

TEMA 1

APLICACIÓN DEL MÉTODO DE HOLZER - VAN DEN DUGEN EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CARGA AXIAL DE LA MECÁNICA DE SÓLIDOS.

1.- DESARROLLO DEL MÉTODO DE HOLZER – VAN DEN DUNGEN PARA PROBLEMAS UNIDIMENSIONALES.

Los problemas de carga axial en la mecánica de sólidos se modelan mediante líneas, donde los valores de la fuerza axial y del desplazamiento de una sección transversal solo dependen de lo que ocurre en puntos vecinos y a dichos valores los denominaremos variables de estado. Este tipo de problemas pueden estudiarse mediante matrices de transferencia, las cuales dependerán de la geometría asociada a cada línea y de las cargas en ellas contenidas.

Supongamos un sistema unidimensional como el mostrado en la figura N° 1.1. En este sistema existen cambios en la geometría y cargas aplicadas. Podemos dividir el sistema en elementos, los cuales tienen la característica de ser prismáticos (sección transversal constante), y los extremos de cada elemento conectados a lo que llamaremos nodos, que representan los planos donde comienzan y terminan los elementos. Esta primera consideración nos indica que debemos colocar nodos donde existan cambios en la geometría de la sección transversal y/o cambios de material y/o presencia de fuerzas axiales concentradas, para así cumplir con la condición antes dicha que los elementos deben ser prismáticos.

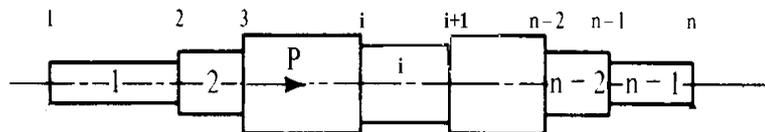


Figura N° 1.1. Sistema unidimensional bajo carga axial.

1.1.- MATRIZ DE TRANSFERENCIA PARA ELEMENTO UNIDIMENSIONAL.

Consideremos el elemento i entre los nodos i e $i+1$ en las condiciones inicial y final. Figura N° 1.2. La condición inicial representa la ubicación del elemento antes de la aplicación de las cargas en el sistema, y la condición final es la ubicación del elemento después de la aplicación de las cargas, por lo tanto se indican los desplazamientos de cada una de las secciones extremas respecto a su ubicación original y las fuerzas que ejercen sobre él los elementos a la izquierda ($i-1$) y a la derecha ($i+1$). (Desplazamientos hacia la derecha positivos y fuerzas saliendo del elemento positivas). Obsérvese que el eje X se considera positivo dirigido del nodo i hacia el nodo $i+1$.

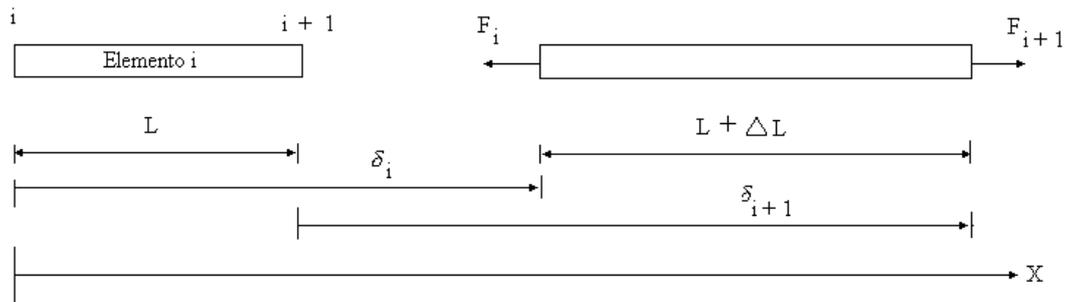


Figura N° 2. Elemento unidimensional en condición inicial indeformado (izquierda) y en condición final deformado (dercha).

La ecuación de equilibrio de fuerzas axiales indica que $F_{i+1} = F_i$. La ecuación que relaciona el desplazamiento de las secciones extremas del elemento es $\delta_{i+1} = \delta_i + \frac{F_i L_i}{E_i A_i}$.

Ecuaciones que pueden expresarse en forma matricial así:

$$\mathbf{z}_{i+1} = \mathbf{L}_i \mathbf{z}_i \quad (1)$$

con

$$\mathbf{L}_i = \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{EA} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{z}_i = \begin{bmatrix} \delta \\ F \\ 1 \end{bmatrix}_i \quad \mathbf{z}_{i+1} = \begin{bmatrix} \delta \\ F \\ 1 \end{bmatrix}_{i+1} \quad (2)$$

Donde se han agregado la tercera fila y la tercera columna por conveniencia computacional.

La ecuación indica que el vector de estado del nodo $i+1$ es el vector de estado del nodo i premultiplicado por la matriz cuadrada \mathbf{L}_i de 3×3 , la cual depende solo de las propiedades mecánicas y geométricas del elemento, que son generalmente conocidas. Esta matriz \mathbf{L} se denomina **matriz de transferencia para elemento unidimensional**. Para cada elemento del sistema de la figura N° 1.1, existe una matriz de transferencia.

Para varios elementos consecutivos, en los cuales no exista ninguna carga axial, puede repetirse el proceso anterior, obteniéndose expresiones de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{i+1} &= \mathbf{L}_i \mathbf{z}_i \\ \mathbf{z}_{i+2} &= \mathbf{L}_{i+1} \mathbf{z}_{i+1} = \mathbf{L}_{i+1} \mathbf{L}_i \mathbf{z}_i \\ \mathbf{z}_{i+3} &= \mathbf{L}_{i+2} \mathbf{z}_{i+2} = \mathbf{L}_{i+2} \mathbf{L}_{i+1} \mathbf{L}_i \mathbf{z}_i \end{aligned} \quad (3)$$

1.2.- MATRIZ DE CARGA AXIAL PUNTUAL.

Hasta ahora, el vector de estado es el mismo a la izquierda y a la derecha del nodo. Sin embargo, si el nodo tiene una carga concentrada P , esto cambia. La figura 1.3 muestra a un nodo que denominaremos j esta situación. Esta segunda condición nos ratifica que debemos colocar un nodo donde exista una carga concentrada.

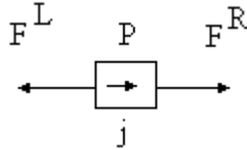


Figura N° 1.3. Nodo j con carga concentrada.

En este caso, los desplazamientos a la izquierda y a la derecha del nodo son iguales (el nodo se considera de dimensiones despreciables, por lo que no sufre cambio en sus dimensiones por la presencia de las cargas)

$$\delta^R = \delta^L \quad (4)$$

pero el equilibrio requiere:

$$F^R = F^L - P \quad (5)$$

que expresadas matricialmente son

$$\mathbf{z}^R = \mathbf{Q}_j \mathbf{z}^L \quad (6)$$

con

$$\mathbf{Q}_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -P \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_j \quad \mathbf{z}^R = \begin{bmatrix} \delta \\ F \\ 1 \end{bmatrix}_R \quad \mathbf{z}^L = \begin{bmatrix} \delta \\ F \\ 1 \end{bmatrix}_L \quad (7)$$

donde los superíndices L y R designan la situación a la izquierda y a la derecha del nodo j .

Denominándose \mathbf{Q}_j *matriz de carga axial puntual*. Por lo tanto la transferencia de la izquierda a la derecha a través de un nodo cargado se consigue premultiplicando por la matriz de carga axial puntual.

En este caso la ecuación se transforma en

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{L}_{n-1} \mathbf{L}_{n-2} \dots \mathbf{L}_j \mathbf{Q}_j \mathbf{L}_{j-1} \dots \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1 \mathbf{z}_1 \quad (8)$$

Este producto puede tomar en cuenta cualquier cantidad de cargas puntuales, mediante la presencia en el sistema de ecuaciones de todas las matrices puntuales.

Digamos:

$$A = Q_n L_{n-1} Q_{n-1} L_{n-2} \dots L_j Q_j L_{j-1} \dots Q_3 L_2 Q_2 L_1 Q_1 \quad (9)$$

sea una matriz cuadrada de 3×3 obtenida por la multiplicación de la cadena de matrices de 3×3

Por lo tanto la ecuación toma la forma

$$z_n = Az_1 \quad (10)$$

Las primeras dos ecuaciones del sistema de ecuaciones anterior tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \delta_n &= a_{11}\delta_1 + a_{12}F_1 \\ F_n &= a_{21}\delta_1 + a_{22}F_1 \end{aligned} \quad (11)$$

que corresponden a dos ecuaciones con cuatro incógnitas, que son las condiciones de los extremos δ_n , δ_l , F_n y F_l . Sin embargo, en la práctica siempre dos de estas condiciones se conocen. Si una barra tiene sus dos extremos fijos, los dos desplazamientos δ_n y δ_l son nulos. Si solo uno de los extremos está fijo, el desplazamiento correspondiente a él es nulo, y del otro extremo se conoce la carga aplicada. Por lo tanto el sistema de ecuaciones anterior permite conocer las otras dos incógnitas.

