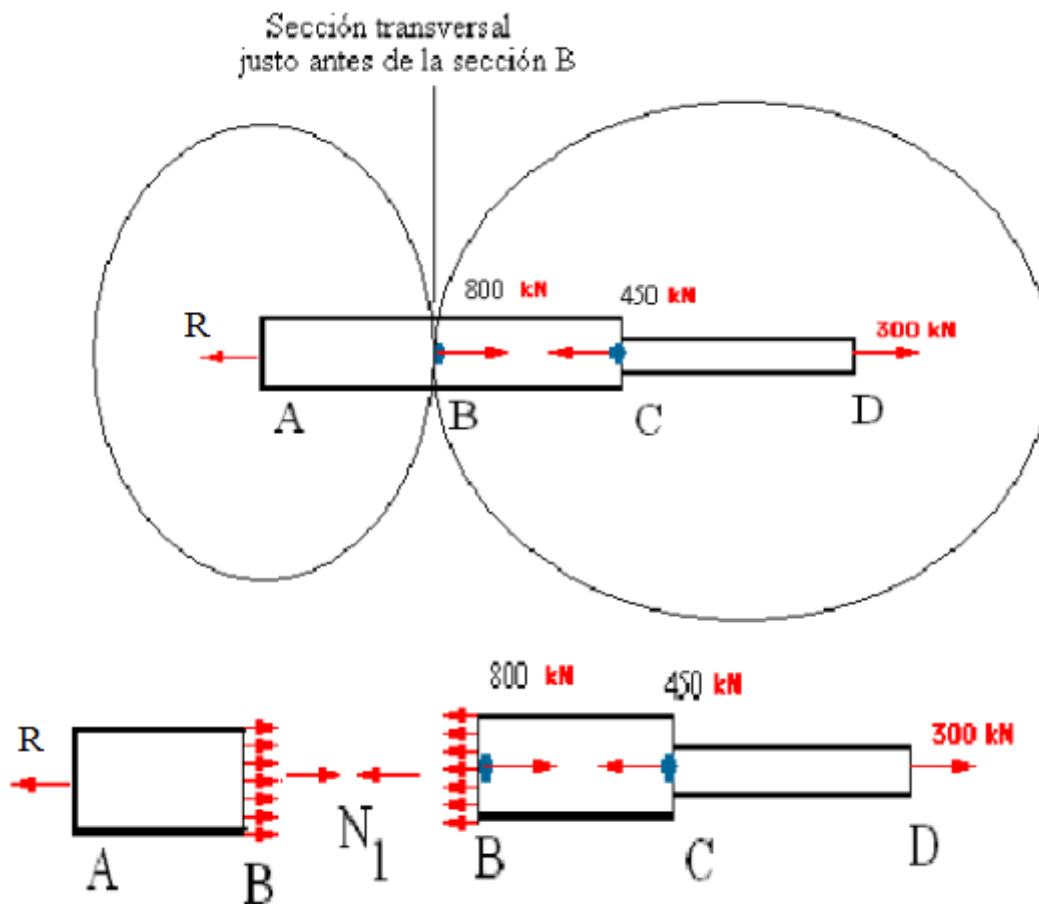


Figura N° 9. Corte justo antes de la sección B.

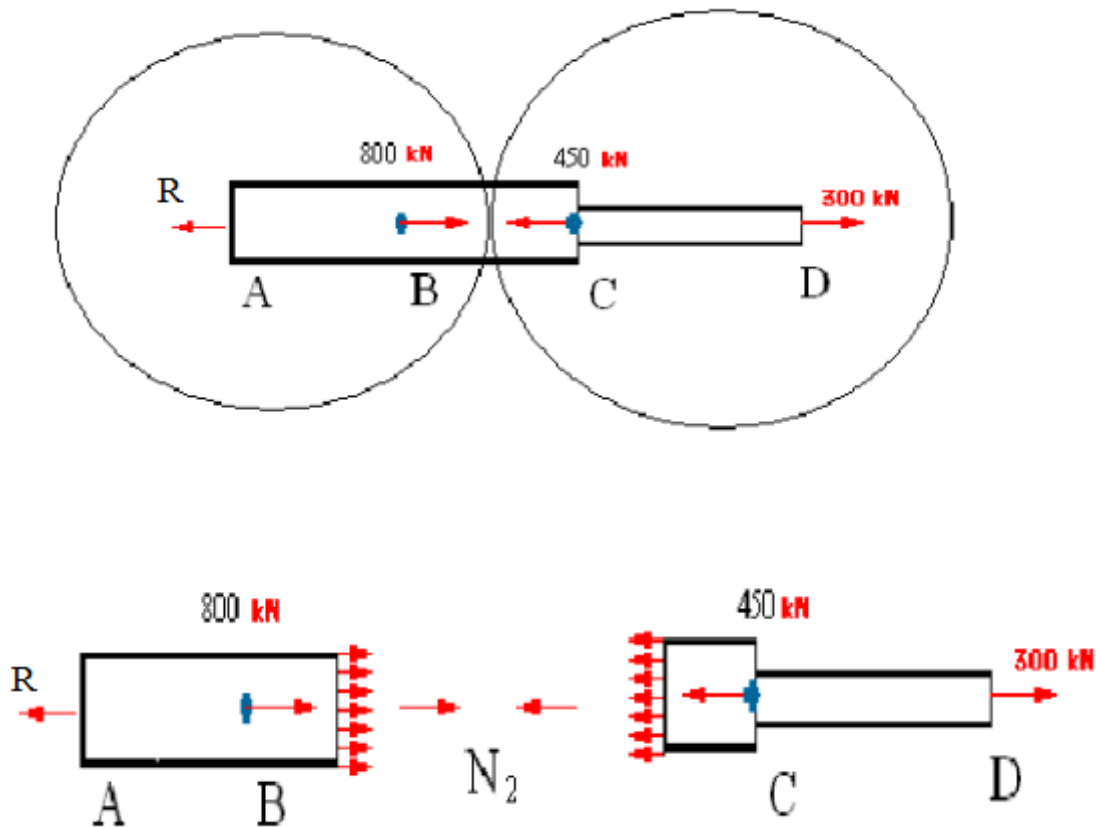


Figura N° 10. Corte genérico del sólido en una sección transversal entre B y C.

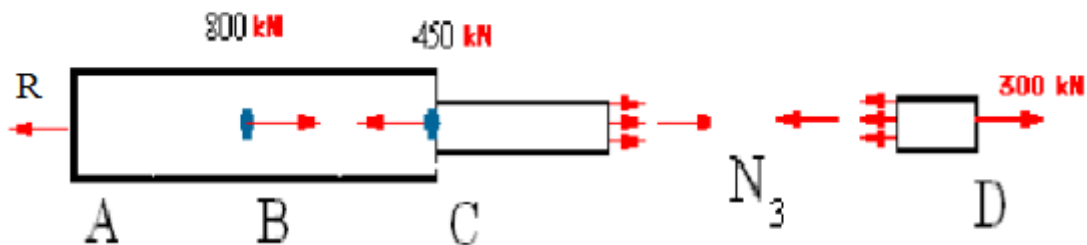


Figura N° 11. Corte genérico del sólido en una sección transversal entre C y D.

4.- Casos Estáticamente Indeterminados.

En la situación anterior las reacciones producidas por los vínculos pueden determinarse utilizando exclusivamente las ecuaciones de equilibrio estático.

Sin embargo, hay situaciones donde lo anterior no es posible debido a que el número de reacciones es superior al número de ecuaciones de equilibrio aplicables al problema planteado. Cuando esta situación ocurre, el problema se denomina *estáticamente indeterminado*. Esta denominación se debe a que al establecer las ecuaciones de equilibrio del problema a resolver, el sistema de ecuaciones es

indeterminado puesto que el número de incógnitas es superior al número de ecuaciones. Para poder obtener una solución única del problema, es necesario obtener un sistema de ecuaciones determinado. Esto se logra adicionando a las ecuaciones de equilibrio un número de ecuaciones que haga al sistema de ecuaciones determinado. Estas ecuaciones adicionales se denominan *ecuaciones de compatibilidad de desplazamientos*. Este nombre se debe a que esas ecuaciones adicionales provienen de las condiciones cinemáticas que imponen la vinculación al sólido. Nótese también que el número de ecuaciones de compatibilidad es igual a la diferencia entre el número de reacciones del problema y el número de ecuaciones de equilibrio. A esta diferencia se la denomina *grado hiperestático*.

El procedimiento a aplicar es el siguiente: 1) Elaborar el diagrama de cuerpo libre del problema. 2) Se determina el grado hiperestático restando al número de reacciones, el número de ecuaciones de equilibrio. 3) Se plantean las ecuaciones de equilibrio y las ecuaciones de compatibilidad. 4) Se resuelve el sistema de ecuaciones.

5.- Ejemplo: Sólido prismático confinado en sus dos extremos

Supóngase una barra de longitud L con sección transversal constante A , con ambos extremos fijos (ver figura N° 12a). Si se le aplica a la barra la carga axial externa P indicada, se producirán las reacciones R_1 y R_2 (ver diagrama de cuerpo libre en la figura N° 12b) porque la vinculación impide los desplazamientos de los extremos de la barra (la dirección correcta de las reacciones se sabrá a través del signo de los resultados, tal como en estática). (Recomendación: Colocar las reacciones induciendo tracción en el sólido).

