

## **TRABAJO DE GRADO**

# **MODELO DE CONVECCIÓN FORZADA EN FLUIDOS ALTAMENTE VISCOSOS: APLICACIÓN AL ENFRIAMIENTO DE UN MOTOR DE UN SISTEMA BES.**

Presentado ante la Ilustre  
Universidad Central de Venezuela  
por el Ingeniero Químico.  
**Andrés Emilio Rosales Chinchilla**  
para optar al título de  
Magister Scientiarum  
en Ingeniería Química

Caracas, marzo de 2008

# TRABAJO DE GRADO

## MODELO DE CONVECCIÓN FORZADA EN FLUIDOS ALTAMENTE VISCOSOS: APLICACIÓN AL ENFRIAMIENTO DE UN MOTOR DE UN SISTEMA BES.

TUTOR ACADÉMICO: Prof<sup>a</sup>. Mary Luz Alonso

Presentado ante la ilustre  
Universidad Central de Venezuela  
por el Ingeniero Químico.  
**Andrés Emilio Rosales Chinchilla**  
para optar al título de  
Magister Scientiarum  
en Ingeniería Química

Caracas, marzo 2008

## **APROBACIÓN DEL TUTOR**

El suscrito, Tutor designado por el Consejo de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Central de Venezuela, hace constar que ha revisado el contenido y la forma de este Trabajo de Grado, y que ha dado su autorización para que sea defendido ante el jurado por el autor.

Profa. Mary Luz Alonso, Tutor Académico

---

Fecha



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
COMISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO.

VEREDICTO

Quienes suscriben, Miembros del Jurado designado por el Consejo de la Facultad de Ingeniería y por el Consejo de Estudios de Postgrado de la Universidad Central de Venezuela, para examinar el Trabajo de Grado, presentado por el INGENIERO **Andrés Emilio Rosales Chinchilla**, portador de la Cédula de Identidad 12.721.640, bajo el título:

"MODELO DE CONVECCIÓN FORZADA EN FLUIDOS ALTAMENTE VISCOSOS: APLICACIÓN AL ENFRIAMIENTO DE UN MOTOR DE UN SISTEMA BES", a los fines de cumplir el requisito legal para optar al título de Magíster Scientiarum en Ingeniería Química, dejan constancia de los siguiente:

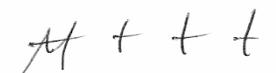
1.- Leído como fue dicho trabajo por cada uno de los Miembros del Jurado, éste fijó el día 14 de marzo de 2008 a las 7am., para que el autor lo defendiera en forma pública, lo que éste hizo en el salón 126 de la Escuela de Ingeniería Química, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual respondió satisfactoriamente a las preguntas que le fueron formuladas por el Jurado; todo conforme a lo dispuesto en los Artículos 45, 49, 50, 51 y 52 del Reglamento de Estudios de Postgrado.

2.- Finalizada la defensa pública del trabajo, el Jurado decidió **aprobarlo** por considerar, sin hacerse solidario de las ideas expuestas por el autor, que se ajusta a lo dispuesto y exigido en el Reglamento de Estudios de Postgrado.

Para dar este veredicto, el Jurado estimó que la obra examinada representa un aporte en el área de transferencia de calor por convección forzada, especialmente cuando el fluido considerado es muy viscoso, como por ejemplo crudos extrapesados, ya que en la bibliografía especializada no se dispone de suficientes correlaciones para este tipo de fluidos en donde la viscosidad varía exponencialmente con la temperatura.

En fe de lo cual se levanta la presente Acta, a los catorce días del mes de marzo de dos mil ocho, dejándose también constancia de que, conforme a lo dispuesto en la normativa jurídica vigente actuó como Coordinadora del Jurado la Profesora Mary Luz Alonso

  
Prof. Dosinda González  
Jurado

  
Prof. Miguel Villegas  
Jurado

  
Prof. Mary Luz Alonso  
Coordinadora-Tutora Académica

## **Agradecimientos**

Hay muchas personas a quien agradecer numerosas sugerencias, correcciones y estímulo para que este trabajo hoy pueda estar culminado.

Estoy muy agradecido a la profesora **Mary Luz Alonso** de la **Escuela de Ingeniería Química de la UCV** por la lectura, sugerencias y correcciones del trabajo.

También le estoy muy agradecido al profesor **Julio Segura** de la **Escuela de Ingeniería Mecánica de la UCV** por sus comentarios y su orientación en la profundización del tema abordado en este trabajo.

Agradezco especialmente a los profesores **José Ángel Sorrentino, Humberto Kum, Trino Romero, Luís García** y demás profesores de la **Escuela de Ingeniería Química de la UCV**, por su estímulo y apoyo en el arduo trabajo que se necesitó para culminar este escrito.

También le agradezco a la Universidad Central de Venezuela donde realicé este trabajo y a PDVSA-Intevep donde comencé con las ideas del mismo.

Finalmente el trabajo necesario para realizar esta Tesis fue muy distinto gracias al apoyo y aliento de mi esposa.

**Andrés E. Rosales C.**

Rosales C., Andrés E.

**MODELO DE CONVECCIÓN FORZADA EN FLUIDOS  
ALTAMENTE VISCOSOS: APLICACIÓN AL ENFRIAMIENTO  
DE UN MOTOR DE UN SISTEMA BES.**

**Tutor Académico: Prof<sup>a</sup>. Mary Luz Alonso**

**Tesis de Maestría. Caracas, U.C.V. Facultad de Ingeniería. Escuela de  
Ingeniería Química. Año 2007, 168 p.**

**Palabras Claves:** Elevados número de Prandtl, viscosidad en función de la  
temperatura, análisis integral aproximado de la capa límite térmica.

**Resumen.** El fenómeno de transferencia de calor por convección forzada ha sido ampliamente estudiado dada las muchas aplicaciones en ingeniería. Para el caso de fluidos altamente viscosos existen muchas aplicaciones en Venezuela dadas las grandes reservas de crudos pesados y extrapesados; como caso particular en este trabajo se estudió el enfriamiento del motor de un sistema BES.

En el presente trabajo de grado se desarrolló un modelo con solución analítica aproximada que permite simular la convección forzada para geometrías cartesianas y cilíndricas, en flujos monofásicos, incompresibles, altamente viscosos con elevado número de Prandtl y con variación exponencial de la viscosidad con la temperatura. El modelo se obtuvo a partir de las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía, y se delimitó a flujo en estado estacionario, régimen laminar, fluido Newtoniano junto a las condiciones límites de temperatura constante en el fluido de entrada y en la pared de calentamiento, conjuntamente con flujo dinámicamente desarrollado a la entrada de la zona de calentamiento. A la formulación diferencial obtenida de las ecuaciones fundamentales delimitada a las condiciones mencionadas, se le aplicó un análisis de orden de magnitud descartándose la ecuación de movimiento en la dirección radial, los términos convectivos de la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección axial, el término difusivo axial de calor en la ecuación de energía y la generación de calor viscosa, obteniéndose un modelo con un número reducido de términos en las ecuaciones diferenciales fundamentales.

Para resolver dichas ecuaciones, se supuso en la zona de calentamiento el flujo de dos fluidos, análogo al de un flujo bifásico, donde el espesor de la capa límite limita la región de calentamiento cerca de la superficie, la cual se comporta como un fluido de viscosidad diferente. Al considerar el efecto bifásico y tomando en cuenta que la capa límite varía levemente con la longitud axial, las ecuaciones se simplificaron y se normalizaron al definir una variable combinada, obteniéndose que el número de Nusselt es función del número de Graetz, y del parámetro B, éste es el logaritmo de la relación entre la viscosidad del fluido a la temperatura entrada ( $\mu_0$ ) y la viscosidad del fluido a la temperatura de pared de calentamiento ( $\mu_w$ ), B,  $B=\ln(\mu_0/\mu_w)$ . Esta

formulación matemática toma en cuenta los cambios radiales y axiales en los perfiles de esfuerzo, velocidad, temperatura que existen cuando la viscosidad varía. Para obtener del modelo una solución analítica aproximada, se supuso un perfil de temperatura adimensional polinómico, el cual permitió desacoplar la ecuación de cantidad de movimiento de la de energía (se usó la analogía de Blasius) cuya solución (se usó el programa de cálculo simbólico Maple) da información sobre los perfiles de esfuerzo, velocidad, temperatura y del número de Nusselt como función del número de Graetz y del parámetro B.

La solución analítica aproximada se obtuvo para el caso de geometría cartesiana, y al representar gráficamente los perfiles antes mencionados se observó que éstos cambian en la medida que se avanza en la zona de calentamiento, y dichos cambios son mayores cuando aumenta el parámetro B, presentándose una alta discrepancia de los perfiles calculados con modelos más simple que suponen que las propiedades físicas son constantes para mismo número de Graetz.

Al representar el perfil de esfuerzo se obtuvo que el esfuerzo aplicado en la pared de calentamiento es menor que el que se calcula del modelo más simple (fluido con igual número de Graetz y propiedades físicas constantes), esta disminución es significativa para altos valores del parámetro B, lo cual implica que la disminución significativa de la viscosidad del fluido en la pared de calentamiento afecta directamente al esfuerzo de corte y en consecuencia al estar el esfuerzo directamente relacionado con el gradiente de presión, la caída de presión que se calcula del modelo propuesto en este trabajo es menor. Al representar el número de Nusselt en función del número de Graetz y del parámetro B, se obtuvo que los valores predichos por el modelo de este trabajo son mayores que los calculados con un modelo que considera que las propiedades físicas son constantes. Sin embargo al compararse con la ecuación de Sieder y Tate se observó una buena concordancia cuando la relación entre la viscosidad del fluido a la temperatura de entrada y la viscosidad del fluido a la temperatura de pared es menor que quince,  $< 15$ , esto es para valores del parámetro B menores que 3,  $B < 3$ .

Se recomienda estudiar aplicaciones de convección forzada en fluidos altamente viscosos (experimentos físicos o numéricos), para limitar y ajustar el modelo propuesto en este trabajo a un intervalo donde existan aplicaciones prácticas. Se proponen mejoras al sistema BES y posibles aplicaciones en el transporte y procesamiento de crudos pesados.

# Índice

	<b>Pág.</b>
Dedicatoria	v
Agradecimientos	vi
Resumen	vii
Lista de tablas y figuras	xiii
INTRODUCCIÓN.....	1
CAPÍTULO I SISTEMA BES Y TRANSFERENCIA DE CALOR EN EL MOTOR.....	7
1.1. Sistema de bombeo electrosumergible (BES): descripción, funcionamiento y aplicaciones.....	8
1.2 Efecto de enfriamiento del motor BES.....	10
1.3 Vida útil del motor de BES.....	11
1.4. Factores que afectan a la temperatura de operación del motor BES.....	13
1.4.1 Transferencia de calor entre la superficie del motor y el flujo que lo rodea.....	13
1.4.2 Eficiencia de un motor de un sistema BES.....	15
CAPITULO II PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA, OBJETIVOS Y METODOLOGÍA.....	19
2.1 Antecedentes.....	20
2.2 Planteamiento del problema.....	24
2.3 Objetivos.....	25
2.3.1 Objetivo General.....	25
2.3.2 Objetivos Específicos.....	25
2.4 Metodología.....	26
CAPITULO III MARCO REFERENCIAL.....	28
3.1 Estudios con bancos de pruebas en un laboratorio de sistemas BES.....	29
3.2 Transmisión de calor por convección forzada para régimen viscoso y monofásico.....	32
3.3 Coeficiente de transmisión de calor por convección.....	34
3.4 Longitud de entrada hidrodinámica y térmica.....	36
CAPITULO IV FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL MODELO.....	41
4.1 Análisis diferencial.....	44
4.1.1 Ecuaciones de variación en notación vectorial.....	45
4.1.2 Ecuaciones de variación en coordenadas cilíndricas.....	46

4.1.3	Análisis de orden de magnitud.....	47
4.1.3.1	Análisis de orden de magnitud a la ecuación de continuidad.....	48
4.1.3.2	Análisis de orden de magnitud a la ecuación de movimiento.....	48
4.1.3.3	Análisis de orden de magnitud a la ecuación de energía.....	49
4.1.4	Modelo propuesto para simular la transferencia de calor a un fluido altamente viscoso.....	50
4.2	Adimensionalización de las ecuaciones diferenciales obtenidas en el análisis diferencial.....	51

## CAPITULO V MODELO CON SOLUCIÓN ANALÍTICA APROXIMADA...55

5.1	Descripción física y teórica.....	56
5.2	Efecto bifásico.....	59
5.3	Análisis diferencial: Perfiles de esfuerzo, velocidad y temperatura y su dependencia espacial de las coordenadas radial (r) y axial (z).....	60
5.3.1	Ecuación de cantidad de movimiento (perfil de esfuerzo dimensional).....	62
5.3.2	Ecuación de cantidad de movimiento y ley de Newton de la viscosidad (Ecuaciones para obtener el perfil de velocidad) .....	63
5.3.2.1	Viscosidad adimensional.....	64
5.3.3	Ecuación de energía y ecuación de continuidad (capa límite térmica $\delta T$ ).....	65
5.3.3.1	Método integral de Von Kármán .....	65
5.4	Modelo simplificado, normalización y Números adimensionales.....	66
5.5	Caudal, caída de presión y calor total intercambiado.....	69
5.5.1	Flujo volumétrico adimensional.....	69
5.5.2	Gradiente de presión adimensional.....	70
5.6	Número de Nusselt y coeficiente de transmisión de calor por convección h.....	70
5.7	Temperatura media de flujo, $T_b$ , en forma adimensional, $\Theta_b$ .....	73

## CAPITULO VI SOLUCIÓN ANALÍTICA DEL MODELO Y

	DISCUSIÓN DE RESULTADOS.....	76
6.1.	Soluciones analíticas para geometrías simples.....	76
6.1.1	Solución del modelo en placas paralelas.....	78
6.2	Perfil de esfuerzo adimensional.....	79
6.3	Perfil de velocidad adimensional.....	82
6.4	Perfil de velocidad adimensional en variable de similitud, usando un perfil de temperatura lineal.....	84
6.5	Perfil de velocidad adimensional en variable de similitud, usando un perfil de temperatura cuadrático.....	85
6.6.	Cálculo del gradiente de presión usando resultados de los perfiles de velocidad obtenidos suponiendo perfil aproximado de	

temperatura lineal.....	87
6.7 Cálculo del gradiente de presión usando resultados de los perfiles de velocidad suponiendo perfil aproximado de temperatura cuadrático (análogo al caso 6.6).....	93
6.8 Perfil de esfuerzo adimensional en variable de similitud, con perfil de temperatura lineal.....	94
6.9 Perfil de esfuerzo adimensional en variable de similitud, con perfil de temperatura cuadrático, usando única constante adimensional.....	99
6.10 Perfiles de velocidad adimensional en variable de similitud o variable combinada, con perfil aproximado de temperatura lineal.....	100
6.11 Perfiles de velocidad adimensional en variable de similitud o variable combinada, con perfil aproximado de temperatura cuadrático (análogo a la sección 6.10).....	105
6.12 Perfil de temperatura media de mezcla y número de Nusselt local: Caso propiedades físicas constantes.....	106
6.13 Perfil de temperatura media de mezcla, y número de Nusselt local: caso viscosidad función de la temperatura y perfil lineal de temperatura...	111
6.14 Perfil de temperatura media de mezcla, y número de Nusselt local: caso viscosidad función de la temperatura y perfil cuadrático de temperatura.....	114
6.15 Número de Graetz a partir de perfil de temperatura lineal, cuadrático y cúbico, usando perfil de velocidad de propiedades físicas constantes....	116
6.16 Número de Nusselt como función del número de Graetz, para el perfil lineal, cuadrático y cúbico, caso propiedades físicas constantes.....	119
6.17 Número de Graetz a partir de perfil de temperatura lineal y cuadrático, usando perfil de velocidad obtenido con viscosidad en función de la temperatura.....	121
6.18 Número de Nusselt como función del número de de Graetz, para el perfil de temperatura lineal, cuadrático, con viscosidad función de la temperatura. ....	126
6.19 Número de Nusselt promedio como función del número de Graetz, caso propiedades constantes y de propiedades variables.....	128
 CAPITULO VII CONCLUSIONES.....	135
CAPITULO VIII RECOMENDACIONES.....	139
BIBLIOGRAFÍA.....	141
APENDICES.....	146
A. Correlación de Sieder y Tate de consideraciones teóricas.....	149
B. Solución grafica del problema de Graetz Nussel para placas planas....	150
C. Modelo aproximado, ampliación y detalle del modelo.....	151

## Lista de figuras

**pag**

Fig.1.1.1 Sistema de levantamiento artificial por Bombeo Electrosumergible.....	9
Fig.1.2.1. a) Efecto de refrigeración en el motor BES. b) Camisa de refrigeración...	11
Fig. 1.3.1 Vida estimada de los motores como función de la temperatura de operación y clase de material del aislante del devanado del rotor.....	13
Fig. 1.4.1. Vista superior del motor de BES. Se muestran las incrustaciones.....	14
Fig. 1.4.2. Variables que afectan el efecto de refrigeración y la temperatura operativa en los motores BES.....	15
Fig.1.4.3. Curva de comportamiento típica para los motores BES, se presentan las variables de operación de mayor importancia en función del % de carga del motor(100% carga= Corrientes de Placa).....	16
Fig.1.4.4. Efecto de diferentes voltajes por fase a) Balanceados b) Desbalances para un motor trifásico de un sistema BES.....	17
Fig. 3.1.1 Incremento de la temperatura en el motor (°F) sobre la temperatura del fluido exterior al motor, como función de la velocidad media y calor específico del fluido exterior.....	30
Fig. 3.3.1. Perfiles de velocidad y temperatura correspondiente a un fluido que circula sobre una superficie caliente (superficie libre).....	35
Fig. 3.3.2. Perfil de velocidad y temperatura correspondiente a un fluido que circula sobre un conducto caliente en la región de entrada.....	36
Fig. 3.4.1 Región de entrada y región de flujo desarrollado para un flujo interno; capa límite hidrodinámica.....	37
Fig. 3.4.2. Capa límite térmica y perfil completamente desarrollado.....	38
Fig. 3.4.3. Rango del número de Prandtl para varios fluidos (Bejan A., 1995).....	38
Fig. 3.4.4. Perfil de velocidad y temperatura en la región de entrada para fluidos viscosos.....	39
Fig 4.1.1. Representación física del motor, del flujo anular y del anillo circular al que se aplican las ecuaciones diferenciales de transporte.....	44
Fig. 4.1.2. Representación física del fenómeno de transferencia de calor entre el motor BES y un crudo pesado.....	50
Fig. 5.1.1 Descripción física basada en la teoría de transferencia de calor por convección.....	58
Fig. 5.2.1. Región de calentamiento y efecto bifásico.....	59
Fig. 5.3.1. Perfiles de esfuerzo, velocidad y temperatura como función de $r$ y $\delta_T$ .....	61
Fig. 6.1.1 Flujo interno en un tubo, y sus perfiles.....	77
Fig. 6.1.2 Flujo interno entre placas paralelas, ancho mayor que alto y sus perfiles.....	77
Fig. 6.2.1 Modelo para placas planas.....	78
Fig. 6.6.1. Comportamiento del gradiente de presión en la zona de calentamiento en función del parámetro adimensional B. Perfil de temperatura lineal.....	92
Fig. 6.6.2 Comportamiento del gradiente de presión en la zona de calentamiento. Parámetro B=10. Perfil aproximado de lineal.....	93
Fig. 6.7.1 Comportamiento del gradiente de presión en la zona de	

calentamiento. Perfil de temperatura cuadrático.....	94
Fig. 6.8.1 Comportamiento del esfuerzo cortante en la medida que se avanza en la zona de calentamiento. Parámetro $B=1$ , $y_i=1$ es el centro del conducto. Perfil de temperatura lineal.....	96
Fig. 6.8.2 Comportamiento del esfuerzo de corte en la medida que se avanza en la zona de calentamiento. Parámetro $B=8$ . Perfil lineal de temperatura.....	97
Fig. 6.8.2 Comportamiento del esfuerzo de corte en la medida que se avanza en la zona de calentamiento. Parámetro $B=10$ . Perfil lineal de temperatura.....	98
Fig. 6.9.1. Comportamiento del esfuerzo cortante en la medida que se avanza en la zona de calentamiento. Parámetro $B=1$ . Perfil cuadrático de temperatura .....	100
Fig. 6.10.1 Deformación del perfil de velocidad. Parámetro $B=1$ . Perfil aproximado de temperatura lineal.....	103
Fig. 6.10.2 Deformación del perfil de velocidad. Parámetro $B=10$ . Perfil aproximado de temperatura lineal.....	104
Fig. 6.11.1 Deformación del perfil de velocidad. Parámetro $B=5$ . Perfil aproximado de temperatura cuadrático.....	105
Fig. 6.12.1. Numero de Nusselt local en función del radio de espesor de capa límite térmica adimensional $\Delta$ : Caso propiedades físicas constantes.....	107
Fig. 6.12.2. Número de Nusselt, corrección de constantes puras de los modelos, para eliminar discrepancias respecto del caso obtenido del perfil cúbico.....	110
Fig. 6.13.1. Número de Nusselt local, caso viscosidad variable, en función del espesor de capa límite adimensional. Perfil de Temperatura lineal. $B=0.1$ .....	104
Fig. 6.15.1. Comportamiento del espesor de capa límite térmica, modelo de propiedades constantes. Perfiles de temperatura lineal, cuadrático y cúbico.....	117
Fig. 6.15.2 Comportamiento del espesor de capa límite térmica. Caso propiedades físicas constantes. Ajustes en las constantes puras.....	118
Fig. 6.16.1 Numero de Nusselt. Modelo de propiedades constante. Perfiles de temperatura lineal, cuadrático y cúbico.....	120
Fig. 6.16.2 Numero de Nusselt local como función del número de Graetz. Modelo de propiedades constantes. Perfiles de temperatura lineal, cuadrático y cúbico. Constantes puras con ajuste.....	121
Fig. 6.17.1. Comportamiento de la capa límite como función del número de Graetz. Caso viscosidad función de la temperatura y caso cúbico de propiedades constantes. Parámetro $B=0.1$ .....	123
Fig. 6.17.2. Comportamiento del espesor de la capa límite como función del número de Graetz. Caso viscosidad función de la temperatura y caso cúbico de propiedades constantes. Parámetro $B=0.1$ . Ajuste.....	124
Fig. 6.17.3. Comportamiento del espesor de la capa límite como función	

del número de Graetz. Caso viscosidad función de la temperatura y caso cúbico de propiedades constantes. Parámetro B=5.....	125
Fig. 6.17.4. Comportamiento del espesor de la capa límite como función del número de Graetz. Caso viscosidad función de la temperatura y caso cúbico de propiedades constantes. Parámetro B=10.....	126
Fig. 6.18.1 Numero de Nusselt local como función del número de Graetz y del parámetro B. Parámetro B=0.1 .....	127
Fig. 6.18.2 Numero de Nusselt local. Caso viscosidad función de la temperatura. Perfiles de temperatura lineal, cuadrático. Parámetro B=5. Caso cúbico de propiedades constantes. Rango mayor para el Nusselt....	128
Fig. 6.19.1 Número de Nusselt promedio como función del número de Graetz. Caso propiedades constantes. Perfiles de temperatura lineal, cuadrático, cúbico y correlación de Sieder y Tate.....	131
Fig. 6.19.2 Número de Nusselt promedio como función del número de Graetz y del parámetro B. Caso viscosidad función de la temperatura. Perfiles de temperatura lineal, cúbico y correlación de Sieder y Tate. Parámetro B=0.1.....	132
Fig. 6.19.3 Número de Nusselt promedio como función del número de Graetz y del parámetro B. Caso viscosidad función de la temperatura. Perfiles de temperatura lineal, cúbico y correlación de Sieder y Tate. Parámetro B=3.....	133

---

---

## INTRODUCCIÓN

---

---

---

## INTRODUCCIÓN

La gran mayoría de los yacimientos venezolanos se encuentran agotados o con bajas presiones, por lo que un gran porcentaje de los pozos productores venezolanos utilizan algunos de los métodos de levantamiento artificial. Dentro de las alternativas disponibles y con gran importancia se encuentra el Sistema de Bombeo Electrosumergible (BES), el cual consiste en una bomba acoplada a un motor eléctrico que introducidos en el pozo levantan altos volúmenes de fluido desde grandes profundidades (Submersible Pump Handbook, 1995).

Uno de los problemas que se presentan con el uso del sistema BES con crudos pesados y en pozos profundos y/o calientes, es el daño severo en los motores debido a sobrecalentamiento, PDVSA S.A, ha reportado este tipo de daño (Manzanilla, R., Moreno, N., y Yáñez, R., 1997).

El problema ha sido parcialmente resuelto con la colocación de una camisa de refrigeración. Ésta consiste de una carcasa cilíndrica concéntrica al motor que disminuye el área transversal anular, aumentando la velocidad del fluido a través de la superficie del motor, mejorando así la transferencia de calor entre el motor BES y el fluido que lo circunda. La camisa de refrigeración ha sido exitosa al mejorar el efecto de refrigeración del motor BES, sin embargo este efecto es limitado con el uso de crudo pesado ya que la reducción del área de flujo aumenta significativamente la caída de presión a través del sistema, liberándose gas con la expansión, lo que aumenta las fallas en la bomba por cavitación (Submersible Pump Handbook, 1995).

El mecanismo de transferencia de calor entre una superficie y un fluido en movimiento por fuerzas externas se sitúa dentro de la categoría de convección

---

forzada. De consideraciones teóricas, se ha demostrado que es posible obtener correlaciones para calcular las condiciones de temperatura y caída de presión al que se somete el fluido y la superficie, las cuales dependen de las propiedades del fluido (viscosidad, densidad, conductividad térmica, y calor específico), del régimen de flujo (laminar, turbulento, multifásico) y de la geometría del sistema, sin embargo los resultados obtenidos usando métodos aproximados, están limitados a geometrías simples y propiedades físicas constantes o ligeramente variables (Bird R., Stewart W., Lightfoot E., 2006; ver apéndice A y B).

Algunos trabajos experimentales realizados con agua y aceite como fluido para estudiar el efecto de refrigeración en el motor del sistema BES muestran que la elevación de temperatura en el motor depende fuertemente de la velocidad del fluido a través del espacio anular motor-revestidor, lo que explica el uso de la camisa de refrigeración y es deducido de consideraciones teóricas. Sin embargo, estos trabajos tomaron en cuenta sólo a la capacidad calorífica como propiedad física crítica, por lo que para crudo pesado o fluidos viscosos su aplicación no es recomendada (Submersible Pump Handbook, 1995).

En términos generales el propósito del presente trabajo de grado es el desarrollo de un modelo basado en los principios fundamentales o ecuaciones diferenciales de continuidad, de cantidad de movimiento y energía y su solución analítica aproximada, para estudiar el mecanismo de transferencia de calor por convección forzada en fluidos altamente viscosos, y el gradiente de presión al que se somete el flujo de fluido, cuando la viscosidad es fuertemente dependiente de la temperatura; como caso particular se estudia el efecto de refrigeración entre un crudo pesado y el motor de un sistema BES al someterse a condiciones severas de operación (pozos profundos o calientes, y fluidos viscosos).

---

El modelo considera flujo laminar en estado estacionario, con propiedades físicas constantes a excepción de la viscosidad, la cual se considera función exponencial de la temperatura, en un conducto (flujo anular, flujo interno entre placas paralelas, y flujo en tubería como caso particular) horizontal o vertical, donde un caudal volumétrico de líquido fluye bajo la influencia de una diferencia de presión y de la fuerza de gravedad; conocido el caudal (o la caída de presión), la temperatura del fluido a la entrada y el calor transferido desde la pared del motor al fluido (o la temperatura de la pared), junto a condiciones de frontera de no deslizamiento y condiciones de simetría que apliquen es posible especificar completamente el problema.

El presente informe está estructurado en ocho capítulos. El primer capítulo está consagrado tanto a la descripción de los elementos componentes del sistema BES, como a la descripción del fenómeno de transferencia de calor por convección forzada que ocurre entre el motor y el fluido bombeado a superficie, evento necesario para el enfriamiento del motor. Se presenta particular atención a los factores que afectan significativamente al efecto de refrigeración del motor, esto es a su eficiencia y en general al fenómeno de transferencia de calor por convección forzada, tomando en cuenta que esta información generalmente no se profundiza, o se presenta de manera aislada en diversos libros de texto.

En el capítulo dos se presentan los antecedentes, el planteamiento del problema desarrollado en este trabajo de grado, se establecen los objetivos y una breve descripción de la metodología de estudio que se utiliza.

El tercer capítulo presenta una revisión de las diferentes referencias en el estudio del mecanismo de enfriamiento del sistema BES, y de las principales referencias bibliográficas en el área de transferencia de calor por convección forzada

---

En el capítulo cuatro se formula el modelo matemático para transferencia de calor por convección forzada en flujo interno para geometrías planas y cilíndricas, agregando varias hipótesis simplificadoras: flujo laminar, flujo incompresible, de propiedades constantes, a excepción de la viscosidad la cual se considera función exponencial de la temperatura. Conocido el caudal (o la caída de presión), la temperatura del fluido a la entrada y el calor transferido desde la pared del motor al fluido (o la temperatura del fluido en la pared de calentamiento) se especifica completamente el problema

En el capítulo quinto el modelo formulado en el capítulo cuatro, en combinación con la teoría de la capa límite, es simplificado y normalizado. Sin embargo es importante resaltar que bajo la suposición de perfiles de temperatura semejantes, propuesto por Blasius, se puede suponer un perfil polinómico de temperatura que permite obtener un modelo con solución analítica aproximada para el perfil de esfuerzo, velocidad y temperatura (Bird, et al, 2006).

En el capítulo sexto, aprovechando las ventajas del sistema computacional Maple, se presenta la solución detallada de las ecuaciones diferenciales que representan el modelo matemático y se presenta la discusión de los resultados que pueden ser calculados del modelo. Al conocer el perfil de velocidad, es posible determinar el caudal, ya que el caudal se puede relacionar con el gradiente de presión, conocido el caudal se puede determinar el gradiente de presión. De igual forma al conocer el perfil de temperatura, es posible determinar el calor transferido, ya que el calor transferido se puede relacionar con la temperatura de la pared de la superficie de calentamiento, conocido el calor se puede determinar dicha temperatura de pared. En este proceso se muestra como el modelo concuerda con los resultados de la bibliografía obtenidos para fluidos de propiedades constantes y con poca variación de la viscosidad con la temperatura. Esto permite validar los resultados.

---

En el capítulo séptimo se culmina el estudio con las conclusiones que se refieren a la estructura del modelo matemático, a la metodología aplicada y a los resultados obtenidos.

Las recomendaciones del capítulo octavo contienen sugerencias para futuros trabajos de investigación en esta área.

---

---

**CAPÍTULO I**

**SISTEMA BES Y TRANSFERENCIA DE CALOR EN EL MOTOR**

---

---

---

## CAPÍTULO I

### SISTEMA BES Y TRANSFERENCIA DE CALOR EN EL MOTOR

El conocimiento del sistema BES y del fenómeno de transferencia de calor por convección forzada allí presente, es importante para la comprensión del modelo de simulación que se va a desarrollar. En este capítulo se describen los elementos que conforman el sistema BES, y el efecto de enfriamiento que se modela en este trabajo. De igual forma se presenta una introducción a la convección forzada, para conectar el caso de estudio con la ciencia o teoría de la dinámica de fluidos y la transferencia de calor.

#### **1.1.- Sistema de bombeo electrosumergible (BES): descripción, funcionamiento y aplicaciones.**

La recuperación de crudo es aquella tecnología donde se utiliza energía natural del yacimiento o energía adicional para la extracción del petróleo a través de los pozos productores.

La energía o fuerza disponible depende principalmente de la presión natural del yacimiento. De la magnitud de la presión depende si el petróleo fluye naturalmente con fuerza hasta la superficie o si por el contrario la presión es solamente suficiente para que el petróleo llegue hasta cierto nivel en el pozo (Barberii, E.E. 1985).

---

La gran mayoría de los yacimientos venezolanos se encuentran agotados y/o con bajas presiones, por lo que un gran porcentaje (>90%) de los pozos productores venezolanos utilizan algunos de los **métodos de levantamiento artificial** y/o recuperación mejorada con el objeto de extraer el crudo remanente en el subsuelo.

Dentro de las alternativas disponibles de recuperación por levantamiento artificial y con gran importancia actualmente en la industria petrolera (>30% de los pozos) está el sistema BES (Bombeo Electrosumergible), el cual consiste de una bomba acoplada a un motor eléctrico que introducidos en el pozo levantan altos volúmenes de fluido desde grandes profundidades, ver figura 1.1.1

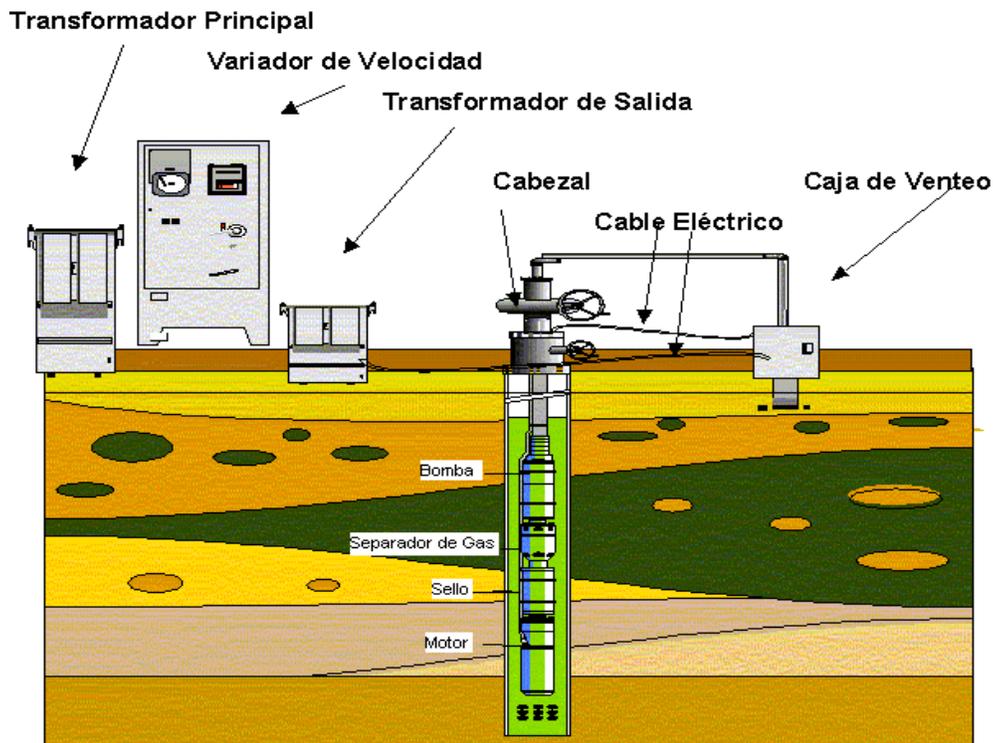


Fig.1.1.1 Sistema de levantamiento artificial por Bombeo Electrosumergible.