Esto significa que podemos solucionar problemas de carga axial con solo multiplicar cadenas de matrices de 3×3 y resolver el sistema de ecuaciones.

1.3.- MATRIZ DE TRANSFERENCIA PARA ELEMENTO CON CARGA DISTRIBUIDA CONTINUA.

En el caso de un elemento cargado con una carga axial distribuida de función continua a lo largo del mismo, como el mostrado en la figura N° 1.4, las ecuaciones se obtienen mediante la elaboración del diagrama de cuerpo libre de la figura N° 1.5. Esta tercera condición indica que al inicio y al final de la carga distribuida continua debe considerarse un nodo. En otras palabras, la presencia de una carga distribuida continua define un elemento.

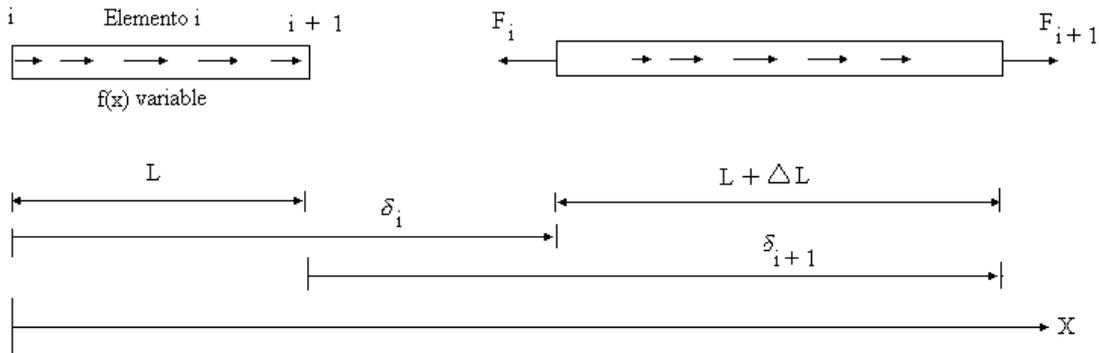


Figura N° 1.4. Elemento con carga axial distribuida.

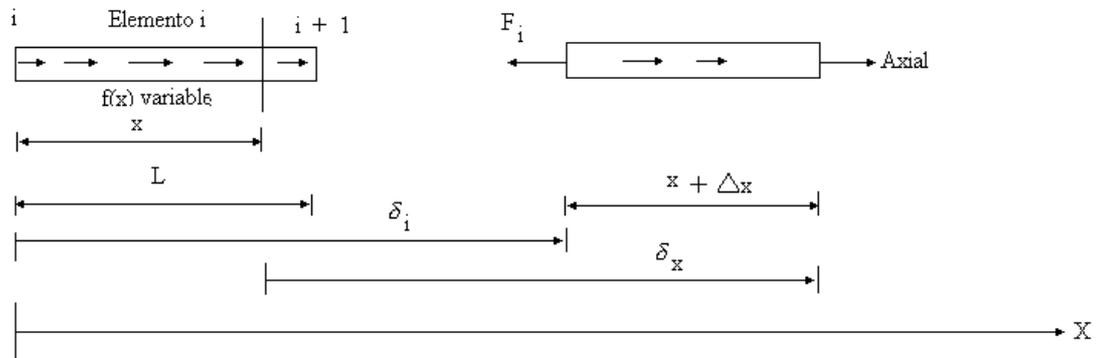


Figura N° 1.5. Diagrama de cuerpo libre de una fracción del elemento i .

De la figura N° 1.5 se obtienen la ecuación de equilibrio y la relación de desplazamientos para la fracción de elemento considerado.

$$Axial = F_i - \int_0^x f(x) dx$$

$$\delta_x = \delta_i + \frac{F_i x}{EA} - \int_0^x \frac{\int_0^x f(x) dx}{EA} dx \quad (12)$$

Para luego integrarse sobre todo el elemento, resultando

$$F_{i+1} = F_i - \int_0^{L_i} f(x) dx$$

$$\delta_{i+1} = \delta_i + \frac{F_i L_i}{EA} - \int_0^{L_i} \frac{\int_0^x f(x) dx}{EA} dx \quad (13)$$

Expresándolas en forma matricial:

$$\mathbf{z}_{i+1} = \mathbf{q}_i \mathbf{z}_i \quad (14)$$

con

$$\mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{EA} & - \int_0^{L_i} \frac{f(x)dx}{EA} \\ 0 & 1 & - \int_0^{L_i} f(x)dx \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \quad \mathbf{z}_i = \begin{bmatrix} \delta \\ F \\ 1 \end{bmatrix}_i \quad \mathbf{z}_{i+1} = \begin{bmatrix} \delta \\ F \\ 1 \end{bmatrix}_{i+1} \quad (15)$$

1.4.- EFECTOS TÉRMICOS.

Consideremos de nuevo el elemento típico de la figura N° 1.2. Si éste experimenta un cambio de temperatura ΔT_i , su longitud variará. Sabemos que este cambio de longitud viene dado por

$$\Delta L_i = \alpha_i L_i \Delta T_i \quad (16)$$

Aplicando superposición, tenemos que los desplazamientos de las dos secciones extremas del elemento se relacionan mediante la expresión

$$\delta_{i+1} = \delta_i + \frac{F_i L_i}{E_i A_i} + \alpha_i L_i \Delta T_i \quad (17)$$

Mientras que la ecuación de equilibrio se mantiene sin variación. Este conjunto de ecuaciones puede expresarse en forma matricial así

$$\mathbf{z}_{i+1} = \mathbf{L}_i \mathbf{z}_i \quad (18)$$

con

$$\mathbf{L}_i = \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{EA} & \alpha_i L_i \Delta T \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \quad \mathbf{z}_i = \begin{bmatrix} \delta \\ F \\ 1 \end{bmatrix}_i \quad \mathbf{z}_{i+1} = \begin{bmatrix} \delta \\ F \\ 1 \end{bmatrix}_{i+1} \quad (19)$$

Esto significa que si tenemos elementos con cambio de temperatura, en el conjunto del producto de matrices, ubicamos en dicho producto en la posición correcta esta matriz de transferencia por efectos térmicos.

Las matrices de transferencia de cargas puntuales no se ven afectadas por la presencia de los cambios térmicos.

En cambio, para elementos que están sometidos simultáneamente a la acción de cargas axiales distribuidas y cambio de temperatura, debemos obtener la matriz de transferencia para esta combinación. La figura N° 1.6 nos muestra un elemento en su condición inicial indeformado y en su condición final luego de la deformación por una carga distribuida y por efecto de un cambio de temperatura.

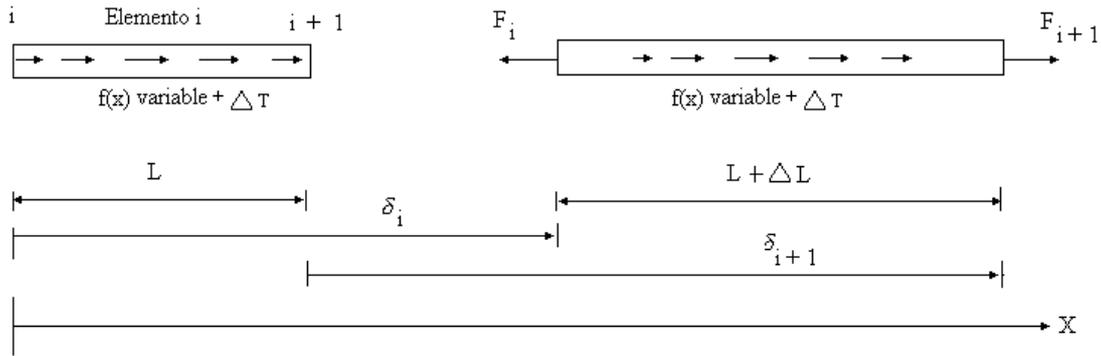


Figura N° 1.6. Elemento con carga axial distribuida y cambio de temperatura.

Las ecuaciones que relacionan las variables de estado al inicio y al final del elemento son

$$\begin{aligned}
 Axial &= F_i - \int_0^{L_i} f(x) dx \\
 \delta_x &= \delta_i + \frac{F_i L_i}{EA} - \int_0^{L_i} \frac{f(x) dx}{EA} + \alpha_i L_i \Delta T_i
 \end{aligned} \tag{20}$$

Y en forma matricial

$$\mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{EA} & - \int_0^{L_i} \frac{f(x) dx}{EA} + \alpha_i L_i \Delta T_i \\ 0 & 1 & - \int_0^{L_i} f(x) dx \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \quad \mathbf{z}_i = \begin{bmatrix} \delta \\ F \\ 1 \end{bmatrix}_i \quad \mathbf{z}_{i+1} = \begin{bmatrix} \delta \\ F \\ 1 \end{bmatrix}_{i+1} \tag{21}$$

Aquí es bueno notar que esta última matriz de transferencia puede utilizarse en forma genérica para cualquier tipo de elemento. Si el elemento no tiene carga y tampoco está sometido a cambio de temperatura, los dos primeros términos de la última columna son nulos. Lo cual corresponde a la matriz de transferencia del elemento sin carga. Si está sometido a carga distribuida sin cambio de temperatura, el término del efecto térmico

desaparece, obteniéndose la matriz de transferencia del elemento solicitado por carga distribuida. Y si solo está sometido a cambio de temperatura, los términos de carga externa son nulos, y se obtiene la matriz de transferencia para elemento con cambio de temperatura.