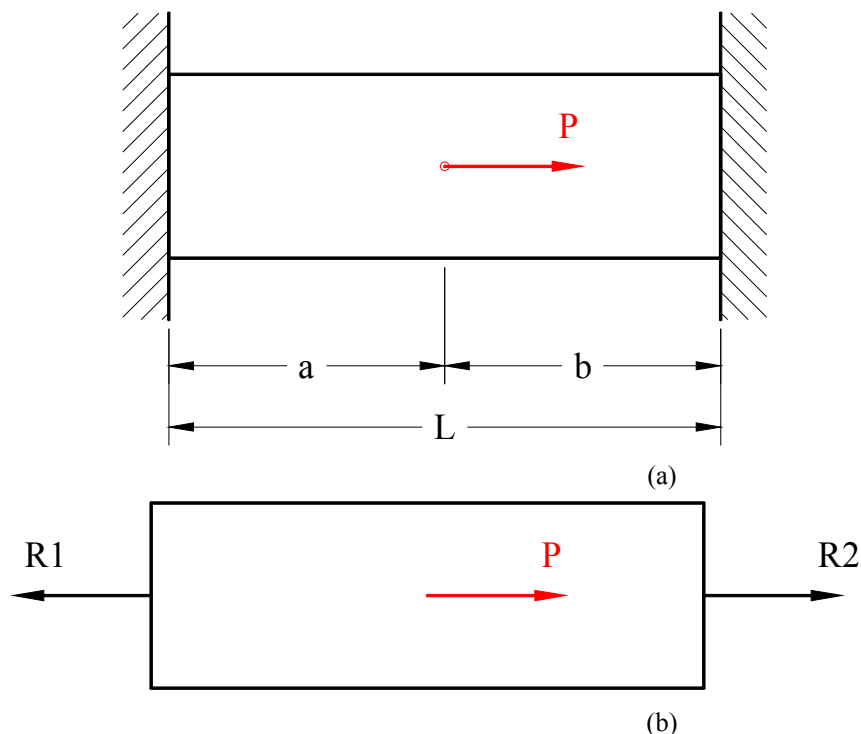


Figura N° 12. Sistema hiperestático.

Al escribir la única ecuación de equilibrio, se obtiene:

$$\Sigma F_H = 0$$

$$- R1 + P + R2 = 0$$

Nótese que el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones. Por ello este es un problema hiperestático (grado de hiperestaticidad = número de incógnitas – número de ecuaciones de equilibrio). Las reacciones que producen la situación hiperestática se denominan reacciones redundantes. Por ello el número de reacciones redundantes de un sistema es igual al grado hiperestático.

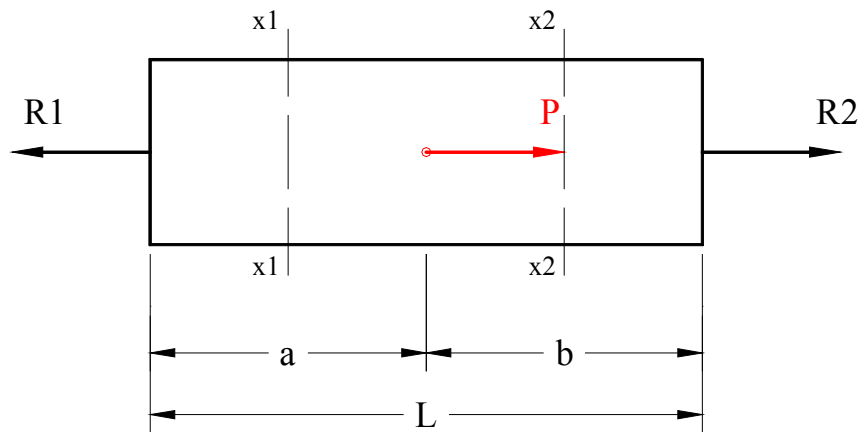


Figura N° 13. Análisis de la carga axial interna del sólido de la figura N° 12.

La figura N° 13 indica que en las secciones transversales genéricas x1 comprendidas en el intervalo $0 < x < a$, la fuerza axial interna es diferente a la que ocurre en las secciones transversales genéricas x2 en el intervalo $a < x < L$, tal como se muestran en las figuras N° 14 y N° 15

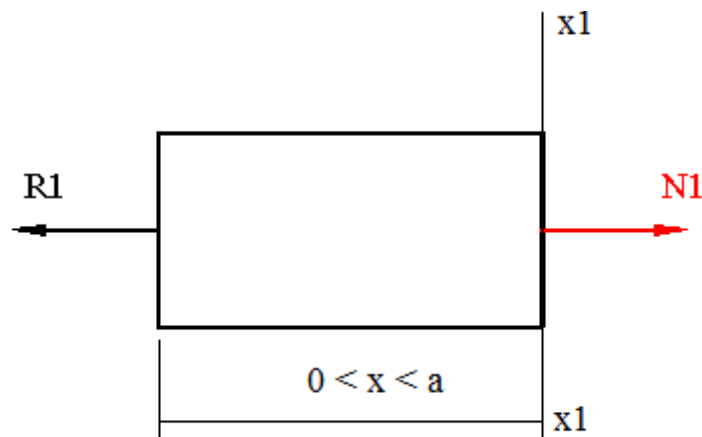


Figura N° 14. Diagrama de cuerpo libre entre $0 < x < a$.

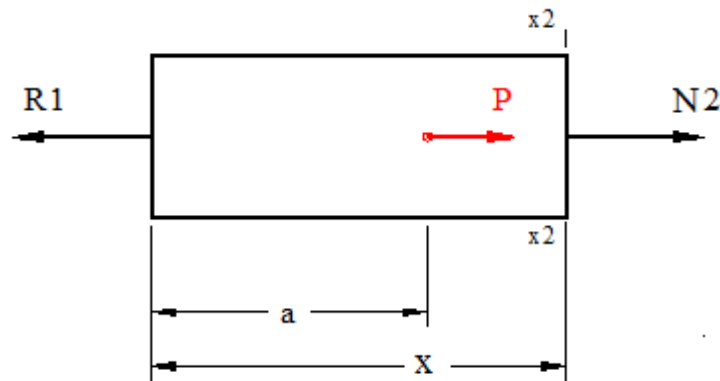


Figura N° 15. Diagrama de cuerpo libre entre $a < x < L$.

En este problema se requiere una sola ecuación de compatibilidad, puesto que el grado hiperestático es uno, debido a que la diferencia entre el número de incógnitas (2) y el número de ecuaciones de equilibrio (1) es uno. La ecuación de compatibilidad en este caso proviene de la imposibilidad del sólido de cambiar de longitud por el tipo de vinculación. Por lo tanto se escribe la ecuación con la cual se calcula dicho cambio de longitud y se iguala a cero.

$$\delta = \frac{N_1 a}{EA} + \frac{N_2 b}{EA} = 0$$

puesto que N_1 y N_2 son las fuerzas internas a lo largo del sólido. Los diagramas de cuerpo libre de las figuras N° 14 y N° 15 permiten expresar los valores de las fuerzas internas en función de la reacción R_1 y de la fuerza externa P , mediante la aplicación de la ecuación de equilibrio.

$$N_1 = R_1; \quad N_2 = R_1 - P$$

Lo que permite expresar el cambio de longitud en función de R_1 y P . La expresión contendrá como única incógnita a la reacción R_1 .

$$\delta = \frac{R_1 a}{EA} + \frac{(R_1 - P)b}{EA} \rightarrow R_1 = \frac{Pb}{L}$$

y sustituyendo en la ecuación de equilibrio del sólido completo, se obtiene

$$R_2 = \frac{Pa}{L}$$

6.- Ejemplo: Sólido no prismático confinado en sus dos extremos.

Considérese el problema de la figura N° 16. Se pide elaborar: 1) Diagrama de fuerza axial interna, 2) diagrama de esfuerzo normal; 3) diagrama de deformación longitudinal unitaria, y 4) diagrama de desplazamiento.

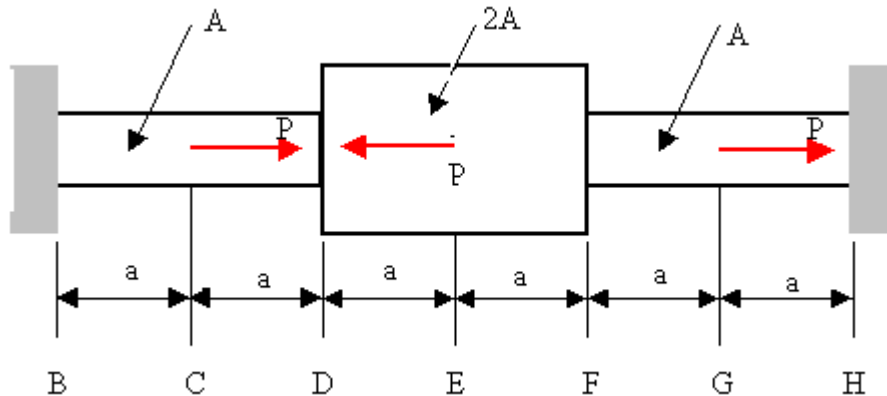


Figura N° 16. Ejemplo de caso hiperestático.

En este sólido se presentan variaciones de la fuerza axial interna a lo largo del mismo por la presencia de las cargas externas y variaciones de la sección transversal. Las figuras siguientes presentan en color amarillo las secciones transversales donde son constantes las fuerzas internas.

