

Instituto Politécnico Nacional
Centro de Investigación en Ciencia
Aplicada y Tecnología Avanzada



El rol de las prácticas en la Formación de Docentes de Matemática

Tesis para obtener el grado de
Doctorado en Matemática Educativa

Presenta:

Yolanda Serres Voisin

Tutor:

Dr. Apolo Castañeda Alonso

México, D. F., Diciembre 2007



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 26 del mes de noviembre del 2007 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

"El rol de las prácticas en la formación de docentes de matemática"

Presentada por la alumna:

 Serres
Apellido paterno

 Voisin
materno

 Yolanda Coromoto
nombre(s)

Con registro:

A	0	3	0	2	6	6
---	---	---	---	---	---	---

aspirante al grado de:

 Doctorado en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACION DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

 Dr. Apolo Castañeda Alonso

 Dr. Francisco Javier Lezama Andalón



CICAIA - IPN

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

 Dra. Gisela Montiel Espinosa

 Dr. Mario Ferrando Cajas Domínguez

 Dra. Rocio Alejandra Muñoz Hernández

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

 Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESION DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día _26_ del mes noviembre del año 2007, el (la) que suscribe Yolanda Serres Voisin alumno (a) del Programa de Doctorado en Matemática Educativa con número de registro A030266 , adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de Dr. Apolo Castañeda Alonso y cede los derechos del trabajo intitulado “El rol de las prácticas en la Formación de Docentes de matemática” , al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección yolanda.serres@ucv.ve . Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Yolanda Serres Voisin

INDICE

Resumen	1
Abstract.....	3
Glosario.....	5
Introducción.....	7
CAPITULO I. Antecedentes de la investigación.....	14
El docente en la <i>Matemática Educativa</i>	14
El docente y sus prácticas	16
El conocimiento matemático: iniciación al álgebra	19
Las prácticas docentes	20
Programas de formación docente centrados en las prácticas	28
CAPITULO II. El problema de investigación	51
EL PROBLEMA: La formación docente	51
OBJETIVOS de la investigación.....	60
CAPÍTULO III. La iniciación al álgebra	62
Qué es el álgebra educativa	62
Iniciación en el aprendizaje del álgebra	71
Objetivo del álgebra educativa	74
Aprendizaje del álgebra.....	76
Uso de la tecnología en el álgebra educativa. El papel de la calculadora	113

CAPÍTULO IV. Las prácticas docentes	119
Prácticas generales de los docentes	119
Prácticas de los docentes de matemática.....	130
CAPÍTULO V. Los Programas de Formación de Docentes de	
Matemáticas	149
Objetivos de un Programa de Formación Docente centrado en las prácticas	151
Fases de un Programa de Formación Docente centrado en las prácticas	157
La organización de los Programas de Formación Docente centrados en las prácticas	174
Programas de Formación dirigidos a Docentes de Matemáticas	183
CAPÍTULO VI. Conclusiones	231
Acerca de las prácticas docentes inferidas de la investigación sobre Álgebra Educativa	231
Acerca del rol de las prácticas docentes y de la investigación en Matemática Educativa en los Programas de Formación	235
Acerca del diseño de un Programa de Formación de Docentes de Matemática (PFDM)	239
Referencias bibliográficas	243

Índice de Tablas

Tabla N° 1. Estándares de álgebra	78
Tabla N° 2. Objetivos a lograr en situaciones que involucran variables	83
Tabla N° 3. Diferencias en la simbolización al pasar de la aritmética al álgebra	91
Tabla N° 4. Modelos de resolución de una ecuación de primer grado con una incógnita	102
Tabla N° 5. Prácticas docentes y su ubicación en las fases	130
Tabla N° 6. Acciones y propósitos docentes cuando trabaja solución de problemas	142
Tabla N° 7. Prácticas del docente cuando enseña álgebra	145
Tabla N° 8. Tradiciones educativas y objetivos de la educación, roles del docente y del estudiante	155
Tabla N° 9. Tradiciones educativas y selección del currículo	156
Tabla N° 10. Tradiciones educativas y roles de la experiencia y el conocimiento del docente	160
Tabla N° 11. Tradiciones de la enseñanza reflexiva	161
Tabla N° 12. Tradiciones educativas y conocimientos de los docentes	171
Tabla N° 13. Tradiciones educativas y organización de los PFD	181
Tabla N° 14. Tradiciones educativas y objetivos de los PFD	182
Tabla N° 15. Fases de un PFDM centrado en prácticas	229

Resumen

Los objetivos de esta tesis son: 1.- analizar distintos estudios del álgebra educativa para inferir cuáles son las nuevas prácticas docentes propuestas en dichos estudios; 2.- describir programas de formación docente, donde participan docentes de matemática, para analizar cómo consideran las prácticas docentes y determinar el uso que hacen de la investigación en matemática educativa, y con estas bases 3.- sustentar teóricamente el diseño de nuevos Programas de Formación de Docentes de Matemática basados en las nuevas prácticas docentes propuestas por la investigación en álgebra educativa.

El marco teórico está conformado por cuatro aspectos: 1.- una visión de la **investigación en álgebra educativa**, de la cual se infiere las prácticas docentes que apoyan el aprendizaje del álgebra en los estudiantes; 2.- un análisis de las **prácticas docentes** como un subconjunto de las prácticas sociales. Se definen las prácticas docentes y sus tres momentos (antes, durante y después de la clase) y se explica su desarrollo a través de los procesos de reflexión, discusión y explicación; 3.- un estudio de cómo debe ser un **programa de formación centrado en las prácticas docentes** (su objetivo, sus fases y su organización); 4.- una descripción de algunos programas de formación dirigidos a docentes en ejercicio de niveles básico y medio desarrollados en Venezuela y su relación con las prácticas docentes.

Las conclusiones son que las nuevas prácticas docentes del álgebra educativa están relacionadas con otras tres prácticas básicas: el desarrollo de los distintos usos de las variables y su relación con los procesos de generalización

y de simbolización, la construcción y el uso de distintos modelos de solución de ecuaciones, y la relación del proceso de solución de problemas y los usos de las variables.

En los programas de formación descritos se encontró que el rol de las prácticas docentes es reducido. El uso que hacen los programas de formación descritos de la investigación en Matemática Educativa, también es reducido. Las prácticas docentes abordadas en los programas de formación descritos tienden a ser las prácticas durante y después de la clase, y referidas a los conocimientos sobre cómo aprenden los estudiantes y sobre cómo abordar algunos contenidos matemáticos.

En relación con el sustento de un nuevo programa de formación dirigido a docentes de matemática y centrado en prácticas, las bases para el diseño de un programa de este tipo son: 1.- organizarse en coordinación con la escuela, contexto de las prácticas docente, y donde los docentes organizados en grupos de apoyo pueden reflexionar, discutir y hacer propuestas de cambios; 2.- orientarse por la experiencia de las docentes como base de conocimiento para producir los cambios; 3.- utilizar la base de conocimientos de los docentes para *reflexionar sobre y para* la acción, desde su contextualización en los nuevos hallazgos de investigación de la Matemática Educativa, la planificación de nuevas actividades de aprendizaje y de estrategias de enseñanza, la búsqueda de significados en el aula y la evaluación permanente de los resultados de aprendizaje.

Abstract

The goals of this thesis are: 1.- to analyze different algebra education research reports to infer what the new teacher practices are; 2.- to describe teacher professional development programs, in which mathematics teacher participate, to analyze how these programs consider teacher practices and how research in mathematics education is used; and with these basis: 3.- to support theoretically the design of new teacher professional development programs based on the new teacher practices proposes by the research on algebra education.

The framework is formed by four elements: 1.- A view of algebra education research. From this view one can infer the elements of the practice that support student learning of algebra; 2.- an analysis of teacher practice as a subset of social practices. Teachers practice are defined using its three moments (before, during and after the class) and its development trough reflection, discussion and explanation; 3.- a study of the normative character of a teacher professional development programs center in practices (its objective, its phases, and its organization), and 4.- a description of some middle and high school teacher professional development in Venezuela and its relation to teachers' practices.

The conclusions of the project are that the new teacher practices for teaching algebra are related to three basic practices: the development of different uses of the concept of variable and its relation to generalization and symbolization processes, the construction and uses of equations solutions models and the use of variables.

In the teacher professional development programs analyzed a low use of practices was found. The use of research in mathematics education in the teacher professional development programs analyzed is also reduced. The teacher practices of the teacher professional development programs analyzed tend to be what here is called during and after and referred to how students learn some mathematical content.

In relation to the support of a new teacher professional development program (TPD) for mathematics teacher and centered around practices, the thesis suggests the following design considerations: 1.- The TPD should be organized in the school, context of teacher practices, and where teachers should be organized within groups to reflect, discuss and make change proposals. 2.- The TPD should be guided by the experiences of the teachers as knowledge base to produce changes. 3.-The TPD should use teachers' knowledge to reflect about it and its implications for actions, from its contextualization with the new findings of mathematics education research.

Glosario

Álgebra Educativa: es la rama de la Matemática Educativa que estudia el conocimiento algebraico, su aprendizaje y su didáctica. El álgebra tiene un lenguaje, considerado por algunos el lenguaje matemático, con el cual se inicia la formalización del conocimiento matemático por su capacidad de generalización y abstracción.

Cursos Nacionales de Actualización (CNA): cursos a través de los cuales se desarrolla el Programa Nacional de Actualización Permanente para docentes en servicio, en México, los cuales atienden la puesta en práctica del enfoque de enseñanza de las ciencias naturales propuesto en la reforma curricular de 1993.

Escuela Venezolana de Enseñanza de la Matemática (EVEM): evento anual de formación docente, administrado por la Escuela de Matemática de la Universidad de Los Andes de Venezuela, en el cual participan docentes de matemática de III Etapa de Educación Básica y de Educación Media Diversificada y Profesional. La Escuela está organizada en Cursos sobre diferentes tópicos de matemática y son dictados por docentes de matemática de las universidades.

Práctica docente: son las acciones intencionadas que lleva a cabo el docente, basado en su experiencia, la cual sistematiza para producir conocimientos. Los conocimientos de los docentes de matemática son complejos e incluyen conocimientos sobre la matemática, sobre cómo se aprende la matemática, sobre la didáctica de la matemática y sobre la adaptación del currículo matemático a la escuela.

Programa de Formación Docente (PFD): consiste en un conjunto de actividades sistematizadas donde los docentes a través de la reflexión, la explicación y la discusión sistematizan sus experiencias, las transforman en conocimientos y producen nuevas prácticas. Las actividades comprenden análisis de actividades de aprendizaje, de episodios de enseñanza y de actividades estudiantiles.

Programa Nacional de Perfeccionamiento (PRONAP): programa de formación docente administrado por la Secretaría de Educación Pública de México y cuyo propósito es mejorar la calidad de la educación a partir de la actualización de los docentes en torno a los aspectos disciplinares, de enfoque pedagógico y de estrategias didácticas. La finalidad es auxiliar a los docentes para que "dominen los contenidos de las asignaturas que imparten y profundicen en el conocimiento de los enfoques pedagógicos de los planes y programas de estudio y en el manejo de los recursos educativos a su disposición".

Programa de Perfeccionamiento y Actualización Docente (PPAD): programa de actualización docente administrado por la Escuela de Educación de la Universidad de Los Andes de Venezuela, tiene un carácter permanente y consiste en talleres sobre diferentes tópicos de Matemática Educativa. Está dirigido a docentes de la I y II etapa de Educación Básica.

Programa Samuel Robinson va al Liceo (PSRL): programa de actualización docente que nace dentro del Programa Samuel Robinson, programa piloto de intervención social y de investigación acción, cuyo objetivo original era contribuir a la democratización de las oportunidades de estudio en la Universidad Central de Venezuela, a través de un proceso de admisión integral de estudiantes de estratos sociales de bajos recursos. El propósito del PSRL es aumentar el impacto en la población con que trabaja el Programa Samuel Robinson, incidiendo en el perfil del docente que forma a los estudiantes que ingresaban al programa.

Seminario Venezolano de Educación Matemática (SVEM): es un evento anual de formación docente, administrado por la Escuela de Educación de la Universidad de Los Andes de Venezuela, en el cual participan docentes de Educación Preescolar y Educación Básica. Está concebido como un escenario académico de reflexión y praxis. El SVEM se aborda desde una perspectiva multidimensional que conduce a una docencia integral que pretende romper caminos tradicionales de enseñanza.

Introducción

Los objetivos de este trabajo son: 1.- analizar distintos estudios del álgebra educativa para inferir cuáles son las nuevas prácticas docentes propuestas en dichos estudios; 2.- describir programas de formación docente, donde participan docentes de matemática, para analizar cómo consideran las prácticas docentes y determinar el uso que hacen de la investigación en matemática educativa, y con estas bases 3.- sustentar teóricamente el diseño de nuevos Programas de Formación de Docentes de Matemática basados en las nuevas prácticas docentes propuestas por la investigación en álgebra educativa.

El trabajo está formado por seis capítulos. En el primer capítulo, titulado *Antecedentes de Investigación*, se hace referencia a trabajos sobre prácticas docentes y a su rol en el diseño de algunos programas de formación docente. Este capítulo describe la concepción de Matemática Educativa base del trabajo, y el rol del docente en relación a la adquisición del conocimiento matemático. También identifica el conocimiento matemático utilizado para analizar las prácticas docentes: la iniciación al álgebra, y reconoce las fuentes bibliográficas utilizadas para estudiar el tema.

Los trabajos sobre las prácticas docentes relacionan este concepto con la experiencia y los conocimientos del docente, describiendo algunos de los conocimientos que tienen los docentes y relacionándolos con los hallazgos de la Matemática Educativa al respecto. Por otra parte, estos trabajos plantean la importancia del contexto de las prácticas y el sentido que le da a las mismas.

En el caso de las prácticas docentes ese contexto es la escuela y para ello se dan algunos indicadores. Por último, se plantea cómo estudiar las prácticas con distintos métodos (con la escucha, con la observación y con la lectura).

En cuanto el rol de las prácticas en los programas de formación docente, en este capítulo se describe algunos programas de formación y lo que plantean en sus documentos constitucionales acerca del lugar de las prácticas. Estos programas son: El Programa Samuel Robinson va al Liceo, el Programa de Perfeccionamiento y Actualización Docente, la Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática, el Programa Universitario de Formación Docente en la Escuela, y el Programa de formación en servicio para el uso pedagógico de la tecnología.

En el capítulo II, se plantea el problema de investigación, argumentando la importancia de la formación docente para mejorar los aprendizajes estudiantiles y los cambios que se han venido produciendo en los programas de formación, en los cuales las prácticas docentes han tomado un rol importante. Se describe el papel de las prácticas en los programas de formación analizados. Se explica por qué se escogió la iniciación al álgebra como tema a discutir en los programas de formación. Y por último se plantean las preguntas y los objetivos de investigación, los cuales están relacionados con tres ideas: las nuevas prácticas docentes inferidas de la investigación en Matemática Educativa, álgebra educativa, el rol de las prácticas y de la investigación sobre álgebra educativa en los programas de formación docente, y el desarrollo de un sustento teórico para un nuevo programa de formación de docentes de matemática donde las prácticas docentes jueguen un rol central.

En el capítulo III se desarrolla una visión de la investigación en álgebra educativa que sirvió de sustento para explicar las prácticas docentes que deben trabajarse en los programas de formación. Este capítulo comienza con una descripción del álgebra educativa, ubica en que momento de la educación de una persona se inicia el aprendizaje del álgebra, describe cómo se produce el aprendizaje inicial del álgebra y termina describiendo el uso de la calculadora en el aprendizaje del álgebra y su relación con el desarrollo del pensamiento algebraico. En cuanto al aprendizaje del álgebra las ideas discutidas son los distintos usos de la variable y su relación con los procesos de generalización, simbolización y de solución de problemas, la necesidad de introducir las ecuaciones a partir de su construcción y de trabajar con distintos modelos de resolución de las mismas, el rol de la solución de problemas en la construcción del concepto de variable, y el rol del docente en el aprendizaje del álgebra.

En el capítulo IV se analiza las prácticas docentes en general y en particular las prácticas del docente de matemáticas. Se parte de las prácticas sociales como conjunto al cual pertenecen las prácticas docentes ubicando los elementos que conforman una práctica social en una práctica docente (trabajo, medios de producción, objeto de trabajo y resultados). Se explica la importancia del contexto escolar para las prácticas docentes. Se plantean las fases de las prácticas docentes: contextualización, planificación, significación y evaluación; relacionándolas con los momentos antes, durante y después de la clase. Este capítulo termina con una explicación de las prácticas de un docente cuando enseña iniciación al álgebra.

En el capítulo V se describe cómo debe ser un Programa de Formación Docente (PFD) centrado en prácticas, dicha descripción tiene tres elementos claves: el objetivo del programa, sus fases y su organización. El objetivo planteado es el análisis, transformación y producción de nuevas prácticas que apoyen el desarrollo profesional de los docentes y el desarrollo de la institución escolar donde laboran los docentes. Las fases del PFD que se plantean son: - *la sistematización de experiencias*, donde se reflexiona sobre la acción del docente a través de actividades matemáticas, episodios de enseñanza y actividades de los estudiantes; - *la categorización de conocimientos*, los cuales se generan con la reflexión sobre la acción y son discutidos en colectivo con los colegas de la escuela (dichos conocimientos están organizados en cuatro grandes grupos: los conocimientos matemáticos, los conocimientos didácticos, los conocimientos sobre el aprendizaje y los conocimientos sobre el currículo y su adaptación); y por último, con los conocimientos generados como guía y a través de la reflexión para la acción, - *la transformación y producción de nuevas prácticas*, en la cual el docente va más allá de su clase y actúa antes y después de esta con una intencionalidad guiada por sus conocimientos. En cuanto a la organización de los PFD centrados en prácticas se defiende la necesidad de desarrollar los programas en las escuelas en coordinación con sus docentes y administradores, de manera que el trabajo que se haga sea contextualizado y tenga un sentido y un significado propio para la institución escolar.

En la segunda parte del capítulo V, se describen algunos programas de formación docente en los cuales participan docentes de matemática y desarrollados en Venezuela. El primero administrado por la Secretaría de la

Universidad Central de Venezuela, llamado Samuel Robinson va al Liceo y en el cual tanto las prácticas de los docentes como la investigación en Matemática Educativa tienen una influencia parcial, hay un trabajo con los docentes, se discuten aspectos innovadores de la Matemática Educativa mas la falta de contacto con la escuela y un seguimiento al trabajo del docente, debilitan el trabajo hecho con los docentes. El segundo y el tercer programa, son llevados a cabo por docentes de la Universidad de Los Andes (ULA), en el estado Mérida. El segundo por la Facultad de Humanidades y Educación. En este programa se discuten actividades matemáticas basadas en investigación en Matemática Educativa y la experiencia de los docentes es escuchada y discutida en los talleres del programa de actualización. El tercer programa coordinado por un docente de la Escuela de Matemáticas de la ULA y donde los docentes que dictan los cursos son docentes de matemáticas universitarias, no toma en cuenta la experiencia de los docentes, su centro son los contenidos matemáticos. Este capítulo termina con el puede ser de los programas de formación dirigidos a docentes de matemática y centrados en prácticas.

Para terminar, este trabajo concluye que las nuevas prácticas docentes del álgebra educativa están relacionadas con tres ideas básicas: los distintos usos de las variables y su relación con los procesos de generalización y de simbolización, la construcción y distintos modelos de solución de ecuaciones, y la relación del proceso de solución de problemas y los usos de las variables. Estas tres ideas ubican al docente en los últimos hallazgos del álgebra educativa y lo llevan a planificar nuevas actividades de aprendizaje y estrategias de enseñanza orientadas por estas ideas. Una vez en su clase la práctica del docente está orientada a la búsqueda de los significados que

encuentran los estudiantes a su planificación, para terminar evaluando los resultados de todo el plan.

En cuanto al rol de las prácticas docentes y de la investigación en Matemática Educativa en los programas de formación analizados, se encontró que el rol de las prácticas docentes en el diseño de los programas de formación es reducido, de manera similar ocurre con la investigación en Matemática Educativa.

En relación con el sustento de un programa de formación dirigido a docentes de matemática y centrado en prácticas las bases para el diseño de un programa de este tipo son: organizarse en coordinación con la escuela, contexto de las prácticas docente; orientarse por la experiencia de las docentes como base de conocimiento para producir los cambios, utilizar la base de conocimientos de los docentes para reflexionar para las prácticas desde su contextualización en los nuevos hallazgos de la Matemática Educativa, la planificación de nuevas actividades de aprendizaje y de estrategias de enseñanza, la búsqueda de significados en el aula y la evaluación permanente de los resultados de aprendizaje de sus estudiantes.

CAPITULO I

Antecedentes de la investigación

CAPITULO I. Antecedentes de la investigación

En este capítulo se hace referencia a los trabajos sobre prácticas docentes y a su rol en los programas de formación docente que sirvieron como antecedentes de esta investigación. El trabajo se ubica en el campo de la *Matemática Educativa*, pues estudia las prácticas docentes y los programas de formación docente en relación con el docente de matemática y cuál es su rol en función de lograr la adquisición y reconstrucción del conocimiento matemático por parte de sus estudiantes.

El docente en la *Matemática Educativa*

La *Matemática Educativa* es un área de conocimiento, cuyo objeto de estudio es el proceso de aprendizaje y el proceso de enseñanza de la ciencia *Matemática*, tanto en el contexto escolar como en el social; su papel en la sociedad es que las nuevas generaciones reconstruyan y adquieran el conocimiento matemático como parte de la cultura universal. Como disciplina científica se nutre de otras áreas del saber: la *Matemática* cuyos conocimientos se reconstruyen en la escuela, la *psicología educativa* para estudiar los procesos de construcción del conocimiento matemático, la *didáctica* para abordar las estrategias de enseñanza del conocimiento matemático y la *filosofía educativa* para explicar el para qué aprender matemáticas.

Para Cordero (2001) la problemática fundamental de la enseñanza de la matemática que atiende la matemática educativa es la confrontación entre la "obra matemática" y la matemática escolar. Es tarea de la matemática educativa teorizar acerca de cómo interpretar y reorganizar la "obra matemática". La matemática educativa se formula preguntas acerca del conocimiento matemático, sobre su naturaleza, sus formas y condiciones de construcción y sobre las construcciones mentales que deben hacer las personas para que se dé tal conocimiento. Dicho en otras palabras, la matemática educativa se formula preguntas sobre la epistemología de la matemática, la didáctica de la matemática y la psicología del aprendizaje de la matemática.

Para Cantoral y Farfán (2003) la Matemática Educativa es una disciplina de conocimiento que se ocupa del estudio de los fenómenos didácticos ligados al saber matemático; más específicamente estudian la evolución de los fenómenos didácticos que se suceden cuando los saberes matemáticos constituidos socialmente fuera de la escuela, se introducen en un sistema de enseñanza modificándolo, afectando también la relación estudiante-profesor.

La matemática se aprende en la vida y en la escuela los docentes diseñan actividades de aprendizaje para que los estudiantes adquieran y reconstruyan el conocimiento matemático, es decir, crean condiciones para que se dé tal reconstrucción. Para elaborar esas actividades los docentes se basan en su experiencia y en sus conocimientos que traducen en prácticas, en acciones con una meta de aprendizaje específica. Conocimientos de la matemática y de su epistemología, conocimientos de cómo sus estudiantes han aprendido matemática y de las estrategias de aprendizaje que han desarrollado,

conocimientos acerca de distintas estrategias de enseñanza que sirvan para el logro de los conocimientos de la mayoría de los estudiantes, conocimientos acerca de para qué es necesario que sus estudiantes tengan dichos conocimientos matemáticos, más allá de las exigencias de aprobar los cursos. Los docentes también tienen conocimientos acerca de su escuela y de las condiciones en que desarrollan su trabajo: conocimientos sobre el funcionamiento de la escuela y de qué medios puede valerse para diseñar sus actividades de aprendizaje, conocimientos acerca de sus colegas y cómo trabajar en equipo para lograr los aprendizajes de la mayoría de las y los estudiantes, conocimientos acerca de su condición laboral y de con qué espacios cuenta para su desarrollo profesional.

Para sistematizar sus prácticas el docente de matemática debe hacerse preguntas propias de la Matemática Educativa: sobre la naturaleza de la matemática, sobre las condiciones que deben darse para la reconstrucción del conocimiento matemático y sobre las construcciones mentales que deben hacer sus estudiantes para que se dé tal conocimiento. También analiza cuáles son los fenómenos didácticos ligados al conocimiento matemático. Todo esto con un único fin: lograr aprendizajes matemáticos por parte de sus estudiantes.

El docente y sus prácticas

Este trabajo se centra en uno de los elementos claves del sistema didáctico: el docente, específicamente en el docente en servicio y sus prácticas; se analizan

las prácticas docentes que benefician el aprendizaje estudiantil sobre el tema de iniciación al álgebra.

Las prácticas docentes se entienden como las acciones intencionadas que realiza el docente basado en sus conocimientos y experiencias sistematizadas. Las prácticas analizadas están referidas al actuar del docente antes, durante y después de la clase de álgebra, a la escuela donde los docentes desarrollan su trabajo y a la sociedad que provee recursos de aprendizaje al docente.

Los docentes poseen conocimientos complejos, conocimientos sobre la matemática, sobre cómo aprenden sus estudiantes, sobre la organización de las actividades de aprendizaje, sobre las razones por las cuales los jóvenes deben aprender matemáticas, sobre la escuela donde desarrollan su trabajo y las condiciones en que lo hacen (Shulman, citado por Cohran-Smith y Lytle, 1993; Eslava y Valdez, 2004). Para el caso específico de los docentes de matemáticas se ha encontrado que para que los docentes fijen su atención en los conocimientos de didáctica de la matemática deben primero tener y estar seguros de sus conocimientos matemáticos (Curi, 2004; Valdez, 2001). Para Ball y Cohen (1999) los docentes de matemática necesitan:

- comprender la materia que enseñan, de formas diferentes a la de sus estudiantes;
- conocimiento acerca de los niños, sus gustos, intereses, dificultades en dominios particulares;
- aprender que los conocimientos estudiantiles no son simplemente un asunto de conocimiento individual de los niños;

- desarrollar y ampliar sus ideas acerca del aprendizaje, incluyendo qué significa aprender, qué ayuda al aprendizaje de los niños o cualquier otro, cómo "leer" a los niños para saber más acerca de lo que ellos piensan y aprenden;
- saber pedagogía, para conectar a los estudiantes con los contenidos de formas efectivas, necesitan un repertorio de formas para vincular efectivamente a los aprendices y capacidad para adaptar y cambiar modos en respuesta a los estudiantes.

Los docentes convierten sus experiencias en conocimientos, es decir sistematizan sus experiencias. Los conocimientos orientan las acciones docentes, es decir los docentes convierten sus conocimientos en prácticas. Las prácticas cobran sentido en función del contexto en que se desarrollan, se dan en un contexto social determinado que le da significado a lo que hacen (Aiello, 2005; Arrieta, 2003). Los conocimientos de los docentes están basados en lo que ellos hacen para lograr el aprendizaje de sus estudiantes, en su experiencia. Una vez que los docentes están conscientes de sus conocimientos y de sus prácticas, las aplican y producen nuevos conocimientos y nuevas prácticas, en un proceso continuo de experiencia-conocimiento-práctica.

El docente que está en formación permanente necesita reflexionar críticamente sobre sus conocimientos y sus prácticas basado en situaciones reales, por ello Schwan (2001) ha propuesto que los programas de formación docente se conecten con el trabajo real de los docentes y con los temas específicos que enseñan los docentes (López y otros, 2004). De aquí la importancia de que un objetivo de los programas de formación docente sea identificar tanto los conocimientos como las prácticas de los docentes y

producir nuevos conocimientos y nuevas prácticas que permitan influir en su dominio conceptual, sus enfoques pedagógicos, sus aplicaciones didácticas y la evaluación de los aprendizajes (López y otros, 2004).

El conocimiento matemático: iniciación al álgebra

Los conocimientos matemáticos que se estudian en este trabajo son los referidos a la iniciación al álgebra, que incluyen los procesos de generalización, simbolización y abstracción. Estos conocimientos son básicos para el aprendizaje de la matemática de cualquier nivel educativo, especialmente la de niveles medios en adelante. Tanto para estudiar expresiones del álgebra (patrones, ecuaciones, inecuaciones, funciones, fórmulas), operaciones (adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación, radicación, logaritmos, valor absoluto, composición, cálculo de distancias, áreas y volúmenes), resolver problemas y modelar, siempre es necesario hacer abstracciones y generalizaciones, además de utilizar una simbología que permita comunicar las ideas matemáticas. La utilización y el manejo de las variables permiten ir de lo particular a lo general, de la intuición a la deducción, del análisis de la situación concreta al modelo general, y viceversa, esencia de la matemática. Por todo esto este trabajo hace énfasis en el estudio de dichos procesos.

Los conocimientos se abordan desde la perspectiva del aprendizaje y desde la perspectiva de la didáctica. Se toman como referencia algunos grupos académicos y sus producciones escritas, como el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME) y su publicación oficial de investigación la revista *Relime*, y las actas de las reuniones anuales que estos organizan RELME. Desde la perspectiva didáctica se estudian los trabajos de la Internacional

Commission on Mathematical Instruction (ICMI), la cual desde 1980 ha dirigido una serie de estudios sobre temas específicos de Educación Matemática. También se analizan los estándares de álgebra propuestos por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), los cuales datan del año 2000. Además, se estudian los aportes de algunos grupos y autores individuales como son Mason (1985, 1999), el Grupo Azarquié (1993), Socas y otros (1996), Torres y otras (2002) y Filloy (1999), Ursini y otros (2005).

Las prácticas docentes

Según Abdalla (2004) las prácticas docentes son las que este trae de sus experiencias, son sus conocimientos en situación; los conocimientos docentes se producen de la reflexión y discusión de las experiencias, y orientan las acciones docentes, convirtiéndose en prácticas.

En un estudio de casos Abdalla interpretó las prácticas docentes como los conocimientos que tiene el docente sobre sí mismo, sobre su medio, sobre la materia que enseña, sobre la organización y articulación curricular de la escuela y sobre la gestión de la escuela y de su proyecto político-pedagógico. También Eslava y Valdez (2004) encontraron que los docentes poseen y utilizan saberes en su trabajo provenientes de su sentido común, su saber popular, saberes contextuales y saberes profesionales. Dentro de los saberes profesionales se encuentran los saberes de contenido pedagógico y, para los docentes de matemáticas, los de contenido matemático, dentro de estos dos

grupos de saberes los docentes también necesitan conocimientos epistemológicos que le permitan evaluar los encierros epistemológicos del conocimiento matemático en diferentes situaciones sociales de aprendizaje y enseñanza (Steinbring, 1998).

Por su parte Aiello (2005), considera que las prácticas de la enseñanza sólo cobran sentido en función del contexto en que se desarrollan pues son una actividad intencional caracterizada por su complejidad, multiplicidad, inmediatez, simultaneidad e impredecibilidad; las prácticas se dan en un contexto social determinado que le da un significado a lo que se hace (Abdalla, 2004; Arrieta, 2003).

Para Abdalla (2004) es urgente que la escuela comience a aprender con sus docentes, desde su supervisión, dirección y coordinación. Para lo cual debe enfrentar sus propias dificultades, los efectos de las reformas educativas y la hegemonía de la racionalidad técnica.

Para estudiar las prácticas Aiello (2005) plantea que son los talleres los dispositivos analizadores donde se revelan los elementos constitutivos de las prácticas, provocándolos y obligándolos a hablar y a decir lo que en el aula es tantas veces dicho sin palabras (Edelstein, citado por Aiello (2005)). En los talleres se comienza con una tarea de análisis que pretende indagar lo que hay detrás de cada decisión del docente donde existe una determinada intencionalidad. Según Aiello (2005) La labor de desciframiento se hace desde tres perspectivas llamada triangulación:

1. El de la escucha de lo que el docente dice, sus creencias y conocimientos.
2. El de la observación de lo que el docente hace en su aula.
3. El de la lectura de la producción del docente, análisis de planificaciones de clases y de las tareas de los estudiantes.

En los talleres, haciendo uso de la reflexión crítica los docentes expresan oralmente sus creencias y conocimientos acerca del área con que trabajan, de su epistemología, de cómo aprenden sus estudiantes, de las estrategias de enseñanza que utilizan, de por qué dan prioridad a un tema, de cómo secuencian sus lecciones, del funcionamiento de su escuela y su espacio de desarrollo profesional. Esta verbalización de sus conocimientos provoca en los grupos de docentes discusiones y confrontaciones acerca de sus concepciones científicas y pedagógicas, de sus estrategias de enseñanza y de su relación laboral, las cuales son la base de transformaciones y de producción de nuevos conocimientos y nuevas prácticas. Otra tarea de los talleres es discutir las producciones escritas de los docentes: sus planificaciones de clase, tanto generales como particulares, p. e. centradas en un tema específico como las ecuaciones; el taller debe durar el suficiente tiempo para que también puedan discutirse producciones de los estudiantes que permitan analizar el trabajo que se realiza en el aula. La organización de los talleres debe contemplar un seguimiento en el aula por parte de los formadores donde puedan observarse las prácticas que llevan a cabo los docentes participantes, de manera de incorporarlas a la discusión del taller con los colegas e ir enriqueciendo el trabajo del grupo a través de la confrontación de las mismas y de los distintos enfoques conceptuales y pedagógicos.

Para el enfoque de Aiello, (2005) se entiende que la educación se plantea y construye desde el aula, en un proceso de reconstrucción permanente y paralelo con la teoría, no desde grandes modelos educativos sino a partir de las prácticas. La práctica siempre implica a la persona actuando y conociendo al mismo tiempo, en un de venir entre la práctica y la teoría (Arrieta, 2003).

La producción de prácticas puede enfrentarse diariamente en la escuela con aspectos cognitivos, administrativos, académicos y contextuales como son (Abdalla, 2004):

- El entendimiento de los docentes sobre las formas de reconocer, rehacer y transformar sus propias prácticas.
- La organización de los espacios de las posibilidades, las estructuras que destaquen la toma de decisiones colaborativas entre los miembros de la escuela para atender las necesidades de la misma y de sus docentes.
- El papel crucial de la dirección y de la coordinación para apoyar espacios de reflexión, investigación y tomas de decisiones colaborativas.
- La cultura colaborativa necesaria para que la escuela emerja como una institución social.

Pestana (2004) planteó que los docentes van generando teorías acerca de su enseñanza que le sirven de marco referencial para actuar, pues los docentes han experimentado el ámbito educativo durante buena parte de sus vidas, primero como estudiantes, y luego, como docentes. Con su experiencia los docentes logran construir una visión personal sobre la enseñanza que les sirve para desempeñarse en sus prácticas de acuerdo a como vivieron su formación.

Los docentes en formación se aproximan a los saberes manifestando una prevalencia de la vivencia personal, la experiencia empírica por encima de lo conceptual y del manejo de la información que se intercambia (Valdez, 2001). Es por estas razones que para facilitar el trabajo de formación docente Pestana propone develar esas teorías implícitas o experiencias de conocimiento de carácter biográfico.

En resultados de evaluaciones de programas de formación docente de educación superior Pestana (2000) ha encontrado de manera reiterativa poca incidencia de los mismos en la práctica docente, por lo tanto se considera urgente, entre otros aspectos, la necesidad de seguimiento a los programas, la atención de la práctica, la exploración de los pareceres de los docentes en cuanto a la experimentación con los conocimientos adquiridos y sus efectos en los estudiantes, las opiniones de estos sobre las acciones que se promueven en la situación de clase y su participación en las mismas. Algunas explicaciones teóricas a estos resultados son:

- poca concordancia entre los contenidos de los programas y el ejercicio cotidiano en el aula (Díaz Barriga, citado por Pestana (2000)),
- supuestos en la formación docente que plantean las acciones educativas como una acción homogénea y aplicable por igual a todos los sectores de la sociedad (Uralde, citado por Pestana (2000)),
- la poca importancia que se le otorga a la materia que imparten los docentes y a sus contenidos (Ferry, citado por Pestana (2000)),
- la centralización de los programas de formación en modelos restrictivos de enseñanza que privilegian la fase interactiva de "dar clase", desatendiendo

otros elementos como planificación y evaluación (Diker y Terigi, citado por Pestana (2000))

Por otra parte, para Pestana (2000) los docentes participantes en los programas de formación de educación superior reconocen que llevar a cabo una práctica innovadora, durante un período largo de tiempo, supone grandes esfuerzos para transferir esa nueva práctica al trabajo habitual con los estudiantes y con los colegas, quienes quizás no han sido participantes del programa de formación. Además, ella plantea que sistematizar la práctica nueva requiere de planteamientos nuevos en la asignatura que se dicta, que involucra a los colegas y a las unidades educativas donde están adscritos los docentes, y estas acciones pueden presentar obstáculos que sólo pueden superarse conformando equipos interesados en planes de innovación que incluyan a supervisores comprometidos.

Al analizar los trabajos anteriores sobre prácticas docentes se puede **resumir** que las prácticas docentes son las acciones que lleva a cabo el docente producto de la reflexión y discusión de su experiencia educativa en una institución particular, la cual le da contexto y sentido a su quehacer. El docente transforma su experiencia en conocimientos a través del análisis y la sistematización de la misma, y estos conocimientos orientan sus acciones convirtiéndose en prácticas; este análisis se hace en contexto con los colegas de la institución, con los productos de los aprendizajes estudiantiles y se sistematiza en un proceso recursivo de análisis, explicación y discusión constante con los colegas. Las prácticas docentes producen nuevas

experiencias y estas nuevos conocimientos, en un proceso continuo de experiencias-conocimientos-prácticas.

El rol que tienen las prácticas en los programas de formación docente es central: son las acciones intencionadas basadas en los conocimientos que tiene el docente sobre el área con que trabaja y su epistemología, sobre cómo apoyar a sus estudiantes en la reconstrucción del conocimiento, sobre qué estrategias de enseñanza utilizar, sobre qué motiva a sus estudiantes, sobre cómo trabajar en equipo con sus colegas, sobre para qué hace lo que hace. Por otra parte, estos conocimientos se transforman en la escuela a través de un proceso de discusión con los colegas, de allí la importancia de que los programas de formación docente trabajen con equipos de las escuelas más que con personas como individuos, equipos que además permitirán un trabajo multidisciplinario e interdisciplinario.

En este trabajo se analizará cuáles son las prácticas docentes que benefician el aprendizaje inicial del álgebra de los estudiantes, es decir, los referentes a los procesos de generalización, abstracción y simbolización. Dichas prácticas tienen una referencia en el trabajo en aula, y se pueden clasificar como prácticas antes, durante y después del trabajo en aula. Otras referencias son la escuela y la sociedad que son los contextos que le dan sentido a las prácticas.

Antes de la clase las prácticas docentes están orientadas a la adquisición de los conocimientos algebraicos iniciales y comprenden el diseño de actividades de aprendizajes basadas en contextos aritméticos y geométricos, y en la

actividad de resolución de problemas, para propiciar la necesidad del uso de incógnitas, para ello el contexto social puede ser una buena fuente de problemas. Estas prácticas están orientadas a trabajar los distintos usos de la variable. Para la construcción y resolución de ecuaciones el docente debe analizar la dificultad de las ecuaciones y los modelos más apropiados para introducir los distintos tipos de ecuaciones, de manera que los estudiantes desarrollen sus propias estrategias de aprendizaje. Durante la clase la práctica del docente se orientan a la comprensión de situaciones de aprendizaje y problemas cotidianos que estimulen las soluciones generales o algebraicas, para ello el docente hace preguntas que conduzcan a las observaciones críticas que permitan analizar distintas aproximaciones al aprendizaje del álgebra, compararlas entre ellas para escoger la más apropiada y hacer conjeturas que permitan desarrollar el pensamiento algebraico. El uso de símbolos que se va desarrollando durante el proceso de solución de problemas tiene un momento crítico para pasar a la expresión formal escrita: es el docente quien puede determinar ese momento. Después de la clase el docente analiza las distintas aproximaciones que lograron los estudiantes y las dificultades que tuvieron frente a las distintas actividades de aprendizaje de manera de poder sistematizar estos conocimientos sobre el aprendizaje estudiantil y utilizarlos para mejorar sus actividades.

En la escuela los docentes pueden comparan sus prácticas con los colegas de grado y de área. El análisis de la sociedad le sirve para utilizar situaciones reales y actuales en la construcción de problemas y proyectos escolares. Es importante que en la búsqueda de una mejora de la calidad de la educación, las escuelas cuenten con un proyecto educativo y que éste se discuta

periódicamente entre los docentes, tanto de área para que haya una continuidad en la educación de un área, como es el caso de la educación matemática, como de grado para que haya coherencia entre los docentes de un mismo grado y su desempeño hacia el mismo grupo de estudiantes. Este proyecto educativo debe contemplar la actualización de los docentes y en consecuencia el espacio y el tiempo para discusiones y elaboración de propuestas de cambio. En este espacio pueden los docentes compartir y analizar situaciones de la actualidad que puedan convertirse en actividades de aprendizaje para los estudiantes, dándole así un contexto a su trabajo.

Programas de formación docente centrados en las prácticas

En Venezuela, existen diferentes programas de formación que dicen estar centrados en las prácticas de los docentes, dirigidos, entre otros, a docentes de matemáticas. Este trabajo estudia algunos de ellos con los objetivos de analizar cómo consideran las prácticas de los docentes en su diseño y ejecución, y de determinar el uso que hacen de la investigación en matemática educativa. Los programas de formación docente estudiados en este trabajo son:

1. El *Programa Samuel Robinson va al Liceo*, de la Secretaría de la Universidad Central de Venezuela.
2. El *Programa de Perfeccionamiento y Actualización Docente*, de la Facultad de Humanidades y Educación, Escuela de Educación, de la Universidad de Los Andes.