1.5.- EJEMPLOS

1.5.1.- Primer ejemplo.

Consideremos como primer ejemplo el caso de una barra fija en el extremo izquierdo y con dos cargas como se muestra en la figura N° 1.7.

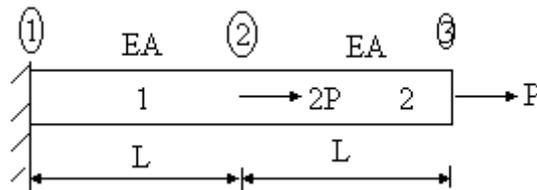


Figura N° 1.7. Barra solicitada por dos cargas axiales.

Para este ejercicio tenemos 3 nodos (indicados por números inscritos en círculos) y dos elementos, (indicados por los números). El primer nodo al inicio del sistema. (Extremo izquierdo). El segundo nodo lo determina la presencia de la carga concentrada 2P. El tercer nodo, el extremo final. (Extremo derecho).

En este caso tenemos dos matrices de transferencia iguales, correspondientes a cada uno de los elementos de longitud L, y una matriz de carga puntual. Estas son:

$$L_1 = L_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{EA} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2P \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Los vectores de estado son:

$$z_1 = \begin{bmatrix} \delta \\ F \\ 1 \end{bmatrix}_1 \quad z_3 = \begin{bmatrix} \delta \\ F \\ 1 \end{bmatrix}_3 \quad (23)$$

Con $\delta_1 = 0$ y $F_3 = P$ como condiciones de borde.

Y el sistema de ecuaciones a resolver es

$$z_3 = L_2 Q_2 L_1 z_1 \quad (24)$$

Instrucciones del MATLAB

```
clear
syms delta1 delta2 F1 F2 P delta3 F3
syms EA L
F3=P;
delta1=0;
A=[1 L/EA 0; 0 1 0; 0 0 1];
Q2=[1 0 0; 0 1 -2*P; 0 0 1];
z1=[delta1 F1 1];
z2=[delta2 F2 1];
z3=[delta3 F3 1];
zz=A*Q2*A*z1.';
zzz=solve(zz(1)-delta3,zz(2)-F3,'F1','delta3');
F1=zzz.F1
delta3=zzz.delta3
```

Cuyo resultado es

$$F_1 = 3P \quad (25)$$

$$\delta_3 = 4PL/EA$$

Una forma alterna de resolver este problema es considerar la carga del extremo derecho como una matriz de carga puntual en lugar de una condición de contorno.

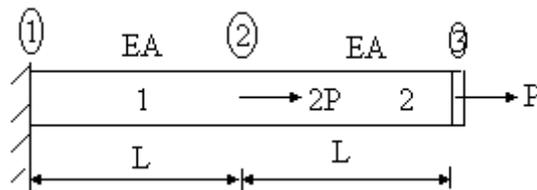


Figura N° 1.8. Barra solicitada por dos cargas axiales.

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -P \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Las condiciones de borde se transforman en $\delta_1 = 0$ y $F_3 = 0$.

El sistema de ecuaciones es

$$\mathbf{z}_3 = \mathbf{Q}_3 \mathbf{L}_2 \mathbf{Q}_2 \mathbf{L}_1 \mathbf{z}_1 \quad (27)$$

Las instrucciones en MATLAB son

```
clear
syms delta1 delta2 F1 F2 P delta3 F3
syms EA L
```

```
F3=0;
delta1=0;
A=[1 L/EA 0; 0 1 0; 0 0 1];
Q2=[1 0 0; 0 1 -2*P; 0 0 1];
Q3=[1 0 0; 0 1 -P; 0 0 1];
z1=[delta1 F1 1];
z2=[delta2 F2 1];
z3=[delta3 F3 1];
zz=Q3*A*Q2*A*z1.';
zzz=solve(zz(1)-delta3,zz(2)-F3,'F1','delta3');
F1=zzz.F1
delta3=zzz.delta3
```

Obteniéndose el mismo resultado anterior.

1.5.2.- Segundo ejemplo.

Notemos que si el problema es hiperestático, solo cambian las condiciones de contorno y por ello las incógnitas a determinar. En un caso como el ejemplo anterior, pero con los dos extremos fijos, las condiciones conocidas son $\delta_1 = 0$ y $\delta_3 = 0$. Las variables a determinar son las dos reacciones en los extremos.

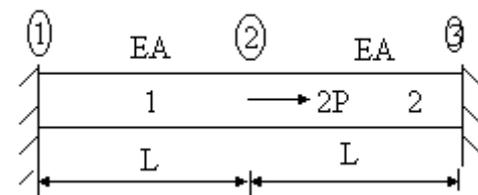


Figura N° 1.9. Barra doblemente fija.

Y el sistema de ecuaciones a resolver es el mismo

$$\mathbf{z}_3 = \mathbf{L}_2 \mathbf{Q}_2 \mathbf{L}_1 \mathbf{z}_1 \quad (28)$$

Las instrucciones en MATLAB son

```
clear
syms delta1 delta2 F1 F2 P delta3 F3
syms EA L
delta3=0;
delta1=0;
A=[1 L/EA 0; 0 1 0; 0 0 1];
Q2=[1 0 0; 0 1 -2*P; 0 0 1];
z1=[delta1 F1 1];
z2=[delta2 F2 1];
z3=[delta3 F3 1];
zz=A*Q2*A*z1.';
```

```
zzz=solve(zz(1)-delta3,zz(2)-F3,'F1','F3');
F1=zzz.F1
F3=zzz.F3
```

Y el resultado

$$F_1 = P \quad (29)$$

$$F_3 = -P$$

1.5.3.- Tercer ejemplo.

Otro ejemplo típico es el caso en el que tenemos una barra con un extremo fijo y el otro a una cierta distancia de un vínculo fijo. Este tipo de problemas tiene dos soluciones posibles, dependiendo si la barra hace contacto o no con el vínculo fijo. Consideremos el problema de la figura N° 1.10.

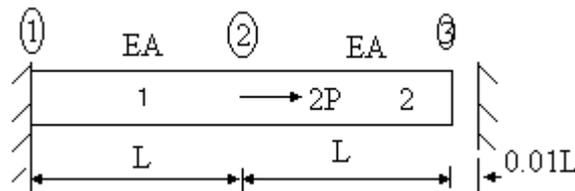


Figura N° 1.10. Vínculo fijo separado de la barra.

El problema puede plantearse estableciendo la condición de borde realmente conocida $\delta_1 = 0$ e introducir como otra condición de borde $\delta_3 = 0.01L$. Esta selección preestablece la suposición que la barra hace contacto con el vínculo. Al resolver el conjunto de ecuaciones indicará la existencia de una fuerza en el nodo 3. El sentido de esta fuerza es lo que determinará si la suposición preestablecida al principio fue correcta o no. De acuerdo a las deducciones de las matrices de transferencia, las fuerzas que actúan en los extremos del elemento son positivas cuando salen de dicho elemento. (Ver figura N° 1.2.) Si en este problema las cargas son tales que la barra hace contacto con el vínculo, la fuerza ejercida por el vínculo sobre en el nodo 3 debe estar dirigida hacia la izquierda. Por ello, si en la solución obtenemos un valor negativo, la suposición inicial fue correcta y la barra si hace contacto con el vínculo.

En caso contrario, es decir, si obtenemos una fuerza positiva, la barra no hace contacto con el vínculo, ya que este resultado indica que se requiere una tracción adicional para que se produzca el contacto, (que no es la condición del problema). El problema debe resolverse nuevamente, pero cambiando las condiciones de borde por $\delta_1 = 0$ y $F_3 = 0$. Al resolver el sistema de ecuaciones obtenemos la reacción del extremo izquierdo y el desplazamiento del extremo derecho que debe ser inferior a la holgura.

