MATEMÁTICA
Acta Científica Venezolana, 62 (1-2): 42-44, 2011

DILATACIÓN UNITARIA DE SEMIGRUPOS LOCALES DE CONTRACCIONES

Bruzual, Ramón, Domínguez, Marisela, Padilla Ángel
Escuela de Matemática, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela

Recibido: 12-04-2011

Resumen. Usando técnicas de discretización del parámetro, se da una nueva demostración de que todo semigrupo local de contracciones fuertemente continuo en un espacio de Hilbert separable, posee una dilatación unitaria. En esta demostración se usan técnicas geométricas y no se necesita recurrir al generador infinitesimal del semigrupo. **Palabras claves:** operador unitario, operador de contracción, dilatación, semigrupo de operadores.

UNITARY DILATIONS OF LOCAL SEMIGROUPS OF CONTRACTIONS

Abstract. It is known that a strongly continuous local semigroup of contractions in a separable Hilbert space has a unitary dilation, we give a new proof of this of this result using discretization techniques of the parameter. Our proof uses geometrical techniques and it does not require the infinitesimal generator of the semigroup. **Key words:** Unitary operator, contraction operator, dilation, operator semigroups.

INTRODUCCIÓN

En Bruzual [1] se da una definición de semigrupo local de contracciones y se demuestra que, todo semigrupo local de contracciones en un espacio de Hilbert puede ser extendido a un semigrupo de contracciones en el mismo espacio y, en consecuencia, posee una dilatación unitaria en un espacio de Hilbert más grande.

El estudio de las dilataciones y extensiones de semigrupos locales de contracciones, de semigrupos locales de isometrías y de familias multiplicativas de isometrías ha mostrado ser una herramienta útil en el estudio de distintos problemas de teoría de operadores, análisis armónico y teoría de interpolación (por ejemplo ver [1,2,3]).

En este artículo se da una nueva demostración del resultado ya mencionado de dilatación unitaria de semigrupos locales de contracciones. Esta demostración es más elemental que la dada en [1], utiliza técnicas geométricas y de discretización del parámetro y requiere suponer que el espacio de Hilbert en el que se está trabajando es separable.

La definición de semigrupo local de contracciones es la siguiente:

Definición 1.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Un *semigrupo local de contracciones* en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es una familia $(T_t, \mathcal{H}_t)_{t\in[0,a)}$ tal que:

(a) Para cada $t \in [0,a)$ se tiene que $\mathcal{H}_t$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$.

(b) Para cada $t \in [0,a)$ se tiene que $T_t\colon \mathcal{H}_t \to \mathcal{H}$ es una contracción lineal y $T_0 = I_{\mathcal{H}}$.

(c) Si $x, y \in [0,a)$ y $x < y$ entonces $\mathcal{H}_y \subset \mathcal{H}_x$.

(d) Si $x, y \in [0,a)$ y $x + y \in [0,a)$ entonces $T_y\mathcal{H}_{x+y} \subset \mathcal{H}_x$ y $T_{x+y}h = T_xT_yh$ para todo $h \in \mathcal{H}_{x+y}$.

(e) Si $x, y \in [0,a)$ entonces $\bigcup_{t\in(x,a)} \mathcal{H}_t$ es denso en $\mathcal{H}_x$.

Se dice que el semigrupo local de contracciones $(T_t, \mathcal{H}_t)_{t\in[0,a)}$ es *fuertemente continuo* si para $t_o \in [0,a$ y $h \in \mathcal{H}_{t_o}$ la función $t \mapsto T_th$ de $[0,t_o]$ en $\mathcal{H}$ es continua.

Si $\mathcal{H}$ y $\mathcal{F}$ son espacios de Hilbert y $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ por $P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}$ se denotará la proyección ortogonal de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{H}$.

RESULTADO PRINCIPAL

En lo que sigue $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert separable y $(T_t, \mathcal{H}_t)_{t\in[0,1)}$ es un semigrupo local de contracciones en $\mathcal{H}$.

Se va a demostrar que $(T_t, \mathcal{H}_t)_{t\in[0,1)}$ posee una dilatación unitaria a un espacio de Hilbert que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado (Teorema 5). Es importante destacar que suponer que $a = 1$ no es ninguna restricción, ya que con un simple cambio de variable se puede pasar del caso $a = 1$ al caso general $a > 0$.

Para $t \in [0,1)$ se define $V_t\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ por $V_t = T_tP^{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}_t}$

Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de los racionales diádicos, es decir

$$\mathcal{D} = \left\{\frac{k}{2^n} : \ k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\},$$

donde $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ es el conjunto de los números naturales y $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros.

