

Desplazamiento y deformación.

1-1. Desplazamiento de un punto

Considérese un punto P y supóngase que el punto se mueve a la posición P' (Figura N° 1). El segmento de línea dirigido $\vec{PP'}$ se denomina *desplazamiento lineal de P* , y se denota S_P y es una cantidad vectorial.

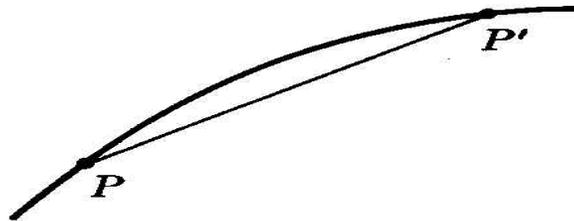


Figura N° 1. Desplazamiento Lineal y Trayectoria.

Este no es necesariamente el recorrido que ha realizado P para ubicarse en P' , pero describe el cambio de localización. El recorrido real se denomina *trayectoria*.

1-2. Desplazamiento relativo de un punto.

Considérese dos puntos P y Q , localizados por los vectores de posición r_P y r_Q (Figura N° 2).

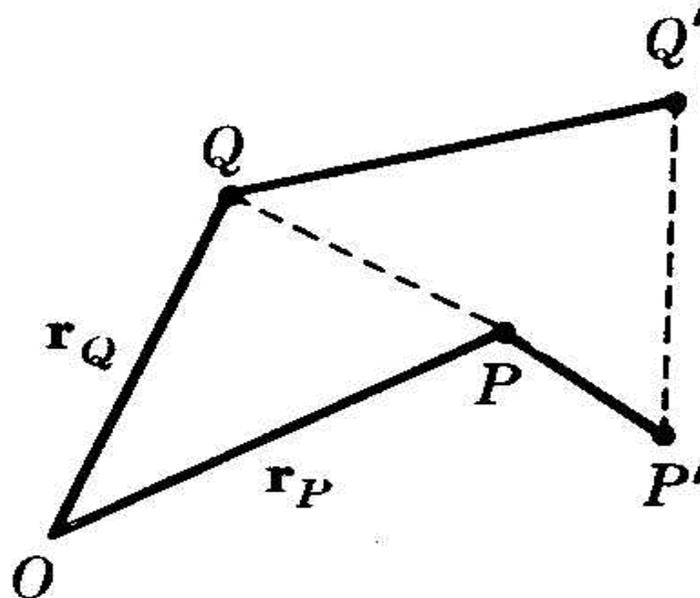


Figura N° 2 Desplazamiento de dos puntos.

Supóngase que los puntos pasan a las ubicaciones P' y Q' , respectivamente. Los desplazamientos

lineales son respectivamente

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_P &= \mathbf{r}'_P - \mathbf{r}_P \\ \mathbf{S}_Q &= \mathbf{r}'_Q - \mathbf{r}_Q \end{aligned} \quad (1)$$

cuando son observados desde el punto fijo O . Pero si se observa el desplazamiento de P desde Q , puede escribirse

$$\mathbf{S}_P - \mathbf{S}_Q = \mathbf{S}_{PQ} \quad (2)$$

que es el desplazamiento relativo de P con respecto a Q . La ecuación N° (2) puede reescribirse

$$\mathbf{S}_P = \mathbf{S}_{PQ} + \mathbf{S}_Q \quad (3)$$

lo que establece que el desplazamiento de P es igual al desplazamiento relativo de P respecto a Q más el desplazamiento de Q . Si se define

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \mathbf{b} \\ \overrightarrow{P'Q'} &= \mathbf{b}' \end{aligned} \quad (4)$$

entonces, mediante la ecuación N° (3)

$$\mathbf{S}_P + \mathbf{b}' = \mathbf{b} + \mathbf{S}_Q \quad (5)$$

o

$$\mathbf{b} - \mathbf{b}' = \mathbf{S}_P - \mathbf{S}_Q = \mathbf{S}_{PQ} \quad (6)$$

Así, \mathbf{S}_{PQ} también representa el cambio de longitud y orientación de la línea PQ . Por ello, la interpretación de la ecuación N° (6) dependerá del tipo de problema planteado y cual es la pregunta que quiere responderse.

1-3. Mecánica de partículas y mecánica del medio continuo.

La Mecánica requiere analizar fenómenos observables. No se analizan observaciones, se analizan modelos. Por intuición o experiencia el fenómeno se reemplaza por un modelo, el cual debe tener dos atributos: ser una representación razonable del fenómeno y factible de analizar. Se supondrá que los fenómenos se deben a interacciones de objetos o cuerpos que ocupan espacio. El modelo se inicia especificando el objeto.

El objeto a observar puede ser un satélite artificial, un electrón o un automóvil. Si, por ejemplo, solo es necesario determinar el movimiento de cualquiera de ellos respecto a la tierra, pueden considerarse

como un punto.

Sin embargo, si es necesario considerar el cambio de orientación del satélite durante su movimiento o el cambio de geometría cuando el auto golpea un obstáculo, debe considerarse las dimensiones de ellos y la región instantánea del espacio que ocupan. Esto conlleva a que no debe confundirse el objeto con el espacio que ocupa. Cuando se supone que el objeto llena continuamente esta región de espacio, entonces al modelo se lo denomina medio continuo.

Este modelo no es aplicable a estructuras atómicas ni moleculares, y podría no representar la geometría completa del cuerpo. El valor del modelo está en la capacidad a través de él, de realizar un análisis que permita responder la cuestión planteada, por ejemplo, como cambió la geometría del auto por el golpe. Podría plantearse un modelo molecular para el estudio de automóvil, el cual puede considerarse como más real, pero dificultaría en gran medida el análisis.

Se concluye que la ecuación N° (6), para la Mecánica de Partículas describe el desplazamiento relativo de dos puntos, mientras que para la Mecánica del Medio Continuo describe el cambio o deformación de una línea del continuo en cuanto a longitud y orientación.

1-4. Desplazamiento.

Considérese una región de espacio ocupada por un cuerpo o una fracción de éste. De alguna manera este cuerpo cambia y ocupa una nueva región de espacio. Denótese por R_0 el espacio inicial ocupado y por R el espacio posterior. Un punto P_0 en R_0 que está localizado por el vector de posición $\mathbf{r}_0 = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ luego se encuentra representado por P en R , localizado por el vector de posición $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ (Figura N° 3).

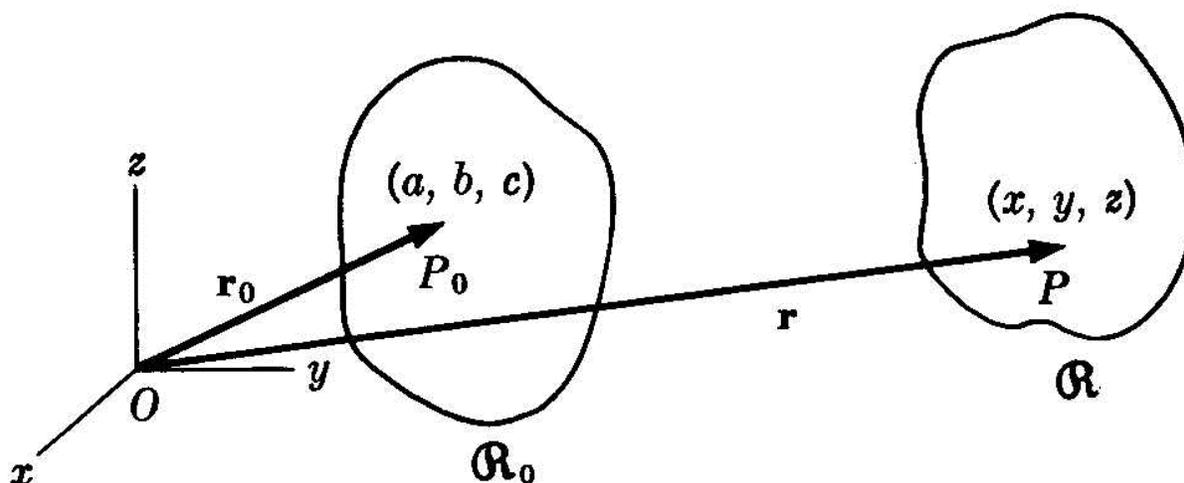


Figura N° 3. Desplazamiento de un cuerpo.

Este cambio de ubicación de cada punto P_0 a P representa el desplazamiento del cuerpo.

El vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ es el desplazamiento lineal del punto P , previamente explicado, pero el cambio de todos los puntos (a, b, c) de R_0 en los puntos (x, y, z) de R es una transformación llamada desplazamiento, representada por

$$x=x(a, b, c), \quad y=y(a, b, c), \quad z=z(a, b, c) \quad (7)$$

Las coordenadas del espacio inicialmente ocupada por el cuerpo (a, b, c) pueden ser consideradas *etiquetas* que identifican el desplazamiento material del punto (x, y, z) en el espacio ocupado por el cuerpo desplazado. Antes se utilizaron subíndices para esta identificación; por ejemplo S_p . Por ello, refiriéndose a un conjunto de puntos, se utilizará subíndices, pero en el caso del medio continuo, se utilizará la ubicación inicial como referencia.

Es importante destacar que es el cuerpo el que se desplaza y no el espacio que ocupa. Lo que se realiza es una correspondencia de todos los puntos del cuerpo en las regiones del espacio; por ello la región es la configuración del cuerpo, y no el cuerpo mismo. Se supondrá que la ecuaciones (7) representan una transformación continua y suave, la cual puede ser invertida así

$$a=a(x, y, z), \quad b=b(x, y, z), \quad c=c(x, y, z) \quad (8)$$

Como se ha supuesto un modelo continuo y una transformación continua, las ecuaciones (7) y (8) constituyen la definición de un medio continuo.

Por el desarrollo anterior, R_0 representa la región no desplazada y R la región desplazada. Las coordenadas (a, b, c) se denominan *coordenadas Lagrangeanas*, introducidas por Euler en 1752, y las coordenadas (x, y, z) *coordenadas Eulerianas*, introducidas por D'Alambert en 1749.

Las coordenadas Lagrangeanas se denominan también coordenadas *materiales* porque ellas identifican elementos materiales. Las coordenadas Eulerianas, se denominan coordenadas *espaciales*, porque ellas especifican una posición en el espacio ocupada por algún elemento material luego del desplazamiento.

En la Mecánica de Partículas se utilizan coordenadas materiales, se especifica una partícula y se traza su subsecuente trayectoria. En la Mecánica de los Fluidos se utilizan coordenadas espaciales. Por ejemplo, el estudio del flujo por una tubería, se especifica un punto de la región y se analiza lo que ocurre en ese punto de la región en diferentes instantes, no se establece la trayectoria del fluido desde el reservorio. En La Mecánica de Sólidos, suelen utilizarse ambos sistemas.

Por lo anterior, se define como Cuerpo Rígido a aquél que la distancia entre cualquiera par de puntos es constante, y cuerpos no rígidos o deformables, a aquéllos en que no se cumple esta restricción. De la figura N° 3 y de la ecuación (6) se observa que el cambio de longitud de la línea $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{b}$ puede expresarse en términos de los desplazamientos de los punto P y Q . En forma general este cambio expresa una traslación, una rotación y un cambio de longitud. Por ello, si se requiere determinar la

deformación en el entorno de un punto $P'(x, y, z)$ de R , debe considerarse el desplazamiento de $P(a, b, c)$ y de algún punto del referido entorno. Como se trata de un medio continuo, el entorno corresponde a una distancia infinitesimal.