El equipo de subsuelo es el corazón de un sistema BES, se encuentra sumergido en el pozo y es el encargado de impulsar el fluido hasta la superficie. Consta de una

---

bomba, un separador de gas, un protector o sello, un sensor, el motor el cual es eléctrico (El motor Electrosumergible es un motor de inducción trifásico con rotor tipo jaula de ardilla) y el cable de potencia trifásico, como se indica en la figura 1.1.1. La energía eléctrica es suministrada desde la superficie y su potencia es controlada para hacer de BES un sistema flexible y eficiente. Los equipos de superficie consisten de un transformador de alimentación principal, un variador de frecuencia y un transformador de alimentación secundario, como se muestra en la figura 1.1.1. (Barberii, E.E. 1985).

### **1.2- Efecto de enfriamiento del motor BES.**

Uno de los problemas que se presentan con el uso del sistema BES con crudos pesados y en pozos profundos y/o calientes, es el daño severo en los motores debido a sobrecalentamiento. La energía eléctrica provista al motor se convierte en potencia y pérdidas como una función de la eficiencia del motor, las pérdidas en el motor se traducen en calor, el cual es transferido al fluido por convección al pasar por el espacio anular entre el motor y el revestimiento o casing del pozo, ver figura 1.2.1.

El problema ha sido parcialmente resuelto con la colocación de una camisa de refrigeración, como se muestra en la figura 1.2.1b. Ésta consiste de una carcasa cilíndrica que disminuye el área transversal anular, aumentando la velocidad del fluido a través de la superficie del motor, mejorando así la transferencia de calor entre el motor BES y el fluido que lo circunda. La camisa de refrigeración ha sido exitosa al mejorar el efecto de refrigeración del motor BES, sin embargo este efecto es limitado con el uso de crudo pesado ya que la reducción del área de flujo aumenta significativamente la caída de presión a través del sistema, liberándose gas con la expansión, lo que aumenta las fallas en la bomba por cavitación.

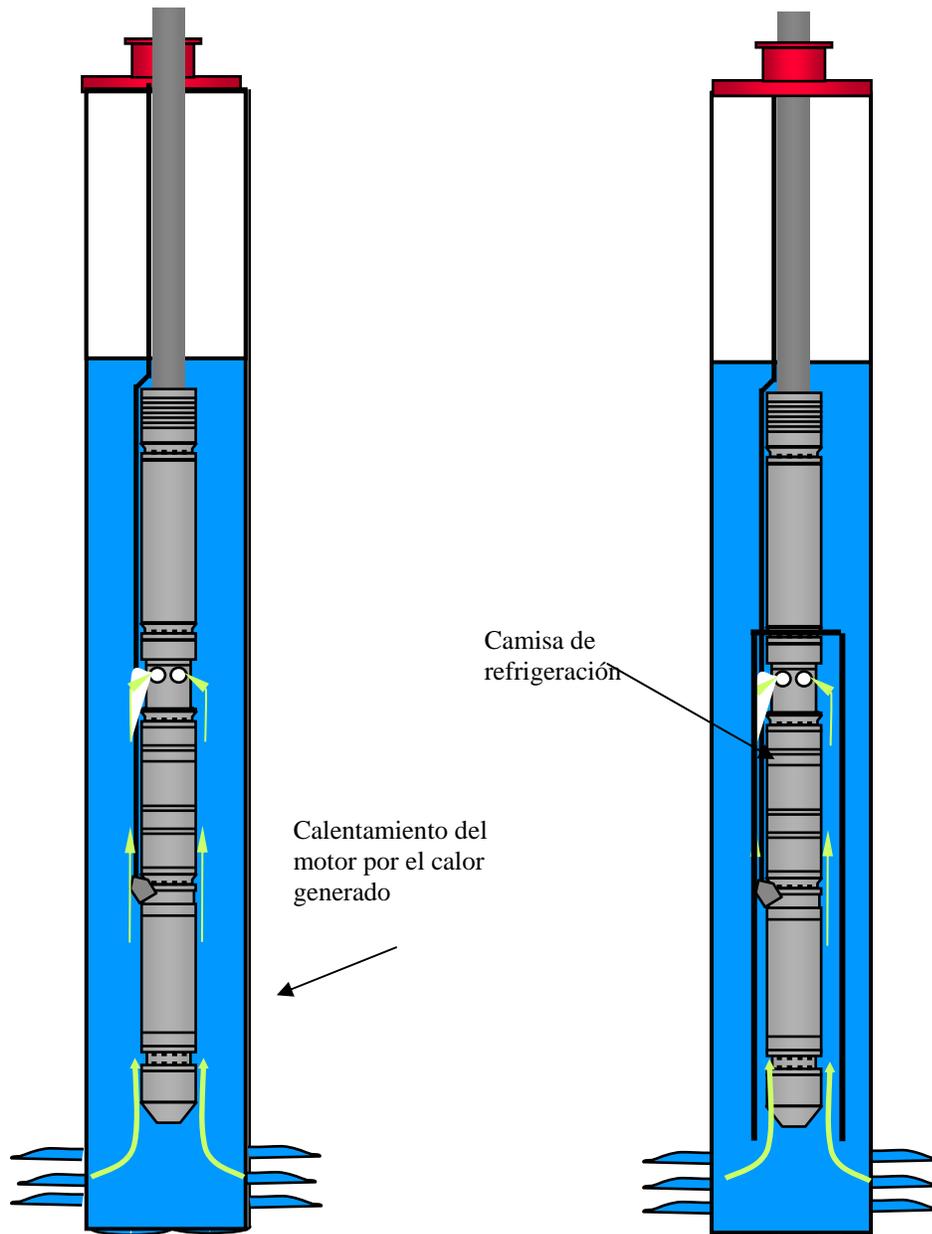


Fig.1.2.1. a) Efecto de refrigeración en el motor BES. b) Camisa de refrigeración.

### 1.3- Vida útil del motor BES

La vida operativa de los motores depende de dos factores primordiales: (1) la resistencia dieléctrica del aislamiento del devanado del rotor y (2) su durabilidad

---

mecánica. En ambos se ocasiona un deterioro directo producto de la temperatura. La temperatura del aislamiento del devanado del motor debe mantenerse dentro de parámetros normales de operación.

Es común decir como regla nemotécnica que el tiempo necesario para fallar un aislamiento es reducido a la mitad por cada 10 °C (18 °F) que se incremente la temperatura arriba de su condición normal de operación (ampliamente difundido en el Standard NEMA para Motores y Generadores), ver fig 1.3.1 (Submersible Pump Hamdbook, 1995). La vida promedio de un motor BES es de 2 años a temperatura de operación en el devanado del motor por debajo de 180 °C. Esta temperatura se conoce como crítica y ningún sistema de bombeo electrosumergible debe ser diseñado para operar a condiciones más severas.

Los materiales aislantes son típicamente clasificados con base en su habilidad a mantener la resistencia dieléctrica y la integridad mecánica bajo exposición continua a una temperatura específica. Las compañías que suministran el sistema de bombeo electrosumergible usan solo materiales de clase “H” o mejores para el aislamiento en sistemas eléctricos en fondo. Para calificar como un material “H”, un aislamiento debe mostrar cierta dureza y resistencia y operar a temperatura máxima de 180 °C (356 °F), ver Tabla. 1.3.1.

Tabla N° 1.3.1. Materiales de construcción para el devanado del motor. (Submersible Pump Hamdbook, 1995)

<b>CLASE</b>	<b>Temp Max °F</b>
A	221
B	266
F	311
H	356

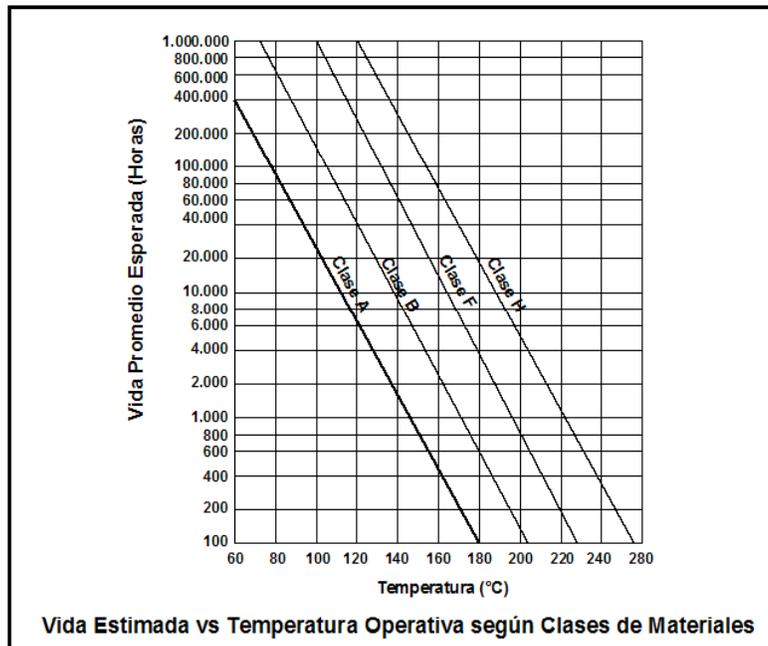


Fig. 1.3.1 Vida estimada de los motores como función de la temperatura de operación y clase de material del aislante del devanado del rotor. (Submersible Pump Hamdbook, 1995)

#### 1.4. Factores que afectan a la temperatura de operación del motor BES

En el sistema BES la temperatura de operación del motor se afecta por:

- A) El mecanismo de transferencia de calor convectivo entre la superficie del motor y el flujo anular motor-casing (revestidor).
- B) Hay pérdidas en forma de calor en el motor que dependen de su eficiencia.

Ampliando la información sobre el mecanismo de transferencia de calor y su eficiencia se obtiene una visión general del problema.

##### 1.4.1 Transferencia de calor entre la superficie del motor y el flujo anular:

El mecanismo de transferencia de calor entre una superficie y un fluido en movimiento por fuerzas externas se sitúa dentro de la categoría de convección forzada.

---

El perfil de temperatura al que se somete el fluido y la superficie depende de las propiedades del fluido, de las propiedades del flujo y/o régimen de flujo y su geometría las cuales pueden enumerarse como: Ver fig 1.4.2.

A) Propiedades del fluido: viscosidad, densidad, conductividad térmica, y calor específico.

B) Régimen o patrón de flujo: laminar, turbulento, multifásico.

C) Geometría: anular en el motor BES.

Otro factor que debe tomarse en cuenta son las incrustaciones de sólidos (carbonatos) que precipitan en el fluido y se adhieren a la carcasa del motor aumentando la resistencia a la transferencia de calor disminuyendo el efecto de refrigeración. Esto efecto se representa en la figura 1.4.1. En este trabajo no se toma en cuenta incrustaciones y el flujo a estudiar está en régimen laminar.

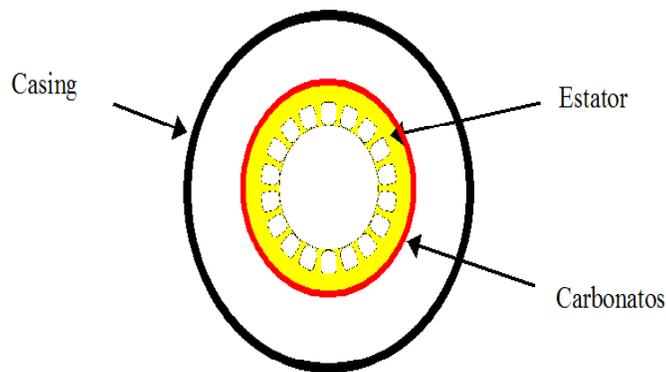


Fig. 1.4.1. Vista superior del motor de BES. Se muestra las incrustaciones.

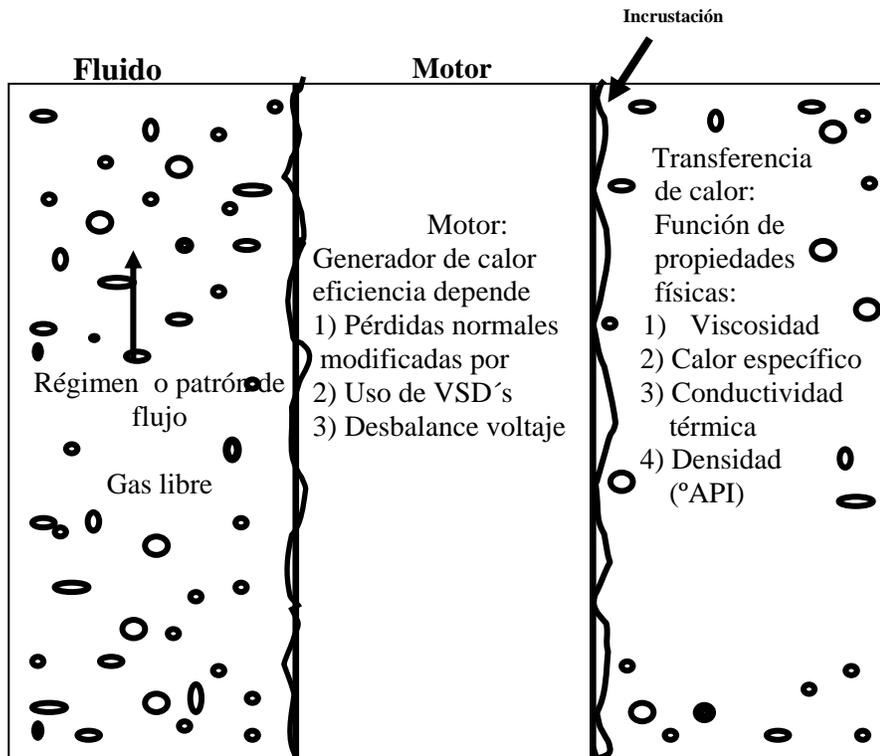


Fig. 1.4.2. Variables que afectan el efecto de refrigeración y la temperatura operativa en los motores BES.

#### 1.4.2. Eficiencia de un motor de BES.

Las pérdidas del motor se obtienen tomando en cuenta los siguientes factores, los cuales pueden ser calculados usando información suministrada por el fabricante.

A.1) Eficiencia normal del motor: Ésta se obtiene usando las curvas típicas de comportamiento del motor las cuales dependen de la carga del motor (corrientes o potencia que entra al motor), suministradas por el fabricante (ver fig. 1.4.3).

A.2) Desbalance de voltaje: la eficiencia normal del motor disminuye por efecto de un desbalance en los voltajes de entrada. El motor es trifásico, y las fases deben estar balanceadas (igual tensión o muy pequeña diferencia <5%) (ver fig. 1.4.4).

**Curva Típica Comportamiento Motor TR5 a 60**

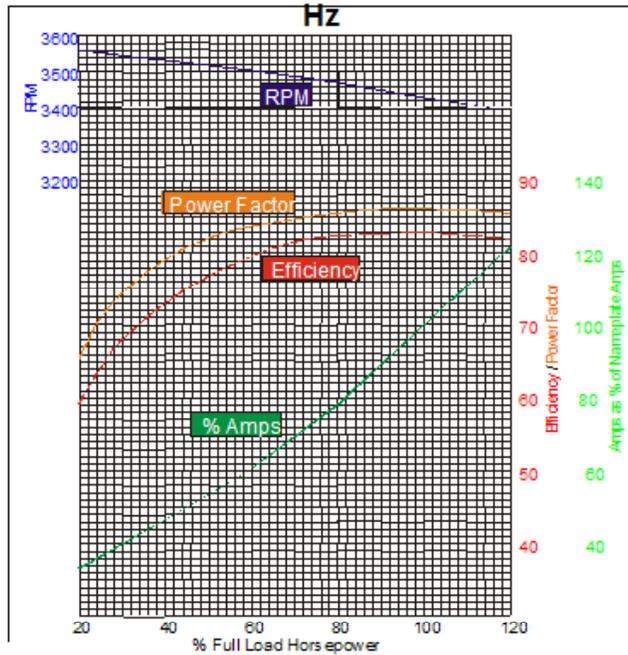


Fig.1.4.3. Curva de comportamiento típica para los motores BES, se presentan las variables de operación de mayor importancia en función del %de carga del motor (100% carga= Corrientes de Placa). (Submersible Pump Hamdbook, 1995)

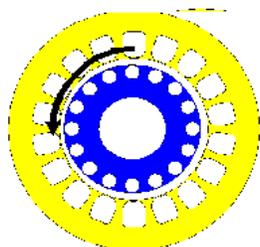
Según el estándar Nema el % de desbalance de fases de voltajes se calcula (Submersible Pump Hamdbook, 1995):

$$\%Desbalance = \frac{Valor..mas..alejado}{Pr omedio} * 100$$

La tabla 1.4.1 muestra como aumentan las pérdidas de calor con relación a un motor operando en condiciones de 0% de desbalance de voltaje. También toma en cuenta el % de desbalance de corriente

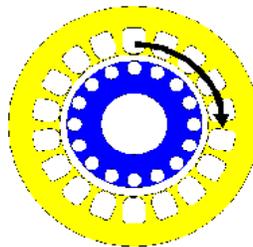
En la figura 1.4.4, se muestra la representación del comportamiento del motor operando en condiciones fuera de parámetros normales, se observa que se produce un torque en la dirección contraria al movimiento deseado producto del desbalance de los voltajes en las fases que alimentan la energía eléctrica al motor.

Los desbalances de voltaje y corriente se subdividen en dos campos magnéticos.



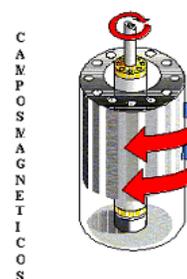
**Rota en la dirección deseada y se transfiere al rotor. Sin desbalances, es el único campo magnético a través del motor.**

a) Fases balanceadas



**Rota en la dirección opuesta y trata de llevar el motor en la dirección incorrecta. Pequeño e magnitud, pero torque negativo reduce el torque positivo.**

b) Fases desbalanceadas



C  
A  
M  
P  
O  
S  
M  
A  
G  
N  
E  
T  
I  
C  
O  
S

Fig.1.4.4. Efecto de diferentes voltajes por fase a) Balanceados b) Desbalanceados para un motor trifásico de un sistema BES.

La tabla 1.4.1 muestra resultados de un estudio amplio de motores BES.

Tabla1. Estudio sobre un universo de Motores (Submersible Pump Hamdbook, 1995).

% Desbalance Voltaje	% Desbalance Corriente	% Calor Promedio del Motor
0	0	100
1	4	100.26
2	7.9	101.06
3	13.8	102.34
4	15.6	104.15
5	19.4	106.5
10	39.2	126.33
20	43.8	215.65

---

A.3) Uso del variador de frecuencia (VSD's ver fig.1): Este equipo se utiliza para modificar la velocidad del motor, y modificar la capacidad de la bomba a través de la frecuencia de alimentación de la energía eléctrica. El variador de frecuencia disminuye la eficiencia del motor por formación de armónicos (ondas con voltajes y frecuencias diferentes a la frecuencia fundamental o requerida, producto de que el variador no entrega una señal senoidal pura).

Los variadores de frecuencia presentan algunas de las siguientes desventajas.

- .- Distorsión armónica y efectos en los sistemas de distribución eléctrica
- .- Los motores se recalientan debido a las corrientes armónicas

El fabricante suministra la información necesaria para estimar la disminución de la eficiencia o aumento en las pérdidas en el motor.

---

---

## **CAPÍTULO II**

### **ANTECEDENTES, PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA, OBJETIVOS Y METODOLOGÍA**

---

---

---

## CAPÍTULO II

### ANTECEDENTES, PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA, OBJETIVOS Y METODOLOGÍA

#### 2.1. Antecedentes.

En el sistema BES la predicción de la temperatura de operación del motor se realiza tomando en cuenta las pérdidas en el motor y el fenómeno de transferencia de calor entre el motor y el fluido que lo circunda. Para la descripción del fenómeno de transferencia de calor existe una correlación gráfica empírica desarrolladas a partir de condiciones experimentales tomadas de bancos de prueba para sistemas BES, cuyos fluidos de trabajo fueron agua y aceite (Submersible Pump Handbook). Dicha correlación gráfica sólo toma en cuenta el calor específico y la velocidad media a través del motor BES. Adicionalmente para la predicción de la temperatura de un motor BES, y de forma general, para estudiar la convección forzada, se usan correlaciones tomadas de la bibliografía abierta en el área de transferencia de calor que toman en cuenta las propiedades físicas del fluido, pero dichas correlaciones (algunas empíricas) fueron desarrolladas para fluidos de propiedades físicas constantes o ligeramente variables, lo que trae errores importantes cuando en la transferencia de calor participan fluidos altamente viscosos con variación importante de la viscosidad con la temperatura (Submersible Pump Handbook; Bird R., et al, 2006).

---

Los modelos para transferencia de calor convectiva han sido ampliamente estudiados dada las muchas aplicaciones de ingeniería, sin embargo es necesario mencionar que uno de los trabajos que sentaron las bases del fenómeno de transferencia de calor por convección forzada aparecen con la publicación de Graetz L., en 1883 (según Bird R., et. al., 2006). El problema describe los perfiles de temperatura para el flujo en un tubo cuando la temperatura de la pared del tubo cambia bruscamente de un valor determinado a otro también fijo, es decir, que el perfil de la temperatura de la pared es una función escalonada. Graetz consideró flujo laminar en estado estacionario y dinámicamente desarrollado, con propiedades físicas constantes, en un tubo horizontal o vertical, donde un caudal volumétrico de líquido o gas fluye bajo la influencia de una diferencia de presión y de la fuerza de gravedad. Conocida la diferencia de presión, la temperatura del fluido a la entrada y la temperatura de la pared del tubo en la zona de calentamiento, determinó los perfiles de velocidad y temperatura, el flujo volumétrico a través del tubo y el calor intercambiado en la zona de calentamiento (ver apéndice B2). La solución analítica de Graetz es difícil de usar, y está limitada a fluidos con propiedades físicas constantes. Una solución analítica aproximada (solución asintótica, válida en la región de entrada) para el problema de Graetz obtenida por Leveque J., en 1928 (según Bird R., et. al., 2006; ver apéndice A1), para régimen laminar, mostró que la transferencia de calor por convección forzada puede ser calculada mediante correlaciones simples, como función de las propiedades del fluido (viscosidad, densidad, conductividad térmica, y calor específico), del régimen de flujo y de la geometría. Más notable es el trabajo hecho por Sieder E., y Tate G. en 1935 (según Bird R., et. al., 2006), los cuales han propuesto una modificación de la correlación obtenida por Leveque, agregando un término que toma en cuenta la variación de la viscosidad con la temperatura, demostrando que el cambio de la viscosidad con la temperatura es un parámetro crítico en fluidos viscosos y/o régimen laminar. Estas correlaciones ampliamente usadas tienen hasta un 20% de error y fueron desarrolladas para tuberías y no se recomienda su uso para fluidos altamente viscosos y con variación importante de la viscosidad con la temperatura. Es importante resaltar

---

la utilidad práctica de la solución aproximada de Leveque y/o Sieder y Tate, ya que a diferencia de la solución de Graetz, su manipulación es simple y el error máximo que se obtiene está permitido en los cálculos de ingeniería.

La teoría de la capa límite propuesta por Prandtl en 1905 (según Welty J., 1999) permitió resolver diversos problemas del transporte de cantidad de movimiento y energía por convección. De esta teoría se interpreta, para el caso de un flujo de fluido sobre una superficie caliente, que debido a que la temperatura más alta está en la superficie de calentamiento, y la más baja está en el fluido lejos de la zona de calentamiento, la temperatura debe disminuir con la distancia hasta el espesor de la capa límite térmica,  $\delta_T$ , donde la temperatura se hace prácticamente igual a la del fluido exterior, este razonamiento está implícito en la teoría de capa límite de Prandtl (ecuaciones de capa límite de Prandtl). Blasius en 1908, planteó (según White F. 2004) que este comportamiento sería análogo a lo largo del eje axial, y resolvió las ecuaciones de capa límite de Prandtl, para propiedades físicas constantes. Von Kármán en 1921 (según Schlichting, 1979) propuso para el perfil de velocidad y temperatura una función polinómica de la variable combinada con la coordenada perpendicular a la placa,  $y$ , y del espesor de capa límite,  $\delta_T$ , consiguiendo una solución aproximada al usar las ecuaciones de capa límite en forma integral (forma integral de Von Kármán de las ecuaciones de capa límite de Prandtl). Este valor de  $\delta_T$ , debe ser determinado mediante el balance integral de energía, bajo la condición de que todo el calor que penetra al fluido está contenido dentro de la región de capa límite térmica (ver Shames I, 1995). Lighthill, M. J., en 1950 (según Bird R., 2006) estudió la convección forzada externa laminar a lo largo de una lámina plana calentada. La metodología que usó consistió en resolver la ecuación diferencial de energía usando un perfil aproximado para la velocidad en función de la variable combinada (usó la función polinómica propuesta por Von Kármán) y obteniendo una solución aproximada para fluidos de propiedades físicas constantes (solución asintótica para números de Prandtl elevados), similar (sin usar variable combinada) al procedimiento usado por Leveque en 1928 (resolvió la ecuación de energía para un

---

perfil de velocidad aproximado en la zona de entrada), para obtener una solución aproximada (solución asintótica) al problema de Graetz (ver anexo A1). Acrivos A., en 1960, amplió la metodología anterior (resolver la ecuación diferencial de energía usando el perfil aproximado de velocidad propuesto por Von Kármán, en función de la variable combinada) manipulando la ecuación de energía, de tal forma de incluir el efecto de las propiedades dependientes de la temperatura en flujo externo. La mencionada metodología ha sido extendida para estudiar la convección forzada en flujo externo tridimensional estacionario a números de Prandtl elevados con propiedades físicas constantes, por Stewar W. E., en 1963 (según Bird R., 2006).

En un reciente estudio Srbislav B., Branislav M., y Bojan J., (2006) presentan resultados de investigaciones experimentales para la convección en fluidos altamente viscosos, con viscosidad dependiente de la temperatura, pero limitado a número de Prandtl menor a dos mil ( $Pr < 2000$ ). Trabajos recientes muestran que la convección forzada en fluidos altamente viscosos pueden ser estudiados numéricamente: Jiang-Tao Liu, Xiao-Feng Peng, Wei-Mon Yan (2006) presentan soluciones teóricas, soluciones numéricas que toman en cuenta la variación de la viscosidad con la temperatura para fluidos con Prandtl menor a mil ( $Pr < 1000$ ). Sin embargo las mayores reservas de crudo y una parte importante de la producción de petróleo de la industria petrolera de Venezuela, tiene un elevado número de Prandtl,  $Pr > 2000$  (Manzanilla, R., et al 1997) por lo que es importante estudiar casos de elevados número de Prandtl,  $Pr > 2000$ .

Por lo anteriormente expuesto en este trabajo de grado se desarrolla un modelo con solución analítica aproximada (solución asintótica para fluidos altamente viscosos), para estudiar la convección forzada en flujo interno a elevados números de Prandtl ( $Pr \gg 1$ ), con fuerte dependencia de la viscosidad con la temperatura.

---

## 2.2 Planteamiento de trabajo de Grado:

En términos generales el propósito del presente trabajo es el desarrollo de un modelo matemático y su solución analítica aproximada para estudiar el fenómeno de transferencia de calor por convección en flujo interno, en fluidos viscosos, con viscosidad que varía exponencialmente con la temperatura. El modelo se formula a partir de las ecuaciones de conservación de la masa, la cantidad de movimiento y la energía. Considerando flujo laminar en estado estacionario, en un conducto (flujo anular, flujo entre placas paralelas, flujo en tuberías como caso particular) horizontal o vertical, donde un líquido conocido fluye bajo la influencia de un gradiente de presión y de la fuerza de gravedad.

Mediante algunas consideraciones teóricas, de un análisis de orden de magnitud, y teniendo como datos principales el caudal de líquido circulante y el calor intercambiado en el sistema (calor liberado por el motor de BES), y como incógnitas el caída de presión y la temperatura a la que se somete el motor, se obtendrán las ecuaciones diferenciales simplificadas, junto a sus condiciones límites de no deslizamiento, temperatura de pared y de entrada constante, flujo dinámicamente desarrollado a la entrada, cuyos resultados podrán ser expresados en función de parámetros característicos y números adimensionales propios del fenómeno que se está estudiando. Como la viscosidad es función de la temperatura las ecuaciones obtenidas para el modelo estarán acopladas. Utilizando la analogía de Blasius, una variable combinada, y una función polinómica del perfil de temperatura como función de dicha variable combinada, se podrá obtener de forma analítica (solución aproximada y solución asintótica para altos números de Prandtl), los perfiles de esfuerzo, velocidad y temperatura. A través de dichos perfiles se podrá obtener el gradiente de presión (conocido el caudal) a través del conducto y la temperatura de la pared de calentamiento (que será la temperatura a la que estará sometida la superficie del motor, conocido el calor intercambiado por el motor y el flujo de fluido).

---

## **2.3.- Objetivos**

### **2.3.1. Objetivo General:**

Desarrollar un modelo con solución analítica aproximada para estudiar la transferencia de calor por convección forzada en flujo interno, en fluidos altamente viscosos, en geometrías simples, planas y/o cilíndricas tomando en cuenta cambios exponenciales de la viscosidad con la temperatura.

### **2.3.2- Objetivos Específicos**

1. Precisar los principios fundamentales y establecer las ecuaciones fundamentales necesarias para describir la convección forzada en fluidos altamente viscosos, para geometrías cilíndricas y cartesianas.
2. Delimitar genéricamente el modelo a desarrollar, clasificando de forma general el flujo a estudiar (estacionario, laminar, etc.)
3. Realizar un análisis de orden de magnitud a la formulación matemática del fenómeno de interés.
4. Especificar los condiciones límite del problema, tomando en cuenta que para el caso de interés es conocido el caudal que circula por el conducto, la temperatura de entrada al fluido y el calor intercambiado, y como incógnitas está el gradiente de presión y la temperatura de superficie de calentamiento.
5. Normalizar el modelo y establecer los parámetros adimensionales que describen la convección forzada en fluidos altamente viscosos.
6. Usar la teoría de capa límite térmica y la semejanza geométrica de los perfiles de temperatura propuesto por Blasius, para obtener una suposición de dichos perfiles.
7. Estudiar la geometría canal rectangular como alternativa para simular el efecto de la geometría de flujo anular presente en el problema real.

- 
8. Determinar el efecto de la variación de la viscosidad con la temperatura sobre las ecuaciones del modelo a desarrollar.
  9. Comparar el modelo con datos experimentales de la bibliografía, y con modelos desarrollados para condiciones similares.

#### **2.4. Metodología de estudio:**

El presente trabajo de grado se realizará usando la siguiente metodología:

- i.- Sobre la base de los fenómenos de transporte presentes en dicho proceso se determinará cuales son los principios fundamentales que se deben aplicar para describir la transferencia de calor por convección forzada en flujo interno, en fluidos altamente viscosos.
- ii.- Formulación matemática utilizando las ecuaciones fundamentales en su forma diferencial, y partir de ellas se determinarán los parámetros físicos y los números adimensionales involucrados en el fenómeno.
- iii.- Clasificación genérica del fenómeno de flujo de convección forzada (estacionario, laminar, geometrías cilíndricas, cartesianas etc.), tomando en cuenta que se quiere estudiar los fluidos altamente viscosos, flujo interno, de tal manera de obtener una primera simplificación de la formulación matemática inicial.
- iv.- Se establecerán postulados sobre la base de la intuición y experiencia en los fenómenos de flujo (flujo simétrico respecto a un eje, etc.) para simplificar aun más la formulación del modelo.
- v.- Se realizarán estudios de orden de magnitud, para descartar términos poco importantes o despreciables.

---

vi.- Se normalizará el modelo matemático, definiendo una variable combinada (teoría avanzada de similitud), imponiendo condiciones de fronteras que representan el fenómeno de interés (condición de no deslizamiento, temperatura de pared y de entrada constante, flujo dinámicamente desarrollado a la entrada, propiedades físicas constantes a excepción de la viscosidad la cual es función exponencial de la temperatura), de ello se obtendrá un modelo altamente simplificado y ajustado al fenómeno, y además permitirá obtener parámetros adimensionales involucrados.

vii.- Se postularán simplificaciones al modelo planteado, usando la teoría de capa límite y la analogía de Blasius para obtener perfiles aproximados de temperatura (métodos simplificadores) y a su vez un modelo con solución analítica aproximada (solución asintótica a altos números de Prandtl).

viii.- Se resolverá el modelo, para el caso de geometría cartesianas ya que en la bibliografía abierta es posible encontrar datos sobre el fenómeno de interés. Se usará un programa comercial de cálculo simbólico por computadora.

ix.- Se compararán los resultados de la presente investigación con datos experimentales y/o numéricos, seleccionados de la bibliografía abierta o literatura especializada.