Para cada $m \in \mathbb{N}$ sea

$$\mathcal{D}_m = \left\{\frac{k}{2^m} : \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

y sean $\mathcal{D}^+ = \{s \in D : \ s \geq 0\}$ y $\mathcal{D}^+_m = \{s \in D_m : \ s \geq 0\}$

Lema 2

Si $m, k \in \mathbb{N}$ y $k < 2^m$ entonces

$$\left(V_{\frac{1}{2^m}}\right)^k \Big|_{\mathcal{H}_{\frac{k}{2^m}}} = T_{\frac{k}{2^m}}$$

Demostración

Se procederá por inducción.

Caso $k = 2$:

Sea $h \in \mathcal{H}_{\frac{2}{2^m}}$. Entonces $h \in \mathcal{H}_{\frac{1}{2^m}}$ y $T_{\frac{1}{2^m}} h \in \mathcal{H}_{\frac{2}{2^m}-\frac{1}{2^m}} = \mathcal{H}_{\frac{1}{2^m}}$, por lo tanto $P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}_{\frac{1}{2^m}}} h = h$ y $P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}_{\frac{1}{2^m}}} T_{\frac{1}{2^m}} h = T_{\frac{1}{2^m}} h$, luego

$$\left(V_{\frac{1}{2^m}}\right)^2 h = \left(T_{\frac{1}{2^m}} P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}_{\frac{1}{2^m}}}\right)\left(T_{\frac{1}{2^m}} P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}_{\frac{1}{2^m}}}\right) h$$

$$= T_{\frac{1}{2^m}} T_{\frac{1}{2^m}} h = T_{\frac{2}{2^m}} h$$

Supóngase que $\left(V_{\frac{1}{2^m}}\right)^k \Big|_{\mathcal{H}_{\frac{k}{2^m}}} = T_{\frac{k}{2^m}}$ y que $k + 1 < 2^m$, sea $h \in \mathcal{H}_{\frac{k+1}{2^m}}$, entonces $h \in \mathcal{H}_{\frac{1}{2^m}}$ y $V_{\frac{1}{2^m}} h = T_{\frac{1}{2^m}} h$, de donde

$$\left(V_{\frac{1}{2^m}}\right)^{k+1} h = \left(V_{\frac{1}{2^m}}\right)^k V_{\frac{1}{2^m}} h = \left(V_{\frac{1}{2^m}}\right)^k T_{\frac{1}{2^m}} h,$$

como $T_{\frac{1}{2^m}} h \in \mathcal{H}_{\frac{k+1}{2^m}-\frac{1}{2^m}} = \mathcal{H}_{\frac{k}{2^m}}$, por la hipótesis de inducción se tiene que

$$\left(V_{\frac{1}{2^m}}\right)^k T_{\frac{1}{2^m}} h = T_{\frac{k}{2^m}} T_{\frac{1}{2^m}} h = T_{\frac{k+1}{2^m}} h$$ y por lo tanto

$$\left(V_{\frac{1}{2^m}}\right)^{k+1} h = T_{\frac{k+1}{2^m}} h .$$

Para $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ se define $V^{(m)} = \left(V_s^{(m)}\right)_{s \in \mathcal{D}_m^+}$ por

$$V^{(m)}_{\frac{k}{2^m}} = \left(V_{\frac{1}{2^m}}\right)^k .$$

Se tiene que $\left(V_s^{(m)}\right)_{s \in \mathcal{D}_m^+}$ es un semigrupo de contracciones.

Proposición 3

La función $F^{(m)}: \mathcal{D}_m \to L(\mathcal{H})$ definida por

$$F^{(m)}(s) = \begin{cases} V_s^{(m)} & \text{si } s \geq 0, \\ \left(V_{-s}^{(m)}\right)^* & \text{si } s < 0, \end{cases}$$

es definida positiva.

Demostración

Considerando el isomorfismo natural entre el grupo $\mathcal{D}_m$ y el grupo de los enteros $\mathbb{Z}$ el resultado se obtiene a partir de lo probado en la Sección 8 del Capítulo 1 del libro [3].

Por la condición (e) de la definición de semigrupo local de contracciones se tiene que $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_{\frac{1}{2^n}}$ es denso en $\mathcal{H}$. Como el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es separable existe un conjunto numerable $\{h_i\}_{i=1}^{+\infty} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_{\frac{1}{2^n}}$ que es denso en $\mathcal{H}$.