3. La *Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática*, de la Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas, de la Universidad de Los Andes.
4. El *Programa Universitario de Formación Docente en la Escuela*, de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador.
5. El *Programa de formación en servicio para el uso pedagógico de la tecnología*, del Laboratorio Infantil del Instituto de Psicología de la Universidad Central de Venezuela.

El *Programa Samuel Robinson va al Liceo (SRL)*. La Universidad Central de Venezuela (UCV) desde 1998 lleva a cabo un programa de actualización, denominado *Samuel Robinson va al Liceo*, en el marco del Programa Samuel Robinson (SR), programa piloto de intervención social y de investigación acción, cuyo objetivo original era contribuir a la democratización de las oportunidades de estudio en la UCV, a través de un proceso de admisión integral de estudiantes de estratos sociales de bajos recursos (Secretaría UCV, 2000).

El SRL nace como producto de una revisión del SR con la visión de aumentar el impacto sobre la población con que se trabaja incidiendo en el perfil del docente que forma a los estudiantes que ingresaban al programa (Secretaría UCV, 2003). Los objetivos del SRL son (Secretaría UCV, 2000):

1. Conformar equipos líderes de docentes en cada liceo participante y desarrollar con ellos un programa de sensibilización, capacitación y actualización docente.
2. Propiciar la creación de Centros de Reflexión y Actualización del Profesorado (CRAP) en cada liceo participante.

3. Desarrollar un sistema de formación permanente para los docentes de los liceos adscritos.
4. Establecer planes de acción y redes escolares de trabajo con el personal directivo de los liceos.

Según Amaro (2003a) el SRL consiste en ofrecer capacitación y entrenamiento a un grupo de docentes de Educación Media Diversificada y Profesional (EMDP) de cada uno de los liceos participantes, quienes a su vez conforman los equipos líderes en sus respectivas instituciones. A través de la preparación y constitución de estos equipos líderes, se promueve la creación de los CRAP, el cual a su vez promueve la práctica docente reflexiva en un espacio que favorece el cambio actitudinal y la revisión de concepciones arraigadas en la práctica cotidiana, las cuales podrían entorpecer cualquier intento de transformación o de innovación educativa. En el caso de los docentes de matemáticas, se busca promover la reflexión sobre sus prácticas e indagar sus conocimientos sobre la matemática y sus epistemologías, sobre cómo sus estudiantes aprenden matemáticas, sobre cuáles son las estrategias de enseñanza que les han dado mejores resultados y por qué y sobre cómo influyen aspectos sociales en el aprendizaje de la matemática.

El programa de actualización contiene los cursos (Secretaría UCV, 2003):

1. Sensibilización hacia la experiencia.
2. Investigación didáctica.
3. Destrezas del pensamiento.
4. Desarrollo de equipos efectivos de trabajo.

5. Abordaje de lo social.
6. Tecnologías de la información y la comunicación.
7. Talleres psicodinámicos.
8. Conversaciones con personajes destacados.
9. Didácticas Especiales (Biología y Química, Física, Matemáticas, Lenguaje, Ciencias Sociales, Orientación).

El curso de Investigación Didáctica, eje del programa de actualización, tiene como propósito fundamental generar un espacio que promueva en los docentes la reflexión compartida sobre la práctica pedagógica concebida como campo de conocimiento y la construcción colectiva de propuestas que contribuyan en su mejora, transformación y potenciación (Amaro, 2003b).

El objetivo de los cursos de didácticas especiales es la actualización de contenidos por disciplina y el desarrollo de estrategias para abordar esos contenidos en el aula; el de didáctica de las matemáticas específicamente se plantea:

- Discutir contenidos y estrategias de la enseñanza de las matemáticas.
- Presentar modalidades de motivación y procesamiento de información matemática.
- Mostrar estilos de reconstrucción del conocimiento-pensamiento matemático.

En función de que el curso de didáctica de la matemática incorporara los conocimientos prácticos del grupo de docentes (Amaro, 2003b) y desarrollara

conocimientos centrales de la enseñanza de las matemáticas (Schwan, 2001), luego de presentar a los docentes los objetivos generales se hacen algunos ajustes para seleccionar los contenidos específicos a tratar, seleccionándose estos de los programas oficiales de Educación Básica y de Educación Media Diversificada y Profesional. En particular, se han abordado los temas de álgebra y trigonometría vinculados con:

- a) Cognición y metacognición en el aprendizaje de las matemáticas.
- b) Estrategias de enseñanza y de aprendizaje en la resolución de problemas matemáticos.
- c) Motivación y actitudes hacia el aprendizaje de las matemáticas.

El curso se ha trabajado con una metodología de investigación-acción, en concordancia con el diseño del Programa, promoviendo:

- un cambio de actitud de los docentes a través de actividades de reflexión de sus prácticas, entendiéndose como tal la planificación de actividades de aprendizaje, el desarrollo de las mismas en clase y su sistematización para mejorar dichas actividades;
- el desarrollo de habilidades para procesar información, en concreto el análisis de resultados de investigación en educación matemática y la relación con su práctica;
- y la discusión colectiva que promoviera la reflexión y la explicación de las prácticas y donde se reflejaran los conocimientos de educación matemática. Los docentes han participado tanto de forma escrita como oral, se

promueven las discusiones, se busca comparar posturas sobre educación matemática y establecer ideas en común.

El tema de mayor interés de los docentes es cómo mejorar el rendimiento en matemática de sus estudiantes y favorecer el consecuente ingreso a la universidad. En evaluaciones preliminares (Serres, 2004a) se encontró que algunos de los temas particulares que les interesa discutir a los docentes del Samuel Robinson va al Liceo son estrategias de solución de problemas, sobre cuáles son los conocimientos previos necesarios para abordar temas determinados; motivación, gusto y responsabilidad hacia el aprendizaje de las matemáticas (aspectos afectivos), y estrategias de enseñanza generales; muy poco se discute sobre dificultades del aprendizaje de la matemática, sobre diseño, implementación y evaluación de nuevas estrategias de enseñanza de un tema particular de la matemática; sino más bien las discusiones suelen centrarse en lo que no hacen los estudiantes, lo que no hacen los docentes de los grados anteriores y las malas condiciones socioeconómicas tanto de los estudiantes como de los propios docentes. Lo cual no permite que los docentes reflexionen analíticamente sobre cómo hacen su trabajo, sobre sus experiencias que convierten en prácticas y mucho menos transformarlas. Esto se considera una dificultad para el programa, dirigido específicamente a docentes de matemática, ya que no es a través del uso de estrategias generales que los docentes de matemática desarrollarán destrezas de razonamiento y de comunicación, sino que deben revisar profundamente lo que piensan sobre lo que significa saber y comprender las matemáticas, el tipo de tareas en las cuales los estudiantes deben estar involucrados y el papel que ellos juegan en el aula (Ball y Cohen, 1999; Schwam, 2001).

El *Programa de Perfeccionamiento y Actualización Docente* (PPAD) de dieciséis años de existencia, creó en el año 2004 el Seminario Venezolano de Educación Matemática, el cual se realiza anualmente. El Seminario Venezolano de Educación Matemática (SVEM) se ubica fundamentalmente en los niveles de Educación Preescolar y Educación Básica, como escenarios académicos de reflexión y praxis.

El SVEM se sustenta en una concepción de educación permanente cuyos postulados son "Nadie enseña nada a otro si este no está dispuesto a aprender" y "Todos aprenden de todos". El SVEM se aborda desde una perspectiva multidimensional que conduce a una docencia integral que pretende romper caminos tradicionales de enseñanza, caracterizada por una concepción axiomática que impone sus demostraciones, que genera en los estudiantes aprendizajes mecánicos y sin sentido y que crea aversiones que acaban con nuevas formas de organizar y estructurar el conocimiento y la racionalidad matemática (PPAD, 2004).

El SVEM asume la matemática como un lenguaje, como un instrumento que favorece la organización del pensamiento y el desarrollo de procesos intelectuales y como un quehacer humano histórico que forma parte del patrimonio cultural de la humanidad al cual tiene derecho toda la ciudadanía (PPAD, 2004).

El SVEM persigue (PPAD, 2004):

1. Revisar críticamente las formas tradicionales de enseñanza que han prevalecido en el Sistema Educativo Venezolano y que la formación docente no ha podido cambiar.
2. Contribuir con la creación de escenarios para poner en marcha concepciones y prácticas compatibles con los aprendizajes matemáticos significativos, pertinentes y trascendentes.

Es en estos escenarios que los docentes pueden reflexionar, explicar y discutir sus prácticas sobre la matemática y sus epistemologías, sobre cómo sus estudiantes reconstruyen los conocimientos matemáticos, sobre las estrategias de enseñanza específicas de la matemática y sobre los aspectos sociales que pueden influir en su reconstrucción.

Los objetivos y alcances del SVEM son (PPAD, 2004):

1. Crear un espacio de encuentros permanentes que se constituya en asiento académico de reflexión, discusión y propuestas de hacedores de Educación Matemática y Matemática en los niveles de Educación Preescolar y de Educación Básica.
2. Promover el intercambio y la difusión de experiencias, propuestas e investigaciones de la Educación Matemática en los niveles de Educación Preescolar y de Educación Básica.
3. Estimular el desarrollo de nuevas investigaciones, experiencias y propuestas multidisciplinarias, interdisciplinarias, pluridisciplinarias y transdisciplinarias que impliquen transformaciones en el currículo escolar y

- el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática y reduzcan los riesgos de fracaso y exclusión escolar, educativa y social.
4. Fomentar la organización de un movimiento magisterial venezolano capaz de articularse en redes de trabajo, bajo la concepción cooperativa, autogestionaria y cogestionaria de la educación permanente que dé soporte a la formación y la actualización, al intercambio de experiencias y a la investigación-acción desde las aulas.
 5. Propiciar la cooperación efectiva entre las diferentes instituciones educativas, comunidades matemáticas organizadas, organismos gubernamentales y no gubernamentales, nacionales e internacionales involucrados en el estudio de la Matemática en el ámbito educativo, para aunar esfuerzos que fortalezcan la capacidad propositiva y su efecto sobre el mejoramiento de la calidad del proceso de enseñanza y aprendizaje y su imbricación conceptual y operativa con otros saberes académicos y los derivados de la realidad sociocultural.
 6. Fortalecer un intercambio verdaderamente eficiente con las comunidades ya establecidas en el país sobre la Educación Matemática en los niveles educativos de Educación Preescolar y de Educación Básica.

La *Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática (EVEM)* existente desde hace diez años, se celebra anualmente en época de vacaciones, en el mes de septiembre, justo antes del inicio del año escolar. Es una propuesta de carácter interdisciplinario, sustentada en un diálogo entre matemáticos profesionales, maestros y educadores. Pretende crear conciencia de la necesidad de recrear la matemática y reflexionar día a día sobre la pertinencia

y la calidad del trabajo en las aulas de clase. A través de estas reflexiones los docentes pueden explicar y discutir sus prácticas y cómo estas conllevan a la calidad de su trabajo en el aula, teniendo claro que para tener un trabajo de aula de calidad, las prácticas que desarrolla el docente comienzan antes del trabajo en aula en una "recreación" de ambientes de aprendizaje, se ponen de manifiesto durante la clase, y después de la clase en una evaluación del trabajo en aula que permita mejorar las propuestas de trabajo.

El esquema de la Escuela es la impartición de Cursos, generalmente cinco, de distintos contenidos matemáticos, dictados por especialistas en cada una de las áreas de los cursos.

En el año 2006 los cursos fueron:

1. Inteligencias múltiples y enseñanza de la geometría.
2. Temas Aritméticos
3. Resolución de problemas matemáticos.
4. Logaritmos y exponenciales
5. Un lenguaje para la física: la matemática.

Durante la Escuela también se dictan charlas, en la Escuela celebrada en el 2006, la charla inaugural se tituló *Malba Tahan "El hombre que contaba cuentos"*.

El *Programa Universitario de Formación Docente en la Escuela* de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL) pretende vincular a

esta universidad con centros educativos de cualquier parte del país a través del empleo de nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones. Los propósitos de este programa son (Alves, 2002):

1. Desarrollar en los educadores/as actitudes y capacidades de participación.
2. Potenciar los valores personales, profesionales y científicos del docente.
3. Relacionar la teoría con la práctica como principio formativo de la profesión docente.

Alves (2002) sostiene que la formación docente requiere atención permanente, ligada al desempeño laboral debido a la velocidad de las transformaciones científicas, los cambios paradigmáticos e incluso las condiciones legales del ejercicio de la profesión. Además añade que la formación docente no se puede reducir a la educación inicial universitaria, ni siquiera a los programas de actualización.

Para Alves (2002) los docentes en formación permanente deben:

1. Sentirse protagonistas de la construcción de su saber pedagógico y para ello requieren investigar su propia práctica y compartir los resultados con otros investigadores de la docencia.
2. Reflexionar permanentemente para y sobre la acción con el fin de incidir en la transformación de la realidad educativa que involucra a sus estudiantes y a sí mismo.
3. Comprender su realidad, llegar a la naturaleza del ajuste o transformación para cambiar una estrategia, indagar y emprender investigaciones sobre sus

prácticas para introducir cambios, que luego valorará para reafirmar o modificar dicha práctica.

Este Programa se desarrolla en escenarios naturales (escuelas) para captar las necesidades de formación de los docentes; este desarrollo es bajo una metodología de investigación-acción que permita construir y reconstruir los materiales y las estrategias de formación de acuerdo a las necesidades y expectativas que exija la transformación de la realidad educativa (Alves, 2002).

El rol de las prácticas en este programa es explícito al afirmar que el docente debe comprender su realidad a través de la indagación e investigación de sus prácticas que le permitan introducir cambios, además por desarrollarse en escuelas las prácticas se estudian en el contexto que les da significado.

El Programa está organizado a través de un Taller Virtual Interactivo multimedia y una Red Telemática Universidad/Escuela. El Taller está basado en el hipertexto, con el objetivo de permitir a cada docente individual y a un grupo de docentes de una escuela en particular decidir sobre el tipo de información a que quiere acceder y construir así sus propios caminos de lectura según sus intereses; presenta una línea básica de formación con una secuencia lógica dividida en varias sesiones, con la posibilidad de cambiar la ruta, regresar, adelantar, consultar una enciclopedia e interactuar para desarrollar capacidades de autoaprendizaje. La Red Telemática Universidad/Escuela está conformada por los docentes de la Universidad y las Escuelas que participan en

el programa para garantizar las asesorías y el acompañamiento en sus prácticas pedagógicas (Alves, 2002).

El Programa pretende formar profesionales comprometidos con el cambio; pretende, en el docente, formar herramientas pedagógicas que le ayuden a superar sus limitaciones y contribuir así a vencer la cultura pedagógica dominante que impide avanzar. Con esta propuesta de masificación con calidad se pretende formar al docente venezolano a partir de la reflexión de su propia práctica con una visión protagónica de la construcción de su saber pedagógico (Alves, 2002).

El Programa de formación en servicio para el uso pedagógico de la tecnología, del Laboratorio Infantil del Instituto de Psicología de la Universidad Central de Venezuela es una de las experiencias del Laboratorio para evaluar la utilidad del computador en la programación y evaluación de la enseñanza. Está dirigido al aula de Preescolar y está siendo validado en el primer trimestre del año 2007 con docentes de la red de escuelas de Fe y Alegría; sus objetivos son (Rangel y Ladrón de Guevara, 2001):

1. Capacitar a los docentes en las aplicaciones de la informática educativa.
2. Diseñar recursos que les garanticen un apoyo sostenido.

Para Rangel y Ladrón de Guevara (2001) formar a los docentes para usar los medios da la posibilidad de aprovechar las oportunidades actuales de utilizar las computadoras y las redes informáticas en un nuevo contexto:

1. Para buscar, seleccionar y analizar contenidos críticamente, pensando en formar un docente crítico, que busque información de fuentes diversas, la evalúe, elabore juicios críticos acerca de su valor, confiabilidad y validez; cree y distribuya información y conocimiento a través de los medios tecnológicos; que pueda comprender los intereses ideológicos predominantes de su tiempo y que identifique las influencias históricas, sociales y culturales que sostienen el diseño de recursos y materiales tecnológicos, y además que reflexione continuamente y debata acerca de los cambios que genera el uso de la tecnología comprendiendo lo que esta puede y no puede hacer. Si se forma un docente bajo estos principios, entonces se forma para siempre.
2. Para sostener de manera autónoma su formación, ya que se proyectó la creación de un portal de información que sirve de plataforma de apoyo a la formación sostenida de los docentes y a través del cual se ofrece los conocimientos y las experiencias derivadas de las prácticas de investigación y docencia, complementando la formación de los docentes mediante la recepción, producción y entrega de información a otros y promoviendo la colaboración.

Este programa es una alternativa de formación abierta, que contempla usar críticamente los recursos disponibles en la web y que además incluye el diseño de espacios virtuales para repensar la labor docente y reflexionar sobre la práctica diaria, analizando los aspectos que requieren ser mejorados y la factibilidad de llevarlos a cabo (Rangel y Ladrón de Guevara, 2001). El papel que se le da a las prácticas docentes en este programa es central, al analizar los aspectos a ser mejorados y su factibilidad aparecen aspectos pedagógicos,

epistemológicos y sociales como lo es el propio uso de la tecnología de la información; el mismo uso de los recursos disponibles en la web y el diseño de espacios virtuales son ya prácticas docentes en sí.

La organización de este Programa contempla lecturas, discusión de materiales y reuniones de trabajo junto con acompañamiento y seguimiento continuo de la acción de los docentes orientada hacia el logro de metas previstas. El Programa se desarrolla con los docentes en servicio, el cual contempla la individualización de la enseñanza y la evaluación de logros, y la formación y seguimiento continuo. Las actividades del Programa se basan en discusiones sobre lecturas, asesorías, supervisión y registro continuo, reuniones periódicas y el recurso clave es el *Manual del Docente*, también se apoya el trabajo con un portafolio de materiales. (Rangel y Ladrón de Guevara, 2001).

En México, se lleva a cabo desde 1995 el Programa Nacional de Actualización Permanente (PRONAP) para docentes en servicio, a través de los Cursos Nacionales de Actualización (CNA) que atienden la puesta en práctica del enfoque de enseñanza de las ciencias naturales propuesto en la reforma curricular de 1993. El propósito del PRONAP es mejorar la calidad de la educación a partir de la actualización de los docentes en torno a los aspectos disciplinares, de enfoque pedagógico y de estrategias didácticas (Martínez, citado por López y otros, 2004). La finalidad es auxiliar a los docentes para que "dominen los contenidos de las asignaturas que imparten y profundicen en el conocimiento de los enfoques pedagógicos de los planes y programas de estudio y en el manejo de los recursos educativos a su disposición" (Fuentes, citado por López y otros, 2004).

López y otros (2004) llevaron a cabo un estudio que abordó la cuestión de si existían transformaciones en los aspectos del ámbito conceptual y de la práctica de los docentes de acuerdo con los propósitos de los CNA y si había relaciones entre dichos ámbitos. Por ello se incluye este Programa en este trabajo.

Las técnicas de recolección de información que utilizaron en este estudio fueron:

- a) Un cuestionario para identificar las concepciones epistemológicas y de aprendizajes de los docentes, referidas a tres enfoques, en lo epistemológico: empirismo/positivismo, racionalismo y racionalismo crítico/constructivismo (Flores y otros, citado por López y Otros, 2004); en el aprendizaje: aprendizaje mecanicista/por descubrimiento, *insight*, y aprendizaje significativo/por transformación conceptual (Flores y otros, citado por López y otros, 2004).
- b) Un guía de observación de la práctica docente en el aula, con un seguimiento de tres clases, considerado como el promedio para abordar un tema.
- c) Una entrevista a cada docente al término de las observaciones, para confirmar aspectos conceptuales y de la práctica docente.

Es evidente como las prácticas docentes fueron consideradas un aspecto fundamental en este estudio al indagar las concepciones tanto epistemológicas como de aprendizaje a través de un cuestionario, pues particularmente en las concepciones de aprendizaje el docente se ve en la necesidad de verbalizar su

experiencia para producirlos; luego al observar las prácticas en el aula y por último al entrevistar a los docentes para confirmar los aspectos tanto conceptuales como de las propias prácticas.

La muestra estuvo formada por tres docentes acreditados por los cursos, tres docentes inscritos en los cursos y tres docentes quienes no habían accedido a los cursos. Este estudio encontró que:

1. El dominio de los contenidos disciplinarios observados en clase muestra diferencias de acuerdo con la población observada, tal dominio tiende a disminuir desde quienes acreditaron los cursos, hacia los que no los han cursado; también disminuyen las relaciones del contenido disciplinario abordado en clase con respecto de alguna ley o teoría científica más amplia.
2. En cuanto al enfoque pedagógico, independientemente de si los docentes han cursado o no los CNA, no tienden a considerar la identificación y transformación de las ideas previas de los estudiantes como eje fundamental de trabajo. En cuanto a la naturaleza de la ciencia el grupo de docentes que no ha cursado los CNA muestra una concepción positivista de la ciencia congruente con una práctica docente expositiva; mientras que los docentes que aprobaron o están cursando los CNA se identifican conceptualmente con el constructivismo, declaración que no se refleja en lo observado en clase, a excepción de un caso. La mayoría de los docentes centra su práctica docente en los contenidos programáticos presentados en el libro de texto, independientemente de haber cursado o no los CNA. De manera que parece persistir una concepción positivista de la ciencia acorde con una práctica docente expositiva.

3. En las estrategias didácticas, se encontró que las actividades experimentales forman parte de la práctica de los docentes, indistintamente de si acreditaron los cursos o no; aunque los propósitos que les asignan a la experimentación son distintos. En su mayoría los docentes no estimulan el análisis y la discusión de los estudiantes en torno a los experimentos realizados, como en el caso de las ideas previas. Parece que los docentes acreditados por los CNA pueden darle otra orientación a la experimentación desde su concepción de la ciencia, sin embargo, lo que se observó en sus prácticas es que esto se ve restringido por no tomar en cuenta las ideas previas de los estudiantes para discutir fenómenos particulares. En cuanto a la organización del trabajo, los docentes acreditados por los cursos utilizan el trabajo en equipo, aunque no aprovechan sus ventajas al no propiciar la reflexión ni el debate de ideas de los estudiantes, con lo cual no promueven la construcción de conceptos. La mayoría de los docentes no acreditados y los que están en curso no utilizan el trabajo en equipo. En su mayoría todos los docentes tienen un estilo de enseñanza expositivo.
4. En cuanto a la evaluación, se realizan evaluaciones de distinta índole aunque las formas de llevarla a cabo enfatizan los procesos de memorización, utilizando formas tradicionales y "cerradas" de evaluar, sin valorar el desarrollo conceptual de los estudiantes. En la práctica, esto ocurre independientemente de si los docentes fueron acreditados o no en los cursos.

Las conclusiones a que llegaron López y otros (2004) fueron que los cursos de acreditación parecen tener alguna influencia en el dominio conceptual, los

enfoques pedagógicos, las aplicaciones didácticas y la evaluación del aprendizaje que hacen los docentes de ciencias naturales estudiados, esto se refleja mediante un discurso constructivista, con ciertas modificaciones externas, pero sin transformaciones más profundas en su práctica docente. Dichas prácticas son impactadas mayormente en lo referente al dominio conceptual y parcialmente en las aplicaciones didácticas. Más no hay impacto en cuanto al enfoque pedagógico ni en el aspecto evaluativo. Lo que ellos infieren es que la transformación de las prácticas docentes necesita que se modifiquen las concepciones de ciencia y aprendizaje de los docentes y que se incorporen en el aula tales conceptualizaciones. Por lo cual proponen que el objetivo de los procesos de actualización docente sea precisamente el reconocimiento y la transformación de dichas concepciones, utilizando temas específicos que se enseñan en secundaria...lo que implicaría también repensar el carácter autodirigido de los cursos hacia otras formas de organización que posibiliten el debate de las ideas de los docentes entre ellos mismos sobre los contenidos disciplinares así como los aspectos pedagógicos y didácticos de manera integrada.

Otra vez el papel de las prácticas, y en particular de la transformación de las mismas, es considerado un aspecto fundamental de un programa de formación docente. Este estudio propone como primer paso para esta transformación el reconocimiento de las concepciones de los docentes para luego transformarlas. Todo esto en un espacio que permita el debate de las ideas de los docentes sobre contenidos disciplinares, pedagógicos y didácticos.

El papel de las prácticas en los seis programas estudiados (cinco en Venezuela y uno en México) es:

1. En el Programa Samuel Robinson va al Liceo de la UCV se promueve la práctica docente reflexiva en los Centros de Reflexión y Actualización del Profesorado, el cual es un espacio que favorece el cambio actitudinal y la revisión de las concepciones arraigadas en la práctica cotidiana.
2. En el Seminario Venezolano de Educación Matemática de la ULA se persigue contribuir con la creación de escenarios donde se ponga en marcha las concepciones y prácticas compatibles con aprendizajes matemáticos significativos, lo cual permite la reflexión, explicación y discusión de las prácticas sobre la matemática educativa.
3. En la Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática de la ULA se pretende crear conciencia de la necesidad de recrear la matemática y reflexionar día a día sobre la pertinencia y la calidad del trabajo en las aulas de clase, a través de estas reflexiones pueden los docentes explicar y discutir sus prácticas y cómo estas conllevan a la calidad de su trabajo en el aula.
4. En el Programa Universitario de Formación Docente en la Escuela de la UPEL los docentes indagan e investigan sus prácticas para comprender su realidad y poder introducir cambios.
5. En el Programa de formación en servicio para el uso pedagógico de la tecnología de la UCV los docentes reflexionan sobre su práctica diaria, analizando los aspectos que requieren ser mejorados y la factibilidad de llevarlos a cabo.

6. En el Programa Nacional de Actualización Permanente de México las prácticas son impactadas mayormente en lo referente al dominio conceptual y parcialmente en las aplicaciones didácticas.

El papel de la matemática educativa en estos programas es:

1. En el Seminario Venezolano de Educación Matemática de la ULA se declara a la matemática como un lenguaje, como un instrumento que favorece la organización del pensamiento y como un quehacer humano histórico que forma parte del patrimonio cultural de la humanidad.
2. En la Escuela Venezolana de Enseñanza de la Matemática de la ULA se plantea la necesidad de recrear la matemática y de reflexionar sobre la pertinencia y la calidad del trabajo en las aulas.

Un nuevo Programa de Formación de Docentes de matemáticas que recoja las ventajas de los programas estudiados y que se dirija al tema de la iniciación al álgebra se caracterizaría por:

1. Tener como un objetivo identificar y fortalecer los conocimientos y las prácticas de los docentes sobre el álgebra, su aprendizaje y enseñanza.
2. Darle a las prácticas un rol central en los cursos de formación de los docentes, por lo cual es necesario contar con espacios para la reflexión, la explicación y la discusión centrada en los conocimientos sobre el álgebra, su aprendizaje y enseñanza, y cómo estos dirigen las acciones de los docentes; y también considerar el acompañamiento y seguimiento del trabajo del

docente en el aula para observar las prácticas, tanto del docente como de los y las estudiantes.

3. Estar centrados en temas con que trabajen los docentes para que estos le encuentren sentido y realmente se beneficien del programa tanto ellos como los estudiantes. En el caso de la iniciación al álgebra algunos temas son la construcción de expresiones algebraicas a partir de contextos aritméticos y geométricos, la construcción y solución de ecuaciones, y la resolución de problemas algebraicos.
4. Desarrollarse en el contexto de las escuelas, con sus características propias de funcionamiento, compromiso con el trabajo de los docentes y valorización de los productos que permitan mejorar la calidad de la educación de toda la institución.
5. Tener una duración que permita: identificar los conocimientos y las prácticas, fortalecerlas a través de la reflexión y el análisis, producir nuevas prácticas.
6. Tener un carácter interdisciplinario que permita, en el caso particular de la matemática, ver las aplicaciones y los aspectos sociales que median en la producción del conocimiento matemático.

CAPITULO II

El problema de investigación

CAPITULO II. El problema de investigación

En este capítulo se plantea el problema de investigación, partiendo de los contenidos y prácticas de la formación docente, y de cómo las prácticas docentes han cobrado un lugar importante en los programas de formación docente. También el planteamiento se basa en la necesidad de que en los programas se traten temas específicos de la matemática escolar, y para ello se limita el problema al tema de la iniciación al álgebra. Una condición para abordar el problema de investigación es buscar las explicaciones en los productos específicos de la Matemática Educativa más que en resultados de otras áreas generales como la pedagogía y la psicología, de manera de que el abordaje del problema se haga con explicaciones propias de la Matemática Educativa, de la epistemología de la matemática, de la psicología del aprendizaje de la matemática y de la didáctica de la matemática. Para finalizar, se plantean los objetivos de la investigación.

EL PROBLEMA: La formación docente

La formación de los docentes juega un papel fundamental en el aprendizaje de los estudiantes (Adler, 2005), es por ello que para mejorar los aprendizajes de los estudiantes es importante mejorar la formación de los docentes. Los Programas de Formación Docente (PFD) tienen distintos objetivos, abarcan distintos contenidos y desarrollan diversas actividades, por lo cual para diseñar un PFD hay que preguntarse qué se quiere lograr con los docentes, qué

se espera que sepan los docentes y con qué actividades se podrá desarrollar el programa.

Durante los últimos años se han reconceptualizado los PFD en matemática haciendo énfasis en la importancia de incorporar en dichos programas prácticas útiles para los docentes (Schawn, 2001), entendiéndose como tal la reflexión y el análisis de situaciones reales del trabajo cotidiano de los docentes. Además, hay una tendencia hacia que los PFD efectivos sean específicos en temas particulares de la matemática escolar, que permitan a los docentes profundizar en el aprendizaje de conceptos y significados particulares de la matemática.

Por otra parte, se ha encontrado que en el caso específico de los docentes de matemáticas, para que los docentes fijen su atención en los conocimientos de didáctica de la matemática deben primero estar seguros de sus conocimientos matemáticos (Curi, 2004; Valdez, 2001). Ahora bien, para Abdalla (2004) las prácticas docentes son los conocimientos en situación de los docentes, son producto de su experiencia, van más allá de sus creencias, concepciones y conocimientos teóricos que pueden haber adquirido durante su formación inicial. Los conocimientos que tienen los docentes no son solamente sobre la matemática y su didáctica, también comprenden cómo los estudiantes aprenden matemáticas y cuáles son las estrategias de aprendizaje que desarrollan, o cómo las tecnologías de la información pueden ser usadas para apoyar el aprendizaje estudiantil, estas prácticas están referidas al trabajo en aula, a la relación directa con las y los estudiantes, pero también un docente desarrolla conocimientos en situación en el contexto de su escuela particular, sobre los

medios que tiene para lograr los aprendizajes de sus estudiantes, sobre cómo hacer un trabajo cooperativo con sus colegas y lograr la mejora de la educación matemática en su escuela, sobre los hechos actuales de la sociedad donde desarrolla su trabajo y cómo utilizarlos para diseñar situaciones de aprendizaje. Las prácticas docentes tienen como referencia el trabajo en aula y abarcan el antes, durante y después de la clase; pues como plantea Schawn (2001) el trabajo de los docentes es cíclico e incluye una planificación, una ejecución del plan y una evaluación del mismo.

Las prácticas de un docente de matemática son sus acciones orientadas por sus conocimientos sobre la matemática y sus epistemologías, sobre las condiciones en que se da la reconstrucción del conocimiento matemático en los estudiantes, sobre los fenómenos didácticos ligados al conocimiento matemático, por ejemplo sobre cómo la resolución de problemas influye en la base de conocimiento de la persona; sobre cómo la tecnología influye en la reconstrucción del conocimiento, sobre cómo diseñar situaciones de aprendizaje matemático con hechos de actualidad que ocurran en su país, sobre cómo realizar trabajo cooperativo con sus colegas de ciencias .

Para estudiar las prácticas docentes Aiello (2005) propone un abordaje desde tres perspectivas: 1.- la de la escucha sobre lo que el docente dice saber (sus creencias y sus conocimientos), 2.- la de la observación de lo que el docente hace en su aula, 3.- la de la lectura de la producción del docente (planificaciones de clases, tareas de los estudiantes). Para lograr este estudio un PFD debe tener una organización que permita tanto la escucha, durante talleres, como la observación, a través de actividades de acompañamiento del

trabajo del docente en la escuela, y la lectura de las producciones de los docentes que forman parte de un portafolio del trabajo en el PFD.

En los PFD estudiados en este trabajo, las prácticas docentes tienen un papel central, al menos a nivel de los objetivos, es decir, en estos programas los docentes tienen la oportunidad de reflexionar, explicar y discutir sus prácticas, basadas en sus conocimientos y producto de su experiencia. Sin embargo, en algunos de estos programas no se discuten temas específicos de la matemática educativa, o su organización no permite la observación de las prácticas en el aula, la posterior confrontación de las mismas dentro de los programas ni la producción de nuevas prácticas.

En el Programa Samuel Robinson va al Liceo de la Universidad Central de Venezuela, se plantea la preparación y constitución de equipos líderes en los liceos que promuevan la creación de Centros de Reflexión y Actualización del Profesorado, donde se promueva la práctica docente reflexiva, no necesariamente sobre temas específicos de la matemática educativa. Sin embargo, son pocos los centros que se han mantenido trabajando luego de su creación durante el Programa, por lo cual los cambios de las prácticas y las innovaciones educativas no han sido posibles.

En el Seminario Venezolano de Educación Matemática de la Universidad de Los Andes se crean espacios para poner en marcha concepciones y prácticas compatibles con los aprendizajes matemáticos significativos, pero por ser la duración del seminario de tres días al año no hay tiempo para evidenciar el desarrollo de dichas prácticas. Igualmente en la Escuela Venezolana para la

Enseñanza de la Matemática organizada por docentes en su mayoría de la misma Universidad de Los Andes, la duración de la Escuela, de una semana anual en época de vacaciones, no reporta evidencias que permitan afirmar que existe seguimiento a las prácticas de los docentes discutidas durante la Escuela.

En el Programa Universitario de Formación Docente en la Escuela de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador los docentes investigan sus prácticas para introducir cambios, pero no se discuten temas específicos de la matemática educativa. Igualmente ocurre en el Programa de formación en servicio para el uso pedagógico de la tecnología de la Universidad Central de Venezuela.

En el Programa Nacional de Actualización Permanente de la Secretaría de Educación Pública de México si parece haber un impacto en las prácticas docentes particularmente en lo referente al dominio conceptual y a las aplicaciones didácticas, mas no en cuanto al enfoque pedagógico y al aspecto evaluativo (López y otros, 2004); lo cual los llevó a afirmar que se debe repensar el carácter autodirigido de los cursos que imparte el Programa hacia otras formas de organización que posibiliten el debate de las ideas entre los docentes sobre los contenidos disciplinares, los aspectos pedagógicos y didácticos de manera integrada.

En todos los PFD estudiados se encontraron dificultades para lograr el objetivo principal de cualquier programa de formación docente: transformar y producir nuevas prácticas que mejoren los aprendizajes de los estudiantes. Las

razones de estas dificultades, en el caso particular de los programas dirigidos a docentes de matemática, son fundamentalmente la poca relación con temas específicos de la matemática educativa y la organización de los programas, que en algunos casos no permite el seguimiento del trabajo del docente en la escuela, bien sea por la poca duración del programa o por no plantearse como actividad el acompañamiento del trabajo del docente, o en otros casos por su carácter autodirigido que no permite la confrontación de las ideas entre los docentes y así un cambio en sus conocimientos y en sus prácticas.

En el caso de los PFD de Venezuela analizados existe una dificultad aún mayor: los programas son diseñados de buena voluntad por docentes universitarios preocupados por la calidad de la educación en los niveles educativos anteriores al universitario y los docentes de estos niveles participan en los distintos programas también por su preocupación por actualizarse y mejorar en algo su trabajo, pero no existe como en el caso de México una reforma educativa que incluya formación docente y que haga seguimiento al trabajo del docente de alguna forma, desde una instancia nacional y como política de estado.

Ante este panorama de la formación de docentes de matemática en servicio es urgente sustentar teóricamente el diseño de un programa de formación dirigido a estos docentes que incluya los valiosos aportes de la matemática educativa como disciplina científica, que esté centrado en las prácticas docentes y cuya organización permita abordar las prácticas de una manera integrada (desde la escucha, la observación y la lectura) para lograr la producción de nuevas prácticas y de innovaciones educativas que apoyen el mejoramiento de los aprendizajes estudiantiles.

En los PFD dirigidos a docentes de matemáticas de educación básica y media (estudiantes de edades comprendidas entre los 12 y 17 años) se pueden abordar contenidos particulares de la matemática como son los relacionados con la geometría, los relacionados con el álgebra, el estudio de las funciones, la trigonometría y el tema estratégico de la resolución de problemas. Escoger los temas a abordar es una de las primeras decisiones que debe tomar el diseño de un PFD, de manera de orientar las prácticas docentes. Para los niveles básico y medio no cabe duda que el álgebra es uno de los temas esenciales, en primer lugar por tener un lenguaje necesario para todos los demás temas matemáticos estudiados en este nivel y porque es hasta este nivel cuando los estudiantes están mejores capacitados intelectualmente para hacer generalizaciones y abstracciones que es de lo que se trata el álgebra. Por otra parte, no se conoce cuál es la influencia que tienen los docentes y sus prácticas en la construcción del conocimiento algebraico. Radford (2000) plantea que poco se conoce de la influencia que tiene el discurso de los docentes en las discusiones de los estudiantes y las ideas que éstos se van formando sobre el uso de símbolos. Dada la importancia del conocimiento algebraico en el nivel educativo señalado y lo poco que se sabe sobre la influencia de las prácticas docentes el proceso de aprendizaje del álgebra, es importante hacer un estudio sobre la formación de docentes de matemática que trabajan en los niveles básicos y medio.

El estudio del álgebra comienza con el desarrollo de los procesos de generalización y de simbolización (Grupo Azarquiél, 1993) para luego estudiar expresiones matemáticas y sus operaciones lo cual conlleva un proceso de

abstracción. Algunas de esas expresiones son las ecuaciones, los problemas, las funciones, los conjuntos, los grupos y los anillos. En este trabajo, ubicado en los niveles educativos básicos y medio, se abordará la etapa inicial del estudio del álgebra, la cual abarca los procesos de generalización y de simbolización, la construcción de expresiones algebraicas y de ecuaciones, y la resolución de las ecuaciones y de problemas algebraicos; ya que en un estudio de los programas oficiales de matemáticas de Venezuela de estos niveles se encontró que:

1. No existen objetivos ni estrategias referidas al proceso de generalización.
2. Los objetivos y estrategias referidos a ecuaciones, hacen énfasis en el conjunto numérico al cual pertenece la solución de la ecuación y no se desarrollan los procesos de construcción y resolución de las ecuaciones, lo cual no permite un progreso en la adquisición del concepto de incógnita, ni en el manejo del simbolismo ni en la comunicación del pensamiento algebraico.
3. La resolución de problemas está relacionada a contenidos específicos: adición de números racionales, relaciones entre elementos geométricos, operaciones en los números enteros y racionales, ecuaciones de segundo grado, números complejos, progresiones, inecuaciones y cónicas. No hay objetivos ni estrategias dirigidas al proceso de resolución de problemas como tal: exploración y análisis de problemas, usos de distintas estrategias, interpretación de soluciones (Gamboa, 2007).

Razones por las cuales urge discutir estos contenidos específicos con los docentes, hacerlos reflexionar sobre las prácticas del álgebra educativa y

actualizarlos en cuanto a los resultados de investigación en matemática educativa referidos a estos contenidos específicos.

Existe una cantidad importante de investigaciones sobre álgebra educativa, particularmente en su etapa inicial, que debe ser utilizada como insumos básicos de los PFD de matemática. Estas investigaciones han sido producto del auge de la Matemática Educativa como disciplina científica en los últimos años y es hora de que los programas de formación docente trabajen directamente con estos resultados en vez de basarse en teorías de aprendizaje y modelos didácticos generales.

Las investigaciones sobre álgebra educativa aportan elementos sobre cuál es el rol del docente, sus conocimientos y sus prácticas al trabajar los temas de álgebra inicial. Los conocimientos de los docentes sobre álgebra escolar están relacionados con el papel del álgebra dentro de la matemática, su lenguaje para comunicar las ideas matemáticas y su uso para resolver problemas y modelar situaciones matemáticamente. Las prácticas docentes basadas en estos conocimientos orientan el trabajo del docente hacia una determinada caracterización del álgebra escolar.

Por todo lo expuesto anteriormente, este trabajo se plantea las siguientes preguntas de investigación:

1. De acuerdo a la revisión de la investigación existente sobre álgebra educativa, ¿cómo se caracterizan las prácticas docentes?

2. ¿Cómo, entonces, deben ser los Programas de Formación de Docentes de Matemática en servicio que están encaminados a promover las nuevas prácticas docentes del álgebra educativa?

OBJETIVOS de la investigación

1.1 Analizar distintos estudios del álgebra educativa para inferir cuáles son las nuevas prácticas docentes propuestas en dichos estudios.

2.1 Describir programas de formación docente, donde participan docentes de matemática, para analizar cómo consideran las prácticas docentes y determinar el uso que hacen de la investigación en matemática educativa.

2.2 Sustentar teóricamente el diseño de un nuevo Programa de Formación de Docentes de Matemática basado en las nuevas prácticas docentes propuestas por la investigación en álgebra educativa.