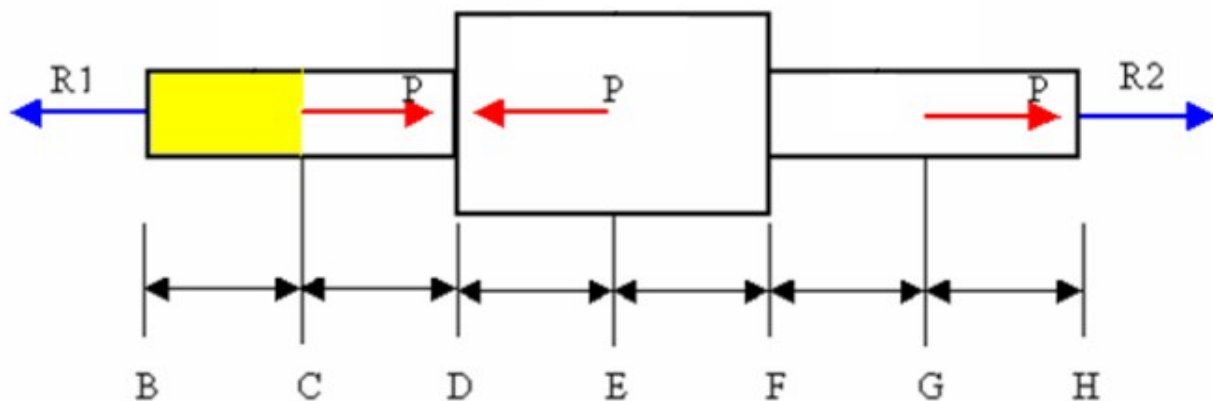


Figura N° 17. Fuerza axial interna constante entre las secciones transversales B y C.

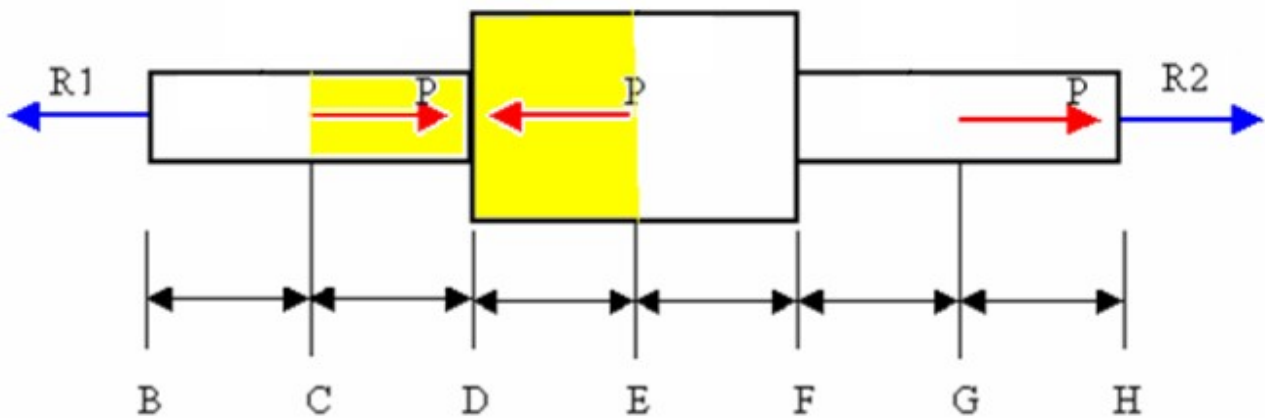


Figura N° 18. Fuerza axial interna constante entre las secciones transversales C y E.

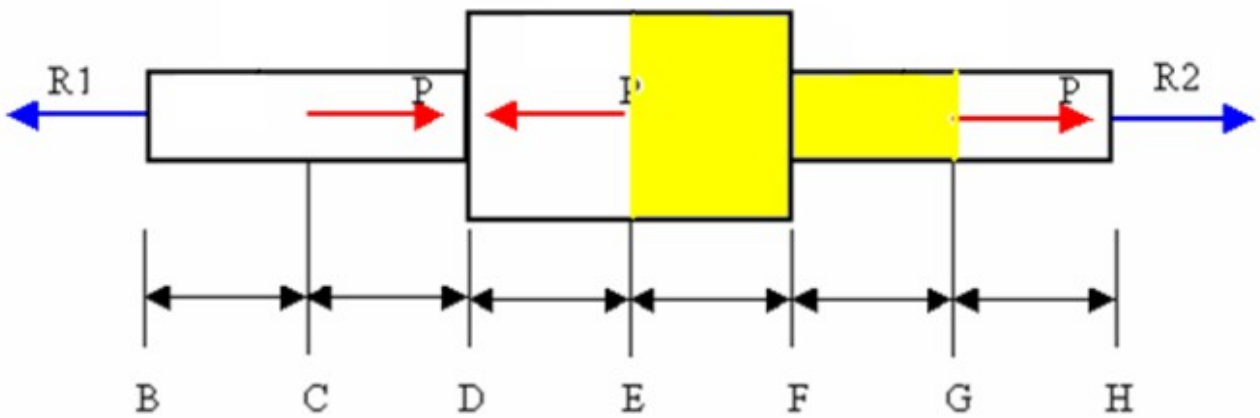


Figura N° 19. Fuerza axial interna constante entre las secciones transversales E y G.

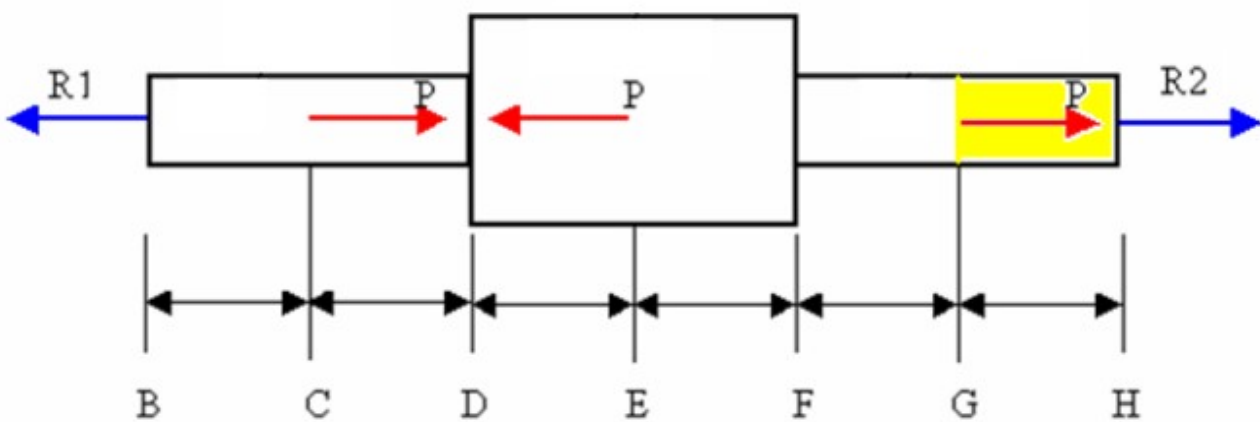


Figura N° 20. Fuerza axial interna constante entre las secciones transversales G y H.

Las figuras anteriores conducen a los diagramas de cuerpo libre de la figura N° 21.

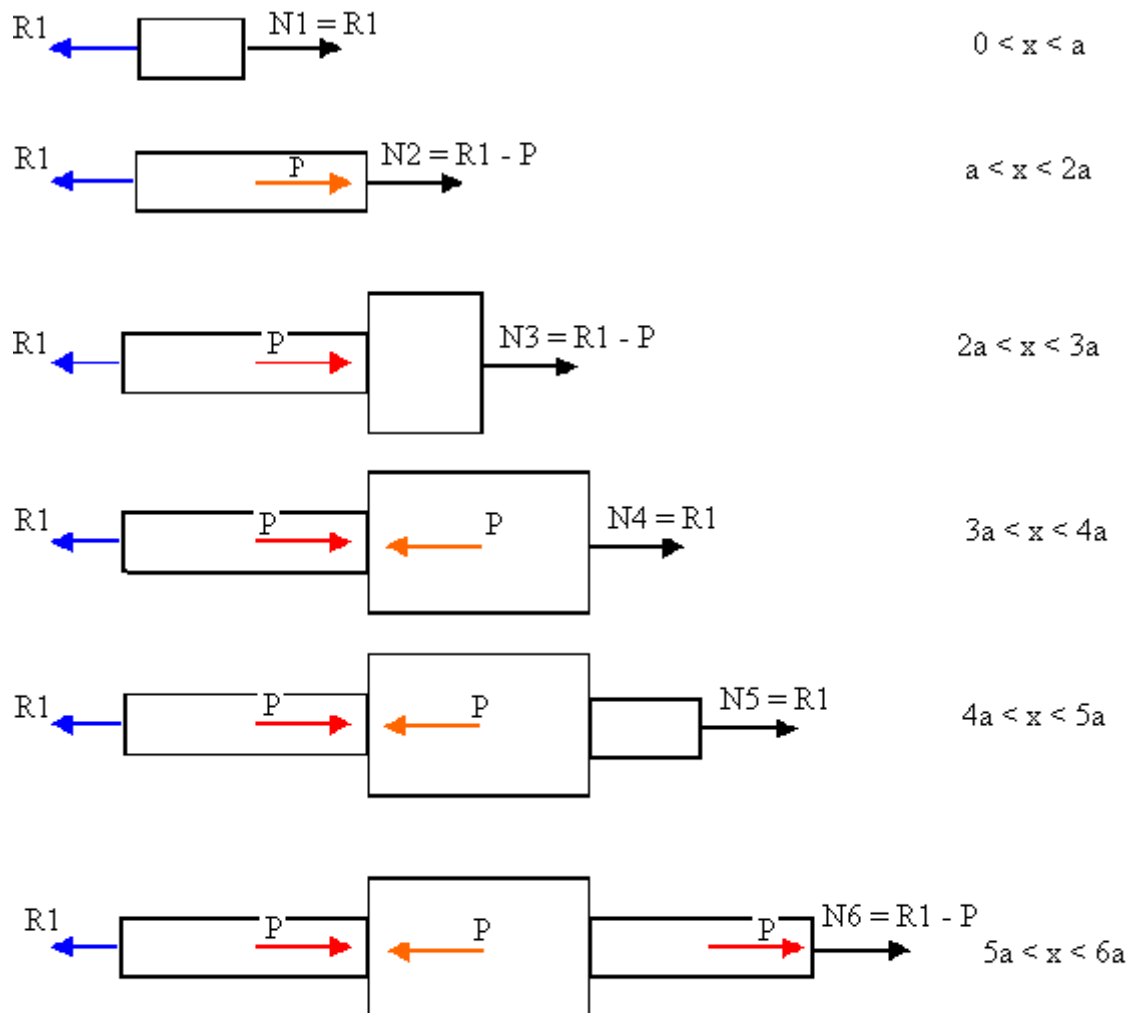


Figura N° 21. Diagramas de cuerpo libre del problema de la figura n° 16.