---

---

**CAPÍTULO III**  
**MARCO DE REFERENCIA**

---

---

---

## CAPÍTULO III

### MARCO DE REFERENCIA

La transferencia de calor es una ciencia muy amplia y en la actualidad existe información en la literatura abierta sobre el fenómeno de transferencia de calor por convección forzada. En el presente trabajo se pretende dar una visión de la convección forzada limitada a flujos estacionarios, monofásicos y altamente viscosos, lo que permite cubrir resultados de la literatura abierta e identificar la necesidad de nuevas investigaciones en puntos específicos y de interés para este trabajo de grado.

La revisión bibliográfica puede dividirse en dos partes; la primera relacionada con desarrollos y resultados empíricos en los estudios del enfriamiento de un motor de un sistema BES, de estos trabajos resultan soluciones particulares que intentan dar respuestas al problema del sobrecalentamiento en el motor de BES. La segunda parte se refiere al fenómeno de transferencia de calor por convección forzada, teniendo esta última un enfoque más teórico, ya que se apoya en la literatura abierta y especializada relacionada con el área de transferencia de calor.

#### **3.1 Estudios con bancos de pruebas en un laboratorio de sistemas BES.**

Los trabajos experimentales realizados con agua y aceite como fluidos para estudiar el efecto de refrigeración en el motor del sistema BES han arrojado resultados que han sido resumidos en la fig.3.1.1. Esta correlación gráfica se construyó a partir de un motor operando a 100% de carga (potencia de placa o

máxima eficiencia en el motor), y se registró la elevación de temperatura en el motor con respecto a la temperatura del fluido exterior (fluido de enfriamiento, agua y aceite) en función de la velocidad media del fluido refrigerante.

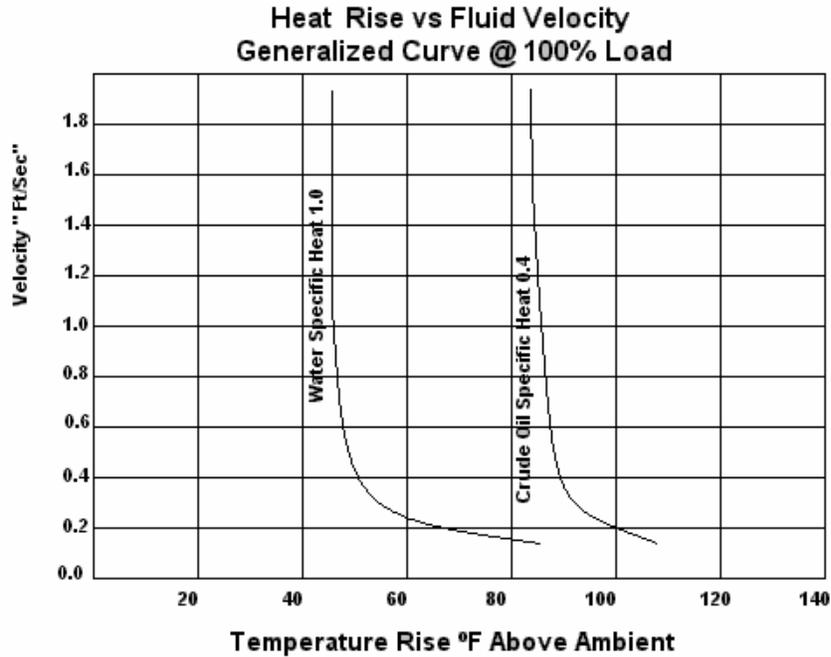


Fig. 3.1.1 Incremento de la temperatura en el motor (°F) sobre la temperatura del fluido exterior al motor, como función de la velocidad media y calor específico del fluido exterior. (Submersible Pump Handbook, 1955).

A partir de la figura 3.1.1 se observa:

- 1.- Cuando se usa agua [calor específico = 1 kcal / (kg °C) = 1Btu / (lb °F)] y la velocidad media del fluido es mayor a 1pie/s el incremento de temperatura en el motor llega a un valor de 45°F aproximadamente.

---

2.- Cuando se usa un aceite de calor específico =  $0.4 \text{ kcal / (kg } ^\circ\text{C)}$ , la velocidad necesaria para alcanzar el mínimo incremento de temperatura en el motor es de 1.4 pie/s, siendo este incremento de  $80^\circ\text{F}$  aproximadamente.

3.- Cuando la velocidad del fluido es menor de 1pie/s el incremento de temperatura se hace importante, y como regla nemotécnica, por cada 0.2 pie/s que disminuya la velocidad el incremento de temperatura es de 5% aproximadamente.

4.- A velocidades menores de 0.2pie/s el incremento es extremo y ningún sistema BES debe operar a velocidades menores.

Esta gráfica ha sido ampliada y se ha corregido con factores multiplicadores que toman en cuenta el efecto de propiedades físicas del crudo diferente a las del agua (ejemplo calor específico diferente al del agua), presencia de otra fase (% de agua) en flujo multifásicos, y el efecto sobre la eficiencia cuando el motor no trabaja a 100% de carga, desbalance en los voltajes y el uso del variador de frecuencia en alimentación al motor BES. Sin embargo está limitada para crudo liviano ya que no se tomó en cuenta la viscosidad, y se ha reportado que falla cuando se usa para condiciones críticas como pozos calientes y viscosos (Submersible Pump Handbook, 1995).

Es importante señalar que las camisas de refrigeración usadas para mejorar la transferencia de calor se basan en los resultados que resume la figura 3.1.1. Las camisas de refrigeración tienen el efecto de disminuir el área transversal de flujo, aumentando la velocidad del fluido, con lo que se consigue disminuir la temperatura del motor BES, (ver Fig. 3.1.1, y Fig. 1.2.1).

---

### **3.2 Transmisión de calor por convección forzada para régimen laminar y monofásico.**

El fenómeno de transferencia de calor convectivo ha sido ampliamente estudiado, sin embargo es necesario mencionar que los trabajos para régimen laminar y estacionario de convección forzada que sentó las bases del fenómeno es el problema de Graetz- Nusselt. Graetz L., en 1883 y Nusselt W., en 1910 (según Bird et. al., 2006). Una solución aproximada (solución asintótica) para el problema de Graetz obtenida por Leveque J., en 1928 (según Bird et. Al., 2006), para régimen laminar, mostró que la transferencia de calor por convección forzada puede ser calculada mediante correlaciones simples, como función de las propiedades del fluido, régimen de flujo y de la geometría (ver apéndice A1). Más notable es el trabajo hecho por Sieder E., y Tate G., en 1935 los cuales han propuesto una modificación de la correlación obtenida por Leveque, agregando un término que toma en cuenta la variación de la viscosidad con la temperatura (en el apéndice A.2, se muestra como puede ser obtenido en forma teórica el término de corrección que propuso Sieder y Tate para tomar en cuenta el cambio de la viscosidad con la temperatura, el cual ha sido usado empíricamente por la mayoría de los experimentalistas). Es importante resaltar que las soluciones analíticas (soluciones analíticas exactas, aproximadas y/o asintóticas) para simular la transferencia de calor por convección forzada interna están limitados a propiedades físicas constantes (ver Bird et al., 2006), y cuando hay grandes diferencias de temperaturas, es necesario tomar en cuenta la dependencia de las propiedades físicas con la temperatura. En términos generales, esto se hace por medio de un empirismo, a saber evaluar las propiedades físicas a una temperatura media idónea o evaluar las propiedades físicas a dos temperaturas idóneas, tal como lo propuso Sieder y Tate.

---

La solución asintótica (solución aproximada para el problema de Graetz) obtenida por Léveque, en 1928, para elevados números de Prandtl y en régimen laminar, es decir número de Reynolds,  $Re < 2000$  es:

$$Nu = 1.62 \cdot (Re \cdot Pr \cdot D / L)^{1/3} \quad (3.2.1)$$

Donde:

$$Re = \text{número de Reynolds} = \frac{V_m \cdot D \cdot \rho}{\mu} \quad (3.2.1)$$

$$Pr = \text{número de Prandtl} = \frac{\mu \cdot cp}{k} \quad (3.2.3)$$

$$Nu = \text{número de Nusselt} = \frac{h \cdot D}{k} \quad (3.2.4)$$

$D$ = Diámetro del tubo (m),  $L$ = longitud del tubo (m),  $\mu$  = viscosidad del fluido (Pa.s),  $\rho$ =densidad del fluido( $\text{kg/m}^3$ ),  $k$ = conductividad térmica del fluido (W/m.K),  $cp$ = calor específico del fluido( $\text{kJ/kg.C}$ ),  $h$ = coeficiente de transmisión de calor convectivo ( $\text{W/m}^2 \cdot \text{K}$ )

El trabajo hecho por Sieder y Tate en 1935 (según Bird et al., 2006), consistió básicamente en proponer una modificación de la correlación obtenida por Leveque agregando un término que toma en cuenta la variación de la viscosidad (en casos donde la variación no tan grande, ver apéndice A2) con la temperatura de la forma,  $\mu_b / \mu_w$ , es decir:

$$Nu = 1.86 \cdot (Re \cdot Pr \cdot D / L)^{1/3} \cdot (\mu_b / \mu_w)^{0.14} \quad (3.2.5)$$

donde (ecuación ampliamente usada con un error de hasta un 20%):

$\mu_b$  = viscosidad a la temperatura media de mezcla, promediada entre la temperatura de entrada y de salida, y  $\mu_w$  = viscosidad a la temperatura de la pared

---

### 3.3. Coeficiente de transmisión de calor por convección:

La transmisión de calor por convección se refiere a la transferencia de calor a través de una interfase sólido – fluido en movimiento. Ésta depende del área de la interfase, de la diferencia de temperatura entre el sólido y el fluido, y del coeficiente de transmisión de calor definido por la siguiente ecuación (Welty et al., 1999):

$$Q = h A \Delta T \quad (3.3.1)$$

Donde:

$Q$  = Flujo de calor hacia o desde el fluido (W)

$h$  = Coeficiente de transmisión de calor ( $\text{W}/\text{m}^2\text{K}$ )

$A$  = Área de la interfase ( $\text{m}^2$ )

$\Delta T$  = Diferencia característica de temperatura entre el fluido y la superficie (K).

Cuando un fluido circula sobre una superficie caliente, que está como se muestra en la figura 3.3.1, la transferencia de calor se escribe como

$$Q = h A (T_w - T_o) \quad (3.3.2)$$

Donde

$T_w$  = es la temperatura de la superficie caliente (K)

$T_o$  = es la temperatura del fluido lejos de la superficie (K)

La figura 3.3.1 muestra los perfiles de temperatura y velocidad.

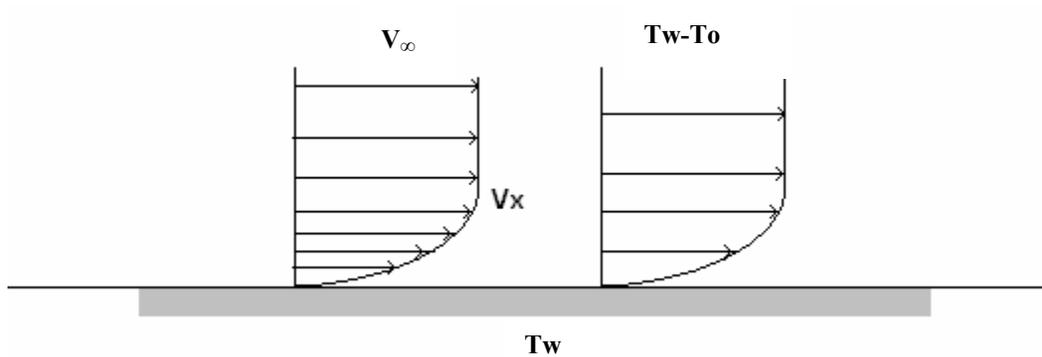


Figura 3.3.1. Perfiles de velocidad y temperatura correspondiente a un fluido que circula sobre una superficie caliente (superficie libre).

Para el flujo interno (ver figura 3.3.2) se reemplaza la temperatura del fluido exterior,  $T_o$ , por la temperatura global del fluido,  $T_b$ , conocida como temperatura media de masa o de mezcla. Obteniéndose la siguiente ecuación:

$$Q = h A (T_w - T_b) \quad (3.3.3)$$

Donde  $T_b$  se define como:

$$T_b = \frac{1}{V_m \cdot A_{\text{flujo}}} \int_{A_{\text{flujo}}} V_x \cdot T dA \quad (3.3.4)$$

Con  $A_{\text{flujo}}$  = Área de flujo o área de la sección transversal,  $V_x$  y  $T$ , son los perfiles de velocidad y temperatura respectivamente, y  $V_m$  = Velocidad media del fluido.

La temperatura global  $T_b$ , aumenta de  $T_{b1}$  = temperatura de entrada a la región de calentamiento hasta  $T_{b2}$  = Temperatura de salida de la región de calentamiento, por lo que la ecuación anterior define un valor local del coeficiente  $h$ . Se debe entonces conseguir un valor del coeficiente de convección promedio,  $h_m$  sobre esta región, y se debe usar una fuerza impulsora media para la diferencia de temperatura en la región.

En lo que sigue se explica cada uno de los términos necesarios para evaluar la transferencia de calor en flujo en conductos.

Si la temperatura de la pared o superficie interna del conducto es constante  $T_w$ , se debe usar (ver Burmeister L., 1993):

$$Q = h_m A \Delta T_{ln} = \frac{(\Delta T_{max}) - (\Delta T_{min})}{\ln\left(\frac{\Delta T_{max}}{\Delta T_{min}}\right)} \quad (3.3.5)$$

Donde:

$$\Delta T_{max} = T_w - T_{b1} \quad (3.3.6)$$

$$\Delta T_{min} = T_w - T_{b2} \quad (3.3.7)$$

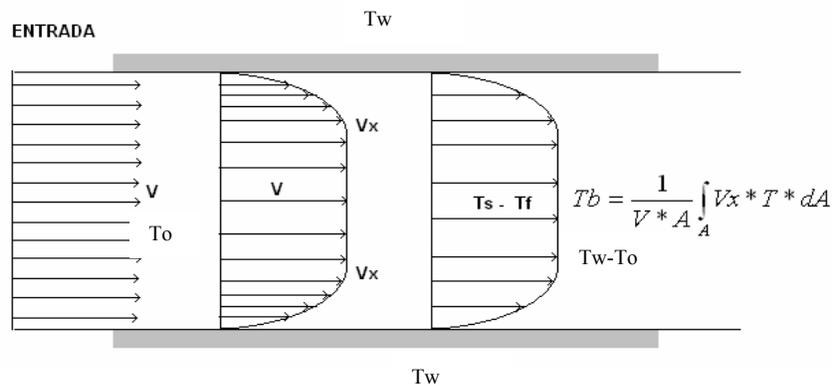


Figura 3.3.2. Perfiles de velocidad y temperatura correspondiente a un fluido que circula sobre un conducto caliente.

### 3.4 Longitud de entrada hidrodinámica y térmica:

Cuando un fluido entra en contacto con una superficie, o penetra en un conducto, se espera la formación de una capa límite de velocidad que crece de la manera que se muestra en la figura 3.4.1. Una vez que el espesor de la capa límite alcanza el valor  $D/2$ , el fluido está completamente desarrollado (ver Bejan A., 1996).

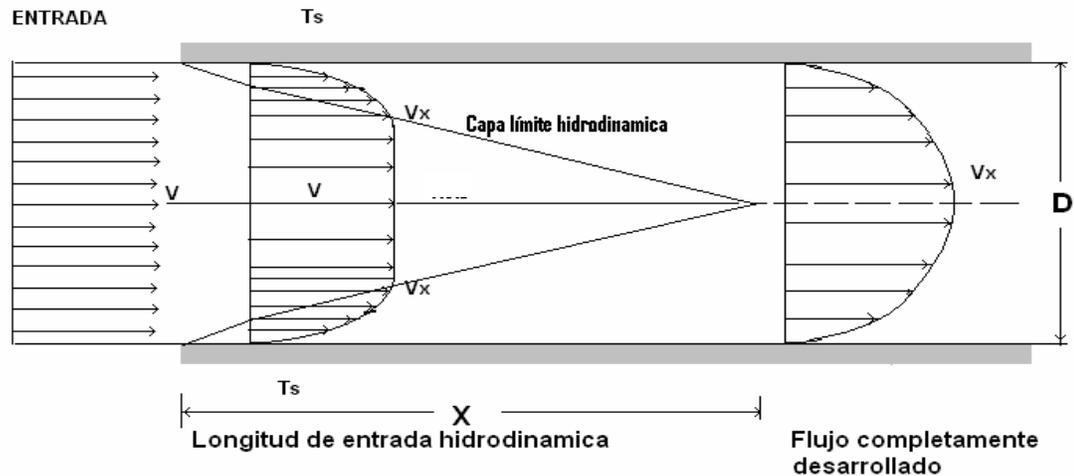


Fig. 3.4.1 Región de entrada y región de flujo desarrollado para un flujo interno; capa límite hidrodinámica.

La longitud de entrada,  $X$ , puede ser estimada usando la siguiente relación (en flujo laminar, ver Bejan A., 1996), la cual muestra una dependencia directa del número de Reynolds.

$$X = 0.1 \cdot Re \cdot D \quad (3.4.1)$$

Para el caso de estudio la temperatura del fluido es menor que la de la pared del conducto, por lo que se espera la formación de una capa límite térmica, producto de que el calor penetra dentro del fluido para calentarlo. Se requiere una longitud para que el espesor de capa límite alcance  $D/2$ , condición que se conoce como perfil de temperatura completamente desarrollado, como se muestra en la figura 3.4.2.

La longitud de entrada térmica,  $X_T$ , depende del número de Reynolds y del número e Prandtl, como se deduce de la siguiente relación (caso laminar, ver Bejan A., 1996):

$$X_T = Re \cdot Pr \cdot D = 10 \cdot Pr \cdot X \quad (3.4.2)$$

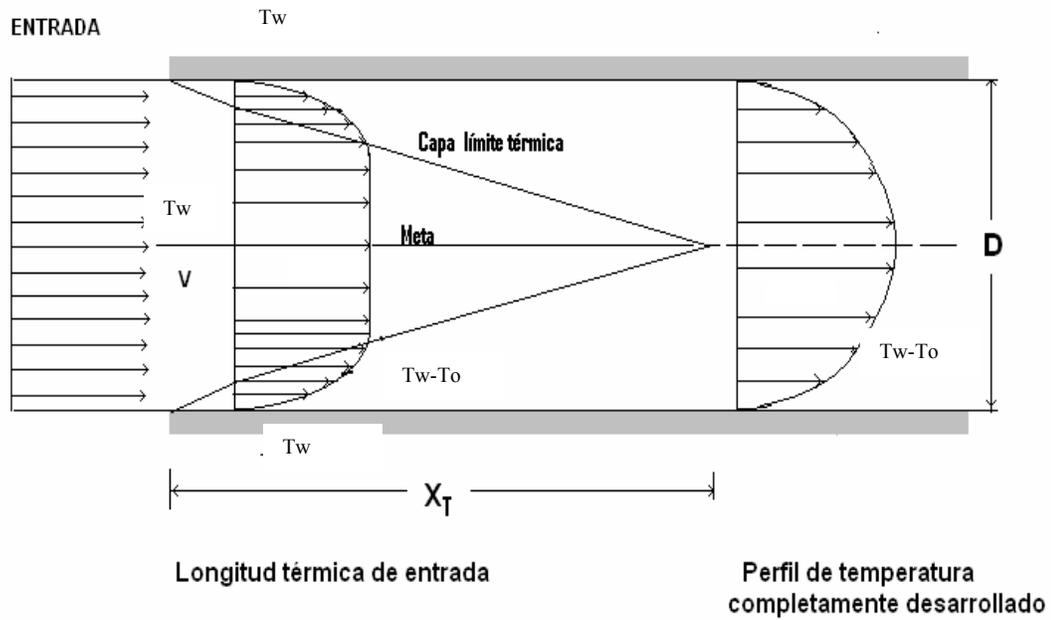


Figura 3.4.2. Capa límite térmica, y perfil completamente desarrollado

De esto se deriva la importancia del número de Prandtl en la transferencia de calor. El número de Prandtl cubre un amplio rango de valores que depende del tipo de fluido. La figura 3.4.3 lo resume (Bejan A., 1995).

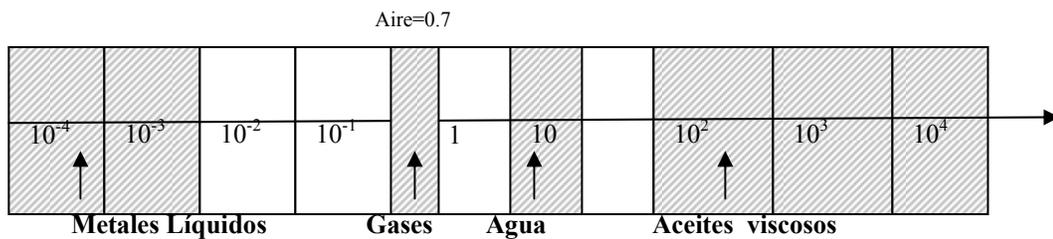


Fig 3.4.3. Intervalo del número de Prandtl para varios fluidos (Bejan A., 1995).

La relación del espesor de capa límite hidrodinámica a capa límite térmica, puede ser puesta en función del número de Prandtl:

$$\frac{X_T}{X} \propto Pr \quad (3.4.3)$$

De lo que se puede deducir (Bejan A., 1995):

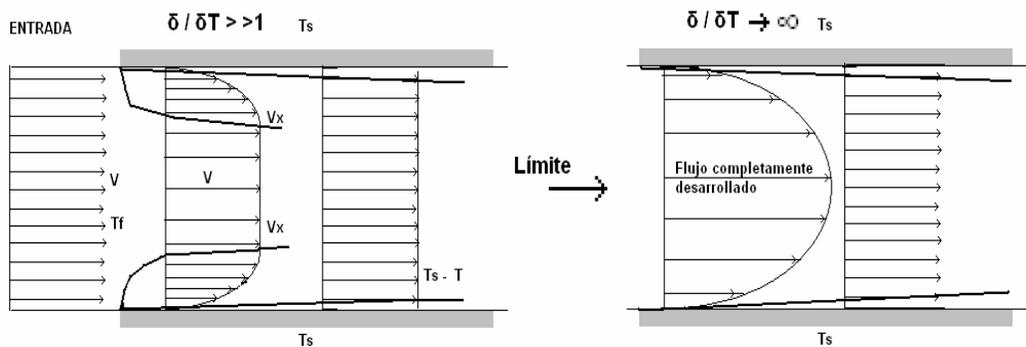
$$\frac{\delta}{\delta_T} \propto Pr \quad (3.4.4)$$

Siendo  $\delta$ , y  $\delta_T$ , los espesores de las capas límites hidrodinámica y térmica respectivamente.

Utilizando la tabla 3.4.3 se pueden analizar el caso de estudio de este trabajo:

Fluidos viscosos: ( $Pr \gg 1$  o  $\delta / \delta_T \gg 1$ )

Para fluidos viscosos el límite  $\delta / \delta_T \rightarrow \infty$ , lo cual sugiere que la capa límite hidrodinámica se desarrolla mucho más rápido que la térmica, por lo que la suposición de flujo hidrodinámicamente desarrollado, y capa límite térmica en desarrollo aplica como condiciones límite. (ver la figura 3.4.4).



3.4.4. Perfil de velocidad y temperatura en la región de entrada para fluidos viscosos.

---

Este caso de fluidos muy viscosos (altos números de Prandtl) se estudiará con detalle en el próximo capítulo, donde se tomará en cuenta el cambio de la viscosidad con la temperatura. Se puede adelantar que el fluido estará desarrollado hidrodinámicamente en la zona de entrada, pero en la medida que avanza en la región o zona de calentamiento, debido al cambio de la viscosidad con la temperatura (propiedad física que se considera variable) el perfil de velocidad se verá afectado con la longitud axial.

---

---

**CAPÍTULO IV**  
**FORMULACIÓN DEL MODELO**

---

---

---

## **CAPÍTULO IV**

### **FORMULACIÓN DEL MODELO**

Existen tres posibles vías para abordar un problema fluidodinámico, y ya que su manipulación no es simple se hace un tratamiento detallado. Estas diferentes formas, se complementan en casos complejos y pueden enumerarse como (White F., 2004):

1. Análisis diferencial, aplicado al concepto de partícula fluida
2. Análisis integral, basado en el concepto de volumen de control
3. Análisis dimensional, tradicionalmente basado en estudios experimentales, y en la actualidad en simulaciones numéricas muy detalladas, también conocida como experimentación numérica.

El interés está en la fluidodinámica con transferencia de calor, por lo que el flujo a estudiar debe satisfacer tres leyes de conservación de las cantidades fundamentales, junto a condiciones de contorno apropiadas.

1. Conservación de la masa
2. Conservación de la cantidad de movimiento

---

3. Conservación de la energía

4. Condiciones de contorno apropiadas.

El flujo que a continuación se estudia puede clasificarse de forma general:

1. Flujo en estado estacionario, también conocido como régimen permanente.
2. Flujo laminar.
3. Flujo incompresible, ya que los cambios de la densidad pueden despreciarse.
4. Propiedades físicas y de transporte constantes, con la excepción de la viscosidad la cual es función de la temperatura. Las demás propiedades físicas pueden ser predichas usando una temperatura media.

#### 4.1 Análisis Diferencial.

El modelo se debe ajustar a las suposiciones de un flujo estacionario, flujo laminar, fluido newtoniano (Un modelo mas riguroso podría ser desarrollado para fluidos no Newtonianos) e incompresible. La figura 4.1.1 muestra un anillo circular al que se aplica un balance para obtener las ecuaciones diferenciales de continuidad, cantidad de movimiento y energía para el flujo en una sección anular.

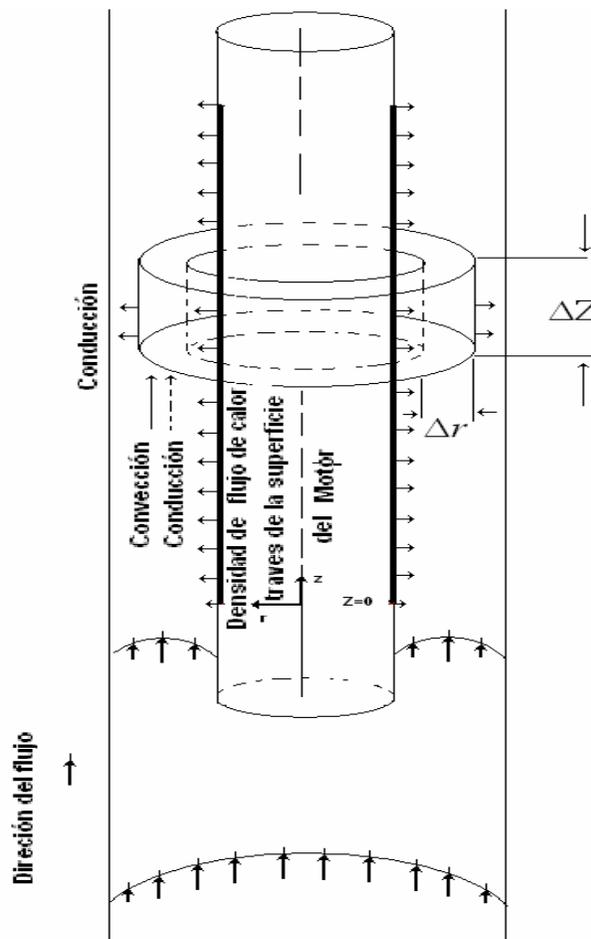


Figura 4.1.1. Representación física del motor, del flujo anular y del anillo circular al que se aplican las ecuaciones diferenciales de transporte

---

#### 4.1.1 Ecuaciones de variación en notación vectorial.

La ecuación de continuidad puede escribirse convenientemente usando notación vectorial (Bird R. et al., 2006):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) \quad (4.1.1)$$

Para un fluido de densidad constante (fluido incompresible), condición que se aplica al modelo que se quiere desarrollar:

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (4.1.2)$$

La ecuación de movimiento en forma vectorial:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p - [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] + \rho \mathbf{g} \quad (4.1.3)$$

$\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$  = derivada sustancial o derivada siguiendo el movimiento del fluido (aceleración),  $\nabla p$  = gradiente del escalar p (fuerza de presión por unidad de volumen),  $(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau})$  = velocidad de adición de cantidad de movimiento por transporte molecular (fuerza viscosa por unidad de volumen),  $\rho \mathbf{g}$  = fuerza externa por unidad de volumen (gravedad), ecuación que se simplificará mas adelante.

La ecuación de energía se escribe:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) - \left( \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_p \frac{Dp}{Dt} \quad (4.1.4)$$

Esta es la ecuación de variación para la temperatura,  $\nabla \cdot \mathbf{q}$  = es la velocidad de adición de energía por unidad de volumen por conducción de calor,  $(\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$  = es la velocidad de aumento irreversible de energía interna por unidad de volumen por disipación viscosa.

Los dos últimos términos toman en cuenta la disipación viscosa y el efecto de expansión (que es cero por ser un fluido incompresible), respectivamente, el primero se desprecia por ser un efecto menor en relación con la transferencia de calor, este término es importante cuando la velocidad de una capa de fluido respecto de la otra es muy grande (Bird R. et al., 2006)(De un análisis de orden de magnitud y de la adimensionalización de la ecuación de energía puede derivarse esta aseveración. Al despreciar los dos últimos términos se obtiene la siguiente forma para la ecuación de energía para el modelo que se esta planteando:

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = (\nabla \cdot \mathbf{q}) \quad (4.1.5)$$

#### 4.1.2 Ecuaciones de variación en coordenadas cilíndricas:

Las ecuaciones 4.12., 4.13 y 4.1.5 expresadas en coordenadas cilíndricas y usando la ley de Fourier de la conducción de calor, con conductividad térmica constante, k, y al suponer un flujo en estado estacionario, incompresible, simétrico respecto del eje z (sin movimiento en la dirección angular,  $\theta$ ), se obtiene un modelo simplificado (aún general) de las ecuaciones diferenciales de continuidad movimiento y energía; se escribe:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial}{\partial z}(w) = 0 \quad \text{Continuidad} \quad (4.1.6)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rr}) + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right) \quad \text{Movimiento en r} \quad (4.1.7)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz}) + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) - \rho g \quad \text{Movimiento en z} \quad (4.1.8)$$

$$\rho C_p \left( u \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad \text{Energía} \quad (4.1.9)$$

---

$u, w$  = son las componentes del vector velocidad en la dirección radial  $r$  y axial  $z$ .

$p$  = presión en la partícula de fluido

$\tau_{ij}$  = fuerza en la dirección de  $j$ , sobre un área perpendicular a la dirección de  $i$

$g$  = es la aceleración de la gravedad.

### 4.1.3 Análisis de orden de magnitud

En lo que sigue se realiza un análisis de orden de magnitud para descartar términos no importantes o que su efecto sea despreciable en relación al fenómeno bajo estudio (Burmister L., 1993). El modelo se debe ajustar a las suposiciones de un fluido incompresible, estacionario, newtoniano, y con calentamiento cerca de la superficie donde ocurre la transferencia de calor, para un fluido viscoso con  $Pr \gg 1$ .

Para describir el comportamiento cerca de la pared, se utilizarán las siguientes cantidades de referencia, hipótesis y argumentos de orden de magnitud:

Cantidades de referencia:

Espesor de capa límite térmica,  $\delta_T$

Longitud axial del conducto anular,  $L$

Velocidad media del fluido =  $V_m$

Hipótesis:

El espesor de capa límite térmica,  $\delta_T$ , se supone mucho menor que la longitud axial del conducto anular  $L$ ,  $\delta_T \ll L$ ; si se llama  $O$  = Orden de magnitud, se puede decir que:

$$w = O(V_m) \quad (4.1.10)$$

$$z = O(L), \quad (4.1.11)$$

$$r = O(\delta_T) \quad (4.1.12)$$

---

#### 4.1.3.1 Análisis de orden de magnitud a la ecuación de continuidad:

Al sustituir los términos relacionados con el orden de magnitud, ecuaciones (4.1.10), (4.1.11) y (4.1.12) en la ecuación de continuidad 4.1.6, se tiene:

$$u = O\left(\frac{\delta_T^* Vm}{L}\right) \quad (4.1.13)$$

Y como  $\delta_T \ll L$ , se deduce que la velocidad en dirección axial  $w \gg u$  (velocidad radial), el movimiento ocurre principalmente en la dirección de  $z$ . Este resultado expresa que el cambio de la velocidad en la dirección axial por el efecto de la disminución de la viscosidad con la temperatura no produce un movimiento significativo en la dirección radial en relación a la dirección axial.

#### 4.1.3.2 Análisis de orden de magnitud a la ecuación de movimiento

Usando el resultado anterior, ecuación 4.1.13, en las ecuaciones de movimiento, 4.1.7 y 4.1.8, usando la ley de Newton de la viscosidad, con la suposición de viscosidad evaluada a la temperatura media en la zona de calentamiento se obtiene que la ecuación de movimiento en la dirección radial es despreciable y para la dirección axial se obtiene:

$$O(1) + O(1) = O\left(\frac{P^*}{\rho L}\right) + O\left(\frac{\mu}{\rho m V L} \frac{L^2}{\delta_T^2}\right) + O\left(\frac{\mu}{\rho V m L}\right) \quad (4.1.14)$$

En donde:  $P^* = p + \rho g$

Para el caso de fluidos con valores altos de viscosidad,  $1/Re_L = \frac{\mu}{\rho V m L} = O(1)$ , por lo que en la última ecuación (4.1.14) al sustituir el número de  $Re_L$ , se obtiene:

$$O(1) + O(1) = O\left(\frac{P}{\rho V_m^2}\right) + O\left(\frac{1}{\text{Re}_L} \frac{L^2}{\delta_T^2}\right) + O\left(\frac{1}{\text{Re}_L}\right) \quad (4.1.15)$$

Sabiendo que el número de Reynolds es del orden de 1 para los fluidos en estudio, se puede escribir:

$$O(1) + O(1) = O\left(\frac{P}{\rho V_m^2}\right) + O\left(\frac{1}{1} \frac{L^2}{\delta_T^2}\right) + O\left(\frac{1}{1}\right) \quad (4.1.16)$$

Los términos del orden de 1 [O(1)] pueden despreciarse frente al término  $\left(\frac{L^2}{\delta_T^2}\right)$ , por tener este último un valor muy alto, ya que  $\delta T \ll 1$ , y el término que incluye la presión no puede eliminarse porque está relacionado con la fuerza impulsora que produce el movimiento. Del análisis anterior resulta la siguiente ecuación de movimiento, donde los términos convectivos se desprecian del análisis de orden de magnitud:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \tau_{rz})\right) + \rho g_z \quad (4.1.17)$$

Un análisis similar fue hecho por Prandtl en 1905 (según Bird et al, 2006), para las ecuaciones de capa límite. Este resultado (ecuación 4.1.17), expresa que la ganancia de cantidad de movimiento en la dirección axial (términos convectivos) son menores en relación con la cantidad de movimiento en la dirección radial por esfuerzo viscoso.