1-5. Gradientes de desplazamiento y gradientes de deformación.

Considérese un conjunto de puntos que constituyen una curva como la c_0 en R_0 y su transformación en c en R (figura N° 4). Un punto (a, b, c) en c_0 , tendrá un desplazamiento (x, y, z) en c denotado por \mathbf{u} . Un punto en su entorno localizado en c_0 se establece mediante un elemento $d\mathbf{r}_0$. El límite de la secante a la curva es la tangente, por lo que $d\mathbf{r}_0$ es tangente a c_0 .

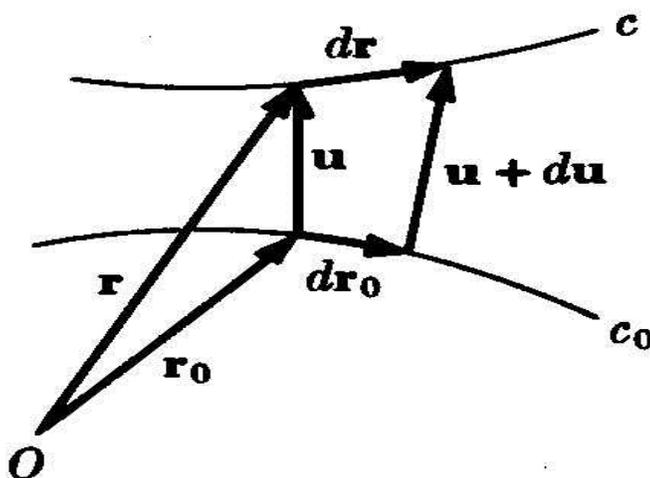


Figura N° 4

De la figura N° 4 se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{u} \\ \mathbf{u} + d\mathbf{r} &= d\mathbf{r}_0 + (\mathbf{u} + d\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (9)$$

Por lo tanto

$$d\mathbf{r} - d\mathbf{r}_0 = d\mathbf{u} \quad (10)$$

lo que significa que el cambio local de ángulo y longitud del elemento de línea está representado por la ecuación (10). Si

$$\begin{aligned} \nabla_0 &= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial a} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial b} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial c} \\ \nabla &= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad (11)$$

son los operadores gradientes en R_0 y R , respectivamente, entonces

$$\begin{aligned}\nabla_o \mathbf{r}_o &= \mathbf{1} \\ \nabla \mathbf{r} &= \mathbf{1}\end{aligned}\tag{12}$$

Más aún, por la ecuación N° (7)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{u}[x(a, b, c), y(a, b, c), z(a, b, c)]\tag{13}$$

por lo tanto

$$d\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a} da + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial b} db + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial c} dc = d\mathbf{r}_o \cdot \nabla_o \mathbf{u}\tag{14}$$

$$d\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} dz = d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{u}$$

Sustituyendo la ecuación N° (14) en la ecuación N° (10), se tiene

$$\begin{aligned}d\mathbf{r} &= d\mathbf{r}_o + d\mathbf{r}_o \cdot \nabla_o \mathbf{u} \\ &= d\mathbf{r}_o \cdot (\mathbf{1} + \nabla_o \mathbf{u}) = d\mathbf{r}_o \cdot \Psi_o\end{aligned}\tag{15}$$

donde

$$\Psi_o = \mathbf{1} + \nabla_o \mathbf{u}\tag{16}$$

de donde se observa que $d\mathbf{r}$ es una función vectorial lineal de $d\mathbf{r}_o$ y el tensor de orden dos Ψ_o es una medida del cambio local angular y de longitud de $d\mathbf{r}_o$. $\nabla_o \mathbf{u}$ se denomina *gradiente del desplazamiento*.

Aplicando el operador ∇_o a la primera de la ecuación N° (9), se tiene

$$\nabla_o \mathbf{r} = \nabla_o \mathbf{r}_o + \nabla_o \mathbf{u} = \mathbf{1} + \nabla_o \mathbf{u} = \Psi_o\tag{17}$$

por lo que el tensor Ψ_o representa el *gradiente de la deformación* $\nabla_o \mathbf{r}$.

1-6. Transformación de un Elemento de Volumen.

Considérese el cambio de un elemento de volumen bajo la transformación de la ecuación N° (7). Físicamente se está transformando un elemento de volumen de un cuerpo desde su estado inicial a algún estado subsecuente. (Ver figura N° 5).

Tómese un elemento de volumen en el entorno del punto (a, b, c) en R_0 . Supóngase que este elemento sea un paralelepípedo rectangular con lados da_i , db_j , dc_k . Por ello el volumen en R_0 es

$$dV_0 = da_i \cdot db_j \times dc_k = da db dc \quad (18)$$

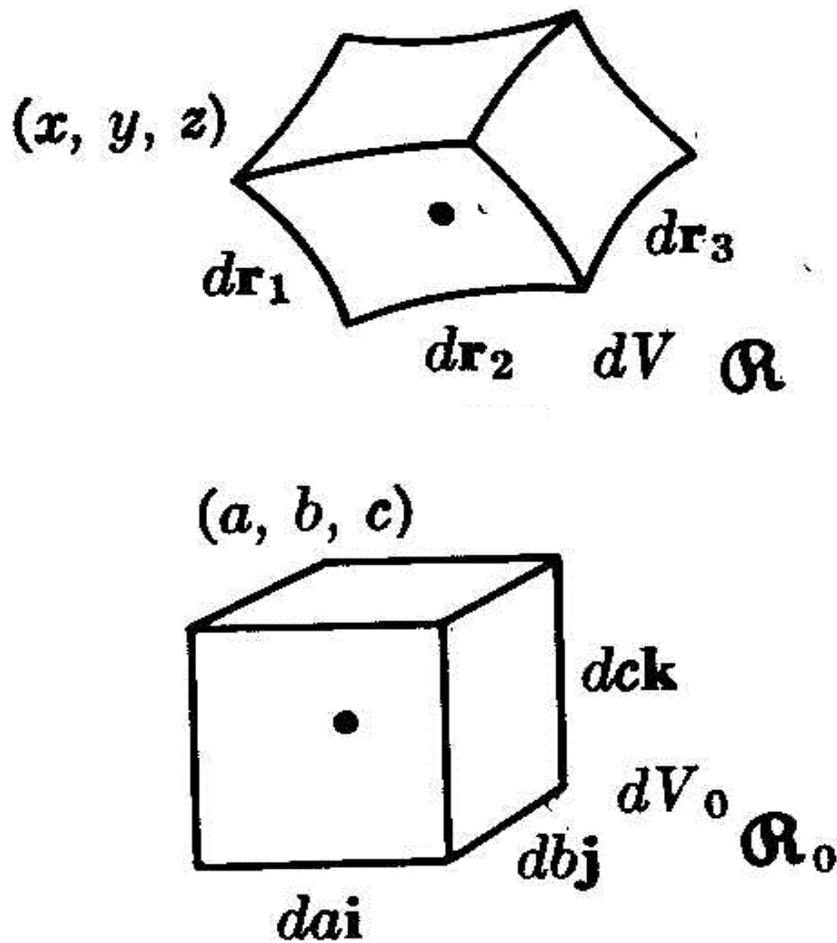


Figura N° 5. Transformación del Volumen.

Bajo la transformación de la ecuación N° (7), la longitud de una línea en R se obtiene mediante la ecuación N° (15). Por lo que mediante la ecuación N° (17)

$$\begin{aligned}d\mathbf{r}_1 &= da \mathbf{i} \cdot \nabla_0 \mathbf{r} \\d\mathbf{r}_2 &= db \mathbf{j} \cdot \nabla_0 \mathbf{r} \\d\mathbf{r}_3 &= dc \mathbf{k} \cdot \nabla_0 \mathbf{r}\end{aligned}\tag{19}$$

Donde dr_1 , dr_2 , dr_3 son los lados del nuevo elemento de volumen que no es un paralelepípedo rectangular.

El volumen en R es

$$dV = d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2 \times d\mathbf{r}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial b} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c} da db dc = J dV_0\tag{20}$$

Donde

$$J = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial b} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}\tag{21}$$

Se denomina *Jacobiano de la transformación*; este es el tercer invariante escalar. La ecuación N° (20) muestra que J es la relación de un elemento de volumen a su volumen inicial. Si el cuerpo es rígido $J = 1$.

1-7. Estiramiento y extensión.

Como Ψ_0 representa cambios de longitud y cambios de dirección de elementos de línea, se tratará de obtener expresiones que involucren solo cambios de longitud.

Considerando una barra esbelta de longitud inicial l_0 solicitada hasta que tenga una longitud l , se define el *estiramiento* como $S = l/l_0$, y la *extensión* como

$$\delta = \frac{l - l_0}{l_0}\tag{22}$$

Pero si se consideran elementos de línea, el estiramiento sería $S = |d\mathbf{r}|/|d\mathbf{r}_0|$.

Desafortunadamente, esta expresión es de difícil cálculo puesto que $|d\mathbf{r}| = [d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}]^{1/2}$.

Por ello se considera

$$S^2 = \frac{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}{d\mathbf{r}_0 \cdot d\mathbf{r}_0} \quad (23)$$

Mediante las ecuaciones (15) y (17) se obtiene

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 \cdot \nabla_0 \mathbf{r} = (\nabla_0 \mathbf{r})_e \cdot d\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} \nabla_0 \cdot \mathbf{r}_0 \quad (24)$$

Por lo que el estiramiento viene dado por

$$S^2 = \frac{(d\mathbf{r}_0 \cdot \nabla_0 \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r} \nabla_0 \cdot d\mathbf{r}_0)}{d\mathbf{r}_0 \cdot d\mathbf{r}_0} = \frac{d\mathbf{r}_0}{d\mathbf{r}_0} \cdot [\nabla_0 \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \nabla_0] \cdot \frac{d\mathbf{r}_0}{d\mathbf{r}_0} \quad (25)$$

Definiendo

$$\mathbf{C}_0 = \nabla_0 \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \nabla_0 = [\mathbf{1} + \nabla_0 \mathbf{u}] \cdot [\mathbf{1} + \mathbf{u} \nabla_0] \quad (26)$$

es un tensor de segundo orden llamado *tensor de deformación de Green*. Y $d\mathbf{r}_0/d\mathbf{r}_0 = \mathbf{e}_0$ es el vector tangencial unitario al elemento de línea $d\mathbf{r}_0$. Por lo que

$$(S^2)_{ee} = \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = C_{ee}^0 \quad (27)$$

Donde se ha introducido el subíndice *ee*, porque la ecuación (27) es la componente *ee* de \mathbf{C}_0 . Así, \mathbf{C}_0 es una medida del cuadrado de los estiramientos en cualquier dirección y es una representación invariante del cambio de longitud. Si se hubiese elegido otra dirección a través del punto P, por ejemplo $d\mathbf{r}/dr = \mathbf{n}$, (figura N° 6) siguiendo un argumento similar se llegaría a

$$(S^2)_{nn} = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{n}_0 = C_{nn}^0 \quad (28)$$

Donde \mathbf{C}_0 es la misma de la ecuación N° (27). Por la ecuación N° (26) se observa que \mathbf{C}_0 es simétrico.