Las figuras a continuación presentan en color rojo las secciones transversales donde son constantes los esfuerzos normales.

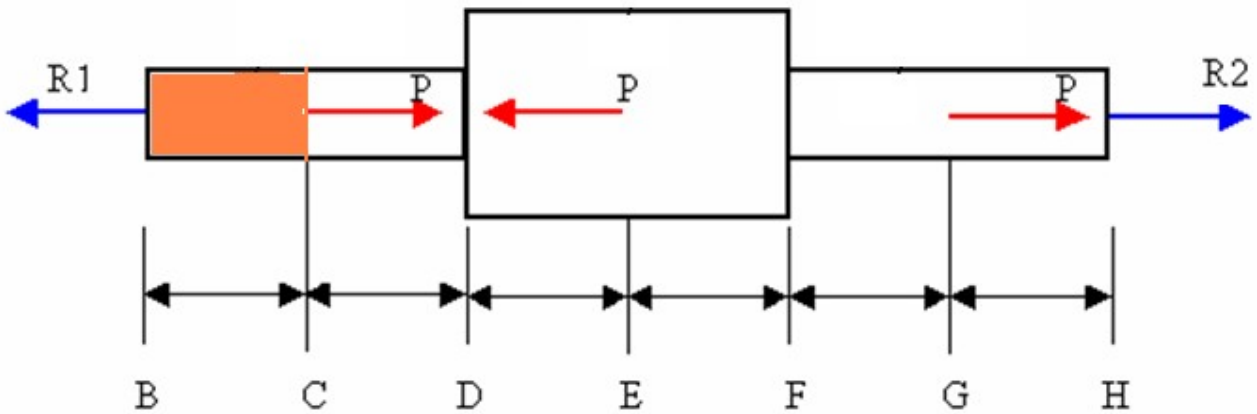


Figura N° 22. Esfuerzo normal constante entre las secciones B y C.

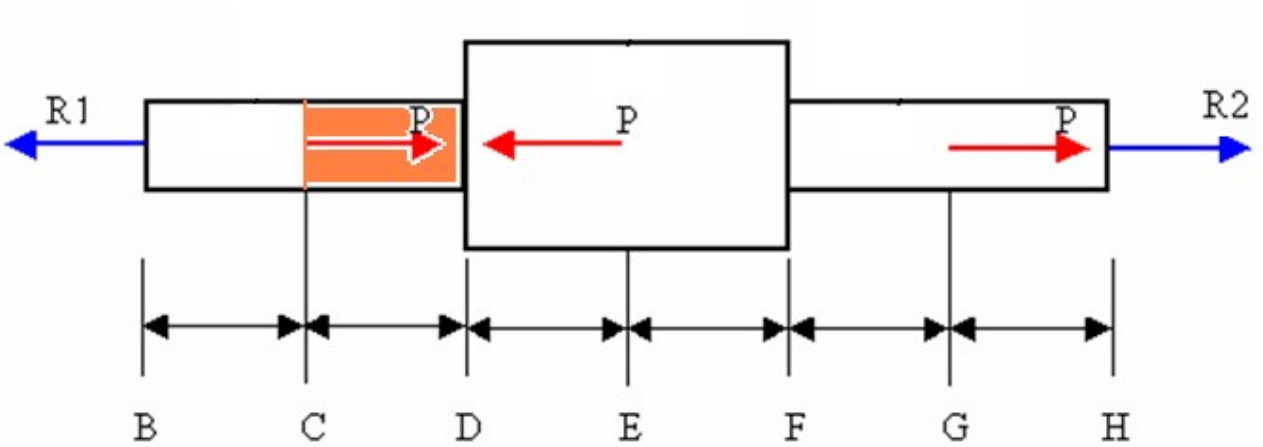


Figura N° 23. Esfuerzo normal constante entre las secciones C y D.

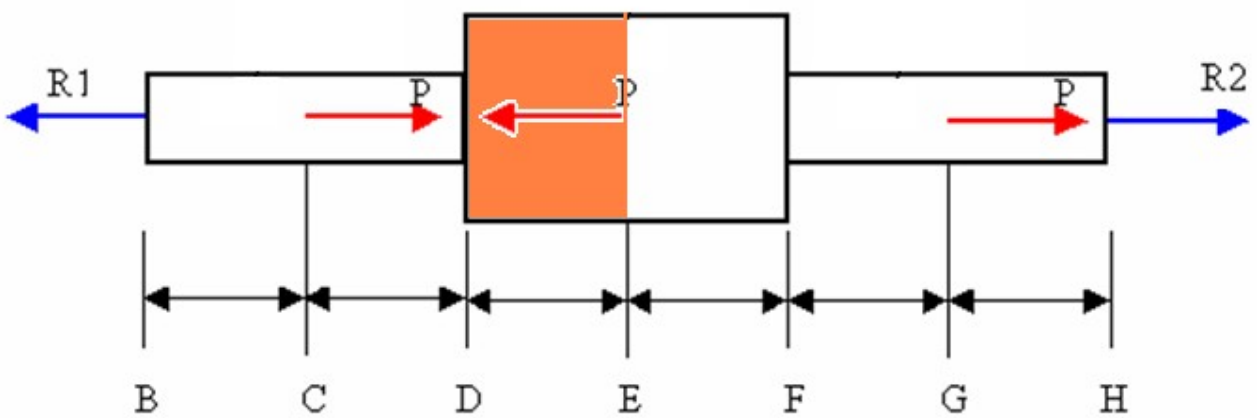


Figura N° 24. Esfuerzo normal constante entre las secciones D y E.

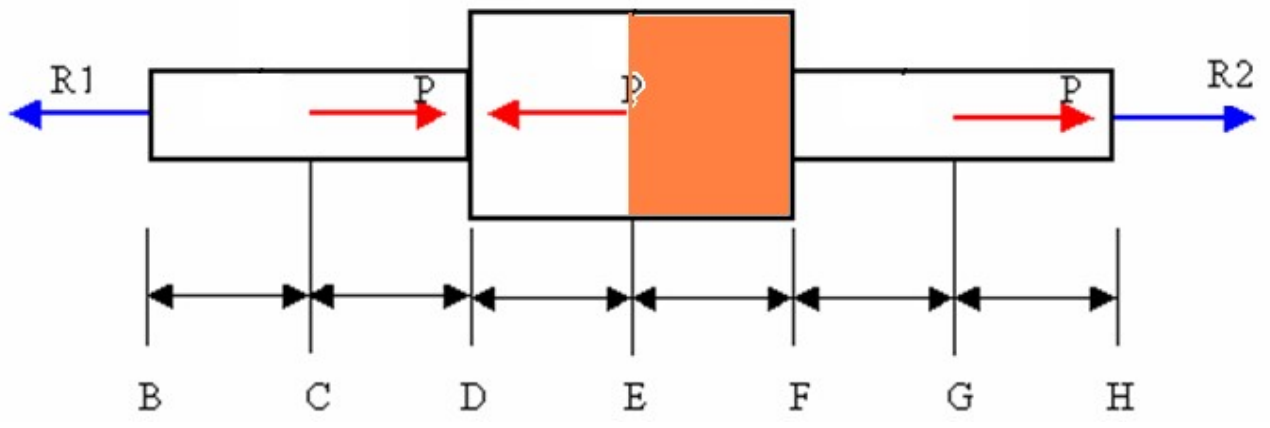


Figura N° 25. Esfuerzo normal constante entre las secciones E y F.

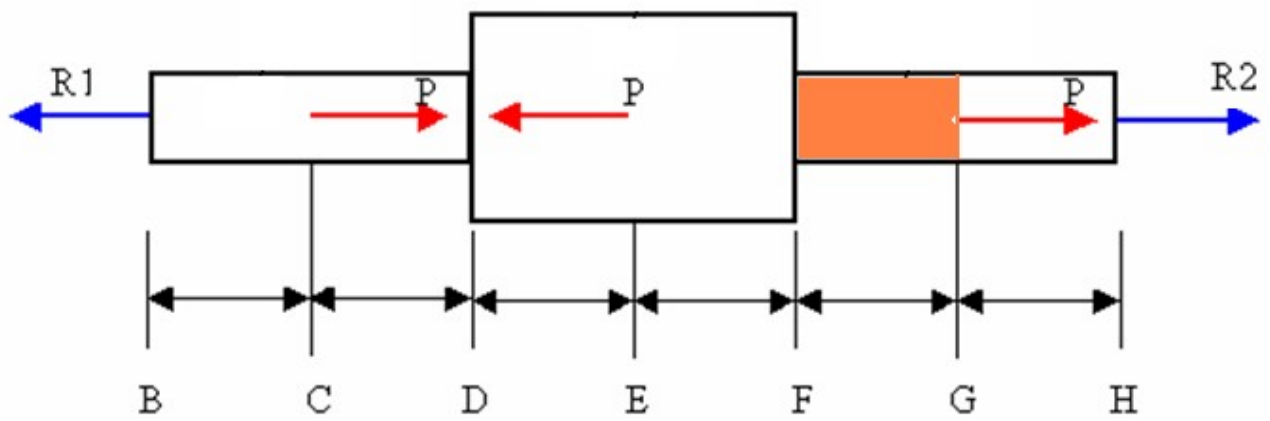


Figura N° 26. Esfuerzo normal constante entre las secciones F y G.