Aplicemos este procedimiento al problema de la figura N° 1.10 con los siguientes datos, $E = 2 * 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $A = 10 \text{ cm}^2$, $L = 40 \text{ cm}$ y $P = 20 \text{ t}$. Supongamos que el extremo derecho hace contacto con el vínculo, el sistema de ecuaciones a resolver es

$$\mathbf{z}_3 = \mathbf{L}_2 \mathbf{Q}_2 \mathbf{L}_1 \mathbf{z}_1 \quad (30)$$

con condiciones de borde

$$\delta_1 = 0 \text{ y } \delta_3 = 0.01L = 0.4 \text{ cm} \quad (31)$$

Las instrucciones en MATLAB son

```
clear
syms delta1 delta2 F1 F2 P delta3 F3
syms EA L
EA=20000000;
L=40;
P=20000;
delta3=0.01*L;
delta1=0;
A=[1 L/EA 0; 0 1 0; 0 0 1];
Q2=[1 0 0; 0 1 -2*P; 0 0 1];
z1=[delta1 F1 1];
z2=[delta2 F2 1];
z3=[delta3 F3 1];
zz=A*Q2*A*z1.';
zzz=solve(zz(1)-delta3,zz(2)-F3,'F1','F3');
F1=double(zzz.F1)
F3=double(zzz.F3)
```

Y el resultado obtenido es

$$F_1 = 120 \text{ t} \quad (32)$$

$$F_3 = 80 \text{ t}$$

Ambas fuerzas positivas, por lo tanto F_1 corresponde a una fuerza dirigida hacia la izquierda y F_2 dirigida hacia la derecha. Este resultado indica que para lograr que la barra haga contacto con el vínculo de la derecha se requiere la existencia de una fuerza de tracción en el extremo derecho de 80 t adicional a la fuerza aplicada de 40 t en el punto medio de la barra. En otras palabras, la suposición inicial de considerar como condición de contorno $\delta_3 = 0.01L = 0.4 \text{ cm}$, no se cumple. Por lo tanto, el problema debe replantearse considerando como condiciones de borde

$$\delta_1 = 0 \text{ y } F_3 = 0 \quad (33)$$

Obsérvese que el sistema de ecuaciones no cambia

$$\mathbf{z}_3 = \mathbf{L}_2 \mathbf{Q}_2 \mathbf{L}_1 \mathbf{z}_1 \quad (34)$$

Las instrucciones en MATLAB son

```
clear
syms delta1 delta2 F1 F2 P delta3 F3
syms EA L
EA=20000000;
L=40;
P=20000;
F3=0;
delta1=0;
A=[1 L/EA 0; 0 1 0; 0 0 1];
Q2=[1 0 0; 0 1 -2*P; 0 0 1];
z1=[delta1 F1 1];
z2=[delta2 F2 1];
z3=[delta3 F3 1];
zz=A*Q2*A*z1.';
zzz=solve(zz(1)-delta3,zz(2)-F3,'F1','delta3');
F1=double(zzz.F1)
delta3=double(zzz.delta3)
```

Y el resultado es

$$F_1 = 40 \text{ t} \tag{35}$$

$$\delta_3 = 0.08 \text{ cm} < 0.4 \text{ cm que es la holgura.}$$

Siendo esta última la solución correcta al problema propuesto.

Consideremos de nuevo el mismo problema de la figura N° 1.10, pero con una holgura de 0.04 cm. Iniciemos el problema suponiendo que por el efecto de la fuerza 2P la barra hace contacto con el vínculo de la derecha.

El sistema de ecuaciones es el mismo de antes

$$\mathbf{z}_3 = \mathbf{L}_2 \mathbf{Q}_2 \mathbf{L}_1 \mathbf{z}_1 \tag{36}$$

Y las condiciones de borde son

$$\delta_1 = 0 \text{ y } \delta_3 = 0.04 \text{ cm} \tag{37}$$

Las instrucciones en MATLAB son

```
clear
syms delta1 delta2 F1 F2 P delta3 F3
syms EA L
EA=20000000;
L=40;
P=20000;
delta3=0.04;
delta1=0;
A=[1 L/EA 0; 0 1 0; 0 0 1];
```

```

Q2=[1 0 0; 0 1 -2*P; 0 0 1];
z1=[delta1 F1 1];
z2=[delta2 F2 1];
z3=[delta3 F3 1];
zz=A*Q2*A*z1.';
zzz=solve(zz(1)-delta3,zz(2)-F3,'F1','F3');
F1=double(zzz.F1)
F3=double(zzz.F3)

```

Obtenemos por resultado

$$F_1 = 30 \text{ t} \quad (38)$$

$$F_3 = -10 \text{ t}$$

Los signos indican que la reacción del extremo izquierdo está dirigida hacia la izquierda y la fuerza en el extremo derecho también está dirigida hacia la izquierda. En otras palabras, la barra si entra en contacto con el vínculo de la derecha y la suposición inicial fue correcta y aquí termina el problema.

1.5.4.- Cuarto ejemplo.

Otro caso típico es la consideración entre las sollicitaciones del peso propio de la barra. Consideremos el ejemplo de la figura N° 1.11.

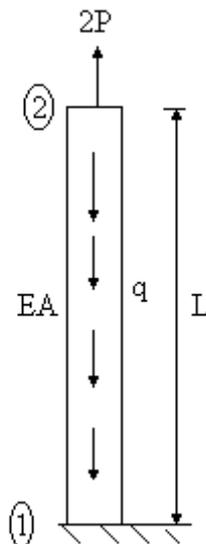


Figura N° 1.11. Barra sollicitada por su propio peso y por una fuerza de tracción en el extremo superior.

En este caso tenemos dos nodos y el elemento entre ellos está sometido a una carga distribuida uniforme de intensidad q .

El sistema de ecuaciones es

$$z_2 = q_1 z_1 \quad (39)$$

La matriz de transferencia para un elemento con carga distribuida es la ecuación (15), con $f(x) = -q$, por lo que con esta sustitución obtenemos

$$q_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{EA} & \frac{qL^2}{2EA} \\ 0 & 1 & qL \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \quad (40)$$

Y las condiciones de contorno son

$$\delta_1 = 0 \text{ y } F_2 = 2P \quad (41)$$

Instrucciones en MATLAB

```
clear
syms delta1 delta2 F1 F2 P
syms EA L
syms q
q=-q % la carga distribuida es positiva cuando el sentido va desde el nodo i al nodo i+1
F2=2*P;
delta1=0;
q1=[1 L/EA -q*L^2/(2*EA); 0 1 -q*L; 0 0 1];
z1=[delta1 F1 1];
z2=[delta2 F2 1];
zz=q1*z1.';
zzz=solve(zz(1)-delta2,zz(2)-F2,'F1','delta2');
F1=zzz.F1
delta2=zzz.delta2
```

Y el resultado es

$$F_1 = 2P - qL$$

$$\delta_3 = \frac{2PL}{EA} - \frac{qL^2}{2EA} \quad (42)$$

1.5.5.- Quinto ejemplo.

Consideremos el puntal de la figura N° 1.12. Aquí tenemos un pieza que es introducida en la tierra mediante la aplicación de una fuerza P en el extremo superior. El puntal

terminará la penetración en la tierra cuando la fuerza de roce que se genera entre la tierra y el contorno del puntal sea de igual magnitud a la fuerza P . Se están despreciando la fuerza en el extremo inferior del puntal y su peso propio.

En este problema las incógnitas serán las distancia a y b , cuya suma es la longitud L del puntal y δ_3 . Tenemos tres nodos y dos elementos. Las matrices de transferencia serán las de un elemento con carga uniforme de longitud a y un elemento sin carga de longitud b .

Las condiciones de borde conocidas son $F_1 = 0$, $F_3 = -P$, y $\delta_1 = 0$. Esta última, porque al establecerse el equilibrio la sección 1 se considera fija.

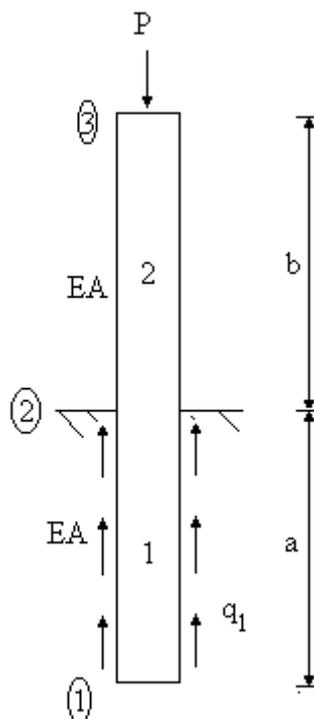


Figura N° 1.12.. Puntal

El sistema de ecuaciones del problema es

$$\mathbf{z}_3 = \mathbf{L}_2 \mathbf{q}_1 \mathbf{z}_1 \quad (43)$$

Siendo las matrices de transferencia

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{EA} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{q}\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a}{EA} & -\frac{q_1 a^2}{2EA} \\ 0 & 1 & -q_1 a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Las instrucciones en MATLAB son

```
clear
syms delta1 delta2 F1 F2 delta3 F3
syms EA L b a
syms q1
F3=-P;
F1=0;
delta1=0;
L2=[1 b/EA 0; 0 1 0; 0 0 1];
qu1=[1 a/EA -q1*a^2/(2*EA); 0 1 -q1*a; 0 0 1];
z1=[delta1 F1 1];
z2=[delta2 F2 1];
z3=[delta3 F3 1];
zz=L2*qu1*z1.';
zzz=solve(zz(1)-delta3,zz(2)-F3,L-b-a,'delta3','a','b');
delta3=zzz.delta3
a=zzz.a
b=zzz.b
```

Teniendo el problema por resultado

$$\delta_3 = \frac{q_1 a^2}{2EA} - \frac{PL}{EA}$$

$$a = \frac{P}{q}$$

$$b = L - \frac{P}{q} \quad (45)$$

1.6.- EJEMPLOS CON EFECTOS TÉRMICOS.