CAPITULO III

La iniciación al álgebra

CAPÍTULO III. La iniciación al álgebra

En este capítulo se presenta una visión de la producción de investigación referente al aprendizaje y la enseñanza del álgebra en su etapa inicial. Con esta visión como base se discutirán las prácticas docentes que promueven los aprendizajes referidos, las cuales se analizarán y promoverán en un nuevo programa de formación de docentes de matemática.

Qué es el álgebra educativa

Según Socas y Palarea (1997) la forma más convencional de concebir el álgebra es como la rama de las matemáticas que trata de:

- la simbolización de las relaciones numéricas generales,
- las estructuras matemáticas,
- las operaciones de las estructuras.

En este sentido, el álgebra educativa se interpreta como "una aritmética generalizada" y como tal involucra a la formulación y manipulación de relaciones y a las propiedades numéricas. Sin embargo, las investigaciones ponen de manifiesto las implicaciones que tienen para el aprendizaje del álgebra, considerar la aritmética como su antecesora; el álgebra no es simplemente una generalización de la aritmética, supone un cambio en el

pensamiento del estudiante y la dificultad para muchos principiantes en la transición desde lo que puede considerarse modo informal de representación y resolución de problemas, al modo formal (Socas y Palarea, 1997; Papini, 2003).

En un estudio realizado durante cuatro años en la década de los noventa, con el propósito de explorar la comprensión algebraica, se preguntó "*qué es álgebra*" a un grupo de matemáticos, docentes, estudiantes e investigadores de educación matemática, los resultados de las entrevistas se agruparon en siete temas:

1. Álgebra es un asunto escolar.
2. Álgebra es aritmética generalizada.
3. Álgebra es una herramienta.
4. Álgebra es un lenguaje.
5. Álgebra es una cultura.
6. Álgebra es una forma de pensamiento.
7. Álgebra es una actividad.

(Lee, citado por Kieran, 2004)

La tendencia que se observó en las entrevistas fue la de álgebra es una actividad, pues el álgebra emerge como una actividad, como algo que hacer, como un área de acción en casi todas las entrevistas (Lee, citado por Kieran, 2004). En relación con este resultado Kieran (2004) plantea que las actividades del álgebra escolar son de tres tipos: generacionales, transformacionales y de global/meta nivel.

Para Papini (2003) el álgebra puede considerarse desde dos dimensiones. Desde la dimensión de instrumento se usa como una herramienta para resolver problemas tanto intramatemáticos como extramatemáticos. Desde la dimensión de objeto como un conjunto estructurado (parámetros, incógnitas, variables, ecuaciones, inecuaciones y funciones) que tiene propiedades y que se trata de modo formal con distintas representaciones (escrituras algebraicas, gráficos, etc.).

La creación del lenguaje algebraico permite estudiar los conjuntos numéricos paralelamente al trabajo operativo con los mismos. El lenguaje algebraico es un instrumento de estudio de las propiedades de los números, las cuales a su vez permiten transformar y crear nuevas expresiones algebraicas (Papini, 2003).

De manera análoga a como plantea Beyer (2006) la definición de lenguaje matemático, el lenguaje algebraico es aquel que una persona utiliza para transmitir las ideas algebraicas a otras personas y se caracteriza mediante diversas dimensiones como son la verbal, la simbólica y la gráfica. Los elementos de este lenguaje comúnmente son llamados expresiones algebraicas, fórmulas, ecuaciones, inecuaciones, funciones y sirven para resolver problemas y modelar matemáticamente distintas situaciones tanto intramatemáticas como extramatemáticas.

El lenguaje algebraico presupone actos de generalización y abstracción, se utiliza para comunicar y producir nuevo conocimiento matemático. El lenguaje algebraico puede ser usado de manera abstracta y descontextualizada para

transformar expresiones algebraicas sin referirse constantemente a los objetos que estas simbolizan; pero al mismo tiempo la estructuración del álgebra se basa en el contexto numérico y por lo tanto depende de las relaciones y propiedades numéricas (Papini, 2003).

Los procesos de generalización y simbolización persiguen la adquisición del lenguaje algebraico y el desarrollo del pensamiento algebraico. En este sentido Beyer (2006) plantea que el lenguaje matemático tiene tres dimensiones: la verbal, la simbólica y la gráfica. Para desarrollar la dimensión simbólica el docente debe estar alerta sobre la no linealidad del lenguaje matemático, el cual no necesariamente se lee de izquierda a derecha pues en él se entremezclan símbolos propios de la matemática con expresiones del lenguaje natural. Un ejemplo de ello es el caso de las ecuaciones y las inecuaciones, en el cual se tiende a colocar la equis en el lado izquierdo para forzar la lectura de izquierda a derecha. Esta tendencia de parte del docente, hace que al no hacerlo a los estudiantes les parezca incompleto el problema. La dimensión gráfica es auxiliar del quehacer pedagógico y está estrechamente vinculada con los procesos intuitivos; para el caso de la solución de ecuaciones los modelos de la balanza y de grafos son ejemplos de ello.

El lenguaje algebraico es un instrumento del pensamiento algebraico, el cual se desarrollará en la medida que se domine el lenguaje algebraico. La escuela, específicamente el docente, juega un rol fundamental al ofrecer oportunidades de interactuar con este lenguaje y de recibir retroacciones que permitan producir nuevos significados (Papini, 2003).

Por su parte, Torres y otras (2002) consideran que el álgebra es un lenguaje, es una forma de comunicar algo y encuentran que el lenguaje algebraico presenta frente a otros lenguajes las siguientes ventajas:

- a) Permite expresar generalizaciones de situaciones, con lo cual se pueden hacer inferencias y transferencias de las mismas situaciones a otra más complejas.
- b) Permite comunicar una regularidad o un patrón de conocimiento, frecuentes en el mundo.

Según Usiskin (1988), los propósitos del álgebra están determinados por diferentes concepciones del álgebra, lo cual se correlaciona con la importancia relativa de los varios usos de las variables. Estas concepciones son:

1. El álgebra como aritmética generalizada. En esta concepción se piensa en las variables como patrones generalizadores. Las instrucciones clave para los estudiantes en esta concepción del álgebra son *traducir* y *generalizar*. Estas destrezas son importantes no solo en álgebra sino también en aritmética. En un compendio de aplicaciones de aritmética (Usiskin y Bell, citado por Usiskin, 1988), se concluyó que es imposible estudiar adecuadamente aritmética sin implícita o explícitamente tratar con variables.
2. El álgebra como estudio de procedimientos para resolver ciertos tipos de problemas. Bajo la concepción del álgebra como un generalizador de patrones, no se tienen incógnitas, se generalizan relaciones conocidas entre números, y no se tiene la sensación de incógnitas. En esta concepción del

álgebra, las variables son incógnitas o son constantes. Las instrucciones claves en esta concepción son *simplificar y resolver*.

3. El álgebra como el estudio de las relaciones entre cantidades. La concepción de álgebra como el estudio de relaciones entre cantidades comienza con fórmulas (p.e. fórmulas de cálculo de área de figuras geométricas), donde se utilizan elementos que varían (las variables), no como incógnitas ni como patrones generalizadores.
4. Álgebra como el estudio de las estructuras. El estudio del álgebra a nivel universitario involucra estructuras tales como grupos, anillos, dominios integrales, campos y espacios vectoriales. Parece tener poca semejanza con el estudio del álgebra a nivel de secundaria, aunque los campos de los números reales, números complejos, los distintos anillos polinómicos que subyacen en la teoría del álgebra, las propiedades de dominios integrales y grupos explican por qué ciertas ecuaciones pueden ser resueltas y otras no. Aún se reconoce al álgebra como el estudio de las estructuras mediante las propiedades que le atribuimos a las operaciones sobre los números reales y los polinomios.

También para Ursini y otros (2005) la enseñanza del álgebra escolar se caracteriza por la introducción de las variables para representar números; y si bien los estudiantes desde la escuela primaria han trabajado con las letras en fórmulas geométricas, es en la escuela secundaria cuando las letras surgen con mayor frecuencia en contextos algebraicos donde se espera que los estudiantes aprendan a interpretarlas como incógnitas o como números indeterminados dependiendo de la situación en que aparecen. Según ellos los resultados de numerosas investigaciones han reportado que la mayoría de los

estudiantes tienen serias dificultades para desarrollar una comprensión y una manipulación adecuada del uso de las letras en álgebra. Desde esta perspectiva han trabajado en el álgebra de secundaria y han definido tres usos de la variable: para representar incógnitas, los números generales y las relaciones funcionales entre distintas cantidades; y plantean que para que los estudiantes puedan usar las variables en estas tres formas deben desarrollar las siguientes capacidades básicas:

- Operar con las variables realizando cálculos sencillos.
- Comprender las operaciones con las variables y el por qué de los resultados obtenidos.
- Darse cuenta de la importancia de ser capaz de usar las variables para modelar matemáticamente distintas situaciones.
- Diferenciar los distintos usos de las variables en álgebra.
- Pasar con flexibilidad entre los distintos usos de las variables.
- Integrar los diversos usos de las variables como caras distintas de un mismo objeto matemático, que se utilizan dependiendo de la situación particular.

Para lograr que los estudiantes desarrollen estas capacidades es fundamental que el docente ya las tenga (Ursini y otros, 2005). En un estudio con 74 docentes de secundaria Juárez (2003) encontró que estos no tenían un buen manejo de los tres usos de la variable propuestos por Ursini y otros; específicamente encontró que los docentes son capaces de reconocer el papel de la variable en expresiones y problemas simples, pero que un aumento leve en la complejidad de las situaciones provoca generalizaciones inadecuadas y una

tendencia a buscar soluciones memorizadas o a emplear procedimientos aritméticos. Por lo cual concluye que la escasa comprensión que tiene el docente de los diferentes usos de las variables es transmitida a los estudiantes de forma inconsciente. Ante esta situación difícilmente los estudiantes podrán desarrollar las capacidades básicas para utilizar las variables en sus distintos usos.

Por otra parte, Acevedo y Falk (2000) encontraron que los docentes presentan diferentes niveles de dominio conceptual y diversas concepciones acerca del álgebra escolar. Doerr (2004) plantea que las conceptualizaciones de álgebra dadas por investigadores, quienes desarrollan el currículo y educadores de matemática no necesariamente reflejan las conceptualizaciones hechas por los docentes; además señala que se han encontrado evidencias de que los docentes tienden a enfatizar como núcleo del álgebra el conocimiento procedimental para resolver ecuaciones, y de que existen diferencias entre las estrategias utilizadas por los docentes y las utilizadas por los estudiantes en la solución de problemas y también difieren en las estrategias utilizadas si los problemas son algebraicos o aritméticos.

Para Cedillo (1999) el álgebra educativa puede concebirse como el estudio de las reglas de la manipulación simbólica complementado con el desarrollo de habilidades para usar eficientemente las representaciones algebraicas, tabular y gráfica de las funciones como herramienta para expresar y justificar las generalizaciones y plantear y resolver problemas.

Para MacGregor (2004, p. 318) gran parte de la comunidad de educación matemática acepta que el álgebra:

1. Es una parte necesaria del conocimiento general de miembros de una sociedad democrática y educada.
2. Es un prerrequisito para futuros estudios de matemáticas, ciertos cursos de una educación superior y muchos campos de empleo.
3. Es un componente crucial de la alfabetización matemática, en el cual se basa un futuro tecnológico y el progreso económico de la nación.
4. Es un camino eficiente para resolver ciertos tipos de problemas.
5. Promueve la actividad intelectual de generalización, pensamiento organizado y razonamiento deductivo.

En este trabajo se concibe el álgebra educativa con las siguientes características:

- tiene un lenguaje propio, el lenguaje algebraico, el cual desarrolla el pensamiento algebraico a medida que se domina el lenguaje y este supone procesos de simbolización, generalización y abstracción. Los elementos de ese lenguaje son las expresiones algebraicas, las fórmulas, las ecuaciones, las inecuaciones y las funciones.

- depende del uso que se le dé a las variables, bien sea como patrón para construir expresiones algebraicas, como incógnita para construir y resolver ecuaciones e inecuaciones; y como relación funcional para el análisis de otros objetos matemáticos.
- se utiliza como herramienta de solución de problemas y de modelación matemática.
- el aprendizaje del álgebra introduce a las personas en la formalización matemática.

Una primera implicación que tiene la existencia de distintas concepciones del álgebra educativa para un programa de formación de docentes de matemática es la necesidad de indagar cuáles son las concepciones de álgebra educativa que tienen los docentes y la relación de dichas concepciones con sus prácticas. Una revisión de las concepciones como la presentada en este apartado puede servir de guión para la reflexión y discusión de las concepciones y de las prácticas de los docentes sobre el álgebra educativa, y para compararlas con las concepciones dadas por quienes investigan en álgebra educativa y diseñan los currículos de matemáticas, de manera de ampliar la concepción de los docentes y orientar sus prácticas.

Iniciación en el aprendizaje del álgebra

Las matemáticas han sido siempre parte de los currículos escolares, pues se considera que parte de la cultura universal que debe transmitirse de generación en generación es la referente a los conocimientos matemáticos. Los conocimientos matemáticos específicos que generalmente se desarrollan en la

escuela pueden clasificarse como conocimientos aritméticos, algebraicos, geométricos, probabilísticos y estadísticos; entendiéndose como "conocimientos" tanto los conceptos como los procesos, las habilidades o destrezas.

La educación matemática de niñas y niños suele iniciarse con la identificación y ordenamiento de los números naturales, los que sirven para contar, para luego manipularlos u operarlos, los cuales entran dentro de los conocimientos aritméticos. Paralelamente, desde los primeros años de escuela, también se reconocen las figuras geométricas elementales (círculos, rectángulos y triángulos) y a medida que van pasando los años se van introduciendo nuevos conjuntos numéricos, nuevos conceptos geométricos y se van complejizando las operaciones tanto numéricas como geométricas. El álgebra, en cambio, se comienza a introducir en la escuela en grados más avanzados, aproximadamente entre las edades de diez a doce años, cuando las niñas y los niños se encuentran al final del estadio de operaciones concretas, según la teoría de desarrollo cognitivo de Piaget (Collis, citado por Socas y otros, 1996).

Según la teoría de desarrollo cognitivo de Piaget de trece a quince años se desarrolla el estadio de la generalización concreta, y de dieciséis años en adelante el estadio de las operaciones formales; es en este estadio que se está preparado para trabajar con el sistema formal abstracto que constituye la esencia de las matemáticas (Socas y otros, 1996).

En el estadio de la generalización concreta el estudiante puede usar un cierto número de operaciones, no accesibles físicamente, en la medida en que están

seguros de que las operaciones pueden clausurarse en cualquier momento y proporcionarles un resultado único que se puede aplicar a la realidad física. Necesitan la garantía de la clausura, pero no cerrar secuencialmente operación por operación. En este estadio los estudiantes utilizan elementos generalizados como cifras grandes y letras en sustitución de números (Socas y otros, 1996).

En el estadio de las operaciones formales el estudiante no tiene necesidad de relacionar los elementos matemáticos, sus operaciones y combinaciones de ellos con modelos análogos físicos, y como encontró Collis citado por Socas y otros (1996) que la capacidad para trabajar con letras dependía de lo que los estudiantes eran capaces de considerar como real, en este estadio los estudiantes pueden tomar como realidad un sistema abstracto bien determinado por definiciones y reglas. También los estudiantes pueden resolver problemas en los que las letras representan números o variables manipuladas por una operación determinada. Otros aspectos del desarrollo de este estadio son el razonamiento inductivo, el deductivo, las abstracciones reflexivas, el pensamiento proporcional y los esquemas operacionales que combinan operaciones y variables (Socas y otros, 1996).

Según Crawford (citado por MacGregor, 2004, p. 314) las competencias algebraicas son:

- 1. Habilidad para pensar en un lenguaje simbólico, comprender el álgebra como una aritmética generalizada y como el estudio de las estructuras matemáticas.*

- 2. Habilidad para comprender igualdades y ecuaciones de álgebra y aplicarlas dentro del conjunto de la solución de problemas del mundo real.*
- 3. Habilidad para comprender relaciones de cantidades a través de patrones, definición de funciones y aplicación de modelos matemáticos.*

Todas estas competencias requieren de un desarrollo intelectual más abstracto que se alcanza más hacia la adolescencia y es por ello que la ubicación del álgebra en la escuela es más tardío.

Objetivo del álgebra educativa

El objetivo del álgebra educativa es desarrollar el razonamiento o pensamiento algebraico. Para MacGregor (2004) el razonamiento algebraico implica análisis de situaciones reales, formulación de relaciones críticas como ecuaciones, aplicación de técnicas para resolver las ecuaciones, e interpretación de los resultados; y en cambio lo que algunos estudiantes parcialmente aprenden es una colección de reglas a ser memorizadas y trucos a ser ejecutados, que no tienen coherencia lógica, muy poca conexión con aprendizaje aritméticos previos, y ninguna aplicación en otros asuntos escolares o en el mundo fuera de la escuela.

El desarrollo de un razonamiento algebraico, las destrezas en la manipulación de objetos matemáticos o las llamadas competencias algebraicas son

fundamentales para toda persona que decida estudiar una carrera científica o técnica. Para el ciudadano y ciudadana que no sigue estudios en estas áreas o que no sigue estudios a nivel universitario también es de suma importancia desarrollar su razonamiento algebraico, tal como los procesos de generalización, abstracción y simbolización, de manera de que pueda comprender la realidad, analizarla, poder hacer predicciones y participar en la toma de decisiones que le competen.

Papini (2003) plantea algunas explicaciones para los primeros aprendizajes del álgebra basadas en la relación pensamiento y lenguaje según Vigotsky. En este trabajo se relacionan la psicología y la didáctica admitiendo que existe una complementariedad entre ambas y, para el caso particular del álgebra escolar, plantea que es necesario aprender la mecánica de la manipulación de símbolos para luego utilizarlos en tareas de modelización, justificando en el plano psicológico dicha práctica didáctica.

Para Acevedo y Falk (2000) el desarrollo del pensamiento algebraico de los docentes se logra a través de:

1. Establecer eslabones explícitos entre la teoría formal del álgebra abstracta y las nociones elementales de los cursos de álgebra y aritmética de la escuela media. Por ejemplo, abordar la resolución de ecuaciones desde los enfoques geométrico, algebraico, analítico y aritmético para apreciar las bondades e insuficiencias de cada uno.
2. Considerar diversidad de problemas, con variados niveles y objetivos. Inventar problemas. Discutir problemas no rutinarios.

3. En el caso de las ecuaciones polinomiales, enfrentarse continuamente a situaciones en las que se debe construir, interpretar condiciones, usar argumentos geométricos, analíticos, observar regularidades y estudiar casos particulares; paralelamente a la discusión de los elementos teóricos.
4. Establecer analogías y explicitar interrelaciones, por ejemplo entre el cálculo y el álgebra.
5. Establecer nexos con otra áreas de la matemática; estudiando a fondo nexos estructurales entre el álgebra, la teoría de números, el cálculo y la geometría, estableciendo argumentos y elementos compartidos.

Estas acciones son una orientación para diseñar actividades de un programa de formación de docentes de matemática. El diseño de un programa debe establecer relaciones entre el álgebra y otras áreas de la matemática que permitan poder discutir con los docentes para qué sirve el álgebra y también trabajar problemas paralelamente con la manipulación de las expresiones algebraicas, las ecuaciones u otras estructuras matemáticas de manera de ir de lo extramatemático a lo intramatemático con flexibilidad, asumiendo que los problemas son generalmente de situaciones reales y tienden hacia la actividad de modelación matemática.

Aprendizaje del álgebra

Según el grupo de trabajo sobre aprendizaje y enseñanza del álgebra de la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI, por sus siglas en inglés), si se dan las oportunidades apropiadas para aprender, la mayoría de los estudiantes son capaces de dominar un núcleo coherente de conocimiento

algebraico. Plantea MacGregor (2004) que en el siglo XXI los estudiantes seguirán aprendiendo el uso de los símbolos, la notación, fórmulas, ecuaciones, inecuaciones, funciones y gráficas, ..., todos los estudiantes deben ser capacitados para abordar problemas numéricamente usando variables, fórmulas y ecuaciones como un lenguaje para comunicarse con la tecnología...debe haber un énfasis en aprender por medio de la solución de problemas en vez de practicando primero técnicas de manipulación y luego tratar de aplicarlas a los problemas.

Para MacGregor (2004, p. 325) estos conocimientos de álgebra básicos capacitarán a los estudiantes a:

- Sentirse seguros sobre su habilidad para interpretar información expresada en notación algebraica.
- Reconocer estructuras y patrones matemáticos, y comprender que el álgebra se usa para expresar tales generalidades.
- Interpretar y usar fórmulas, especialmente sustituyendo números para encontrar valores.
- Saber cómo las fórmulas son relativas y derivadas de conjuntos de datos.
- Comprender las relaciones entre funciones y gráficas.
- Conocer al menos cualitativamente algunas propiedades importantes de las funciones lineales y exponenciales, y las implicaciones para manejar asuntos financieros personales, para entender cuestiones ambientales, y para hacer juicios sobre planes y políticas en muchos campos de los negocios y el gobierno.

- Comprender cómo notaciones y representaciones pueden usarse para modelar ciertas situaciones y resolver problemas.
- Comprender operaciones aritméticas más profundamente para lograr un alcance más seguro de las ideas matemáticas básicas.
- Usar herramientas tecnológicas.
- Experimentar el placer de hacer experimentos matemáticos haciendo conjeturas, probándolas en un nivel apropiado y convenciéndose ellos mismos y a otros de que están en lo correcto.

Para el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos de América (NCTM, por sus siglas en inglés) (2000) los estándares de álgebra que deben alcanzar los estudiantes entre los grados 6 y 8, son los siguientes:

Tabla N° 1. Estándares de álgebra para la NCTM (2000)

Programa instruccional para todos los estudiantes	Expectativas para los estudiantes de grados 6 al 8
Comprensión de patrones, relaciones y funciones	<ul style="list-style-type: none">• Representar, analizar y generalizar una variedad de patrones con tablas, gráficos, palabras y reglas simbólicas cuando sea posible.• Relacionar y comparar diferentes formas de representación para una relación,• Identificar funciones como lineales o no lineales y contrastar sus propiedades de tablas, gráficos o ecuaciones.
Representación y análisis, Situaciones matemáticas y estructuras utilizando símbolos algebraicos	<ul style="list-style-type: none">• Desarrollar una concepción conceptual inicial de los diferentes usos de las variables.• Explorar relaciones entre

	<p>expresiones simbólicas y gráficos de líneas, prestando particular atención al significado de la intersección y de la pendiente.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Usar álgebra simbólica para representar situaciones y resolver problemas, especialmente aquellos que incluyen relaciones lineales. • Reconocer y generar formas equivalentes para expresiones algebraicas simples y resolver ecuaciones lineales.
Uso de modelos matemáticos, Para representar y comprender relaciones cuantitativas	Modelar y resolver problemas contextualizados usando varios representaciones, tales como gráficos, tablas y ecuaciones.
Cambios de análisis, en varios contextos	Usar gráficos para analizar la naturaleza de los cambios en cantidades en relaciones lineales.

En estos grados, los estudiantes deberían aprender álgebra como un conjunto de conceptos y de competencias...y como un estilo de pensamiento matemático para formalizar patrones, funciones y generalizaciones. Los estudiantes deberían desarrollar una comprensión inicial de diversos significados diferentes y usos de las variables a través de cantidades representadas en una variedad de situaciones problema. Siempre que sea posible el aprendizaje y la enseñanza del álgebra debería integrarse con otros tópicos del currículo de matemáticas (NCTM, 2000).

Muchos estudiantes necesitarán extensas experiencias en interpretación de relaciones entre cantidades en una variedad de contextos problema antes de que puedan trabajar significativamente con variables y expresiones simbólicas.

Una comprensión de los significados y de los usos de las variables se desarrolla gradualmente mientras los estudiantes crean y usan expresiones simbólicas y la relacionan con representaciones verbales, tabulares y gráficas. Las relaciones entre cantidades usualmente pueden expresarse simbólicamente en más de una forma, dando oportunidad a los estudiantes de examinar la equivalencia de varias expresiones algebraicas (NCTM, 2000).

Para mejorar la manipulación simbólica de los estudiantes hay que darles muchas oportunidades de experimentar con cantidades en contextos para que desarrollen su comprensión inicial del significado y los usos de las variables, y su habilidad para asociar expresiones simbólicas con contextos problema. Ellos adquirirán fluidez si comprenden las relaciones de equivalencia y tienen facilidad con el orden de las operaciones y las propiedades distributiva, asociativa y conmutativa (NCTM, 2000).

Los estudiantes pueden enfocarse en los usos de las funciones para modelar patrones de cambios cuantitativos utilizando computadoras y calculadoras gráficas, específicamente la tecnología los ayuda a producir representaciones gráficas, realizar cálculos complejos y probar algunas conjeturas más fácilmente que con los métodos de lápiz y papel (NCTM, 2000).

Los estudiantes pueden aprender las fortalezas y debilidades de varios métodos comprobando la equivalencia de las expresiones, en algunos casos la equivalencia puede demostrarse geométricamente.

Las orientaciones de las prácticas docentes que se infieren para apoyar a los estudiantes a lograr estos aprendizajes son:

- Al trabajar los problemas, antes de que los estudiantes resuelvan el problema, el docente debe solicitarles usar tablas y gráficos para enfocarse en las cuestiones básicas a considerar en las relaciones representadas. Muchos estudiantes buscarán una fórmula para expresar los patrones y por ello hay que hacer preguntas que sirvan de catalizador.
- Estimular a los estudiantes a explicar sus observaciones en sus propias palabras, lo cual le dará al docente luces importantes del pensamiento de los estudiantes, particularmente cuando bien ellos reconocen y representan relaciones.
- En cuanto a los usos de las representaciones, el docente debe hacer preguntas abiertas (¿Cuáles?, ¿Cómo?, ¿Por qué?, ¿Cuándo?) para que a través de la discusión los estudiantes puedan identificar las fortalezas y limitaciones de diferentes formas de representación. Por ejemplo, las gráficas dan un dibujo de la relación y permiten un rápido reconocimiento de la linealidad cuando el cambio es constante, en cambio las ecuaciones algebraicas ofrecen descripciones compactas y fáciles de interpretar de las relaciones entre variables.

Para Torres y otras (2002) los resultados de investigación del álgebra educativa plantean que la iniciación del aprendizaje del álgebra se hace a través de:

1. La generalización de patrones numéricos y geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas.
2. La modelación de situaciones matemáticas y de situaciones concretas.
3. El estudio de situaciones funcionales.

De acuerdo con estos planteamientos es a partir del trabajo numérico y geométrico en diferentes contextos que los estudiantes pueden, a través de su experiencia, encontrarle sentido al lenguaje simbólico y así iniciarse en el álgebra. Además, al enfrentarse a este trabajo los estudiantes tienen una actitud más positiva hacia las matemáticas, mostrándose más dispuestos, más participativos y más seguros de su propio trabajo (Torres y otras, 2002).

Para llegar a una construcción de la sintaxis algebraica Torres y otras (2002) plantean el uso de los modelos como herramientas de traducción entre los distintos lenguajes: natural, geométrico, gráfico, numérico. Adoptando la concepción de modelaje que conjuga dicha traducción al lenguaje algebraico y que da sentido y significado en un contexto concreto a los objetos y operaciones, y la separación de estos objetos y operaciones de los significados más concretos a un nivel puramente sintáctico (Fillooy, 1999).

Según el Grupo Azarquiel (1993) el primer paso para aprender álgebra es adquirir el concepto de variable y en este sentido expresan que éste es un proceso muy lento, que se desarrolla a muy largo plazo, y al que no se le pueden poner límites iniciales. Por su parte, Ursini y otros (2005) plantearon un modelo de *tres usos de la variable* llamado modelo 3UV. Los tres usos son:

1. La variable como número general, el cual representa una situación general. Se utiliza para reconocer patrones, hallar reglas, deducir métodos generales y describirlos; representan cantidades indeterminadas que no se pueden, ni es necesario, determinar, y se manipulan sin necesidad de asignarle valores específicos a la variable. Exige la simbolización de situaciones generales, reglas y métodos dados o construidos por quien aprende.
2. La variable como incógnita específica, la cual debe identificarse como algo desconocido que se puede determinar y operar para hallar su valor específico.
3. La variable en una relación funcional, en la cual hay que reconocer que existe una correspondencia entre los valores de dos variables involucradas. Esta relación puede involucrar información presentada en forma verbal, en una tabla, con una gráfica o en forma analítica.

Ursini y otros (2005) plantean que para tener éxito en situaciones que involucran variables y sus tres usos es necesario:

Tabla N° 2. Objetivos a lograr en situaciones que involucran variables

Número general	Incógnita	Relación Funcional
Reconocer patrones, reglas y métodos en familias de problemas.	Reconocer la presencia de algo desconocido que se puede determinar en los problemas.	Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas en distintos representaciones utilizadas.
Interpretar la variable simbólica como la	Interpretar la variable simbólica que aparece en	Interpretar las variaciones de una de las

representación de una entidad general indeterminada.	una ecuación como la representación de un valor determinado.	variables o de ambas variables involucradas en la relación funcional, en cualquier representación utilizada.
Deducir reglas y métodos generales en los problemas, mediante manipulación de la variable simbólica.	Deducir la cantidad desconocida que aparece en una ecuación o en un problema, mediante operaciones algebraicas y aritméticas.	
Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.	Simbolizar cantidades desconocidas reconocidas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.	Simbolizar una relación funcional mediante análisis de la información del problema.

Para el Grupo Azarquiél (1993) adquirir el concepto de variable supone la conjunción de dos procesos:

1. *Generalización*: que permite pasar de un conjunto de situaciones concretas a algún aspecto común a todas ellas.
2. *Simbolización*: que permite expresar de forma abreviada lo que tienen en común todas las situaciones.

En cuanto al proceso de generalización, el grupo Azarquiél (1993) plantea que el establecimiento de proposiciones, la resolución de problemas y otras muchas formas de "hacer matemáticas" requieren a menudo procesos de

generalización. Lo que proporciona en muchos casos mayor potencia al lenguaje algebraico con respecto al lenguaje natural es, precisamente, la posibilidad de expresar lo general utilizando símbolos. Los símbolos y las reglas usuales para utilizarlos aumentan su funcionalidad, permiten expresar las relaciones con mayor precisión y simplicidad, y mezclar información sobre distintas relaciones.

Una de las vías por las que un principiante puede encontrarse con el álgebra, y quizá de las más naturales y constructivas, es precisamente el trabajo con situaciones en las que debe percibir lo general y, sobre todo, expresarlo (Grupo Azarquié, 1993).

Los estudiantes pueden obtener distintas representaciones utilizando formas geométricas que permitan visualizar las relaciones y que puedan dar lugar fácilmente a igualdades, teniendo así una introducción natural de una expresión algebraica (Grupo Azarquié, 1993).

Generalizar no es sólo pasar de una colección de casos particulares a una propiedad común, a una expresión que las englobe, ni tampoco es sólo definir, a partir de las propiedades de un objeto, un campo de objetos caracterizados por cumplirlas. También se generaliza cuando se transfiere a una situación propiedades que se cumplen en otra y, en general, cuando se amplía el ámbito de definición de una ley. Esta forma de generalizar puede conducir a errores cuando se extienden, sin las suficientes precauciones, las propiedades de unos casos a otros, prescindiendo del significado de los símbolos y de la validez de las operaciones en cada campo de definición (Grupo Azarquié, 1993).

Los procesos de generalización, y sobre todo aquellos que tienen relación con el álgebra, permiten una división en fases que conviene también desde el punto de vista didáctico (Mason y otros, 1985; Grupo Azarquiél, 1993). Como primera aproximación se puede distinguir entre, por una parte, la visión de la regularidad, la configuración definitiva, el proceso, y por otra su expresión. Desde el punto de vista del álgebra, esta expresión debe tender a ser simbólica, y por ello escrita. Por tanto, se considera que el proceso de generalización requiere tres pasos bien diferenciados:

- a) La visión de la regularidad, la diferencia y la relación entre las partes
- b) Su exposición verbal
- c) Su expresión escrita, de la manera más concisa posible.

a) Ver: ver la configuración es un proceso mental por el cual la estructura, el modelo, aparece claramente, interrelacionando los diversos elementos, permitiendo por tanto observar la situación de una forma diferente, con una nueva perspectiva. Se trata de distinguir entre lo que es propio de cada situación, de cada ejemplo y lo que es común a todos ellos; lo que no varía. Se trata de encontrar lo que se mantiene en cada caso, los factores clave, y conseguir, mediante una combinación adecuada, una regla, una expresión que resuma todas las situaciones, que permita "contar en general" sin referencia a los casos concretos. Hay dos contextos dentro de las matemáticas que se prestan especialmente a actividades relacionadas con la "visión" de

regularidades y pautas: el campo de los números y el de las figuras geométricas.

b) Describir: la descripción en el lenguaje natural es un paso que se da habitualmente al generalizar, y que permite posteriormente expresar por escrito, con precisión, la propiedad general que se ha obtenido. Con la expresión oral se trata de comunicar lo que se ha visto, la regularidad, el modelo detectado.

c) Escribir: la expresión escrita, el registro de las palabras y de las ideas, es una fase avanzada del proceso de generalización, y de todas las formas de expresar una regla por escrito, la simbólica suele ser la más difícil. La escritura exige un esfuerzo mayor que la expresión oral, pero permite el análisis, la discusión y puede llegar a más personas. Aunque también es una forma de hacer más vulnerable lo que uno piensa, de exponerlo a la crítica. Las ideas, al ser escritas, pueden aparecer simples, contradictorias, absurdas.

Más que ver, decir y escribir, en el proceso de generalización se busca la observación crítica, la cual implica análisis, realizar comparaciones y hacer conjeturas; luego la verbalización de las observaciones de forma que un compañero o compañera entienda la explicación o que pueda llegarse a un consenso en el aula sobre lo que se trata de explicar; y por último la escritura, en donde es central el proceso de simbolización.

Lannin (2003; p. 344) encontró que algunas de las estrategias que los estudiantes emplean para generalizar una situación son:

- a) **Conteo:** hacer un dibujo o construir un modelo para representar la situación y contar el atributo deseado. El docente debe hacer preguntas acerca de los casos muy grandes imposibles de dibujar.
- b) **Recursión:** construir sobre un término o términos previos en la secuencia para construir el siguiente término.
- c) **Objeto entero:** usar una porción como una unidad para construir una unidad más larga usando múltiplos de la unidad. Esta estrategia puede o no requerir un ajuste para contar más o menos.
- d) **Contexto:** construir una regla sobre la base de una relación que es determinada de una situación problema.
- e) **Adivinar y chequear:** adivinar una regla sin mirar por que la regla puede trabajar.
- f) **Ajustar a la razón:** usar la razón de cambio constante como un factor multiplicador. Entonces es hecho un ajuste por adición o sustracción de una constante para conseguir un valor particular de la variable dependiente.

Para Lannin (2003) la generalización de situaciones numéricas da oportunidad a los estudiantes de discutir ideas matemáticas importantes, de relacionar distintas áreas de las matemáticas y de formular y validar conjeturas. Estas actividades enfrentan a los estudiantes a ver variables como cantidades dinámicas que pueden ser usadas para darle sentido al ambiente en que trabajan.

Mason (1999) plantea que la capacidad para identificar patrones y expresar generalidad está presente en los niños y niñas desde su ingreso a la escuela; además la capacidad de generalización está en el corazón de las matemáticas y está en relación de dependencia y conexión con las capacidades de agrupar y ordenar. Esta capacidad necesita refinarse y agudizarse, extenderse y desarrollarse. Permitir a los estudiantes desarrollar ejemplos que expresen generalidades les dará experiencia para darle sentido al uso de las variables. Otras capacidades que también son importantes son:

- a) la de particularizar una generalidad,
- b) la de examinar dicha generalidad en ejemplos seguros, y
- c) la de visualizar y expresar con palabras, dibujos, diagramas, movimiento y símbolos lo que aun no se ha visto.

Según Mason (1999) las razones principales para enseñar estas capacidades a todos los estudiantes son porque son usadas exitosamente por los matemáticos para resolver toda clase de problemas; y porque se pueden usar para exponer, ejercitar y desarrollar capacidades mentales importantes que permiten darle sentido al mundo, en general, y al mundo de los números y del espacio, en particular.

De manera que una práctica docente es diseñar actividades de aprendizaje que permita a los estudiantes adquirir el concepto de variable con sus distintos usos, e ir apropiándose de los nuevos significados de los símbolos matemáticos ya utilizados en aritmética y geometría, como el signo igual, los signos de mayor y menor que, los signos de las operaciones, las letras y las fórmulas. Para Ursini

y otros (2005) se espera que las y los estudiantes construyan significados, los desarrollen y puedan comunicar sus ideas algebraicas a las demás personas, específicamente que diferencien entre los distintos usos de las variables, pasando entre uno y otro de manera flexible, verbalicen las características de cada uso y usen el lenguaje algebraico para expresarse. El rol del docente en esta propuesta es la de mediador, la de un guía experto que orienta a sus estudiantes para que adquieran el concepto de variable a través de sus tres usos y de los procesos de generalización, simbolización y abstracción.

Una actividad para comenzar a generalizar es la construcción de **expresiones algebraicas** de la forma general de distintos números, iniciando con los conocidos números pares y números impares, se puede presentar los números pares e irlos ubicando en orden con los números naturales a través de la idea de un contador, el número natural (n), para construir las expresiones $2n$ y $2n+1$.

Construcción de la expresión algebraica $2n$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	.	.	.	n
2	4	6	8	10	12	14	16	18	.	.	.	$2n$

Luego se puede trabajar con la forma general de otros números como:

- los triangulares: 1, 3, 6, 10, 15, 21,..., $n(n+1)/2$;
- cuadrados: 1, 4, 9, 16, 25, 36,..., n^2 ;
- Rectangulares: 2, 6, 12, 20, 30,..., $n(n+1)$;
- pentagonales ($n(3n-1)/2$),

Relacionando de esta forma contextos aritméticos y geométricos. También se pueden construir expresiones algebraicas de números poliédricos, los cuales representan cubos, pirámides triangulares y cuadrangulares, (Socas y otros, 1996).

Existen muchos recursos disponibles tanto en textos especializados en didáctica del álgebra, como en textos de difusión de la matemática en donde los docentes pueden obtener información para diseñar actividades de generalización en contextos aritméticos y geométricos.

El Grupo Azarquié (1993) plantea que al pasar de la aritmética al álgebra se presentan las siguientes diferencias con los símbolos:

Tabla N° 3. Diferencias en la simbolización al pasar de la aritmética al álgebra

DIFERENCIAS en:	EN ARITMÉTICA	EN ÁLGEBRA
SÍMBOLOS DE OPERACIONES	Indican una acción que se va a realizar con números, y que da como resultado otro número, por tanto, dar significados a estos signos es dar un procedimiento que permita llegar a la respuesta. Ej.: $312+405= 717$	Tienen un carácter de "representación", ya que indican operaciones que no siempre tienen por qué realizarse, y pueden quedar indicados como operaciones "en potencia". Ej.: $2x+3y= 1$
SIGNO IGUAL	Se usa casi siempre con carácter unidireccional: a la izquierda se indica la operación y a la derecha se pone el resultado. En este caso el signo igual sirve para conectar el problema con el resultado numérico. Ej.: $312+405= 717$	Tiene un carácter bidireccional, es decir, hay que verlo actuar tanto de izquierda a derecha como de derecha a izquierda. A veces indica restricciones, como en el caso de las ecuaciones donde las igualdades sólo son ciertas para algunos valores. $2x+3y= 1$ $3= x-y$

CONVENIOS DE NOTACIÓN <i>son ambiguos en ambos casos...su aprendizaje lleva mucho tiempo</i>	Las equivocaciones al escribir pueden no variar el resultado final, pues si el estudiante sabe lo que está intentando puede realizar las operaciones correctamente sin tener muy en cuenta lo que ha escrito, pues puede tener como referencia el contexto en el que está y puede saber a dónde quiere llegar.	Es esencial la escritura correcta de las expresiones con símbolos. La notación depende de la escritura simbólica pero también de normas determinadas por el uso correcto de los paréntesis y de la aplicación de las propiedades de las operaciones.
---	--	--

Collis, citado por el Grupo Azarquiél (1993) señaló que los principiantes en álgebra ven las expresiones algebraicas como proposiciones que son, de alguna manera, incompletas. Atribuye esta percepción a la incapacidad de los alumnos para mantener operaciones indicadas...los estudiantes tienden a igualar las expresiones algebraicas a cero y resolver la incógnita. Para dominar el álgebra hace falta que se relacione el significado de las operaciones con las acciones realizadas sobre las cantidades. Pero muchos estudiantes no ven estas relaciones y por eso es conveniente practicar con ellos, en casos sencillos, la conexión que existe entre aplicar una regla u operación y la acción que se realiza sobre los objetos reales.

Schoenfeld y Resnick citados por el Grupo Azarquiél (1993) recomiendan que se dedique mucho tiempo a las acciones sobre los objetos y a la discusión oral, pues afirman que, a pesar de que parece que el proceso que se sigue es bastante fácil, estas conexiones no se hacen de forma automática.

Es conveniente tratar el álgebra desde una perspectiva más profunda y significativa, utilizando los errores de los estudiantes como diagnóstico de dificultades conceptuales. Estas dificultades no pueden tenerse en cuenta sólo

desde el punto de vista del olvido ocasional, y ser tratadas mediante la reiteración de ejercicios, sino que deben considerarse como conceptos abstractos construidos a partir de los anteriores conceptos aritméticos.