#### 4.1.3.3 Análisis de orden de magnitud a la ecuación de energía.

Ahora sustituyendo las cantidades de referencia y los argumentos de órdenes de magnitud en la ecuación de energía, (4.1.9), se obtiene:

$$\frac{\rho C_p L V_m}{k} (1+1) = \left[ \frac{L^2}{\delta_T^2} + \frac{L^2}{L^2} \right] \quad (4.1.18)$$

De lo que resulta:

$$\text{Re}_L \cdot \text{Pr} \cdot (1+1) = \left[ \frac{L^2}{\delta_T^2} \right] \quad (4.1.19)$$

De lo anterior se deduce que el término de conducción axial es despreciable frente a la conducción radial, y que los términos convectivos son del mismo orden y ninguno es despreciable, quedando el balance de energía:

$$\rho C_p \left( u \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] \quad (4.1.20)$$

Esta ecuación es la representación que se ajusta al fenómeno; esto significa que los términos convectivos son tan importantes como el transporte de energía conductivo.

#### 4.1.4 Modelo propuesto para simular la transferencia de calor a un fluido viscoso:

El modelo en ecuaciones diferenciales, ecuación de continuidad, movimiento y energía respectivamente que se obtuvo del análisis de orden de magnitud a la zona de calentamiento (Rosales A y Alonso M., 2004), se resume:

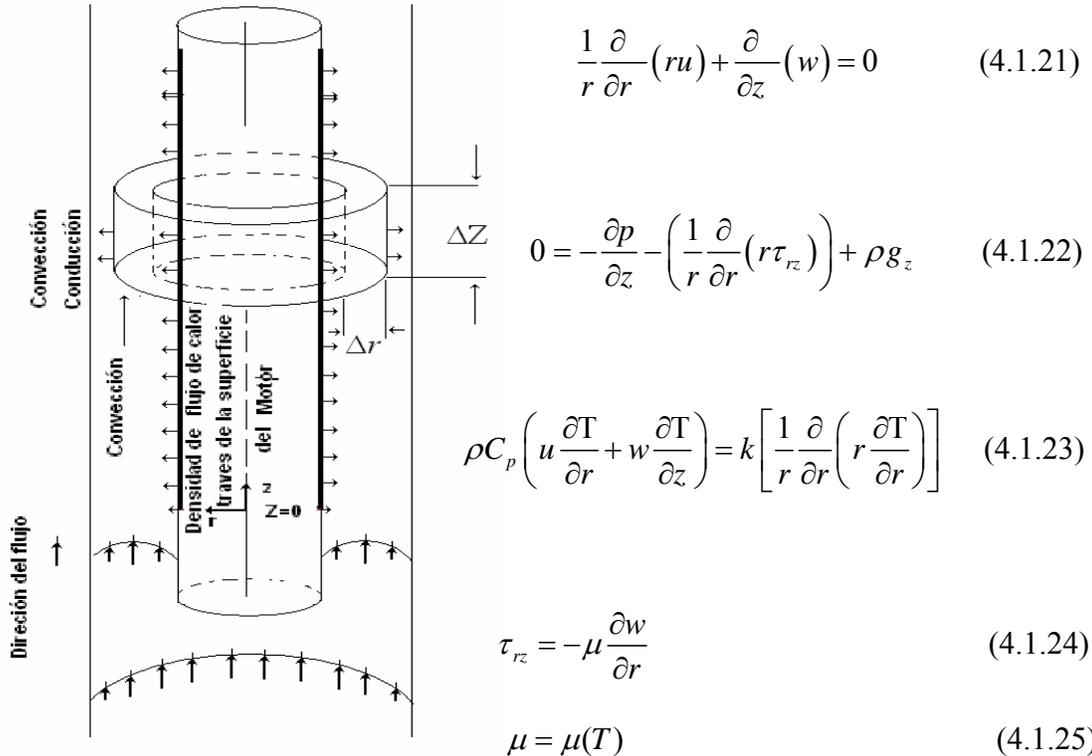


Fig. 4.1.2. Representación física del fenómeno de transferencia de calor entre el motor BES y un crudo pesado.

---

Las condiciones límites para resolver el modelo son:

- C.L 1      en  $r = R_{INT}$        $u = w = 0$       (pared y superficie caliente)
- C.L 2      en  $r = R_{EXT}$        $u = w = 0$       (pared y superficie externa)
- C.L 3      en  $r = R_{INT}$        $T = T_w$       ( $T_o$ =Temperatura de superficie del motor)
- C.L 4      en  $r = R_{EXT}$        $T = T_o$       ( $T_o$ =Temperatura de la superficie externa)
- C.L 5      en  $z = 0$        $T = T_o$       ( $T_o$ =Temperatura de entrada del fluido)
- C.L.6      en  $z = 0$        $w = w(r)$  (perfil de velocidad completamente desarrollado)
- C.L.7      en  $z = 0$        $u = 0$       (velocidad solo con dirección axial)

El sistema tiene solución ya que son cinco ecuaciones (4.1.21 a 4.1.24) con cinco incógnitas ( $u$ ,  $w$ ,  $\tau_{rz}$ ,  $T$ ,  $\mu$ ), suponiendo conocido el gradiente de presión y la temperatura de la pared,  $T_w$ , además de la temperatura de entrada  $T_o$  y la condición de no deslizamiento.

Para el caso de interés los datos conocidos son el caudal de entrada y el calor disipado por el motor. El caudal puede relacionarse con el gradiente de presión al integrar el perfil de velocidades, y el calor intercambiado puede relacionarse con el perfil de temperatura y con  $T_w$ , a través de un balance global de energía.

## **4.2 Adimensionalización de las ecuaciones diferenciales obtenidas en el análisis diferencial.**

Una técnica muy eficaz para determinar los parámetros adimensionales que gobiernan el fenómeno que interesa, consiste en utilizar las ecuaciones diferenciales y las condiciones de contorno que describen el fenómeno mismo.

---

Aplicando esta técnica a las ecuaciones diferenciales 4.1.21, 4.1.22 y 4.1.23 (para fluidos de propiedades físicas constantes con la excepción de la viscosidad), se transformarán en ecuaciones adimensionales. Definiendo las siguientes variables de referencia (White F., 2006):

1. Velocidad de referencia  $V_m$  (velocidad media a o la entrada por ejemplo)
2. Longitud de referencia  $R$  y  $L$  (radio interno y longitud del conducto)
3. Algunas propiedades conocidas como constantes, ejemplo  $p_o$  (presión de entrada),  $T_o$  (temperatura de entrada),  $T_w$  (temperatura de pared),  $\mu_o$  (viscosidad a la temperatura  $T_o$ ), y  $\mu_w$  (viscosidad a la temperatura  $T_w$ ).

Definiendo las variables adimensionales como, tomado del White, F. 2006:

$$\begin{aligned} r^* &= \frac{r}{R}, z^* = \frac{z}{L}, u^* = \frac{u}{V_m}, w^* = \frac{w}{V_m}, \\ T^* &= \frac{T - T_o}{T_w - T_o}, P^* = \frac{P - P_o}{\rho V_m^2}, \mu^* = \frac{\mu}{\mu_o} \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Sustituyendo estas variables adimensionales en nuestras ecuaciones básicas simplificadas (4.1.21), (4.1.22), (4.1.23), e introduciendo, la ley de Newton de la viscosidad y una función adimensional de la viscosidad con la temperatura adimensional,  $T^*$ , se obtiene:

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (w^*) = 0 \quad (4.3.2)$$

$$0 = -\frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \left( \mu^* \frac{\partial w^*}{\partial r^*} \right) \right) \right) \quad (4.3.3)$$

---


$$\left( u^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} + w^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) \right] \quad (4.3.4)$$

$$\mu^* = \mu^*(T^*, T_w, T_o) \quad (4.3.5)$$

Las condiciones de contorno necesarias para la solución del modelo y en forma de parámetros adimensional se puede escribir:

CL1:  $r^* = 1$        $w^* = u^* = 0$  (no deslizamiento)

CL2:  $r^* = K$        $w^* = u^* = 0$  ( $K=R_{EXT}/R_{INT}$ ) (no deslizamiento)

CL3:  $r^* = 1$        $T^*=0$  (Temperatura de la superficie externa igual a la del fluido)

CL4:  $r^* = K$        $T^*=1$  (Temperatura de la superficie del motor adimensional)

CL5:  $z^*=0$        $T^*=0$  (Temperatura del fluido a la entrada adimensional)

CL6:  $z^*=0$        $w^*=w(r^*)$  (perfil de velocidad desarrollado)

CL7:  $z^* = 0$        $u^* = 0$  (componente de velocidad en r es cero)

De las ecuaciones 4.3.2 a 4.3.5 se puede decir que el sistema a estudiar depende de los parámetros adimensionales Re, Pr, y de los cambios de la viscosidad con la temperatura, los cuales dependen de las temperaturas  $T_o$ , y  $T_w$  del sistema.

Estos resultados indican que se pueden correlacionar los perfiles de velocidad y temperatura con estos parámetros adimensionales (el número de Nusselt se puede

---

obtener a partir del perfil de temperatura), describiendo el sistema con la precisión del modelo bajo las cuales fue desarrollado, esto es flujo estacionario, laminar, y de propiedades constante con excepción de la viscosidad.

Finalmente de este capítulo se obtuvo un modelo en ecuaciones diferenciales que representa al caso de estudio, además se identificaron los parámetros adimensionales que influyen en el fenómeno estudiado, ( $Re$ ,  $Pr$ ,  $Nu$ ) junto con la influencia del cambio de la viscosidad con la temperatura a través de las temperaturas  $T_o$  y  $T_w$ . En el siguiente capítulo a partir de una descripción física y teórica del fenómeno de transferencia de calor que se está estudiando, se simplificarán aun mas las ecuaciones de este capítulo, para obtener una descripción matemática o generar un modelo simplificado con solución analítica con el cual simular la transferencia de calor por convección forzada en fluidos viscosos y simular el caso de estudio particular.

---

---

**CAPÍTULO V**

**DESARROLLO DEL MODELO**

---

---

---

## **CAPÍTULO V**

### **DESARROLLO DEL MODELO**

En la formulación matemática del capítulo anterior se obtuvo un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas por el efecto de la temperatura sobre la viscosidad. Además las ecuaciones se expresaron en derivadas parciales por lo que su resolución se encuentra limitada a soluciones numéricas.

En este capítulo, a partir de una descripción física y teórica del fenómeno y del caso de estudio se pretende simplificar aun más la formulación matemática del capítulo anterior, de lo que se obtendrá un modelo que representa al fenómeno de interés y que puede ser resuelto mediante métodos analíticos, por lo que se obtendrán ecuaciones simples que permitan describir y simular el caso de estudio.

#### **5.1 Descripción física y teórica.**

Como se vio anteriormente en la transferencia de calor en la sección anular motor-revestidor de un sistema BES, se ha considerado un fluido en estado estacionario, newtoniano, de propiedades físicas constantes, con la excepción de la viscosidad la cual varía con la temperatura.

La figura 5.1.1 muestra de manera ampliada el motor y el revestimiento o camisa de refrigeración. El espacio anular ha sido exagerado para mostrar los perfiles de velocidad, esfuerzo y el desarrollo de la capa límite térmica.

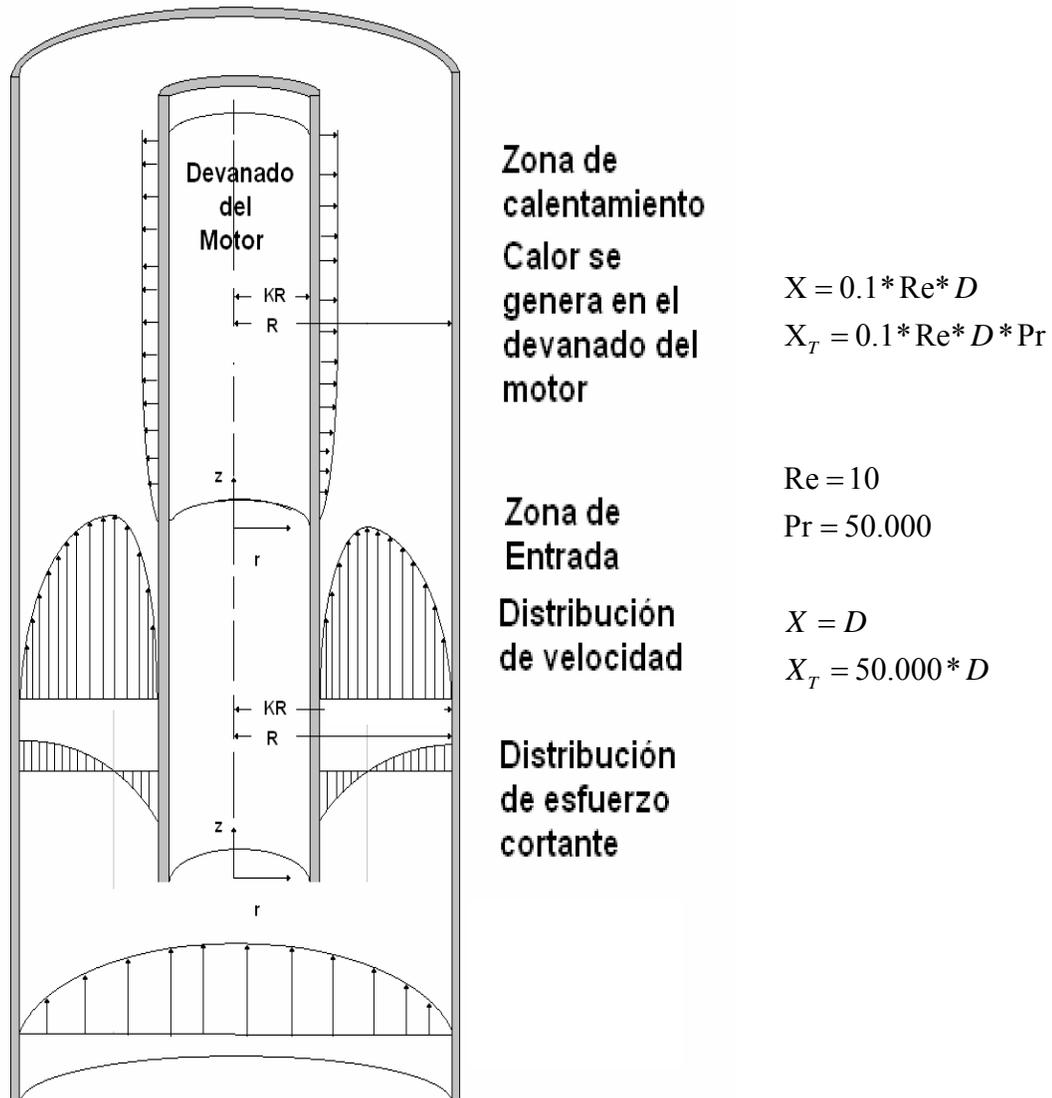


Fig. 5.1.1 Descripción física basada en la teoría de transferencia de calor por convección.

Considerando la figura 5.1.1 se observa:

.- Que la zona de calentamiento se encuentra más arriba de la zona de entrada.

---

.- Esta región de entrada tiene una longitud pequeña pero suficiente para que el perfil de velocidad esté completamente desarrollado antes de entrar a la zona de calentamiento.

.- En la zona de calentamiento se muestra una región cerca de la superficie del motor donde ocurre la transferencia de calor. Esta región tiene un espesor conocido como capa límite térmica la cual crece lentamente según consideraciones teóricas.

Estas observaciones tienen fundamento teórico en las siguientes relaciones (5.1.1) y (5.1.2), (Bejan A., 1995), donde:

$$X = 0.1 \cdot \text{Re} \cdot D \quad (5.1.1)$$

$$X_T = \text{Re} \cdot \text{Pr} \cdot D = 10 \cdot \text{Pr} \cdot X \quad (5.1.2)$$

$X$ = Longitud necesaria para que el fluido esté completamente desarrollado dinámicamente.

$X_T$ = Longitud necesaria para que el perfil de temperatura esté completamente desarrollado térmicamente, lo que es equivalente a decir que el calor ha penetrado todo el fluido.

En este Trabajo de Grado el interés se centra en fluidos viscosos (ejemplo crudos de 10° API), cuyas propiedades físicas y valores típicos de campo exhiben un número de Reynolds del orden de diez ( $\text{Re}=10$ ) y un número de Prandtl del orden de cincuenta mil ( $\text{Pr}=50000$ ). Usando estos valores en las ecuaciones (5.1.1) y (5.1.2) se obtiene  $X=D$  y  $X_T= 500000 \cdot D$ , indicando que la longitud hidrodinámica es muy pequeña por lo que el fluido alcanza su condición de flujo dinámicamente desarrollado a una distancia muy pequeña, a diferencia de la capa límite térmica que estará en desarrollo a una distancia muy grande. Este comportamiento está representado en la figura 3.4.4 que corresponde a fluidos viscosos o  $\text{Pr} \gg 1$  mostrado en el capítulo III (Rosales A. y Alonso M., 2005).

## 5.2 Efecto bifásico:

En la figura 5.2.1 se muestra sólo la zona de calentamiento y de forma ampliada se muestra el espesor de capa límite térmica, para inferir que ocurre con los perfiles de velocidad, temperatura y esfuerzo dentro de la región de transferencia de calor. Este comportamiento corresponde a un caso límite donde se ha tomado que el radio del espesor de la capa límite ( $\delta_T$ ) crece levemente con la distancia, por lo que se supone que el radio del espesor de la capa límite varía muy poco con la longitud. Este comportamiento es análogo al de un flujo bifásico, donde la región cerca de la superficie se comporta como un fluido diferente del fluido exterior o de entrada, y esto se debe a que la viscosidad del crudo es función de la temperatura. La viscosidad disminuye de forma exponencial con la temperatura, lo que implica que la región de calentamiento cerca de la superficie del motor debe comportarse como un fluido de viscosidad diferente (efecto bifásico), un modelo que toma en cuenta este efecto ha sido resuelto parcialmente para el caso particular de flujo en conductos anulares por Rosales A. y Alonso M., 2005.

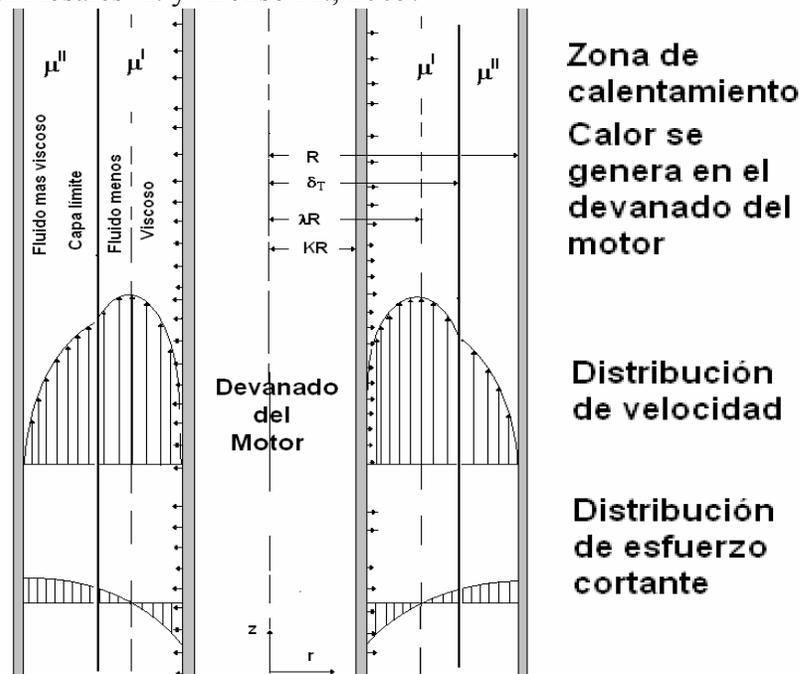


Figura 5.2.1. Región de calentamiento y efecto bifásico.

---

Con el uso de esta información se simplificará el modelo formulado en el capítulo IV.

### **5.3 Análisis diferencial: Perfiles de esfuerzo, velocidad y temperatura y su dependencia espacial de las coordenadas radial (r) y axial (z).**

La ecuación de continuidad (4.1.21), expresa que la componente de la velocidad en la dirección de z, w, cambia con z, y con r, de lo que se deduce que  $w=w(r,z)$ . El esfuerzo  $\tau_{rz}$  de la ecuación de movimiento según la ley de newton de la viscosidad es función de w, al ser  $w = w(r,z)$ , el esfuerzo  $\tau_{rz}=f(r,z)$ . La ecuación de energía expresa que  $T=f(r,z)$ .

Sin embargo, como se demostrará analíticamente, estos perfiles pueden ponerse convenientemente en función de la coordenada radial, r, y del radio del espesor de capa límite,  $\delta_T$  (en la figura 5.2.1 y 5.3.1 la distancia desde el centro del conducto hasta el borde de la capa límite térmica es  $\delta_T$  como se muestra en las figuras mencionadas o  $\delta$ , ya que en este análisis solo hay región de entrada térmica) o sea función de r, y  $\delta_T$ , al ser  $\delta_T=\delta(z)$ , la dependencia de los perfiles de r y z se mantiene, pero al análisis se simplifica considerablemente con  $\delta_T$  en vez de z, ya que teóricamente se espera que  $\delta_T$  sea sólo función de z y varía muy levemente con z, e independiente de r. Los perfiles esperados se muestran en la figura 5.3.1. Del análisis anterior se puede ver que los perfiles de esfuerzo, velocidad y temperatura varían muy poco con z.

De lo anterior, se espera que al cambiar la coordenada espacial z, por  $\delta_T$ , transforme el sistema de ecuaciones en un sistema mas sencillo.

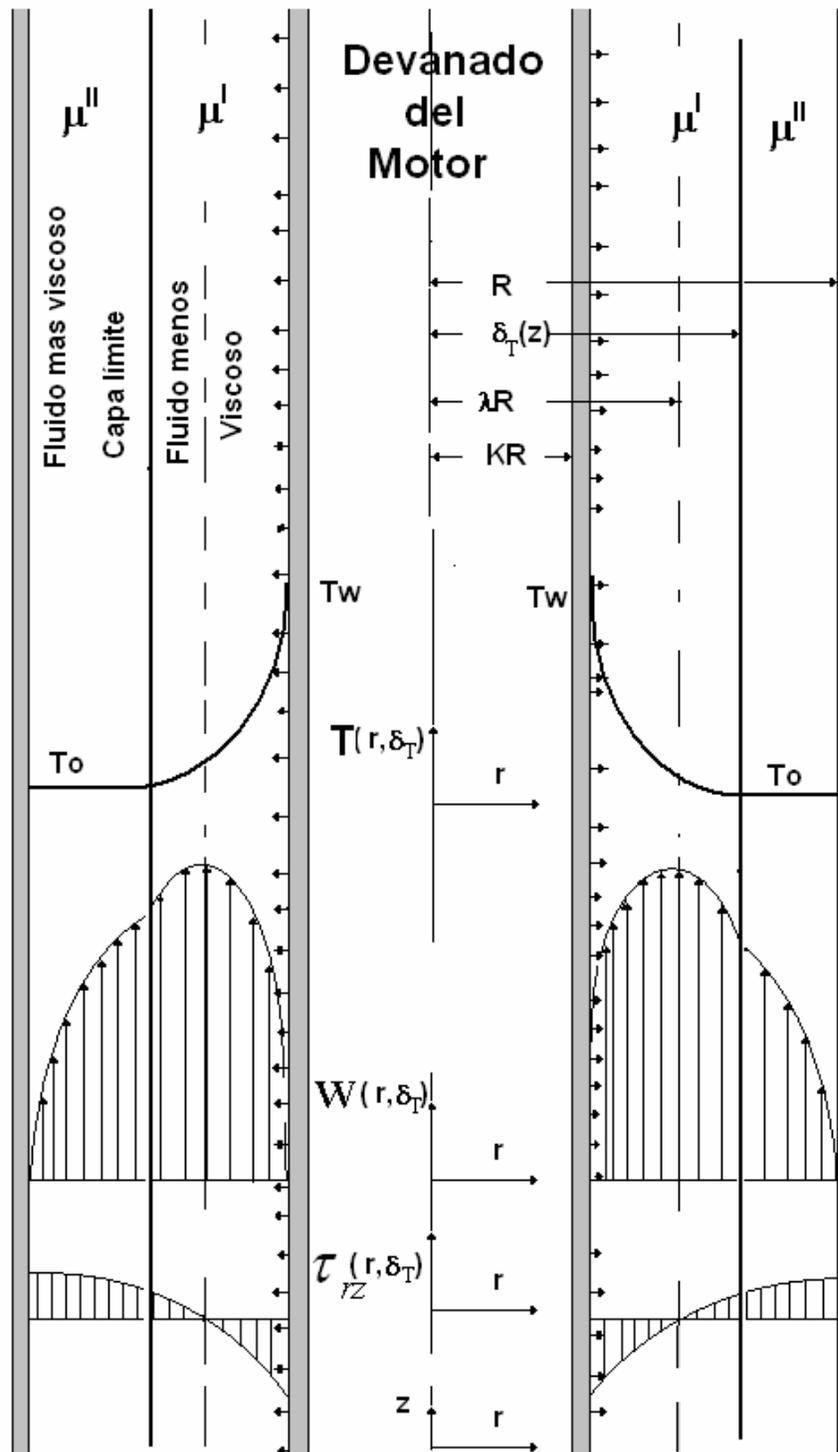


Fig. 5.3.1. Perfiles de esfuerzo, velocidad y temperatura como función de  $r$  y  $\delta_T$ .

---

### 5.3.1 Ecuación de cantidad de movimiento (perfil de esfuerzo adimensional)

Como la variación de  $\tau_{rz} = \tau(r, z) = \tau(r, \delta_T)$  con respecto a  $z$  es pequeña, se puede resolver la ecuación diferencial en derivadas parciales como una derivada total y su solución será válida para cada  $z$ . Una metodología análoga ha sido usada para resolver problemas de estado no estacionario, combinando ecuaciones de régimen estacionario con ecuaciones no estacionarias, esto se conoce en la bibliografía como procesos seudo estacionarios (Welty et al., 1999). La ecuación 4.1.22 se escribe

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{rz}) \right) - \rho g \quad (5.3.1)$$

De la ecuación de cantidad de movimiento anterior, se puede despejar el esfuerzo de corte; si se usa  $P = p + \rho g z$ , se obtiene:

$$\tau_{rz} = \frac{1}{2} \left( -\frac{dP}{dz} \right)_z r + \frac{C1}{r} \quad (5.3.2)$$

Se aplica la ecuación anterior a la región cerca de la pared, y lejos de la pared, usando el efecto bifásico tenemos:

$$\tau_{rz}^I = \frac{1}{2} \left( -\frac{dP}{dz} \right)_z r + \frac{C1^I}{r} \quad (5.3.3)$$

$$\tau_{rz}^{II} = \frac{1}{2} \left( -\frac{dP}{dz} \right)_z r + \frac{C1^{II}}{r} \quad (5.3.4)$$

Donde:

Fase I = Región cerca de la superficie de calentamiento

Fase II = Región fuera de la capa limite

Usando la siguiente condición de frontera:

$$\text{C.L.1 en } r = \delta_T \quad \tau_{rz}^I = \tau_{rz}^{II} \quad (5.3.5)$$

Se obtiene que  $C_1^I = C_1^{II} = C_1$ , usando este resultado en (5.3.3) o (5.3.4):

$$\tau_{rz} = \frac{1}{2} \left( -\frac{dP}{dz} \right)_z \cdot r + \frac{C_1}{r} \quad (5.3.6)$$

Significa que el perfil de esfuerzo es el mismo para ambas fases o regiones y continuo a través de la interfase, dependiente de la coordenada axial  $z$ , o de  $\delta_T$  a través de que  $\delta_T(z)$ .

Estas ecuaciones pueden ponerse convenientemente en función de  $\delta_T$ , a través de una variable combinada  $\eta$  (que se definirá mas adelante, ver anexo C);  $\delta_T$  podrá ser determinado combinando la ecuación de energía y continuidad como se mostrará mas adelante.

### 5.3.2 Ecuación de cantidad de movimiento y ley de Newton de la viscosidad (Ecuaciones para obtener el perfil de velocidad)

Si se sustituye la ley de newton de la viscosidad  $\tau_{rz} = -\mu \frac{dw}{dr}$ , en la ecuación de cantidad de movimiento (5.3.6), se llega a las siguientes relaciones:

$$-\mu^I \frac{dw^I}{dr} = \frac{1}{2} \left( -\frac{dP}{dz} \right)_z \cdot r + \frac{C_1}{r} \quad \text{Fase I} \quad (5.3.7)$$

$$-\mu^{II} \frac{dw^{II}}{dr} = \frac{1}{2} \left( -\frac{dP}{dz} \right)_z \cdot r + \frac{C_1}{r} \quad \text{Fase II} \quad (5.3.8)$$

Estas ecuaciones pueden integrarse para obtener el perfil de velocidad. Estas ecuaciones también se expresarán en función de  $\delta_T$ , a través de una variable

combinada  $\eta$  (que se definirá mas adelante, ver anexo C);  $\delta_T$  podrá ser determinado combinando la ecuación de energía y continuidad como se mostrará mas adelante

### 5.3.2.1 Perfil de viscosidad Adimensional

Para considerar la influencia de la viscosidad con la temperatura, se supondrá un ajuste exponencial (White, 2004):

$$\mu = A \cdot e^{-B \cdot T} \quad (5.3.9)$$

Donde A y B, pueden determinarse a partir de datos experimentales, y la ecuación 5.3.12, puede utilizarse para calcular la viscosidad  $\mu_o$  a la temperatura del fluido a la entrada  $T_o$  y la viscosidad del fluido  $\mu_w$  a la temperatura de pared  $T_w$ .

$$\mu_o = A_1 \cdot e^{-B_1 \cdot T_o}, \quad \mu_w = A_1 \cdot e^{-B_1 \cdot T_w} \quad (5.3.10) \text{ y } (5.3.11)$$

Manipulando las relaciones (5.3.12), (5.3.13), (5.3.14) se llega a:

$$\frac{\mu}{\mu_w} = e^{\ln\left(\frac{\mu_o}{\mu_w}\right) \left(\frac{T-T_w}{T_o-T_w}\right)} \quad (5.3.12)$$

Definiendo la temperatura adimensional se puede escribir:

$$\frac{\mu}{\mu_w} = e^{\ln\left(\frac{\mu_o}{\mu_w}\right) \Theta} = e^{B \cdot \Theta(\eta)} \quad (5.3.13)$$

$$\Theta = \left(\frac{T - T_w}{T_o - T_w}\right) \quad (5.3.14)$$

Donde  $B = \ln\left(\frac{\mu_o}{\mu_w}\right)$  y  $\Theta$  puede expresarse convenientemente como función de  $\delta_T$ ,

a través de la variable combinada  $\eta$ ,  $\Theta = \Theta(\eta)$ .

---

Esta última ecuación (5.3.11), se llamará viscosidad adimensional, ya que depende de la temperatura adimensional, y se expresa en parámetros adimensionales. Esta relación será muy útil en la solución del perfil de velocidad.

El perfil de temperatura adimensional,  $\Theta = \Theta(\eta)$ , como se muestra en el anexo C, puede aproximarse mediante funciones polinómicas de la variable  $\eta$ . Esta aproximación permite desacoplar la ecuación de cantidad de movimiento de la ecuación energía.

### **5.3.3 Ecuación de energía y ecuación de continuidad (capa límite térmica $\delta_T$ )**

Para hallar como varía el radio del espesor de la capa límite térmica,  $\delta_T$ , se usará el método integral de Von Kármán que combina la ecuación de continuidad con la ecuación de energía (ecuaciones de capa límite de Prandtl en forma integral)(citado por White F., 2004, Welty J., 1999, Bird et al 2006, Shames I., 1995, Schlichting, 1979, Bejan A., 1996).

#### **5.3.3.1 Método integral de Von Kármán**

La teoría de capa límite propuesta por Prandtl (citado por White F., 2004), sugiere la existencia de una región cerca de la superficie donde está presente el efecto de la transferencia de calor. Para describir el comportamiento cerca de la pared de calentamiento, utilizando la teoría de capa límite, se usará un sistema de coordenadas bidimensional para el flujo alrededor del cilindro interno; entre la superficie externa del cilindro interno y el límite aproximado de la capa límite. En el anexo C, se muestra el procedimiento para obtener de las ecuaciones de energía y continuidad las ecuaciones de balance de energía y masa en forma integral.

De un balance de energía integral aplicado a la región de capa límite, se obtiene un resultado conocido en la bibliografía (ver Larsen 1984):

$$\frac{d}{dz} \int_{KR}^{\delta_T} w(T - T_o) dy = - \frac{k}{\rho \cdot cp} \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{y=0} \quad (5.3.15)$$

La ecuación (5.3.15), permite calcular el radio del espesor de capa límite térmica,  $\delta_T$ , en función de la posición axial (z), si se conocen los perfiles de velocidad y temperatura.