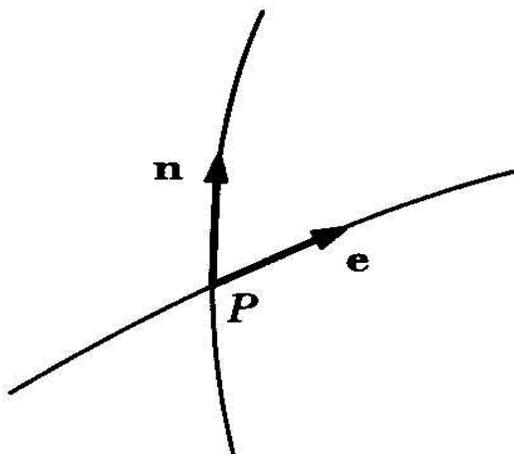


Figura N° 6. Vectores unitarios \mathbf{n} y \mathbf{e} en dos direcciones arbitrarias, pero con origen en el mismo punto

1-8. Deformación Unitaria

Si la elongación definida en la ecuación N° (22) es *pequeña*, a ésta se la llama en la práctica de la ingeniería *deformación longitudinal unitaria*. (Suele encontrarse en la literatura como *deformación normal unitaria*, puesto que está asociada a los esfuerzos normales. El autor, sin embargo, considera que esta denominación no es correcta, y la califica como *longitudinal*, porque está asociada a cambio de longitud de líneas.) Recordando que la medida adoptada es cuadrada y no lineal, debe construirse una medida cuadrática que puede reducirse a la deformación longitudinal unitaria cuando aquella sea pequeña.

De tal manera

$$\frac{l^2 - l_0^2}{2l_0^2} = \frac{(l+l_0)(l-l_0)}{2l_0^2} \approx \frac{(l_0+l_0)(l-l_0)}{2l_0^2} = \frac{l-l_0}{l_0} \quad (29)$$

Por ello, a partir de la ecuación N° (29), considerando otra vez elementos de línea

$$\frac{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} - d\mathbf{r}_0 \cdot d\mathbf{r}_0}{2d\mathbf{r}_0 \cdot d\mathbf{r}_0} = \frac{1}{2} \left[\frac{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}{d\mathbf{r}_0 \cdot d\mathbf{r}_0} - \frac{d\mathbf{r}_0 \cdot d\mathbf{r}_0}{d\mathbf{r}_0 \cdot d\mathbf{r}_0} \right] \quad (30)$$

la cual en conjunción con la ecuación N° (27) se convierte en

$$\frac{1}{2} [\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0] = \mathbf{e}_0 \cdot \frac{1}{2} [\mathbf{C}_0 - \mathbf{1}] \cdot \mathbf{e}_0 \quad (31)$$

Definiendo

$$\begin{aligned}
 \Gamma_o &= \frac{1}{2}[\mathbf{C}_o - \mathbf{1}] \\
 &= \frac{1}{2}[(\mathbf{1} + \nabla_o \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{1} + \mathbf{u} \nabla_o) - \mathbf{1}] \\
 &= \frac{1}{2}(\nabla_o \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla_o + \nabla_o \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \nabla_o)
 \end{aligned} \tag{32}$$

como el tensor de deformación de Lagrange, el cual es simétrico. Las componentes de la diagonal principal de este tensor para deformaciones pequeñas corresponden de acuerdo a la ecuación N° (29) a las deformaciones longitudinales unitarias. Los términos fuera de la diagonal principal, también para deformaciones pequeñas, se interpretan como las deformaciones angulares. Para deformaciones no pequeñas no son sencillas la interpretación física de las componentes del tensor. A pesar de ellos, los términos de la diagonal principal de llaman deformaciones longitudinales y los que están fuera de la diagonal principal, deformaciones angulares.

1-8. Deformaciones pequeñas.

Las expresiones derivadas para las deformaciones finitas son complicadas. Para la mayoría de los propósitos prácticos de la ingeniería, se restringirá el estudio a las deformaciones pequeñas, lo que introduce sustanciales simplificaciones.

Pequeño, significa que los gradientes de los desplazamientos son pequeños, lo que permite negar los términos elevados al cuadrado. Se supondrá (1) $\nabla_o \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \nabla_o \approx 0$ y (2) $\nabla_o \mathbf{u} \cdot \nabla_o \mathbf{u} \approx 0$.

Por la condición (2) los gradientes en sistema material y en sistema espacial son aproximadamente los mismos. Para comprobarlo, considérese la ecuación (17), pero escrita

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(a, b, c) \tag{33}$$

Por lo tanto

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a} da + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial b} db + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c} dc = d\mathbf{r}_o \cdot \nabla_o \mathbf{r} \tag{34}$$

Sustituyendo en (14)

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{u} &= d\mathbf{r}_o \cdot \nabla_o \mathbf{u} = d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{u} \\
 &= (d\mathbf{r}_o \cdot \nabla_o \mathbf{r}) \cdot \nabla \mathbf{u} = d\mathbf{r}_o \cdot (\nabla_o \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{u})
 \end{aligned} \tag{35}$$

Pero como $d\mathbf{r}_o$ es arbitrario

$$\nabla_o u = \nabla_o r \cdot \nabla u \quad (36)$$

Sustituyendo (9) en (36) se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla_o u &= [\nabla_o (r_o + u)] \cdot \nabla u = [1 + \nabla_o u] \cdot \nabla u \\ &= \nabla u + \nabla_o u \cdot \nabla u \end{aligned} \quad (37)$$

Y por la condición (2) anterior

$$\nabla_o u \approx \nabla u \quad (38)$$

Y la ecuación (32) se escribe

$$\begin{aligned} \Gamma_o &= \frac{1}{2} (\nabla_o u + u \nabla_o + \nabla_o u \cdot u \nabla_o) \\ \Gamma_o &\approx \frac{1}{2} (\nabla u + u \nabla) \end{aligned} \quad (39)$$

La cual universalmente se escribe

$$\bar{\epsilon} \approx \frac{1}{2} (\nabla u + u \nabla) \quad (40)$$

que es el tensor asociados a las deformaciones pequeñas. El vector desplazamiento en coordenadas cartesianas es

$$u = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k} \quad (41)$$

Por lo que las componentes del tensor deformación son

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (42)$$

Los elementos de la diagonal son las deformaciones longitudinales unitarias en la dirección de los ejes coordenados. Puede comprobarse lo anterior considerando un cubo de arista unitaria deformado a lo largo del eje x . (figura N° 7).

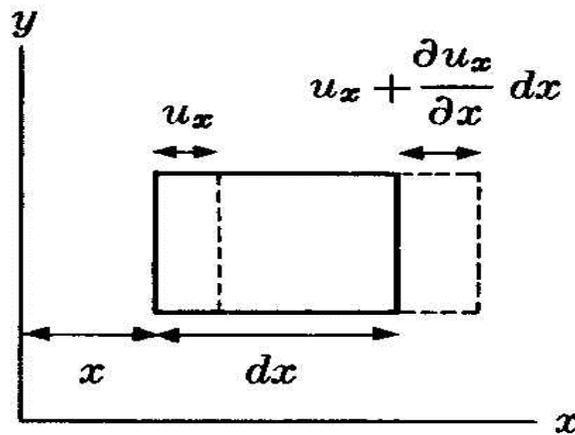


Figura N° 7. Deformación longitudinal.

La deformación longitudinal unitaria es

$$\begin{aligned} \frac{l - l_0}{l_0} &= \frac{[dx + (u_x + (\partial u_x / \partial x) dx) - u_x] - dx}{dx} \\ &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \epsilon_{xx} \end{aligned} \quad (43)$$

Estas son las denominadas *deformaciones longitudinal unitarias* y están asociadas a líneas paralelas a las caras del elemento. Por convención, las deformaciones longitudinales unitarias correspondientes a incrementos de longitud se consideran positivas.

Para interpretar las componentes fuera de la diagonal principal, considérese un cubo deformado por deslizamiento relativo de las superficies superior e inferior como el de la figura N° 8.

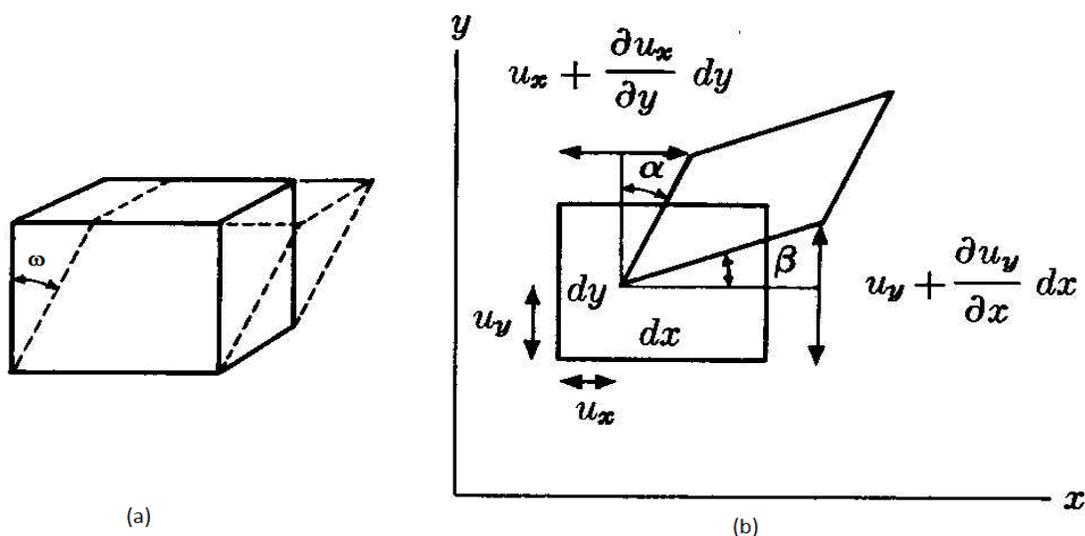


Figura N° 8. Esquema de la deformación angular.

En la figura N° 8, el elemento se ha desplazado y rotado, de tal forma que el cambio promedio en el ángulo de las líneas dx y dy es $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, con

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{(\partial u_x / \partial y) dy}{dy} \approx \frac{\partial u_x}{\partial y} \approx \alpha \\ \tan \beta &= \frac{(\partial u_y / \partial x) dx}{dx} \approx \frac{\partial u_y}{\partial x} \approx \beta \end{aligned} \quad (44)$$

Donde se ha supuesto que los desplazamientos son pequeños, por lo que se ha remplazado la tangente por su argumento. Por ello

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \gamma_{xy} \quad (45)$$

Siendo el ángulo una medida de la deformación angular. El uso del valor $\frac{1}{2}$ es requerido para que la ecuación (42) tenga siempre carácter tensorial. Se concluye que la deformación angular es en cuanto ha cambiado el ángulo entre dos líneas que originalmente eran ortogonales. Por convención, cuando el ángulo entre las dos líneas ortogonales disminuye, se considera la deformación angular positiva.

1-9. Compatibilidad

La ecuación (42) calcula seis componentes de deformaciones unitarias a partir del campo de desplazamiento. Si se conoce el campo de desplazamiento, la obtención del tensor deformación es directo.