Según Socas y Palarea (1997), de los resultados de las investigaciones, se observa que las dificultades que los estudiantes tienen están centradas en:

- el significado de las letras (comprensión de lo que representa esa letra: una incógnita o una variable),
- el cambio de una serie de convenciones diferentes de las usadas en aritmética (caso del signo igual)
- el reconocimiento y uso de estructuras. (si hay dificultades en las operaciones aritméticas, posiblemente las habrá en las algebraicas).

Una vez que se han trabajado actividades de generalización y se ha adquirido el concepto de variable como patrón y además se han observado y verbalizado los nuevos significados de los símbolos, comienza el trabajo con las ecuaciones.

Para trabajar con las **ecuaciones** Socas y otros (1996) proponen comenzar a trabajar con su construcción e iniciar su enseñanza basándose tanto en contextos intramatemáticos de la aritmética y de la geometría, como extramatemáticos de situaciones reales. Esto con el objetivo de adquirir el concepto de variable como incógnita.

Una forma de construir una ecuación y de iniciar su enseñanza basándose en la aritmética, es proponer una identidad aritmética que permita introducir el concepto de incógnita.

Hernández y Andonegui (2003) proponen el siguiente modelo instruccional:

- 1) Plantear una identidad aritmética, tal como $21=21$.
- 2) Solicitar construir expresiones equivalentes a 21:

$20+1=21$ $10+11=21$ $3*7=21$ $63/3=21$ $2*10+1=21$ $2(7+3)+1=21$ $2*7+7=21$ $3*7=2*7+7$	$18+3= 21$ $15+6=21$ $6*3+3=21$ $5*3+6=21$ $42/2=21$ $3(4+1)+2*3=21$ $5*3+6=6*3+3$	Este paso permite revisar la aplicación de las propiedades de las operaciones y la simbolización de operaciones, de manera de que si hay dificultades en este aspecto se tengan identificadas desde el inicio.
---	--	--

- 3) Preguntar *¿Qué pasa si se trata de esconder un número común a ambos lados de la ecuación? ¿Cómo se puede hallar "el valor escondido" de quien construyó la ecuación?*

$3*\gamma=2*\gamma+7$ $3*\heartsuit=2*\heartsuit+7$ $3*\alpha=2*\alpha+7$	$5*a+6=6*a+3$ $5*\otimes+6=6*\otimes+3$ $5*\Psi+6=6*\Psi+3$	De esta forma se puede introducir el concepto de incógnita, basado en una situación intramatemática (aritmética).
---	---	---

Se pueden plantear otras situaciones tanto intramatemáticas como extramatemáticas donde sea necesaria la construcción de ecuaciones y así ayudar a los estudiantes a comprender el significado de las incógnitas.

Luego del trabajo con la construcción de ecuaciones viene el proceso de resolución de las mismas, se busca que a través de distintos modelos se comprenda la estructura de la ecuación y su construcción para su posterior resolución. Cada modelo tiene un énfasis en particular el cual es discutido en la tabla N° 2. Algunos de estos modelos son:

1. Modelos con despeje.

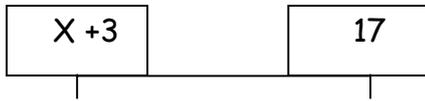
- a) Balanza
- b) Compartimientos
- c) Grafo lineal
- d) Grafo de bloques

2. Modelos sin despeje

- a) Aproximación lineal
- b) Método gráfico.

1.a) Balanza: se trata de discutir cómo mantener el equilibrio de la balanza; de qué acciones se pueden dar: agregar y quitar lo mismo. Se puede usar para discutir la bidireccionalidad del signo igual y para visualizar la conexión

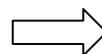
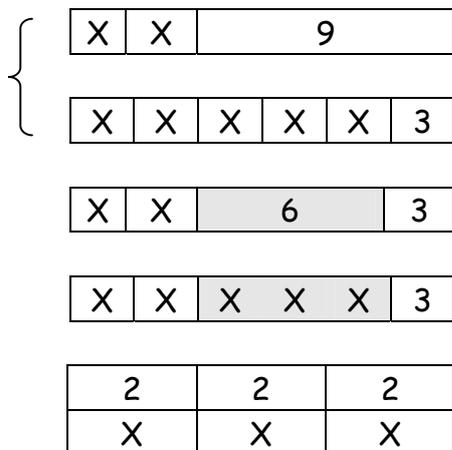
existente entre la acción que se realiza sobre objetos reales y la aplicación de una operación.



Esta representación muestra movimientos y resultados; es eficiente para ecuaciones lineales. Necesita resultados naturales. No funciona para "-X" Se recomienda para introducir las ecuaciones en sexto y séptimo grado (entre 11 y 13 años de edad).

1.b) Compartimientos: se trata de buscar el valor de X a través de la igualdad de compartimientos. Igual que el modelo anterior ayuda a comprender el significado del signo igual. Este método se puede usar sólo para resultados naturales. Una dificultad que puede surgir es cómo representar los compartimientos.

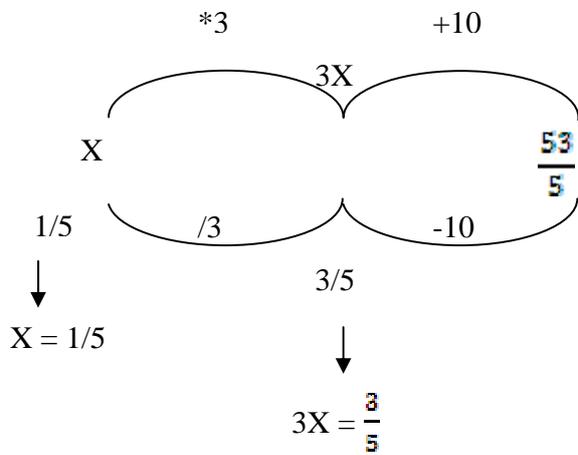
Ecuación: $2X + 9 = 5X + 3$



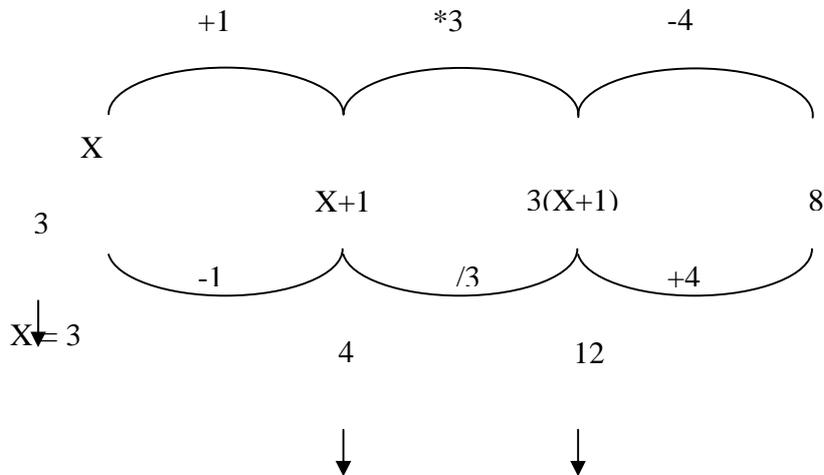
$X = 2$

1.c) Grafo lineal: se trata de visualizar cómo se construye la ecuación para luego "trabajar hacia atrás" para hallar la solución. Este modelo permite discutir el significado de las propiedades de las operaciones, además de las prioridades entre las mismas.

$3x + 10 = \frac{53}{5}$ Preguntar: ¿Qué fue lo primero que hice con la x ?



$3(X + 1) - 4 = 8$ → A la derecha debe haber una expresión numérica

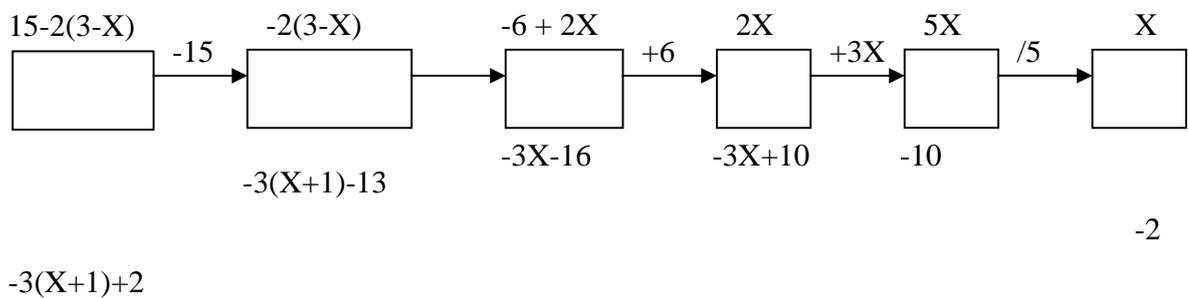


$$X+1=4 \quad 3(X+1)=12$$

No hay problemas de signo ni de operaciones.

1.d) Grafo por bloques

$$15-2(3-X) = -3(X+1) + 2$$



2.a) Aproximación lineal "no se despeja", es un tanteo sistemático. Se busca que la diferencia entre ambos lados de la igualdad sea cero. Se empieza por darle a X el valor 0 y luego el valor de 1, se evalúa qué ocurre. Este modelo permite evaluar las operaciones con números enteros y racionales. También permite discernir qué ocurre en cada uno de los casos.

Ecuación: $9-X = 2X-3$

X	Izquierda (I)	Derecha (D)	Diferencia (I-D)
0	9	-3	12
1	8	-1	9

2	7	1	6	
3	6	3	3	
4	5	5	0	Solución

La diferencia disminuye.

Ecuación: $2X + 7 = -23 - 3X$

X	Izquierda	Derecha	Dif (I-D)	
1	9	-26	35	
-1	5	-20	25	
-2	3	-17	20	
-6	-5	-5	0	Solución

La diferencia aumenta.

$X = -6$

Si las soluciones son negativas, al pasar de 0 a 1 la diferencia aumenta, entonces debo ir por el camino contrario.

Ecuación: $2X - 1 = 3\left(X - \frac{2}{5}\right)$

X	Izquierda	Derecha	Dif (I-D)
0	-1	$\frac{6}{5}$	$\frac{1}{5}$
1	1	$\frac{9}{5}$	$-\frac{4}{5}$

¿Qué pasa si al pasar de 0 a 1 la diferencia es negativa?

Ecuación: $3(X-5) = -9 + 3(X-2) \Rightarrow 3X-15 = -15 + 3X$

X	Izquierda	Derecha	Dif (I-D)
0	-15	-15	0
1	-12	-12	0

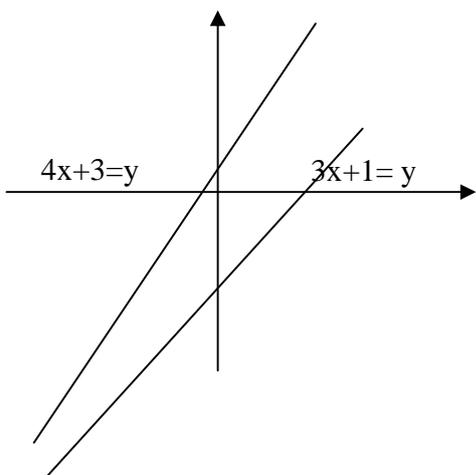
¿Qué pasa si la diferencia siempre es cero?

Para todo "X", se cumple que $3(x-5) = -15 + 3X$

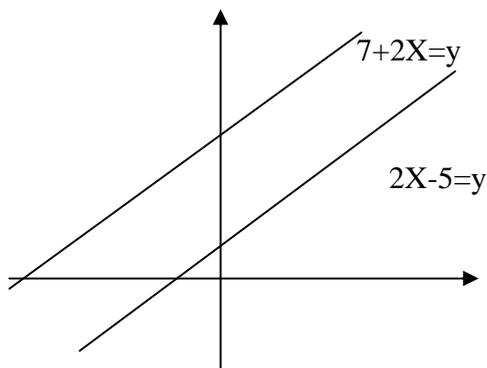
2.b) Modelo gráfico: intersección de dos ecuaciones de primer grado. Este modelo relaciona las expresiones algebraicas que conforman cada lado de la igualdad con su representación gráfica, lo cual exige un análisis más elevado y contribuye con una mejora del razonamiento matemático.

Interpretar las ecuaciones:

¿ $\exists x / 3x+1= 4x+3$?



¿ $\exists X / 2x - 5= 7 + 2X$?



$$¿ \exists x / 6 + x = x + 2 ?$$

Hernández y Andonegui (2003) en una experiencia con estudiantes de sexto grado (edades entre 11 y 12 años) encontraron que con el trabajo vía el tanteo sistemático y luego con un soporte concreto como la balanza, se apoya al estudiante en el proceso de despeje de la incógnita, y a partir de este trabajo se procede con las operaciones algebraicas de despeje la cuales imponen la manipulación simbólica. Los resultados de su experiencia evidencian que los aprendizajes obtenidos por los estudiantes fueron:

- Reconocimiento del carácter bidireccional del signo igual.
- Reconocimiento de la equivalencia de los miembros de una igualdad, incluyendo aquellos donde se involucran números y letras y advirtiendo la diferencia entre estos últimos.
- Reconocimiento de la convención establecida entre un número y la incógnita cuando están escritos de la forma $4x$.
- Identificación de las operaciones y sus inversas.

También Torres y otras (2002) plantean que el modelo de la balanza es potente para avanzar en el concepto de igualdad como una relación de equivalencia, más allá de la idea que se maneja en aritmética y que reduce su significado a ejecutar una operación.

Serres (2006) resume los modelos de resolución de las ecuaciones de primer grado con una incógnita y los casos en que se recomienda utilizar en la Tabla N° 4.

Tabla N° 4. Modelos de resolución de una ecuación de primer grado con una incógnita

MODELOS	Recomendado en caso de:
BALANZA	Ecuaciones lineales de la forma $x+a= b$, soluciones naturales.
COMPARTIMIENTOS	Ecuaciones lineales de la forma $ax+b=cx+d$, soluciones naturales.
GRAFO LINEAL	Ecuaciones lineales de la forma $ax+b=c$, soluciones reales. Discutir prioridad de las operaciones matemáticas.
GRAFO POR BLOQUES	Ecuaciones lineales de la forma $ax+b=cx+d$, soluciones reales. Discutir prioridad de las operaciones matemáticas.
APROXIMACIÓN LINEAL	Tanteo sistemático. Se comienza con el valor cero, se sigue con el valor uno y se analiza qué ocurre (la diferencia aumenta, disminuye, es negativa, es cero siempre)
GRÁFICO	Discutir qué significa la solución del sistema - intersección en un punto (x,y) , en ningún punto, en todos los puntos-. Relacionar con el estudio de funciones afines.

Estas recomendaciones sirven de orientación a los docentes en la decisión de cuál es el modelo más apropiado de utilizar en cada momento de la instrucción del tema de ecuaciones: si se está comenzando con el tema, si se está trabajando ecuaciones con soluciones en los distintos conjuntos numéricos, si se está relacionando la solución de sistemas de ecuaciones con la graficación de funciones.

En el proyecto *Evolución de la simbolización en la población escolar del nivel medio* desarrollado por Filloy (1999), específicamente en el estudio *Adquisición del lenguaje algebraico*, se trabajó sobre dos estrategias globales:

- la de modelaje de situaciones "más abstractas" en lenguajes "más concretos", para desarrollar habilidades sintácticas;
- la producción de códigos para desarrollar habilidades de resolución de problemas.

Este proyecto se guió por tres líneas teóricas:

- la epistemológica,
- la semiótica, como guía para analizar el álgebra como un Sistema Matemático de Signos (SMS),
- la psicología cognitiva, con sus aportes acerca de la adquisición y la práctica de un lenguaje.

Uno de los primeros resultados del estudio indica que hay una relación dialéctica entre los avances sintácticos y los semánticos, que el avance de una componente supone el avance de la otra.

En este estudio, se contempló:

1. la resolución de ecuaciones, clasificándolas como *ecuaciones aritméticas* y *ecuaciones no-aritméticas*,

2. el proceso de abstracción de las operaciones de la incógnita, a partir del uso de un modelo concreto en la resolución de ecuaciones, específicamente un *modelo geométrico* y el *modelo de la balanza*.

1. Resolución de ecuaciones. Las *ecuaciones aritméticas* son aquellas de la forma $Ax+B=C$, y las *no aritméticas* son de la forma $Ax+B=Cx+D$ (donde A , B , C y D son números particulares dados). El estudio afirma que el paso de las ecuaciones aritméticas a las no aritméticas no es inmediato, depende de la construcción de ciertos elementos de sintaxis algebraica que se lleva a cabo sobre la base de un conocimiento aritmético bien consolidado y sólo es posible si se logra romper con algunas nociones que pertenecen al dominio de la aritmética. Por ejemplo, la noción aritmética de la igualdad donde el miembro izquierdo de una ecuación corresponde a una secuencia de operaciones que se realizan sobre números y el miembro derecho es el resultado de haber ejecutado dichas operaciones. Dicha noción no se puede aplicar a una ecuación no aritmética, ya que su resolución involucra operaciones de la incógnita, las cuales son operaciones no aritméticas. Es necesario que las ecuaciones no aritméticas estén provistas de algún significado para que dichas operaciones puedan llegar a tener algún sentido para las y los estudiantes y así puedan llevar a cabo un proceso de resolución.

2. Proceso de abstracción de las operaciones de la incógnita. Este el proceso que se lleva a cabo entre las acciones que se realizan en un nivel concreto (por medio de un modelo) y los correspondientes elementos de sintaxis algebraica que se obtengan a partir de ellas. Este proceso presenta un conjunto de características regulares a medida que el estudiante los va desarrollando,

pero algunas características pueden variar al cambiar la situación o modelo concreto del cual se parta, como también pueden diferir de un estudiante a otro según si su tendencia es hacia la aritmética o hacia el álgebra. Los modelos utilizados para operar las incógnitas son el *modelo geométrico*, que consiste en comparar las áreas de rectángulos, cuyos lados representan la incógnita y los coeficientes de una ecuación de la forma $Ax+B=Cx$, y A , B y C son enteros positivos con $C>A$. Y el *modelo de la balanza*, que consiste en la reducción iterada de los objetos de peso desconocido (la incógnita) de una balanza de dos platillos, manteniendo el equilibrio, hasta eliminar todos los objetos de este tipo de uno de los platillos, igual que en el modelo geométrico la ecuación propuesta es de la forma $Ax+B=Cx$, y A , B y C son enteros positivos con $C>A$. Una vez dominado el uso de los modelos para la ecuación de la forma $Ax+B=Cx$ se proponen ecuaciones más complejas ($Ax+B=Cx+D$; $Ax-B=Cx+D$ $Ax-B=Cx-D$) a fin de observar los procesos de abstracción de las operaciones con incógnitas en distintos modelos.

En este proceso de abstracción de las operaciones con incógnitas se detectaron los siguientes fenómenos:

1. Pérdida momentánea de destrezas adquiridas acompañadas de la presencia de operatividad aritmética.
2. Modificación de la noción aritmética de ecuación.
3. Uso de códigos personales para indicar acciones ya realizadas y por realizar sobre los elementos de la ecuación en el proceso de resolución.
4. Arraigo al modelo (aun en casos muy complejos de representar).

5. Desprendimiento del modelo, transfiriendo la operatividad sobre los coeficientes a la operatividad de los términos que incluyen incógnitas, esto es, la operación defectuosa de la incógnita.
6. Presencia de obstrucciones propias de cada modelo.
7. Reconocimiento de la diversidad del tipo de ecuaciones de primer grado, a través de los modelos.

Los resultados más relevantes del estudio fueron:

1. El desarrollo espontáneo del uso de un modelo concreto para operar la incógnita no es uniforme ni siquiera en estudiantes de un mismo nivel de eficiencia pre-algebraica. Dicho desarrollo depende fuertemente de la tendencia del estudiante hacia lo sintáctico, operatorio y algorítmico, o hacia lo semántico y analítico.
2. Existen obstáculos a la abstracción de las operaciones con incógnitas desde un modelo concreto hacia un nivel sintáctico algebraico, que dependen del énfasis puesto en la componente del modelaje que permite apoyarse en conocimientos anteriores y operaciones dominadas por el estudiante, para introducir los nuevos objetos, conceptos y operaciones; y que no dependen ni del modelo particular utilizado ni de las tendencias de las y los estudiantes mencionadas en el aparte anterior.

Para finalizar el estudio Filloy (1999) plantea que el modelaje tiene dos componentes fundamentales:

- la de la traducción, por medio de la cual se les dota de sentido y significados en un contexto más concreto a los nuevos objetos y operaciones que se introducen;
- la de la separación de los nuevos objetos y operaciones de los significados más concretos con que fueron introducidos.

Esta separación es la que permite la construcción de una sintaxis extra modelo. La componente de traducción puede debilitar o inhibir el desarrollo de dicha separación.

Por otro lado, el Grupo Azarquié (1993) plantea que en el proceso de aprendizaje del álgebra es preciso trabajar la resolución de problemas de enunciado. Afirma este grupo que para resolver este tipo de problema se necesitan varias habilidades:

1. Manejar el concepto de variable (o incógnita según sea el caso).
2. Realizar determinadas generalizaciones.
3. Establecer relaciones cuantitativas entre datos e incógnitas del problema.
4. Utilizar adecuadamente los símbolos.
5. Establecer la ecuación o ecuaciones adecuadas y resolverlas, interpretando después las soluciones obtenidas.

Esto conlleva a una necesaria comprensión de la situación vista desde tres características: (Grupo Azarquié, 1993)

Cualitativa: el primer paso es solicitar a los estudiantes que opinen sobre la situación que plantea el problema. Lo que otros autores denominan explorar el problema.

Cuantitativa: el segundo paso consiste en probar con algunos casos (sustituir las incógnitas con números) si hay comprensión, haciéndole preguntas a los estudiantes. Realizar algunos ensayos también es parte de la fase exploratoria.

Conceptual: el tercer paso es pedirles a los estudiantes que escriban las ecuaciones que representen las relaciones expresadas en las proposiciones del problema. De aquí la necesaria comprensión del concepto de variable y su identificación en el problema paralelamente con el correcto uso de los símbolos.

Luego del análisis y comprensión del problema, el cual da como resultado la construcción de las ecuaciones, la resolución de éstas conlleva a un nuevo proceso de análisis, esta vez acerca del método más apropiado de resolverlas según la estructura de las mismas. Por último, es indispensable interpretar las soluciones obtenidas en el contexto del problema resuelto, o la llamada fase de verificación.

Mason (1999) plantea que la actividad de generalización en situaciones de la vida cotidiana presenta tres justificaciones: la de resumir, la de comprender y la estética. Resumir para procesar datos o tener acceso a ellos, de manera que la información sea más fácil de usar y recordar. Comprender el paso de lo particular a lo general, la naturaleza del problema y su contexto. Observar y

explorar en profundidad la estética que proporcionan los patrones de la naturaleza y las artes, lo cual puede proporcionar satisfacción científica para quienes se inician en el estudio del álgebra.

En cuanto al manejo del concepto de variable, el trabajo de Ursini y otros (2005) plantea la necesidad de orientar a las y los estudiantes para que a través de sus tres usos se adquiera el concepto de variable, el uso de variable como incógnita conlleva al establecimiento de relaciones cuantitativas entre los datos y la incógnita haciendo uso de la simbología matemática y planteando ecuaciones.

Para resolver problemas verbales aritméticos-algebraicos Filloy (1999) considera tres métodos:

1. El *método cartesiano* (MC) considerado el método algebraico por excelencia; en cuyo proceso de resolución se representan las incógnitas del enunciado del problema mediante una expresión algebraica, para luego traducir el texto del problema a una serie de relaciones algebraicas que conducen a ecuaciones, cuya solución, mediante un regreso en la traducción, arrojan la solución del problema.
2. El *método de inferencias analíticas sucesiva* (MIAS), más enraizado en la aritmética. La resolución de problemas mediante este método se da como producto de inferencias lógicas que actúan como descripciones de las transformaciones de las "situaciones posibles" hasta llegar a una que se reconoce como la solución del problema.

3. El *método analítico de exploraciones sucesivas (MAES)*, igual que el método anterior con más tendencia hacia la aritmética. El proceso de resolución de problemas con este método comienza con la identificación de lo que se quiere obtener, o lo que se considera la incógnita del problema, para luego asignar un valor numérico a dicha incógnita, considerándolo como una solución hipotética. Esta representación numérica del problema va a tener el mismo "patrón" que el que tendría la representación algebraica, por lo cual una vez establecido se puede asignar la letra que juega el mismo papel que el valor numérico hipotético usado como solución, con lo cual se obtiene la ecuación algebraica del problema. Finalmente se utilizan las reglas de la sintaxis algebraica para obtener el valor numérico de la incógnita, en una especie de "verificación" de la hipótesis.

Hay problemas verbales aritméticos-algebraicos cuya resolución es más compleja por el MIAS que por el MAES o el MC, debido a que hacer su análisis lógico según el sistema de signos de la aritmética requiere de una competencia a nivel de experto que los estudiantes no tienen. Por otra parte, las observaciones empíricas de este estudio arrojaron que la utilización del MAES se propicia de manera más "natural" si se plantean familias de problemas en las que se estima que a la mayoría de los estudiantes se les facilita el análisis lógico del problema al proponerles valores numéricos hipotéticos para la incógnita.

El uso de tres modelos didácticos asociados a los tres métodos tuvo como antecedente las observaciones que se hicieron durante varios años en el aula. Este estudio se llevó a cabo en un curso de álgebra pre-universitaria, en el cual

los y las estudiantes mostraban la tendencia a abordar la resolución de problemas mediante el sistema de signos de la aritmética y tenían grandes dificultades en el empleo del lenguaje algebraico en la resolución de los problemas de enunciado verbal. La intención de la propuesta de enseñanza fue facilitar el desencadenamiento del análisis de los problemas verbales y posibilitar la vinculación de las tendencias pre-algebraicas de los estudiantes con la necesidad de representar y resolver los problemas mediante el uso del lenguaje algebraico.

Los resultados de este estudio se enunciaron en forma de tesis como sigue:

- I. La implementación de MAES se lleva a cabo a través de cuatro fases importantes en términos de secuencias didácticas: a) lectura y explicitación de las incógnitas; b) introducción de una situación hipotética; c) establecimiento de una comparación entre dos cantidades que representan lo mismo en el problema; d) recuperación de las operaciones realizadas para obtener una ecuación.
- II. Existe una tendencia natural de usar valores numéricos para explorar los problemas.
- III. Es necesario avanzar en la competencia de análisis lógico de las situaciones problemáticas para pasar a tácticas intermedias inmersas en el uso de las expresiones algebraicas, de la proporcionalidad, del por ciento, de la multiplicación dentro de los esquemas: $\dot{x} \times A = B$, $A \times B = ?$, $A \times ? = B$.
- IV. El dominio de las tácticas intermedias debe colaborar en el desarrollo de las tendencias "positivas" cognitivas que se presentan en los procesos para aprender conceptos más abstractos.

- V.El uso competente del MC está relacionado con un desarrollo en el uso de la simbolización.
- VI.La dificultad que tiene un estudiante para inventar un problema de la misma familia determina la complejidad de un problema.
- VII.La competencia en un sistema de signos más abstracto lo determina la competencia en un sistema de signos más concreto.
- VIII.El sentido del MC está relacionado tanto con la capacidad para regresar a sistema de signos más concretos, como con la aptitud para reconocer a las expresiones algebraicas usadas para resolver el problema como expresiones que involucran incógnitas.
- IX.El MAES es un puente para unir el desarrollo sintáctico con el semántico.
- X.El MIAS y el MAES sirven como antecedentes para la elaboración de los significados de las relaciones algebraicas.
- XI.El MAES propicia distintas interpretaciones algebraicas del problema verbal, no haciéndolo siempre siguiendo el orden del enunciado tal como ocurre usualmente en la secuencias de enseñanza con las que se ilustra el MC.
- XII.El análisis dimensional de las ecuaciones sirve como elemento de control de la representación del problema y como medio para dar sentido a la noción de equivalencia entre expresiones algebraicas.
- XIII.El MAES en ambientes computacionales tiene relevancia didáctica en si mismo, porque da sentido a métodos numéricos para resolver las ecuaciones que aparecen al plantear los problemas.
- XIV.Para ciertos problemas el uso del MC o el MAES no siempre es el mejor camino de solución, pudiendo ser en cambio una estrategia de solución más fácil, las que se desencadena a partir de un análisis lógico aritmético directo como usando el MIAS.

- XV. Las representaciones simbólicas de los problemas en el MC hacen más eficiente el uso de la memoria de trabajo.
- XVI. El uso competente del MC y del sistema de signos del álgebra determina el proceso de resolución de problemas verbales aritméticos y algebraicos.
- XVII. El esbozo lógico semiótico es uno de los elementos esenciales del análisis del problema que permite desencadenar una estrategia de resolución, pero también se requieren algunas otras competencias.

Uso de la tecnología en el álgebra educativa. El papel de la calculadora

Cedillo (1999) realizó una investigación cuyos resultados sustentan una propuesta didáctica que sugiere que es factible explotar los recursos de las calculadoras para aprender álgebra a través de su uso y sin necesidad de partir de una instrucción basada en reglas y definiciones. Esta propuesta no sólo se basa en el uso de las calculadoras sino también en el rol del docente y las actividades de aprendizaje que este diseñe, en las cuales deben existir distintas formas de obtener o expresar la solución de manera de permitir el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes.

Los principios didácticos de la propuesta de Cedillo (1999) son:

1. El lenguaje se aprende a través del uso y ese aprendizaje es apoyado por un notable sistema instruccional.

2. La relación entre el docente y sus estudiantes es asimétrica. El docente es un experto en el uso del lenguaje que desea comunicar y sus estudiantes no manejan el lenguaje y quieren aprenderlo.
3. La instrucción del lenguaje se modula de manera que sintonice con el avance lingüístico del que aprende, respetando el ritmo de avance del aprendiz.
4. Debe existir un conjunto de convenciones compartidas que permitan establecer la intención del hablante y la disposición del que escucha.
5. Debe establecerse una base compartida para explotar las posibilidades del contexto temporal, espacial e interpersonal.
6. Debe disponerse de medios convencionales para establecer y recuperar presupuestos.

Las calculadoras son un excelente medio para producir y manipular expresiones algebraicas, pero es el docente quien decide de mejor manera cuándo y cómo introducir las nuevas formas de expresión algebraica que las calculadoras no entregan a los estudiantes. Otro rol del docente en esta propuesta consiste en entender las expresiones *no ortodoxas* de sus estudiantes y auxiliarlos en el paso de los "balbuceos" al lenguaje (Cedillo, 1999).

La calculadora exige el uso del lenguaje de las matemáticas, de los códigos de la aritmética y el álgebra, juega el rol de la comunidad con quien se comunica el aprendiz. El modelo didáctico propuesto por Cedillo (1999) consiste en el diseño de un ambiente de aprendizaje basado en el uso de la calculadora, donde las y los estudiantes participen activamente, pues la calculadora capta su interés y estimula su creatividad intelectual a la vez que desarrolla las

habilidades matemáticas orientadas a un uso apropiado de los códigos matemáticos y al uso del álgebra en la resolución de problemas.

La privacidad que brinda la calculadora hace que los estudiantes exploren distintos acercamientos a la solución de un problema, afinen sus planteamientos y los hagan públicos cuando ellos lo deciden. La retroalimentación inmediata que da la calculadora y la posibilidad de explorar soluciones siguiendo formas propias de razonamiento da lugar a producciones distintas y a soluciones originales a un mismo problema, lo cual estimula el compartir y discutir los hallazgos con compañeros y con el docente. El trabajo individual con la calculadora no inhibe el trabajo colaborativo (Cedillo, 1999).

En esta propuesta el docente organiza las actividades en hojas de trabajo sueltas y atiende a sus estudiantes individualmente propiciando que logren producciones originales y que pueda seguirse el razonamiento. La adecuada organización de las actividades facilita al docente el seguimiento del avance de cada uno de sus estudiantes. Las distintas producciones estudiantiles propician un diálogo entre el docente y sus estudiantes de manera que el docente puede tomar ese diálogo como punto de partida para nuevas discusiones, organizar debates y discutir los aspectos más relevantes de un bloque de actividades, los errores que se hayan presentado y los criterios para decidir por qué son incorrectas las respuestas (Cedillo, 1999).

En esta propuesta la orientación de la práctica docente consiste en la adecuada organización de actividades que propicien el razonamiento algebraico a través de la introducción de nuevas expresiones algebraicas en el momento adecuado

y en la mediación del uso del lenguaje algebraico, basándose en el seguimiento del trabajo de cada estudiante, del diálogo entre el docente y los estudiantes, y la discusión colectiva donde se aborden los aspectos claves de las actividades y los errores que se cometen en su ejecución.

En un estudio sobre la influencia de un ambiente de cómputo algebraico en las prácticas docentes se encontró que cada docente adapta sus prácticas de uso de la tecnología a sus creencias sobre la matemática y sobre su enseñanza. Los docentes estudiados tenían diferentes concepciones de la matemática, diferentes estilos de enseñanza, de uso de las representaciones y, en general, el uso que hicieron de la tecnología fue marcadamente diferente. Uno de los docentes estudiados privilegió los usos matemáticos del ambiente de cómputo algebraico, mientras otro privilegió los usos pedagógicos. Los usos matemáticos se asociaron a la realización de rutinas eficientemente, a la enseñanza de reglas, con una herramienta que da respuestas precisas. Los usos pedagógicos están referidos al incremento de la comprensión a través de relacionar las representaciones simbólicas y gráficas de una función y de la recolección de datos simbólicos para discutir durante la clase e inducir las reglas (Kendal y otros, 2005).

En este mismo estudio se encontraron diferencias entre las formas en que un docente enseña con una calculadora graficadora y con una calculadora simbólica. Los docentes que miran la calculadora graficadora como una herramienta para cálculos tienden a enfatizar en metas orientadas por contenidos, para ellos los estudiantes aprenden escuchando las instrucciones del docente. En cambio los docentes que ven la calculadora graficadora como una herramienta de aprendizaje es más probable que tengan metas centradas

en los estudiantes, en estilos de enseñanza orientados a consultas interactivas, y en una concepción de aprendizaje centrada en los estudiantes.

En este estudio un docente usó las calculadoras graficadoras para ayudar a sus estudiantes a comprender los conceptos, particularmente explicando gráficamente las ideas simbólicas y para exploraciones. En cambio él enseña muy diferente con una calculadora simbólica, él estuvo dispuesto a usarla para ejecutar tareas simbólicas repetitivas para generar patrones rápida y exactamente previo a inducir razonamientos, pero con cautela sobre el uso las demás capacidades simbólicas de la calculadora.

En cuanto a la evaluación, en este estudio una de las docentes también cambio el foco de sus exámenes incluyendo más preguntas que requerían que los estudiantes interpretaran y explicaran sus respuestas más que recordaran hechos y destrezas. Ella desarrolló un estilo de enseñanza con tecnología que ha permitido a los estudiantes adoptar estrategias de aprendizaje positivas y cooperativas en el laboratorio de computación.

Heid y otros (1990) citados por Kendall y otros (2005) encontraron que otros roles de los docentes cuando enseñan con tecnología incluye asistencia técnica, colaboración, facilitador del aprendizaje estudiantil y de catalizador.

CAPITULO IV

Las prácticas docentes

CAPÍTULO IV. Las prácticas docentes

En este capítulo se analiza las prácticas docentes en general y en particular se analiza las prácticas de los docentes de matemáticas. El tema de la matemática escogido para profundizar el análisis es la iniciación al álgebra, específicamente lo referente al desarrollo de los procesos de generalización, abstracción y simbolización, abordado en el capítulo III.

Prácticas generales de los docentes

Esta tesis trata sobre programas de formación de docentes de matemática, particularmente sobre los programas de formación donde las prácticas docentes tienen un rol central. Por ello este capítulo estudia las prácticas docentes, ubicándolas en un marco teórico más amplio que es el de las prácticas sociales; presenta una definición de prácticas docentes relacionada con la sistematización de experiencias y la construcción de conocimientos, describe unas características de las prácticas, como son intencionalidad, temporalidad y relación con el contexto; y por último se presentan las fases de las prácticas docentes.

Para Herrera (2004) las prácticas sociales son un conjunto de actividades orientadas, funciones de componentes humanos o procesos de producción que resultan de la necesidad de resolver un conjunto de problemas prácticos, cognitivos o morales que requieren o no de previsión científica. A su vez las

acciones orientadas las define como un conjunto de acciones sociales con metas definidas y deliberadas. El fin de las prácticas sociales es hacer apropiaciones racionales de la naturaleza o de la sociedad. Las actividades humanas las clasifica como científicas, tecnológicas y artísticas; los componentes de esta son el trabajo humano, los medios de producción, el objeto de trabajo y el producto o resultado.

En este trabajo se considera que las prácticas docentes son prácticas sociales, pues estas son **actividades humanas orientadas con metas definidas y deliberadas**, de naturaleza científica y que surgen de la necesidad de explicar las acciones educativas en un contexto escolar y de la necesidad de crear las mejores condiciones para los aprendizajes estudiantiles. Los componentes de las prácticas docentes son:

- Un *trabajo*, que es tanto individual como colectivo. El trabajo individual tiene como característica fundamental que es reflexivo y explicativo en todas las fases de la práctica, como se explicará más adelante. El trabajo colectivo se caracteriza por la discusión de las prácticas con los colegas de la institución educativa particular.
- Los *medios de producción*, son la base conceptual de conocimiento (Herrera, 2004) que pueden provenir tanto de los programas educativos, los textos escolares, los manuales docentes, el proyecto educativo de la escuela, como de los resultados de investigación educativa. También son medios de producción las propias experiencias de los docentes.
- El *objeto de trabajo*, de tipo conceptual, son los conocimientos de los docentes, los cuales se espera que progresivamente con el tiempo sean más

y mejores, y transformen las actividades de aprendizaje, las estrategias de enseñanza, los instrumentos de evaluación y desde un punto de vista más general podrían aportar evidencias a los mismos libros de textos, a los manuales docentes, al proyecto educativo de la escuela y a la investigación educativa.

- Los *resultados* son más y mejores aprendizajes docentes, es decir, nuevos conocimientos que orienten sus prácticas.

Las prácticas sociales regulan la construcción del conocimiento, tienen una función normativa (Covián, 2005; Montiel, 2005). También se caracterizan por ser temporales, darse en un espacio, tener una ideología y una cultura que influyen en la construcción del conocimiento (Covián, 2005).

El contexto escolar: la escuela y los colegas, el proyecto educativo de la escuela, y las características de las y los estudiantes de una escuela, generan unas prácticas sociales que norman los conocimientos que construyen los docentes, y por ende sus prácticas. Los docentes construyen sus conocimientos en un contexto escolar determinado, bajo la influencia de conocimientos ya institucionalizados (el currículo, el proyecto educativo de la escuela, el trabajo del equipo docente) que forman parte de la ideología y la cultura a la cual él responde. Por otra parte, el docente también construye sus conocimientos reflexionando sobre sus experiencias, sistematizándolas y transformándolas en conocimientos.

Arrieta en el 2003 planteó que el concepto de "práctica" connota hacer algo, pero no simplemente hacer algo en sí mismo y por sí mismo; es algo que tiene un contexto social que otorga un significado a lo que se hace. La práctica siempre implica a la persona actuando y conociendo al mismo tiempo, la llamada actividad manual no es irreflexiva y la actividad mental no es incorpórea. De aquí que las prácticas están influenciadas por conocimientos institucionalizados, pero también producen nuevos conocimientos producto de la sistematización de las experiencias, las cuales se convierten en conocimientos, en un ciclo de sistematización de experiencias-producción de conocimientos-nuevas prácticas.

En este trabajo se asume que las prácticas docentes son las acciones orientadas que lleva a cabo el docente producto de la reflexión, la explicación y la discusión de su experiencia educativa en una institución particular, la cual le da contexto y sentido a su quehacer. El docente transforma su experiencia en conocimientos a través del análisis y la sistematización de la misma, y estos conocimientos orientan sus acciones convirtiéndose en prácticas; este análisis se hace en contexto con los colegas de la institución, con los productos de los aprendizajes estudiantiles y se sistematiza en un proceso recursivo de análisis, explicación y discusión constante con los colegas. Las prácticas docentes producen nuevas experiencias y estas nuevos conocimientos, en un proceso continuo de experiencias-conocimientos-prácticas.

Las nuevas experiencias y los nuevos conocimientos buscan desarrollar nuevas prácticas que mejoren tanto el aprendizaje de los y las docentes como el

aprendizaje de las y los estudiantes. Los docentes a través de sus experiencias construyen conocimientos acerca de cómo aprenden sus estudiantes, de qué estrategias utilizan, sobre si las actividades y evaluaciones que diseña logran que los estudiantes aprendan, si los recursos que utilizó fueron los adecuados, etc. La sistematización de las experiencias, la construcción de conocimientos y las nuevas prácticas docentes también ayudan a mejorar el proyecto educativo de la escuela, a través del conocimiento de los estudiantes, de la identificación de necesidades y productos curriculares, y de los conocimientos que generan los propios docentes.

La experiencia tiene dos facetas, una general dada por el contexto cultural y otra constituidas por las vivencias personales particulares. La experiencia es un proceso, alude al desarrollo y debe conceptualizarse como la interacción permanente del docente con su entorno. Reflexionar acerca de la experiencia es otro proceso, que puede conceptualizarse como la toma de conciencia. El conocimiento dominante condiciona y determina la experiencia, el cual regula la práctica docente (Aguilar y Viniegra, 2003).