1.6.1.- Primer ejemplo con efecto térmico.

Consideremos el problema propuesto en la figura N° 1.13. Para resolverlo por el método de la matriz de transferencia debemos considerar cada barra en forma separada y utilizar la posible interacción entre ellas como condición de unión del conjunto de ecuaciones.

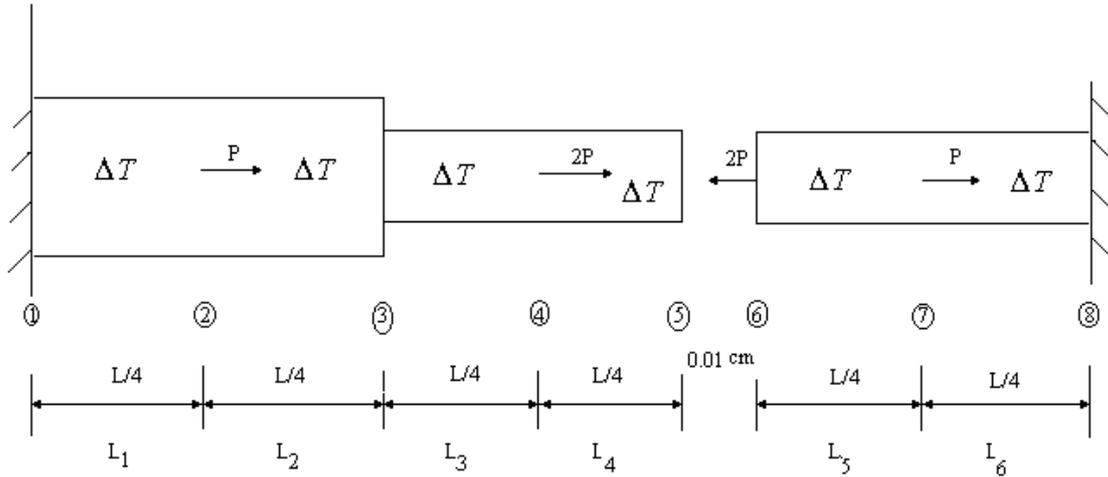


Figura N° 1.13. Sistema de dos barras.

Los datos son $L = 40 \text{ cm}$, $P = 15 \text{ t}$, $\alpha = 11.7 \cdot 10^{-6} \text{ 1/ } ^\circ\text{C}$, $A = 20 \text{ cm}^2$, $E = 2.1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\Delta T = 30 \text{ } ^\circ\text{C}$ y la separación entre las dos barras es de 0.01 cm .

El sistema de ecuaciones de la barra de la izquierda es

$$\mathbf{z}_5 = \mathbf{L}_4 \mathbf{Q}_4 \mathbf{L}_3 \mathbf{L}_2 \mathbf{Q}_2 \mathbf{L}_1 \mathbf{z}_1 \quad (46)$$

cuyas matrices de transferencia son

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{L/4}{E(2A)} & \frac{\alpha L \Delta T}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}_3 = \mathbf{L}_4 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{L/4}{EA} & \frac{\alpha L \Delta T}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -P \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2P \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y los vectores de las variables de estado son

$$\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ F_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{z}_5 = \begin{bmatrix} \delta_5 \\ F_5 \\ 1 \end{bmatrix}_i$$

Para la barra de la derecha tenemos

$$\mathbf{z}_8 = \mathbf{L}_6 \mathbf{Q}_7 \mathbf{L}_5 \mathbf{Q}_6 \mathbf{z}_6 \quad (48)$$

con

$$\mathbf{L}_5 = \mathbf{L}_6 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{L/4}{EA} & \frac{\alpha L \Delta T}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$\mathbf{Q}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2P \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -P \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_6 = \begin{bmatrix} \delta_6 \\ F_6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{z}_8 = \begin{bmatrix} \delta_8 \\ F_8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si suponemos que las dos barras entran en contacto, tenemos como condiciones adicionales

$$\begin{aligned} F_5 &= F_6 \\ \delta_5 &= 0.01 + \delta_6 \end{aligned} \quad (50)$$

Esta última ecuación se deduce de la figura N° 1.14

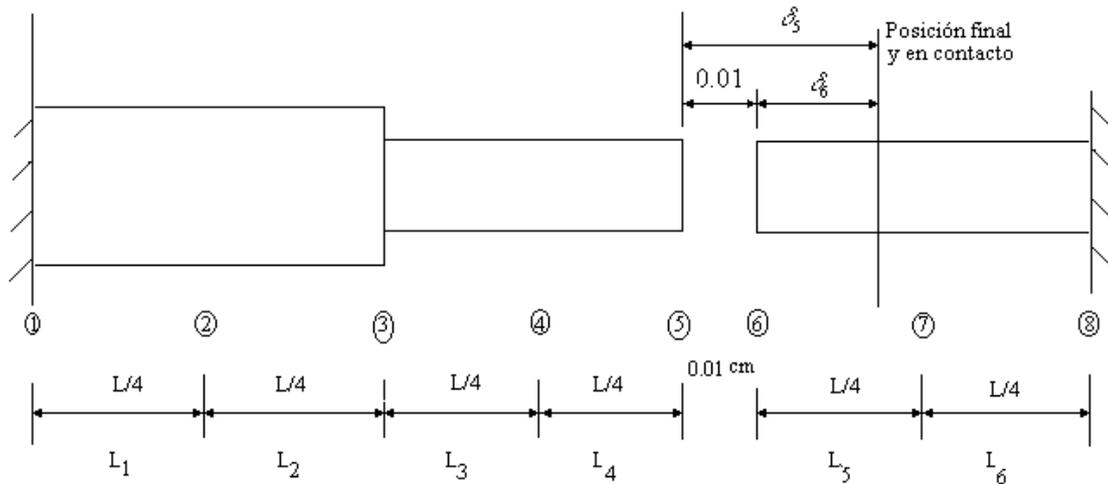


Figura N° 1.14. Compatibilidad de desplazamientos del problema de la figura N° 1.13.

Las instrucciones en MATLAB son

```
clear
syms delta1 delta5 P F1 F5 F6 F8 delta6 delta8
syms EA L
alfa=0.0000117;
DT=30;
P=15000;
L=40;
EA=42000000;
delta1=0;
delta8=0;
L1=[1 L/(8*EA) alfa*L*DT/4 ; 0 1 0 ; 0 0 1 ];
L2=[1 L/(8*EA) alfa*L*DT/4 ; 0 1 0 ; 0 0 1 ];
L3=[1 L/(4*EA) alfa*L*DT/4 ; 0 1 0 ; 0 0 1 ];
L4=[1 L/(4*EA) alfa*L*DT/4 ; 0 1 0 ; 0 0 1 ];
L5=[1 L/(4*EA) alfa*L*DT/4 ; 0 1 0 ; 0 0 1 ];
L6=[1 L/(4*EA) alfa*L*DT/4 ; 0 1 0 ; 0 0 1 ];
Q2=[1 0 0 ; 0 1 -P ; 0 0 1 ];
Q4=[1 0 0 ; 0 1 -2*P ; 0 0 1 ];
Q6=[1 0 0 ; 0 1 2*P ; 0 0 1 ];
Q7=[1 0 0 ; 0 1 -P ; 0 0 1 ];
z1=[delta1 F1 1 ];
z5=[delta5 F5 1 ];
z6=[delta6 F6 1 ];
z8=[delta8 F8 1 ];
zz=L4*Q4*L3*L2*Q2*L1*z1.';
zz2=L6*Q7*L5*Q6*z6.';
zzz=solve(zz(1)-delta5,zz(2)-F5,zz2(1)-delta8,zz2(2)-F8,delta5-delta6-.01,F5-
F6,'F1','delta5','F5','delta6','F6','F8');
double(zzz.F1)
```

double(zzz.delta5)
double(zzz.delta6)
double(zzz.F5)
double(zzz.F6)
double(zzz.F8)

Y el resultado es

$$\begin{aligned}F_1 &= 13210kg \\F_5 &= F_6 = -31790kg \\ \delta_5 &= 0.0074cm \\ \delta_6 &= -0.0026cm \\ F_8 &= -16790kg\end{aligned}\tag{51}$$

De estos resultados observamos que F_5 y F_6 tienen, como debe ser, la misma magnitud, ya que corresponden a las fuerzas de interacción entre las secciones de contacto entre las dos barras. Además ambas tienen signos negativos lo cual indica que F_5 está dirigida hacia la izquierda y F_6 está dirigida hacia la derecha. Esto significa que esta interacción corresponde a fuerzas de compresión en cada barra, lo que nos indica que por los efectos de carga y temperatura que ocurren en el sistema las dos barras entran en contacto, se cumple la suposición inicial y este es el resultado correcto del problema. Como se dijo en un ejemplo anterior, si estas fuerzas hubiesen resultado con signos positivos, la suposición inicial no hubiese estado correcta y tendría que resolverse nuevamente el problema partiendo con la condición de que las dos barras no entran en contacto, por lo tanto el problema sería el de dos barras completamente independientes.