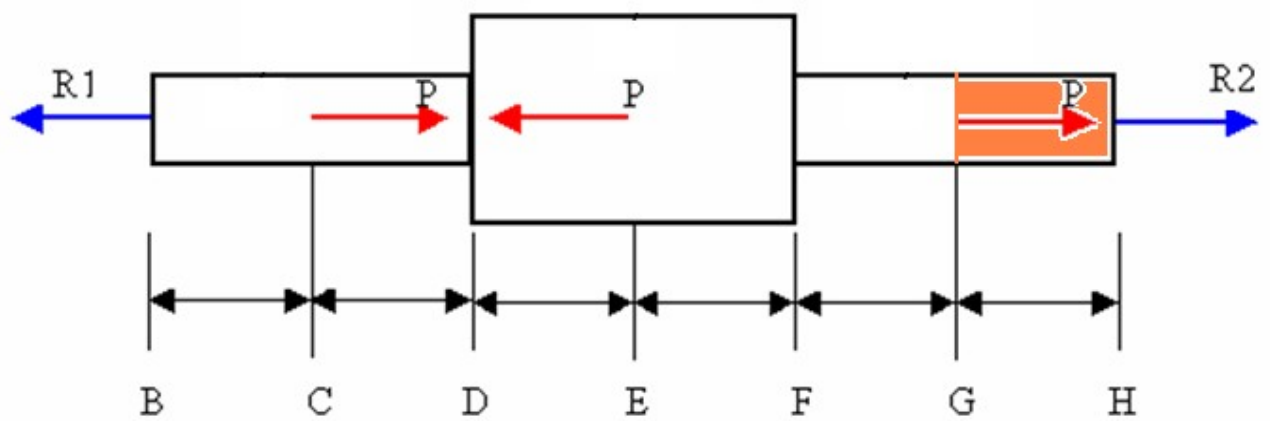


Figura N° 27. Esfuerzo normal constante entre las secciones G y H.

La comparación de las figuras N° 18, N° 23 y N° 24 permiten explicar que desde la sección transversal C hasta la E, la fuerza axial interna es constante, pero debido al cambio de geometría entre las mencionadas secciones transversales el esfuerzo normal no es el mismo entre C y D, y entre D y E. Análisis similar entre las secciones E y G conforme a las figuras N° 19, N° 25 y N° 26. Explicado lo anterior, se plantea el problema. La aplicación de la ecuación de equilibrio al diagrama de cuerpo libre del sólido completo se obtiene

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ - R_1 + P - P + P + R_2 &= 0 \\ - R_1 + P + R_2 &= 0 \end{aligned}$$

Dos incógnitas y una sola ecuación. Problema hiperestático de grado uno. Se requiere de una sola ecuación de compatibilidad. Como en el ejemplo anterior, aquí también el sólido no puede cambiar de longitud. Se escribe la ecuación del cambio de longitud del sólido en función de las fuerzas que actúan en él. (Tanto en función de las cargas externas conocidas y de las reacciones desconocidas.) Este desarrollo se muestra en la figura N° 28.

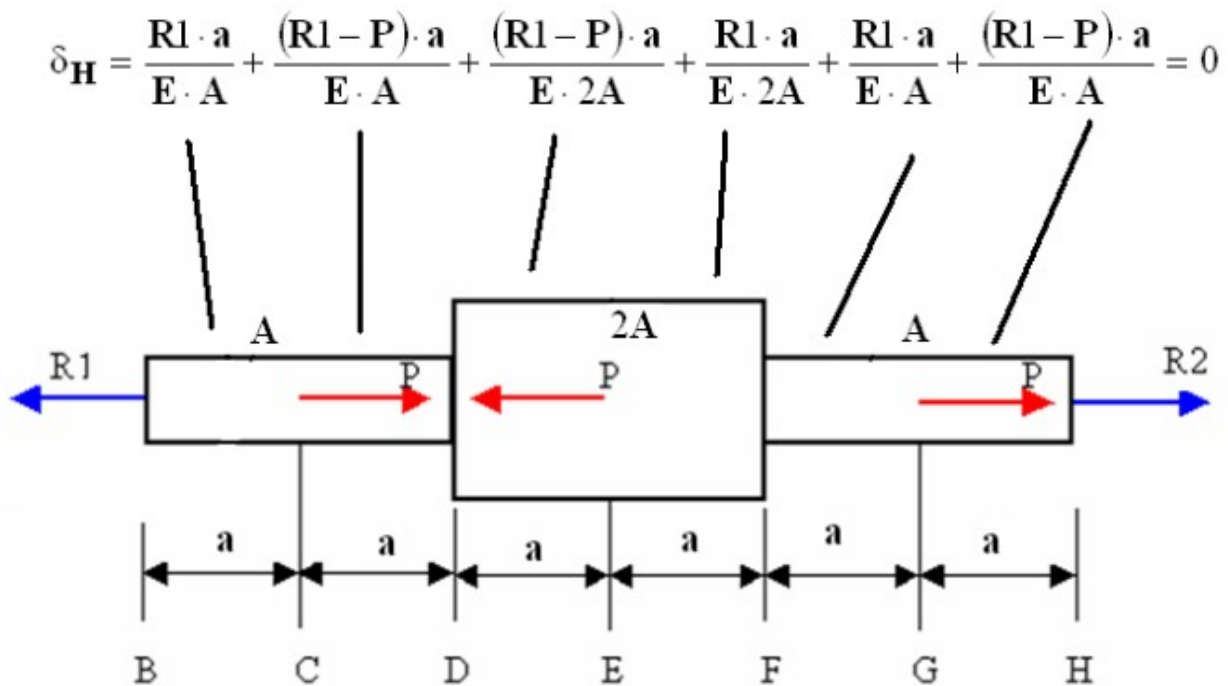


Figura N° 28. Expresión del cambio de longitud del sólido de la figura N° 16.

Las fuerzas axiales internas indicadas en la figura N° 28 puede comprobarse que corresponden a los diagramas de cuerpo libre presentados en la figura N° 21. También puede verse que la fuerza axial interna en cada sección transversal es la suma algebraica de todas las fuerzas actuantes a la izquierda de esa sección. Las fuerzas con sentido hacia la izquierda producen tracción en la sección transversal. De manera análoga, la fuerza axial interna en cada sección transversal es la suma

algebraica de todas las fuerzas actuantes a la derecha de esa sección. Las fuerzas con sentido hacia la derecha producen tracción en la sección transversal. Esta segunda opción se le deja al lector su comprobación. En la expresión de la figura N° 28, la única incógnita es la reacción R1 y permite obtener su valor

$$R_1 = \frac{P}{2}$$

Del equilibrio del sólido completo se encuentra

$$R_2 = -\frac{P}{2}$$

A continuación pueden construirse los diagramas del problema. El diagrama de carga axial interna es una gráfica en la cual el eje de abscisas representa la coordenada de ubicación de la sección transversal mientras que en el eje de las ordenadas se representa el valor de la fuerza axial interna.

En el problema planteado, ya determinada el valor de la reacción R1, si se observan los diagramas de cuerpo libre de la figura N° 21, puede comprobarse que pueden calcularse los valores de la fuerzas axiales internas en todas las secciones del sólido. Este cálculo se resume en la figura N° 29 que muestra el diagrama de fuerza axial interna pedido.

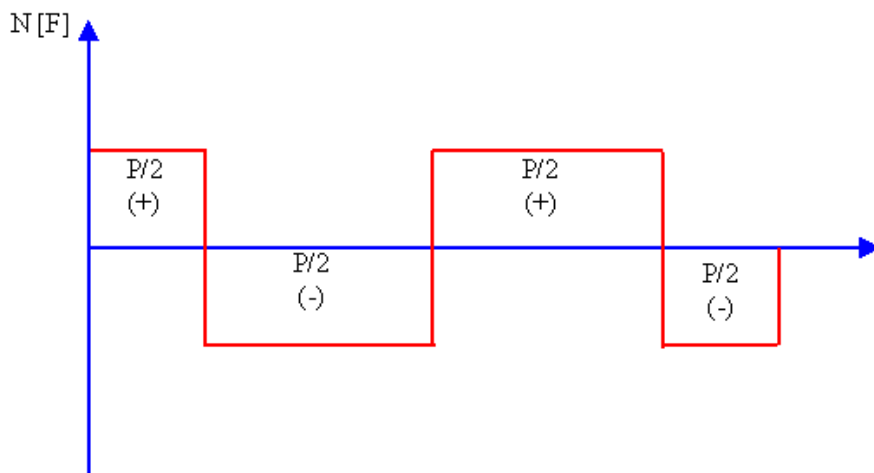


Figura N° 29. Diagrama de fuerza axial interna.

El diagrama de esfuerzo normal puede elaborarse a partir del diagrama de carga axial, aplicando la definición $\sigma = N/A$. Por lo tanto en este diagrama el eje de abscisas representa la coordenada de la sección transversal y el eje de ordenadas el valor del esfuerzo normal. Este diagrama se muestra en la figura N° 30.