Para Aguilar y Viniegra (2003) han sido las teorías de aprendizaje las que han proporcionado a las prácticas docentes sus lineamientos, normas y leyes para conducir el proceso de aprendizaje, a partir de sus explicaciones sobre el concepto mismo de aprendizaje y sus ideas correlativas de conocimiento. Para estos autores el concepto de conocimiento dominante es el de un producto acabado que puede consumirse: el conocimiento que está en los libros, en los bancos de datos, en los contenidos de los programas educativos, y no en las experiencias que los docentes son capaces de elaborar.

Desde este punto de vista se puede decir que el conocimiento de los docentes está basado en tres fuentes o medios de producción:

1. los programas educativos, los libros escolares, los manuales docentes;
2. los resultados de la investigación educativa, publicados en revistas, actas de eventos, libros especializados, etc.;
3. sus experiencias.

La construcción de los conocimientos señalados en 1 y 2 se lleva a cabo a través del análisis de los materiales curriculares y de los resultados de las investigaciones. Los conocimientos producto de la experiencia se desarrollan a través de procesos de reflexión, explicación y discusión de las propias experiencias, algunos individualmente y otros entre grupos de colegas. La relación entre estos conocimientos se establece a través de la reflexión crítica de las acciones educativas la cual exige conocimiento del tema educativo, por medio de materiales curriculares y resultados de investigación del tema a tratar, y explicación de las propias acciones educativas específicas, sin imposición de un conocimiento sobre otro, o dicho de otra forma dándole igual valor al conocimiento establecido por otras personas e instituciones como al conocimiento producto de las experiencias personales del docente.

Las prácticas docentes tienen tres características fundamentales:

1. Son intencionadas, su meta, o resultados que espera alcanzar, es que a través de la reflexión, la explicación y la discusión de sus propias experiencias, el docente construya conocimientos que lo desarrollen como profesional.
2. Son contextualizadas, están ubicadas en la escuela, su espacio es la escuela, los aprendizajes docentes se dan en el contexto del proyecto educativo de una escuela particular. En este sentido la escuela es espacio y es cultura.
3. Son temporales, su momento de referencia es la clase, se dan antes, durante y después de la clase, además son cíclicas y progresivas. El ciclo lo dan las fases de las prácticas desarrolladas más adelante. Y el progreso proviene de su evaluación, constante mejora o adecuación al contexto.

Para López (2000) la meta de las prácticas docentes es el desarrollo humano de las y los estudiantes, y del propio docente como profesional; su **intencionalidad** fundamental es generar una intervención educativa planificada, sistemática, significativa y comprometida con dicho desarrollo. En este sentido este capítulo estudia las prácticas docentes como eje fundamental en los programas de formación de docentes de matemática que buscan que sus participantes se desarrollen profesionalmente a través de reflexionar, explicar y discutir sus experiencias, transformarlas en conocimientos y orientar las prácticas.

El contexto de las prácticas docentes es la escuela. Las interacciones con los estudiantes y con los colegas, con los programas, con los textos escolares y con los resultados de investigación en matemática educativa otorgan significado al

trabajo docente, quien actúa en el aula con sus estudiantes, actúa en la escuela con sus colegas y estudia los resultados de investigación y los relaciona con su actuación.

Abdalla (2004) encontró cuatro indicadores de que la escuela es el contexto de trabajo del docente:

1. La gestión escolar, que organiza la escuela y crea condiciones para su transformación, lo cual incluye oportunidades para que el docente (re)construya colectivamente sus saberes.
2. El proyecto político-pedagógico, eje conductor del trabajo de la escuela, por cuyo intermedio los docentes se organizan, estructurando y transformando la propia escuela.
3. La organización y articulación del currículo, espacio conceptual y de intervención del docente, pues se concibe como un campo de reflexión y de conocimiento, de desarrollo de la cognición que movilizan las enseñanzas hacia los aprendizajes.
4. El compromiso de la institución con el desarrollo profesional de los docentes, pues esta es la clave para que las instituciones puedan contar con un equipo permanente y comprometido con la anhelada calidad de la enseñanza.

Los docentes desarrollan sus prácticas en un contexto escolar comprometido con su desarrollo profesional, donde se gestionan espacios y tiempos para que los docentes reflexionen y discutan sus experiencias, generen sus conocimientos y los utilicen para orientar sus acciones, todo esto articulado

con un currículo y con el proyecto político y pedagógico del trabajo de la escuela.

Para López (2000) **la práctica docente tiene cuatro fases**, caracterizadas por un tipo predominante de operaciones que facilitan su comprensión y análisis:

Primera fase: *contextualización*. Las prácticas docentes parten de un proceso de ubicación en el contexto institucional, social, filosófico, curricular y material del curso que se va a impartir. En esta fase el docente recopila información y analiza la misma.

Segunda fase: *planificación*. Esta fase implica un juicio crítico del contexto analizado y de los enfoques didácticos y materiales del curso. Este juicio crítico conlleva a identificar un enfoque general del curso que sirve de fundamento para plantear un programa del curso (objetivos, contenidos, estrategias, evaluación).

Tercera fase: *significación*. Esta fase es la del aula, en la cual se recopila información sobre cómo aprenden las y los estudiantes, sus estrategias y construcción de conceptos. También en esta fase se hacen análisis críticos de las situaciones de aprendizaje.

Cuarta fase: *evaluación*. De esta fase depende el mejoramiento progresivo y sustentado de las prácticas, y no solamente convertirlas en una repetición o introducir cambios por pura intuición del docente. Esta fase debe ser

cuantitativa, personal y grupal, aportar nueva información, mejores discernimientos, juicios más acertados y mejores decisiones para el futuro.

En relación a las prácticas docentes y el desarrollo humano, López (2000) sostiene que las prácticas docentes aparte de ser atentas, críticas, libres y significativas deben tener una direccionalidad y orientación: un proceso que tiene como fin a los estudiantes y como interés fundamental el desarrollo libre y autogestivo de estos para contribuir a la humanidad. Este proceso es dialéctico: busca el aprendizaje estudiantil con el cual también aprende el docente; y su intencionalidad fundamental es generar una intervención planificada, sistemática, significativa y comprometida con el desarrollo humano del estudiantado.

El contexto es un elemento clave en la direccionalidad y orientación de las prácticas, y como señala Arrieta (2003), las personas ejercen las actividades que llevan a cabo de acuerdo a un contexto dado. El contexto de las prácticas docentes es la escuela, dentro del aula el docente le da significado a sus planes en el contexto específico de la escuela, fuera del aula se desarrollan las otras tres fases de las prácticas: la propia contextualización, la planificación y la evaluación. Todas las fases de las prácticas docentes se dan a través de procesos de reflexión, explicación y discusión como son:

1. Reflexión previa, acerca de los objetivos de la educación matemática, los contenidos a desarrollar, el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Basada en el currículo y en los resultados de investigación. Con esta base

planifica la instrucción (actividades de aprendizaje y estrategias didácticas, organizadas en el tiempo).

2. Reflexión posterior, para analizar los resultados de aprendizaje.
3. Explicación de los resultados de aprendizaje, si hubo ensayos, improvisaciones y toma de decisiones durante la clase; entonces argumenta cuál fue el resultado, que apreciaciones y sentimientos se tienen.
4. Discusión con los colegas. Antes de la clase para coordinar estrategias con los docentes del mismo grado, y entre los docentes de matemática de distintos grados para adaptar el currículo. Después de la clase para analizar resultados y mejorar las acciones.

Estas ideas se resumen en la Tabla N° 3. En esta tabla las filas representan el trabajo intelectual de los docentes (reflexión, explicación y discusión) cuando desarrolla sus prácticas, y en las columnas se ubican las prácticas como tal (contextualización, planificación, significación en el aula, evaluación) en el tiempo y con referencia a las clases en aula con estudiantes (antes, durante y después de las clases). Si se analiza desde la perspectiva de Arrieta acerca de que las prácticas implican a la persona actuando y conociendo al mismo tiempo, se observa que al analizar, coordinar y argumentar hay tanto la necesidad de conocer (currículo, resultados de investigación, aprendizajes estudiantiles, experiencias de otros colegas) como de actuar (darle significado propio a toda la información para diseñar actividades de aprendizaje y estrategias de enseñanza, desarrollarlas y criticarlas) al mismo tiempo.

Tabla N° 5. Prácticas docentes y su ubicación en las fases de López (2000)

Trabajo/Práctica	Clases en aula con estudiantes		
	Antes	Durante	Después
Reflexión	Contextualización: Análisis del currículo y de resultados de investigación educativa.	Estado de alerta para recopilar información sobre los aprendizajes estudiantiles	Evaluación: Análisis de resultados de aprendizajes estudiantiles.
Explicación	Planificación: Diseño de actividades de aprendizaje y de estrategias de enseñanza.	Desarrollo de estrategias de enseñanza con actividades de aprendizaje específicas.	Argumentar resultados.
Discusión	Para coordinar planes.	Sobre enfoques de aprendizaje.	Sobre resultados y propuestas de cambios.

Prácticas de los docentes de matemática

A continuación se analizarán las prácticas de los docentes de matemática, en particular las que promueven los aprendizajes iniciales del álgebra tomando como *medios de producción* la visión de la investigación educativa referida a los aprendizajes iniciales del álgebra, analizada en el capítulo III.

Schwan (2001) sostiene que los docentes de matemática tienen la oportunidad de desarrollar conocimientos centrales de la enseñanza involucrándose en actividades que están en el corazón del trabajo diario de un docente,

desarrollando así conocimientos a través del análisis de situaciones reales, es decir, actuando y conociendo al mismo tiempo.

Schwan (2001) sostiene que el trabajo de los docentes es cíclico y el ciclo se compone de:

- la planificación de la instrucción, donde el docente decide que conocimientos matemáticos quiere que aprendan los estudiantes, determina la prioridad de los conocimientos y experiencias con la cual los estudiantes puedan construir nuevos conocimientos,
- la enseñanza, donde lleva a cabo el plan que ha desarrollado. Durante la enseñanza el docente puede engranar la actividades y tareas de los y las estudiantes, hacer las correcciones que sean necesarias para ajustarse a las necesidades de los estudiantes y evaluar formal e informalmente qué están aprendiendo los estudiantes,
- la reflexión, durante este proceso los docentes pueden considerar el nivel y tipo de pensamiento al cual la mayoría de los estudiantes apostaron durante la lección y qué hicieron y dijeron los estudiantes que sugiriera comprensión de las ideas matemáticas importantes.

Como se describió en el aparte anterior la reflexión está inmersa en todo el trabajo del docente: desde la planificación anterior a la clase por medio de la toma de decisiones que hace el docente, durante la enseñanza cuando el docente engrana y corrige su plan, y después de la clase cuando evalúa el trabajo de sus estudiantes.

En Venezuela actualmente la planificación de la clase de matemática, la cual es solicitada por la institución educativa formalmente; consiste en un listado de contenidos o de objetivos específicos, y de ejercicios que van a desarrollarse durante la clase, no se reporta cuáles son los propósitos educativos y las estrategias con que se apoyará el aprendizaje estudiantil. Por otra parte, es la planificación la práctica docente que cuenta con más documentación; difícilmente los docentes documentan lo que ocurre durante y después de la clase: si resultaron las estrategias, si aparecieron nuevas explicaciones por parte de los estudiantes acerca del tema desarrollado, si se relacionó el tema con otro de la misma área o de otra, si se probaron nuevas estrategias o si se tuvo alguna ocurrencia de una. Una descripción más detallada de este fenómeno se hará en el capítulo V.

Antes del trabajo en aula y a través de un proceso de reflexión previa el docente de matemática diseña un plan de clase basado en:

- un objetivo educativo, que busque el desarrollo del pensamiento matemático e integre los contenidos matemáticos con la realidad y con otras áreas del conocimiento;
- conocimientos sobre el tema que espera aprendan sus estudiantes, que integre varios objetivos de los programas tradicionales de matemáticas; que busque desarrollar el pensamiento matemático;
- conocimientos de la didáctica de las matemáticas para el tema abordado, que permitan desarrollar distintas estrategias de enseñanza;

- conocimiento sobre cómo aprenden los estudiantes el tema abordado, considerar aspectos centrales del aprendizaje de las matemáticas como la afectividad;
- conocimiento de la dinámica del grupo o contexto social donde se desarrolla la clase.

Durante el trabajo en el aula con los y las estudiantes, es posible que el docente deba adaptar, improvisar y experimentar nuevas estrategias, relacionar el tema tratado con otros distintos, tomar decisiones para controlar la dinámica del grupo y conducirlo hacia el logro de los objetivos. Por ello durante la clase debe mantenerse en un **estado de alerta** que le permita conocer mejor cómo aprenden sus estudiantes, incorporar estos nuevos aprendizajes a su formación y argumentar sobre sus decisiones didácticas futuras.

El estudio de las prácticas docentes durante el trabajo en el aula está centrado en las acciones del docente, en su rol dentro del aula, en la significación que le da el docente a su planificación de la clase, en su intencionalidad. El estudio está basado en el trabajo real del docente, no es prescriptivo, no pretende plantear metodologías, modelos o estrategias a seguir paso a paso por el docente durante su trabajo en el aula para analizar si estas dan buenos resultados o no.

Para observar el trabajo del docente en el aula, se consideran las siguientes estrategias de enseñanza de la matemática:

1. Promoción de la verbalización de las ideas matemáticas, de manera de que los estudiantes se vean en la necesidad de utilizar el lenguaje matemático y con ello desarrollar su pensamiento.
2. Utilización de las distintas representaciones de una misma situación matemática, como son las representaciones numéricas a través de las tablas de valores, las representaciones algebraicas, a través de las expresiones algebraicas, las ecuaciones, inecuaciones, fórmulas; y las representaciones gráficas o geométricas según sea el caso.

En este sentido algunas acciones del docente de matemática dentro del aula son:

- la realización de preguntas abiertas (cómo, por qué, de qué trata, qué) que permita a los estudiantes verbalizar su pensamiento matemático,
- la realización de observaciones analíticas, en la búsqueda de captar lo esencial del tema tratado y a su vez relacionarlo con otros temas de la matemática,
- el paso de una representación a otra de manera de ir relacionando distintos conocimientos matemáticos en una misma situación.

Las acciones docentes en el caso del uso el lenguaje natural en el aula de matemáticas deben tomar en cuenta que (Míguez y Martín, 2006, p. 182):

- Los estudiantes deben aprender a hablar y escribir matemáticamente y sobre matemáticas.

- El docente debe hacer uso de la escritura y la expresión oral para determinar el nivel de conceptualización de sus estudiantes.
- El docente debe escribir y promover la escritura de la matemática en lenguaje natural.
- Leer, escribir y hablar son actividades consustanciales al aprendizaje de la matemática. La escritura y el habla otorgan pistas sobre el pensamiento matemático del niño.
- El docente debe promover la simplificación, no simplificar él.
- El docente debe proponer ambientes de aprendizaje donde se estimule la indagación como actividad que promueve la discusión, la lectura, la elaboración de conjetura, la exposición de planteamientos, en vez de restringirse a la realización de ejercicios.
- Promover la indagación, en vez de la ejecución de ejercicios, puede generar incertidumbre en el docente, lo cual es inevitable, pero es manejable cuando se acompaña al estudiante con honestidad y disposición de ayudar.
- En el proceso de simbolización se le debe dar prioridad a la negociación de los significados por encima de la norma.
- Es necesario escuchar a los estudiantes al describir los procedimientos que utilizan para resolver ejercicios matemáticos y dar importancia al conocimiento previo o anterior a la instrucción.
- Frecuentemente los contenidos escolares no se vinculan a los conocimientos informales que el niño posee, lo cual da lugar a una especie de situación conflictiva entre los contenidos matemáticos escolares y aquellos que los niños poseen o han adquirido fuera de la escuela.

Luego de la clase, el docente reflexiona y analiza los aprendizajes de sus estudiantes, argumenta las estrategias de aprendizaje utilizadas por los estudiantes; reflexiona y analiza sus estrategias de enseñanza, y discute con sus colegas los resultados para identificar éxitos, fracasos y evaluar dónde hay que hacer cambios.

A continuación se analizarán algunas orientaciones para las prácticas docentes cuando se trabaja el tema de iniciación al álgebra. Estas orientaciones están organizadas según las investigaciones educativas reportadas en el capítulo III, como sigue:

1. Referidas a los procesos de generalización y simbolización.
2. Referidas a la adquisición del concepto de variable y sus distintos usos.
3. Referidas al trabajo de resolución de problemas.
4. Referidas al uso de las tecnologías, particularmente de las calculadoras.

Otro criterio de organización es el momento de la práctica con respecto a la clase: antes, durante y después. Fundamentalmente antes de la clase, las orientaciones consisten en la contextualización propia a cada sistema escolar, y en el diseño de actividades de aprendizaje y de estrategias de enseñanza basadas en los resultados de investigación analizados en el capítulo III; durante la clase las orientaciones están dirigidas al rol del docente en el aula.

1. *Referidas a los procesos de generalización y simbolización.*

Los resultados de investigación referidos a los procesos de generalización y simbolización plantean dos aspectos claves:

1. La necesidad de relacionar actividades aritméticas y geométricas con la aparición de las letras en la matemática.
2. Las etapas que involucran estos procesos: observación de la regularidad, su expresión oral, y su expresión escrita.

En el diseño de las actividades de generalización hay que considerar que estas requieren establecer relaciones e identificar características comunes a los casos específicos para llegar a una lectura y escritura de lo general. El docente debe diseñar situaciones para cada una de estas etapas y, dada la importancia de cada una de ellas, no debe apresurar el paso a la escritura o simbolización pues esto puede ocasionar la pérdida del significado de las expresiones algebraicas (Torres y otras, 2002).

Durante las clases, para el proceso de generalización los roles del docente son:

- guiar el proceso para que el estudiante identifique los aspectos esenciales y omita los que no lo son; una pregunta clave en esa guía es ¿qué es lo que varía y con relación a qué lo hace? (Torres y otras, 2002).
- responsabilizar a los estudiantes de decidir si una conjetura es correcta o no; no acostumbrarlos a que sea él quien confirme o niegue la veracidad de la conjetura, tratando de hacer por los estudiantes aquello que ellos no pueden hacer por ellos mismos, pues si él hace todo por los estudiantes,

estos se acostumbraran a esperar que él lo haga todo (Mason, 1999; Lannin, 2003).

- ayudar a los estudiantes a reconocer la importancia de relacionar sus reglas con el contexto de la situación trabajada; y no promover la justificación de prueba con ejemplos, lo cual es comúnmente usado por los estudiantes (Lannin, 2003).

En cuanto al proceso de simbolización el rol del docente es crear un ambiente propicio para que la simbolización sea producto de una necesidad de los estudiantes de comunicar de manera más efectiva sus ideas (Torres y otras, 2002). La respuesta a la pregunta cuándo es el momento oportuno para pasar al registro simbólico y cómo movilizarlo debe buscarse en la actividad misma.

2. Referidas a la adquisición del concepto de variable y sus distintos usos.

Antes de la clase, el docente debe identificar, evaluar y utilizar los significados de la variable y sus distintos usos, al igual que evaluar cuáles de estos significados se corresponden con los aportados por la historia, los textos, los programas oficiales y las de los docentes para determinar los factores del manejo conceptual en un **contexto** determinado (Torres y otras, 2002).

También Ursini y otros (2005) plantean que para tener éxito en situaciones que involucren los distintos usos de las variables es necesario que el docente **diseñe actividades** donde los estudiantes puedan reconocer, interpretar, deducir y

simbolizar cada uno de los usos de las variables: número general, incógnita y relación funcional.

Para que las expresiones algebraicas cobren la dimensión matemática apropiada hay que operar con ellas, producir ecuaciones, inecuaciones y nuevas expresiones algebraicas. Para ello el docente debe **diseñar actividades** que permitan construir el significado de las expresiones a partir de distintas representaciones, como gráficas y tablas de datos, y usarlas de manera flexible para describir fenómenos; lo cual también hace necesaria una verbalización que apoya al proceso de simbolización en que se encuentran los estudiantes (Torres y otras, 2002).

Durante la clase, el rol del docente según Ursini y otros (2005, p. 40) es:

- organizar el ambiente de la clase para lograr la participación activa de los estudiantes durante las actividades y propiciar así el intercambio de ideas acerca del concepto de variable y sus distintos usos.
- guiar a los estudiantes durante las actividades y las discusiones grupales, con el propósito de que desarrollen habilidades para trabajar con cada uno de los usos de la variables de manera separadas primero, y luego integrando los distintos usos de la variables y pasando de uno a otro de manera flexible.

Una de las estrategias de enseñanza sugerida para trabajar el concepto de variables es la modelación, tanto para construir ecuaciones y funciones, como para resolver problemas y así relacionar la matemática con la vida real. En el

caso de los modelos para construir ecuaciones hay que analizar el tipo de modelo más apropiado para cada tipo de ecuación y por ello es importante trabajar con variedad de modelos (Torres y otras, 2002).

En tal sentido Serres (2006) planteó el uso de los distintos modelos para trabajar con distintos tipos de ecuaciones -aritméticas y no aritméticas, (Fillooy, 1999)-, con soluciones en distintos conjuntos numéricos y distintas formas de resolución -aritmética, algebraica, gráfica-, los usos son:

- El modelo de la balanza para introducir el tema, con ecuaciones aritméticas y de soluciones naturales.
- El modelo de compartimientos para las ecuaciones no aritméticas de soluciones naturales.
- El modelo de grafo lineal para las ecuaciones aritméticas y de soluciones reales, y para discutir la prioridad de las operaciones.
- El modelo de grafo por bloques para las ecuaciones no aritméticas y de soluciones reales.
- El modelo de aproximación lineal para trabajar con tanteo sistemático y mostrar una forma aritmética de resolver una ecuación.
- El modelo gráfico para relacionar el tema de ecuaciones con el de funciones y mostrar la forma gráfica de resolver una ecuación.

3. Referidas al trabajo de resolución de problemas.

Antes de la clase, el docente debe contar, ya sea porque los diseñe o porque los ubique en distintos textos, con (Schoenfeld, 1992):

- un rango de problemas que vayan desde los abiertos hasta los cerrados, de manera de trabajar los distintos usos de la variable;
- situaciones exploratorias;
- un amplio rango de aproximaciones y técnicas, que abarquen desde las aplicaciones lineales de los métodos algorítmicos, hasta el uso de estrategias heurísticas de solución de problemas.

Durante la clase, los docentes deben (Schoenfeld, 1992, p. 365):

- Modelar las conductas de solución de problemas siempre y cuando sea posible, explorar y experimentar extensamente con los estudiantes.
- Crear una atmósfera de aula en el cual los estudiantes se sientan cómodos intentando sus ideas.
- Invitar a los estudiantes a explicar sus pensamientos en todos los estados de solución de problemas (leer, explorar, analizar, planificar y verificar). De manera de estimar la comprensión del problema desde los puntos de vista cualitativo, cuantitativo y conceptual (Grupo Azarquiel, 1993).
- Hacer énfasis en el hecho de que puede necesitarse más de una estrategia para resolver un mismo problema, y que hay problemas que pueden requerir aproximaciones originales.

- Presentar situaciones problemáticas que se asemejen muy cercanamente a las situaciones reales en su riqueza y complejidad pues así las experiencias que los estudiantes ganen en el aula serán transferibles.

Algunas acciones docentes para trabajar solución de problemas son (Lester y otros, citados por Schoenfeld, 1992):

Tabla N° 6. Acciones y propósitos docentes cuando trabaja solución de problemas.

ANTES de la solución del problema	
Durante la clase	Propósitos
1. Leer el problema, discutir palabras o frases que los estudiantes puedan no entender.	Ilustrar la importancia de leer cuidadosamente, focalizar en vocabulario especial.
2. Usar la discusión de la clase completa para focalizar en la importancia de entender el problema.	Focalizar en datos importantes, clarificación de procesos.
3. (Opcional) Discusión de la clase completa de posibles estrategias para resolver un problema.	Averiguar ideas para posibles caminos de resolución del problema.
DURANTE la solución del problema	
Observar y preguntar a los estudiantes para determinar dónde están.	Diagnosticar debilidades y fortalezas.
5. Proveer tantas indicaciones como sean necesarias.	Ayudar a los estudiantes a superar obstáculos.
6. Proveer tantas extensiones del problema como sean necesarias.	Desafiar tempranamente a los que terminan para generalizar.
7. Requerir a los estudiantes que obtengan "una solución a la pregunta hecha".	Requerir a los estudiantes mirar su propio trabajo y estar seguros de que tiene sentido.
DESPUÉS de la solución del problema	
8. Mostrar y discutir soluciones.	Mostrar y nombrar diferentes estrategias.
9. Referir previamente problemas resueltos o tener extensiones resueltas por estudiantes.	Demostrar aplicabilidad general de las estrategias de solución de problemas.

10. Discutir fracasos especiales, como dibujos.	Mostrar como los fracasos pueden influenciar la aproximación.
---	---

4. Referidas al uso de las tecnologías, particularmente de las calculadoras.

Antes de la clase, el docente debe organizar adecuadamente actividades para resolver con la calculadora que propicien el razonamiento algebraico a través de la introducción de nuevas expresiones algebraicas, en el momento adecuado (Cedillo, 1999).

Durante la clase, el docente debe ser un mediador en el uso del lenguaje algebraico, basándose en el seguimiento del trabajo de cada estudiante, del diálogo entre el docente y los estudiantes, y la discusión colectiva donde se aborden los aspectos claves de las actividades y los errores que se cometen en su ejecución.

Heid y otros (1990) citados por Kendall y otros (2005) encontraron que otros roles de los docentes cuando enseñan con tecnología incluye asistencia técnica y colaboración.

Estas ideas se resumen en la Tabla N° 5. En esta tabla las filas representan el trabajo intelectual de los docentes (reflexión, explicación y discusión) cuando desarrolla sus prácticas, y en las columnas se ubican las prácticas como tal (contextualización, planificación, significación en el aula, evaluación) en el tiempo y con referencia a las clases en aula con estudiantes

(antes, durante y después de las clases) y a los resultados de investigación sobre iniciación al álgebra.

Tabla N° 7. Prácticas del docente cuando enseña álgebra

Trabajo/Práctica	Clases en aula con estudiantes		
	Antes	Durante	Después
Reflexión	<p>Analizar:</p> <ul style="list-style-type: none"> - tipos de secuencias para construir patrones, - tipos de modelo para resolver distintos tipos de ecuaciones, - tipos de problemas para trabajar los distintos usos de la variable. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Crear una atmósfera cómoda para participar. 2. Guiar la observación de secuencias a través de análisis y comparación. 3. Responsabilizar a los estudiantes de sus conjeturas. 4. Modelar la conducta de solución de problemas. 	<p>Evaluar los aprendizajes estudiantiles en el contexto (currículo y resultados de investigación).</p>
Explicación	<ol style="list-style-type: none"> 1. Diseñar situaciones para: <ul style="list-style-type: none"> - la observación, verbalización y escritura de patrones que conlleven a la generalización. - trabajar los distintos usos de la variable. - utilizar la calculadora como medio de desarrollo del lenguaje algebraico. 2. Contar con problemas de distinta naturaleza que permitan generalizar, simbolizar, establecer ecuaciones y funciones. 	<ol style="list-style-type: none"> 5. Ayudar a enlazar reglas en un contexto determinado, a decidir que constituye una justificación válida. 6. Hallar el momento de pasar al registro simbólico. 7. Utilizar los significados estudiantiles. 8. Hacer énfasis en el uso de distintas estrategias para resolver un problema determinado. 9. Prestar asistencia técnica cuando se usan calculadoras. 	<p>Resultados de aprendizaje:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Estrategias de generalización. - Usos de los modelos de resolución de ecuaciones. - Estrategias de solución de problemas. - Simbolización utilizada. - Desarrollo del lenguaje algebraico a través de la calculadora.
Discusión	<p>Junto con los colegas construir bancos de actividades de aprendizaje y diseñar estrategias de enseñanza.</p>	<ol style="list-style-type: none"> 10. De reglas necesarias para preservar patrones. 	<p>Incorporar aprendizajes estudiantiles a las nuevas estrategias de enseñanza.</p>

Este estudio de las prácticas docentes, caracteriza las prácticas docentes como un tipo particular de prácticas sociales, llevadas a cabo por un grupo específico de la sociedad: las y los docentes, en una escuela particular, la cual le da a las prácticas docentes un contexto espacial, ideológico y cultural.

En este estudio se define a las prácticas docentes como un trabajo que comienza con los procesos de reflexión, explicación y discusión de las experiencias educativas de los docentes, tanto en individual como en colectivo con sus colegas; luego pasa a una sistematización de las experiencias para transformarlas en conocimientos, los cuales junto con los conocimientos institucionalizados en el currículo y en los resultados de investigación en matemática educativa, orientan las prácticas docentes. Los resultados de estas prácticas son nuevos conocimientos docentes que apoyan el desarrollo profesional de los mismos.

Las prácticas docentes tienen tres características fundamentales: su intención, un contexto (la escuela) y un tiempo, el cual tiene como referencia el momento de la clase, y se clasifica en antes, durante y después de la clase. En cada uno de estos momentos las prácticas son: la contextualización y la planificación de la clase (antes), la significación del plan (durante) y la evaluación de la ejecución de la clase (después); siendo tres de cuatro de estas prácticas **fuera de la clase**.

Para cada una de las prácticas docentes se busca caracterizar las acciones del docente cuando enseña un tema específico como es la iniciación al álgebra. Estas acciones están referidas al diseño de actividades de aprendizaje y

estrategias de enseñanza para trabajar los distintos usos de la variable, para trabajar la solución de problemas como estrategia que apoya el desarrollo de los usos de la variable, para usar la calculadora como herramienta tecnológica que promueve el desarrollo del lenguaje y el pensamiento algebraico; todo esto es antes de la clase. Durante la clase se estudia el rol del docente en el desarrollo de las actividades de aprendizaje y de la enseñanza. Y después de la clase se evalúa críticamente la ejecución del plan.

Este estudio de las prácticas docentes, específicamente de las prácticas de los docentes de matemáticas cuando trabajan el tema de iniciación al álgebra, servirá de base para caracterizar un nuevo Programa de Formación de Docentes de Matemática centrado en las prácticas docentes. Prácticas docentes influenciadas por el conocimiento institucionalizado, proveniente del currículo, del proyecto educativo de la escuela donde se desarrolle el programa de formación, de los resultados de investigación sobre iniciación al álgebra; y que a través de un trabajo individual y colectivo con los colegas, trabajo de reflexión, explicación y discusión de las propias experiencias producirá nuevos conocimientos, de distinta naturaleza (didácticos, matemáticos, de la escuela y de los propios estudiantes) que orientarán las prácticas futuras. Las prácticas docentes son cíclicas y progresivas. Parten de una contextualización espacial, ideológica y cultural, terminan en una evaluación crítica y constructiva que las mejora, produce nuevas prácticas y que provoca un desarrollo profesional sostenido de los docentes.

CAPITULO V

Los Programas de Formación de Docentes de
Matemáticas

CAPÍTULO V. Los Programas de Formación de Docentes de Matemáticas

Este capítulo caracteriza un tipo particular de programas de formación docente: los programas de formación de docentes que tienen como eje central las prácticas docentes. Este análisis se hace tomando en consideración los objetivos, las fases y la organización que debe tener un programa de formación centrado en prácticas.

Este capítulo también describe algunos programas concretos de formación dirigidos a docentes de matemáticas; explicando el rol que le dan a las prácticas y a la investigación en matemática educativa.

En este trabajo se entiende por formación docente a la formación que se da a los docentes en servicio, con trabajo en aula, o la llamada formación permanente. Se hará referencia particularmente a los docentes de matemática y en este conjunto a los que enseñan matemáticas en niveles educativos básicos y medios, cuyos estudiantes tienen edades entre 12 y 18 años. En Venezuela estos niveles educativos son denominados III Etapa de Educación Básica y Educación Media Diversificada y Profesional respectivamente. El estudio de las matemáticas al inicio de la III etapa de Educación Básica en Venezuela consiste en la introducción al álgebra y los números enteros.

Un Programa de Formación Docente (PFD) consiste en un conjunto de actividades sistematizadas donde los docentes a través de la reflexión, la explicación y la discusión sistematizan sus experiencias, las transforman en conocimientos y producen nuevas prácticas. Un PFD centrado en prácticas tiene un objetivo general: explicar las prácticas docentes, transformarlas y producir nuevas prácticas. Para ello los docentes participantes en el programa reflexionan y buscan explicaciones a sus experiencias, las cuales se van sistematizando y en el proceso de discusión colectivo se van identificando distintos conocimientos, los cuales orientarán sus prácticas. Para desarrollar su reflexión el docente cuenta con su experiencia y con una base conceptual de conocimientos previos (currículum, proyecto educativo de su escuela). El PFD debe proveer las actividades que generen la reflexión, la explicación y discusión de las prácticas, desde las de contextualización hasta las de evaluación; las prácticas son escuchadas, discutidas, analizadas, para luego ser observadas y evaluadas. Un PFD centrado en prácticas organiza actividades dentro de la escuela, pues es allí donde la experiencia docente cobra sentido, en ese contexto, con un proyecto educativo particular, unos estudiantes determinados y un equipo de trabajo específico.

Las investigaciones educativas, incluyendo las de matemática educativa, han aportado evidencias de los distintos conocimientos que poseen los docentes (Shulman, 2001; Curi, 2004; Eslava y Valdez, 2004; Valdez, 2001, 2002), también algunas investigaciones han planteado cuáles son los conocimientos que se espera deben tener los docentes de matemática (Ball y Cohen, 1999), estos hallazgos sirven de base para sistematizar las experiencias docentes en distintas categorías de conocimientos que han generado los docentes.

Acerca de la organización de los PFD centrados en prácticas, la propuesta se sustenta en programas centrados en colectivos (Cólen, 2001; Daniels, 2000; Imbernón, 2001; Mauri y Vilarrubias, 2001; Mellado; 2001) y en particular para los docentes de matemáticas se analizan las actividades que deben desarrollarse en dichos programas (Schwan, 2001).

Objetivos de un Programa de Formación Docente centrado en las prácticas

Un Programa de Formación Docente centrado en prácticas docentes debe tener por objetivo general analizar las prácticas reales de los docentes y a partir de allí apoyar el desarrollo profesional de sus participantes. Para lograr analizar las prácticas de los docentes un PFD debe organizar actividades que permitan a los docentes reflexionar sobre su experiencia, discutirla con sus colegas, explicar su quehacer, este proceso comienza con la contextualización de su trabajo en una escuela particular y unos estudiantes determinados, y a partir de allí el docente va generando sus conocimientos acerca de cómo aprenden sus estudiantes, de las aproximaciones al conocimiento matemático, de la didáctica necesaria para lograr los aprendizajes, de las adaptaciones necesarias al currículo, etc. Para poder analizar las prácticas, transformarlas y producir nuevas, el PFD debe pasar por ciertas fases:

- sistematización de experiencias educativas,
- categorización de los conocimientos de los docentes y,

- producción de nuevas prácticas.

Esto se hace a través de un trabajo de reflexión, explicación y discusión, individual y en colectivo. Los medios con que cuenta un PFD para llevar a cabo esta tarea son la experiencia de los docentes participantes y la base conceptual de conocimiento (Herrera, 2004) proveniente del currículo y de la investigación educativa. Una vez que los participantes del PFD logran sistematizar sus experiencias e identificar sus conocimientos, estos sirven como base para transformar y producir nuevas prácticas, tanto desde prestar atención a otros elementos del contexto, como para planificar, ejecutar y evaluar su trabajo.

Para Liston y Zeichner (1993) un objetivo de los programas de formación es capacitar a los docentes para que den razones contundentes que avalen sus acciones educativas. A través del trabajo de reflexión, explicación y discusión de las experiencias docentes, su sistematización, categorización de conocimientos y producción de nuevas prácticas un PFD capacita a sus docentes para que den razones.

Para Liston y Zeichner (1993) la formación del profesorado debe aspirar directamente a educar docentes capaces de:

- identificar y organizar sus propósitos,
- escoger las estrategias pedagógicas y los medios adecuados,
- conocer y comprender los contenidos que deben enseñar,

- comprender las experiencias sociales y las orientaciones cognitivas de sus estudiantes,
- dar buenas razones de sus acciones.

Estas justificaciones deben tener en cuenta la actividad docente, las comunidades más amplias de educadores y una comprensión mayor del contexto social y político de la escolarización (Liston y Zeichner, 1993).

Las diferentes tradiciones educativas presentan distintos puntos de vista sobre la actividad pedagógica y sobre el rol del profesor. Las tradiciones consideradas por Liston y Zeichner (1993) son:

La *tradición conservadora*, en donde del pensamiento educativo se relaciona con la conservación de la herencia cultural y científica de la civilización occidental. En esta tradición se pretende que los estudiantes aumenten su capacidad de razonamiento. El rol del profesor consiste en transmitir este conocimiento, la información o las diversas formas de investigación a los estudiantes, de manera que puedan convertirse en seres humanos más plenamente racionales, morales o ambas cosas; se piensa que el rol del profesor consiste en facilitar ese aumento de la capacidad de razonar de los alumnos y todos creen que este proceso educativo requiere disciplina y esfuerzo, tanto del estudiante como del profesor.

La *tradición progresista*, donde el objetivo central de la educación consiste en que los estudiantes se conviertan en investigadores competentes, capaces de reflexionar y examinar críticamente su mundo cotidiano y participar en una

reconstrucción continua de su experiencia. En primer lugar, se cree que los estudiantes se convierten en investigadores competentes cuando se centran en problemas basados en su experiencia. Para el progresista comprometido, no hay que suministrar información unidimensional a los estudiantes ni hacer que se ejerciten en una forma de pensamiento. Su investigación, en cambio, debe surgir a partir de sus "intereses". En segundo lugar, los estudiantes tienen que llegar a dominar la asignatura que tengan que aprender como consecuencia de sus investigaciones. En el transcurso del proceso de solución de problemas, necesitarán conocimientos de la materia y, utilizando las asignaturas para resolver los problemas, los estudiantes llegan a dominar el contenido que deben aprender. Desde el punto de vista pedagógico, el rol del profesor consiste en estructurar la situación educativa de manera que el alumno necesite saber para resolver problemas y para asegurar que los conocimientos y la información necesarios están a su disposición.

La tradición radical, en la cual los educadores sostienen que los hombres y las mujeres pueden ser miembros libres e iguales de una sociedad justa, democrática y asistencial. Su postura de partida suele ser crítica, afirmando que las escuelas públicas no apoyan ni desarrollan estas posibilidades para todos los niños por igual. Los niños pertenecientes a poblaciones minoritarias y a las clases trabajadora o inferior no reciben enseñanzas de buena calidad o las que reciben no son comparables a las que dirigen a los niños de las clases medias y alta. Pero - dicen-uno de los roles de la educación consiste en modificar la situación actual. Las escuelas y la enseñanza que imparten, tienen la capacidad de afectar de manera positiva a los individuos y provocar el cambio social... La forma democrática de vida y las formas democráticas de

escolarización se ven continuamente obstaculizadas por fuerzas internas y externas a la institución docente. Los educadores radicales animan a los estudiantes, a los futuros docentes y a los formadores de profesores, a que elaboren y aclaren sus creencias y supuestos sociales y a que examinen de qué formas obstruyen y debilitan el modo democrático de vida determinadas fuerzas sociales.

Los criterios para discernir las buenas razones en la deliberación educativa quedan determinados en gran medida por la actividad docente y por su rol en cada tradición educativa, como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla Nº 8. Tradiciones educativas y objetivos de la educación, roles del docente y del estudiante

TRADICIÓN	Objetivo de la educación	Rol del docente	Rol del estudiante
Conservadora	Conservar la herencia cultural y científica.	Transmitir conocimientos. Facilitar el aumento en la capacidad de razonar.	Recibir los conocimientos ya institucionalizados.
Progresista	Convertir a los estudiantes en investigadores competentes, críticos y participativos.	Estructurar la situación educativa para promover la resolución de problemas. Garantizar los recursos necesarios.	Ser investigador y crítico de su propia experiencia.
Radical	Modificar la situación actual de inequidad en la educación.	Promover un cambio social hacia un modo más democrático de vida.	Participar en los cambios de la sociedad.

Los miembros de cada tradición se mueven en sentidos diferentes, llevados por preocupaciones distintas cuando se cuestionan cómo seleccionar el currículo como se muestra en la tabla N° 9:

Tabla N° 9. Tradiciones educativas y selección del currículo

TRADICIÓN	Cuestiones sobre el currículo
Conservadora	Asumen la necesidad de mantener una unidad cultural cohesiva y reflejar el punto de vista de que el aprendizaje es la iniciación a las formas de conocimiento culturalmente establecidas.
Progresista	Asumen la necesidad de "psicologizar" los cuerpos de conocimiento y reflejar la visión de que el aprendizaje significativo es el resultado de que los alumnos resuelvan problemas.
Radical	Asumen la necesidad de llegar a la praxis, de relacionar el pensamiento con la acción y de que el aprendizaje valioso y fiable se produce mejor cuando se tratan las cuestiones controvertidas y cuando los alumnos contribuyen a influir en el proceso de aprendizaje y participan directamente en él.

Para Liston y Zeichner (1993) los docentes formados para apreciar estas diferencias y que pueden aceptar la variedad y riqueza de los marcos y prácticas de las distintas tradiciones, al tiempo que desarrollan la comprensión de la propia, se espera tengan mayor fortaleza y puedan dar mejores razones sobre su quehacer.