Pero en la práctica, lo más común, es que se conoce el tensor deformación y desea obtenerse el campo de desplazamiento constituido por un sistema de ecuaciones diferenciales parciales en u_x , u_y y u_z de primer orden. Es posible que el sistema de ecuaciones planteados no tenga solución. Las componentes del tensor deformación deben ser tales, que al obtener el campo de desplazamiento a partir de ellas, este campo, además de ser continuo, debe tener una solución única en cada punto. Un campo de desplazamiento discontinuo indicaría que puntos infinitesimalmente cercanos antes de la deformación del sólidos, estarías separados distancias finitas luego de la deformación. También si se admitiese matemáticamente que un punto tuviese varios desplazamientos, esto indicaría que una grieta se ha desarrollado en el sólido.

Considérese la componente ϵ_{xx} del tensor deformación

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (46)$$

Si se deriva dos veces respecto a y.

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (47)$$

Donde en la última igualdad se ha aplicado la condición que las derivadas cruzadas deben ser iguales puesto que la función es continuo y suave.

Considerando lo mismo para la componente $\epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$ del tensor deformación, se tendría

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (48)$$

Sumando las ecuaciones (47) y (48) se obtiene

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (49)$$

La cual es una ecuación de compatibilidad. Otras dos ecuaciones se obtienen de forma análoga y son

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial y^2} &= 2 \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial z^2} &= 2 \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \end{aligned} \quad (50)$$

También

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} + 2 \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \\ &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y \partial z} + 2 \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial^2 x} \end{aligned} \quad (51)$$

Ecuación que puede reescribirse

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \quad (52)$$

Y análogamente

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (53)$$

Lo anterior representa seis ecuaciones para las seis componentes del tensor deformación, de tal forma que ellas serán compatibles con el campo de desplazamiento.

1-10. Vector deformación y su relación con el tensor deformación.

Considérese la figura N° 9,

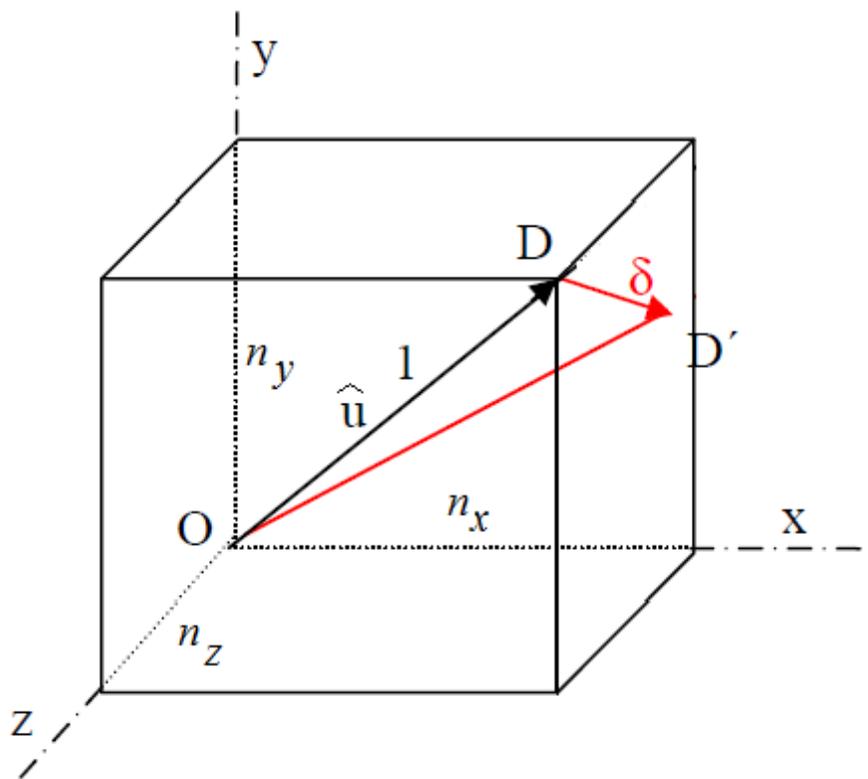
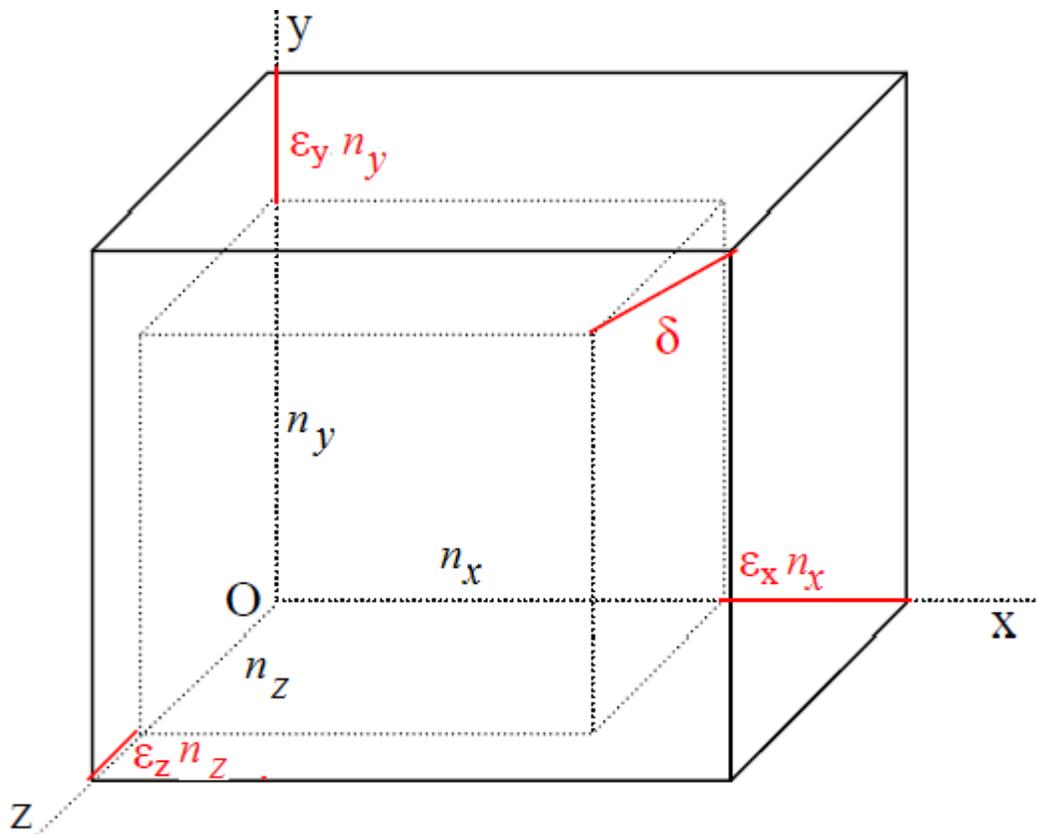
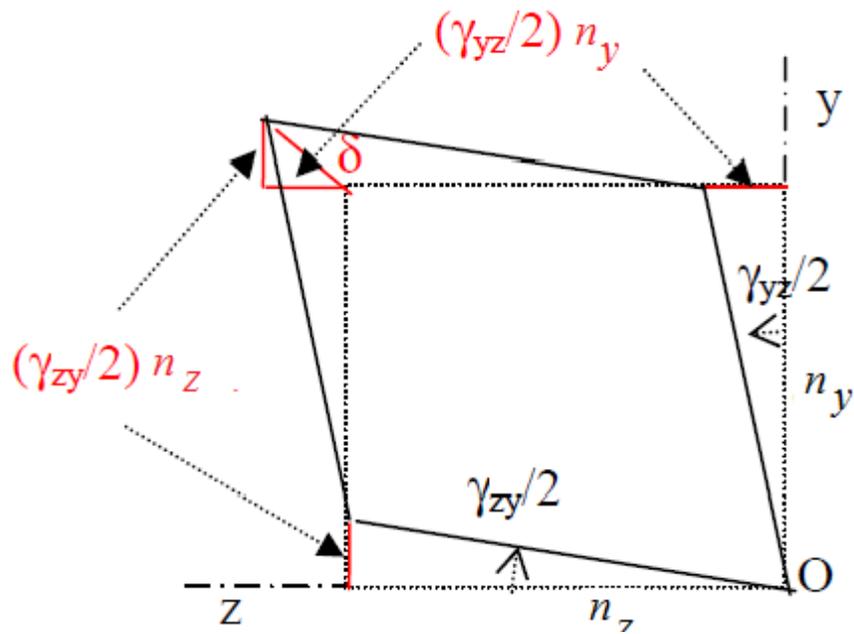
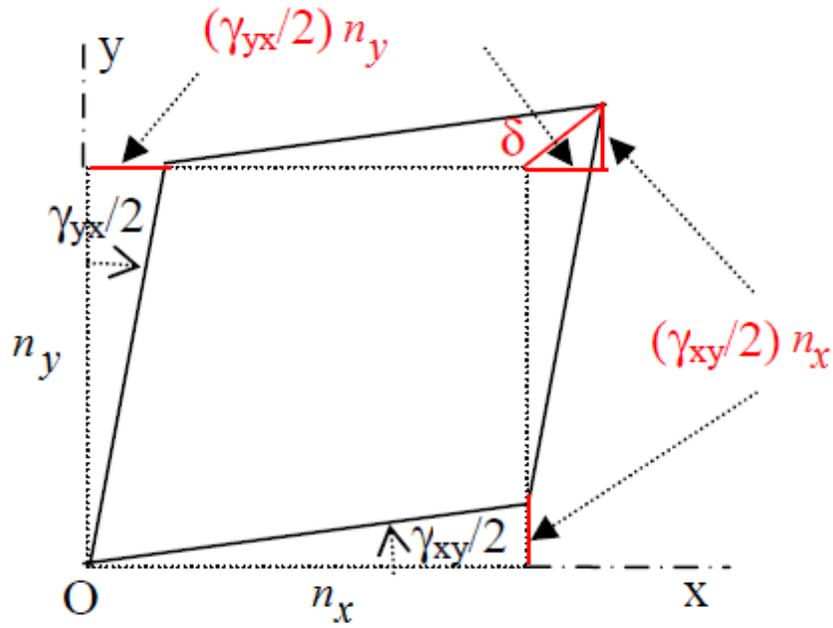


Figura N° 9. Vector deformación de un segmento de línea unitaria.

Conforme a lo indicado por la ecuación N° (6), el desplazamiento relativo entre dos puntos, en el contexto de este tema, está asociado al cambio de longitud y de orientación del segmento de línea que une dichos puntos. En el caso de la figura, se ha elegido un paralelepípedo cuya diagonal OD es de longitud unidad. El punto O puede o no desplazarse. En cualquier caso, el vector δ corresponde al desplazamiento relativo de D con respecto a O , y representa lo que se denomina *vector deformación unitaria* (porque la longitud inicial es unitaria) de la diagonal OD .