#### 5.4. Modelo simplificado, normalización y números adimensionales

##### Perfil de esfuerzo:

Del anexo C, se tiene las siguientes variables adimensionales:

$$\left( -\frac{dP}{dz} \right)_\eta = \frac{\left( -\frac{dP}{dz} \right)_z}{\left( -\frac{dP}{dz} \right)_o} \quad \tau_{rz\eta} = \frac{\tau_{rz}}{\left( -\frac{dP}{dz} \right)_o R}$$

Por lo que el perfil adimensional es:

$$\tau_{rz\eta} = \frac{1}{2} \left( -\frac{dP}{dz} \right)_\eta \frac{r}{R} + \frac{C_1}{\left( -\frac{dP}{dz} \right)_o R^2} \frac{R}{r}$$

##### Perfil de velocidad:

Del anexo C, se tiene las siguientes variables adimensionales:

$$V_s = \frac{1}{2} \left( -\frac{dP}{dz} \right)_z \frac{R^2}{\mu_w} \quad \eta = \frac{r - KR}{\delta_T - KR} \quad \Delta = \frac{\delta_T}{R} \quad r_i = \frac{r}{R}$$

---


$$w_{\eta,I}(\eta) = \frac{w^I}{V_S}, \quad w_{\eta,II}(\eta) = \frac{w^{II}}{V_S} \quad \Theta = \left( \frac{T - T_w}{T_o - T_w} \right)$$

Por lo que de las siguientes ecuaciones se puede obtener el perfil de velocidad adimensional:

Para la fase I

$$-e^{\ln\left(\frac{\mu_0}{\mu_w}\right)\Theta(\eta)} \frac{dw_{\eta,I}}{d\eta} = \frac{[\eta(\delta_T - KR) + KR](\delta_T - KR)}{R^2} + \frac{C1(\delta_T - KR)}{V_S\mu_w[\eta(\delta_T - KR) + KR]}$$

Para la fase II

$$-\frac{dw_{\eta,II}}{d\eta} = \frac{\mu_w}{\mu_0} \frac{[\eta(\delta_T - KR) + KR](\delta_T - KR)}{R^2} + \frac{C1(\delta_T - KR)}{V_S\mu_0[\eta(\delta_T - KR) + KR]}$$

Al usar uno de los siguientes perfiles de temperatura, se desacoplan las ecuaciones anteriores (perfiles de velocidad) de la ecuación de energía (ver anexo C).

Caso 1:  $\Theta = \eta$ ,

Caso 2:  $\Theta = 2\eta - \eta^2$

Las ecuaciones del perfil de velocidad tienen solución analítica con las siguientes condiciones límite (ver anexo C):

C.L.2  $r = KR$ , o  $\eta = 0 \rightarrow w^I = 0$  y  $w_{\eta,I} = 0$

C.L.3  $r = \delta_T$ ,  $\eta = 1 \rightarrow w^I = w^{II}$  y  $w_{\eta,I} = w_{\eta,II}$

C.L.4  $r = R$ ,  $\eta = \frac{R - KR}{\delta_T - KR} = R' \rightarrow w^{II} = 0$  y  $w_{\eta,II} = 0$

El sistema representa un conjunto de dos ecuaciones diferenciales ordinarias con tres constantes de integración por determinar, C1 y dos constantes adicionales que

---

aparecen al integrar cada ecuación diferencial. Se puede observar que dependen del espesor o radio del espesor de capa límite térmica  $\delta_T$ .

**Espesor o radio del espesor de capa límite térmica  $\delta_T$ .**

Del anexo C, la ecuación de energía combinada con la ecuación de continuidad se tiene:

$$\int_0^{\Delta} (\Delta - K) \left( \frac{d}{d\Delta} (\Delta - K) \int_0^1 w_{\eta,t} (\Theta(\eta) - 1) d\eta \right) d\Delta \left( \frac{1}{\Theta'(0)} \right) = - \frac{1}{Graetz}$$

Estas ecuaciones describen completamente el fenómeno de interés, y sus parámetros adimensionales describen el flujo bajo estudio. Los números adimensionales obtenidos son:

Número de Reynolds, Re

Número de Prandtl, Pr

Relación de Longitud, L, sobre el radio, R.

Relación de viscosidades,  $\frac{\mu_w}{\mu_0}$ , o  $B = \ln \frac{\mu_w}{\mu_0}$

Número de Nusselt, que se obtiene a partir del perfil de temperatura como se demostrará más adelante.

Estos cinco parámetros adimensionales describen el sistema, y podrían ser correlacionados, realizando experimentos físicos o numéricos. En el siguiente capítulo se representarán estos parámetros al resolver paso a paso las ecuaciones indicadas en este capítulo. En la siguiente sección se indicará como calcular el gradiente de presión y número de Nusselt a partir de los resultados que se obtendrán al resolver las ecuaciones antes mencionadas (modelo desarrollado en este capítulo).

---

## 5.5 Análisis integral: caudal, caída de presión y calor total intercambiado.

En el análisis diferencial de los perfiles adimensionales se determinó la variación del esfuerzo, velocidad y temperatura como función de la coordenada radial y axial a través del espesor de capa límite térmica. Sin embargo interesa determinar la fuerza sobre la superficie, el gradiente de presión, caudal y la energía transferida a través de los límites del volumen de control; para ello se relacionarán los perfiles indicados con las variables de interés.

### 5.5.1. Flujo volumétrico adimensional.

La velocidad volumétrica se puede calcular por:

$$Q_{vol} = \int_0^{2\pi} \int_{KR}^R w r dr d\theta$$

Usando la definición de coordenada adimensional y velocidad adimensional dada por las ecuaciones 5.3.17 18 y 19, se obtiene

$$Q_{vol,\eta} = \frac{Q_{vol}}{V_S * (\delta_T - KR) * R} = \int_0^{2\pi} \int_{KR}^R w(\eta) \left( \frac{\eta(\delta_T - KR) + KR}{R} \right) d\eta d\theta \quad (5.5.1)$$

Al integrar sobre las zonas I y zona II para tener el caudal a través del volumen de control:

$$Q_{vol,\eta} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\delta_r'} w_{\eta,I} \left( \frac{\eta(\delta_T - KR) + KR}{R} \right) d\eta d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\delta_r'}^{R'} w_{\eta,II} \left( \frac{\eta(\delta_T - KR) + KR}{R} \right) d\eta d\theta \quad (5.5.2)$$

---

Donde  $R'$ ,  $R' = \frac{R - KR}{\delta_T - KR}$ , se determinará al conocer  $\delta_T$ , lo cual se indica mas adelante.

Esta expresión permite encontrar la velocidad característica,  $V_s$ , ya que el caudal de entrada es un valor conocido (dato de entrada) y a partir de ella encontrar la caída de presión como función del espesor de capa límite térmica.

### 5.5.2. Gradiente de presión adimensional:

Integrar la ecuación de cantidad de movimiento (5.3.1), se puede relacionar la caída de presión con el esfuerzo cortante evaluado en la superficie:

$$(P_o - P_L) = \frac{1}{A_{sección}} \iint_{sc} \tau_{rz}|_{superficie} dA + \rho g_z \quad (5.5.3)$$

La ecuación (5.4.3) permite calcular la caída de presión, si se conoce el perfil de esfuerzo. El perfil de esfuerzo, al igual que el de velocidad y temperatura es conocido como función del radio del espesor de la capa límite térmica ( $\delta_T$ ), el cual es conocido de la ecuación de energía.

### 5.6 Número de Nusselt y coeficiente de transmisión de calor por convección h para flujo interno.

Para flujo interno el coeficiente de transferencia de calor se puede relacionar con la conducción en la pared por:

$$q = -k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=KR} = h \cdot (T_w - T_b) \quad (5.6.1)$$

Usando la definición de Nusselt, usando como longitud característica el radio externo del tubo:

$$Nu = \frac{h \cdot R}{k}, \quad (5.6.2)$$

Por consiguiente:

$$Nu = \frac{R \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=KR}}{(T_b - T_w)} \quad (5.6.3)$$

Por otra parte:

$$\Theta(\eta) = \frac{(T - T_w)}{(T_o - T_w)}, \eta = \frac{r - KR}{\delta_T - KR} \quad (5.6.4)$$

Usando la definición anterior ecuación 5.6.4 en la 5.6.3 se obtiene:

$$Nu = \frac{R \cdot \left. \frac{(T_o - T_w)}{\delta_T - KR} \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=0}}{(T_b - T_w)} \quad (5.6.5)$$

De lo que se obtiene que el número de Nusselt local se puede calcular con:

$$Nu = \frac{R}{\delta_T - KR} \frac{\Theta'(0)}{\Theta_b(\eta)} \quad (5.6.6)$$

Donde:

$$\Theta_b = \frac{(T_b - T_w)}{(T_o - T_w)}, \text{ Perfil de temperatura de mezcla (adimensional)}$$

$\Theta'(0)$ , es la derivada del perfil adimensional de temperatura y evaluado en  $\eta=0$ .

La ecuación (5.6.6), da la variación del número de Nusselt local, como función del radio del espesor de capa límite.

Se puede demostrar que si se define un coeficiente medio,  $\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h dz$ , en el caso de que la temperatura de pared sea constante, la transferencia de calor total, se puede calcular a partir de (ver Burmeister L. 1993):

$$\bar{q} = \bar{h} \cdot \Delta T_{\ln} \quad (5.6.7)$$

Donde la fuerza impulsora media logarítmica se calcula por:

$$\Delta T_{\ln} = \frac{(T_w - T_o) - (T_w - T_s)}{\ln \left( \frac{(T_w - T_o)}{(T_w - T_s)} \right)} \quad (5.6.8)$$

En donde  $T_s$  es la temperatura media de mezcla a la salida del conducto. Con el coeficiente medio o número de Nusselt medio se calculado con:

$$\bar{Nu} = \frac{\bar{h} \cdot R}{k} = -\frac{\ln(\Theta_b)}{z'} = \frac{1}{z'} \int_0^{z'} Nu \cdot dz' \quad (5.6.9)$$

Donde  $z'$ , es el número de Graetz:

$$\frac{1}{z'} = \frac{z}{R} \cdot \frac{1}{Re \cdot Pr} \quad (5.6.10)$$

Se puede observar que el inverso de  $z'$  o del número de Graetz, puede interpretarse como un longitud axial adimensional.

La siguiente sección se dedica a como calcular  $T_b$ , a partir de los perfiles de velocidad, y temperatura adimensional. Este perfil de  $T_b$ , se podrá expresar en función del radio de la capa límite térmica, la cual es conocida. Por consiguiente, a partir del resultado de  $T_b$  adimensional, se podrá calcular el número de Nusselt promedio y compararlo con datos de la bibliografía abierta.

### 5.7 Temperatura media de flujo, $T_b$ , en forma adimensional, $\Theta_b$ :

Para el caso de un sistema anular, la temperatura media de mezcla o media de flujo, también conocida como temperatura global por  $T_b$ :

$$T_b = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{KR}^R T w r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_{KR}^R w r dr d\theta} \quad (5.7.1)$$

La cual se puede escribir en variable adimensional como:

$$\Theta_b = \frac{T_b - T_w}{T_o - T_w} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{KR}^R \frac{T - T_w}{T_o - T_w} \frac{w}{V_s} r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_{KR}^R \frac{w}{V_s} r dr d\theta} \quad (5.7.2)$$

Por consiguiente:

$$\Theta_b = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{KR}^R \Theta(\eta) \cdot w_\eta \cdot (\eta(\delta_T - KR) + KR) d\eta d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_{KR}^R w_\eta (\mu(\delta_T - KR) + KR) d\eta d\theta} \quad (5.7.3)$$

Tomando en cuenta que hay dos zonas dentro del fluido (efecto bifásico):

$$\Theta b = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\delta_T} \Theta \cdot w_{\eta,I} \cdot (\eta(\delta_T - KR) + KR) d\eta d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\delta_T} w_{\eta,I} (\eta(\delta_T - KR) + KR) d\eta d\theta} + \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{R'} \Theta \cdot w_{\eta,II} \cdot (\eta(\delta_T - KR) + KR) d\eta d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\delta_T} w_{\eta,II} (\eta(\delta_T - KR) + KR) d\eta d\theta}$$

(5.7.4)

Por lo que se puede escribir (usando la definición de caudal adimensional, ver ecuación 5.4.1):

$$\Theta b = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\delta_T} \Theta \cdot w_{\eta,I} \cdot (\eta(\Delta - K) + K) d\eta d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^{R'} \Theta \cdot w_{\eta,II} \cdot (\eta(\Delta - K) + K) d\eta d\theta}{Q_{vol,\eta}}$$

(5.7.5)

En este capítulo a partir de una descripción detallada del fenómeno de convección forzada en fluidos altamente viscosos, se supuso en la zona de calentamiento el flujo de dos fluidos, análogo al de un flujo bifásico, donde el espesor de la capa límite limita la región de calentamiento cerca de la superficie, la cual se comporta como un fluido de viscosidad diferente. Con esta información y con la suposición de que el espesor de capa límite varía lentamente con la longitud axial, al modelo propuesto se le aplicó el método de combinación de variables, el cual permitió obtener un sistema de ecuaciones acopladas por la temperatura, cuya solución permitirá el estudio de la transferencia de calor en el caso de interés en este trabajo. Es importante resaltar que la suposición de un perfil aproximado polinómico de temperatura permite desacoplar la ecuación de cantidad de movimiento y energía, por lo que puede obtener una solución analítica aproximada, la cual será desarrollada en el siguiente capítulo para el caso de geometría plana.

---

---

**CAPÍTULO VI**

**SOLUCIÓN ANALÍTICA DEL MODELO Y DISCUSIÓN DE  
RESULTADOS**

---

---

---

## **CAPÍTULO VI**

### **SOLUCIÓN ANALÍTICA DEL MODELO Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS**

Hasta ahora se han manejado las ecuaciones fundamentales hasta el punto de que su manipulación analítica llevará hasta la solución, la cual podrá expresarse por medio de funciones simples o especiales, y podrá ser representada gráficamente para simular el flujo bajo estudio. Sin embargo en el capítulo III, Marco de Referencia, se señaló que el flujo viscoso ha sido estudiado para el caso de flujo interno en tuberías, por lo que en la bibliografía especializada se consiguen correlaciones que permiten estudiar el fenómeno de convección forzada para fluidos viscosos con relativamente baja variación de la viscosidad con la temperatura.

#### **6.1. Soluciones analíticas en geometrías simples**

La figura 6.1.1, muestra el flujo interno en un tubo y la representación del perfil de velocidad y del espesor de capa límite esperado en este caso. La figura 6.1.2 muestra el perfil de velocidad del flujo interno entre placas paralelas, se observa la similitud de los resultados. El procedimiento analítico del caso flujo entre placas es mas simple que el caso flujo interno en tubos, por ello la solución de flujo entre

placas paralelas suele usarse para estudiar el caso de flujo interno en tuberías (ver anexo A).

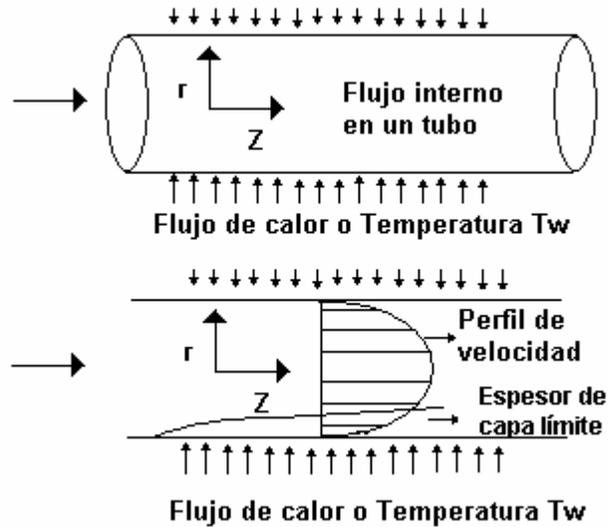


Figura 6.1.1 Flujo interno en un tubo, y sus perfiles

Es importante resaltar que la solución al fenómeno de convección forzada en conductos de sección rectangular (flujo entre placas paralelas), puede emplearse y ligeramente modificarse, para lograr una solución al flujo interno en un tubo. Esto es uno de los principales usos de las soluciones analíticas aproximadas

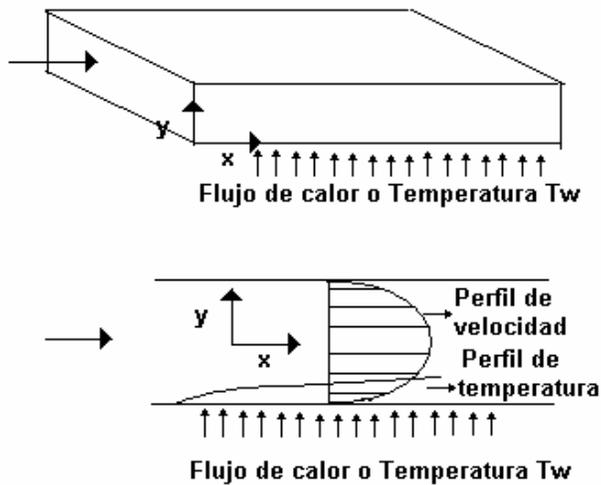


Fig. 6.1.2 Flujo interno entre placas paralelas.

---

## 6.2 Solución del modelo en placas paralelas

El autor no ha conseguido datos experimentales o modelos en la bibliografía para convección forzada en flujo anular con dependencia exponencial de la viscosidad, sin embargo para el caso de flujo entre placas paralelas existe una solución analítica para propiedades constantes y al existir ligera variación de la viscosidad con la temperatura como se mencionó en la revisión bibliográfica, se puede usar la correlación propuesta por Sieder y Tate en 1935. Por ello resulta útil resolver el caso de convección forzada con dependencia exponencial de la viscosidad con la temperatura para geometrías planas, de tal manera de que se puedan validar los resultados que se generen de la solución analítica. El modelo que resulte de la geometría de placas puede ser ajustado con datos experimentales o datos de experimentación numérica. Además, al probarse el modelo de convección forzada entre placas paralelas simultáneamente se estará validando el modelo anular propuesto en el capítulo 5, el cual representaría la solución correcta del flujo en tuberías y conductos de sección anular.

La figura 6.2.1 muestra los perfiles esperados en el caso de flujo entre placas paralelas; muestra además el efecto de flujo bifásico esperado por estar la zona I, zona caliente y cercana a la pared, y la zona II, zona lejos de la pared.

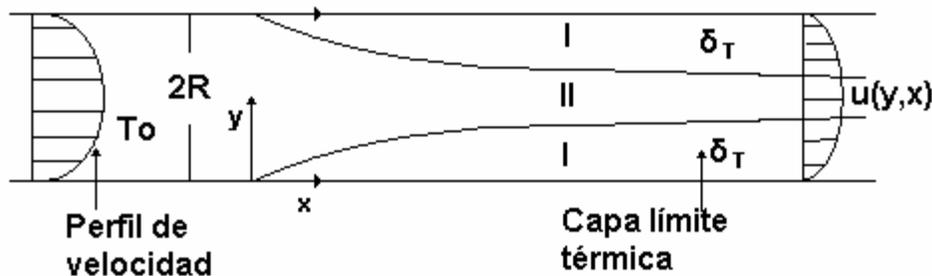


Fig. 6.2.1 Modelo para placas planas.

---

### 6.2.1 Perfil de esfuerzo adimensional:

Escribiendo el perfil de esfuerzo para el caso de placas planas, proceso análogo al desarrollado en el capítulo V, se tiene para la fase I, escrito en forma local:

$$\tau_{xy}^I = \left( -\frac{dP}{dx} \right)_x \cdot y + C1^I \quad (6.2.1)$$

Para la fase II:

$$\tau_{xy}^{II} = \left( -\frac{dP}{dx} \right)_x \cdot y + C1^{II} \quad (6.2.2)$$

Este perfil sujeto a las condiciones de frontera:

$$\text{C.L.1: } y = \delta_T, \quad \tau_{xy}^I = \tau_{xy}^{II}, \text{ implica } C1^I = C1^{II} = C1 \quad (6.2.3)$$

$$\text{CL2: } y = R, \quad \tau_{xy}^{II} = 0, \text{ implica } C1 = -\left( -\frac{dP}{dx} \right)_x \cdot R \quad (6.2.4)$$

Por consiguiente el perfil de esfuerzo se puede escribir:

$$\tau_{xy}^I = \tau_{xy}^{II} = \tau_{xy} = \left( -\frac{dP}{dx} \right)_x \cdot R \cdot \left( \frac{y}{R} - 1 \right) \quad (6.2.5)$$

Usando el siguiente cambio de variable:

$$\eta = \frac{y}{\delta_T}, \Delta = \frac{\delta_T}{R} \quad (6.2.6)$$

$\delta_T = \delta$ , ya que solo existe el espesor de capa límite térmica

---

Se escribe el perfil de esfuerzo:

$$\tau_{xy} = \left( -\frac{dP}{dx} \right)_x \cdot R(\Delta \cdot \eta - 1) \quad (6.2.7)$$

Si se define:

$$\tau_{xy\eta} = \frac{\tau_{xy}}{\left( -\frac{dP}{dx} \right)_x R} \quad (6.2.8)$$

Se puede escribir

$$\tau_{xy\eta} = (\eta\Delta - 1) \quad (6.2.9)$$

Por lo que se debe determinar el gradiente de presión,  $\left( -\frac{dP}{dx} \right)_x$

El resultado del gradiente presión da información sobre el esfuerzo local aplicado en la sección del conducto donde el espesor de la capa límite tiene un valor  $\delta_T = \delta$ .

En lo que sigue se definirán los perfiles de esfuerzo dependiendo de la suposición del perfil de temperatura:

Para el caso en que el perfil aproximado de temperatura sea lineal se puede escribir:

$$\tau_{xy1} = \left( -\frac{dP}{dx} \right)_{x1} R \left( \frac{y}{R} - 1 \right) \quad (6.2.10)$$

---

Donde el número uno (1), en números arábigos indica que se esta usando un perfil aproximado de temperatura lineal como función de la variable combinada  $\eta$ .

Si se define:

$$\tau_{xy\eta 1} = \frac{\tau_{xy1}}{\left(-\frac{dP}{dx}\right)_{x1}} R \quad (6.2.11)$$

Se puede escribir:

$$\tau_{xy\eta 1} = (\eta\Delta - 1) \quad (6.2.12)$$

En donde  $\Delta$  se calcula suponiendo un perfil de temperatura lineal.

Para el caso en que el perfil aproximado de temperatura es cuadrático se puede escribir:

$$\tau_{xy2} = \left(-\frac{dP}{dx}\right)_{x2} R \left(\frac{y}{R} - 1\right) \quad (6.2.13)$$

Si se define:

$$\tau_{xy\eta 2} = \frac{\tau_{xy2}}{\left(-\frac{dP}{dx}\right)_{x2}} R \quad (6.2.14)$$

Se puede escribir:

$$\tau_{xy\eta 2} = (\eta\Delta - 1) \quad (6.2.15)$$

Donde el número dos (2), en números arábigos indica que se esta usando un perfil aproximado de temperatura cuadrático como función de la variable combinada  $\eta$ .

$\Delta$  se calcula suponiendo un perfil de temperatura cuadrático.

Para el perfil donde las propiedades son constantes:

$$\tau_{xy\eta 0} = \frac{\tau_{xy0}}{\left(-\frac{dP}{dx}\right)_{x0}} R \quad (6.2.16)$$

$$\tau_{xy\eta 0} = (\eta\Delta - 1) \quad (6.2.17)$$

### 6.3 Perfil de velocidad adimensional:

Sustituyendo la ley Newton de la viscosidad, y la viscosidad adimensional obtenida en el capítulo anterior en la ecuación 6.2.5 se tiene:

Para la Fase I:

$$-\frac{du_{\eta,I}}{d\eta} = -\mu_r \cdot \Delta(\eta \cdot \Delta - 1) \cdot e^{-B \cdot \Theta(\eta)} \quad (6.3.1)$$

Para la fase II:

$$-\frac{du_{\eta,II}}{d\eta} = -2 \cdot \Delta(\eta \cdot \Delta - 1) \quad (6.3.2)$$

Donde la velocidad adimensional en la fase I y II se define:

---


$$u_{\eta,I} = \frac{u_I}{u_s}, \quad u_{\eta,II} = \frac{u_{II}}{u_s} \quad \text{con} \quad u_s = \frac{1}{2} \frac{R^2}{\mu_0} \left( -\frac{dP}{dx} \right)_x \quad \text{y} \quad \mu_r = \frac{\mu_o}{\mu_w} \quad (6.3.3a, b, c \text{ y } d)$$

Las ecuaciones 6.3.1 y 6.3.2 deben combinarse con los perfiles aproximados de temperatura que análogo al caso de flujo anular (capítulo V), para placas planas (ver Larsen P., 1984):

$$\begin{aligned} \Theta(\eta) &= \eta \\ \Theta(\eta) &= 2\eta - \eta^2 \\ \Theta(\eta) &= \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3 \end{aligned} \quad (6.3.4a, b, c)$$

De aquí que se debe seleccionar un perfil de temperatura aproximado para usarlo en el perfil de velocidad, de tal manera de poder conseguir un perfil de velocidad en variables de similitud o variable combinada  $\eta$ . Por consiguiente, se pueden determinar tres tipos de soluciones, una para cada perfil. En lo adelante se resolverá el problema usando el perfil lineal y cuadrático, lo que permitirá comparar entre soluciones, y con soluciones de la bibliografía para el caso isotérmico, mostrándose así el efecto de tomar en cuenta el cambio exponencial de la viscosidad con la temperatura.

Estas ecuaciones diferenciales están sujetas a las siguientes condiciones de frontera:

$$\text{C.L.3 } y=0 \quad u=0, \quad \rightarrow \quad \eta = 0, \quad u_{\eta} = 0 \quad (6.3.5)$$

$$\text{C.L.4 } y=\delta_T \quad u_I = u_{II} \quad \rightarrow \quad \eta = 1, \quad u_{\eta,I} = u_{\eta,II} \quad (6.3.6)$$

---

#### 6.4 Perfil de velocidad adimensional en variable de similitud, usando un perfil de temperatura lineal:

Sustituyendo el perfil de temperatura lineal en las ecuaciones de movimiento 6.3.1 y 6.3.2 se tiene:

Para la Fase I:

$$-\frac{du_{\eta,I}}{d\eta} = -2\mu_r \cdot \Delta(\eta \cdot \Delta - 1) \cdot e^{-B \cdot \eta} \quad (6.4.1)$$

Para la fase II:

$$-\frac{du_{\eta,II}}{d\eta} = -2 \cdot \Delta(\eta \cdot \Delta - 1) \quad (6.4.2)$$

Donde la velocidad adimensional ( $u_{\eta}$ ) en la fase I y II se define tomando en cuenta que se esta usando el perfil aproximado de temperatura lineal:

$$u_{\eta,I} = \frac{u_{I}}{u_s}, \quad u_{\eta,II} = \frac{u_{II}}{u_s} \quad \text{con} \quad u_s = \frac{1}{2} \frac{R^2}{\mu_0} \left( -\frac{dP}{dx} \right)_{x1}, \quad \mu_r = \frac{\mu_o}{\mu_w} \quad (6.4.3a, b, c \text{ y } d)$$

Al integrar en la fase I, y en la fase II, las ecuaciones 6.4.1 y 6.4.2 usando las condiciones de borde dadas por las ecuaciones (6.3.5) y (6.3.6) se tiene (se utilizó el programa Maple, donde  $u_{\eta,I}(\eta)$  se escribe como  $u_{\eta,I} := \eta \longrightarrow$ ):

**Resultados:** *Perfiles de velocidad adimensional en variable combinada o en variable adimensional, usando un perfil de temperatura lineal:*

$$u_{\eta,I} := \eta \longrightarrow \frac{2(-B + \Delta + B \eta \Delta) \mu_r \Delta e^{(-B \eta)}}{B^2} - \frac{2(-B + \Delta) \mu_r \Delta}{B^2} \quad (6.4.4)$$

$$u1_{\eta, II} := \eta \rightarrow$$

$$-2 \Delta \left( \frac{1}{2} \eta^2 \Delta - \eta \right) + 2 \Delta \left( \frac{\Delta}{2} - 1 \right) + \frac{2(-B + \Delta + \Delta B) \mu_r \Delta e^{(-B)}}{B^2} - \frac{2(-B + \Delta) \mu_r \Delta}{B^2}$$

(6.4.5)

Para calcular la velocidad característica,  $u1_s$ ,  $u1_s = \frac{1}{2} \frac{R^2}{\mu_0} \left( -\frac{dP}{dx} \right)_{x1}$ , se debe conocer el valor del gradiente de presión,  $\left( -\frac{dP}{dx} \right)_{x1}$ , que se determinará mas adelante.

### 6.5 Perfil de velocidad adimensional en variable de similitud, usando un perfil de temperatura cuadrático:

Realizando un tratamiento análogo al de la sección 6.4 se tiene:

Para la Fase I:

$$-\frac{du2_{\eta, I}}{d\eta} = -\mu_r \cdot \Delta (\eta \cdot \Delta - 1) \cdot e^{-B \cdot (-2\eta - \eta^2)} \quad (6.5.1)$$

Para la fase II:

$$-\frac{du2_{\eta, II}}{d\eta} = -2 \cdot \Delta (\eta \cdot \Delta - 1) \quad (6.5.2)$$

Donde la velocidad adimensional ( $u2_{\eta}$ ) en la fase I y II se define tomando en cuenta que se esta usando el perfil aproximado de temperatura cuadrático:

$$u2_{\eta, I} = \frac{u2_I}{u2_s}, \quad u2_{\eta, II} = \frac{u2_{II}}{u2_s} \quad \text{con } u2_s = \frac{1}{2} \frac{R^2}{\mu_0} \left( -\frac{dP}{dx} \right)_{x2} \quad \text{y } \mu_r = \frac{\mu_o}{\mu_w} \quad (6.5.3a, b, c \text{ y } d)$$

Al integrar en la fase I, y en la fase II, las ecuaciones 6.5.1 y 6.5.2 usando las condiciones de borde dadas por las ecuaciones (6.3.5) y (6.3.6) se tiene:

**Resultados:** *Perfiles de velocidad adimensional en variable de similitud, usando un perfil de temperatura cuadrático:*

$$\begin{aligned}
 u_{2_{\eta, I}} := \eta \rightarrow & -\frac{\mu_r \Delta^2 e^{(B \eta)^2}}{B (e^{(B \eta)^2})^2} + \frac{\mu_r \Delta^2 \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{B \eta}{\sqrt{-B}} - \frac{B}{\sqrt{-B}}\right)}{\sqrt{-B} e^B} \\
 & - \frac{\mu_r \Delta \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{B \eta}{\sqrt{-B}} - \frac{B}{\sqrt{-B}}\right)}{\sqrt{-B} e^B} + \frac{\mu_r \Delta^2}{B} + \frac{\mu_r \Delta^2 \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{B}{\sqrt{-B}}\right)}{\sqrt{-B} e^B} \\
 & - \frac{\mu_r \Delta \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{B}{\sqrt{-B}}\right)}{\sqrt{-B} e^B}
 \end{aligned} \tag{6.5.4}$$

$$\begin{aligned}
 u_{2_{\eta, II}} := \eta \rightarrow & -2 \Delta \left(\frac{1}{2} \eta^2 \Delta - \eta\right) + 2 \Delta \left(\frac{\Delta}{2} - 1\right) - \frac{\mu_r \Delta^2}{B e^B} + \frac{\mu_r \Delta^2}{B} + \frac{\mu_r \Delta^2 \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{B}{\sqrt{-B}}\right)}{\sqrt{-B} e^B} \\
 & - \frac{\mu_r \Delta \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{B}{\sqrt{-B}}\right)}{\sqrt{-B} e^B}
 \end{aligned} \tag{6.5.5}$$

Para calcular la velocidad característica  $u_{2_s}$ ,  $u_{2_s} = \frac{1}{2} \frac{R^2}{\mu_0} \left(-\frac{dP}{dx}\right)_{x_2}$ , se debe conocer el valor del gradiente de presión,  $\left(-\frac{dP}{dx}\right)_{x_2}$ , por lo que se determinará en la próxima sección.

---

**6.6. Cálculo del gradiente de presión usando resultados de los perfiles de velocidad obtenidos suponiendo perfil aproximado de temperatura lineal.**

Para calcular,  $\left(-\frac{dP}{dx}\right)_{x1}$ , se usa el balance global de masa, entre la sección de entrada a la zona de calentamiento y una posición cualquiera x: para el caso de densidad constante:

$$Q_{entrada} = Q_{salida} \quad (6.6.1)$$

$$Q_{entrada1_o} = Q_{salida1_{x1}} \quad \text{o} \quad Q_{entrada1_o} = Q_{salida1_{\delta1}} \quad (6.6.2)$$

En donde,  $\delta$ , es el espesor de la capa límite térmica para el perfil de temperatura lineal.