1.6.2.- Segundo ejemplo con efecto térmico. EJEMPLO DEL TORNILLO Y EL TUBO.

Otro ejemplo típico es el tornillo rodeado de un tubo. Figura N° 1.15. Inicialmente la tuerca se ajusta solo para hacer tope con el tubo sin que se produzcan esfuerzos. Posteriormente se le da un giro específico a la tuerca. (En este caso particular supondremos que el giro dado a la tuerca hace que la ésta se desplace axialmente 0.01 cm). Esto produce el acortamiento del tubo y el estiramiento del tornillo tal como se muestra en la figura N° 1.15. Para la explicación se consideran dos planos 1. Uno solidario a la tuerca y el otro solidario al tornillo. Inicialmente los dos planos 1 coinciden como se muestra en la figura. Luego del giro de la tuerca el plano 1 solidario con ella se desplaza hacia la derecha δ_3 , mientras que el plano 1 solidario con el tornillo se desplaza hacia la izquierda δ_1 . Para claridad se representa también el plano 2 para indicar el alargamiento del tornillo como el desplazamiento de la sección del extremo izquierdo de éste. Ese mismo desplazamiento hacia la izquierda lo experimenta el plano 1 solidario con el tornillo, ya que la fracción de éste entre el plano 1 y el plano 2 se desplaza como cuerpo rígido. En la figura también se representan los nodos de los dos elementos.

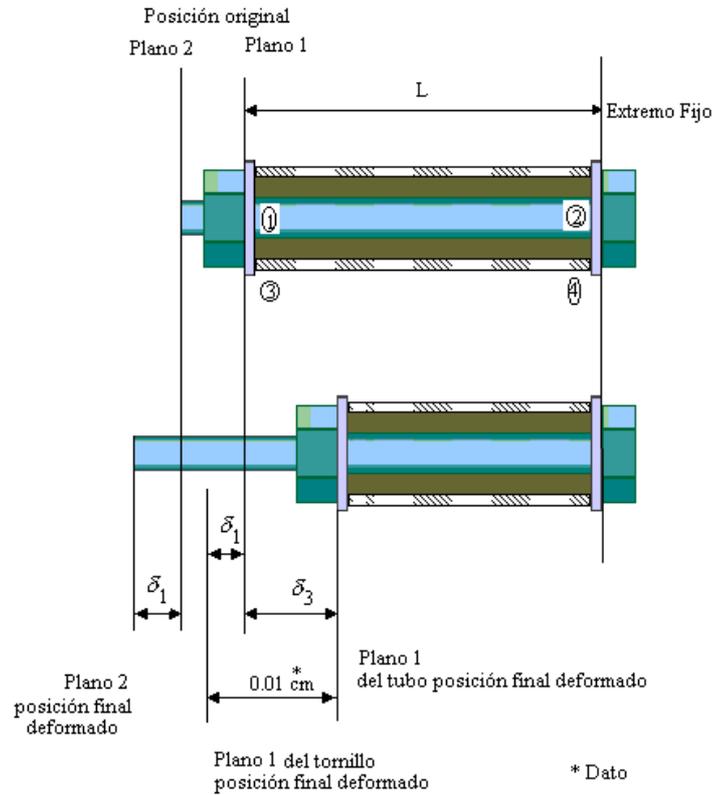


Figura N° 1.15. Conjunto tornillo y tubo.

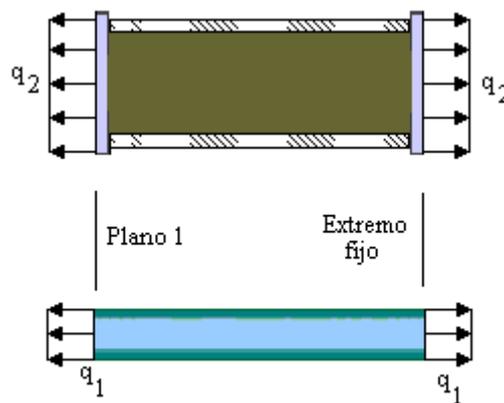


Figura N° 1.16. Diagramas de cuerpo libre del tubo y del tornillo.

En la figura N° 1.16 se presentan los diagramas de cuerpo libre del tubo y del tornillo. Mediante q_1 se muestran los esfuerzos a los cuales está solicitado el tornillo en ambos extremos de la zona estirada del tornillo, que tienen por resultante las fuerzas F_1 y F_2 que actúan en los nodos 1 y 2. Por q_2 se representan los esfuerzos en el tubo, que tienen por resultante las fuerzas F_3 y F_4 que actúan en los nodos 3 y 4. Nótese que los esfuerzos se han considerado en la convención positiva.

Las ecuaciones para el tornillo son

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{L}_1 \mathbf{z}_1 \quad (52)$$

Y la matriz de transferencia es

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{E_{io} A_{io}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (53)$$

Para el tubo tenemos

$$\mathbf{z}_4 = \mathbf{L}_2 \mathbf{z}_3 \quad (54)$$

con

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{E_m A_m} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (55)$$

La ecuación de compatibilidad es

$$\delta_3 - \delta_1 = 0.01 \quad (56)$$

donde el signo negativo delante de δ_1 es motivado a su signo implícito que es negativo por corresponder a un desplazamiento hacia la izquierda.

Y el equilibrio requiere

$$F_1 + F_3 = 0 \quad (57)$$

Las instrucciones del MATLAB son

```
clear
syms delta1 delta2 FI FB P F1 F2 F3 F4 delta3 delta4
syms EA L FD
FB=0;
alfa=0.0000117;
DT=0;
L=40;
delta2=0;
delta4=0;
FF=0;
EA=20000000;
L1=[1 L/EA 0 ; 0 1 0 ; 0 0 1 ];
EA=10000000;
L2=[1 L/EA 0 ; 0 1 0 ; 0 0 1 ];
z1=[delta1 F1 1 ];
```

```

z2=[delta2 F2 1 ];
z3=[delta3 F3 1 ];
z4=[delta4 F4 1 ];
zz=L1*z1.';
zz2=L2*z3.';
zzz=solve(zz(1)-delta2,zz(2)-F2,zz2(1)-delta4,zz2(2)-F4,delta3-delta1-
0.01,F1+F3,'F1','delta1','F2','delta3','F3','F4');
double(zzz.F1)
double(zzz.delta1)
double(zzz.delta3)
double(zzz.F2)
double(zzz.F3)
double(zzz.F4)

```

Con los resultados siguientes

$$\begin{aligned}
 F_1 = F_2 &= 1667 \text{ kg} \\
 F_3 = F_4 &= -1667 \text{ kg} \\
 \delta_1 &= -0.0033 \text{ cm} \\
 \delta_3 &= 0.0067 \text{ cm}
 \end{aligned}
 \tag{58}$$

1.6.3.- Tercer ejemplo con efecto térmico.

El problema de la figura N° 1.17 representa tres barras solidarias, la central es de aluminio y las dos laterales son de acero. El sistema sufre un cambio de temperatura ΔT . Como las tres barras tienen coeficientes de dilatación térmicos diferentes, tienden a experimentar también cambios de longitud diferentes. Como el sistema es solidario la longitud final de las tres barras tiene que ser el mismo, por lo que el sistema está sometido a esfuerzos térmicos.