Para obtener este vector, supóngase conocidas las deformaciones longitudinales unitarias ϵ_x , ϵ_y y ϵ_z en las direcciones de los ejes x , y y z , y las deformaciones angulares unitarias γ_{xy} , γ_{yz} y γ_{zx} correspondientes a los cambios de ángulo entre las líneas xy , yz y zx , respectivamente. Cada una de las deformaciones anteriores se ilustran en forma separada en la figura N° 10. (Nota: si la diagonal es unitaria, las longitudes iniciales de los lados del paralelepípedo son n_x , n_y y n_z , respectivamente, y el cambio de longitud de cada línea es su longitud inicial por la deformación longitudinal unitaria.) (Adicionalmente es importante recalcar que las direcciones que se han seleccionado para las componentes del tensor deformación son ortogonales entre sí.)





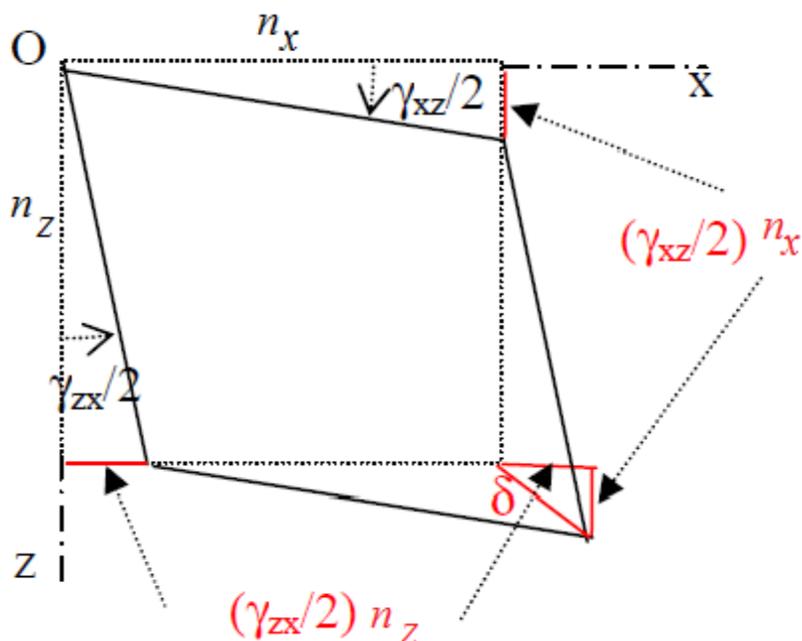


Figura N° 10. Deformaciones longitudinales y angulares unitarias.

Aplicando superposición se obtienen las componentes cartesianas δ_x , δ_y y δ_z del vector deformación, en función de las componentes del tensor deformación y de la orientación de la diagonal.

$$\begin{aligned}
 \delta_x &= \epsilon_x n_x + \frac{\gamma_{xy}}{2} n_y + \frac{\gamma_{xz}}{2} n_z \\
 \delta_y &= \frac{\gamma_{yx}}{2} n_x + \epsilon_y n_y + \frac{\gamma_{yz}}{2} n_z \\
 \delta_z &= \frac{\gamma_{zx}}{2} n_x + \frac{\gamma_{zy}}{2} n_y + \epsilon_z n_z
 \end{aligned} \tag{54}$$

La ecuación anterior puede escribirse

$$\begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \epsilon_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \tag{55}$$

La ecuación (55) permite, conocido el tensor deformación correspondiente a tres direcciones ortogonales trazadas por un punto, calcular las componentes cartesianas del vector deformación en cualquier dirección que se trace por ese punto, conforme a lo indicado anteriormente en las ecuaciones (27) y (28).

Conforme a la figura N° 9, la operación

$$\epsilon_n = \delta \cdot \mathbf{u} \quad (56)$$

da la magnitud de la deformación longitudinal unitaria del segmento de línea dirigido sobre la recta soporte del vector \mathbf{u} . La expresión

$$\epsilon_n = \epsilon_n \mathbf{u} \quad (57)$$

da la deformación longitudinal unitaria expresada vectorialmente. Y

$$\frac{\gamma}{2} = \delta - \epsilon_n \quad (58)$$
$$\frac{\gamma}{2} = \sqrt{(\delta^2 - \epsilon_n^2)}$$

expresan la deformación angular unitaria en forma vectorial y su magnitud.

1-11. Direcciones Principales

La ecuación N° (56) indica que conocido el vector deformación correspondiente a una dirección, trazada por un punto, puede calcularse la deformación longitudinal, mediante la multiplicación escalar de dicho vector deformación por el vector unitario que lleva por recta soporte la referida dirección trazada por el punto. (Por ejemplo, en la figura N° (11), en la dirección u_1 trazada por el punto O, el vector deformación es δ_1 , y el vector unitario sobre la recta soporte es \mathbf{u}_1/u_1). Esto a su vez informa que el vector deformación no es necesariamente paralelo a la dirección en la cual se quiere determinar la deformación. Esto sugiere la pregunta, ¿existirá una dirección trazada por el punto en que el vector deformación sea paralelo a esa dirección? En otras palabras, ¿existirá una dirección en la cual el vector deformación solo tenga componente longitudinal?

La respuesta se obtiene mediante la primera de las ecuaciones (58) al igualarla a cero, es decir, buscar la dirección en la cual la deformación angular sea cero.

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{y}}{2} = \boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\epsilon}_n &= \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \epsilon_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \epsilon_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (59)$$

Definiendo la cantidad escalar

$$\epsilon_P = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \epsilon_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \quad (60)$$

La ecuación N° (59)

$$\frac{\mathbf{y}}{2} = \boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\epsilon}_n = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \epsilon_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} - \epsilon_P \mathbf{I} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x - \epsilon_P & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_y - \epsilon_P & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \epsilon_z - \epsilon_P \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = 0 \quad (61)$$

Siendo \mathbf{I} el tensor identidad.

La solución no trivial de la ecuación N° (61) corresponde al caso en el cual el determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} \epsilon_x - \epsilon_P & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_y - \epsilon_P & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \epsilon_z - \epsilon_P \end{vmatrix} = 0 \quad (62)$$

Cuyo desarrollo conduce a la ecuación

$$\epsilon_p^3 - I_1 \epsilon_p^2 + I_2 \epsilon_p - I_3 = 0 \quad (63)$$

Con

$$I_1 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

$$I_2 = \epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_y \epsilon_z + \epsilon_z \epsilon_x - \frac{\gamma_{xy}^2}{4} - \frac{\gamma_{yz}^2}{4} - \frac{\gamma_{zx}^2}{4}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \epsilon_z \end{vmatrix} \quad (64)$$

que se llaman *Invariantes del Tensor Deformación*, debido a que sus valores son independientes del sistema de referencia que se seleccione para obtener las componentes del tensor, es decir, para cada sistema de referencia con respecto al cual se hallen las componentes del tensor deformación en el entorno de un punto de un sólido, éstas podrán tener valores diferentes, pero para todos los sistemas de referencia deben tener las mismas las invariantes.

El problema a resolver es uno de valores propios o autovalores. En este caso la ecuación cúbica tiene tres raíces, que son reales puesto que el tensor es simétrico, (que corresponden a los autovalores), que suelen llamarse ϵ_1 , ϵ_2 y ϵ_3 y son las magnitudes de tres vectores deformación cada uno de ellos perpendiculares entre sí, los cuales universalmente se ordenan $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \epsilon_3$. Por cada autovalor existe un autovector, por lo tanto se tendrán tres autovectores n_1 , n_2 y n_3 . Cada autovector representa la orientación de una línea que es la recta soporte de una deformación longitudinal unitaria cuya magnitud es el autovalor correspondiente y en esas direcciones no hay deformaciones angulares. A los autovalores se los llama *deformaciones longitudinales unitarias principales* y a los autovectores, *direcciones principales*.

En el caso particular que las componentes del tensor deformación se calculasen en las direcciones principales, su representación sería

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \quad (65)$$

1-12. Ilustración del significado de las deformaciones en el entorno de un punto en diferentes direcciones

La figura N° 11 expresa lo siguiente: Por un punto O se han trazado tres direcciones diferentes. En cada dirección hay en forma general vectores de deformación diferentes. Debido a ello, en cada dirección hay deformaciones longitudinales y angulares diferentes. La utilidad del tensor de deformación es que conociendo las deformaciones longitudinales y angulares unitarias **en tres direcciones ortogonales** trazadas por un punto, permite, estableciendo la orientación de una recta arbitraria trazada por dicho punto, calcular las magnitudes de las deformaciones longitudinales y angulares asociadas a esa dirección. El conjunto de todas las deformaciones de las infinitas direcciones que pueden trazarse por el punto, es lo que se denomina *estado de deformación en el entorno del punto*.

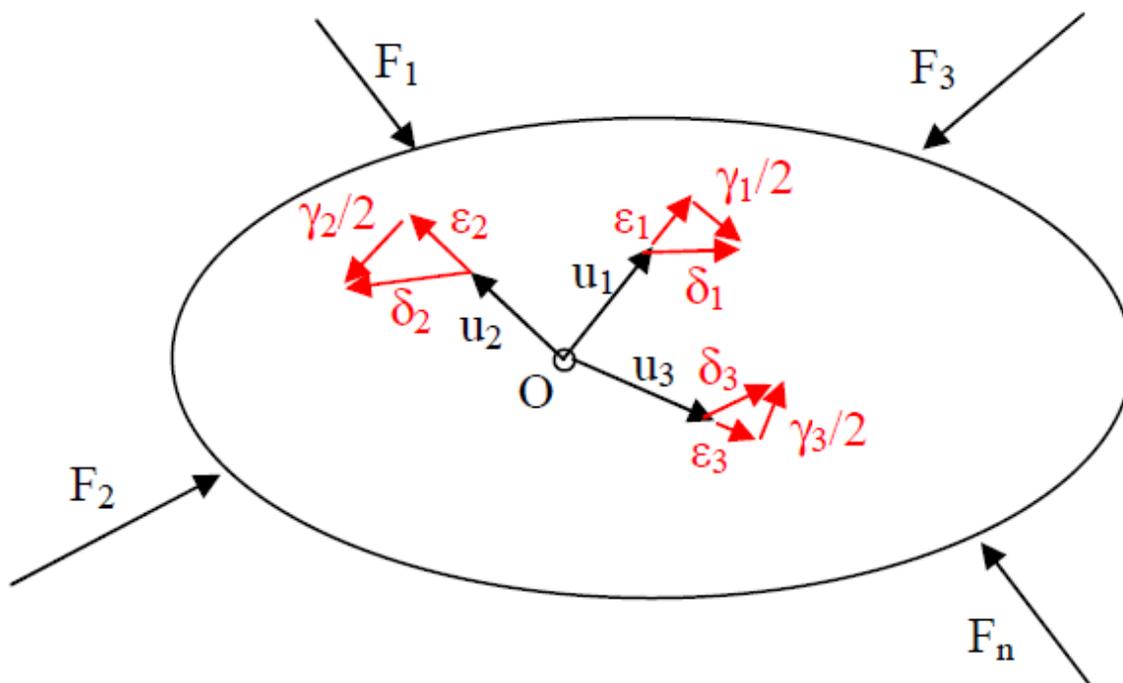


Figura N° 11. Diferentes deformaciones asociadas a diferentes orientaciones trazadas por un punto.