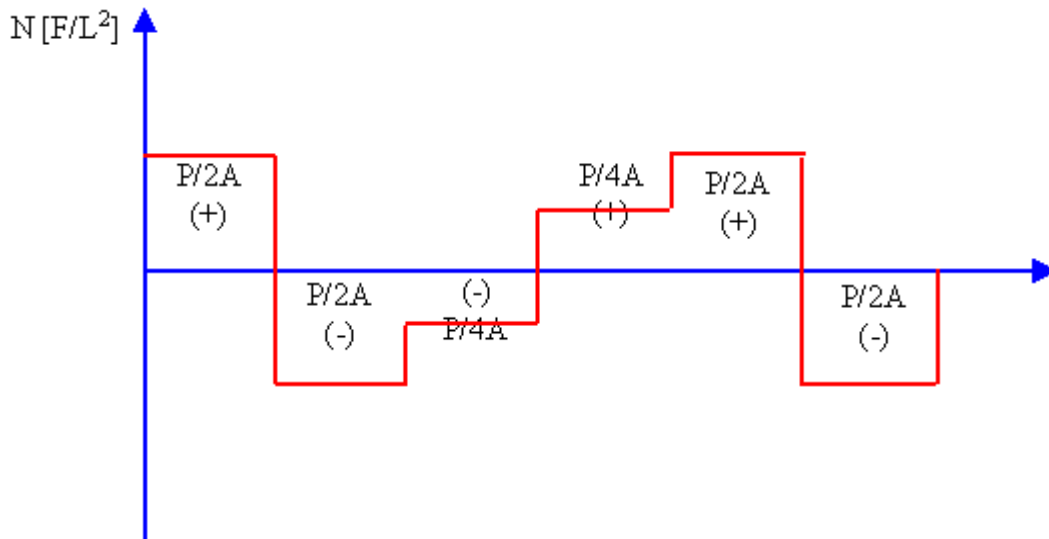


Figura N° 30. Diagrama de esfuerzo normal.

Se comprueba que entre las secciones C y E la fuerza axial interna es constante, pero el cambio de sección transversal en D produce el cambio de esfuerzo normal entre C y D, y entre D y E.

Mientras no existan efectos térmicos (se estudiarán posteriormente), la deformación longitudinal unitaria puede calcularse mediante la expresión $\epsilon = \sigma / E$. El diagrama de deformación longitudinal unitaria mostrará en el eje de las ordenadas los valores de la referida deformación. En el caso de problemas sin efectos térmicos, el diagrama es el mismo diagrama de esfuerzo normal pero dividiendo cada ordenada entre el módulo elástico. La figura N° 31 muestra este diagrama.

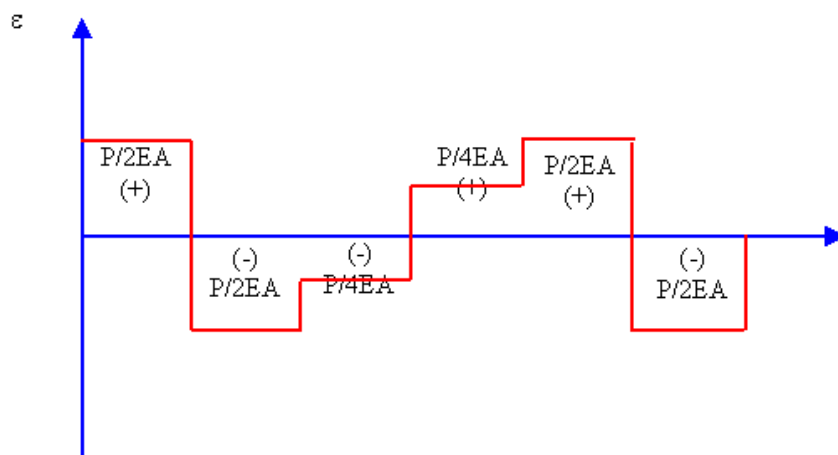


Figura N° 31. Diagrama de deformación longitudinal unitaria.

Por último, en el diagrama de desplazamiento el eje de las abscisas representa la coordenada de las secciones transversales, mientras que las ordenadas indican el valor del desplazamiento de la sección trasnversal respecto a su ubicación original. Para su deducción requiere el siguiente

desarrollo. Por definición $\epsilon = \delta/L$. Si en lugar de considerar una longitud finita L , se considera una longitud infinitesimal dx , la deformación longitudinal unitaria se expresaría como

$$\epsilon = d\delta/dx.$$

Esta expresión puede escribirse

$$d\delta = \epsilon dx \rightarrow \int_i^{i+1} d\delta = \int_i^{i+1} \epsilon dx \rightarrow \delta_{i+1} - \delta_i = \int_i^{i+1} \epsilon dx \rightarrow \delta_{i+1} = \delta_i + \int_i^{i+1} \epsilon dx$$

expresión que indica que el desplazamiento de una sección denominada $i+1$, es igual al desplazamiento de una sección denominada i más el área del diagrama de deformación longitudinal unitaria comprendido entre esa dos secciones transversales.

Para que esta expresión tenga utilidad, se requiere que el desplazamiento de una sección transversal sea conocido. En el caso del problema planteado, se conoce el desplazamiento de la sección B , el cual es cero. Por ello el desplazamiento de la sección C (sección $i+1$), es el valor del desplazamiento de la sección B (sección i) más el área del diagrama de deformación longitudinal unitaria entre las secciones B y C . En este caso el área es $Pa/2EA$. En forma sucesiva pueden obtenerse los valores de los desplazamientos de las secciones D , E , F , G y H . Estos valores se presentan en la gráfica de la figura N° 32.

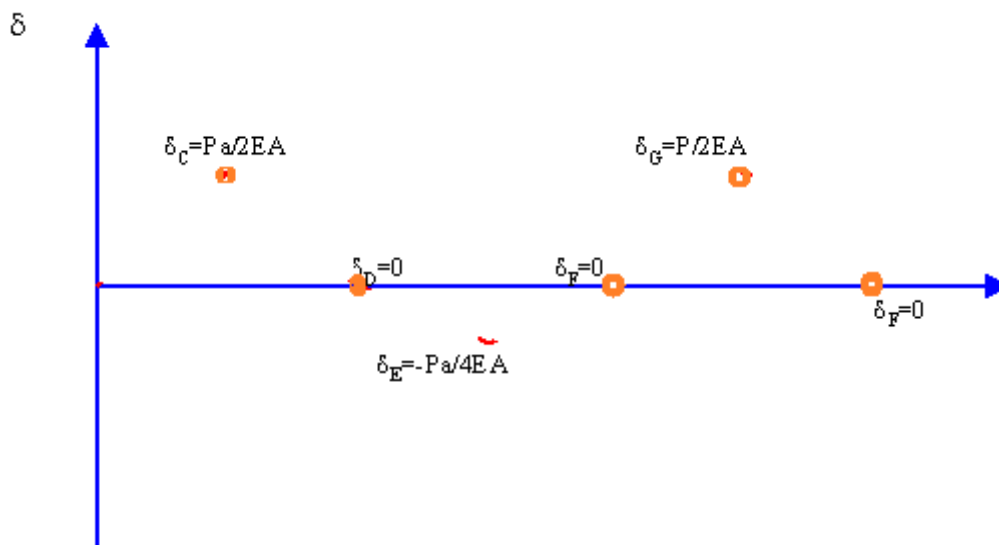


Figura N° 32. Valores de los desplazamiento de secciones transversales

Para terminar de construir el diagrama es necesario unir los puntos de la gráfica encontrados. Para ello se recurre a la ecuación $\epsilon = d\delta/dx$, la cual expresa que la pendiente del diagrama de desplazamiento es el valor de la deformación longitudinal unitaria. La figura N° 31 indica que el valor de la referida deformación es constante en cada fracción del sólido, por lo que la curva que une los puntos de la figura N° 32 deben ser líneas rectas. El diagrama final se muestra en la figura N° 33.

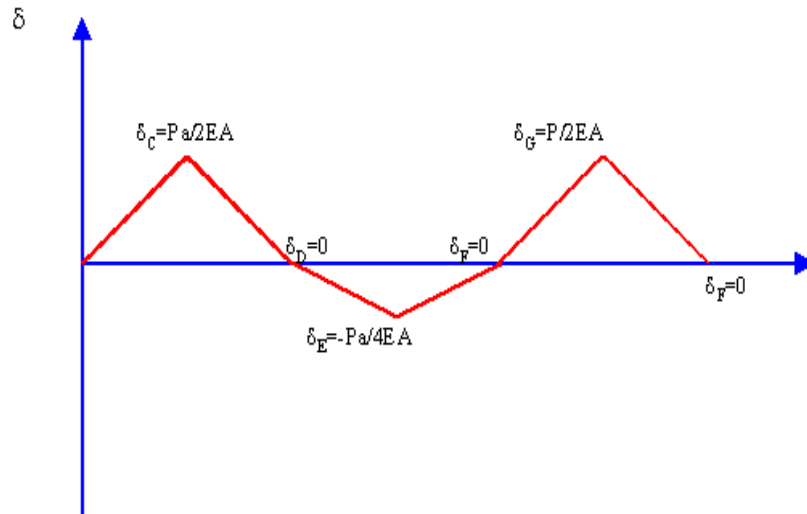


Figura N° 33. Diagrama de desplazamiento.

Es conveniente destacar que los valores de desplazamiento positivos corresponden en este caso a desplazamientos de las secciones hacia la derecha de su ubicación original. Los desplazamientos negativos, por lo tanto corresponden a desplazamientos hacia la izquierda. Nótese también que las secciones transversales entre *C* y *D* están solicitadas a compresión, por lo que su deformación corresponde a un acortamiento, pero su desplazamiento es hacia la derecha motivado al acumulamiento de desplazamiento hacia la derecha de las secciones comprendidas entre *B* y *C*.

7.- Barra solicitada por su propio peso.

Considérese el problema mostrado en la figura N° 34 que corresponde a una barra soportada en su sección superior y solicitada exclusivamente por su propio peso.