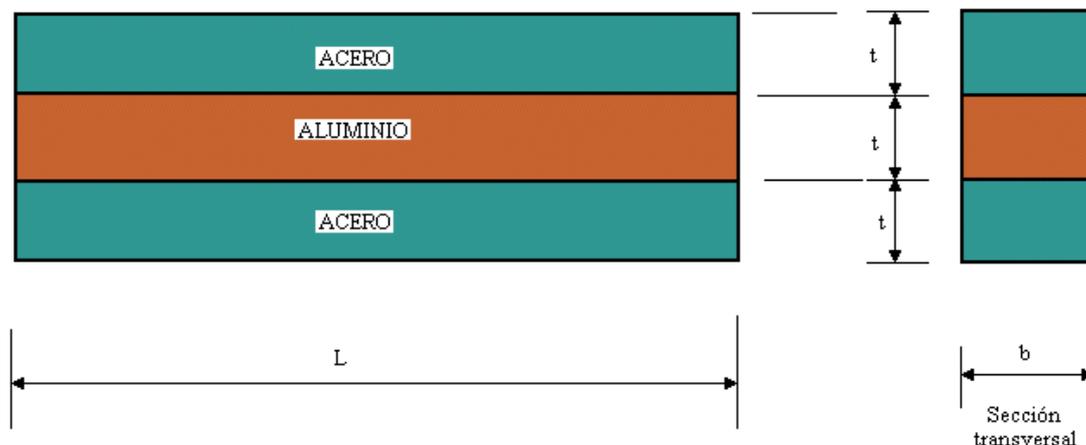


Figura N° 1.17. Sistema de tres barras solicitada por cambio de temperatura uniforme.

En la figura N° 1.18 se representan los diagramas de cuerpo libre de las tres barras. Esto permite modelar las barras mediante matrices de transferencia independientes y el conjunto de ecuaciones de cada barra se asocian mediante las ecuaciones de compatibilidad de desplazamiento del sistema y de la igualdad de las fuerzas internas.

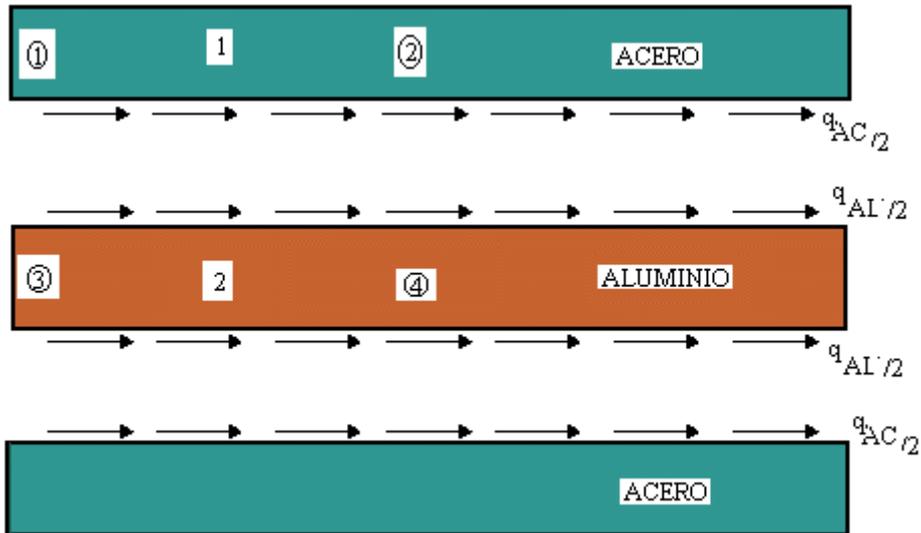


Figura N° 1.18. DCL. Interacción entre las superficies de contacto.

Nótese que el efecto de interacción entre las barras se ha colocado en los diagramas de cuerpo libre en los planos donde las barras están en contacto. Es debido a la simetría del problema que puede considerarse cada barra análoga a un problema de carga axial, como se muestra en la figura N° 1.19, ya que la resultante de los efectos en la barra central de aluminio actúa en la línea centroidal de dicha barra, mientras que la resultante de la combinación de las dos barras externas de acero actúa en el centroide del conjunto de dichas dos barras. También en el modelo se considera un solo elemento de acero de área $2bt$.

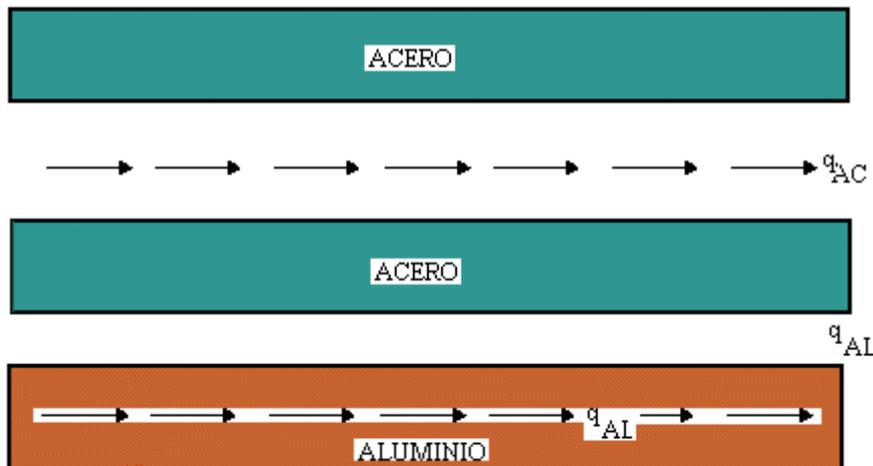


Figura N° 1.19. Sustitución de los efectos en las superficies de interacción por fuerzas axiales.

Otro detalle importante en el modelaje del problema es que se considera que las secciones centrales del aluminio y del acero no sufren desplazamiento, por ello se han considerado la presencia de los nodos 2 y 4 y el problema puede resolverse estudiando solo la mitad del mismo, (por lo que solo se han indicado los dos elementos que se observan en la figura N° 18). De igual manera las fuerzas de interacción se han considerado en sentido positivo. La solución del sistema de ecuaciones indicará el sentido correcto de las incógnitas.

Para la barra de acero el sistema de ecuaciones es

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{L}_1 \mathbf{z}_1 \quad (59)$$

cuya matriz de transferencia es

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{L/2}{E_{AC}(2bt)} & -\frac{q_{AC} \frac{L^2}{4}}{2E(2bt)} + \frac{\alpha_{AC} L \Delta T}{2} \\ 0 & 1 & \frac{q_{AC} l}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (60)$$

Y los vectores de las variables de estado son

$$\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ F_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} \delta_2 \\ F_2 \\ 1 \end{bmatrix}_i \quad (61)$$

Para la barra de aluminio, el sistema de ecuaciones es

$$\mathbf{z}_4 = \mathbf{L}_2 \mathbf{z}_3 \quad (62)$$

cuya matriz de transferencia es

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{L/2}{E_{AL}(bt)} & -\frac{q_{AL} \frac{L^2}{4}}{2E(bt)} + \frac{\alpha_{AL} L \Delta T}{2} \\ 0 & 1 & \frac{q_{AL} l}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (63)$$

Y los vectores de las variables de estado son

$$\mathbf{z}_3 = \begin{bmatrix} \delta_3 \\ F_3 \\ 1 \end{bmatrix}_i \quad \mathbf{z}_4 = \begin{bmatrix} \delta_4 \\ F_4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (64)$$

Para el modelo propuesto, las condiciones de contorno son

$$\begin{aligned} \delta_2 &= 0 \\ \delta_4 &= 0 \end{aligned} \quad (65)$$

El equilibrio requiere

$$q_{AC} + q_{AL} = 0 \quad (66)$$

Y la compatibilidad de desplazamientos es

$$\delta_1 = \delta_3 \quad (67)$$

Las instrucciones en MATLAB son

```
clear
syms F1 F2 F3 F4
syms EAC EAL L DT alfaAC alfaAL b t
syms delta1 delta2 delta3 delta4
syms qAC qAL
delta2=0.;
delta4=0.;
qa1=[1 L/(EAC*2*b*t^2) (-qAC*L^2)/(8*EAC*2*b*t)+alfaAC*L*DT/2; 0 1
-qAC*L/2; 0 0 1];
qa3=[1 L/(EAL*b*t^2) (-qAL*L^2)/(8*EAL*b*t)+alfaAL*L*DT/2; 0 1 -qAL*L/2; 0 0
1];
F1=0.;
F3=0.;
z1=[delta1 F1 1 ];
z2=[delta2 F2 1 ];
z3=[delta3 F3 1 ];
z4=[delta4 F4 1 ];
zz1=qa1*z1.';
zz3=qa3*z3.';
zzz=solve(zz1(1)-delta2,zz1(2)-F2,zz3(1)-delta4,zz3(2)-F4,delta1-
delta3,qAC+qAL,'delta1','delta3','F2','F4','qAC','qAL');
delta1=zzz.delta1
delta3=zzz.delta3
f2=zzz.F2
f4=zzz.F4
```

$$q_{AC} = zzz \cdot q_{AC}$$

$$q_{AL} = zzz \cdot q_{AL}$$

Y el resultado del problema es

$$\delta_1 = \delta_3 = - \frac{2\alpha_{AC}E_{AC} + \alpha_{AL}E_{AL}}{2(E_{AL} + 2E_{AC})} L \Delta T$$

$$q_{AC} = - \frac{8E_{AC}E_{AL}bt\Delta T(\alpha_{AL} - \alpha_{AC})}{(2E_{AC} + E_{AL})L}$$

$$q_{AL} = \frac{8E_{AC}E_{AL}bt\Delta T(\alpha_{AL} - \alpha_{AC})}{(2E_{AC} + E_{AL})L}$$

$$F_2 = \frac{4E_{AC}E_{AL}bt\Delta T(\alpha_{AL} - \alpha_{AC})}{(2E_{AC} + E_{AL})}$$

$$F_4 = - \frac{4E_{AC}E_{AL}bt\Delta T(\alpha_{AL} - \alpha_{AC})}{(2E_{AC} + E_{AL})}$$
(68)

Los desplazamientos negativos indican que las secciones 1 y 3 se están desplazando hacia la izquierda.