1-12. Círculo de Mohr de las deformaciones

Si se expresa el vector de deformación en función de las deformaciones principales se tiene

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 n_x \\ \epsilon_2 n_y \\ \epsilon_3 n_z \end{pmatrix} \quad (66)$$

De acuerdo a lo anterior, el cuadrado del módulo del vector deformación es

$$|\boldsymbol{\delta}|^2 = \delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2 = (\epsilon_1 n_x)^2 + (\epsilon_2 n_y)^2 + (\epsilon_3 n_z)^2 \quad (67)$$

Por el Teorema de Pitágoras

$$|\boldsymbol{\delta}|^2 = |\boldsymbol{\epsilon}_n|^2 + \left| \frac{\boldsymbol{y}}{2} \right|^2 \quad (68)$$

Los términos del miembro de la derecha corresponden a la suma de las magnitudes de dos vectores ortogonales.

La componente longitudinal de la deformación puede obtenerse mediante

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 n_x \\ \epsilon_2 n_y \\ \epsilon_3 n_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \\ &= \epsilon_1 (n_x)^2 + \epsilon_2 (n_y)^2 + \epsilon_3 (n_z)^2 \end{aligned} \quad (69)$$

Lo cual, conjuntamente con la condición

$$(n_x)^2 + (n_y)^2 + (n_z)^2 = 1 \quad (70)$$

conduce a un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, cuyo resultado es

$$\begin{aligned}
 n_x^2 &= \frac{\left(\delta \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} - \frac{\epsilon_2 + \epsilon_3}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 - \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_3}{2} \right)^2}{(\epsilon_1 - \epsilon_2)(\epsilon_1 - \epsilon_3)} \\
 n_y^2 &= \frac{\left(\delta \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} - \frac{\epsilon_3 + \epsilon_1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 - \left(\frac{\epsilon_3 - \epsilon_1}{2} \right)^2}{(\epsilon_2 - \epsilon_3)(\epsilon_2 - \epsilon_1)} \\
 n_z^2 &= \frac{\left(\delta \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} - \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 - \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2} \right)^2}{(\epsilon_3 - \epsilon_1)(\epsilon_3 - \epsilon_2)}
 \end{aligned} \tag{71}$$

Como los cosenos directores son números reales, se requiere

$$n_x^2 \geq 0; n_y^2 \geq 0; n_z^2 \geq 0; \tag{72}$$

Y debido a que se ordenan $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \epsilon_3$, (estudiando el signo de los denominadores de las ecuaciones anteriores), se tiene

$$\begin{aligned}
 & \left(\delta \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} - \frac{\epsilon_2 + \epsilon_3}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 \geq \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_3}{2} \right)^2 \\
 & \left(\delta \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} - \frac{\epsilon_3 + \epsilon_1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 \leq \left(\frac{\epsilon_3 - \epsilon_1}{2} \right)^2 \\
 & \left(\delta \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} - \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 \geq \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2} \right)^2
 \end{aligned} \tag{73}$$

Definiendo

$$\begin{aligned}
 \epsilon &= \delta \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \\
 C_1 &= \frac{\epsilon_2 + \epsilon_3}{2}; \quad R_1 = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_3}{2} \\
 C_2 &= \frac{\epsilon_3 + \epsilon_1}{2}; \quad R_2 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_3}{2} \\
 C_3 &= \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}; \quad R_3 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2}
 \end{aligned} \tag{74}$$

Las ecuaciones (73) se reescriben

$$\begin{aligned}
 (\epsilon - C_1)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 &\geq R_1^2 \\
 (\epsilon - C_2)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 &\leq R_2^2 \\
 (\epsilon - C_3)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 &\geq R_3^2
 \end{aligned}
 \tag{75}$$

Siendo ϵ y γ las componentes longitudinal y angular del vector deformación de la línea de cosenos directores n_x, n_y, n_z .

Estas tres desigualdades representadas gráficamente se muestran en la figura N° 12. Las circunferencias representan el caso en que las ecuaciones toman el valor de la igualdad. Las circunferencias tienen los centros en las abscisas C_1, C_2 y C_3 y sus respectivos radios son R_1, R_2 y R_3 .

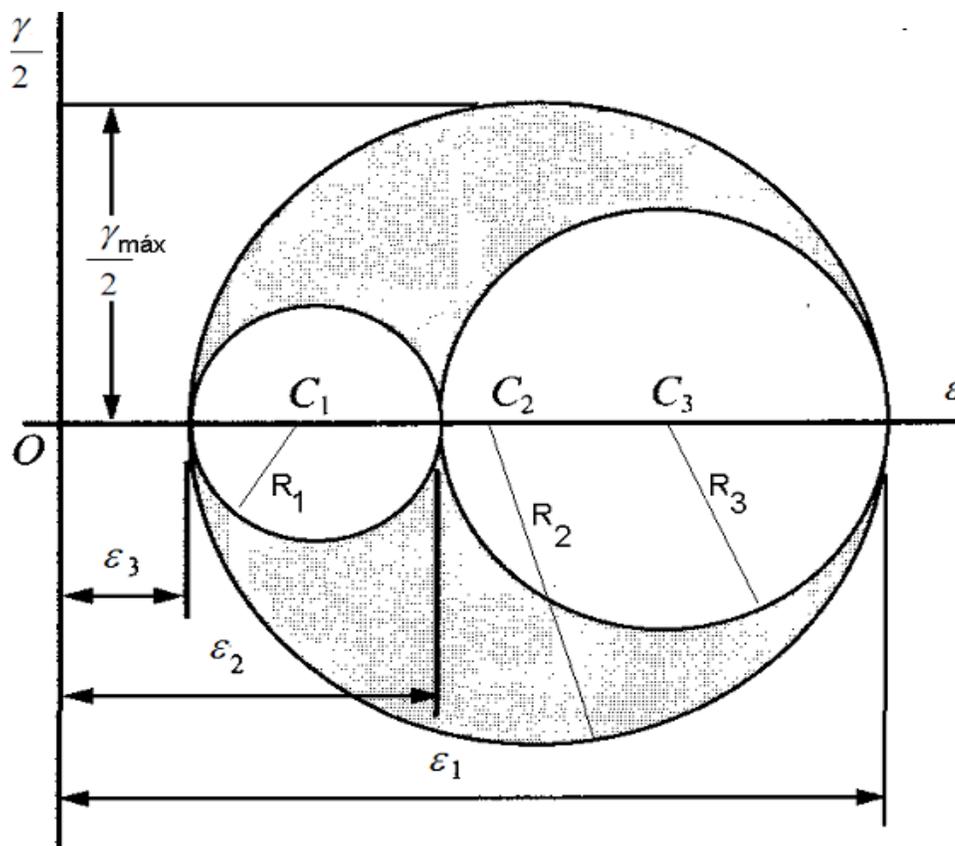


Figura N° 12. Círculo de Mohr de las deformaciones.

Como puede verse, en el eje de las abscisas se representan las magnitudes de las componentes

longitudinales de los vectores deformación, mientras que en el eje de las ordenadas, la mitad de las magnitudes de las deformaciones angulares.

La zona sombreada representa el lugar geométrico de todas las posibles parejas de componentes longitudinales y componentes angulares de los vectores deformación asociados a las infinitas direcciones que se pueden hacer pasar por un punto al cual pertenece el tensor deformación.

Adicionalmente debe indicarse que en el referido punto los valores extremos de las componentes longitudinales son ϵ_1 y ϵ_3 . Y la componente angular máxima tiene por magnitud $(\epsilon_1 - \epsilon_3)/2$ y actúa en una dirección que está rotada 45° respecto a las direcciones principales.

1-13. Deformación Plana

Una condición particular es la deformación plana que se define por la condición

$$\epsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0 \quad (76)$$

Esto conduce a un tensor deformación de la forma siguiente

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_y \end{bmatrix} \quad (77)$$

Y la componente longitudinal de la deformación en una dirección cualquiera es

$$\epsilon_{\hat{n}} = \delta \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \epsilon_x n_x^2 + \epsilon_y n_y^2 + \gamma_{xy} n_x n_y \quad (78)$$

La cual se conoce como *ecuación de transformación de la deformación longitudinal unitaria plana*. Esta ecuación indica que la deformación longitudinal unitaria en una dirección establecida por el vector unitario $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$, puede calcularse conociendo las componentes del tensor deformación y las componentes cartesianas del referido vector \mathbf{n} . Nótese que las componentes tanto del vector como del tensor deben ser calculadas con respecto al mismo sistema de referencia.

La condición de la deformación plana se muestra en la figura N° 13

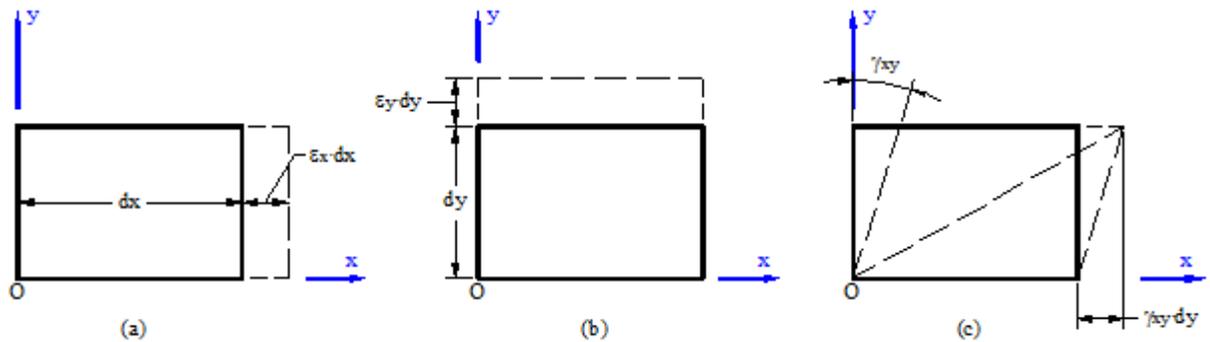
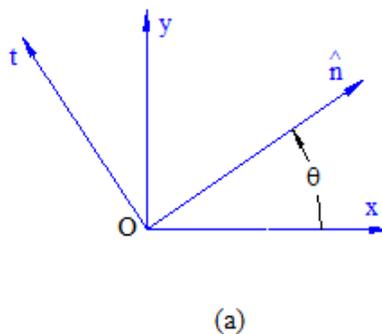


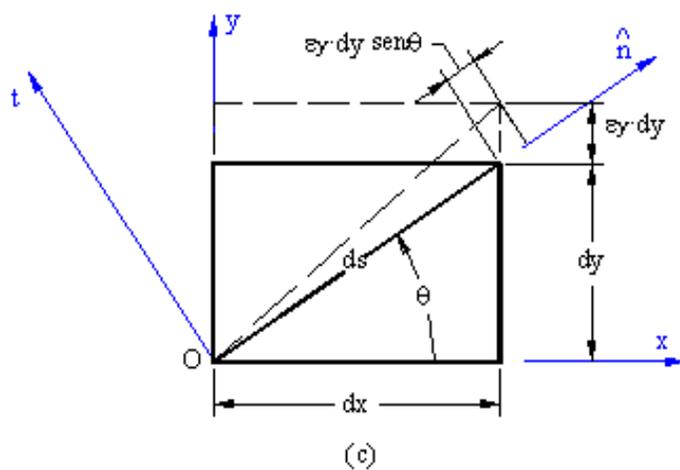
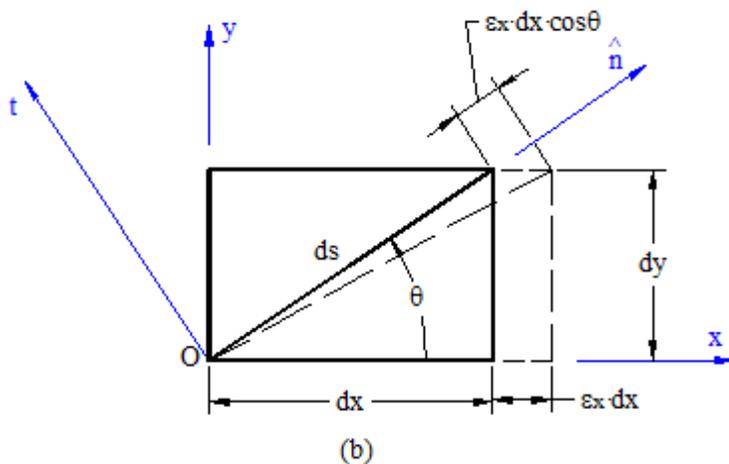
Figura N° 13. Representación de la deformación plana.