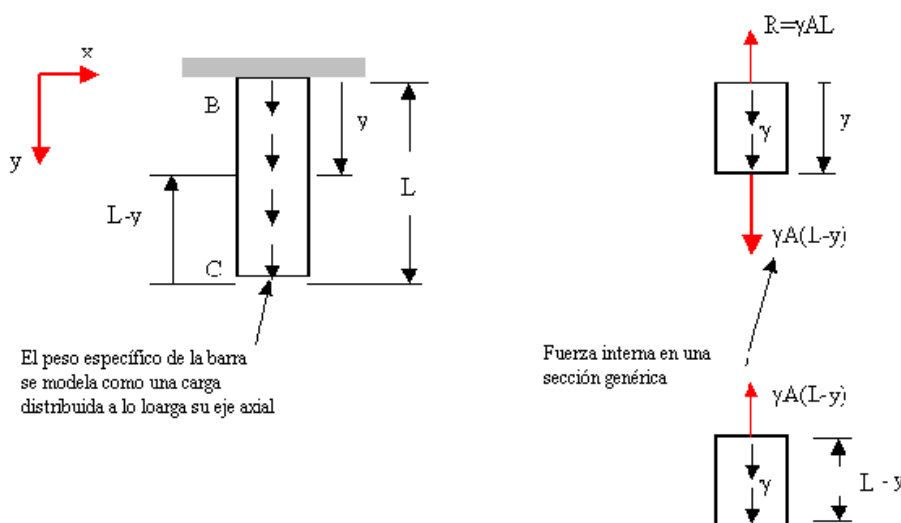


Figura N° 34. Barra solicitada por su propio peso.

Se requiere determinar el desplazamiento del extremo libre la cual tiene un peso específico γ , un área transversal constante A y un módulo elástico E .

El peso propio de la barra puede ser considerado como una fuerza distribuida a lo largo de la barra. Para los efectos de este problema, esta fuerza de volumen se sustituye por una fuerza distribuida equivalente aplicada en el centroide de cada sección transversal, que representa el peso de dicha sección. Esto es lo que se muestra en la figura N° 34, el cual es el diagrama de carga externa. Aplicando sumatoria de fuerzas verticales, la reacción que ocurre en el extremo B de la barra debido a su peso puede ser determinado como:

$$\begin{aligned}\sum F_v &= 0 \\ \mathbf{R} - \gamma \mathbf{AL} &= 0 \\ \mathbf{R} &= \gamma \mathbf{AL}\end{aligned}$$

Luego, cortando la barra a una distancia y del extremo B, la fuerza interna N_i necesaria para el equilibrio del diagrama de cuerpo libre inferior será:

$$N_i = \gamma A(L - y)$$

y por efecto de acción y reacción este valor será el mismo para el diagrama de cuerpo libre superior. Nótese que esta será una cantidad variable que dependerá de la distancia y a la cual se tome dicha sección. Por tal motivo, al aplicar la ecuación para determinar el desplazamiento del extremo libre de la barra, se tendrá:

$$\begin{aligned}\delta &= \int_0^L \varepsilon \, dy = \int_0^L \frac{\sigma}{E} \, dy = \int_0^L \frac{N_i}{EA} \, dy = \int_0^L \frac{\gamma(L-y)}{E} \, dy = \frac{\gamma}{E} \int_0^L (L-y) \, dy \\ \delta &= \frac{\gamma}{E} \left(Ly - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^L = \frac{\gamma L^2}{2E}\end{aligned}$$

Obtenido el valor de la fuerza axial interna, se puede elaborar el diagrama de fuerza axial interna, como ésta es función lineal de la coordenada, se obtiene una gráfica lineal. La fuerza axial interna en la sección inferior es cero, ya que esta sección no está soportando ninguna carga por debajo de ella. En la sección superior la fuerza axial es máxima, porque dicha sección soporta el peso total de

la barra. Puede verse que la ecuación de fuerza axial indica que cada sección soporta el peso de la cantidad de barra que hay por debajo de ella. Luego, dividiendo entre el área A de la sección transversal, se obtiene el diagrama de esfuerzo axial. Como la única carga es el peso, el diagrama de deformación se obtiene dividiendo las ordenadas del diagrama de esfuerzo, entre el módulo elástico del material de la barra. Para el diagrama de desplazamiento, se tiene:

$$\delta_C - \delta_B = \delta_C - 0 = \frac{\gamma L^2}{2E}$$

$$\delta_C = \frac{\gamma L^2}{2E}$$

La figura N° 35 muestra estos diagramas.

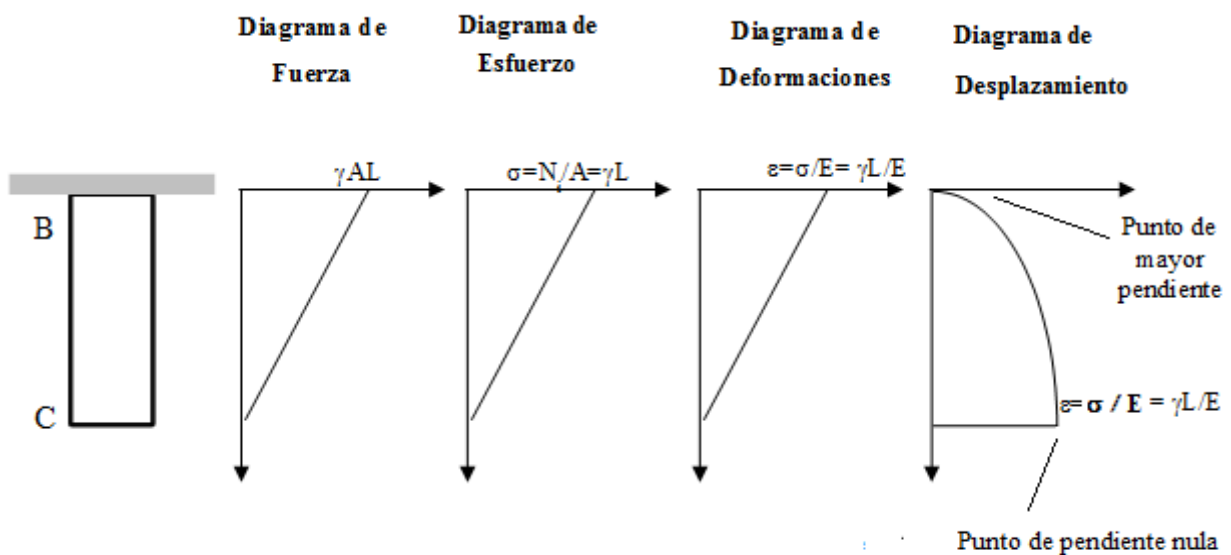


Figura N° 35. Diagramas de fuerza axial, esfuerzo normal, deformación longitudinal unitaria y desplazamiento del problema de la figura N° 34.

Nótese que el desplazamiento de la sección B (donde está fija la barra) sufre la deformación máxima, esto se debe a que esta sección es la que está sintiendo la mayor fuerza axial interna, o sea, soporta el peso de todas las secciones que están por debajo de ella, sin embargo la sección B por estar fija no sufre desplazamiento. Para el caso de la sección C, nótese que ésta no experimenta ninguna deformación, ya que no soporta peso pero si experimenta el desplazamiento máximo por causa de las deformaciones que experimentan las secciones que se encuentra sobre ella.

8.- Efectos térmicos.

Considérese una barra homogénea AB, de sección constante, que descansa libremente sobre una superficie lisa. Si la temperatura de la barra se eleva en ΔT , se observa que la barra se alarga una cantidad δ_T que es proporcional al cambio de temperatura ΔT y a la longitud L de la barra.

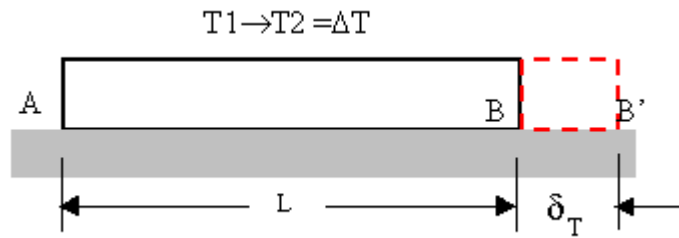


Figura N° 36. Barra sujeta a un cambio de temperatura.

Se tiene:

$$\delta_T \propto (\Delta T)L$$

introduciendo la constante de proporcionalidad α

$$\delta_T = \alpha (\Delta T)L$$

donde α es una constante característica del material, llamada coeficiente de expansión térmica. δ_T y L están expresados en unidades de longitud, α representa una cantidad cuyas unidades son $1 / ^\circ\text{C}$ ó $1 / ^\circ\text{F}$ dependiendo de si la temperatura está expresada en Celsius o Fahrenheit. En este caso no existe ninguna restricción para que se produzca el cambio de longitud de la barra.

En forma general, una fracción de un sólido de longitud L_i y de sección transversal constante solicitado axialmente por una fuerza interna de tracción constante N y un cambio de temperatura uniforme ΔT , experimentará un cambio de longitud dado por la expresión

$$\delta = \frac{NL_i}{EA} + \alpha L_i \Delta T$$

y por su definición, la deformación longitudinal unitaria es

$$\epsilon = \frac{\delta}{L_i} = \frac{N}{EA} + \alpha \Delta T = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T.$$

Esta es la expresión genérica que se utiliza para elaborar el diagrama de deformación.

Supóngase ahora que la misma barra AB , de longitud L , se coloca entre dos soportes fijos a una distancia L el uno del otro. De nuevo, no hay esfuerzo ni deformación en esta condición inicial. Si se eleva la temperatura en ΔT , la barra no puede alargarse debido a las restricciones impuestas en los extremos, el alargamiento δ_T no se produce, y en consecuencia aparecen fuerzas sobre la barra

generadas por los soportes.