Siguiendo un proceso de diagonalización natural se puede encontrar una sucesión creciente de números naturales $\{n_j\}_{j=1}^{+\infty}$ tal que para todo $i, k, m \in \mathbb{N}$ se tiene que la sucesión

$$\left\{V^{(n_j)}_{\frac{k}{2^m}} h_i\right\}_{j=1}^{+\infty} \qquad [1]$$

es débilmente convergente.

Para $i, k, m \in \mathbb{N}$ se define $V^{(o)}_{\frac{k}{2^m}} h_i$ como el límite débil de la sucesión [1]. Es claro que $V^{(o)}_{\frac{k}{2^m}}$ se puede extender a un operador de contracción en $\mathcal{H}$, esta extensión se seguirá denotando por $V^{(o)}_{\frac{k}{2^m}}$.

De que el límite débil de funciones definidas positivas es una función definida positiva, la Proposición 3 y la densidad del conjunto $\{h_i\}_{i=1}^{+\infty}$ sigue que la función $F: \mathcal{D} \to L(\mathcal{H})$ definida por

$$F(s) = \begin{cases} V_s^{(o)} & \text{si } s \geq 0, \\ \left(V_{-s}^{(o)}\right)^* & \text{si } s < 0, \end{cases}$$ es definida positiva

Por el teorema de dilatación de Naimark [3] se tiene que existe un espacio de Hilbert $\mathcal{G}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y una representación unitaria

$(W_s)_{s\in\mathcal{D}}$ de $\mathcal{D}$ en $L(\mathcal{G})$ tal que

$V_s^{(o)} = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}} W_s$ para todo $s \in \mathcal{D}^+$.

Proposición 4

Si $s \in \mathcal{D}^+ \cap [0,1)$ entonces $T_s = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}} W_s|_{\mathcal{H}_s}$.

Demostración

Basta notar que, por el Lema 2 se tiene que

$T_s = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}} W_s|_{\mathcal{H}_s}$ para $s \in \mathcal{D}^+ \cap [0,1)$.

Teorema 5.

Existe un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y una representación unitaria fuertemente continua $(U_s)_{s\in(-\infty,+\infty)}$ de $\mathbb{R}$ en $\mathcal{F}$ tal que

$$T_t = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}} U_t|_{\mathcal{H}_t} \text{ para } t \in [0,1).$$

Demostración

Sea $\mathcal{F}$ el subespacio cerrado generado por $\{W_s h : s \in \mathcal{D}, h \in \mathcal{H}\}$ y U_s la restricción de W_s a $\mathcal{F}$, entonces $(U_s)_{s\in\mathcal{D}}$ es una representación unitaria de $\mathcal{D}$ en tal que

$$T_s = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}} U_s|_{\mathcal{H}_s} \qquad [2]$$

para todo $s \in \mathcal{D}^+ \cap [0,1)$.

El conjunto

$$\left\{U_s h : s \in \mathcal{D}, h \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_{\frac{1}{2^n}}\right\} \text{es denso en } \mathcal{G}.$$

De este último hecho, de la continuidad fuerte de $(T_t, \mathcal{H}_t)_{t\in[0,a)}$ y de la Proposición 4 se deduce que $(U_s)_{s\in\mathcal{D}}$ es fuertemente continua en 0 y por lo tanto uniformemente fuertemente continua en todo $\mathbb{R}$.

De la condición de continuidad que satisface $(U_s)_{s\in\mathcal{D}}$ se deduce que (U_s) se puede extender a una representación unitaria fuertemente continua de $\mathbb{R}$ en $\mathcal{F}$, que se denotará por $(U_s)_{s\in(-\infty,+\infty)}$.

De la continuidad del semigrupo local y la igualdad [2] se deduce que

$$T_t = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}} U_t|_{\mathcal{H}_t} \text{ para todo } t \in [0,1).$$

REFERENCIAS

1. **Bruzual, R.**;, *Local semigroups of contrations and some applications to Fourier representation theorems*. Int. Eq. and Op. Theory, **10:** 780-801, 1987.
2. **Bruzual, R.; Domínguez, M.** Dilation of generalized Toeplitz kernels on ordered groups *Journal of Functional Analysis* **238:** 405-426, 2006.
3. **Sz.-Nagy, B. ; Foias, C.** Harmonic analysis of operators on Hilbert space, North Holland Publishing Co, Amsterdam, 1970.

Correspondencia: Ramón Bruzual, Apartado Postal 47686, Caracas 1041-A, Venezuela.

Correo electrónico: ramonbruzual@gmail.com, ramon.bruzual@ciens.ucv.ve