Como el coeficiente de dilatación térmico del aluminio es mayor que el del acero, q_{AC} es negativo, indicando que se dirige hacia la izquierda. En otras palabras, el acero está sometido a una tracción por la tendencia del aluminio a un estiramiento mayor que el acero por el efecto térmico, y el aluminio por el contrario está sometido a compresión. De aquí también se pueden analizar los signos de las fuerzas F_2 y F_4 . F_2 dirigida hacia la derecha para compensar a la resultante de q_{AC} . F_4 dirigida hacia la izquierda para equilibrar a la resultante de q_{AL} .

1.7.- ELABORACIÓN DE LOS DIAGRAMAS DE CARGA AXIAL, DEFORMACIÓN AXIAL Y DESPLAZAMIENTO.

Observando la ecuación (1.10)

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{A}\mathbf{z}_1 \quad (1.10)$$

vemos que luego de resolver el sistema de ecuaciones, las variables de estado de la sección 1 son todas conocidas. Por lo tanto, podemos calcular las variables de estado en cualquier sección transversal mediante el producto de todas las matrices de transferencia involucradas entre la sección inicial y la sección de interés. Como este proceso se puede repetir para cualquier número de secciones transversales, podemos utilizar los valores de las variables de estados de dichas secciones transversales para construir las gráficas de carga axial y de desplazamiento.

Como ilustración del procedimiento utilizaremos el ejemplo de la figura N° 1.13.

Las instrucciones adicionales en MATLAB son

```
z1=[0 double(zzz.F1) 1];
z6=[double(zzz.delta6) double(zzz.F6) 1];
L=0;
for I=1:21
    if I<=6
        L=(I-1)*2;
        L1=[1 L/(2*EA) alfa*L*DT ; 0 1 0 ; 0 0 1 ];
        zz1=L1*z1.';
        delta(I)=zz1(1);
        axial(I)=zz1(2);
        esfuerzo(I)=axial(I)/40;
        x(I)=(I-1)*2;
    end
    if I>6 & I<=11
        L=(I-1)*2-10;
        L2=[1 L/(2*EA) alfa*L*DT ; 0 1 0 ; 0 0 1 ];
        zz1=L2*Q2*L1*z1.';
        delta(I)=zz1(1);
        axial(I)=zz1(2);
        esfuerzo(I)=axial(I)/40;
        x(I)=(I-1)*2;
    end
    if I>11 & I<=16
        L=(I-1)*2-20;
        L3=[1 L/(EA) alfa*L*DT ; 0 1 0 ; 0 0 1 ];
        zz1=L3*L2*Q2*L1*z1.';
        delta(I)=zz1(1);
        axial(I)=zz1(2);
        esfuerzo(I)=axial(I)/20;
        x(I)=(I-1)*2;
    end
    if I>16
        L=(I-1)*2-30;
        L4=[1 L/(EA) alfa*L*DT ; 0 1 0 ; 0 0 1 ];
        zz1=L4*Q4*L3*L2*Q2*L1*z1.';
        delta(I)=zz1(1);
        axial(I)=zz1(2);
        esfuerzo(I)=axial(I)/20;
        x(I)=(I-1)*2;
    end
    L=L+2;
end
for I=1:11
    if I<=6
        L=(I-1)*2;
```

```

L5=[1 L/(EA)  alfa*L*DT ; 0 1 0 ; 0 0 1 ];
zz1=L5*Q6*z6.';
delta22(I)=zz1(1);
axial22(I)=zz1(2);
esfuerzo22(I)=axial22(I)/20;
x22(I)=2*(I+20)-2;
end
if I>6
L=(I-1)*2-10;
L6=[1 L/(EA)  alfa*L*DT ; 0 1 0 ; 0 0 1 ];
zz2=L6*Q7*L5*Q6*z6.';
zz1=L6*Q7*L5*Q6*z6.';
delta22(I)=zz1(1);
axial22(I)=zz1(2);
esfuerzo22(I)=axial22(I)/20;
x22(I)=2*(I+20)-2;
end
L=L+2;
end
for I=1:10
desfor22(I)=(delta22(I+1)-delta22(I))/2;
xx2(I)=(I+20-1)*2;
end
xx2(I+1)=(I+20)*2;
desfor22(I+1)=desfor22(I);
for I=1:20
desfor(I)=(delta(I+1)-delta(I))/2;
xx1(I)=(I-1)*2;
end
xx1(I+1)=(I)*2;
desfor(I+1)=desfor(I);
subplot (2,2,1);
plot (x,delta,x22,delta22)
grid on
subplot(2,2,2);
plot (x,axial,x22,axial22)
grid on
subplot(2,2,3);
plot (x,esfuerzo,x22,esfuerzo22);
grid on
subplot (2,2,4);
plot(xx1,desfor,xx2,desfor22);
grid on

```

Obteniéndose las gráficas que se presentan a continuación.

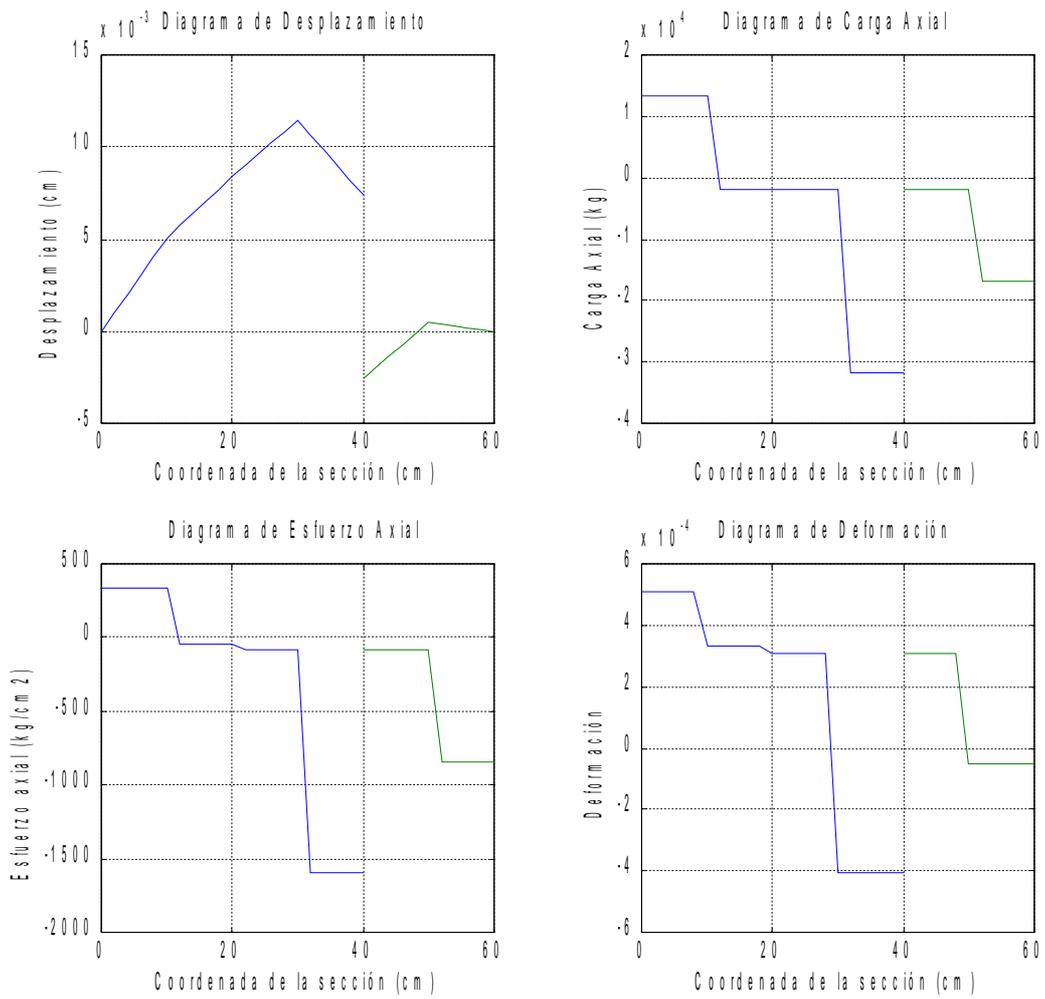


Figura N° 1.20. Diagramas de desplazamiento, carga axial, esfuerzo axial y deformación del problema de la figura N° 1.13.