1-15. Ecuaciones de transformación de la deformación para el estado de deformación plano.

A continuación se obtendrán un par de ecuaciones, denominadas ecuaciones de transformación de la deformación unitaria plana, que permitirán determinar los valores de las deformación longitudinal unitaria y angular para cualquier par de direcciones ortogonales arbitrarias, a partir del conocimiento de dichas deformaciones en dos direcciones ortogonales. Para su obtención, se utilizarán los ejes coordenados mostrados en la figura N° 14a. Se supondrán conocidas las deformaciones longitudinales unitarias ϵ_x y ϵ_y y la deformación angular γ_{xy} asociadas con los ejes x y y . El objetivo del análisis es determinar la deformación longitudinal unitaria ϵ_n y la deformación angular γ_{nt} asociadas a los ejes n y t los cuales están girados en sentido antihorario un ángulo θ a partir de los ejes xy .

En la figura N° 14b, 14c y 14d, se muestra un elemento infinitesimal bajo un estado de deformación plano donde se representan las deformaciones longitudinales y la rotación de la línea diagonal.





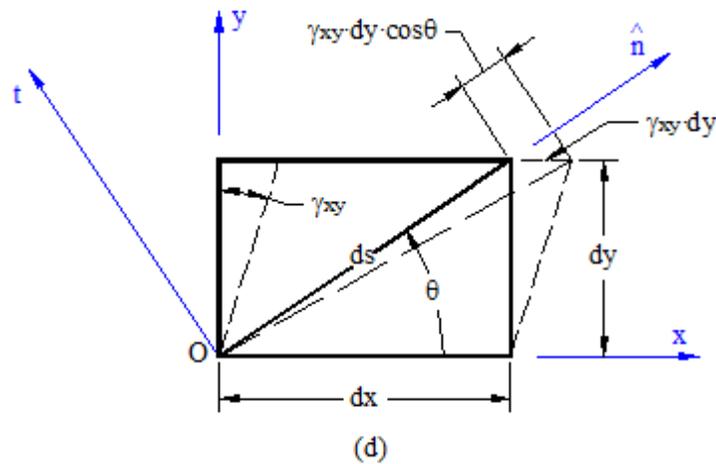


Figura N° 14. Deformación longitudinal y angular de la diagonal de un elemento infinitesimal plano

La diagonal del rectángulo está en la dirección del eje n , y los lados tienen longitudes dx y dy . Las deformaciones ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy} producen un alargamiento del elemento en la dirección x igual a $\epsilon_x dx$ (figura N° 14b), un alargamiento en la dirección y igual a $\epsilon_y dy$ (figura N° 14c) y una disminución en el ángulo entre las caras x y y igual a γ_{xy} (figura N° 14d), respectivamente. Estas deformaciones provocan que la diagonal se incremente en cantidades $e_x dx \cos \theta$, $e_y dy \sin \theta$ y $\gamma_{xy} dy \cos \theta$ respectivamente. El incremento total en la longitud de la diagonal es la suma de estas tres expresiones:

$$\Delta d = e_x dx \cos \theta + e_y dy \sin \theta + \gamma_{xy} dy \cos \theta \quad (79)$$

Al dividir entre la longitud inicial ds , observando que $dx = ds \cos \theta$ y $dy = ds \sin \theta$, se obtiene la deformación longitudinal unitaria de la diagonal

$$\epsilon_n = \epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \cos \theta \sin \theta \quad (80)$$

Que en función del ángulo doble se transforma en

$$\epsilon_n = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \quad (81)$$

La deformación unitaria en una dirección perpendicular a la diagonal puede obtenerse sustituyendo $\theta = \theta + \pi/2$.

$$\epsilon_{n+\pi/2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sen 2\theta \quad (82)$$

El ángulo θ se sustituye con valor positivo cuando es anti-horario respecto al eje x.

Con respecto a la deformación angular, la diagonal del elemento de la figura N° 14, experimenta una rotación

$$d\theta_n = \frac{-\epsilon_x dx \sen \theta}{ds} + \frac{\epsilon_y dy \cos \theta}{ds} - \frac{\gamma_{xy} dy \sen \theta}{ds} \quad (83)$$

En la cual, observando nuevamente que $dx = ds \cos \theta$ y $dy = ds \sen \theta$, se obtiene

$$d\theta_n = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sen \theta \cos \theta - \gamma_{xy} \sen^2 \theta \quad (84)$$

La recta perpendicular a la diagonal experimenta un rotación dada por la ecuación N° (84) con la sustitución $\theta = \theta + \pi/2$

$$d\theta_t = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sen \theta \cos \theta + \gamma_{xy} \cos^2 \theta \quad (85)$$

La suma de las ecuaciones (84) y (85) corresponde al cambio de ángulo entre dos rectas inicialmente ortogonales, en este caso en las direcciones n y t , por lo que la deformación angular viene dada por

$$\frac{\gamma_{nt}}{2} = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sen \theta \cos \theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} (\cos^2 \theta - \sen^2 \theta) \quad (86)$$

que en función del ángulo doble se transforma

$$\gamma_{nt} = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sen 2\theta + \gamma_{xy} \cos 2\theta \quad (87)$$

1-16. Círculo de Mohr para deformación plana.

Las dos ecuaciones básicas para la transformación de deformaciones, se combinan mediante el siguiente procedimiento

$$\epsilon_n - \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} = \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\frac{\gamma_{nt}}{2} = -\frac{(\epsilon_x - \epsilon_y)}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta$$
(88)

Sumando los cuadrados de las dos últimas ecuaciones

$$\left(\epsilon_n - \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{nt}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen} 2\theta\right)^2$$

$$+ \left(-\frac{(\epsilon_x - \epsilon_y)}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta\right)^2$$
(89)

Que desarrollando se reduce a

$$\left(\epsilon_n - \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{nt}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2$$
(90)

Que corresponde a la ecuación de una circunferencia respecto a un sistema de referencia donde en el eje de las abscisas se representan a los valores de las deformaciones longitudinales unitarias y el eje de ordenadas la mitad de las deformaciones angulares. La circunferencia tiene su centro en la abscisa $(\epsilon_x + \epsilon_y)/2$ y tiene por radio $\sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y/2)^2 + (\gamma_{xy}/2)^2}$.

1-17.- Construcción del Círculo de Mohr para el estado de deformación plano.

Para la construcción del Círculo de Mohr se establece el sistema de referencia con el eje de las abscisas para las deformaciones longitudinales unitarias (ϵ) y al eje de las ordenadas para la mitad del valor de las deformaciones angulares ($\gamma_{xy}/2$). Las deformaciones longitudinales unitarias positivas (alargamientos) se ubicarán en las abscisas a la derecha del origen de coordenadas mientras que las deformaciones negativas (acortamientos) se ubicarán a la izquierda. Por otra parte, las deformaciones angulares llevarán a que una de las direcciones asociadas al punto rote en sentido horario y la otra dirección, inicialmente perpendicular a la primera, rote en sentido anti-horario. En consecuencia, se dibujará por encima del eje de abscisas las deformaciones angulares horarias y por debajo del eje de abscisas las deformaciones angulares antihorarias.

Para indicar como se construye el Círculo de Mohr para un estado de deformación plano, considérese que los valores ϵ_x , ϵ_y y γ_{xy} sobre el entorno un punto cualquiera O del sólido, corresponden a la representación que sobre un elemento infinitesimal de dimensiones dx y dy , se muestra en la figura N° 15. En la representación gráfica se ha supuesto que tanto ϵ_x como ϵ_y son alargamientos, mientras que γ_{xy} corresponde a un giro antihorario y γ_{yx} es un giro horario. Adicionalmente se está suponiendo que $\epsilon_x > \epsilon_y$.

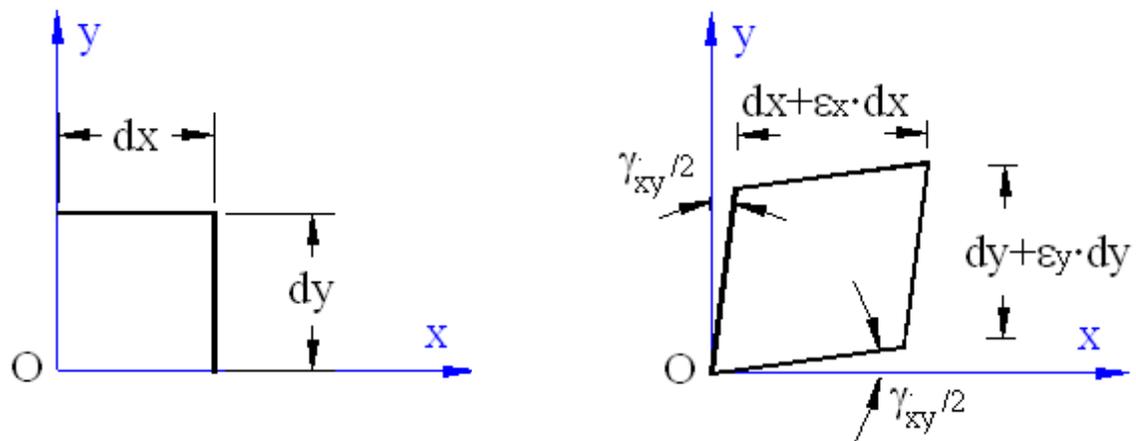


Figura N° 15. Representación de un elemento plano no deformado y deformado.