El *caudal de entrada* puede calcularse suponiendo perfil de velocidad completamente desarrollado en la región de entrada a la zona de calentamiento; si se usan las variables  $\eta$  y  $\Delta$  en lugar de  $y$ , se puede escribir para el caudal de entrada:

$$Q_{entrada1_o} := 2 W \delta u_o \int_0^{\frac{1}{\Delta}} u_{cte}(\eta) d\eta \quad (6.6.3)$$

$$\text{Donde } u_o, \text{ es } u_o = \frac{1}{2} \frac{R^2}{\mu_0} \left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)_o \quad (6.6.4)$$

W es el ancho de la canaleta rectangular

$$u_{cte}(\eta)$$

es el perfil de velocidad adimensional para flujo dinámicamente establecido escrito en la variable combinada  $\eta$ , y la variable adimensional  $\Delta$ , con propiedades físicas constantes:

$$u_{cte} := \eta \rightarrow 2 \Delta \eta - \Delta^2 \eta^2 \quad (6.6.5)$$

La caída de presión,  $\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)_o = \left(-\frac{dP}{dx}\right)_o$ , (iguales ya que la presión P es solo función de x, se usó minúscula como variable por recomendación en el uso del programa de calculo simbólico Maple usado en este trabajo, ya que algunas variables mayúsculas están restringidas).  $\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)_o$  antes de la zona de calentamiento se puede estimar al combinar las ecuaciones 6.6.3 con 6.3.4:

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)_o = \frac{\mu_o Q_{entrada}_o}{W \delta R^2 \left[ \int_0^{\frac{1}{\Delta}} u_{cte}(t) dt \right]} \quad (6.6.6)$$

El caudal a la salida  $Q_{salida}_{x1} = Q_{salida}_{\delta 1}$  es el caudal para una cierta distancia x, para el cual el espesor de capa límite térmica es  $\delta$  ( $\delta 1$  o  $x1$ , indica que se ha tomado un perfil lineal); se puede calcular de la siguiente ecuación adimensional (considerando las dos fases propuestas y la definición de caudal análogo a la ecuación 6.6.3):

$$Q_{salida}_{\delta 1} := 2 W \delta u_{\delta 1} \left( \int_0^1 u_{\eta, I}(t) dt + \int_1^{\frac{1}{\Delta}} u_{\eta, II}(t) dt \right) \quad (6.6.7)$$

Donde  $u_{\delta 1}$ , es la velocidad característica y  $t = \eta$ , variable de integración:

$$u_{\delta 1} = \frac{1}{2} \frac{R^2}{\mu_0} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{\delta 1} \quad (6.6.8)$$

Por lo que se puede calcular la caída de presión  $\left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{\delta 1}$

$$\left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{\delta 1} = \frac{\mu_o Q_{entrada} l_o}{W \delta R^2 \left[ \int_0^1 u l_{\eta, I}(t) dt + \int_1^{\frac{1}{\Delta}} u l_{\eta, II}(t) dt \right]} \quad (6.6.9)$$

Para resolver las ecuaciones anteriores (6.6.6) y (6.6.9), y poder calcular el gradiente de presión, se debe combinar el perfil de velocidad local o de la zona de calentamiento (ecuaciones 6.4.4 y 6.4.5), con el perfil de velocidad a la entrada o dinámicamente desarrollado (ecuación 6.6.5).

Por lo que al sustituir e integrar dichos perfiles en la ecuación 6.6.3 y 6.6.7 se tiene:

Para la zona de entrada:

$$Q_{entrada} l_o := \frac{4}{3} \frac{W \delta u_o}{\Delta} \quad (6.6.10)$$

Al sustituir 6.6.10 en (6.6.6) se obtiene:

$$\left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right)_o = \frac{\mu_o Q_{entrada} l_o}{W \delta R^2 \left[ \frac{2}{3 \Delta} \right]}, \quad \text{o} \quad \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right)_o = \frac{3}{2} \frac{\mu_o Q_{entrada} l_o}{W R^3} \quad (6.6.11) \text{ y } (6.6.12)$$

Para el caudal de salida, al sustituir los perfiles de velocidad en la ecuación (6.6.7) se tiene que :

$$\begin{aligned}
 Q_{salida} \delta_1 := 2 W \delta u_{\delta_1} & \left( - \frac{2 \mu_r \Delta (\Delta e^{(-B)} B + 2 e^{(-B)} \Delta - e^{(-B)} B - B^2 + B \Delta - 2 \Delta + B)}{B^3} \right. \\
 & - \frac{\Delta^2 \left( \frac{1}{\Delta^3} - 1 \right)}{3} + \Delta \left( \frac{1}{\Delta^2} - 1 \right) - \frac{2 (-B + \Delta) \mu_r \Delta \left( \frac{1}{\Delta} - 1 \right)}{B^2} + 2 \Delta \left( \frac{\Delta}{2} - 1 \right) \left( \frac{1}{\Delta} - 1 \right) \\
 & \left. + \frac{2 (-B + \Delta + B \Delta) \mu_r \Delta e^{(-B)} \left( \frac{1}{\Delta} - 1 \right)}{B^2} \right) \quad (6.6.13)
 \end{aligned}$$

Al sustituir en la ecuación (6.6.9), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \left( - \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{\delta_1} & = \mu_o Q_{entrada} / \left( W \delta R^2 \left[ \right. \right. \\
 & - \frac{2 \mu_r \Delta (\Delta e^{(-B)} B + 2 e^{(-B)} \Delta - e^{(-B)} B - B^2 + B \Delta - 2 \Delta + B)}{B^3} + \frac{-1 + \Delta^3}{3 \Delta} - \frac{-1 + \Delta^2}{\Delta} \\
 & + \frac{2 (-B + \Delta) \mu_r (-1 + \Delta)}{B^2} - (\Delta - 2) (-1 + \Delta) \\
 & \left. \left. - \frac{2 (-B + \Delta + B \Delta) \mu_r e^{(-B)} (-1 + \Delta)}{B^2} \right] \right) \quad (6.6.14)
 \end{aligned}$$

La ecuación 6.6.14 permite determinar el gradiente de presión a una determinada posición x (que corresponde a un espesor de capa límite  $\delta_1$ ) ya que el caudal  $Q_{entrada}$  es conocido.  $\delta_1$  se puede calcular de un balance de energía integral. Esto se explicará mas adelante.

Se puede calcular la relación entre la caída de presión en la salida, a cualquier  $\delta_1$  (cualquier x distancia axial), y a la entrada, combinando la ecuación (6.6.11) y

(6.6.14), lo que permite estimar en cuanto disminuye las pérdidas de presión por efecto de la temperatura, y además obtener la caída de presión adimensional:

$$\frac{\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{\delta_1}}{\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)_o} = \left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{\eta_1} \quad (6.6.15)$$

$$\frac{\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{\delta_1}}{\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)_o} = -B^3 \left/ \left( \frac{6 \mu_r \Delta^3 B}{e^B} + \frac{6 \mu_r \Delta^3}{e^B} - \frac{6 \mu_r \Delta^2 B}{e^B} - 6 \mu_r \Delta^3 + 6 \mu_r \Delta^2 B - B^3 + B^3 \Delta^3 \right. \right.$$

$$\left. \left. - 3 B^3 \Delta^2 - 3 \mu_r B^2 \Delta + 3 B^3 \Delta + \frac{3 \mu_r B^2 \Delta}{e^B} - \frac{6 \mu_r B^2 \Delta^2}{e^B} + \frac{3 \mu_r B^2 \Delta^3}{e^B} \right) \right. \quad (6.6.16)$$

$\left(-\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{\eta_1}$  representa cómo varía el gradiente de presión en la región de calentamiento a medida que varía el espesor de la capa límite térmica.

La figura 6.6.1, representa como varía el gradiente de presión adimensional a medida que el espesor de capa límite crece, para distintos valores del parámetro B (es decir a medida que crece la longitud de la zona de calentamiento). B es el logaritmo de la relación entre la viscosidad del fluido a la entrada y la viscosidad del fluido en la pared de calentamiento,  $B = \ln\left(\frac{\mu_o}{\mu_w}\right)$ , por lo tanto en la medida que B aumenta, mayor es la diferencia de viscosidad entre la temperatura de pared y la del fluido (por ejemplo para el caso de estudio, cuando aumenta la temperatura de la pared, la

viscosidad de la pared,  $\mu_w$ , disminuye y B aumenta). Para un  $\Delta$  fijo la caída de presión es menor cuando B aumenta.

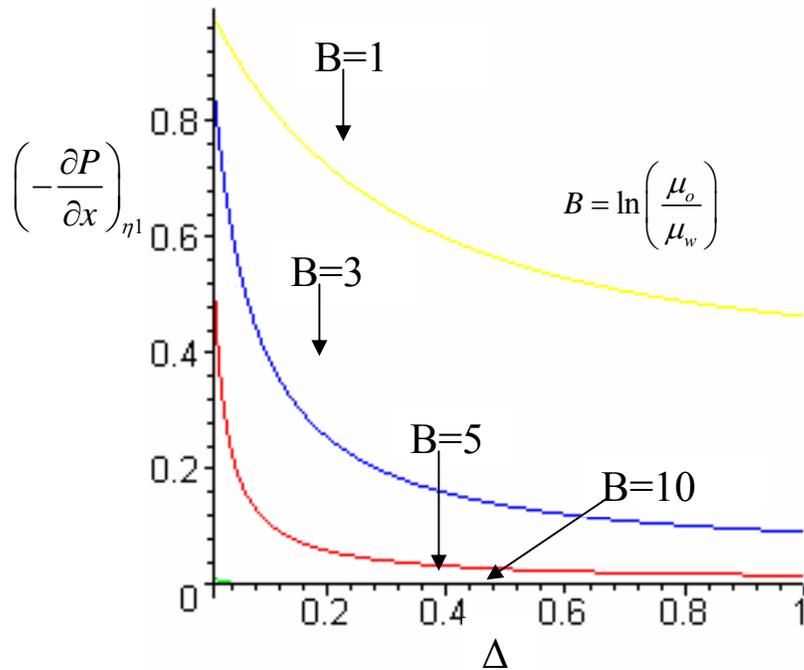


Fig. 6.6.1. Comportamiento del gradiente de presión en la zona de calentamiento en función del parámetro adimensional B. Perfil de temperatura lineal.

En la figura 6.6.1, se aprecia que en la medida que crece el espesor de la capa límite térmica la caída de presión local se hace menor, para un B dado, esto es a medida que el fluido avanza en la zona de calentamiento. Este efecto se atribuye a la disminución significativa de la viscosidad dentro de la región de capa límite térmica.

La figura 6.6.2, muestra una ampliación de la figura 6.6.1 para B=10, valores típicos de B, en calentamiento de crudos extrapesados. Se observa en la figura 6.6.2, que la caída de presión disminuye de forma significativa respecto del valor esperado si se considera isotérmico o modelo de propiedades constantes,  $\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{\eta_1} = 1$ .

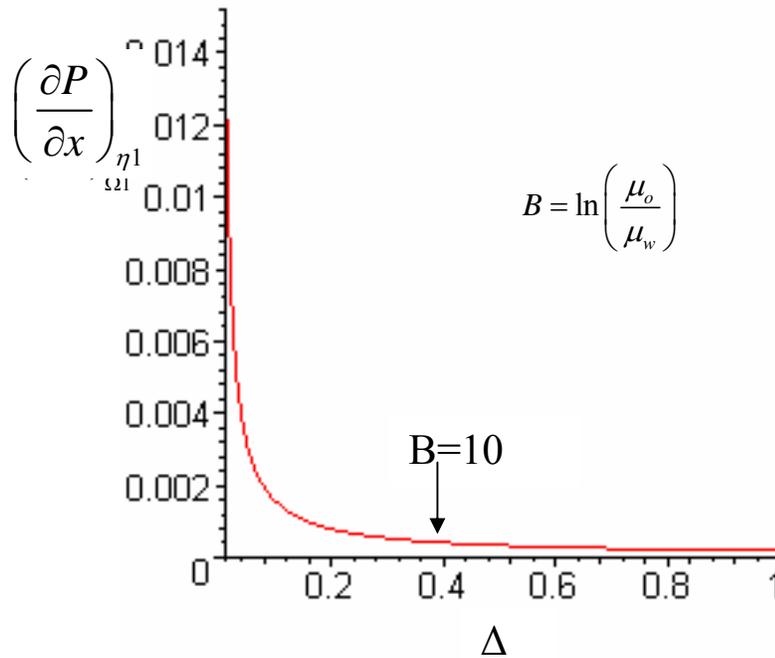


Fig. 6.6.2 Comportamiento del gradiente de presión en la zona de calentamiento. Parámetro  $B=10$ . Perfil aproximado de lineal.

Como se observa de la figura 6.6.2, el calentamiento en la pared hace que el gradiente de presión disminuya significativamente, sin embargo la disminución se logra en la medida que se avanza en la zona de calentamiento, y como se demostrará mas adelante, se requiere una longitud de entrada térmica muy grande para poder alcanzar esta zona de muy bajo gradiente de presión.

**6.7 Cálculo del gradiente de presión usando resultados de los perfiles de velocidad suponiendo de perfil aproximado de temperatura cuadrático. (Análogo al caso 6.6)**

Desarrollando un procedimiento análogo al utilizado en la sección 6.6, pero usando los perfiles de velocidad obtenidos con el perfil cuadrático de temperatura se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} P\right)_{\delta_2}}{\left(\frac{\partial}{\partial x} P\right)_o} &= 4 B e^B \sqrt{-B} / \left( -12 \mu_r \Delta^2 \sqrt{-B} + 12 \mu_r \Delta^3 \sqrt{-B} + 6 \mu_r \Delta^2 \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{B}{\sqrt{-B}}\right) B \right. \\
&\quad - 3 \mu_r \Delta^3 \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{-B}) + 12 \mu_r \Delta^2 e^B \sqrt{-B} + 6 \mu_r \Delta^3 \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{-B}) B \\
&\quad - 6 \mu_r \Delta^2 \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{-B}) B + 4 B e^B \sqrt{-B} - 4 B e^B \sqrt{-B} \Delta^3 + 12 B e^B \sqrt{-B} \Delta^2 \\
&\quad \left. - 6 \mu_r \Delta^3 e^B \sqrt{-B} - 12 B e^B \sqrt{-B} \Delta - 6 \mu_r \Delta \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{B}{\sqrt{-B}}\right) B \right)
\end{aligned}
\tag{6.7.1}$$

En la figura 6.7.1, se muestra un comportamiento similar al que se muestra en la figura 6.6.1.  $\delta_T$ .

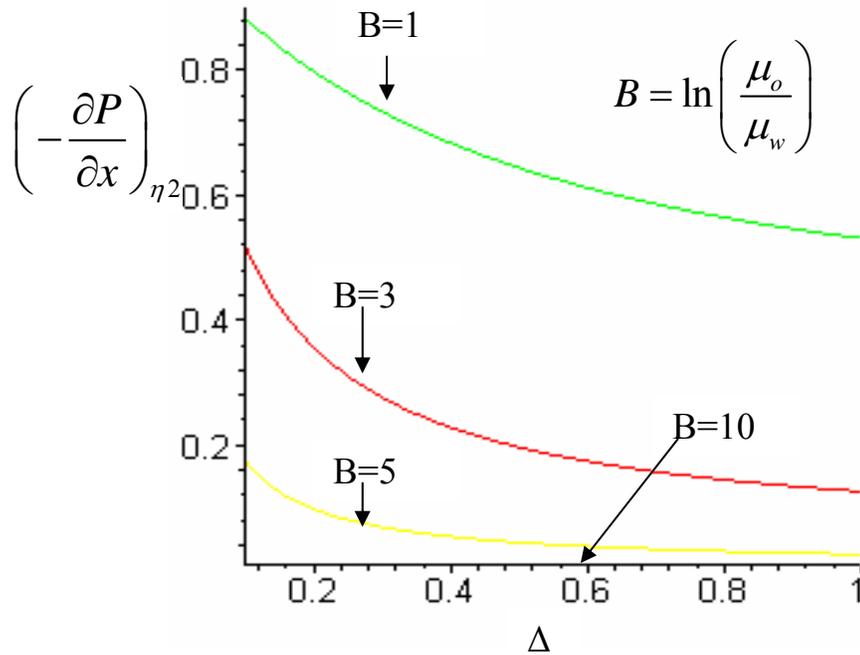


Fig. 6.7.1 Comportamiento de la caída de presión en la zona de calentamiento.

La comparación del gradiente de presión del modelo de temperatura aproximada lineal con el gradiente de presión del modelo de temperatura aproximada cuadrática se realizará posteriormente cuando se obtenga la forma del espesor adimensional de capa límite térmica ( $\Delta$ ).

---

## 6.8 Perfil de esfuerzo adimensional en variable de similitud, con perfil de temperatura lineal.

Para el caso en que el perfil aproximado de temperatura es lineal en la sección 6.2 se obtuvo: (ver ecuación (6.2.10)):

$$\tau_{xy1} = \left( -\frac{dP}{dx} \right)_{\delta_1} R \left( \frac{y}{R} - 1 \right) \quad (6.8.1)$$

Por lo que

$$\tau_{xy1} = \left( -\frac{dP}{dx} \right)_o \left( -\frac{dP}{dx} \right)_{\eta_1} R \left( \frac{y}{R} - 1 \right) \quad (6.8.2)$$

O lo que es igual

$$\tau_{xy1} = \left( -\frac{dP}{dx} \right)_o \left( -\frac{dP}{dx} \right)_{\eta_1} R (\eta \cdot \Delta - 1) \quad (6.8.3)$$

Si se usa como constante adimensional para el esfuerzo,  $\left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} p \right)_o \right] R$

Se obtiene:

$$\tau_{xy\eta_1} = \left( -\frac{dP}{dx} \right)_{\eta_1} (\eta \cdot \Delta - 1) \quad (6.8.4)$$

O también como:

$$\tau_{xy\eta_1} = \left( -\frac{dP}{dx} \right)_{\eta_1} (y_i - 1) \quad (6.8.5)$$

En donde  $y_i = y/R$ . Se observa que en la región de entrada, flujo desarrollado hidrodinámicamente, también conocido como perfil de esfuerzo para flujo isotérmico o de propiedades constantes, se puede escribir:

$$\tau_{xyc} = \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} p \right)_o \right] R (\eta \Delta - 1) \quad (6.8.6)$$

Por lo que el perfil de esfuerzo adimensional es:

$$\tau_{xync} = \eta \Delta - 1 \quad \text{o} \quad \tau_{xznc} = y_i - 1 \quad (6.8.7)$$

Se observa que los perfiles de esfuerzos pueden ser comparados, ya que estos tienen el mismo denominador como constante dimensional.

Para ilustrar la distribución del perfil de esfuerzo, y su variación con el espesor de la capa límite térmica en la zona de calentamiento, la gráfica 6.8.1 presenta el caso en que la temperatura en la zona de calentamiento es tal que el parámetro B tiene un valor de 1,  $B=1$ , o sea la viscosidad en la región de entrada o zona alejada de la capa límite es varias veces la viscosidad a la temperatura de la pared,  $\mu_0=2.71*\mu_w$ . Los perfiles representados en la figura 6.8.1 ilustran como varía el esfuerzo en función de la coordenada adimensional  $y_i$ , para distintos valores de  $\Delta$  (físicamente en la medida que  $\Delta$  aumenta, el fluido avanza en la dirección axial dentro del conducto o canal de placas paralelas); la línea continua superior corresponde al comportamiento esperado si las propiedades fuesen constantes.

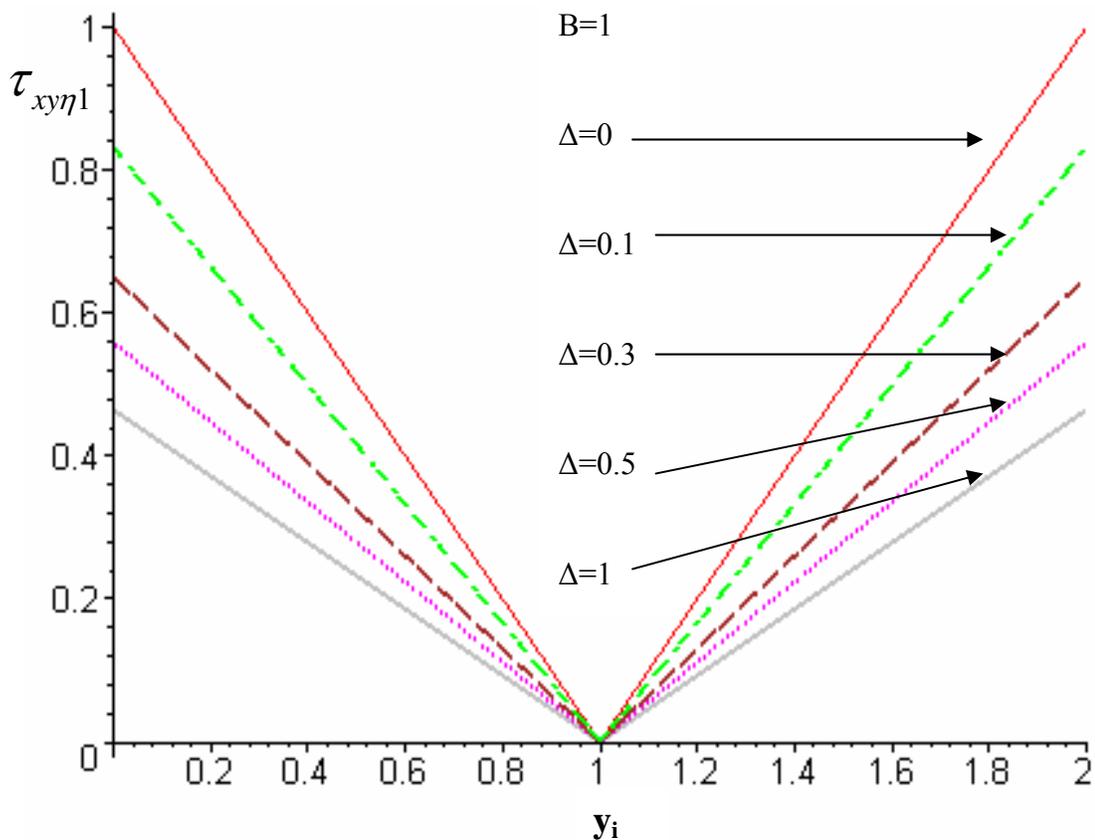


Fig. 6.8.1 Comportamiento del esfuerzo cortante. Parámetro  $B=1$ ,  $y_i=1$  es el centro del conducto. Suponiendo Perfil de temperatura lineal.

En la figura 6.8.1, se aprecia que en la medida que crece el espesor de la capa límite el esfuerzo de corte se hace menor en la superficie del conducto, donde ocurre la transferencia de calor. Este efecto se atribuye a la disminución significativa de la viscosidad, ya que el fluido se calienta en la región dentro de la capa límite térmica..

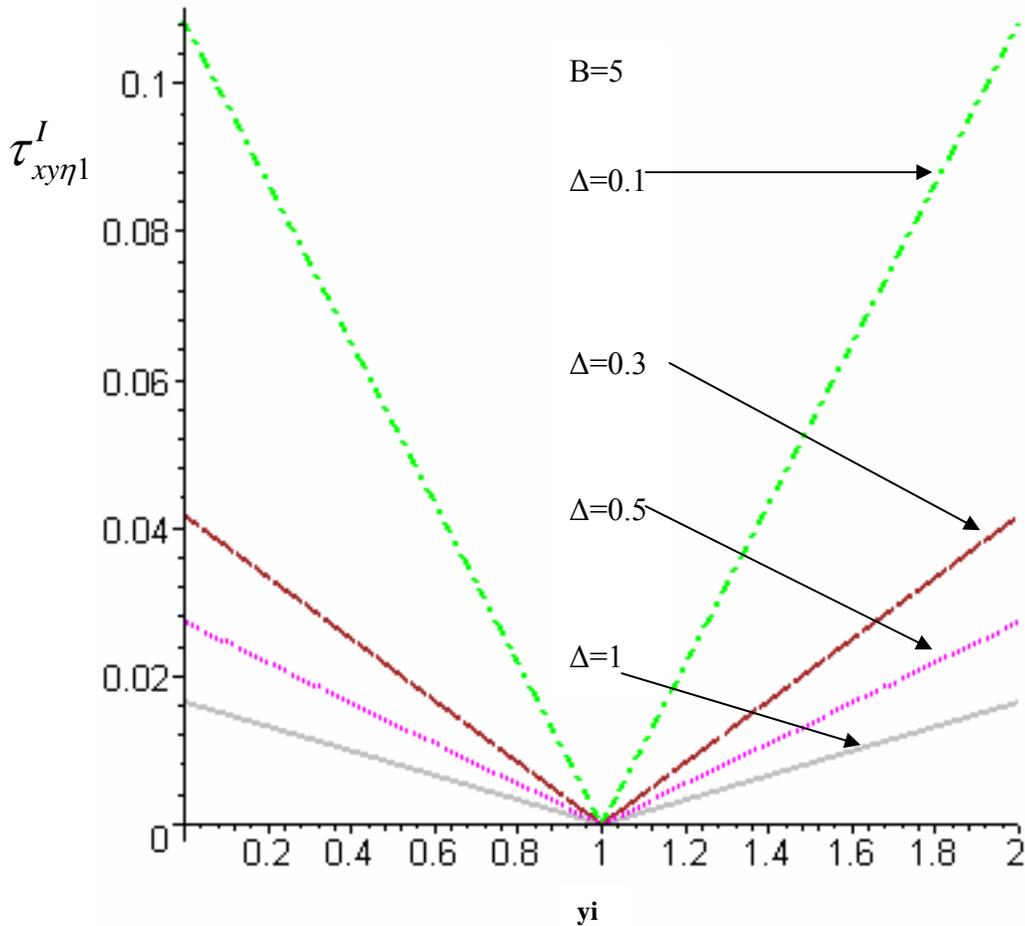


Figura 6.8.2 Comportamiento del esfuerzo de corte. Parámetro  $B=5$ ,  $y_i=1$  es el centro del conducto. Perfil aproximado de temperatura lineal.

La figura 6.83 es la representación de los perfiles de esfuerzo cuando la viscosidad en la zona de entrada es de 150 veces la viscosidad en la pared de calentamiento,  $\mu_0=148*\mu_w$ , esta reducción significativa provoca una reducción en el esfuerzo aplicado del 98% del que se esperaría si el sistema fuese isotérmico y térmicamente

desarrollado. Es importante resaltar que si se estima la caída de presión suponiendo sistema isotérmico los errores podrían ser muy altos, por lo que es importante considerar el efecto de calentamiento cerca de la pared. A continuación la figura 6.8.3, muestra el caso en que el parámetro  $B=10$ , lo que implicaría una relación entre las viscosidades de la zona de entrada y calentamiento de veinte mil (20000), esto es,  $\mu_o=20.000*\mu_w$ . Este caso aunque podría parecer un extremo es perfectamente factible de conseguir, y en el caso de estudio, el enfriamiento de un motor de BES con crudos extrapesados, la relación de las viscosidades está en el orden de magnitud señalado. Esta relación es típica en calentamiento de crudos extrapesados.

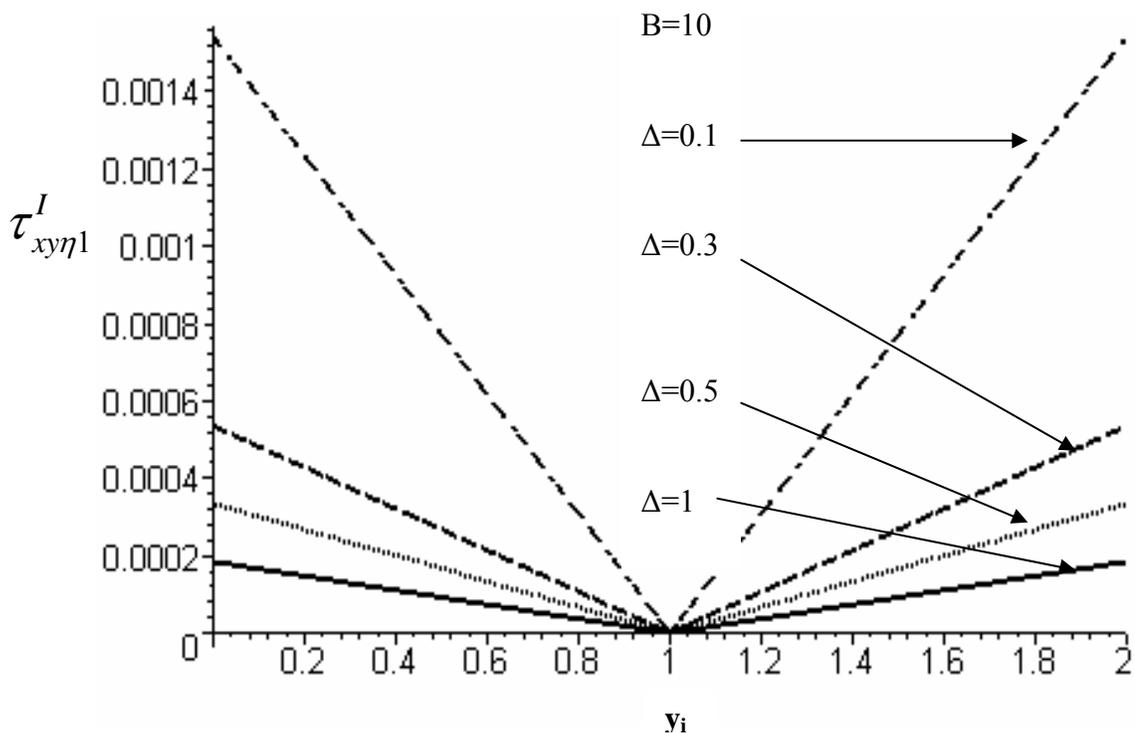


Figura 6.8.3 Comportamiento del esfuerzo de corte. Parámetro  $B=10$ ,  $y_i=1$  es el centro del conducto. Suponiendo un Perfil lineal de temperatura.

Como se aprecia en la figura 6.8.3, el esfuerzo se reduce en más de 99.98%, lo que físicamente se podría interpretar como un deslizamiento en la superficie, ya que la fuerza que el fluido ejerce sobre la superficie es muy pequeña del orden de 10000

veces menor de lo que se ejercería si el fluido fuese isotérmico. Este efecto tiene importancia ya que se podría aumentar el área de transferencia de calor, mejorando la transferencia de calor sin provocar efecto significativo en la caída de presión.

### **6.9 Perfil de esfuerzo adimensional en variable de similitud, con perfil de temperatura cuadrático, usando única constante adimensional.**

Desarrollando un procedimiento análogo al utilizado en la sección 6.8, pero usando los perfiles de velocidad obtenidos con el perfil cuadrático de temperatura se obtiene:

Se obtiene:

$$\tau_{xy\eta^2} = \left( -\frac{dP}{dx} \right)_{\eta^2} R(\eta \cdot \Delta - 1) \quad (6.8.4)$$

También como:

$$\tau_{xy\eta^2} = \left( -\frac{dP}{dx} \right)_{\eta^2} R(y_i - 1) \quad (6.8.5)$$

En donde  $y_i = y/R$ .

Se observa que en la región de entrada, flujo desarrollado hidrodinámicamente, también conocido como perfil de esfuerzo para flujo isotérmico o de propiedades constantes, se puede escribir:

$$\tau_{xyc} = \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} P \right)_o \right] R(\eta \Delta - 1) \quad (6.8.6)$$

Por lo que el perfil de esfuerzo adimensional es:

$$\tau_{xync} = \eta \Delta - 1 \quad \text{o} \quad \tau_{xznc} = y_i - 1 \quad (6.8.7)$$

Para ilustrar la distribución del perfil de esfuerzo, y su variación con el espesor de la capa límite térmica en la zona de calentamiento, la gráfica 6.9.1 muestra un comportamiento similar al de la figura 6.7.1.

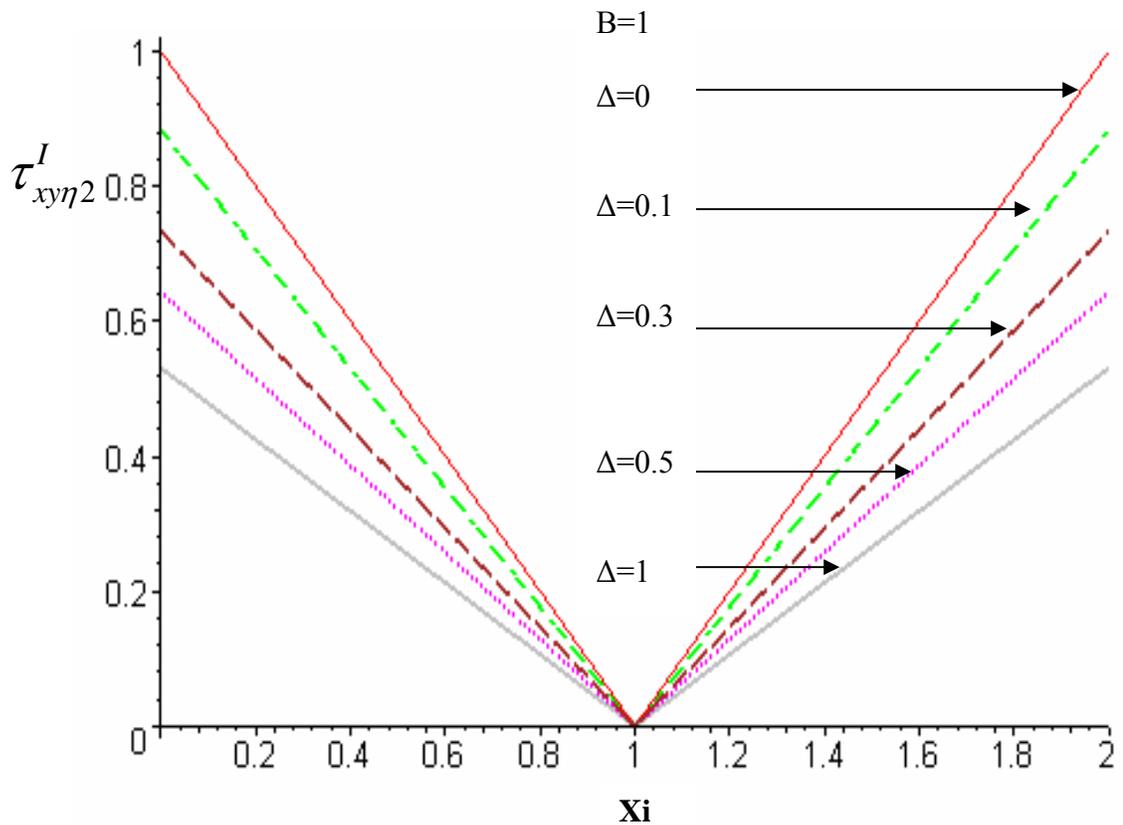


Figura 6.9.1. Comportamiento del esfuerzo cortante. Parámetro  $B=1$ . suponiendo un perfil cuadrático de temperatura.