Fases de un Programa de Formación Docente centrado en las prácticas

Acerca de las actividades que componen un programa de formación de docentes Schwan (2001) plantea que desde que el Consejo Nacional de Maestros de Matemática (NCTM, por sus siglas en inglés) planteó cambios en las metas de la matemática escolar, hacer realidad esas metas ha presentado muchos retos a los docentes y hay consenso en la idea de que vencerlos requiere que los docentes reflexionen profundamente acerca de las matemáticas, de los estudiantes como aprendices de matemáticas y de la pedagogía que soportará este aprendizaje, pero hay poco consenso en cómo los docentes deben adquirir esos conocimientos.

Schwan (2001) propone que el desarrollo profesional de los docentes se conecte con el trabajo real de enseñar de los docentes. En lugar de aprender teorías y aplicarlas a la práctica docente, examinar de cerca las teorías o principios generales que emergen de la práctica. El tipo de aprendizaje que se necesita de los docentes ha sido descrito como transformativo (involucrando cambios profundos en fuertes creencias, conocimientos y hábitos de la práctica) en vez de aditivo (involucrando la adición de nuevas habilidades a un repertorio ya existente) (Thompson y Zeuli, citado por Schwan 2001).

La primera actividad que se plantea para que los docentes construyan sus conocimientos es la reflexión analítica de situaciones reales. Según Schwan (2001) los docentes tienen la oportunidad de desarrollar los conocimientos

involucrándose en actividades que están en el corazón del trabajo diario de un docente, desarrollando así conocimientos a través del análisis de situaciones reales. Los docentes de matemáticas desarrollarán en sus estudiantes destrezas de razonamiento y comunicación de las matemáticas, revisando profundamente lo que piensan sobre lo que significa saber y comprender las matemáticas, el tipo de tareas en las cuales los estudiantes deben estar involucrados y el papel que ellos juegan en el aula; no a través del uso de estrategias generales (uso de material manipulable, trabajo en grupo, uso de preguntas abiertas).

Para que los docentes puedan analizar situaciones reales de su trabajo diario, e ir más allá de comentar sus experiencias, los PFD deben proveer de situaciones que partan de las situaciones reales (experiencias concretas), donde éstas se analicen detalladamente para generar conocimientos sobre cómo aprenden los estudiantes, cómo se aproximan al conocimiento matemático, cómo es la didáctica que apoya dichos procesos y cómo se adapta el currículo a estas condiciones; y luego poder replantear las prácticas de los docentes. Estas consideraciones llevan al planteamiento de que los PFD centrados en prácticas tienen tres fases que les permiten lograr su objetivo de producir cambios en las mismas:

Primera fase: *sistematización de experiencias*, donde los docentes centrados en un tema específico de la matemática, describen y explican sus prácticas, desde la contextualización en su escuela, con el currículum y los materiales curriculares; pasando por la planificación de sus actividades de aprendizaje y estrategias de enseñanza y llegando hasta el momento de la clase, donde le dan

sentido a su plan. Esta sistematización se hace primero a través de una reflexión individual de las experiencias, para luego plantearla y discutirla en colectivo en el PFD buscando puntos en común con las reflexiones del equipo participante.

Segunda fase: categorización de los conocimientos, a través de la reflexión, explicación y discusión de las experiencias surgen conocimientos de distinta naturaleza, los cuales se categorizarán según algunos criterios analizados más adelante, esto con el propósito de construir la base conceptual de las acciones docentes, que servirán de guía de las prácticas.

Tercera fase: transformación y producción de nuevas prácticas. La base conceptual construida con base a la sistematización de las experiencias sirve de orientación a las nuevas prácticas: planificación de nuevas actividades de aprendizaje y estrategias de enseñanza, búsqueda de significados en el aula, de sentido del plan de acción, y evaluación de la ejecución del plan. Aquí hay que recordar el carácter cíclico de las acciones docentes, de sus prácticas, y la temporalidad de las mismas. El trabajo docente siempre es mejorable, y sus mejoras dependen de la capacidad de reflexión crítica de los propios docentes y de su actitud de compromiso con el desarrollo de su profesión y de su escuela.

Los programas de formación están diseñados bajo una tradición educativa específica, cada tradición le da un rol distinto a las experiencias y al conocimiento del docente, el estado de las prácticas en el desarrollo del programa es distinto:

Tabla N° 10. Tradiciones educativas y roles de la experiencia y el conocimiento del docente

TRADICIÓN	Papel de la experiencia docente	Papel del conocimiento docente	Prácticas
Conservadora	Es escuchada. No se discute.	No es tomado en cuenta.	Se mantienen. Reproducción.
Progresista	Es escuchada y discutida.	Es analizado para producir nuevas situaciones educativas.	Se transforman parcialmente. Producción.
Radical	Es analizada para producir conocimientos.	Es la base para promover cambios.	Se transforman. Producción.

Un programa de formación docente centrado en prácticas discute y analiza las experiencias de los docentes, las prácticas deben sufrir una transformación aunque sea parcial, lo cual podría entenderse como que logra que haya reflexión y autocrítica por parte de los docentes.

Para poder sistematizar las experiencias de los docentes un PFD promueve la reflexión de las mismas. Según De Vicente (2000), las investigaciones sobre promoción de la reflexión parecen tener tres direcciones:

1. La cognitiva, sobre cómo los docentes usan el conocimiento en la planificación y desarrollo de sus clases, sobre cómo toman sus decisiones.
2. La crítica, sobre el conocimiento socialmente construido por los docentes, sus creencias, experiencias, valores sociopolíticos; aspectos morales y éticos de la justicia social.
3. La narrativa de los docentes, sobre el discurso que usan los docentes para explicitar sus propias prácticas, el marco que utilizan para entenderlas, las

interpretaciones que hacen de su contexto de trabajo y de los acontecimientos que en ellos tienen lugar.

Un resultado de estas investigaciones es que es relativamente fácil promover la reflexión técnica (cognitiva) pero mucho más difícil la reflexión crítica, ya que se han identificado métodos para promover la reflexión cognitiva, pero no se ha tenido el mismo éxito con la reflexión crítica (De Vicente, 2000). En este trabajo se asume que un PFD debe promover los tres tipos de reflexión, comenzado por la cognitiva, para la cual ya se han identificado métodos, y terminando con la crítica, pues si bien es difícil separar las reflexiones de una persona sobre un tema particular, en un contexto específico, de lo que se trata es de cuáles son los métodos para promover las reflexiones.

Dentro de las investigaciones sobre formación de docentes reflexivos Zeichner y Tabachnick, citados por De Vicente (2000) han identificado cuatro tradiciones de la práctica de la enseñanza reflexiva considerada clarificadora. Estas tradiciones se resumen en la tabla N° 9 (Zeichner y Tabachnick, citados por De Vicente, 2000, p. 59)

Tabla N° 11. Tradiciones de la enseñanza reflexiva

Tradición	El foco de la reflexión está sobre:
Académica	Las representaciones de la materia a los estudiantes para promover la comprensión.
De eficiencia social	El uso inteligente de las estrategias genéricas de enseñanza sugeridas por la investigación educativa.
De desarrollo	El aprendizaje, el desarrollo y la comprensión de los estudiantes.
Reconstruccionista social	Las condiciones sociales de la instrucción y las cuestiones de igualdad y justicia.

De Vicente (2000) agrega que en la investigación también se ha considerado la reflexión genérica, que implica que las acciones de los docentes son mejores en cuanto son intencionales, considerando la reflexión como una disposición profesional genérica más que como una orientación conceptual.

Debido al rol que se le ha dado en este trabajo a la investigación educativa, se asume que en el PFD centrado en prácticas la reflexión es de la tradición de eficiencia social, tomando como base la investigación educativa expuesta en el capítulo III.

El acto de reflexión considera el contexto, el proceso, las actitudes y el contenido (De Vicente, 2000). El contexto es la escuela, su proyecto educativo, el currículo que sigue. El proceso, un planteamiento, su análisis y conclusiones. Las actitudes de libertad, responsabilidad y entusiasmo ante la tarea. Y el contenido incluye tanto las experiencias como los conocimientos institucionalizados.

La reflexión se da en distintos momentos en referencia a la acción (De Vicente, 2000): - *reflexión sobre la acción*, sobre las acciones y pensamientos, realizada después de que la práctica haya sido completada; - *reflexión en la acción*, sobre las acciones y pensamientos espontáneos durante la acción misma; - *reflexión para la acción*, la cual basada en las dos reflexiones anteriores: examen de las experiencias pasadas y presentes, genera conocimientos que guía las acciones futuras.

Un recurso para documentar el proceso de reflexión, son los portafolios, pues estos respaldan el desarrollo profesional en muchos aspectos significativos. Al usar los portafolios los docentes tienen la oportunidad de reflexionar y explicar sus expectativas sobre los objetivos de aprendizaje que esperan logren sus estudiantes, además que al hacer explícitas sus ideas pueden compartirlas más fácilmente con sus colegas y promover discusiones que fortalezcan el trabajo del equipo escolar y del proyecto educativo de la escuela. En cuanto al trabajo en aula el uso del portafolio puede usarse para documentar una amplia gama de actividades de aprendizaje, las cuales pueden variarse lo suficiente para generar un mayor desempeño estudiantil. Para muchos docentes, esto representa un cambio de enfoque que les exige reflexionar sobre las actividades de aprendizaje y que quizás los lleven a consultar a otras personas y a buscar recursos profesionales de apoyo (Danielson, Abrutyn, 1999).

Los portafolios son un instrumento para explorar ideas, compartir progresos y planificar en conjunto con los colegas; este trabajo requiere tiempo y compromiso, por ello si hay capacidad para trabajar en conjunto, el esfuerzo individual será menor y las recompensas mucho mayores.

El uso de portafolios hace que los docentes entren en un proceso de reflexión que les permite clarificar y explicar sus expectativas sobre los objetivos de la educación y también sobre sus conocimientos acerca del tema que enseñan, de la didáctica específica, de la pedagogía en general, de sus estudiantes y del currículo. Los docentes pasan de la reflexión a la explicación. En el proceso de documentación las explicaciones deben utilizar un vocabulario conciso y

analizar sistemáticamente los hechos educativos. El portafolio puede usarse desde la etapa de planificación de las clases, para la planificación de las actividades de aprendizaje; durante la clase con las ideas que vayan surgiendo en el momento, sobre estrategias, dinámicas, nuevos temas que pueden integrarse; y después de la clase, con los resultados de las estrategias desarrolladas y de los logros obtenidos con los estudiantes; puede contener también trabajos de los y las estudiantes. Por ejemplo, si un docente quiere documentar cómo planificó y ejecutó una actividad de solución de problemas con sus estudiantes, en el portafolio hay una justificación acerca del tipo de problemas escogidos para la actividad y el objetivo de la misma, los análisis de los problemas llevados a cabo por los estudiantes y sus dificultades, las estrategias que aportaron, una discusión acerca de las más óptimas, la verificación de las soluciones y dudas surgidas en el aula, tanto por los estudiantes como por el docente.

A través del trabajo de reflexión, explicación y discusión sobre sus prácticas, el docente da razones sobre sus acciones educativas, basadas en una gran cantidad de conocimientos, la cual Shulman (2001) categoriza como sigue:

- el conocimiento de la materia impartida;
- los conocimientos pedagógicos generales, los cuales trascienden el ámbito de un área en particular;
- el conocimiento del currículum, con énfasis en los programas y materiales como libros de textos;
- el conocimiento pedagógico de la materia, o la didáctica especial que desarrolla cada docente;

- los conocimientos de los estudiantes y sus características,
- los conocimientos de los contextos educacionales, que abarcan desde la dinámica del grupo o de la clase hasta los aspectos culturales de la comunidad escolar;
- conocimientos de los objetivos y valores educativos, y sus fundamentos filosóficos e históricos.

Shulman señala que hay un interés particular en los conocimientos pedagógicos de la materia por la que se llega a una comprensión de cómo determinados temas y problemas se organizan, representan y adaptan a diversos intereses y capacidades de los estudiantes.

Estos conocimientos tienen distintas fuentes (Shulman, 2001):

1. la formación académica en la disciplina a enseñar,
2. los materiales y el entorno del proceso educativo institucionalizado (el currículo, los libros de texto)
3. la investigación educativa,
4. la sabiduría que otorga la experiencia misma.

Sobre esta última fuente y cómo estudiarla en un PFD es que versa este trabajo. Como señala Shulman la educación carece de un historial de prácticas y sin esa documentación difícilmente se puede analizar, interpretar y codificar los principios de la práctica. Toda esa cantidad de conocimientos que poseen los docentes es necesario sistematizarla.

Según Ball y Cohen (1999) lo que necesitan saber los docentes de matemáticas es:

1. Comprender la materia que enseñan, de formas diferentes a la de sus estudiantes. Por ejemplo, necesitan saber los significados y las conexiones, no sólo los procedimientos y la información. Comprender el razonamiento de su campo particular, tal como qué se entiende por probar en matemáticas comparado con pruebas en historia o biología. Aún más allá, qué hábitos mentales están asociados al pensamiento científico versus las interpretaciones literarias o las críticas de arte. Comprender la forma en que las ideas atraviesan los campos y la vida cotidiana, deben seleccionar y usar apropiadamente los contextos y las aplicaciones. De manera tal que ayuden al conocimiento sobre cómo las ideas evolucionaron en la historia del campo, para que el pensamiento estudiantil a veces haga paralelos con el desarrollo histórico. Comprender controversias actuales en campos específicos puede también ayudar a conocer dónde el conocimiento está cambiando o ratificándose.
2. Conocimiento acerca de los niños, sus gustos, intereses, dificultades en dominios particulares. Los docentes necesitan transformar sus intuiciones escuchando e interpretando las ideas de los niños acerca de los asuntos académicos. También formas para ampliar los marcos interpretativos que traen de las observaciones de los estudiantes de manera que puedan ver más posibilidades sobre lo que los estudiantes pueden hacer. Ellos necesitan ver a los niños con más capacidad de pensamiento y razonamiento y menos como una pizarra en blanco que carece de conocimientos.

3. Aprender que los conocimientos estudiantiles no son simplemente un asunto de conocimiento individual de los niños. Pues los docentes casi siempre enseñan a niños quienes vienen de orígenes diferentes al suyo propio, necesitan estar enterados de las diferencias culturales, incluyendo las diferencias de lenguaje, clase, familia y comunidad. Aún más los docentes necesitan conectarse con sus estudiantes y para ello necesitan no ver a los estudiantes como los otros. Esto requiere buscar una base común, esperar que todos los estudiantes aprendan y no hacerse expectativas diferenciadas de los estudiantes.

Más aún, los docentes necesitan desarrollar y ampliar sus ideas acerca del aprendizaje, incluyendo qué significa aprender, qué ayuda al aprendizaje de los niños o cualquier otro, cómo "leer" a los niños para saber más acerca de lo que ellos piensan y aprenden.

También necesitan saber pedagogía, para conectar a los estudiantes con los contenidos de formas efectivas. Los docentes necesitan un repertorio de formas para enganchar efectivamente a los aprendices y capacidad para adaptar y cambiar modos en respuesta a los estudiantes. Necesitan examinar cómo se construye el currículo, cómo docentes y estudiantes interactúan con el material es vital para una práctica desarrollada progresivamente. Los docentes también necesitan aprender a discernir la constitución de la cultura del aula, tener ideas acerca del tipo de cultura de aula que soporta las metas de aprendizaje y cómo construir tal cultura.

Al analizar los conocimientos de los docentes de matemáticas Curi (2004) encontró que cuando las profesoras tenían los conocimientos matemáticos de la escuela necesarios para realizar su trabajo, incorporaban los cambios metodológicos con más facilidad y menos resistencia que cuando necesitaban profundizar o aun construir esos conocimientos. Los nuevos descubrimientos con relación a asuntos matemático y a su tratamiento didáctico, así como la discusión sobre criterios de selección y organización de contenidos, los análisis de libros didácticos y de indicadores oficiales relativos al aprendizaje de los niños sucedían porque ese grupo de profesoras frecuentaban un curso para complementar su formación. Dicho curso de formación de profesores que enseñan matemáticas, se caracterizó por discutir la teoría asociada a la práctica pedagógica teniendo como eje de formación el estudio y su objetivo era que los profesores recogiesen información, registrasen sus observaciones, reflexionarían sobre su propio trabajo y documentasen sus experiencias.

Eslava y Valdez (2004) encontraron que los docentes de matemáticas poseen y utilizan distintos tipos de saberes; los cuales son:

- los de sentido común de la práctica; que son opiniones o suposiciones;
- el saber popular de los docentes; es el que se adquiere con la experiencia al entender lo que les inquieta a sus estudiantes;
- una serie de destrezas para la conducción del grupo;
- saberes contextuales; lo que se sabe de una clase, de la comunidad o de un estudiante en concreto;
- saberes profesionales; sobre las estrategias de enseñanza y sobre el currículum, sus posibilidades, sus formas, su sustancia y sus efectos;

- las ideas relacionadas con las teorías morales y sociales y los planteamientos filosóficos; sobre cómo pueden y deben interrelacionarse las personas, sobre el desarrollo y la reproducción de las clases sociales, sobre la aplicación del saber en la sociedad, o sobre la verdad y la justicia.

Por su parte, Valdez (2001) afirma que los saberes de los docentes se producen en dos niveles:

- en cuanto al contenido matemático los docentes tienen inseguridad en su formación matemática,
- una vez salvada ésta dirigen su atención hacia el contenido didáctico;

Agrega esta autora que los docentes se aproximan a los saberes manifestando una prevalencia de la vivencia personal, la experiencia empírica por encima de lo conceptual y del manejo de la información que se intercambia. Se divaga, hay poca concentración en el objeto de estudio y, por último, hay una centración en aspectos específicos que hace que se pierda el esquema general.

Hoy día prevalece un *saber estático* que no impacta el trabajo en aula, se hace necesario modificar las formas de interlocución para impulsar el desplazamiento hacia los *saberes dinámicos* (Blanco, citado por Valdez 2001), que vinculen las teorías con las formas efectivas de ponerlas en práctica, muy especialmente en lo que toca a la enseñanza. En un primer plano queda el maestro como aprendiz de ambos tipos de saberes, y en un plano más profundo e importante, como organizador de actividades estudiantiles que promuevan saberes aprovechables y movilizados de la actividad de sus estudiantes. Es

aquí donde los saberes han de ser transformados en acciones, pues la esencia misma de la docencia está en la puesta en práctica a partir de una teoría iluminadora.

Por último, encontró Valdez (2002) que el desempeño de los maestros en los exámenes del Curso Nacional de Matemáticas de México, en secundaria, resultó que los reactivos sobre contenidos matemáticos son más o menos bien resueltos, pero hay dificultades en las preguntas sobre tratamiento de problemas de tipo didáctico de situaciones y contenidos específicos.

Valdez (2001) y Curi (2004) coinciden en señalar que para que se den los conocimientos didácticos los docentes tienen que estar seguros de sus conocimientos matemáticos. Valdez va más allá cuando plantea que los conocimientos deben ser transformados en acciones, lo cual es una idea central en este trabajo.

Luego de esta discusión sobre los conocimientos que deben tener los docentes de matemáticas y sobre las evidencias que se han encontrado en distintas investigaciones sobre los conocimientos que de hecho tiene un docente de matemática, se pueden plantear algunas categorías para construir la base de conocimientos de un docente de matemáticas:

1. Conocimientos matemáticos, de su epistemología, de su historia, de sus aplicaciones.
2. Conocimientos de didáctica de las matemáticas, de estrategias para promover el desarrollo del pensamiento matemático.

3. Conocimientos acerca de cómo los estudiantes aprenden matemáticas y de cómo utilizar esos enfoques en su propia didáctica.
4. Conocimientos acerca del currículo de matemática, de su construcción, de su implementación en la escuela, con sus estudiantes particulares.

Con esta categorización se construye la base de conocimientos del docente de matemáticas y comienza la producción de nuevas prácticas. Para producir nuevas prácticas los PFD toman materiales de aulas de clase reales y prácticas auténticas, las cuales se convertirán en actividades de formación docente que ofrecen oportunidades para la reflexión y la crítica; estas actividades, denominadas por Schwan (2001) "tareas de aprendizaje profesional" (TAP) involucran al docente con el trabajo de enseñar y pueden ser desarrolladas para alcanzar una meta específica en el aprendizaje del docente, considerando el conocimiento y las experiencias que los docentes tienen y que relacionan con la tarea.

Los conocimientos de los docentes son abordados en los programas de formación según la tradición educativa bajo la cual están concebidos:

Tabla N° 12. Tradiciones educativas y conocimientos de los docentes

TRADICIÓN	Conocimientos matemáticos	Conocimientos didácticos	Conocimientos psicológicos	Conocimientos del currículo
Conservadora	Se transmiten a los estudiantes. No se discuten, están institucionalizados.	Hay estrategias establecidas para promover el pensamiento matemático.	No es tomado en cuenta.	No se discute, es fijo.
Progresista	Se construyen/ descubren con los estudiantes.	Las estrategias de enseñanza dependen de los aprendizajes estudiantiles.	Sirve de base para la didáctica.	Se adapta a cómo aprenden los estudiantes.
Radical	Se aplican. Sirven de	Las estrategias de enseñanza	<i>Sirve de base para</i>	Se adapta a las

	base para cambiar la sociedad.	son analizadas en colectivo con los colegas y con los estudiantes.	<i>la didáctica.</i>	necesidades de la mayoría.
--	--------------------------------	--	----------------------	----------------------------

En un programa de formación centrado en prácticas, los conocimientos de los docentes sirven de orientación a las mismas, de manera que los conocimientos son variables y dependen del contexto de la escuela, en particular de sus estudiantes.

Algunos materiales que proveen la base para que las TAPs involucren exploración y análisis son: las actividades matemáticas, episodios de enseñanza, y las iluminaciones del pensamiento estudiantil (Schwan, 2001).

Actividades matemáticas. Las actividades matemáticas que utilizan los docentes en su clase son un insumo de los programas de formación docente. Diseñar estas actividades constituyen un pilar en la práctica de planificación de los docentes y también son la base para desarrollar el pensamiento de los estudiantes. En la práctica de planificación, los docentes determinan los conceptos y procesos matemáticos que quieren que sus estudiantes aprendan y luego seleccionan tareas y actividades que tengan el potencial para promover ese aprendizaje. Una planificación cautelosa requiere que los docentes comprendan qué matemáticas deben saber los jóvenes para resolver una actividad, reconozcan las matemáticas incluidas en una tarea, y equiparen las metas del aprendizaje de los estudiantes con las actividades que tienen potencial para alcanzar dichas metas.

La exploración de las actividades matemáticas provee a las docentes oportunidades para considerar temas del aprendizaje del estudiante y para construir o reconstruir su propia comprensión acerca de lo que es la matemática y cómo se emplea. Cuando los docentes participan en varias actividades de aprendizaje profesional que involucren una actividad específica, ellos resuelven la actividad, discuten diferentes estrategias y formas de abordarla, relacionan métodos distintos con la representación visual; determinan qué conocimientos y experiencias previas necesitan los estudiantes para completar la actividad y qué pueden aprender de ella; y discuten cómo la actividad puede contribuir al desarrollo del razonamiento y cómo ellos pueden extender la actividad.

Las actividades pueden ser extraídas de programas de matemáticas del nivel educativo en el cual el docente se desempeña, de evaluaciones, o de materiales educativos disponibles. Las actividades pueden seleccionarse de manera de resaltar procesos específicos (por ejemplo, solución de problemas, razonamiento y comprobación, comunicación, conexiones, o representaciones) u organizadas para mostrar el desarrollo de ideas matemáticas en un área particular de contenidos como la iniciación al álgebra.

Episodios de Enseñanza. Para reflexionar acerca de su propia manera de enseñar los docentes necesitan oportunidades de analizar y criticar episodios de enseñanza, ya sea que estén por escrito, grabados en video, u observados directamente. Los docentes se integran para leer y analizar un caso, por ejemplo el caso de la búsqueda de patrones, donde ellos pueden discutir las diferentes maneras en que se expresa una generalización, cómo éstas difieren

conceptualmente, pueden determinar la fuente de las confusiones de los estudiantes y discutir las maneras en las cuales se pueden abordar dichas confusiones; o planificar una lección que le siga a la descrita en el caso. Tales oportunidades invitan a los docentes a hacer conexiones entre los eventos descritos en los episodios y sus propios conocimientos de la práctica docente en el aula de matemáticas.

Iluminación del pensamiento estudiantil. Analizar el pensamiento estudiantil es otra fuente de aprendizaje para los docentes. Este análisis puede hacerse a tareas escritas, a interacciones orales en el aula, a evaluaciones, las cuales permiten profundizar en el pensamiento del estudiante.

Examinar el trabajo de los estudiantes a profundidad proporciona a los docentes la oportunidad de comprender con mayor amplitud las respuestas de los estudiantes y lo que estas pueden revelar acerca de su manera de pensar, qué dificultades pueden tener, y cómo los docentes pueden ayudarlos a atacar (o evadir) confusiones comunes.

La organización de los Programas de Formación Docente centrados en las prácticas

Para que un PFD centrado en prácticas tenga éxito, entiéndase por ello que los docentes transformen sus prácticas y realicen algunas nuevas prácticas, es importante que se den algunas condiciones de carácter organizativo en los

programas. En primer lugar un PFD centrado en las prácticas, está centrado en los docentes, en su experiencia y conocimientos; los cuales explora a través de la reflexión y la discusión, procesos individuales y colectivos respectivamente.

Como se explicó en el capítulo IV las prácticas docentes son contextualizadas en una institución particular, la cual tiene un proyecto educativo, un funcionamiento y una dinámica particular, por ello es importante que haya una puesta en común de los diferentes agentes de formación (Colén, 2001):

- a. Responsables de la Administración.
- b. Técnicos de las instituciones encargadas de desarrollar los programas de formación.
- c. Planificadores.
- d. Formadores.
- e. Profesorado destinatario de la formación.

De esta puesta en común surge un modelo de formación con unos objetivos determinados, unas actividades específicas para alcanzar el logro de los objetivos y toda una organización del programa de formación en cuestión (Colén, 2001).

Para que las prácticas trabajadas en un PFD se den en su contexto Imbernón (2001) considera que el enfoque de formación de docentes adecuado es aquel que se basa en un colectivo que entra en un proceso donde prima la *reflexión deliberativa* y la *investigación-acción*, mediante el cual el profesorado elabora sus propias soluciones en relación con las situaciones problemáticas prácticas a

las que se enfrentan en su práctica profesional. Aquí la formación se entiende como un proceso de *autodeterminación basado en el diálogo*. Esta formación basada en colaboración entre iguales, se define como *formación del centro* y sus presupuestos fundamentales son, según este mismo autor:

- El centro educativo se considera el foco del proceso "acción-reflexión-acción", como unidad básica de cambio e innovación. No es lo mismo que en un centro educativo se dé una innovación, a que sea sujeto de cambio.
- La posibilidad de los centros de la reconstrucción de la cultura académica como objeto no sólo terminal sino también de proceso, ya que el centro ha de aprender a modificar la propia realidad cultural de las escuelas y sus contextos.
- La necesidad de apostar por nuevos valores. Frente a la dependencia y la independencia, se propone la autonomía y la interdependencia: frente a la defensa profesional, la apertura profesional; frente a la atomización y el aislamiento, la comunicación; frente a la privacidad del acto educativo, proponer la publicidad de éste; frente al individualismo, la colaboración; frente a la dirección externa, la autorregulación y la crítica colaborativa.
- La necesidad de la colaboración no como una estrategia de gestión, sino como una herramienta cargada de valores e ideología que se ha de confrontar.
- La concepción de que la formación no es una tecnología enseñable, sino un proceso de participación, implicación, apropiación y pertenencia.
- El partir del respeto y del reconocimiento del poder y capacidad del profesorado para diseñar, gestionar y evaluar la formación.

Otro argumento a favor del desarrollo de las prácticas en contexto, es el de Daniels (2000) quien expone que existen en los centros educativos estructuras de apoyo formales e informales para que los docentes discutan sus preocupaciones profesionales con sus compañeros, pero que sin embargo la falta de tiempo se va imponiendo como una característica en la vida de los docentes en los centros (Mac-Beath, et. al. citado por Daniels, 2000) de tal forma que incluso las charlas informales durante los recreos son difíciles de mantener por la complejidad de la dinámica escolar. Lo cual crea la necesidad de disponer de tiempo específico y cualificado en el que los profesores puedan hablar sobre sus preocupaciones profesionales y los problemas de sus aulas, y a través de ello apoyar a sus estudiantes en el proceso de aprendizaje. Por esta razón propone este autor la creación de los *Grupos de Apoyo entre Profesores* (GAEPs), el cual está compuesto por un grupo de profesores que normalmente incluye al profesor de apoyo a la integración, y dos tutores, uno con experiencia en la vida del centro y otro con menos experiencia. El grupo recibe demandas de profesores individuales que voluntariamente solicitan su ayuda y junto a ese profesor, colabora con el análisis y la comprensión del problema planteado así como con el diseño de propuestas de intervención adecuadas a las dificultades identificadas. Los GAEPs partiendo de los propios recursos escolares, ofrecen una posibilidad de intervención que es original y diferente al centrar su enfoque en los profesores, además, hacen uso de un recurso escasamente utilizado en educación: el apoyo que la resolución colectiva y colaborativa de problemas puede ofrecer a los profesores.

El trabajo de los GAEPs se caracteriza por ser un ciclo de resolución de problemas (Daniels, 2000): los profesores que se dirigen al GAEP reciben

ayuda para definir el/los problemas(s), considerar posibles alternativas y probar estrategias prácticas. Además se ofrece a los profesores la oportunidad de supervisar y revisar la situación a través de reuniones de seguimiento. Las razones que justifican el sentido de los GAEPs podrían resumirse en las siguientes (Daniels, 2000):

1. Crean un foro para educadores, un lugar, un tiempo y un espacio donde compartir conocimientos y experiencias con otros profesores.
2. Suponen un recurso propio de la escuela para apoyar a los profesores y a través del mismo apoyar a los alumnos.
3. Son una estrategia práctica para desarrollar el compromiso de la escuela con la diversidad.
4. Aportan una oportunidad para que los profesores aprendan métodos específicos y tengan acceso a diferentes materiales curriculares.

En un GAEP los docentes tendrían oportunidades para contextualizar, planificar, encontrarle significado a sus acciones y evaluarlas, todas estas prácticas docentes a estudiar en un PFD.

Para Daniels (2000) algunas condiciones importantes para poder iniciar el desarrollo de un GAEP en escuelas son:

1. Un catalizador: un miembro del equipo directivo, o un profesor con experiencia y credibilidad dentro del centro que expande la idea entre los colegas.

2. Recursos extra: la posibilidad de que los miembros del GAEP dispongan de un tiempo libre de tareas académicas para participar en la formación, así como en las sesiones de apoyo en la que los miembros del GAEP reciben y trabajan con los profesores que solicitan ayuda.
3. Un nivel de confianza entre los participantes, tanto entre los propios miembros del grupo como fuera de él, en el sentido de que es crucial que los miembros del GAEP sean respetados por la mayor parte de los profesores del centro y tengan el apoyo del equipo directivo.

Las evaluaciones hechas por Daniels (2000) acerca de los GAEPs indican que poner en marcha un GAEP depende en gran medida de la claridad y detalle de las negociaciones iniciales entre las escuelas y las personas con la formación y los recursos para su desarrollo, es decir, los directores y el grupo de profesores del centro deben tener claras las implicaciones del GAEP, considerar lo que puede ofrecerles a su centro y luego decidir comprometer la escuela y los recursos disponibles para facilitar su trabajo. En este sentido la evaluación indicó la importancia del apoyo de la dirección a la filosofía del GAEP para dar a los profesores del centro la opción de adoptar el GAEP y diseñarlo según las circunstancias y necesidades particulares de la escuela.

Tanto la postura de Imbernón (2001) acerca de la formación del centro como la de Daniels (2000) y el GAEP, refuerzan la importancia de que los PFD se den en el contexto de las prácticas: la escuela. Además, desarrollar un PFD en la escuela, con su dinámica, funcionamiento y proyecto refuerza la idea de la formación docente en grupos.

Por otra parte, y apoyando aun más la idea de la formación en grupos, Mauri y Vilarrubias (2001) argumentan que es difícil de valorar lo que un docente "participante" tiene posibilidad de transferir a su propio centro, por lo cual discuten el valor de la formación individual considerando que contribuye escasamente a que la línea pedagógica de un centro gane progresivamente en coherencia. En tal sentido plantean que el objetivo es procurar a los docentes una mayor sensibilidad pedagógica para tratar los problemas que la educación tiene planteados. Los contenidos de la formación se deciden en relación con las tareas concretas de los docentes y responden a necesidades de carácter eminentemente práctico, como por ejemplo crear banco de actividades. Los docentes participan en actividades de formación de modo individual y voluntario, pero la calidad educativa se desarrolla gracias a los esfuerzos de algunos centros que orientan su actividad a la definición y concreción de una línea pedagógica coherente con sus planteamientos.

De tal forma que un PFD centrado en las prácticas se organiza en la escuela, contexto de las prácticas; se da de manera grupal, para consolidar los proyecto de una escuela a través de l trabajo de su equipo de docentes, quienes reflexionan y discuten sus experiencias, sistematizándolas, construyendo sus conocimientos acerca de la educación que imparten en la escuela y transforman y crean nuevas prácticas que los hacen crecer profesionalmente como individuos y también hacen crecer a la escuela con su trabajo en equipo. Los GAEPs pueden servir de puente entre la escuela y el PFD, apoyando a los docentes en el planteamiento y la solución de sus problemas y y desarrollando una propuesta de formación de la escuela mas que de un individuo o un grupo de docentes.

Para Mellado (2001) otros factores importantes en la formación del profesorado son el diseño de nuevos materiales de enseñanza y la duración de los cursos; el primero ya que los textos y materiales tradicionales proporcionan pocas oportunidades para desarrollar nuevas estrategias de enseñanza, y el segundo porque la duración debe ser suficiente para que los docentes puedan observar y analizar las mejoras que se producen en el aprendizaje de las ciencias de sus propios estudiantes pues es muy difícil el cambio docente en el profesorado con experiencia si no va acompañado de mejoras en el resultado del estudiantado. En este sentido, un PFD centrado en prácticas necesita tiempo para no solamente escuchar y leer las prácticas, sino también observarlas en la escuela, lo cual requiere de tiempo, técnicas y recursos para analizar con detalle sus resultados.

Los PFD se organizan de manera distinta según cada tradición educativa:

Tabla N° 13. Tradiciones educativas y organización de los PFD

TRADICIÓN	Organización de los PFD	Rol del docente
Conservadora	Consiste en cursos dictados fuera de la escuela. Los temas los deciden los formadores de docentes según su experiencia y visión de la escuela y sus docentes. Utiliza materiales instruccionales institucionalizados. Está centrado en el docente como individuo.	Pasivo: recibe los conocimientos a través de textos que discute, y de actividades que resuelve. Los textos y las actividades las deciden los formadores.
Progresista	Consiste en talleres. Los temas a discutir son negociados con los participantes. Los materiales instruccionales provienen de	Activo: propone temas de su interés, aporta materiales instruccionales. Se

	distintas fuentes, hay innovaciones. Está centrado en el docente como individuo. Hay algunos acercamientos a las escuelas. Ofrece seguimiento a las actividades docentes en la escuela.	convierte en investigador.
Radical	Consiste en talleres centrados en las necesidades de la escuela. Se basa en la investigación-acción. Produce nuevas prácticas y nuevos materiales instruccionales.	Es protagonista de su formación y del cambio de su escuela.

Los PFD tienen objetivos distintos según la tradición educativa en que estén enmarcados:

Tabla N° 14. Tradiciones educativas y objetivos de los PFD

TRADICIÓN	Objetivos de los PFD
Conservadora	Analizar el (no) funcionamiento de la escuela. Argumentar por qué no funcionan las prácticas de los docentes y las escuelas.
Progresista	Hacer propuestas de prácticas docentes para cambiar la escuela, basadas en los aportes de los docentes.
Radical	Cambiar la escuela basándose en el análisis de sus necesidades, hacer propuestas, implementarlas y evaluarlas.

Programas de Formación dirigidos a Docentes de Matemáticas

En esta sesión se describen algunos programas de formación dirigidos a docentes de matemáticas, con el fin de analizar el rol de las prácticas docentes en el programa y determinar los usos que los programas hacen de la investigación en matemática educativa.

Programa Samuel Robinson va al Liceo de la Universidad Central de Venezuela

La Universidad Central de Venezuela (UCV) desde 1997 lleva a cabo el Programa Samuel Robinson, programa piloto de intervención social y de investigación acción, cuyo objetivo original era contribuir a la democratización de las oportunidades de estudio en la UCV, a través de un proceso de admisión integral de estudiantes de estratos sociales de bajos recursos (Secretaría UCV, 2000). Dentro de este programa, en 1998, nace el programa de actualización docente denominado *Samuel Robinson va al Liceo* (SRL) con el propósito de aumentar el impacto en la población con que se trabaja, incidiendo en el perfil del docente que forma a los estudiantes que ingresaban al programa (Secretaría UCV, 2003). Según la Secretaría de la UCV (2000) los objetivos del SRL son:

1. Conformar equipos líderes de docentes en cada Liceo participante y desarrollar con ellos un programa de sensibilización, capacitación y actualización docente.

2. Propiciar la creación de Centros de Reflexión y Actualización del Profesorado (CRAP) en cada Liceo participante.
3. Desarrollar un sistema de formación permanente para los docentes de los liceos adscritos.
4. Establecer planes de acción y redes escolares de trabajo con el personal directivo de los liceos.

Para Amaro (2003a) el SRL ofrece capacitación y entrenamiento a docentes de Educación Media, Diversificada y Profesional (EMDP) de cada uno de los liceos participantes, quienes a su vez conforman los equipos líderes en sus respectivas instituciones. A través de la preparación y constitución de estos equipos líderes, se promueve la creación de los CRAP, el cual a su vez promueve la práctica docente reflexiva en un espacio que favorece el cambio actitudinal y la revisión de concepciones arraigadas en la práctica cotidiana. Para el caso de los docentes de matemática, se busca promover la reflexión de las concepciones sobre la matemática, su didáctica y aprendizaje.

El programa de sensibilización, capacitación y actualización se desarrolla a través de cursos entre los que se encuentra el curso de Investigación Didáctica, eje del programa, y los cursos de didácticas especiales. El curso de Investigación Didáctica tiene como propósito promover en los docentes la reflexión compartida sobre la práctica pedagógica concebida como campo de conocimiento y la construcción colectiva de propuestas que contribuyan en su mejora, transformación y potenciación (Amaro, 2003b).

El objetivo de los cursos de didácticas especiales es la actualización de contenidos por disciplina y el desarrollo de estrategias para abordar esos contenidos en el aula; el de didáctica de la matemática específicamente se plantea:

- Discutir contenidos y estrategias de la enseñanza de la matemática.
- Presentar modalidades de motivación y procesamiento de información matemática.
- Mostrar estilos de reconstrucción del conocimiento-pensamiento matemático.

En función de que el curso de didáctica de la matemática incorporara los conocimientos del grupo de docentes (Amaro, 2003b) y desarrollara conocimientos centrales de la enseñanza de la matemática (Schwan, 2001), luego de presentarle a los docentes los objetivos generales se hicieron algunos ajustes para seleccionar los contenidos específicos a tratar, escogiéndose estos de los programas oficiales de matemática. En particular, se abordaron los temas de álgebra y trigonometría vinculados con:

- a) Cognición y metacognición en el aprendizaje de la matemática.
- b) Estrategias de enseñanza y de aprendizaje en la resolución de problemas matemáticos.
- c) Motivación y actitudes hacia el aprendizaje de la matemática.

Los docentes participantes mostraron un cambio de actitud, esto se evidenció a través de las reflexiones y las inquietudes que planteaban; también

desarrollaron habilidades para procesar información sobre investigación educativa relacionada con su trabajo (Amaro, 2003b). Sin embargo, en lo que se refiere a didáctica de la matemática estos logros no se tradujeron en una mejora significativa de sus prácticas, ni en una mejora del rendimiento matemático de los estudiantes (Serres, 2004a). Las razones es porque las discusiones suelen centrarse en lo que no hacen los estudiantes, lo que no hacen los docentes de los grados anteriores y las malas condiciones socioeconómicas tanto de los estudiantes como de los propios docentes; los temas que les interesa discutir a los docentes son estrategias generales, y muy poco se discute sobre dificultades del aprendizaje de la matemática, sobre diseño, implementación y evaluación de nuevas estrategias de enseñanza de un contenido particular de la matemática. Esta situación se considera una dificultad para el programa dirigido específicamente a docentes de matemática, ya que no es a través del uso de estrategias generales que los docentes de matemática desarrollan destrezas de razonamiento y de comunicación, sino que deben revisar profundamente lo que piensan sobre lo que significa saber y comprender la matemática, el tipo de tareas en las cuales los estudiantes deben estar involucrados y el papel que ellos juegan en el aula (Ball y Cohen, 1999; Schwam, 2001).

Por lo anterior, se planteó estudiar cómo el programa logra su objetivo de actualizar a los docentes de matemática, cuál es el rol de las prácticas en el programa y cómo utilizan los resultados de investigación educativa.

El diseño del SRL promueve la reflexión, la participación e involucra a los docentes en los cambios educativos necesarios para mejorar la calidad de la

educación que imparten en sus instituciones (Serres, 2005), lo cual permite estudiar el programa a través de la investigación-acción. Las unidades de análisis estudiadas fueron el curso de didáctica de la matemática, uno de los Centros de Reflexión y Actualización del Profesorado creado durante el programa, y el proceso de formación de uno de los docentes participantes en el programa, en cuyo Liceo no se consolidó el CRAP.