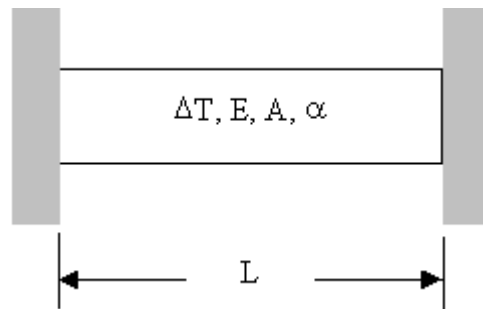


Figura N° 37. Barra doblemente fija sometida a un cambio de temperatura.

Esta condición corresponde al diagrama de cuerpo libre de la figura N° 38.

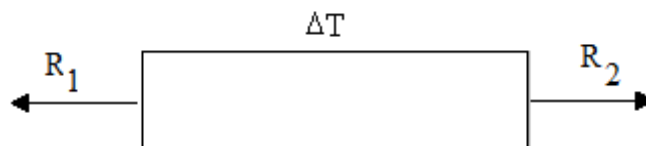


Figura N° 38. Diagrama de cuerpo libre de la barra de la figura N° 37

Nótese que las reacciones desconocidas se han dibujado saliendo de las secciones transversales respectivas, lo cual supone tracción en ambos extremos.

La única ecuación de equilibrio aplicable a este problema es la sumatoria de fuerzas horizontales, la cual establece que $R_1 = R_2$. Ambas reacciones son iguales pero la ecuación no permite cuantificar su valor. Por ello, este problema es estáticamente indeterminado. Se establece el grado hiperestático restándole al número de incógnitas (2) el número de ecuaciones de equilibrio (1). Por lo tanto, el problema es de grado hiperestático uno (1) y se requiere una ecuación de compatibilidad de desplazamientos. En este caso esa ecuación corresponde a la condición de que la barra no puede cambiar de longitud.

Puede elaborarse un diagrama de cuerpo libre de una sección genérica de la barra, como el mostrado en la figura N° 39. A partir de este pueden estimarse en forma sucesiva los diagramas de carga axial, esfuerzo normal y deformación longitudinal unitaria, los cuales están representados en las figuras N° 40, N° 41 y N° 42, respectivamente.

El diagrama de deformación longitudinal unitaria se ha construido aplicando la ecuación

$$\epsilon = \frac{\delta}{L_i} = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T.$$

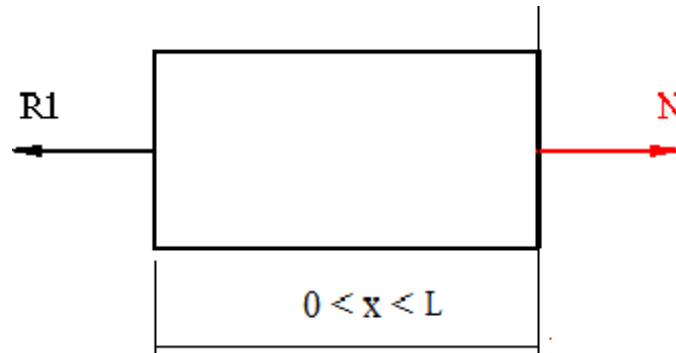


Figura N° 39. Diagrama de cuerpo libre genérico del problema de la figura N° 38.

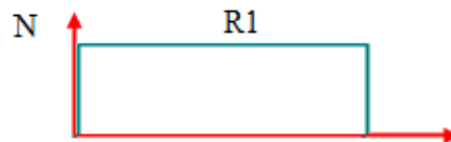


Figura N° 40. Diagrama de carga axial interna.

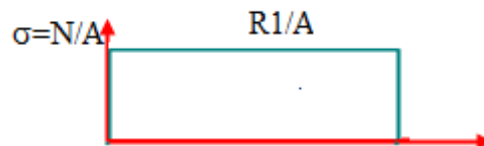


Figura N° 41. Diagrama de esfuerzo normal.

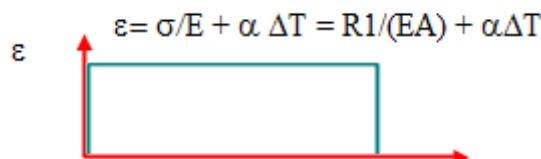


Figura N° 42. Diagrama de deformación longitudinal unitaria.

Aplicando la ecuación $\delta_{i+1} = \delta_i + \int_i^{i+1} \epsilon dx$ y estableciendo como las secciones i e $i+1$ las secciones extremas de la barra, se obtiene $\delta_i = 0$; $\delta_{i+1} = 0$, lo que conduce a $\int_i^{i+1} \epsilon dx = 0$. Esta última expresión puede interpretarse diciendo que el área del diagrama de deformación longitudinal unitaria es cero. Esta área puede evaluarse a partir de la figura N° 42. Esto es $\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T = 0 \rightarrow \frac{\sigma}{E} = -\alpha \Delta T \rightarrow \sigma = -\alpha E \Delta T \rightarrow R_1 = -\alpha EA \Delta T$ en la que los esfuerzos axiales presentes por el cambio de temperatura, se denominan *esfuerzos térmicos*. Una vez calculada la reacción R_1 , pueden elaborarse los diagramas reales, los cuales se muestran en la figura N° 43.

Nótese que en este caso, los diagramas de deformación y desplazamiento son nulos. Esto ocurre en este problema particular que corresponde a una barra fija en sus dos extremos y solicitada exclusivamente por el cambio de temperatura (no hay cargas axiales externas).

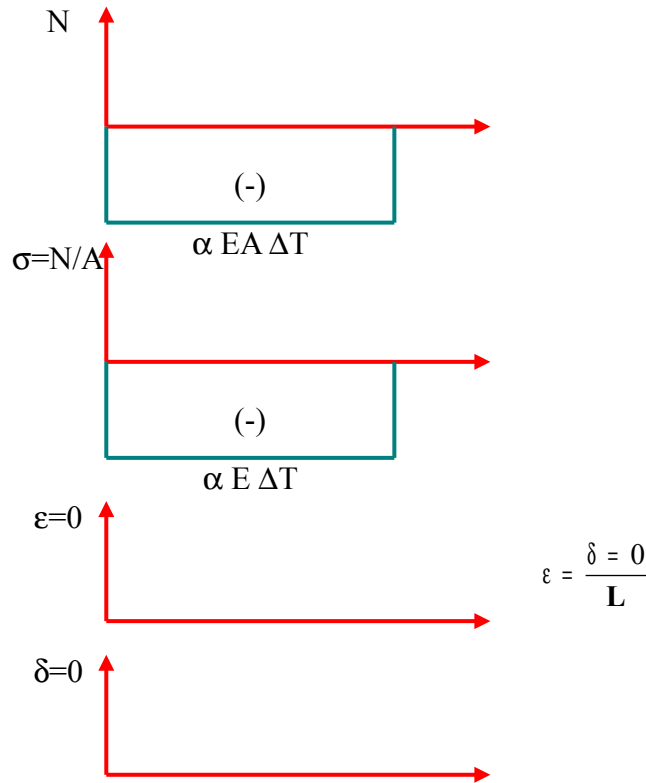


Figura N° 43. Diagramas de fuerza axial, esfuerzo normal, deformación longitudinal unitaria y desplazamiento de la barra de la figura N° 37.

Este problema puede resolverse también mediante el método de superposición como se indica en la figura N° 44.

Como el sistema es hiperestático de grado 1, se sustituye una de las restricciones por la fuerza que ella ejerce en el sistema. Hecho esto, se observa que la combinación de los efectos del cambio de temperatura y la fuerza P deben ser tales que satisfagan las condiciones de contorno del problema real.

Esto es lo que se indica en la ecuación

$$\alpha \cdot \Delta T \cdot L - \frac{PL}{E \cdot A} = 0$$

por lo tanto

$$P = \alpha EA \Delta T \rightarrow \sigma = -\alpha E \Delta T$$

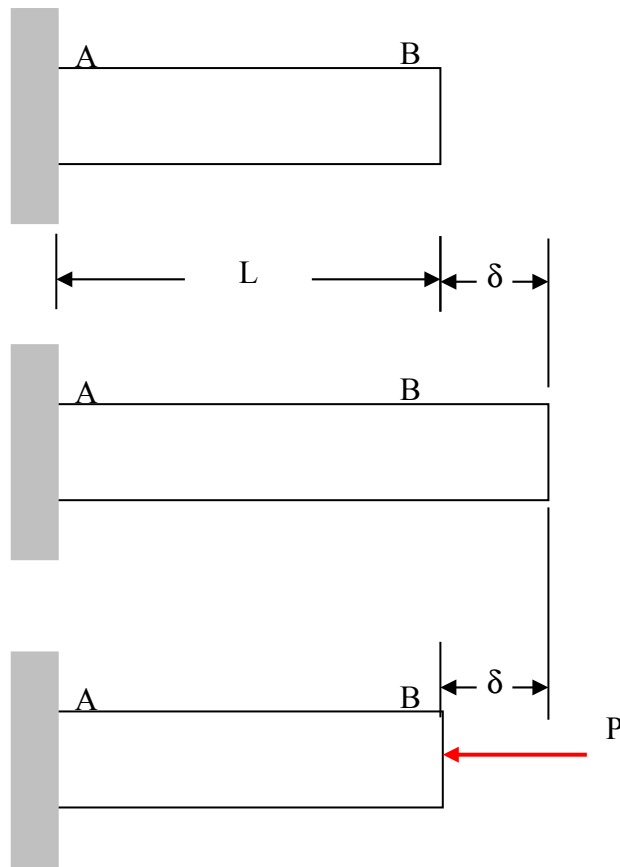


Figura N° 44. Estructura primaria del problema de la figura N° 37, solicitada por el cambio de temperatura y la reacción redundante