### 6.10 Perfiles de velocidad adimensional en variable de similitud o variable combinada, con perfil aproximado de temperatura lineal

En la sección 6.4, ecuaciones 6.4.3a, b y c se escriben:

$$u_{\eta, I} = \frac{u_I}{u_{\delta 1}} \quad u_{\eta, II} = \frac{u_{II}}{u_{\delta 1}} \quad u_s = \frac{1}{2} \frac{R^2}{\mu_0} \left( -\frac{dP}{dx} \right)_x \quad \text{o} \quad u_{\delta 1} = \frac{1}{2} \frac{R^2}{\mu_0} \left( -\frac{dP}{dx} \right)_{\delta 1}$$

Para el perfil isotermico se tiene, por analogía:

$$u_c = \frac{u}{u_o} \text{ donde } u_o = \frac{1}{2} \frac{R^2}{\mu_0} \left( -\frac{dP}{dx} \right)_o$$

Por lo que se puede definir una velocidad adimensional, con la contante dimensional  $u_o$ , como denominador:

$$ul_{\eta, I, o} = \frac{ul_I}{u_o}$$

Por consiguiente los perfiles obtenidos de velocidad en las ecuaciones 6.4.4 y 6.4.5 deben ser modificados de la siguiente forma:

$$ul_{\eta, I, o} = ul_{\eta, I} \cdot \left( -\frac{dP}{dx} \right)_{\eta_1} \quad (6.10.1)$$

Haciendo uso de  $\eta = \frac{y_i}{\Delta}$  se pueden obtener los perfiles de velocidad como función de  $y_i = y/R$ , el resultado se puede expresar como perfiles adimensionales de velocidad obtenidos a partir del perfil lineal de temperatura:

Para la Fase I:

$$ul_{y_i, I} = \frac{2(-B + \Delta + B y_i) \mu_r \Delta e^{\left( -\frac{B y_i}{\Delta} \right)}}{B^2} - \frac{2(-B + \Delta) \mu_r \Delta}{B^2} \quad (6.10.2)$$

Para la fase II:

$$ul_{y_i, II} = -2\Delta \left( \frac{1}{2} \frac{y_i^2}{\Delta} - \frac{y_i}{\Delta} \right) + 2\Delta \left( \frac{\Delta}{2} - 1 \right) + \frac{2(-B + \Delta + B \Delta) \mu_r \Delta e^{(-B)}}{B^2} - \frac{2(-B + \Delta) \mu_r \Delta}{B^2} \quad (6.10.3)$$

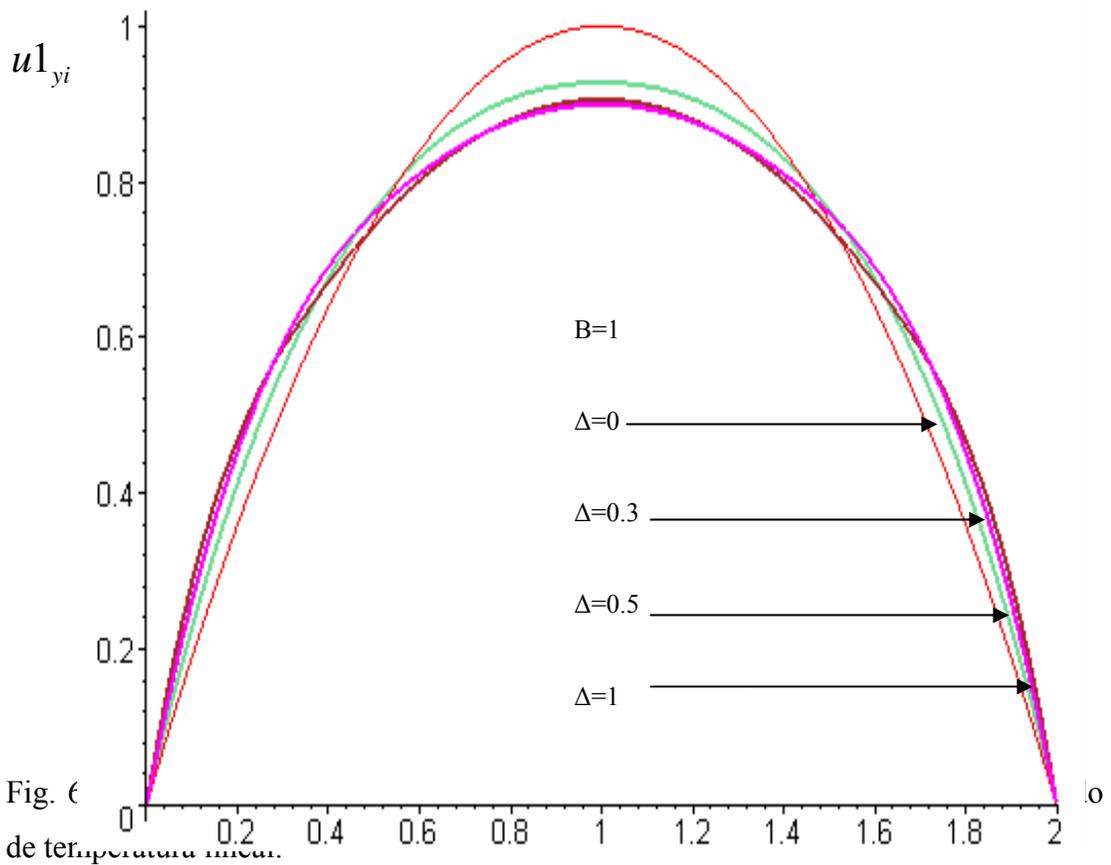
---

Los perfiles de velocidad para ambas fases con  $u_0$  como constante adimensional, se calculan multiplicando las ecuaciones 6.10.2 y 6.10.3 por 6.6.16 respectivamente.

El perfil de velocidad isotérmico o de propiedades constantes:

$$u_{ctt} = 2 y_i - y_i^2 \quad (6.10.5)$$

Para ilustrar la distribución del perfil de velocidad y su variación en la zona de calentamiento, la gráfica 6.10.1 presenta el caso en que la temperatura en la zona de calentamiento es tal que el parámetro B tiene un valor de 1,  $B=1$ , o sea,  $\mu_0=2.71*\mu_w$ . Las curvas ilustran como varían los perfiles de velocidad en función de la coordenada adimensional  $y_i$  para diferentes valor de  $\Delta$ , para un caudal fijo. La línea superior o de mayor velocidad máxima corresponde al comportamiento esperado si no existiera calentamiento, esto es sistema isotérmico o de propiedades constantes, y la de menor velocidad máxima representa el caso donde el fluido ha alcanzado la longitud de desarrollo. Este efecto de deformación del perfil de velocidad se atribuye a la disminución significativa de la viscosidad.



La siguiente figura (6.10.2), representa el comportamiento para el caso en que el parámetro  $B=10$ , este comportamiento se esperaría para casos en que la viscosidad en la pared de calentamiento es del orden de 20000 veces la viscosidad del fluido de entrada, que es el caso de crudos extrapesados. Además estos fluidos pueden presentar altas viscosidades, de orden de 100000 veces la viscosidad del agua a temperatura cercana a la del ambiente, y para temperatura relativamente altas, en el orden de los 100 °C, la viscosidad es del orden de unas decenas de la viscosidad del agua. El comportamiento que muestra la figura, se debe al efecto de la viscosidad en la zona dentro de la capa límite térmica, donde por una disminución significativa de la viscosidad respecto de valor del caso isotérmico, el fluido aumenta su velocidad en esta región, y se produce descenso en el zona central respecto de caso de propiedades

---

físicas constantes, garantizándose que el área bajo la curva del perfil de velocidad se mantenga constante, lo que implica que se conserva el caudal. En el centro el fluido se asemeja a un flujo tapón, esto significa que no se ve afectado por gradientes apreciables de velocidad, por lo que fluye sin resistencia apreciable. Toda la resistencia y transferencia de cantidad de movimiento se encuentra dentro de la capa límite térmica.

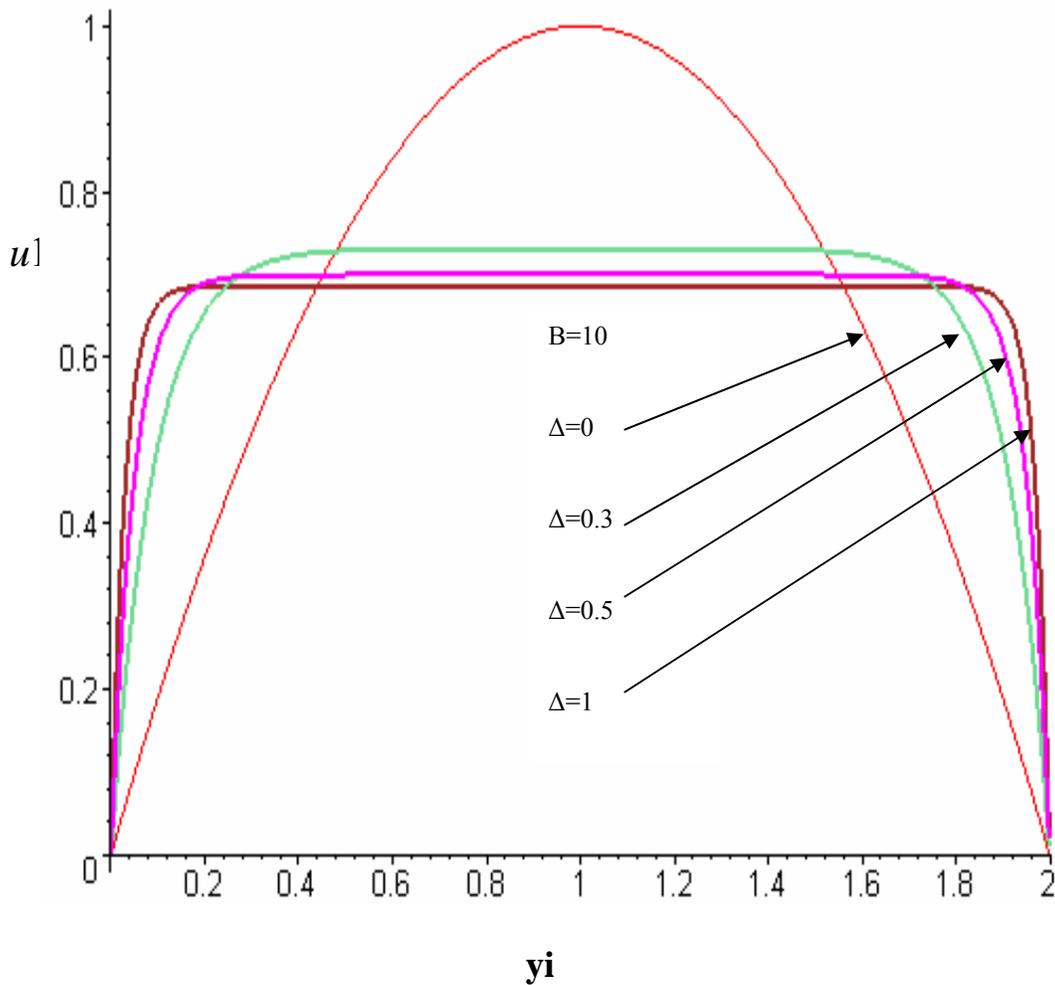


Fig. 6.10.2 Deformación del perfil de velocidad. Parámetro  $B=10$ . Perfil aproximado de temperatura lineal

---

A continuación se presentan resultados para el caso obtenido a partir del perfil cuadrático de temperatura.

**6.11 Perfiles de velocidad adimensional en variable de similitud o variable combinada, con perfil aproximado de temperatura cuadrático (análogo a la sección 6.10)**

Desarrollando un procedimiento análogo al utilizado en la sección 6.10, pero usando los perfiles de velocidad obtenidos con el perfil cuadrático de temperatura se obtiene el perfil de velocidad en la variable  $y_i=y/R$ , la cual se muestra para el caso de  $B=5$  en la figura 6.11.1. Los resultados son análogos a los obtenidos en la sección 6.10, y sus discrepancias se discutirán posteriormente.

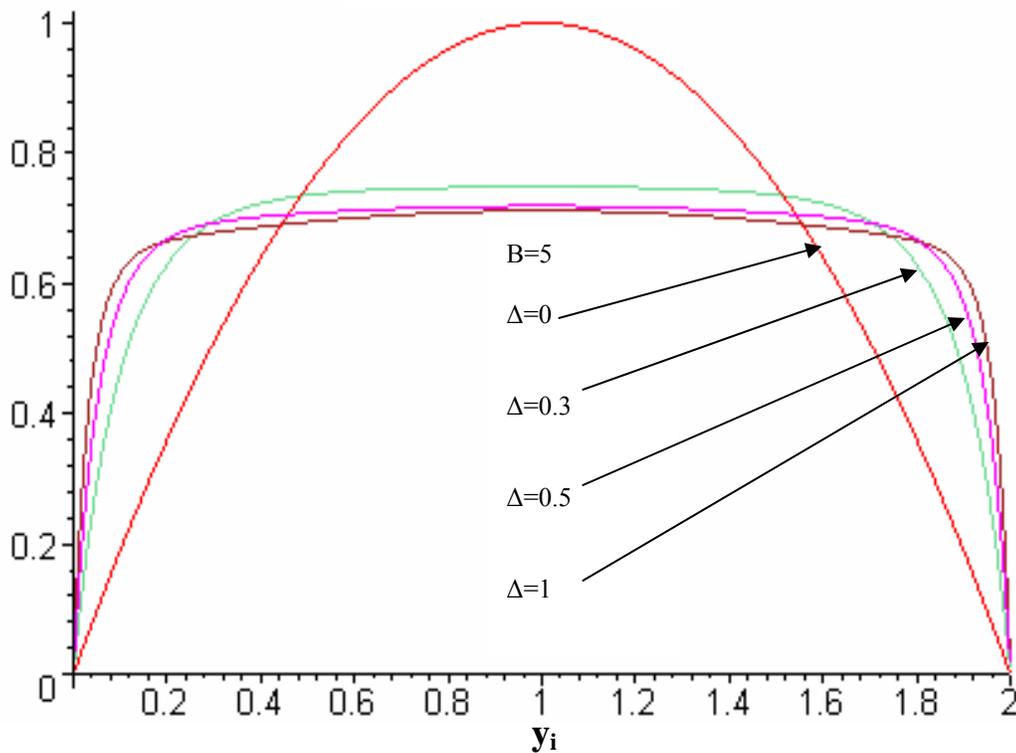


Fig. 6.11.1 Deformación del perfil de velocidad. Parámetro  $B=5$ . Perfil aproximado de temperatura cuadrático.

---

**6.12 Perfil de temperatura media de mezcla y número de Nusselt local: Caso propiedades físicas constantes.**

Usando la formulación matemática del apartado 5.3.3, se obtuvieron las siguientes ecuaciones, para los perfiles de temperatura en variables adimensionales y/o variable combinada (variable de similitud).

Para el caso lineal:

$$\Theta_{1\eta} = \eta \quad (6.12.1)$$

Para el caso cuadrático

$$\Theta_{2\eta} = 2\eta - \eta^2 \quad (6.12.2)$$

Para el caso cúbico

$$\Theta_{3\eta} = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3 \quad (6.12.3)$$

Para el perfil de velocidad suponiendo propiedades físicas constantes, se obtuvo:

$$u_{ctt} := \eta \rightarrow 2\Delta\eta - \Delta^2\eta^2 \quad u_{ctt}(\eta) = 2\Delta\eta - \Delta^2\eta^2 \quad (6.12.4)$$

De la definición de temperatura media de mezcla, se tiene que (ecuación (5.7.1)):

$$\Theta_{b,c} := \frac{\int_0^1 u_{ctt}(\eta) \Theta(\eta) d\eta + \int_1^{\frac{1}{\Delta}} u_{ctt}(\eta) d\eta}{\int_0^{\frac{1}{\Delta}} u_{ctt}(\eta) d\eta} \quad (6.12.5)$$

Sustituyendo las ecuaciones 6.12.1, 6.12.2, 6.12.3 y 6.12.4 en 6.12.5 se obtienen las temperaturas media de mezcla para el caso lineal, cuadrático, y cúbico de temperatura respectivamente:

$$\Theta_{1,b,c} := \frac{1}{8} \Delta^3 - \frac{1}{2} \Delta^2 + 1 \quad (6.12.6)$$

$$\Theta_{2,b,c} := \frac{1}{20} \Delta^3 - \frac{1}{4} \Delta^2 + 1 \quad (6.12.7)$$

$$\Theta_{3,b,c} := \frac{1}{16} \Delta^3 - \frac{3}{10} \Delta^2 + 1 \quad (6.12.8)$$

De la definición de  $N^\circ$  de Nusselt, ecuación (5.6.6), en forma adimensional con longitud característica la mitad del espesor del conducto,  $R$ , se escribe (ver figura 6.2.1):

$$Nu = \frac{\left. \frac{d\Theta}{d\eta} \right|_{\eta=0}}{\Theta_{b,c} \cdot \Delta} \quad (6.12.9)$$

Remplazando las ecuaciones 6.12.1, 6.12.2, 6.12.3 y 6.12.4 las ecuaciones 6.12.6, 6.12.7 y 6.12.8 respectivamente se obtiene:

Caso en que se usó perfil lineal de temperatura:

$$NU1_c = \frac{1}{\Delta \left( \frac{1}{8} \Delta^3 - \frac{1}{2} \Delta^2 + 1 \right)} \quad (6.12.10)$$

Caso en que se usó perfil cuadrático de temperatura:

$$NU2_c = \frac{2}{\Delta \left( \frac{1}{20} \Delta^3 - \frac{1}{4} \Delta^2 + 1 \right)} \quad (6.12.11)$$

Caso en que se usó perfil cúbico de temperatura:

$$Nu_{3,c} = \frac{1.5}{\Delta \left( \frac{1}{16} \Delta^3 - \frac{3}{10} \Delta^2 + 1 \right)} \quad (6.12.12)$$

Para ilustrar el comportamiento del número de Nusselt en función del espesor adimensional  $\Delta$  de capa límite, la figura 6.12.1 muestra como varía el número de Nusselt desde la entrada a la zona de calentamiento donde el espesor de capa límite térmica adimensional tiene un 10% del valor de desarrollo,  $\Delta = 0.1$ , hasta que se encuentra completamente desarrollada, donde  $\Delta = 1$ . El valor representado es el número de Nusselt local, y disminuye en la medida que aumenta el espesor de la capa límite térmica adimensional,  $\Delta$ . Se puede ver que en la medida que se avanza en la zona de calentamiento, y el fluido se va calentando, disminuye la fuerza impulsora y la transferencia de calor, por lo que se afecta el coeficiente de transferencia de calor,  $h$ , y por ende se afecta al número de Nusselt.

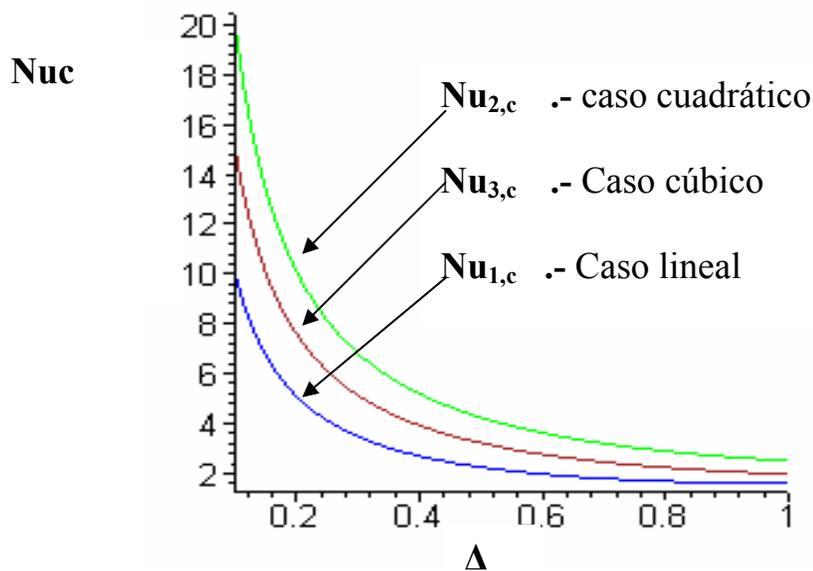


Fig. 6.12.1. Número de Nusselt local en función del espesor de capa límite térmica adimensional  $\Delta$ : Caso propiedades físicas constantes

---

La figura 6.12.1 compara el comportamiento obtenido con los perfiles de temperatura lineal cuadrático y cúbico. De estas soluciones aproximadas, la obtenida con el perfil cúbico de temperatura y perfil de velocidad con propiedades físicas constantes, se aleja de la exacta (solución de Graetz) como máximo 8% cerca de la longitud de desarrollo, y en la mayoría del intervalo su desviación es mucho menor al 2% (Prins, Mulder and Schenk en 1951, según Larsen P., 1984) (ver apéndice B1)

En lo que sigue se usará la solución del perfil cúbico aproximado de temperatura como solución deseada o solución que se desea reproducir, ya que en transmisión de calor un error menor al 4% se considerada aceptable, (Bird et al., 2006).

La solución aproximada por ser solución analítica, presenta la ventaja de que sus constantes puras (valores constantes o coeficientes de la ecuación) pueden ser ajustadas o modificados ligeramente para que concuerden con los resultados de la solución numérica de la bibliografía especializada y/o con datos experimentales de la bibliografía. Así, la solución de Léveque o solución aproximada para propiedades constantes, al ser ligeramente modificada coincide con la solución empírica propuesta por Sieder y Tate (según Bird et al., 2006) cambiando el coeficiente principal (constante que multiplica a los números adimensionales de la ecuación o correlación) y argumentando que la discrepancia se debía a que la solución analítica aproximada de propiedades constantes no considera los “pequeños” efectos de convección libre originados por diferencias de temperatura que se originan en las experiencias.

La solución obtenida con el perfil cúbico de temperatura y perfil de velocidad con propiedades físicas constantes, es suficientemente precisa mejor que la mayoría de las correlaciones disponibles en la bibliografía, las cuales tienen cerca de un 20% de error; ejemplo la correlación de Sieder y Tate), como para que pueda ser una solución de referencia que se pueda comparar con las soluciones del perfil lineal y cuadrático obtenidas en este trabajo. La figura 6.12.1, indica que la solución lineal presenta discrepancia por defecto, y la solución del perfil cuadrático por exceso con respecto a

la solución que se obtuvo utilizando un perfil de temperatura cúbico. Estas curvas no deben ser comparadas cuantitativamente, ya que el espesor de capa límite predicho para cada modelo es diferente, como se demostrará más adelante. Sin embargo la tendencia si puede ser comparada, y la figura 6.12.2, muestra que estos modelos pueden ser ajustados, modificando sus constantes puras para que sus soluciones coincidan aproximadamente.

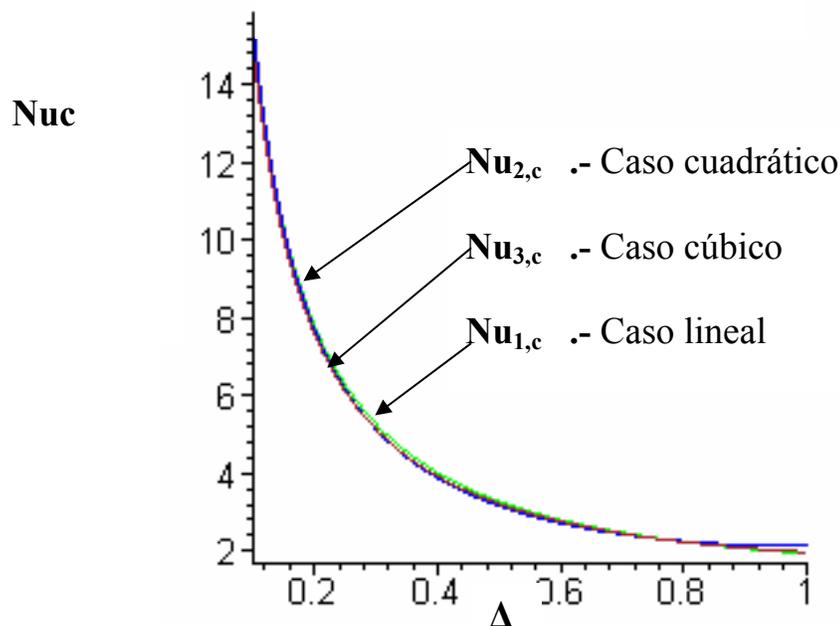


Figura 6.12.2. Número de Nusselt, corrección de constantes puras de los modelos, para eliminar discrepancias respecto del caso obtenido del perfil cúbico.

En la figura 6.12.2, se observa que los modelos de Nusselt obtenidos de perfiles lineales o cuadráticos al ser ligeramente modificados, pueden ser ajustados para eliminar las discrepancias del modelo obtenido a partir del perfil cúbico, por lo que prácticamente predecirían los mismos valores.

La corrección de los modelos lineal y cuadrático para que predigan prácticamente los mismos valores del número de Nusselt que utilizando el perfil cúbico son:

---

Para el perfil lineal:

$$Nu1_{c,corregido} = 1.6 \cdot Nu1_c - 0.437$$

Para el perfil cuadrático

$$Nu1_{c,corregido} = 0.773 \cdot Nu2_c$$

El procedimiento de ajuste anterior se basa en que perfiles diferentes se aproximan a la solución exacta con un error diferente, pero mantienen la misma tendencia, por lo que un ajuste en sus constantes puras disminuye el error respecto de la solución exacta.

### **6.13 Perfil de temperatura media de mezcla, y número de Nusselt local: caso viscosidad función de la temperatura y perfil lineal de temperatura.**

Usando la formulación matemática se obtuvo el siguiente modelo, para el perfil de temperatura en variables adimensionales y/o en variable de similitud.

Para el caso lineal:

$$\Theta1_{\eta} = \eta$$

De la definición de temperatura media de mezcla, se tiene que:

$$\Theta1_{b, BT} := \frac{\int_0^1 u l_{\eta, I}(\eta) \Theta1(\eta) d\eta + \int_1^{\frac{1}{\Delta}} u l_{\eta, II}(\eta) d\eta}{\int_0^1 u l_{\eta, I}(\eta) d\eta + \int_1^{\frac{1}{\Delta}} u l_{\eta, II}(\eta) d\eta} \quad (6.13.1)$$

Los perfiles de velocidad adimensionales, ecuaciones (6.4.4) y (6.4.5):

Para la Fase I

$$uI_{\eta, I} = \frac{2(-B + \Delta + B \eta \Delta) \mu_r \Delta e^{(-B \eta)}}{B^2} - \frac{2(-B + \Delta) \mu_r \Delta}{B^2}$$

Para la Fase II

$$uI_{\eta, II} = -2 \Delta \left( \frac{1}{2} \eta^2 \Delta - \eta \right) + 2 \Delta \left( \frac{\Delta}{2} - 1 \right) + \frac{2(-B + \Delta + B \Delta) \mu_r \Delta e^{(-B)}}{B^2} - \frac{2(-B + \Delta) \mu_r \Delta}{B^2}$$

Al sustituir estos perfiles de velocidad y el perfil de temperatura lineal en la ecuación que define la temperatura media de mezcla (6.13.1) se obtiene:

Temperatura Media de Mezcla con perfil aproximado de temperatura lineal, perfil de velocidad dependiente de la temperatura:

$$\begin{aligned} \Theta 1_{b, BT} = & \frac{1}{2} (6 B^4 e^B \Delta - 2 B^4 e^B - 12 \mu_r \Delta^2 B^2 - 6 \mu_r \Delta^2 B + 18 \mu_r \Delta^3 B + 18 \mu_r \Delta^3 \\ & + 12 \mu_r \Delta^3 B^2 + 6 \mu_r B^3 \Delta - 12 \mu_r \Delta^2 B^3 - 6 B^4 e^B \Delta^2 + 2 \Delta^3 B^4 e^B - 6 \mu_r B^3 e^B \Delta \\ & + 3 B^3 e^B \Delta^2 \mu_r - 3 B^2 e^B \Delta^3 \mu_r + 6 \mu_r \Delta^2 B e^B - 18 \mu_r \Delta^3 e^B + 6 \mu_r \Delta^3 B^3 \\ & + 6 B^2 e^B \Delta^2 \mu_r) / ((-6 \mu_r \Delta^2 B + 6 \mu_r \Delta^3 + 6 \mu_r \Delta^3 B + 6 \mu_r \Delta^2 B e^B - 6 \mu_r \Delta^3 e^B \\ & - B^3 e^B + \Delta^3 B^3 e^B - 3 B^3 e^B \Delta^2 - 3 \mu_r B^2 e^B \Delta + 3 B^3 e^B \Delta + 3 \mu_r B^2 \Delta - 6 \mu_r \Delta^2 B^2 \\ & + 3 \mu_r \Delta^3 B^2) B) \end{aligned} \quad (6.13.2)$$

Haciendo uso de la definición del número de Nusselt, y procediendo análogamente al caso isotérmico se tiene:

---


$$NUI_{BT} := \frac{\left( \frac{d}{d\eta} \Theta 1(\eta) \right)_{\eta=0}}{\Delta \Theta 1_{BT}} \quad (6.13.3)$$

$$\begin{aligned} NUI_{BT} = & 2 (-6 \mu_r \Delta^2 B + 6 \mu_r \Delta^3 + 6 \mu_r \Delta^3 B + 6 \mu_r \Delta^2 B e^B - 6 \mu_r \Delta^3 e^B - B^3 e^B \\ & + \Delta^3 B^3 e^B - 3 B^3 e^B \Delta^2 - 3 \mu_r B^2 e^B \Delta + 3 B^3 e^B \Delta + 3 \mu_r B^2 \Delta - 6 \mu_r \Delta^2 B^2 \\ & + 3 \mu_r \Delta^3 B^2) B / (\Delta (6 B^4 e^B \Delta - 2 B^4 e^B - 12 \mu_r \Delta^2 B^2 - 6 \mu_r \Delta^2 B + 18 \mu_r \Delta^3 B \\ & + 18 \mu_r \Delta^3 + 12 \mu_r \Delta^3 B^2 + 6 \mu_r B^3 \Delta - 12 \mu_r \Delta^2 B^3 - 6 B^4 e^B \Delta^2 + 2 \Delta^3 B^4 e^B \\ & - 6 \mu_r B^3 e^B \Delta + 3 B^3 e^B \Delta^2 \mu_r - 3 B^2 e^B \Delta^3 \mu_r + 6 \mu_r \Delta^2 B e^B - 18 \mu_r \Delta^3 e^B \\ & + 6 \mu_r \Delta^3 B^3 + 6 B^2 e^B \Delta^2 \mu_r)) \end{aligned} \quad (6.13.4)$$

Para ilustrar el comportamiento de este modelo para el número de Nusselt en función del espesor adimensional  $\Delta$ , que toma en cuenta el efecto de la temperatura sobre la viscosidad del fluido, la figura 6.13.1 muestra como varía el número de Nusselt ( $Nu_{1BT}$ ) desde la entrada a la zona de calentamiento donde apenas el espesor de capa límite térmica tiene un 10% del valor de desarrollo,  $\Delta = 0.1$ , hasta que se encuentra térmicamente desarrollada, donde  $\Delta = 1$ . Este comportamiento se muestra para un valor de  $B = 0.1$ , lo que significa que apenas existe una pequeña disminución de la viscosidad en la pared de calentamiento. Este valor es técnicamente el caso de propiedades constantes ( $Nu_{1C}$ ), y se muestra para ilustrar que los modelos coinciden para valores muy bajos de  $B$  ( $B = \ln(\mu_o/\mu_w)$ ) (ver figura 6.13.1). Este modelo que toma en cuenta el cambio de la viscosidad con la temperatura a través del parámetro  $B$ , puede ser ajustado para que coincida con el modelo del número de Nusselt obtenido con un perfil cúbico de temperatura y su comportamiento para diferentes valores de  $B$ , se estudiará mas adelante.

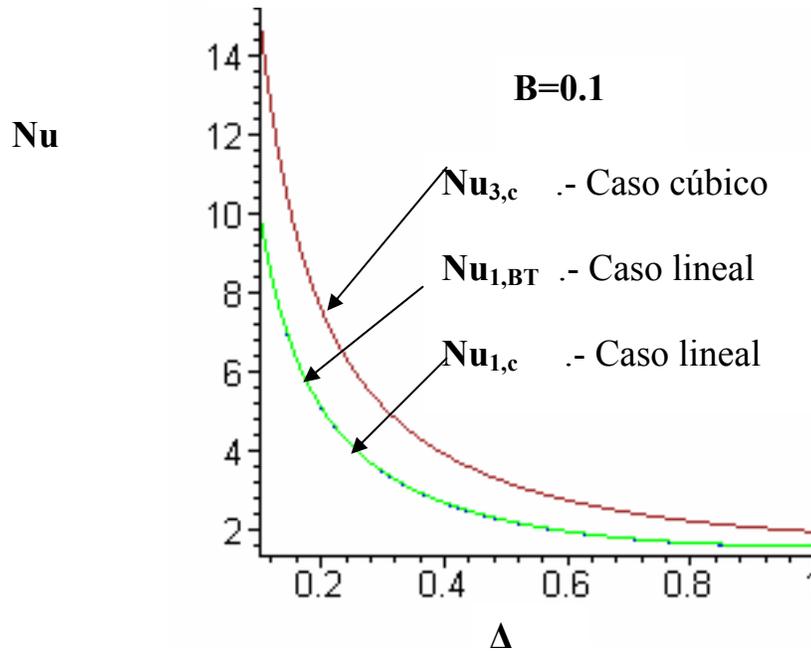


Fig. 6.13.1. Numero de Nusselt local, caso propiedades viscosidad variable, en función del espesor de capa límite adimensional. Perfil de temperatura lineal.  $B=0.1$ .