La *primera fase de detección del problema* de este estudio abarca el problema, su contexto y el marco teórico utilizado para explicar el abordaje del problema. La *segunda fase de atención de las necesidades* y la *tercera fase de observación de los cambios* se plantea en el análisis de los casos estudiados. La *cuarta fase de evaluación y reflexión* se presenta en las conclusiones del estudio.

Según Elliott (2000) algunas de las técnicas y métodos para conseguir pruebas en la fase de detección del problema de la investigación-acción son:

- los diarios, llevados de forma permanente;
- los perfiles, los cuales proporcionan una visión de una situación o persona durante un período de tiempo;
- el análisis de documentos como programas, planes de evaluación, pruebas, tareas, libros de texto, diseños de actividades;
- datos fotográficos de los docentes mientras trabajan, la distribución física del aula y su organización social;
- grabaciones de audio y vídeo;
- transcripciones de las clases grabadas;

- las entrevistas;
- la triangulación de información;
- los informes analíticos.

Todas estas técnicas y métodos pretenden abarcar la práctica educativa desde su complejidad y a todas las personas involucradas de manera de mejorar la calidad de la educación a través de la transformación de reflexiones en acciones desde y para los docentes. En el análisis que se presenta a continuación se utilizaron el diario de campo, los perfiles de los docentes de los liceos, las grabaciones de audio, las entrevistas a los docentes, los informes analíticos y la triangulación de la información.

El diario de campo de la investigadora jugó el papel de instrumento principal de recolección de la información, y se llevó en dos instancias diferentes:

1. En el curso de didáctica de la matemática, a través del relato sistemático acerca de qué se iba a reflexionar, de cómo se llevaba a cabo la discusión, a qué conclusiones se llegaba y qué compromisos de continuidad del trabajo en los liceos se hacían (Porlán y Martín, 1993).
2. En el seguimiento del CRAP, específicamente en las reuniones con los docentes para ir reportando las discusiones, los acuerdos y las propias reflexiones de la investigadora.

El objetivo del diario fue reconstruir el conocimiento de los docentes, según las categorías encontradas en el apartado anterior (conocimiento matemático,

conocimiento de la didáctica de la matemática, conocimientos sobre el aprendizaje y sobre el currículo)

Para elaborar un perfil del docente se diseñó un instrumento que indicara el tiempo de servicio, grados y número de estudiantes que atiende el docente, horas de clases semanales que dicta, otras actividades que desarrolle en el Liceo, estudios, cursos de ampliación realizados y datos de ubicación (teléfonos y correo electrónico). Este instrumento se administró a los docentes participantes en el curso de didáctica de la matemática.

Las grabaciones de audio de entrevistas se hicieron al finalizar el curso de didáctica de la matemática, con el objetivo de comparar las reflexiones hechas durante el programa con la visión acerca de la educación matemática después del curso y con el objetivo de explorar el compromiso de continuidad de trabajo en el Liceo una vez terminado el programa. También se entrevistó a algunos docentes claves en los Liceos (docentes líderes y quienes tienen a su cargo mayor cantidad de horas de clase, en diversos grados y que atienden más estudiantes). Los docentes líderes son aquellos que una vez realizado el programa de actualización al regresar a su Liceo motivan a sus demás colegas para participar en actividades de actualización y sirven de contacto con la Universidad para solicitar y organizar las actividades. Dichas actividades son talleres, conferencias, charlas, etc.

Los informes analíticos se hicieron del trabajo en el CRAP y del trabajo individual con un docente en cuyo Liceo no se consolidó el CRAP. Según Elliott (2000) un informe analítico recoge:

- conceptualizaciones de la situación sometida a investigación;
- hipótesis aparecidas y que se deseen comprobar más adelante;
- menciones del tipo de pruebas que se tendrán que recoger para fundamentar los conceptos e hipótesis que surgen;
- formulaciones de los problemas y cuestiones que van apareciendo en el propio campo de acción.

En el caso del trabajo en el CRAP los informes se hicieron a inicios del año escolar 2004-2005 (octubre), al finalizar el segundo lapso (abril) y al finalizar el año escolar (julio). Al inicio del año escolar los docentes plantearon sus inquietudes y necesidades acerca de la educación matemática y cómo podían mejorar el rendimiento de sus estudiantes. Al finalizar el segundo lapso se comparó la situación de ese momento con la del inicio del año y al finalizar el año se evaluó el trabajo hecho y se plantearon las necesidades para el próximo año escolar. Estos informes también recogieron aspectos generales del funcionamiento del Liceo. Lo que se pretendió conceptualizar fue el seguimiento del CRAP.

Con el docente con quien se trabajó individualmente se hizo un informe de cada una de las cuatro reuniones claves: cuando se inició el trabajo y se planteó el problema a abordar, dos de seguimiento durante el año escolar 2004-2005 y otro al inicio del año escolar 2005-2006 con el objetivo de redimensionar el problema planteado en el año escolar anterior.

La triangulación de la información se hizo para construir los informes analíticos y usando lo reportado en el diario, lo que aportaron las entrevistas y los perfiles de los docentes.

Análisis de casos estudiados en el Programa Samuel Robinson va al Liceo

Caso curso de didáctica de la matemática, grupos que ingresaron en el 2003 y 2004. El curso de didáctica de la matemática se trabajó con una metodología de investigación-acción, en concordancia con el diseño del Programa, promoviendo un cambio de actitud a través de la reflexión de las acciones educativas, el desarrollo de habilidades para procesar información, en concreto el análisis de resultados de investigación y la relación con su práctica; y la discusión colectiva que promoviera la reflexión y la explicación de las acciones educativas y donde se reflejaran las concepciones de educación matemática. Los docentes participaron tanto de forma escrita como oral, se promovieron las discusiones, se buscó comparar posturas sobre educación matemática y establecer ideas en común.

En el grupo del 2003, específicamente se discutieron:

- Enseñanza del álgebra: paso de la aritmética al álgebra, procesos de generalización y simbolización, planteamiento y resolución de ecuaciones.
- Los Procesos Cognitivos involucrados en la Resolución de Problemas Algebraicos Literales Aplicados (PALA).

- El papel de la metacognición en la solución de problemas, se utilizaron problemas de las Olimpiadas Matemáticas Venezolanas y de los Calendarios Matemáticos del Centro Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Ciencia.
- Los proyectos como metodología de trabajo en el área de Trigonometría. - Creencias y actitudes asociadas a la Resolución de Problemas y acciones del docente para trabajarlas.

Los trabajos desarrollados por los docentes durante este curso eran una continuación de los que se realizaron en el curso de Investigación Didáctica, donde se hicieron propuestas de intervención pedagógica. Esto representa una dificultad pues estos trabajos desarrollados con el equipo líder de su Liceo en la mayoría de los casos no eran sobre educación matemática (de siete participantes, cuatro trabajaron sobre comprensión de textos) la propuesta para estos participantes fue que adaptaran su problema a la comprensión de textos necesaria en los problemas de enunciado, literales o PALA. Tres trabajos específicos de educación matemática fueron:

1. Conocimientos Previos en números y operaciones básicas en matemática para la adquisición de aprendizaje significativo y mejorar el rendimiento académico de los alumnos de 7mo grado.
2. Actitudes de los estudiantes hacia el aprendizaje de la matemática.
3. Estrategias metodológicas y el aprendizaje de la matemática. Caso: alumnos cursantes de 7º grado en la U. E. N. Teresa de Bolívar.

Para el grupo del 2004, se tomaron como contenidos específicos los mismos del 2003 y se agregó la discusión de un artículo sobre el método de proyectos, en el cual se fundamentan las nuevas políticas educativas emanadas por el Ministerio de Educación y que los docentes participantes plantearon como necesidad tener información sobre el tema. Para este grupo era de tres personas, de los cuales dos eran estudiantes de la escuela de matemáticas de la UCV, la tercera docente tuvo una participación muy irregular, de su perfil se pudo saber que para el momento de cursar el programa estudiaba un postgrado, dictaba 65 horas de clases semanales de cuatro grados distintos, atendía 314 estudiantes y además dirigía el departamento de evaluación del colegio privado donde trabaja después del Liceo público. Con este grupo sólo se lograron discutir aspectos de la instrucción matemática centrada en solución de problemas y de los proyectos como metodología de trabajo en el área de Trigonometría. Los trabajos desarrollados por los docentes durante el curso fueron:

1. El uso del pizarrón como estrategia efectiva en alumnos poco aplicados.
2. Taller de solución de problemas de geometría.
3. Bajo rendimiento estudiantil en los alumnos de séptimo grado sección K del Liceo Bolivariano U. E. N. Narciso Gonell.

Para atender a las necesidades de los participantes del grupo del 2003 (segunda fase de la IA), se continuó trabajando en el CRAP de la U. E. N. Teresa de Bolívar y con uno de los docentes individualmente pues en su Liceo no se consolidó el CRAP, estos casos se analizan por separado más adelante explicando los planes de acción desarrollados (tercera fase de la IA). En

cuanto al grupo del 2004 se visitó el aula del docente que hizo el trabajo sobre el uso del pizarrón, quien también pertenece a la U. E. N. Teresa de Bolívar.

Los cambios en las prácticas de estos docentes fueron parciales, se logró sensibilizarlos y que reflexionaran sobre su quehacer, a través del análisis de resultados de investigación y de la discusión de los mismos, y de algunas actividades matemáticas referidas a resolución de problemas algebraicos y a proyectos de trigonometría. Las discusiones de los docentes tienden a ser sobre lo que hacen **durante la clase**, no se discuten planes de clase, actividades diseñadas por ellos mismos, ni evaluaciones. La **reflexión es sobre sus acciones** pasadas. En el caso de la resolución de problemas algebraicos los docentes comentan y discuten las estrategias utilizadas por los estudiantes para resolver los problemas y las dificultades que tienen. La pregunta planteada para discutir el problema desde el punto de vista didáctico era *¿Cómo se expresa la comprensión del problema?* Por parte de los estudiantes. Dos problemas discutidos fueron:

- 1) *Un liceo decidió hacer una excursión para hacer una parrilla en El Junquito. Un grupo de representantes se ofreció para, con sus camionetas, llevar a todos los estudiantes del Liceo. Cuando partieron, cada camioneta llevaba el mismo número de personas. A mitad del camino se averiaron diez camionetas, de modo que cada una de las restantes camionetas llevó una persona más. A la vuelta, se estropearon quince camionetas más, de manera que en el viaje de regreso en cada camioneta había tres personas más que al salir por la mañana.*

¿Cuántas personas salieron de excursión y en cuántas camionetas?

2) En una jaula con conejos y canarios hay 32 cabezas y 94 patas. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

En el caso del primer problema los docentes plantearon como dificultad principal para los estudiantes identificar los tres momentos del problema (cuando partieron, a mitad del camino, a la vuelta), otra dificultad es reconocer cuántas incógnitas tenía el problema (número de personas que salieron de excursión, número de camionetas y número de personas por camioneta como incógnita "auxiliar") y por último plantear las tres ecuaciones necesarias. Esto muestra reflexión sobre los significados que dan los estudiantes a los problemas y al proceso de resolución de los mismos, esta es una práctica **después de la clase**, pero también podría reflexionarse sobre el problema como tal, su estructura, la viabilidad de la información que suministra y si esos factores también influyen en los significados que dan los estudiantes, lo cual sería una práctica para antes de la clase, y por último durante la clase los docentes pueden hacer preguntas que orienten a los estudiantes en el análisis del problema, lo cual no se destacó en la discusión.

Igualmente para el segundo problema los docentes plantean lo que hacen los estudiantes, pero no hay discusión sobre cómo abordar el problema de otra forma o un cuestionamiento al mismo problema que ayude a comprender por qué los estudiantes hacen lo que hacen (la tendencia es que los estudiantes no identifican incógnitas ni plantean ecuaciones, sino que se hace por ensayo y error, generalmente comenzando con que hay 16 animales de cada clase).

En el caso de los docentes del 2004, de los dos trabajos culminados, el primero se trató de cómo mejorar la participación de los estudiantes "poco aplicados" a través del uso del pizarrón, esto fue un cambio que introdujo el docente en su aula producto de las discusiones sobre la importancia de lograr mayor participación de todos los estudiantes en el trabajo, esto fue un plan del docente, fue una práctica **antes de la clase**, que fue llevada a cabo y evaluada. **Durante la clase**, el docente escogía estudiantes para pasar al pizarrón a resolver ejercicios y les hacía preguntas sobre el procedimiento utilizado, los ejercicios habían sido previamente trabajados por los estudiantes como tarea para la casa y luego en el aula los discutían en pequeños grupos. La práctica que cambió en este docente fue la de buscar los significados a la resolución de los ejercicios por parte de los estudiantes. El docente reportó que la estrategia fue exitosa y que los estudiantes lograron mejorar su rendimiento, esta es una práctica de evaluación **después de la clase**.

El segundo trabajo sobre solución de problemas de geometría, para el cual el docente dictó un taller extra a sus estudiantes, fue motivado por el hecho puntual de abarcar contenidos de geometría que se evalúan en las pruebas de ingreso a las universidades públicas y que son poco trabajados en la educación media. Esta fue una práctica fuera del aula de clases programadas. La discusión con este docente fue por qué la actividad tenía que ser extra a sus clases, a lo cual él respondió que era la única manera de poder ayudar a sus estudiantes pues debía cubrir su programa de clases y los tópicos de geometría que ellos querían estudiar no estaban contemplados en el programa de clase de ese año escolar.

Caso seguimiento del CRAP de la Unidad Educativa Nacional Teresa de Bolívar. Este Liceo participó en el SRL desde el 2003, y entre mayo 2004 y septiembre del 2005 se hizo seguimiento al CRAP cuyo proyecto planteó cómo problema la cantidad de reprobados en el área de matemáticas de séptimo grado de Educación Básica. En su trabajo los docentes afirman que "el índice de alumnos reprobados está asociado a diversos factores entre los que destacan: el interés de los alumnos, las estrategias pedagógicas utilizadas por los docentes, la carga horaria del plan de estudio, el contenido programático y los conocimientos previos, entre otros". Y en cuanto a las estrategias metodológicas se dice que son tradicionales, por lo general el método expositivo y la resolución de problemas; por lo cual deciden analizar las estrategias que utiliza el docente de 7° grado en el área de matemáticas argumentando que es el factor sobre el cual tienen mayor incidencia.

Otras necesidades que se extrajeron del diario de campo llevado durante varias reuniones fueron:

- revisar las estrategias de enseñanza, hay que manejar mayor número de estrategias porque si los estudiantes no entienden una hay que buscar otra, no repetir la misma que es lo que generalmente se hace; se insistió en que se traigan muchas estrategias para trabajar;
- discutir distintos tipos de problemas para cada contenido.

Se atendió a esa necesidad dictando un taller sobre iniciación al álgebra, basado en parte de lo reportado en el capítulo III de este trabajo de manera de discutir más a profundidad las estrategias utilizadas. Durante el taller se

discutió no sólo sobre estrategias sino también sobre dificultades de aprendizaje. A cada docente se le solicitó participar en ambos sentidos: describiendo las estrategias que utilizaba para comenzar el estudio del álgebra y mencionando las dificultades que presentaban los estudiantes.

Las estrategias de enseñanza reportadas por los docentes fueron:

1. Realización de talleres en grupo y que entre los mismos estudiantes se aclaren dudas antes de presentar las pruebas.
2. Realización de las tareas o actividades en clases.
3. Trabajo en grupos pequeños.
4. Uso de computadoras y programas matemáticos.
5. Descripción de relaciones cotidianas del tener y deber dinero, para atacar las dificultades con los signos.
6. Ejercitación de muchos problemas.

Lo cual muestra que las estrategias utilizadas, a excepción de la número 5, son estrategias generales de enseñanza, no específicas de la matemática y del álgebra.

Las principales dificultades de aprendizaje que los docentes mencionaron como observadas en sus estudiantes fueron:

- Despejar ecuaciones.
- Transformar problemas de la vida real a fórmulas matemáticas.
- Interpretación de los problemas a resolver.

- Falta de conocimientos previos y de habilidad matemática, razonamiento.
- Operaciones con racionales.
- Porcentajes.

A continuación se describe una de las sesiones de trabajo del taller:

Se comenzó preguntando: ¿Cómo se empieza a enseñar ecuaciones?

Docente 1: *les digo que ellos ya han visto ecuaciones en II Etapa, cuando les ponen: $4 + \square = 9$*

Y que ahora deben sustituir el cuadrado por la x.

Esto revela un conocimiento sobre el currículo de matemática de la Educación Básica, el cual se utiliza para conectar los conocimientos previos con los nuevos.

Docente 2: *yo les voy colocando ecuaciones de las más sencillas a las más difíciles y primero vamos tanteando para luego explicarles cómo se despeja; trabajo con las funciones inversas.*

Hay dificultad cuando tienen, por ejemplo:

$\frac{2a + 3}{5} = 2$, *se les dice: "como el 5 está dividiendo pasa multiplicando": $2a + 3 = 10$,*

y ahora qué se hace, si la prioridad es la multiplicación. Los estudiantes tienden

a continuar queriendo dividir entre 2, en vez de restar el 3. Les pregunto: ¿cuál número molesta?, ¿cuál está más cerca de la incógnita?

Esto generó una discusión sobre el lenguaje utilizado por el docente, ¿qué quiere decir que un número molesta?, comentándose que era un término muy ambiguo.

Luego se introdujeron otras formas de comenzar a trabajar las ecuaciones, como es la de construir una ecuación a partir de una identidad aritmética, antes de resolverla, buscando que haya una mayor comprensión sobre qué es una ecuación y la necesidad de introducir las incógnitas.

Al respecto de la bidireccionalidad del signo igual en el álgebra un docente planteó lo siguiente:

Si se da la ecuación $L=2\pi r$, se da como dato la longitud (L) y se pide hallar el radio (r):

$$\frac{L}{2\pi} = r$$

¿Hay que dejarlo así o pasar la r al lado izquierdo?

Se discutió y se recomendó hacer ambas cosas, o sea, en unos casos dejarlo del lado derecho y en otros del lado izquierdo, según sea el caso del despeje y

discutir con los estudiantes por qué la incógnita puede quedarse en cualquiera de los dos lados de la ecuación.

Acerca de las técnicas de despeje, otro docente planteó:

Un sistema de ecuaciones del tipo: $x+y=9$ y $x.y= 18$, se hace por razonamiento lógico, no se hace el algoritmo.

Al indagar sobre que entiende él por "razonamiento lógico" o "lógica", éste planteó que era evaluar rápidamente las ecuaciones para darse cuenta que con 6 y 3 se obtenía el resultado; lo cual dio pie a discutir el uso de la técnica *ensayo y error*, y de las heurísticas en general.

A este mismo docente se le hizo una entrevista donde él planteó que lo importante en la enseñanza era la secuencia instruccional a seguir, se le preguntó acerca de la secuencia con respecto al tema de las ecuaciones, respondiendo lo siguiente:

Docente: Bueno, yo primero trato de colocarles una ecuación y enseñarles cómo despejar. Primero se los coloco con letras, les especifico las variables y les coloco como si fueran a despejar. Y después les voy planteando problemas de ecuaciones de lo más fácil a lo más difícil. Y después, quiero hacerlo, porque prácticamente no nos hemos metido con problemas de la vida real y meterlos en forma de ecuaciones.

*Investigadora: ¿Y qué es lo que define para ti la dificultad de una ecuación?
¿Cómo se va de lo más fácil a lo más difícil?*

Docente: Bueno, porque hay ecuaciones que son de forma lineal, hay unas que están dividiendo, hay unas que tienen una multiplicación, entonces yo voy primero con las ecuaciones que están en forma lineal, que es nada más pasar las "x" para un lado y los términos que no tienen "x" para el otro, ir especificando eso. Después, cuando tienen divisores y eso, llevarlos a forma lineal después de forma lineal... o sea, hacerlo mecánicamente. Primero les enseño una forma, después les enseño otra, vuelven a caer a la primera y ya saben ellos cómo resolverlos y así voy mecánicamente. Porque a ellos les enseñas una parte, (...) por lo menos yo primero les enseño a resolver una parte lineal, ¿verdad? despejarla de aquí, después, les coloco una ecuación que tenga dos divisores, les digo cómo llevarla a forma lineal, después que la tengan en forma lineal ellos saben cómo resolverla porque ya la vieron de la primera parte. Y así, mecánicamente.

Esto muestra los conocimientos del docente acerca de la forma de las ecuaciones, los cuales enfatizan los tipos de operaciones a realizar (multiplicaciones, divisiones) con los números, pero no hace referencia a las operaciones con la incógnita, lo cual origina las categorías de ecuaciones aritméticas o no aritméticas.

Las dificultades reportadas por el grupo de docentes con la resolución de ecuaciones fueron:

1. con el signo menos: ¿qué hacer si queda $-x=2$?
2. con las expresiones racionales;

3. con las unidades, casos de física, quieren incorporarse al trabajo algebraico;
4. con los métodos de resolución, cuándo usar un algoritmo determinado o cuándo usar la "lógica".

A continuación se describe y explica la discusión generada con dos procesos de solución de problemas y como los comentarios de los docentes mostraban sus conocimientos al respecto:

Problema 1. *A un alumno le preguntaron que edad tenía y respondió: Si de la edad que tengo más 7, se resta la edad que tengo menos 7, se obtiene mi edad. ¿Cuántos años tiene?*

Sin escribir nada en la pizarra alguien dijo que el resultado era "la edad", otros dijeron que el resultado era cero.

Suponiendo que E representa la edad, se tiene:

Situación 1: $E+7 - (E-7)= 14$.

Situación 2: $E+7-E-7= 0$. Se comentó que este resultado "debería" levantar sospechas y llevar a replantear la ecuación.

Se discutió el uso de los paréntesis en la expresión algebraica y la ambigüedad que puede haber en el lenguaje, con lo cual surgió la importancia de la claridad en el lenguaje.

Estos conocimientos sobre la importancia del lenguaje y la estimación de las soluciones de un problema, son parte de los conocimientos didácticos sobre solución de problemas que poseen los docentes.

Problema 2. *Cristina dice estar cumpliendo 18 años. Si sabemos que Cristina se rebaja la cuarta parte de su verdadera edad, menos un año. ¿Qué edad en años y meses, tiene Cristina?*

Los docentes plantearon que los estudiantes podían presentar las siguientes dificultades:

- Interpretar que quieren decir con "dice estar cumpliendo 18 años" (¿qué hacer con el 18?)
- Plantear la ecuación, traducir al lenguaje matemático el término "rebaja". Se comentó la necesidad de discutirlo y dar sinónimos: quitar, de menos, etc.

Estos son conocimientos sobre cómo aprenden los estudiantes, y cómo utilizar esos hechos para tomar una decisión didáctica.

Se plantearon dos formas de resolver el problema:

Forma 1:

$$X - \frac{X}{4} - 1 = 18, \quad X - \frac{X}{4} = 18 + 1, \quad \frac{4X - X}{4} = 19, \quad \frac{3X}{4} = 19, \quad 3X = 76, \quad X = \frac{76}{3},$$

$$X = 25,3$$

¿Qué significa 25,3 años? ¿Puede dar una fracción? Se discutió que en el contexto del problema la fracción representa los meses. Lo cual muestra el conocimiento de la importancia del contexto en la solución de problemas. También se planteó la importancia de comprobar la solución del problema (Cristina tiene 25 años y 4 meses = $\frac{1}{3}$ de un año).

$$25 + \frac{1}{3} - \left(\frac{25 + \frac{1}{3}}{4}\right) - 1 = 18. \text{ Lo cual permite repasar la suma y resta de fracciones.}$$

Forma 2:

$$18 + 1 = 19, \quad 19 = 3\frac{x}{4}, \quad \frac{76}{3} = x, \quad x = 25,3. \text{ Forma más "lógica".}$$

Se discutió que quería decirse exactamente con esto y el docente argumentó que es la forma que da más resultado, es decir, la que a los estudiantes les es más fácil. En este punto hubo distintas opiniones: unos docentes dicen que a los estudiantes les es más fácil la forma 1 y otros dicen que la forma 2. Quienes abogan por la forma 1 dicen que plantear la ecuación $19 = 3\frac{x}{4}$ de la forma 2 no es evidente. De ahí en adelante las dos formas son análogas. Esto muestra conocimientos sobre la didáctica de la matemática referida al proceso de solución de problemas.

Luego, a cada uno se le entregó un material preparado por la investigadora donde se reportaban algunos resultados de investigación referentes a estrategias para enseñar álgebra y algunas dificultades de su aprendizaje. Esto con el propósito de que los docentes ubicaran sus conocimientos en un marco conceptual que les permitiera ampliar su base de conocimientos, plantearse nuevas actividades de aprendizaje y estrategias de enseñanza.

Los cambios en las prácticas de estos docentes fueron parciales, los docentes reflexionan y discuten sus prácticas **después de la clase**, que hacen y que no hacen sus estudiantes, que dificultades presentan; y algunas de sus prácticas **durante la clase**, cómo explican un tema como el de las ecuaciones. No se discutieron planes de clases, evaluaciones, ni hubo propuestas didácticas concretas de cambio.

Una de las razones por las cuales no se logra producir cambios en las prácticas es por la necesidad de mayor seguimiento en el Liceo que es el contexto de las prácticas y la cual tienen un funcionamiento particular que apoya o no al cambio. Las recomendaciones para los administradores del PFD son que las sesiones de seguimiento se realicen una al inicio del año escolar para apoyar los planes de acción, **prácticas antes de la clase**, dos de seguimiento de la ejecución del plan (al finalizar los dos primeros lapsos de trabajo y sus respectivas evaluaciones), en búsqueda de apoyar la búsqueda de significados **durante la clase**, y la última de evaluación de los resultados finales al terminar el año escolar cuando ya los estudiantes estén de vacaciones, pues es difícil coordinar el tiempo disponible de todos los docentes del Liceo para

actividades de actualización durante el año escolar. Este seguimiento debe ser de por lo menos dos años escolares de manera de observar las mejoras en las prácticas y poder hacer propuestas que influyan sobre la educación matemática que se imparte en el Liceo, para lo cual es necesaria la coordinación del trabajo de los docentes de los distintos grados. Por otra parte, se recomienda **ir a los liceos** (*Samuel Robinson va al Liceo*), para desarrollar el sistema de formación permanente para los liceos (objetivo 3 del SRL), pues es a través de una comprensión del contexto de la institución, de la dinámica del trabajo de sus directivos y su relación con los docentes de aula que se pueden realizar actividades concretas de actualización como talleres, seminarios y charlas donde se puedan profundizar las discusiones sobre aspectos específicos de la didáctica de la matemática.

Caso de docente asesorado del grupo del 2003. Este docente de matemáticas participó en el grupo que ingresó en el 2003 y en su Liceo no se consolidó el CRAP pero él continuó investigando acerca del tema que se planteó en su trabajo final de didáctica de la matemática. Le interesó trabajar con resolución de problemas, particularmente se interesó por lo que Requena (2000) llama Problemas Algebraicos Literales Aplicados (PALA). Tiene especial interés por los problemas de la Prueba de Aptitud Académica para ingresar a las universidades públicas.

La discusión comenzó por cuál sería el objetivo de la investigación y acordamos que sería buscar que sus estudiantes mejoren en la resolución de los PALA. Él planteó que habría que hacerles una evaluación previa, algunas intermedias para ver cómo van mejorando y una al final. Discutimos que se entendería por

mejorar en resolución de problemas. Él planteó que se entendería por mejorar el hecho de que los estudiantes comprendan el problema, que identificaran los datos y las estrategias. Luego de una discusión replanteamos que sería que analicen el problema, escojan una estrategia de solución, la ejecuten e identifiquen las dificultades que se les presenten y revisen para obtener seguridad en lo que hacen. La discusión continuó con qué estrategia utilizar, cuál es la más exitosa, si una meta del trabajo sería identificar la mejor estrategia; aquí discutimos que no existe la mejor estrategia, que depende del problema, de la persona, que en todo caso la estrategia debe ser enseñar al estudiante a discernir cuál es la mejor estrategia, a lo que el docente argumentó que él entiende que no se debe encasillar a los estudiantes pero que siempre se planteaba esa pregunta (¿cuál es la mejor estrategia?). Comentamos lo que hacen los estudiantes del Curso Introductorio de Ingeniería de la UCV y cómo hemos observado que ellos usan una sola estrategia: la que les enseña el docente, y también que están acostumbrados a que estudian un tema y hacen problemas de ese tema pero que si se les asigna un problema de otro tema se sienten perdidos, no saben cómo comenzar, cuál estrategia usar y eso no los ayuda a desarrollar su pensamiento matemático. En este punto el docente preguntó si un PALA se puede resolver con una sola estrategia, revisamos el concepto que da Requena y encontramos que no está relacionado con las estrategias para resolverlo sino con la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico, simbólico.

El docente pregunta *¿qué pasará en las otras áreas con los PALA? porque en matemáticas lo hacen porque hay que hacerlo... no sabemos si les gusta, si lo aplican.* Comentamos que en el Liceo donde se hace seguimiento al CRAP los

docentes de otras áreas como física, biología y química manifestaron que los estudiantes tenían dificultades para interpretar los problemas literales así que quedamos en que él averiguaría en su Liceo las opiniones de los docentes de las otras áreas. También acordamos que él revisaría otros materiales sobre solución de problemas y que buscaría otros problemas para desarrollar con los estudiantes; los temas de los problemas serán ajustados a los programas de los grados que él enseña.

Otro punto de discusión sobre la resolución de problemas fue qué pasa si un estudiante coloca sólo la respuesta al problema y no la explica, de lo cual el docente dice *en el Liceo si un estudiante hace eso y él no lo acepta puede venir el representante a reclamar; en la universidad se trabaja muy distinto que en el Liceo, en la universidad se le pueden pedir explicaciones al estudiante pero en el Liceo las normas y leyes no lo permiten*. Respecto a este punto discutimos que los docentes tenemos que hacernos reconocer como profesionales, que hay que discutir con el equipo del Liceo y con los representantes las formas de aprendizaje, ¿qué es lo que dice la teoría, la investigación?, ¿qué es lo que observamos con los estudiantes, realmente aprenden dando sólo el resultado o hay que estimularlos a que expliquen?

Finalmente, el docente investigó cómo sus estudiantes desarrollan procesos cognitivos resolviendo problemas de matemáticas; escogió veinte (20) problemas identificados como "*Problemas de lógica y matemática recreativa, de Álgebra, de Aritmética, de Geometría y Trigonometría*"; todos problemas de enunciado, donde hay que pasar por un proceso de traducción del lenguaje natural -el español- al lenguaje matemático. También propuso una secuencia de

actividades que denominó "Actividades a realizar con los alumnos", donde presenta una descripción de dichas actividades con referencia a algunos autores como Polya (1998). En la discusión sobre estas actividades analizamos las propuestas de cada autor y cómo unas eran más generales que otras, sobre cuáles son los procesos cognitivos necesarios para desarrollar el pensamiento matemático, el razonamiento; pues como plantean Stacey y otras (2004) el razonamiento algebraico implica análisis de situaciones reales, formulación de relaciones críticas como ecuaciones, aplicación de técnicas para resolver las ecuaciones, e interpretación de los resultados; y en cambio lo que algunos estudiantes parcialmente aprenden es una colección de reglas a ser memorizadas y trucos a ser ejecutados, que no tienen coherencia lógica, muy poca conexión con aprendizaje aritméticos previos, y ninguna aplicación en otros asuntos escolares o en el mundo fuera de la escuela.

En ese momento el docente reflexionó acerca de su trabajo y dudó sobre si lo que ha hecho con sus estudiantes los ha ayudado a desarrollar su pensamiento. Sobre el trabajo con los estudiantes planteó que a estos les gustó resolver este tipo de problemas, la experiencia fue con los de primer año de EMDP y los de noveno grado de Educación Básica preguntaron por qué ellos no participaban, así que él le dio los problemas y estos trabajaron por su cuenta y después vinieron a presentarle los resultados. El docente también preguntó qué hacer ahora con los reportes de los estudiantes, cómo los evalúa. Discutimos acerca de ello, revisamos algunos reportes y la conclusión fue tomar como indicador el argumento desarrollado, discutimos la importancia de la expresión escrita, de la argumentación matemática.

Una reflexión importante fue por qué estas actividades no se hacían cotidianas en la clase de matemáticas, planteamos que la idea era buena -hacer actividades extra de resolución de problemas - por lo cual lo invité a reflexionar sobre cómo hacer de esta práctica algo cotidiano, en todas las clases. La discusión estuvo orientada hacia lo que se hace y lo que no se hace en una clase de matemáticas, acerca del uso de la matemática para resolver problemas reales. Como conclusión parcial obtuvimos que se resuelven pocos problemas en la clase de matemáticas y que además no son problemas reales, son problemas escolares, intramatemáticos.

Para el inicio del año escolar, 2005-2006, el docente elaboró un ensayo sobre la importancia de la solución de problemas en la educación matemática, para el cual consultó varias fuentes bibliográficas, tanto en libros, revistas especializadas como en la Internet. Elaboró un plan de acción para el año escolar en conjunto con la investigadora, para el cual discutimos los objetivos educativos del curso de matemáticas del grado en que se trabajaría, qué contenidos matemáticos se desarrollarían, con qué estrategias se abordaría el curso, cómo se evaluarían los aprendizajes, cómo se reportaría el trabajo de aula y cómo se tomarían las decisiones para hacer cambios. Particularmente, para este año escolar hay interés en el tema de cómo desarrollar proyectos, por solicitud del Liceo. De manera que se planteó como necesidad la búsqueda de situaciones reales que puedan modelarse con sistemas de ecuaciones de dos incógnitas, ecuaciones de segundo grado, y que además estén relacionadas con otras áreas como física y química. El docente elaboró su plan de acción, lo discutimos, una de sus reflexiones cuando se discutieron las estrategias con que se abordaría el curso fue "*yo explicó mucho*", lo cual lo consideró una

limitación para permitirles a los estudiantes que desarrollaran sus ideas. En la última reunión que tuvimos discutimos situaciones reales que puedan modelarse matemáticamente.

Este docente logró cambios en sus prácticas a través de la discusión de contenidos específicos de la matemática, de la cual surgieron objetivos de la educación matemática, lo que significa aprenderla y en consecuencia cómo enseñarla. Estos cambios incluyeron construcción de conocimientos sobre educación matemática y clarificación de sus objetivos, pues las reflexiones y discusiones obligaron a explicar el por qué de lo que se hace y a incorporar la experiencia a dichas explicaciones. Los cambios se produjeron en dos momentos de las prácticas: **antes de la clase**, pues el docente planificó actividades nuevas con un objetivo específico; y **después de la clase**, pues el docente analizó con detalle los reportes de sus estudiantes y reflexionó sobre su rol en la clase (*explica mucho*).

A pesar de no ser un objetivo del SRL asesorar a docentes de manera individual, este caso se atendió por la gran motivación que se percibió en el docente, pero es poco el impacto que esta asesoría tuvo en el Liceo. Por lo cual se recomienda analizar con los demás docentes y los directivos del Liceo las causas por las cuales no logró consolidarse el CRAP y así mejorar las condiciones para un próximo año escolar.

Programa de Actualización Docente de la Universidad de Los Andes. Facultad de Humanidades y Educación. Mérida

Para describir este programa se entrevistó a miembros de su planta profesoral, quienes han trabajado directamente en los cursos dirigidos a docentes de matemáticas.

En el Programa de Actualización se dictan talleres dirigidos a docentes de I y II etapa de Educación Básica (edades de los niños entre 7 y 12 años). Los talleres son los días sábados, tienen una duración de cuatro horas por sesión y de ocho sesiones para un total de 32 horas. Los talleres dictados en serie por una de las docentes entrevistadas son:

1. Juegos y estrategias para el aprendizaje significativo de la matemática en I y II etapa de Educación Básica, donde se parte del concepto de número, se trabaja con fracciones y números decimales.
2. Juegos y estrategias para el aprendizaje significativo de la matemática en II etapa de Educación Básica, donde se hace énfasis en las fracciones, sus operaciones, su expresión como número decimal, sus distintas representaciones.
3. Divisibilidad, números primos y compuestos, múltiplos, divisores, factorización, mínimo común múltiplo, máximo común divisor; se enfatizan los conceptos relacionados con la multiplicación. En experiencia de la entrevistada este es un tema renegado en el aula.
4. Geometría, percepción del espacio.

Generalmente los docentes participantes toman los cuatro talleres. Los participantes han reportado experiencias positivas de aplicación de las actividades de los talleres en su aula.

En los talleres se busca el aprendizaje significativo, de lo que tiene sentido, partir de lo que el niño conoce para poder enlazarlo con sus conocimientos previos. Son "prácticos" se trabaja con actividades preparadas por la docente formadora, los docentes trabajan en grupo para reflexionar entre ellos las actividades y luego se discute cómo las abordaron. Se entregan textos sólo como referencia, no se discuten en el taller.

Según la docente entrevistada los conocimientos de los docentes son tomados en cuenta para el dictado de los talleres:

Entrevistada: En formación docente trabajo con los saberes matemáticos, los saberes sobre el proceso de aprendizaje de los niños y los saberes didácticos. Parto de lo que los docentes saben, de los saberes que traen de su formación inicial, así sea de los saberes mecánicos. Parte del trabajo es reflexionar sobre cómo ellos han trabajado un tema y cuáles son las experiencias que han tenido con algún tipo de material. En los talleres se busca que a través de situaciones prácticas los docentes entren en contradicción con lo que saben y reflexionen al respecto. Es fundamental el trabajo en grupos donde discuten y reflexionan, entran en contradicción y descubren cosas. Se trabaja con material manipulable inicialmente, ya después se desprenden del material y trabajan a nivel mental; parto del material manipulable, de situaciones que son matematizables. La idea es trabajar con los docentes como se espera que ellos trabajen con sus estudiantes, haciendo los ajustes referidos a los conocimientos previos que tienen los docentes. Se trabaja en varios niveles de representación, en simultáneo:

- *Nivel concreto, tanto a nivel físico que representa la realidad y el físico con modelo que representa las ideas.*
- *Nivel gráfico, que semeje la realidad y que la modele.*
- *Nivel verbal, expresar en lenguaje corriente, busca organizar el pensamiento. Nivel simbólico.*
- *Nivel mental, que permita manipular las ideas matemáticas mentalmente.*

Cada idea matemática se trabaja en todos los niveles, partiendo de la representación física o gráfica, después el nivel verbal; se busca la traslación entre los distintos niveles representacionales.

En los talleres trabajamos en simultáneo los distintos saberes que tienen los docentes. La discusión es posterior a la experiencia, no hay introducción ni una explicación previa. Luego de la experiencia, los docentes la reflexionan entre ellos mismos y luego se analiza cómo la ven, cómo lo hicieron, qué implica lo que están haciendo didácticamente con los alumnos.

Llama la atención que hay docentes que han trabajado con material concreto, pero que no son modelos de la idea matemática, son juegos donde ya se debe tener el conocimiento para poder usarlo, o sea, no son modelos constructores de conocimiento, sino son modelos de aplicación de conocimiento, como por ejemplo el dominó de fracciones. Esa es una discusión interesante con los docentes, hay situaciones didácticas con materiales didácticos para diferentes momentos del proceso, momento de iniciación, para iniciar al estudiante en un

concepto; materiales didácticos para profundizar en el concepto, para reforzar el concepto y otras incluso para consolidar.

Los talleres son un abre boca, se busca la reflexión, crear situaciones y condiciones para la reflexión, no se discute la disposición a cambiar. El cambio debe darse en la formación inicial, desde las universidades; y desde los entes reguladores de la educación, de los que controlan la calidad de la educación. En los talleres sólo se logra la reflexión.

Según esta reflexión de la docente entrevistada, en este programa se busca darle significados a la matemática que se enseña en la I y II etapa de Educación Básica, su centro está en la práctica de significación de las ideas matemáticas en el aula, **durante la clase**. En los talleres se discuten actividades matemáticas desde varios puntos de vista (matemático, didáctico, psicológico) buscando la reflexión de los docentes al respecto, no se discuten planes de clase, tareas de los estudiantes, episodios de enseñanza.

Al Programa de Actualización Docente está adscrito el seminario llamado "Seminario Venezolano de Educación Matemática", creado en el 2004 y el cual se celebra anualmente. Se entrevistó al coordinador del Seminario. La pregunta inicial fue cómo el Seminario interpretaba las formas tradicionales de la enseñanza de la matemática y las prácticas compatibles con el aprendizaje significativo de las matemáticas, según lo que se plantea en referencias del mismo.

Entrevistado: *Es una pretensión transformar las prácticas. Nos preguntamos ¿Por qué suponemos que enseñar es igual que aprender? En la escuela, el maestro explica. La matemática no somete a consideración de nadie sus postulados y sus axiomas. Pero como disciplina a ser aprendida no es así, no debe ser así. Los niños más que les expliquen necesitan comprender, y ese el papel del maestro, crear el clima adecuado y los espacios suficientes como para que los niños comprendan, no para explicarles.*

Según el coordinador del Seminario este se plantea discutir el papel del maestro en las aulas, es decir, las prácticas **durante la clase**, y cómo el maestro crea un clima y unos espacios para la comprensión del estudiante más que dedicarse a explicar; pero también la creación de estos espacios implica contextualización y planificación, lo cual es una práctica **antes de la clase**, para la cual el docente necesita conocimientos sobre cómo aprenden sus estudiantes y desde allí dedicarse a crear actividades y estrategias basadas en esos conocimientos.