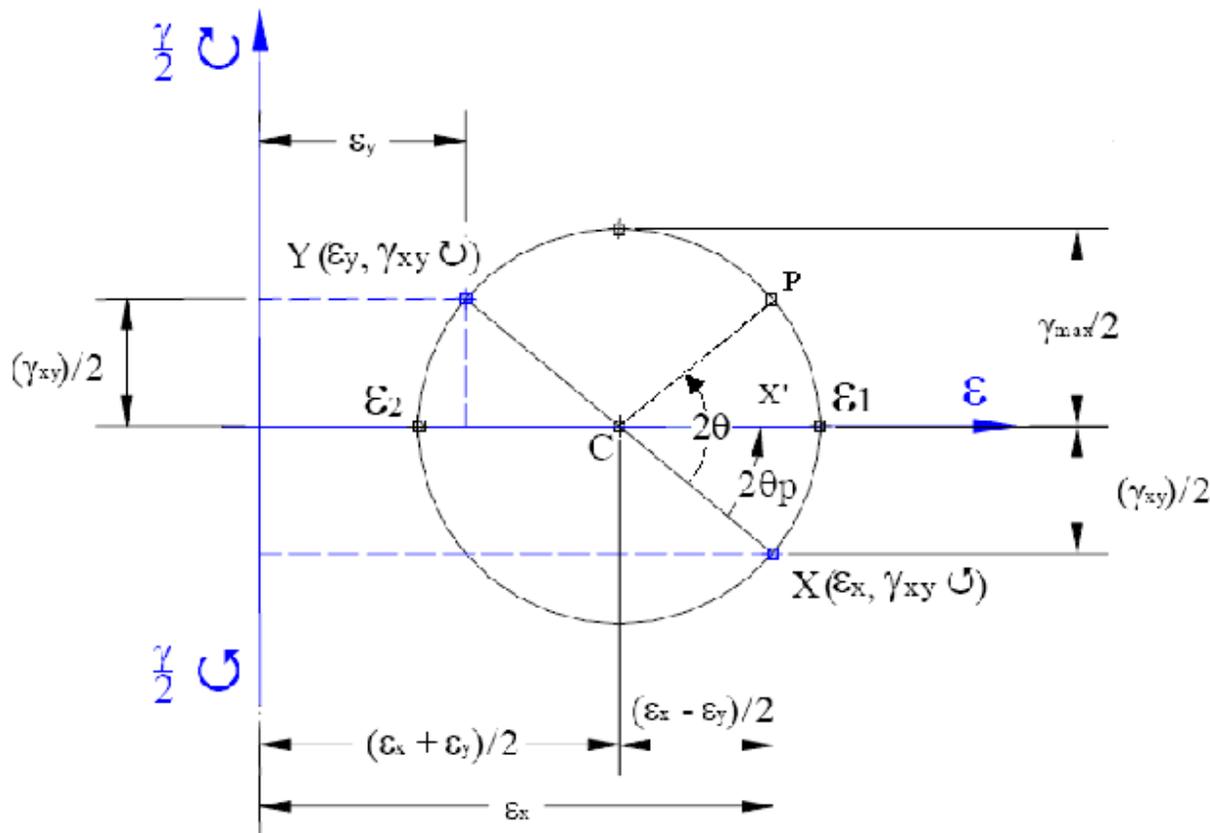


Figura N° 16. Círculo de Mohr Genérico.

Primero se dibujan los dos ejes de coordenadas $\epsilon - \gamma/2$. Luego se dibuja sobre el plano cartesiano el punto X de coordenadas $(\epsilon_x, \gamma_{xy}/2)$, el cual se ubica dependiendo de los signos de la deformación longitudinal y del sentido de la deformación angular. En el caso dibujado se ha supuesto la deformación longitudinal unitaria ϵ_x positiva y la deformación angular γ_{xy} antihoraria. Luego, suponiendo $\epsilon_x > \epsilon_y > 0$ se dibuja sobre en el plano cartesiano el punto Y de coordenadas $(\epsilon_y, \gamma_{yx}/2)$, también a la derecha del eje de ordenadas y por encima del eje de abscisas, puesto que se ha supuesto también alargamiento en la dirección y, y rotación horaria. Se unen los puntos X y Y con una línea recta. Esto define el punto C que es la intersección de la línea XY con el eje de abscisas y representa el centro C de la circunferencia y de diámetro XY.

Los puntos ϵ_1 y ϵ_2 , en donde la circunferencia corta el eje horizontal, corresponden a las deformaciones longitudinales unitarias principales en el punto considerado, las cuales se hallan como:

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= C + R \\ \epsilon_2 &= C - R\end{aligned}\tag{91}$$

El valor correspondiente $2\theta_p$ se obtiene del triángulo $\Delta CXX'$:

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}\tag{92}$$

La deformación angular máxima es igual al diámetro del círculo de Mohr.

$$\gamma_{max} = 2R = 2\sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}\tag{93}$$

Finalmente, para determinar la deformación longitudinal unitaria y tangencial en una dirección rotada un ángulo θ con respecto a la dirección x de los ejes coordenados, se rotará el radio CX del círculo de Mohr, en el mismo sentido, un ángulo 2θ . Las coordenadas del punto P sobre el círculo de Mohr definirán las componentes de la deformación correspondientes.

1-18. Medición Experimental de la Deformación. Roseta de Deformación.

El método para medir las deformaciones longitudinales está basado en dispositivos eléctricos, llamados galgas de deformación. Un medidor típico consta de una longitud de alambre delgado, dispuesto como en la figura N° 17, adherido a láminas delgadas de papel. Para medir la deformación ϵ_n en un punto de la superficie de un sólido dado en la dirección n , la galga se pega sobre ese punto con las espiras del alambre paralela a n .

Cuando el material se alarga el alambre aumenta en la longitud y disminuye en diámetro, haciendo que la resistencia eléctrica del medidor cambie. Midiendo la corriente que pasa a través de la galga con un medidor calibrado, la deformación longitudinal unitaria ϵ_n puede determinarse precisa y continuamente a medida que la carga aumenta.

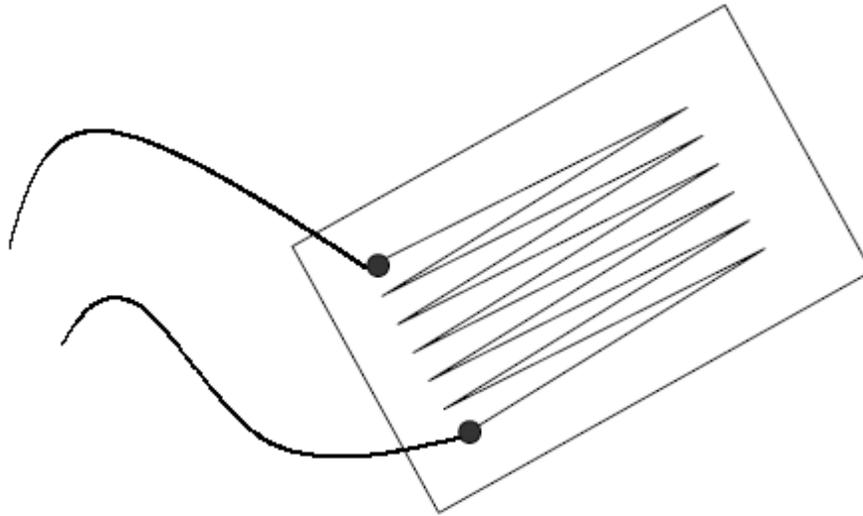


Figura N° 17. Galga de deformación.

También, las componentes ϵ_x , ϵ_y y γ_{xy} en el entorno de un punto dado pueden obtenerse de la medida de la deformación longitudinal unitaria hecha a lo largo de tres líneas dibujadas por ese punto (ver figura N° 18). Designando respectivamente por θ_1 , θ_2 y θ_3 el ángulo que cada una de las líneas forma con el eje x , y por ϵ_{n1} , ϵ_{n2} y ϵ_{n3} las medidas de las deformaciones correspondientes y reemplazando sucesivamente en la ecuación de transformación (78), se tienen las siguientes tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{aligned}\epsilon_{n1} &= \epsilon_x \cos^2 \theta_1 + \epsilon_y \operatorname{sen}^2 \theta_1 + \gamma_{xy} \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_1 \\ \epsilon_{n2} &= \epsilon_x \cos^2 \theta_2 + \epsilon_y \operatorname{sen}^2 \theta_2 + \gamma_{xy} \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_2 \\ \epsilon_{n3} &= \epsilon_x \cos^2 \theta_3 + \epsilon_y \operatorname{sen}^2 \theta_3 + \gamma_{xy} \operatorname{sen} \theta_3 \cos \theta_3\end{aligned}\tag{94}$$

que deben resolverse simultáneamente para ϵ_x , ϵ_y y γ_{xy} .

La unión de las galgas utilizadas para medir las tres deformaciones longitudinales unitarias ϵ_{n1} , ϵ_{n2} y ϵ_{n3} se conoce como roseta de deformación. Las rosetas usadas para medir deformaciones longitudinales unitarias a lo largo de los ejes x , y y su bisector se conoce como roseta de 45°. Otra roseta muy usada es la de 60°.

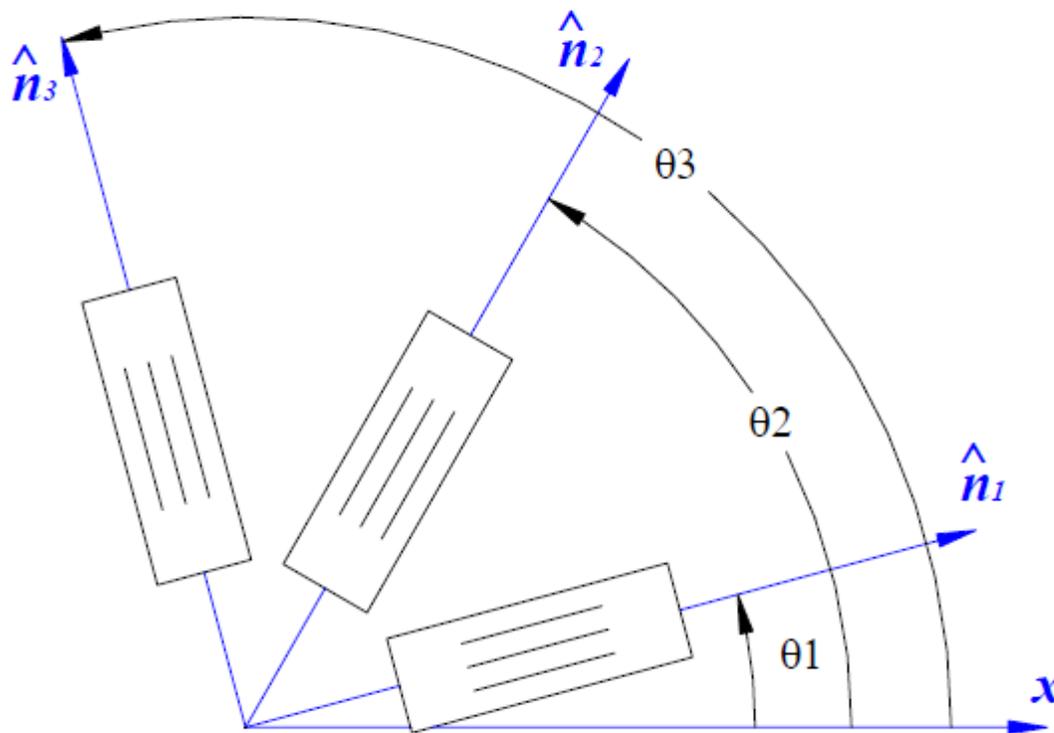


Figura N° 18. Roseta de Deformación.

Bibliografía

Fox, E. A. (1967) *Mechanics*. Harper & Row Publishers. New York.

Domingo S., Jaime S. (2008) Tema 2: Deformaciones. E.P.S.-Zamora (U.SAL.).

<http://ocw.usal.es/enseanzas-tecnicas/resistencia-de-materiales-ingeniero-tecnico-en-obras-publicas/contenidos/Tema2-Deformaciones.pdf>