En el Seminario hay una concepción particular de la matemática, la cual orienta las actividades del mismo:

Entrevistado: *La Matemática es un lenguaje en si misma, además es un lenguaje que ayuda a otras ciencias a explicar fenómenos. El seminario tiene la intención de crear un espacio para conversar con los epistemólogos, filósofos, comunicadores, pedagogos y también con los matemáticos; porque el problema es que los matemáticos no nos van a resolver el problema de cómo los niños aprenden y cómo se enseñan las matemáticas, ellos tienen una visión que no es*

la que nosotros los educadores queremos para los niños, así que el discurso prácticamente va dirigido a los hacedores de la educación matemática, que son los ideólogos. Pero hay una tendencia muy marcada del educador matemático a estar más cerca del matemático que del maestro de la matemática, es una suerte de conflicto de identidad en la que él quisiera ser más matemático que educador.

Nosotros creemos que desde la matemática no se puede enseñar la matemática a los niños. Hay un error conceptual no solamente en los libros, sino en las maneras como en la universidad estamos enseñando a los maestros integradores.

En Venezuela los maestros integradores son quienes enseñan en I y II Etapa de Educación Básica, a niñas y niños entre 7 y 12 años de edad. La problemática de la Educación Matemática de estos docentes ya ha sido reportada en estudios anteriores (Serres, 2004b). Esta problemática impacta las prácticas de los docentes de esta etapa, desde la forma en cómo ellos se acercan al currículo, planifican y ejecutan su plan, hasta los significados que dicen le dan los estudiantes a la matemática.

Continuando con la discusión acerca de la matemática de la I y II etapa de Educación Básica, el entrevistado plantea lo siguiente:

Entrevistado: Hay que mirar hacia atrás, donde encontramos los fundamentos y las estructuras que le van a dar soporte a la racionalidad matemática, a la matemática pensada y practicada desde la abstracción, porque el 7 por 7 puede

ser 7 elevado a la 2, o 7 por 7 49, eso no tiene ningún significado para el niño, pero si tú le dices que la pared tiene 49 bloquitos, y cada bloqucito vale tanto, entonces esa operación que para el albañil tiene sentido, para el niño también puede tener sentido si lo hacemos pensar como albañil; pero el 7 por 7 no me conduce absolutamente a nada, ni que 7 elevado a la 2 es 49, y que el exponente es 2, eso no tiene sentido, tiene sentido si yo pienso como un niño albañil, o como el niño que va a hacer una casa y quiere saber cuánto le va a costar una nueva pared.

Investigadora: ¿entonces una práctica compatible con un aprendizaje de la matemática más significativo es que este sea útil?

Entrevistado: *Esa es una, otra es que sea entronizada en la estructura del niño, en sus percepciones, en su imaginario. Y lo otro, es que la matemática me puede servir para resolver un problema, pero también me puede servir para desarrollar el pensamiento, el lenguaje. Por ejemplo, cuando un niño entiende el valor matemático de posición entre él y su abuelo, su abuelo y él, ahí hay una operación de reversibilidad. Eso se puede hacer a cierta edad, el maestro debe conocer cómo aprenden los niños y debe crear espacios para desarrollar el pensamiento lógico matemático del niño, independientemente de la profesión que vaya a tener mañana.*

La práctica docente a que hace referencia esta cita es a la práctica de contextualización, **antes de la clase**, pues plantea que el docente se base en la estructura intelectual del niño para diseñar sus actividades y estrategias, para

lo cual el docente tiene que construir sus conocimientos acerca de cómo aprenden matemática los niños y usarlos para orientar sus prácticas.

En conclusión, en el Programa de Actualización Docente se discuten prácticas docentes **durante la clase** por medio de las actividades diseñadas por los formadores y con las cuales se discute el acercamiento a la matemática, su didáctica y su aprendizaje. En opinión de la entrevistada se logra la reflexión de los participantes en el Programa pero no hay posibilidades de ir más allá de eso, así que en realidad no se sabe si hay cambios en los participantes. Esta es una razón para insistir en la necesidad de que los PFDM se organicen en coordinación con las escuelas, en su contexto y desde su realidad.

Escuela Venezolana de Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Los Andes. Facultad de Ciencias. Mérida

Para describir esta Escuela se entrevistó a sus docentes y al coordinador general, quienes han trabajado directamente en los cursos dirigidos a docentes de matemáticas.

Entrevista al coordinador general:

Investigadora: ¿Cuáles son los objetivos de la Escuela?

Entrevistado: *El énfasis de la Escuela son los contenidos matemáticos. Está organizada en cursos que dictan profesores universitarios de escuela de matemáticas invitados por los organizadores de la Escuela. Los cursos se*

organizan basados en una encuesta que llenan los participantes al final de cada Escuela. Generalmente los profesores universitarios participan dos años consecutivos en la Escuela, con algunas excepciones de profesores interesados en continuar participando y cuyos cursos son de interés actual para los participantes.

Entrevistado: Los docentes universitarios que dictan los cursos, los expositores, tienen total libertad para la presentación y el dictado de sus cursos, la única exigencia que hace la Escuela es solicitarles un material escrito el cual es editado por la Escuela y se entrega a los participantes como material de apoyo, esto se ha hecho consecutivamente en los diez años de existencia de la Escuela, los materiales se editan como un libro con sus respectivo registro legal.

Investigadora: ¿Cómo se considera la experiencia de los participantes en los cursos?

Entrevistado: En un inicio se ofrecían dos cursos, uno en la mañana y otro en la tarde, finalmente se dejó un sólo curso en la mañana con 3 horas diarias y en la tarde se daba libertad para que los participantes hicieran lo que quisieran, un grupo de ellos se reunían a estudiar y los organizadores les propusieron que presentaran sus experiencias a la Escuela, de aquí surgió el dictado de talleres en las tardes. La experiencia de los participantes es muy valiosa, se considera por el valor que tiene en si misma, no para darle valor. Inicialmente los talleres los organizaron los mismos participantes, las notas que reportaban eran excelentes, se percibió una conducta de que "somos excelentes pedagogos y

por eso salen bien los participantes” y por ello se decidió invitar a profesores universitarios que dictaran los talleres, de manera semejante que en los cursos. Estos talleres tienen un carácter distinto a los cursos, los toma quien de verdad está interesado, los participantes tienen una actitud distinta. Al final del taller se hace un examen, y a quien lo aprueba (la nota aprobatoria es mayor o igual a 15 sobre 20) se le entrega un certificado de aprobación. Este año la Dirección de Postgrado de la Universidad de Los Andes (ULA) aprobó avalar estos talleres como un curso complementario de dos créditos, el participante que así lo solicite debe presentar al final un examen y sólo con nota mayor o igual a 15 puntos recibe el certificado entregado por Postgrado - ULA.

Según el coordinador general de la Escuela, en la misma la experiencia de los docentes es tomada en cuenta, pero no reporta en la entrevista cómo dicha experiencia influye en la Escuela. Lo único que se puede inferir de la entrevista es que los participantes tienen un espacio (talleres en la tarde) donde posiblemente planteen cómo se acercan al conocimiento matemático y didáctico, pero no se reportan discusiones ni sistematización de experiencias que sirvan de base conceptual y de orientación de las prácticas de los docentes posteriormente a la Escuela. La Escuela asume que la esencia de la formación de los docentes son los contenidos matemáticos ya institucionalizados, sin ninguna relación con las instituciones escolares, es decir, sin contexto.

Acerca de los participantes y la proyección de la Escuela:

Entrevistado: *Los participantes en la Escuela son docentes de Educación Básica, Media y Diversificada, también participan estudiantes de educación matemática y profesores de los institutos pedagógicos; provienen de todas partes del país, de Apure, Amazonas, Caracas, Maracaibo, Margarita, Maturín, Falcón, Barquisimeto, Cumaná, etc. Se han creado grupos dentro de los participantes, quienes se reúnen tres veces al año en distintas partes de país y estudian matemática. Un grupo de estudiantes de la Universidad Nacional Experimental Politécnica de Caracas participó durante dos años consecutivos en la logística de la escuela y luego ellos mismos organizaron unas jornadas de enseñanza de la matemática en su institución.*

En distintas partes del país han solicitado la realización de la Escuela, particularmente en Valencia han solicitado que se repita la experiencia allí. También han invitado a los docentes universitarios a que dicten los cursos en otras partes. Ya se debería poder organizar la Escuela en otras partes por otras personas.

Según el coordinador general de la Escuela, la misma es una motivación para estudiar matemáticas y para que los participantes organicen eventos similares en sus regiones, pero no hay planteamientos acerca de cómo la Escuela influye en las prácticas de los docentes y en consecuencia en las instituciones escolares.

La Escuela tiene capacidad para atender a 300 personas, se realiza en septiembre y desde hace varios años las inscripciones se cierran en julio. Esto hace inferir que hay necesidades de formación en muchas partes del país. Los

organizadores de la Escuela opinan que ésta debería ser un proyecto del Ministerio de Educación.

En entrevista a otro docente que ha dictado cursos en la Escuela, se le pregunta:

Investigadora: ¿Cómo influyen los cursos dictados en la Escuela en la formación de los docentes?

Entrevistado: *Los docentes de bachillerato salen de la Escuela entusiasmados de las nuevas cosas que aprendieron, pero cuando regresan a sus lugares de trabajo máximo en dos semanas todo vuelve a ser como antes. Pareciera que en la Escuela hacen una catarsis, no es más que eso.*

No he tenido contacto con los participantes luego de la Escuela, en el año que estuve dictando talleres por todo el país encontré a algunos participantes de la Escuela, comentamos el trabajo pero no fue más allá de eso.

Hay que ir más allá de dictar talleres o cursos como en la Escuela. El sistema educativo no puede recaer solo sobre el docente, es mucha responsabilidad, hay que ir más allá, a las condiciones de trabajo, a los materiales, a los valores. Al docente se le exige que sea creativo, que investigue, etc. pero su realidad de trabajo en el aula es caótica, hay indisciplina, desorden, falta de materiales, lo cual desmotiva al docente.

En opinión de este docente la Escuela es un espacio de aprendizaje para los docentes participantes, pero este aprendizaje no logra transformar sus prácticas, no se reporta ni siquiera reflexión al respecto de la relación entre lo que los participantes aprenden en la Escuela y lo que hacen en las aulas. Por otra parte, para este docente el trabajo que hace la Escuela no es suficiente, plantea que hay que ir más allá de eso, pues para que el docente enfrente su realidad en el aula necesita ir más allá de los contenidos matemáticos, lo cual apoya la necesidad de que los PFDM se desarrollen en coordinación con las instituciones escolares, en ese contexto, con su realidad, pues es ahí donde el docente lleva a cabo sus prácticas y donde se puede establecer si la necesidad es mejorar en los contenidos matemáticos, o en las aproximaciones didácticas, o en la adaptación del currículo.

En conclusión en la Escuela Venezolana de Enseñanza de la Matemática las prácticas docentes no son tomadas en cuenta. Lo cual trae como consecuencia que los docentes sigan trabajando igual, sin ningún cambio para su trabajo en su escuela, ni para su escuela como tal. Quizás los docentes cambian en cuanto a sus conocimientos matemáticos pero esto no se ve reflejado en su trabajo profesional, en su cotidianidad.

De los otros dos programas de formación docente citados en los antecedentes de este trabajo, no se pudo obtener más información que la conseguida en la Internet, por lo cual no se analizan en este capítulo.

Para concluir, las bases de un programa de formación dirigido a docentes de matemática (PFDM) y centrado en sus prácticas son las siguientes:

La investigación en Matemática Educativa juega un rol fundamental, sirve de base para desarrollar las actividades matemáticas a discutir con los docentes participantes. En particular para el caso del Álgebra Educativa y su estudio inicial estas bases son:

1. El estudio de los tres usos de las variables y su relación con los procesos de generalización, simbolización y solución de problemas.
2. El estudio de las ecuaciones, desde su construcción y los distintos modelos para su solución, dependiendo de la estructura de la misma.
3. El estudio del proceso de solución de problemas como apoyo al estudio de la variable como incógnita, la identificación de las incógnitas, el planteamiento de ecuaciones, de representaciones gráficas, el uso del ensayo y error, la verificación de las soluciones. Y el estudio de la comprensión de los problemas, cuantitativamente, cualitativamente y conceptualmente.
4. El estudio del uso de las calculadoras para desarrollar el lenguaje y el pensamiento algebraico.
5. El estudio del rol del docente para mediar en los procesos de generalización, simbolización y solución de problemas.
6. El estudio de cómo los estudiantes desarrollan estrategias de generalización y solución de problemas, de la simbología que utilizan para expresarse.

El objetivo de un PFDM centrado en prácticas es analizar, transformar y producir nuevas prácticas docentes, que hagan que el docente se desarrolle como profesional y que desarrolle el proyecto educativo de su escuela; para

ello las prácticas son escuchadas y discutidas a través de procesos de *reflexión sobre la acción*, en primer lugar; lo cual se hace por medio de actividades matemáticas diseñadas para tal fin. Para luego *reflexionar para la acción* al plantearse transformar las propias prácticas.

En un PFDM centrado en prácticas se discuten todas las prácticas docentes:

- la contextualización, que consiste en el estudio del currículo para adaptarlo a la escuela donde se desarrolla el programa, y también en el propio estudio de las actividades matemáticas basadas en investigación en Matemática Educativa; (antes del aula)
- la planificación, a través de los planes de clases que diseñan los docentes participantes y los conocimientos que orientan sus actividades y estrategias; (antes del aula)
- la significación, que consiste en la ejecución del plan de clase en el aula y la búsqueda de los significados que le dan los estudiantes a las actividades; (durante el aula)
- la evaluación, en la cual los docentes comparan sus planes con los resultados de la clase, hacen un juicio crítico y de esta manera van progresando y sustentado sus prácticas; (después del aula)

Esto se hace a través de la reflexión y discusión, individual y colectiva; basándose en el currículo y los resultados de investigación y buscando los mejores aprendizajes tanto estudiantiles como docentes.

Los PFDM centrados en prácticas se organizan en coordinación con la escuela donde trabajan los docentes participantes, pues es en el contexto que las prácticas cobran sentido. Para ello las escuelas organizan grupos de apoyo, donde los docentes reflexionan, discuten y transforman sus prácticas en un trabajo de equipo. De esta forma los programas inciden en el desarrollo profesional de los docentes participantes y también en el desarrollo de las escuelas.

Las actividades de los PFDM consisten en talleres diseñados en coordinación con los participantes y con las autoridades de la escuela, en donde se reflexionan y discuten actividades matemáticas, episodios de enseñanza y actividades estudiantiles en primer lugar. Para luego discutir planes de trabajo de los docentes, adaptaciones del currículo, clases reales, e ir de esta forma mejorando paulatinamente las prácticas. Estas fases se representan en la tabla N° 14.

Tabla N° 15. Fases de un PFDM centrado en prácticas

Objetivo: analizar, discutir y sistematizar las prácticas docentes como base para mejorar el desarrollo profesional de los docentes y el desarrollo de la escuela y su proyecto educativo	
FASES	
Fase I: sistematización de experiencias	Los formadores diseñan actividades matemáticas basadas en investigación en Matemática Educativa, diseñan episodios de enseñanza y organizan actividades estudiantiles, en conjunto con los participantes en el programa para <i>reflexionar sobre</i> las acciones de los docentes ante estas actividades.
Fase II: construcción de la base conceptual que orientará las prácticas	Las discusiones sobre las acciones específicas de los docentes cuando trabajan un tema como la iniciación al álgebra generan conocimientos acerca de la propia matemática, de su aprendizaje y su didáctica, y sobre cómo se adapta el currículo a las realidades de su escuela. Por ejemplo, se generan conocimientos sobre cómo los estudiantes resuelven los problemas algebraicos y las dificultades que presentan; sobre distintas estrategias para introducir las ecuaciones; sobre el rol del docente cuando se trabaja construcción de patrones; sobre necesidades extra clases que tienen los estudiantes para mejorar su desempeño en matemáticas. Estas discusiones se reportan, analizándose y generando una base conceptual que orientará las prácticas futuras y que permite <i>reflexionar para</i> la acción.
Fase III: transformación y producción de nuevas prácticas	Tomando en cuenta la base conceptual generada en la fase anterior, los docentes diseñan nuevas actividades de aprendizaje y nuevas estrategias de enseñanza apoyados por los docentes formadores. Se observan clases, se discute con los docentes participantes lo ocurrido durante las mismas, evaluando los cambios y adaptando las actividades a las realidades del aula.

CAPITULO VI

Conclusiones

CAPÍTULO VI. Conclusiones

Acerca de las prácticas docentes inferidas de la investigación sobre Álgebra Educativa

De la investigación en Álgebra Educativa analizada en este estudio se infiere que las nuevas prácticas docentes para trabajar iniciación al álgebra deben partir de un análisis de los distintos usos de la variable, de la construcción de ecuaciones y de los distintos modelos para resolverlas, y de los distintos problemas que apoyan los distintos usos de la variable (*práctica de contextualización en los resultados de investigación, antes de la clase*).

Una vez hecho este análisis, que ubica al docente en los resultados de investigación en el área, el docente *planifica, antes de la clase*, y diseña:

- actividades de aprendizaje que permitan el paso por las fases de observación, verbalización y escritura de patrones que conllevan a la generalización y a la simbolización de situaciones;
- actividades para trabajar los distintos usos de la variable (como número general, como incógnita y como relación funcional), desde la generación de patrones, la construcción y solución de ecuaciones, y la solución de problemas; estas actividades deben considerar el logro de los objetivos de *reconocer*,

interpretar, deducir y simbolizar patrones numéricos, incógnitas y relaciones funcionales.

- actividades con la calculadora para desarrollar el lenguaje y el pensamiento algebraico, para que a través de un trabajo directo del estudiante con el conocimiento algebraico este tenga la necesidad de expresarse.

Aparte de diseñar actividades, el docente también identifica actividades y problemas de distinta naturaleza que permitan generalizar, simbolizar, establecer ecuaciones y funciones. Problemas que van desde aquello que se resuelven aplicando un algoritmo, donde el estudiante tiene que identificar e interpretar la situación para escoger el algoritmo apropiado, hasta problemas donde el estudiante puede llegar a la solución usando distintas estrategias y donde pueden estar involucrados distintos usos de la variable.

Por último, el docente escoge estrategias de enseñanza centradas en el estudiante que permitan que estos se expresen y así desarrollen su lenguaje y su pensamiento algebraico, lo cual supone actos de generalización y abstracción; todo esto para lograr más y mejores resultados de aprendizaje en sus estudiantes sobre iniciación al álgebra.

Para que estas prácticas estén contextualizadas en la escuela, los docentes deben trabajar en grupos y construir bancos de actividades, problemas y estrategias de

enseñanza, ajustadas a las condiciones de su escuela y a los estilos de aprendizaje de sus estudiantes, adaptando así el currículo a su realidad escolar.

Luego de que el docente planifica sus clases, individualmente y con sus colegas, busca en su aula el sentido y los significados que le dan sus estudiantes a sus actividades y estrategias, *durante la clase*, esto a través de:

1. Buscar la verbalización y el desarrollo del lenguaje algebraico, a través de crear una atmósfera cómoda para participar y utilizar los significados estudiantiles.
2. Al trabajar patrones numéricos: guiar la observación de secuencias a través de análisis y comparación, discutir reglas necesarias para preservar patrones, responsabilizar a los estudiantes de sus conjeturas, ayudarlos a enlazar reglas en un contexto determinado y a decidir que constituye una justificación válida. Para luego pasar al registro simbólico en el momento justo.
3. Al trabajar ecuaciones: comenzar con la construcción de las ecuaciones a partir de contextos aritméticos, geométricos y de situaciones reales que permitan desarrollar el uso de la variable como incógnita, y trabajar con distintos modelos de solución de ecuaciones según su grado de dificultad.
4. Al trabajar solución de problemas: hacer énfasis en el uso de distintas estrategias para resolver un problema determinado, donde se puedan utilizar distintos usos de las variables, y modelar la conducta de solución de problemas.

5. Al trabajar con calculadoras, mediar el aprendizaje estudiantil y prestar asistencia técnica.

Luego del trabajo en aula con estudiantes, el docente *evalúa, después de la clase*, el resultado de su plan, por medio de:

- evaluar los aprendizajes estudiantiles en el contexto de la escuela,
- explicar los procesos y resultados de aprendizaje (desarrollo de estrategias de generalización, simbología desarrollada, usos de los modelos de resolución de ecuaciones, desarrollo de estrategias de solución de problemas, desarrollo del lenguaje algebraico a través de la calculadora)

Al docente todo esto le sirve para repensar su didáctica, incorporando los resultados de los aprendizajes estudiantiles a sus nuevas actividades y estrategias de enseñanza.

Si bien es cierto que el trabajo docente es cíclico (antes, durante y después de la clase), el ciclo es ampliable. Esta ampliación se hace a través de la reflexión y transformación constante de las prácticas, las cuales tienen un tiempo de duración pero que tanto los cambios de estudiantes, de currículo y de hallazgos en la investigación educativa la hacen mejorable.

Acerca del rol de las prácticas docentes y de la investigación en Matemática Educativa en los Programas de Formación

En esta tesis se caracteriza a las prácticas docentes como a las acciones intencionadas que lleva acabo el docente, acciones basadas en sus conocimientos producto de la sistematización de su experiencia. Los conocimientos que tienen los docentes son sobre la matemática, su aprendizaje y su didáctica, sobre el currículo de matemática y de los resultados de investigación en matemática educativa. Estas prácticas se desarrollan en el contexto de una escuela y de un currículo específico que las determinan, bien sea por los medios con que cuenta el docente para desarrollar su trabajo, por los libros de textos que le imponen, por el trabajo con sus colegas, etc.

Las prácticas docentes en esta tesis se clasifican como las prácticas antes, durante y después de la clase; las prácticas antes de la clase se refieren a la contextualización y a la planificación de la actividad con estudiantes, las prácticas durante las clases son aquellas donde el docente, en el aula con estudiantes, le busca sentido y significado a las actividades y estrategias que diseñó para que sus estudiantes aprendieran un tema como la iniciación al álgebra; las prácticas después de la clase son aquellas donde el docente reconsidera, analiza y evalúa los resultados de su plan.

De los programas de formación analizados en este trabajo, en el Samuel Robinson va al Liceo las prácticas docentes sirven como base para escoger las actividades a

discutir durante el programa. Del análisis del Samuel Robinson va al Liceo se tiene que:

En el Curso de Didáctica de la Matemática se discutieron actividades propuestas por los docentes, básicamente sobre solución de problemas algebraicos. Las discusiones fueron acerca de los significados que daban los estudiantes a los problemas y su proceso de solución, es decir estuvieron centradas en lo que saben **después de la clase**. A uno de los participantes en el Curso 2004 se le acompañó en el desarrollo de una propuesta didáctica (uso del pizarrón), discutiendo el **antes, durante y después de la clase**.

En el seguimiento al Centro de Reflexión y Actualización del Profesorado se discutieron las prácticas docentes relacionadas con la iniciación al álgebra **durante y después de la clase**, pues los docentes argumentaron cómo abordaban el tema de las ecuaciones y de la solución de problemas algebraicos, y también explicaban las dificultades de sus estudiantes ante estos temas.

Con el docente del 2003 asesorado individualmente se logró discutir su práctica docente **antes y después de la clase**, pues se partió de su plan de acción para desarrollar las habilidades de sus estudiantes al resolver problemas, y luego que él ejecutó su plan se analizaron los resultados obtenidos y se produjeron reflexiones al respecto del rol del docente durante la clase.

El Programa de Actualización Docente centra su atención en las prácticas **durante la clase**, pues se basa en discutir con los docentes participantes en los talleres sus acercamientos a las actividades matemáticas desde distintos puntos de vista (desde la matemática, desde el aprendizaje de las niñas y niños, desde el abordaje didáctico).

En la Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática, no se toman en cuenta las prácticas docentes, la Escuela consiste en la impartición de cursos de tópicos matemáticos pero la experiencia de los docentes no es discutida en los mismos.

En los tres programas de formación analizados es necesaria una mayor sistematización de las prácticas de los docentes, de las experiencias y conocimientos que tienen los docentes y que son aportes valiosos para su formación como conocimientos previos que les permitan hallarle significados a los resultados de investigación en Matemática Educativa que se introducen en los programas de formación. Por otra parte, también es necesario que los programas de formación tomen en cuenta el contexto real de trabajo de los docentes, las escuelas y el currículo oficial de matemática, que les permita integrar las innovaciones de la Matemática Educativa en un contexto real y con sentido para el docente.

La investigación en Matemática Educativa ha servido de base para diseñar algunas actividades matemáticas a discutir con los docentes tanto en el programa Samuel

Robinson va al Liceo como en el Programa de Actualización Docente. En el primero básicamente para discutir el rol de la solución de problemas en el Álgebra Educativa y en el segundo temas relacionados con el concepto de número, operaciones aritméticas y geometría. Sin embargo, no hay suficiente evidencia de cómo los docentes desarrollan sus conocimientos en relación con los resultados de investigación de Matemática Educativa que les permita encontrarle sentido a sus experiencias y poder explicarlas con un marco de referencia como el que actualmente ofrece la investigación en Matemática Educativa.

Los programas de formación docente analizados han logrado que los docentes reflexionen sobre su acción, particularmente después de la clase, pero no existe en ninguno de estos programas una sistematización de las prácticas que permita darle un rol central a la experiencia y al conocimiento del docente y con cuya base el docente pueda reflexionar para la acción, es decir, pueda llevar a cabo sus acciones con una intencionalidad producto de analizar sus experiencias y así producir conocimientos con la Matemática Educativa como referencia.

El docente en servicio es un profesional en desarrollo, y por ello los programas de formación docente deben tomar en cuenta sus aportes analizando sus experiencias, relacionándolas con el currículo oficial y con los resultados de investigación en Matemática Educativa con lo cual se integra una base de conocimientos que toma en cuenta tanto a la investigación, como a la realidad de los docentes y de los sistemas educativos.

Acerca del diseño de un Programa de Formación de Docentes de Matemática (PFDM)

Un Programa de Formación de Docentes de Matemática basado en las prácticas docentes inferidas de la investigación en Álgebra Educativa, diseña actividades de aprendizaje, organiza episodios de enseñanza y actividades estudiantiles relacionadas con: - los distintos usos de la variable, - la construcción y uso de los distintos modelos de solución de ecuaciones, y - la resolución de problemas para trabajar los distintos usos de la variable; con los cuales los docentes participantes en el programa puedan *reflexionar sobre* sus experiencias en estos temas, desde el punto de vista del propio conocimiento matemático, en este caso algebraico, de la didáctica y el aprendizaje del álgebra, y de la adaptación del currículo a su realidad, de manera de lograr más y mejores aprendizaje estudiantiles sobre iniciación al álgebra.

En esta tesis el diseño de un Programa de Formación de Docentes de Matemática (PFDM) tiene tres aspectos esenciales: los objetivos del PFDM, las fases del PFDM y la organización del PFDM.

El **objetivo de un PFDM** centrado en prácticas es que los docentes reflexionen, discutan y expliquen sus prácticas, de manera de transformarlas y producir nuevas prácticas. Estas prácticas incluyen la contextualización con el currículo adaptado a la escuela, y con los resultados de investigación en Álgebra Educativa; la planificación de las actividades con los estudiantes, que incluye diseño e

identificación de actividades de aprendizaje y de estrategias de enseñanza; la ejecución del plan que consiste en la búsqueda de sentido y significados de las actividades y estrategias en su aplicación con estudiantes; y la evaluación de los procesos y los resultados de los aprendizajes estudiantiles .

Para lograr este objetivo el PFDM dispone de tareas de aprendizaje profesional, de episodios de enseñanza y de actividades estudiantiles con las cuales los docentes reflexionan en individual y en colectivo, explican y discuten sus experiencias, y generan conocimientos acerca de cómo los estudiantes de su escuela desarrollan los distintos usos de la variable, construyen y resuelven ecuaciones y problemas, cómo desarrollan su pensamiento algebraico, y cómo adaptar el currículo y la didáctica a estas realidades. Estas tareas de aprendizaje profesional se basan en los resultados de investigación en Matemática Educativa de manera de crear un marco de referencia con el cual los docentes puedan comunicarse y entenderse con sus colegas.

Debido al carácter contextualizado que tienen las prácticas, un PFDM centrado en prácticas se organiza conjuntamente con la escuela, con los directivos y administradores, y con los docentes, con los medios de la escuela, con los docentes organizados en grupos de apoyo, que quieren mejorar su escuela y mejorar como profesionales, que están dispuestos a cambiar.

La **primera fase de PFDM** es la reflexión de las experiencias de los participantes, a través de actividades basadas en resultados de investigación en

Álgebra Educativa, como los reportados en la primera parte de estas conclusiones, que permiten que los docentes confronten sus ideas sobre el álgebra, su aprendizaje, su didáctica y sobre la adaptación del currículo al contexto de su escuela. Esta confrontación de ideas genera, a través de la discusión y clarificación de las mismas, los conocimientos de los docentes sobre el álgebra, su aprendizaje y didáctica; conocimientos que van a servir de base para orientar las nuevas prácticas de los docentes: el diseño de sus actividades de aprendizaje, sus estrategias de enseñanza, su búsqueda de significado con sus estudiantes y su proceso de aprendizaje, su constante evaluación y mejora profesional. El PFDM sistematiza las reflexiones de los docentes a través del análisis de las mismas, usando un instrumento como un portafolio que permite observar todo el proceso de reflexión. Esta sistematización permite organizar los conocimientos de los docentes con un lenguaje común, tomado de la Matemática Educativa, y con los cuales se pueden establecer diálogos entre los colegas, esto constituye la **segunda fase de un PFDM**.

La **tercera fase de un PFDM** constituye la transformación y producción de nuevas prácticas, para lo cual es necesario que previamente el PFDM cuente con espacios para observar las prácticas de los docentes durante la clase y apoyarlos en la producción de nuevas prácticas.

Las observaciones de las prácticas **durante la clase** tienen por objetivo buscar los significados que le dan los estudiantes a las actividades de aprendizaje diseñadas por el docente, cómo estos se aproximan a los contenidos algebraicos,

qué estrategias de aprendizaje utilizan; y también analizar el rol del docente en el aula, y cómo su actuación apoya el desarrollo del pensamiento algebraico del estudiante, aquí el docente *reflexiona en acción*. El apoyo a las prácticas **después de la clase** consiste en la revisión de las actividades de los estudiantes, en buscar comprender cómo ellos aprenden y cómo sus formas de aprendizaje impactan la didáctica del docente y la adaptación del currículo al contexto de la escuela.

Luego de escuchar las *reflexiones sobre la acción* de los docentes y observar las *reflexiones en la acción*, los docentes están en condiciones de *reflexionar para actuar* y transformar sus prácticas (planificar nuevas actividades de aprendizaje y nuevas estrategias de enseñanza, con base a investigación en álgebra educativa; reportar por escrito una clase donde le encuentre significado a su plan, analizar evaluaciones de sus estudiantes para comprender su pensamiento).

El proceso de reflexión sobre, en y para la acción del docente es la herramienta de trabajo fundamental en un programa de formación docente centrado en prácticas, pues esta es la única forma de que se considere los conocimientos generados por los propios docentes. Considerar los conocimientos de los docentes es necesario para que el docente le encuentre significado a lo que hace en un programa de formación y así los resultados de investigación en Matemática Educativa puedan conectarse con lo que él hace y con lo que él conoce.

Referencias bibliográficas

- Acevedo, M., Falk, M. (2000). Formación del pensamiento algebraico de los docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 3(3). 245-264.
- Abdalla, M. (2004). En las redes de la profesión. Resignificando el trabajo docente. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. 9(20). 159-181.
- Adler, J., Ball, D., Honrad, K., Fou-Lai L., Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*. 60, 359-381.
- Aguilar, E. Viniegra, L. (2003). *Atando teoría y práctica en la labor docente*. México: Paidós Educador.
- Aiello, M. (2005). Las prácticas de la enseñanza como objeto de estudio. Una propuesta de abordaje en la formación docente. Recuperado el 21 de febrero de 2007 del sitio Web de La Revista Venezolana de Educación: <http://www.actualizaciondocente.ula.ve/educere/>
- Alves, E. (2002). Programa universitario de formación docente en la escuela a través de la creación de redes telemáticas. Recuperado el 20 de febrero de 2007 del sitio Web de la III Conferencia Internacional sobre Educación, Formación y Nuevas Tecnologías: <http://www.virtualeduca.org/virtualeduca/virtual/actas2002/actas02/278.pdf>
- Amaro, R. (2003a). *Los Centros de Reflexión y Actualización del Profesorado*. Serie Docencia. Cuaderno N° 1. Año 1. Caracas: UCV.
- Amaro, R. (2003b). *Samuel Robinson de Proyecto a Programa*. Caracas: UCV.
- Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis doctoral no publicada. Recuperado el 21 de Febrero de 2007 del sitio Web del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN: <http://www.matedu.cicata.ipn.mx/biblioteca.htm#null>
- Ball, D., Cohen, D. (1999). Developing Practice, Developing Practitioners. Toward a Practice-Based Theory of Professional Education. In *Teaching as the Learning Profession. Handbook of Policy and Practice*. San Francisco: Jossey-Bass.

- Beyer, W. (2006). El Laberinto del Significado: La comunicación en el Aula de Matemáticas. En D. Mora y W. Serrano (Eds.), *Lenguaje, Comunicación y Significado en Educación Matemática*. La Paz: Grupo de Investigación y Difusión en Educación Matemática.
- Cantoral, R., Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 6(1). 27-40.
- Cedillo, T. (1999). *Nubes de puntos y modelación algebraica*. México: Iberoamérica.
- Colén, M. (2001). Detectar las necesidades de formación del profesorado. Un problema de comunicación y de participación. En: *La formación del profesorado*. Barcelona: Grao.
- Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya*. Tesis de maestría no publicada. México: IPN-CINVESTAV.
- Curi, E. (2004). Formación de profesores que enseñan matemáticas: investigación colaborativa, producción y socialización de saberes. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 17(I). México: CLAME.
- Daniels, H., Parrilla, A. (2000) *Creación y Desarrollo de Grupos de Apoyo entre Profesores*. Bilbao: Mensajero.
- Danielson, Ch., Abrutyn, L. (1999). *Una introducción al uso de portafolios en el aula*. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica.
- De Vicente, P. (2000). La formación del profesorado como práctica reflexiva. En L. Villar (Coord.), *Un ciclo de enseñanza reflexiva. Estrategia para el diseño curricular*. Bilbao: Mensajero.
- Doerr, H. (2004). The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities. En K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.). *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12th ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Eslava, M., Valdez, E. (2004). Detección de los modos de razonamiento propiciados por el docente de álgebra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 17(I). México: CLAME.
- Filloy, E. (1999). *Aspectos Teóricos del Álgebra Educativa*. México: Iberoamérica.
- Gamboa, Y. (2007). *Desarrollo del pensamiento algebraico en los planes de estudio de matemática de la Educación Básica, Media Diversificada y Profesional*. Trabajo Especial de Grado no publicado. Caracas: Universidad Central de Venezuela. Facultad de Humanidades y Educación.

- Grupo Azarquiél. (1993). *Ideas y Actividades para enseñar Álgebra*. Madrid: Síntesis.
- Hernández, M., Andonegui, M. (2003). Una experiencia didáctica referente a la introducción del tema Ecuaciones en Educación Básica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 16(1). Chile: CLAME.
- Herrera, R. (2004). Tecnología una concepción general. Recuperado el 03 de septiembre de 2007 del sitio web PÁGINA SOBRE TEMAS DIVERSOS: <http://cariari.ucr.ac.cr/~macalvoh/>
- Imbernón, F. (2001). La formación en los centros educativos: ¿tendencia o moda? En: *La formación del profesorado*. Barcelona: Grao.
- Juárez, J. (2003). La comprensión del concepto de variable en profesores de matemática de secundaria. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 16(2). Chile: CLAME.
- Kendal, M., Stacey, K., Pierce, R. (2005). The influence of a computer algebra environment on teachers' practice. En D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (Eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators*. New York: Springer Science+Business Media.
- Kieran, C. (2004). The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities. En K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12th ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Kieran, C. (2006). Research on the Learning and Teaching of Algebra. En *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Lannin, J. (2003). Developing Algebraic reasoning through generalization. *Mathematics Teaching in the Middle School*. 8(7), 342-348.
- Liston, D. P., Zeichner, K. M. (1993). *Formación del profesorado y condiciones sociales de la escolarización*. Madrid: Morata.
- López, A. Rodríguez, D., Bonilla, M. (2004). ¿Cambian los cursos de actualización las representaciones de la ciencia y la práctica docente? *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. 9(22). 699-719.
- López, J. M: (2000). *Desarrollo Humano y Práctica Docente*. México: Trillas.
- MacGregor, M. (2004). The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities. En K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.). *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12th ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

- Mauri, T., Vilarrubias, P. (2001). Todo lo que se puede formar en la formación de centros. En: *La formación del profesorado*. Barcelona: Grao.
- Mason, J., Gram, A., Pimm, D., Gowar, N. (1985). *Rutas hacia el/Raíces del Álgebra*. Traducción de Cecilia Agudelo Valderrama. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.
- Mason, J. (1999). Incitación al estudiante para que use su capacidad natural de expresar generalidad: Las secuencias de Tunja. *Revista EMA*. 4(3), 232-246.
- Mellado, V. (2001). El estudio de aula en la formación continua del profesorado de ciencias. En: *La formación del profesorado*. Barcelona: Grao.
- Míguez, A., Martín, M. (2006). El Lenguaje Natural en el Aula de Matemáticas. En D. Mora y W. Serrano (Eds.), *Lenguaje, Comunicación y Significado en Educación Matemática*. La Paz: Grupo de Investigación y Difusión en Educación Matemática.
- Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica*. Tesis doctoral no publicada. Recuperado el 21 de Septiembre de 2007 del sitio Web del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN: <http://www.matedu.cicata.ipn.mx/biblioteca.htm#null>
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Recuperado el 15 de Noviembre de 2006 del sitio Web del National Council of Teachers of Mathematics: <http://standards.nctm.org/>
- Papini, M. (2003). Algunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 6(1). 41-71.
- Pestana, N. (2000). Sobre formación docente y su concreción en la práctica. Recuperado el 21 de febrero de de 2007 del sitio Web de La Revista Venezolana de Educación: <http://www.actualizaciondocente.ula.ve/educere/>
- Pestana, N. (2004). La teoría práctica del profesor, punto de partida para la orientación pedagógica en la formación docente. Recuperado el 21 de febrero de de 2007 del sitio Web de La Revista Venezolana de Educación: <http://www.actualizaciondocente.ula.ve/educere/>
- Programa de Perfeccionamiento y Actualización Docente (2004). Seminario Venezolano de Educación Matemática. Recuperado el 21 de febrero de de 2007 del sitio Web de La Revista Venezolana de Educación: <http://www.actualizaciondocente.ula.ve/educere/>

- Radford, L. (2000). Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento. *Educación Matemática*. 12 (1), 51-69.
- Rangel, A. y Ladrón de Guevara, I. (2001). Formación docente para el uso pedagógico de la tecnología. Estrategias y Recursos. Recuperado el 21 de febrero de de 2007 del sitio Web de Psicología online: <http://www.psicologia-online.com/ciopa2001/actividades/40/index.html>
- Schwan, M. (2001). *Practice-Based Professional Development for Teachers of Mathematics*. Reston: NCTM.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan.
- Secretaría UCV (2000) *¿Qué es el Programa Samuel Robinson?* Caracas: UCV.
- Secretaría UCV. (2003). *Samuel Robinson de Proyecto a Programa*. Caracas: UCV.
- Serres, Y. (2004a). *Programa Samuel Robinson va al Liceo: una experiencia de actualización de docentes*. Memorias II Simposio Venezolano de Investigación en Educación Matemática. 6ª Sesión del Seminario Nacional Permanente de Enseñanza de la Matemática. Caracas: UNA.
- Serres, Y. (2004b). Una visión de la comunidad venezolana de educación matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 7(1). 79-108.
- Serres, Y. (2005). Una propuesta para reconstruir el saber didáctico y matemático en un Curso de Actualización Docente. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 17. México: CLAME.
- Serres, Y. (2006). Ejercicios, Problemas y Modelos en la Enseñanza del Álgebra. En R. Cantoral y otros (Eds.). *Investigaciones sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas: Un reporte Iberoamericano*. México: CLAME AC -Díaz de Santos.
- Socas, M., Camacho, M., Palarea, M. Hernández, J. (1996). *Iniciación al Álgebra*. Madrid: Síntesis.
- Socas, M. y Palarea, M. (1997). Las fuentes del significado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar. *Uno Revista de Didáctica de las matemáticas*. 14, 7-24.
- Steinbring, H. (1998). Elements of epistemological knowledge for mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 1: 157-189.

- Torres, L., Calderón, L. (2000). El dominio de la variable: variable didáctica en el álgebra escolar. *Revista EMA*. 5(3), 252-266.
- Torres, L., Valoyes, E., Malagón, R. (2002). Situaciones de generalización y uso de modelos en la iniciación al álgebra escolar. *Revista EMA*. 7(2), 227-246.
- Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del Álgebra Elemental. Una propuesta alternativa*. México: Trillas.
- Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A. Coxford y A. P. Schulte (Comps.) *Ideas of algebra, K-12*. (pp. 8-19). Reston: NCTM.
- Valdez, E. (2001). Los Recursos Didácticos y la Formación Docente. Un punto de vista histórico-cultural. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 14. México: CLAME.
- Valdez, E. (2002). Formación Magisterial. *Enseñanza de la Matemática*. 11(2). 3-12.