**6.14 Perfil de temperatura media de mezcla, y número de Nusselt local: caso viscosidad función de la temperatura y perfil cuadrático de temperatura.**

Realizando un procedimiento análogo al de la sección 6.13, utilizando el perfil de temperatura cuadrático y los perfiles de velocidad reportados en la sección 6.5 se obtiene para el perfil de temperatura media de mezcla:

$$\begin{aligned}
\Theta 2_{b, BT} = & \frac{1}{2} \left( 24 \Delta B^2 \sqrt{-B} \mathbf{e}^B - 2 \Delta^3 \mu_r \sqrt{-B} \mathbf{e}^B - 4 \Delta^2 \mu_r \sqrt{-B} \mathbf{e}^B + 12 \Delta^3 B \sqrt{-B} \mathbf{e}^B \mu_r \right. \\
& - 8 \Delta^3 B^2 \mu_r \operatorname{erf}(\sqrt{-B}) \sqrt{\pi} + 3 \Delta^3 \mu_r \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{-B}) + 12 \Delta B^2 \mu_r \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{B}{\sqrt{-B}}\right) \\
& - 4 \Delta^3 \mu_r \sqrt{-B} - 24 \Delta^3 B \sqrt{-B} \mu_r + 4 \Delta^2 \mu_r \sqrt{-B} + 24 \Delta^2 \mu_r B \sqrt{-B} \\
& + 4 \Delta^3 B^2 \mu_r \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{B}{\sqrt{-B}}\right) - 16 \Delta^2 B^2 \mu_r \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{B}{\sqrt{-B}}\right) + 8 \Delta^2 \mu_r \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{-B}) B^2 \\
& + 6 \Delta^3 \mu_r \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{-B}) B + 8 \Delta^3 B^2 \sqrt{-B} \mathbf{e}^B - 24 \Delta^2 B^2 \sqrt{-B} \mathbf{e}^B - 8 B^2 \sqrt{-B} \mathbf{e}^B \\
& \left. - 20 \Delta^2 \mu_r B \sqrt{-B} \mathbf{e}^B \right) / \left( B \left( 12 \Delta \sqrt{-B} B \mathbf{e}^B + 3 \Delta^3 \mu_r \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{-B}) \right) \right. \\
& + 6 \Delta^2 \mu_r \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{-B}) B - 6 \Delta^3 \mu_r \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{-B}) B + 6 \Delta^3 \mu_r \sqrt{-B} \mathbf{e}^B \\
& + 6 \mu_r \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{B}{\sqrt{-B}}\right) \Delta B - 12 \Delta^3 \mu_r \sqrt{-B} + 12 \Delta^2 \mu_r \sqrt{-B} + 4 \Delta^3 \sqrt{-B} B \mathbf{e}^B \\
& \left. - 6 \Delta^2 \mu_r \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{B}{\sqrt{-B}}\right) B - 12 \Delta^2 \sqrt{-B} B \mathbf{e}^B - 4 B \mathbf{e}^B \sqrt{-B} - 12 \Delta^2 \mu_r \sqrt{-B} \mathbf{e}^B \right) \Big) \\
\end{aligned} \tag{6.14.2}$$

Para el número de Nusselt Local:

$$\begin{aligned}
NU 2_{BT} = & -4 B \left( -12 \Delta \sqrt{-B} B \mathbf{e}^B - 4 \Delta^3 \sqrt{-B} B \mathbf{e}^B + 12 \Delta^2 \sqrt{-B} B \mathbf{e}^B + 4 B \mathbf{e}^B \sqrt{-B} \right. \\
& + 6 \Delta^2 \mu_r \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{B}{\sqrt{-B}}\right) B - 6 \mu_r \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{B}{\sqrt{-B}}\right) \Delta B - 3 \Delta^3 \mu_r \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{-B}) \\
& + 6 \Delta^3 \mu_r \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{-B}) B - 6 \Delta^2 \mu_r \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{-B}) B + 12 \Delta^3 \mu_r \sqrt{-B} - 12 \Delta^2 \mu_r \sqrt{-B} \\
& + 12 \Delta^2 \mu_r \sqrt{-B} \mathbf{e}^B - 6 \Delta^3 \mu_r \sqrt{-B} \mathbf{e}^B \Big) / \left( \Delta \left( 24 \Delta B^2 \sqrt{-B} \mathbf{e}^B - 2 \Delta^3 \mu_r \sqrt{-B} \mathbf{e}^B \right. \right. \\
& - 4 \Delta^2 \mu_r \sqrt{-B} \mathbf{e}^B + 12 \Delta^3 B \sqrt{-B} \mathbf{e}^B \mu_r - 8 \Delta^3 B^2 \mu_r \operatorname{erf}(\sqrt{-B}) \sqrt{\pi} \\
& + 3 \Delta^3 \mu_r \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{-B}) + 12 \Delta B^2 \mu_r \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{B}{\sqrt{-B}}\right) - 4 \Delta^3 \mu_r \sqrt{-B} \\
& - 24 \Delta^3 B \sqrt{-B} \mu_r + 4 \Delta^2 \mu_r \sqrt{-B} + 24 \Delta^2 \mu_r B \sqrt{-B} + 4 \Delta^3 B^2 \mu_r \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{B}{\sqrt{-B}}\right) \\
& - 16 \Delta^2 B^2 \mu_r \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{B}{\sqrt{-B}}\right) + 8 \Delta^2 \mu_r \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{-B}) B^2 + 6 \Delta^3 \mu_r \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{-B}) B \\
& \left. \left. + 8 \Delta^3 B^2 \sqrt{-B} \mathbf{e}^B - 24 \Delta^2 B^2 \sqrt{-B} \mathbf{e}^B - 8 B^2 \sqrt{-B} \mathbf{e}^B - 20 \Delta^2 \mu_r B \sqrt{-B} \mathbf{e}^B \right) \right) \\
\end{aligned} \tag{6.14.4}$$

Este modelo tiene un comportamiento análogo al caso de la sección 6.13 (sección anterior) que toma en cuenta el cambio de la viscosidad con la temperatura a través del parámetro B, puede ser ajustado para que coincida con el modelo del número de Nusselt obtenido con un perfil cúbico de temperatura y su comportamiento para diferentes valores de B, se estudiará mas adelante.

### 6.15 Número de Graetz a partir de perfil de temperatura lineal, cuadrático y cúbico, usando perfil de velocidad de propiedades físicas constantes.

Del el proceso que se indica en el apartado 5.4.3.1, análisis integral de capa límite se tiene:

$$\int_0^{\Delta} -\Delta \left( \frac{\partial}{\partial \Delta} \left( \int_0^1 u_{ctt}(\eta) (\Theta_{\eta} - 1) d\eta \Delta \right) \right) d\Delta \left[ \frac{3}{2} \frac{1}{\left( \frac{\partial}{\partial \eta} \Theta_{\eta} \right)_0} \right] = \frac{1}{Graetz} \quad (6.15.1)$$

Reemplazando el perfil de velocidad para propiedades físicas constantes y los perfiles de temperatura lineal, cuadrático y cúbico se obtiene:

Para el perfil lineal de temperatura:

$$\frac{1}{Graetz1} = -\frac{3}{32} \Delta^4 + \frac{1}{3} \Delta^3 \quad (6.15.2)$$

Para el perfil cuadrático de temperatura

$$\frac{1}{Graetz2} = -\frac{3}{160} \Delta^4 + \frac{1}{12} \Delta^3 \quad (6.15.3)$$

Para el perfil cúbico de temperatura

$$\frac{1}{Graetz3} = -\frac{1}{32} \Delta^4 + \frac{2}{15} \Delta^3 \quad (6.15.4)$$

En la sección 5.4.3.1 se definió el número de Graetz, y se acotó que el inverso del número de Graetz representa una longitud axial adimensional:

En la figura 6.15.1, se muestra el comportamiento del espesor de la capa límite térmica en función del inverso del número de Graetz para cada caso (perfil lineal, cuadrático y cúbico), en la figura se puede ver que el espesor de capa límite térmica adimensional alcanza su valor de 1,  $\Delta=1$  (fluido térmicamente desarrollado), a valores diferentes del N° de Graetz; lo que significa que el modelo lineal y cuadrático predicen diferentes magnitudes del espesor de la capa límite térmica.

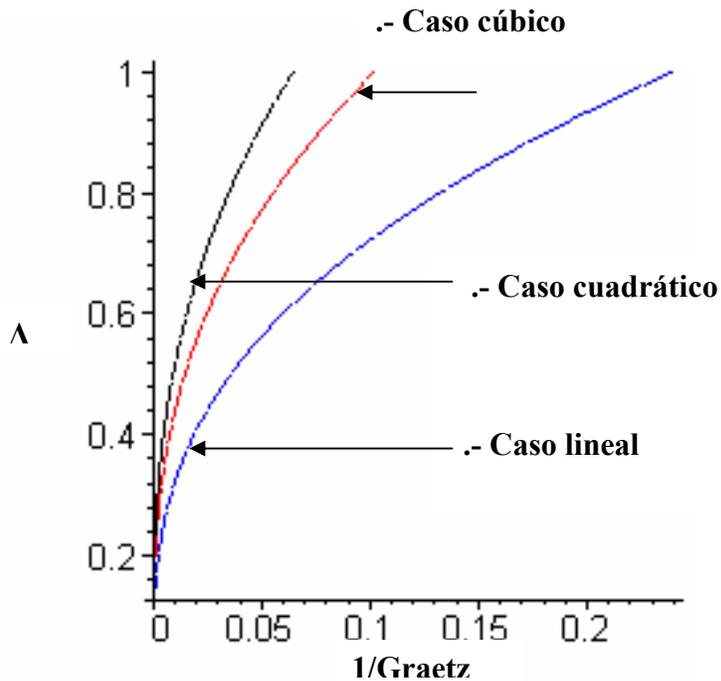


Fig. 6.15.1. Comportamiento del espesor de capa límite térmica, modelo de propiedades constantes. Perfiles de temperatura lineal, cuadrático y cúbico.

Las diferencias en el comportamiento eran de esperarse porque los modelos difieren dependiendo de sus suposiciones. Sin embargo, como se ha venido resaltando que se pueden ajustar los coeficientes de tal manera que se pueda conseguir que los resultados se ajusten al comportamiento esperado, el cual se representa por el modelo cúbico, ya que éste ha sido probado en la bibliografía, (ver Larsen P, 1984); el perfil

---

cúbico representa un buen ajuste al modelo exacto de propiedades constante o mejor conocido como problema de Graetz.

En la mayoría de la bibliografía abierta se define el número de Graetz, utilizando como longitud característica el diámetro hidráulico, que para este caso corresponde a cuatro (4) veces el semiespesor R (Larsen P., 1984). Para poder comparar los resultados de este trabajo con los datos disponibles en dicha bibliografía de aquí en adelante se hará el cambio respectivo.

Realizando el ajuste necesario para unificar las tres ecuaciones para el espesor de capa límite  $\Delta$ , en función del número de Graetz corregido y utilizando como abcisa  $1/\text{Graetz}^{1/2}$ , también para comparar los resultados de este trabajo con los datos disponibles en dicha bibliografía; se obtiene la siguiente gráfica.

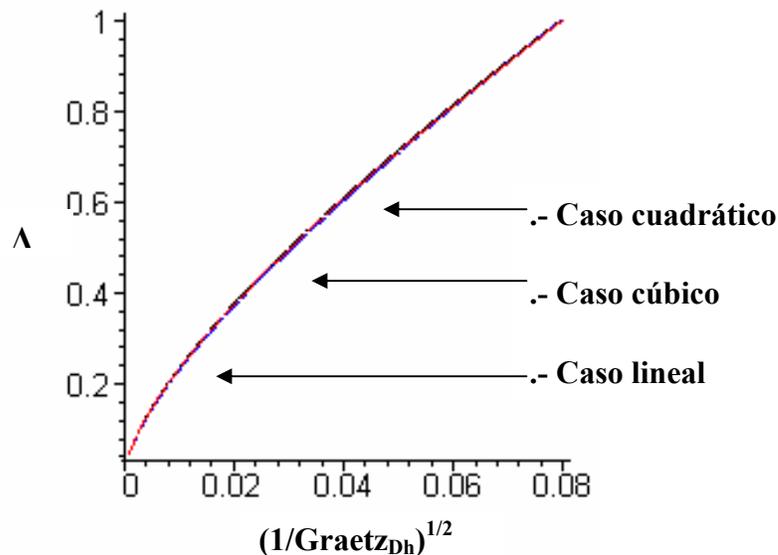


Fig. 6.15.2 Comportamiento del espesor de capa límite térmica. Caso propiedades físicas constantes. Ajustes en las constantes puras.

Las constantes de ajuste son:

Para el perfil lineal de temperatura:

---

$$\left(\frac{1}{Graetz_{Dh}}\right)^{1/2} = 0.65 \left(\frac{1}{Graetz} \frac{1}{16}\right)^{1/2}$$

Para el perfil cuadrático de temperatura:

$$\left(\frac{1}{Graetz_{Dh}}\right)^{1/2} = 1.24 \left(\frac{1}{Graetz} \frac{1}{16}\right)^{1/2}$$

Para el perfil cúbico de temperatura:

$$\left(\frac{1}{Graetz_{Dh}}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{Graetz} \frac{1}{16}\right)^{1/2}$$

### **6.16 Número de Nusselt como función del número de Graetz, para el perfil lineal, cuadrático y cúbico, caso propiedades físicas constantes.**

Se ha representado el número de Nusselt local como función de  $\Delta$  (ver sección 6.12), y el número de Graetz como función de  $\Delta$  (ver sección 6.15), ahora relacionando ambas funciones se puede representar el número de Nusselt local como función del número de Graetz, lo cual se comparará con datos obtenidos en bibliografía abierta y con la correlación de Sieder y Tate (ver anexo B).

La figura 6.16.1 muestra el comportamiento del número de Nusselt en función de número de Graetz, pueden observarse discrepancias entre los modelos. Para ajustar las curvas obtenidas al usar el perfil de temperatura lineal y cuadrático al cúbico, se modifican los coeficientes de la ecuación del número de Nusselt, de tal manera de que se puedan aproximar lo más posible al modelo cúbico, el cual es la referencia que se quiere reproducir. Esto se muestra en la figura 6.16.2. se puede observar que el ajuste es lo suficientemente bueno, como para no distinguirse discrepancias entre ellos. Sólo en el extremo de la curva, donde la capa límite se encuentra cerca de la región en desarrollo se muestra una ligera discrepancia.

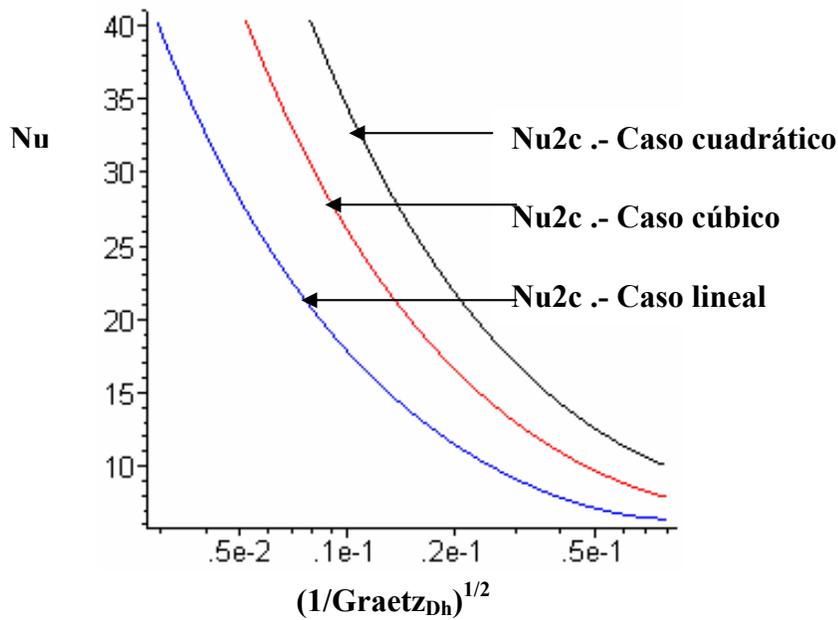


Fig. 6.16.1 Número de Nusselt local. Modelo de propiedades constantes. Perfiles de temperatura lineal, cuadrático y cúbico.

La modificación hecha al modelo del Nusselt y en base al diámetro hidráulico ( $D_h=4 \cdot R$ ) puede ser resumida en las siguientes ecuaciones

$$Nu_{1_{Dh}} = 4[1.5]Nu_{1_c} - 1$$

$$Nu_{2_{Dh}} = 4[1.52]Nu_{2_c}$$

$$Nu_{3_{Dh}} = 4[1]Nu_{3_c}$$

De tal manera que la gráfica puede ser comparada con la que se muestra en la bibliografía abierta para la solución exacta del problema de Graetz (ver anexo B). Si se calculan las discrepancias entre ambas soluciones, las mismas son del orden del 1%, excepto en la zona en que la capa límite se desarrolla térmicamente.

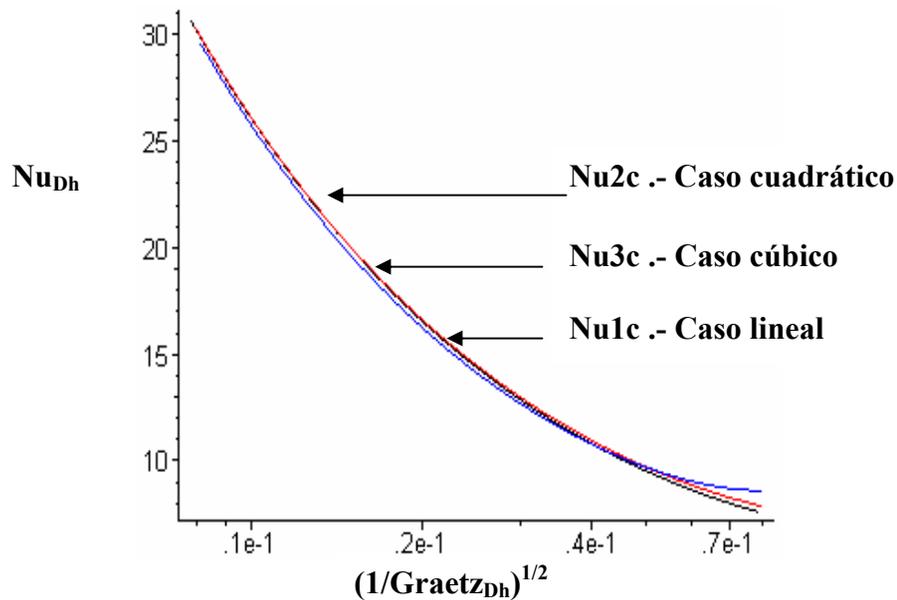


Fig. 6.16.2 Número de Nusselt local como función del número de Graetz. Modelo de propiedades constantes. Perfiles de temperatura lineal, cuadrático y cúbico. Constantes puras con ajuste.

**6.17 Número de Graetz a partir de perfil de temperatura lineal y cuadrático, usando perfil de velocidad obtenido con viscosidad en función de la temperatura.**

Siguiendo el proceso que se indica en el apartado 5.4.3.1, análogo a la sección anterior, sección 6.16:

$$\int_0^{\Delta} -\Delta \left( \frac{\partial}{\partial \Delta} \left( \int_0^1 u_{\eta}(\eta) (\Theta_{\eta} - 1) d\eta \Delta \right) \right) d\Delta \left[ \frac{3}{2} \frac{1}{\left( \frac{\partial}{\partial \eta} \Theta_{\eta} \right)_0} \right] = \frac{1}{Graetz} \tag{6.17.1}$$

Reemplazando los perfiles de temperatura y velocidad respectivos, se obtiene:

Para el perfil lineal se tiene:

---


$$\frac{1}{\text{Graetz}Bl} = \frac{9 \mu_r \Delta^4}{4 B^3 e^B} - \frac{9 \mu_r \Delta^4}{8 B^2} + \frac{27 \mu_r \Delta^4}{4 B^4 e^B} - \frac{27 \mu_r \Delta^4}{4 B^4} + \frac{9 \mu_r \Delta^4}{2 B^3} + \frac{\mu_r \Delta^3}{B} + \frac{2 \mu_r \Delta^3}{B^3} - \frac{2 \mu_r \Delta^3}{B^2} - \frac{2 \mu_r \Delta^3}{B^3 e^B}$$

(6.17.2)

Para el perfil cuadrático:

$$\frac{1}{\text{Graetz}B2} = \frac{1}{192} \mu_r \Delta^3 \left( 36 \Delta \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{B}{\sqrt{-B}}\right) B^2 - 36 \Delta \sqrt{-B} + 36 \Delta \operatorname{erf}(\sqrt{-B}) \sqrt{\pi} B^2 - 18 \Delta \sqrt{-B} e^B + 27 \Delta \operatorname{erf}(\sqrt{-B}) \sqrt{\pi} + 32 \sqrt{-B} e^B B - 32 \operatorname{erf}(\sqrt{-B}) \sqrt{\pi} B^2 - 32 \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{B}{\sqrt{-B}}\right) B^2 + 32 \sqrt{-B} - 32 \sqrt{-B} e^B \right) e^{(-B)} / (B^2 \sqrt{-B})$$

(6.17.3)

En la figura 6.17.1 se presenta el comportamiento del número de de Nusselt local en función del espesor de capa límite adimensional,  $\Delta$ , cuando  $B=0.1$ . Cuando  $B$  toma valores cercanos a cero (0) los resultados son equivalentes al modelo de propiedades constantes. Comparando las figuras 6.15.1 y 6.17.1 se puede ver que las soluciones prácticamente coinciden.

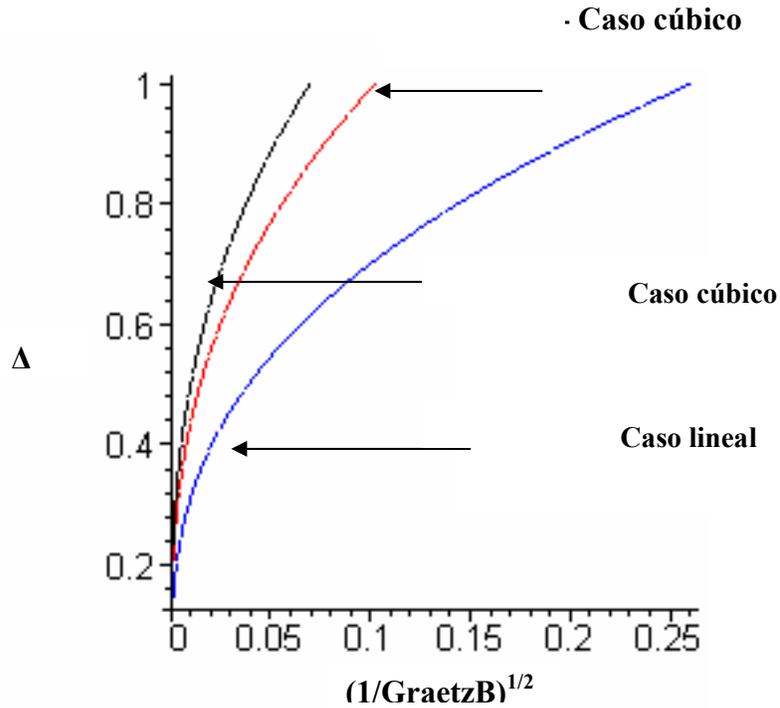


Fig. 6.17.1. Comportamiento del espesor de la capa límite como función del número de Graetz. Caso viscosidad función de la temperatura y caso cúbico de propiedades constantes. Parámetro  $B=0.1$

Realizando el ajuste necesario para unificar las ecuaciones para el espesor de capa límite  $\Delta$ , en función del número de Graetz corregido se obtiene (ver figura 6.17.2):

Para el perfil lineal de temperatura:

$$\left( \frac{1}{\text{Graetz} B l_{Dh}} \right)^{1/2} = 0.65 \left( \frac{1}{\text{Graetz} B l} \frac{1}{16} \right)^{1/2}$$

Para el perfil cuadrático de temperatura:

$$\left( \frac{1}{\text{Graetz} B 2 l_{Dh}} \right)^{1/2} = 1.24 \left( \frac{1}{\text{Graetz} B 2 l} \frac{1}{16} \right)^{1/2}$$

Para el perfil cúbico de temperatura:

$$\left( \frac{1}{\text{Graetz}_{Dh}} \right)^{1/2} = \left( \frac{1}{\text{Graetz}} \frac{1}{16} \right)^{1/2}$$

---

Se observa que se tienen los mismos resultados para las constantes de ajuste que en la sección 6.15 para el caso de propiedades físicas constantes.

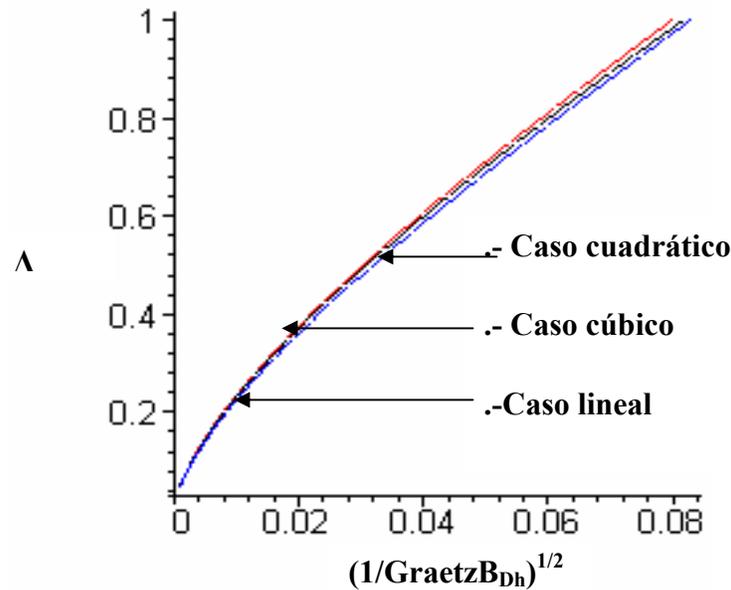


Fig. 6.17.2. Comportamiento del espesor de la capa límite como función del número de Graetz. Caso viscosidad función de la temperatura y caso cúbico de propiedades constantes. Parámetro  $B=0.1$ . Ajuste.

Para ilustrar el comportamiento del número de Graetz cuando la temperatura varía, la figura 6.17.3, representa el comportamiento cuando  $B=5$ . Se puede observar como el inverso del número de Graetz, cuando  $\Delta = 1$ , aumenta cerca de 100 veces el valor para el caso cúbico de propiedades físicas constantes, lo que implica que la longitud necesaria para que la capa límite térmica se desarrolle es mucho mayor que la estimada suponiendo el modelo de propiedades físicas constantes.

**.- Caso cúbico**

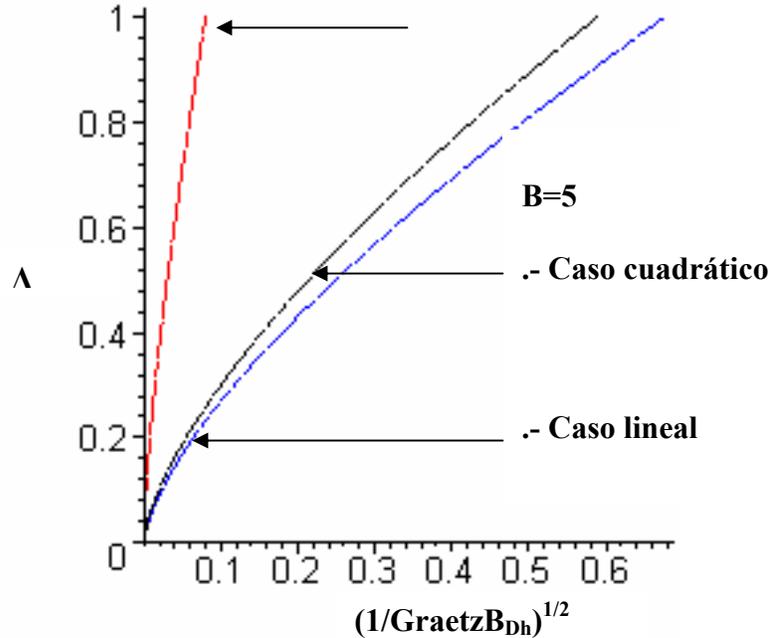


Fig. 6.17.3. Comportamiento de la capa límite como función del número de Graetz. Caso viscosidad función de la temperatura y caso cúbico de propiedades constantes. Parámetro  $B=5$ .

Para el caso en que  $B=10$  la figura 6.17.4 muestra que la longitud necesaria para el desarrollo es del orden de 1000 veces la estimada suponiendo propiedades constantes (compare el valor del inverso del número de Graetz para el caso  $B=10$  e isotérmico). Este comportamiento puede explicarse haciendo uso de las curvas del perfil de velocidad, en éstas se mostró, que el fluido cerca de la superficie adquiere una mayor velocidad que la que se tendría si el fluido fuese de propiedades físicas constantes, por lo que el transporte de energía cerca de la superficie es mayor y la capa límite no crece lo suficientemente rápido como se estimaría del modelo de propiedades físicas constantes. Los perfiles muestran que la velocidad en la parte central disminuye, mientras que cerca de la superficie se hace más rápida al compararse con el modelo de propiedades físicas constantes, transportando más calor axialmente y retardando el aumento o crecimiento del espesor capa límite térmica.

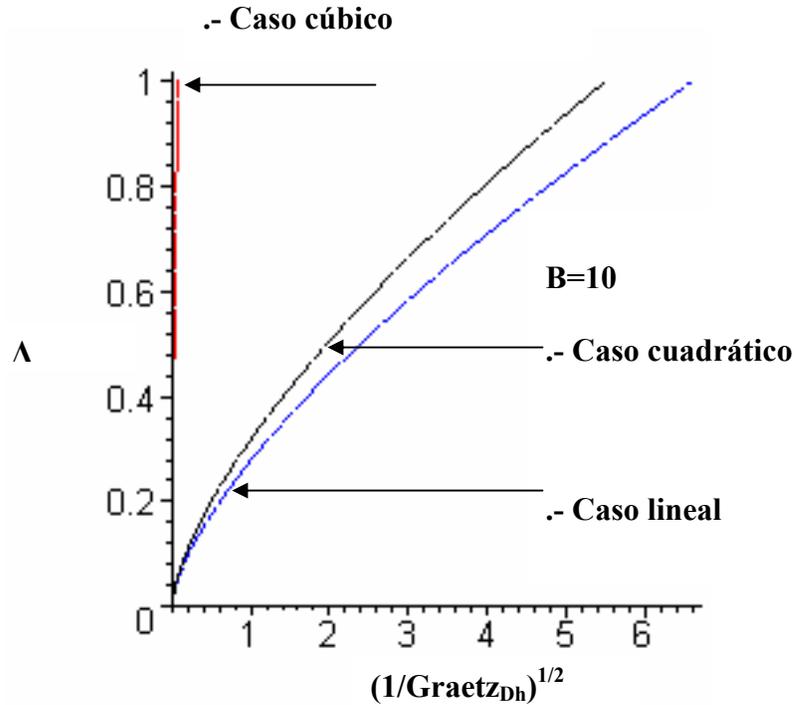


Fig. 6.17.4. Comportamiento de la capa límite como función del número de Graetz. Caso viscosidad función de la temperatura y caso cúbico de propiedades constantes. Parámetro B=10.

**6.18 Número de Nusselt local como función del N° de Graetz<sub>Dh</sub>, para el perfil de temperatura lineal, cuadrático, con viscosidad función de la temperatura. Caso cúbico propiedades físicas constantes.**

Se había representado el número de Nusselt como función de  $\Delta$ , y de B, parámetro que toma en cuenta el cambio de la viscosidad con temperatura, ahora se puede representar el número de Nusselt como función del N° de Graetz y del parámetro B, el cual se puede comparar con datos de la bibliografía (ver anexo B).

La figura 6.18.1, muestra el comportamiento del Nusselt local como función de número de Graetz para el caso lineal y cuadrático de viscosidad variable que prácticamente coincide con el modelo cúbico de propiedades físicas constantes para

---

$B=0.1$ . Cuando el parámetro  $B$  tiene valores cercanos a cero (0), la solución es equivalente a la solución de propiedades constantes.

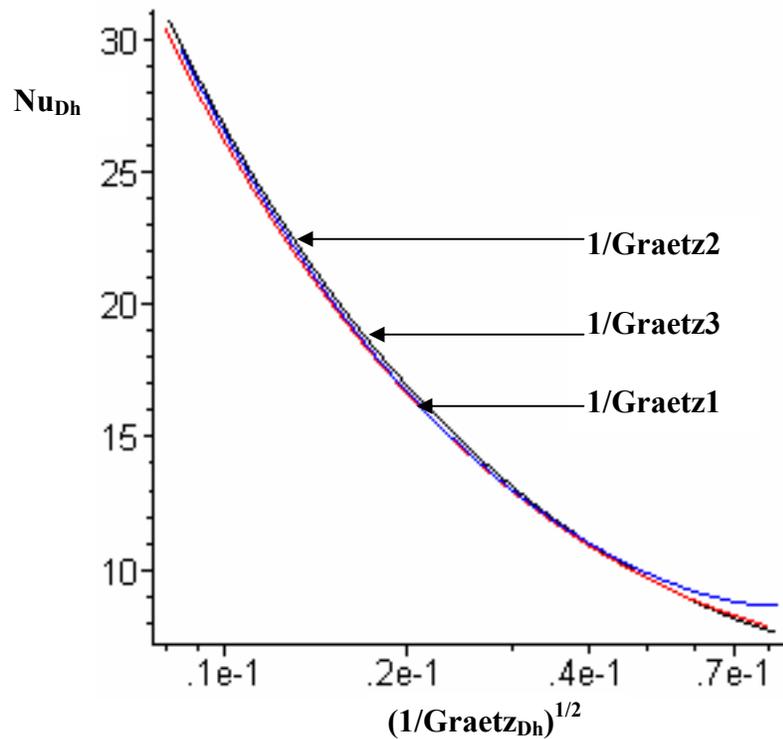


Fig. 6.18.1 Número de Nusselt local como función del número de Graetz y del parámetro  $B$ . Parámetro  $B=0.1$ .

Para ilustrar el comportamiento del Nusselt local en función del número de Graetz cuando la temperatura varía, la figura 6.18.2, en representa el comportamiento cuando  $B=5$ . Se observa como la curva se desplaza con respecto a la curva de propiedades físicas constantes. Se observa como el número de Nusselt calculado tomando en cuenta que la viscosidad es función de la temperatura es mucho mayor que el calculado usando la curva de propiedades físicas constantes, para un mismo valor del número de Graetz, esto se debe al efecto de la disminución de la viscosidad cerca de

la pared y al aumento significativo en consecuencia de la velocidad, lográndose aumentar el flujo de calor en la interfase.

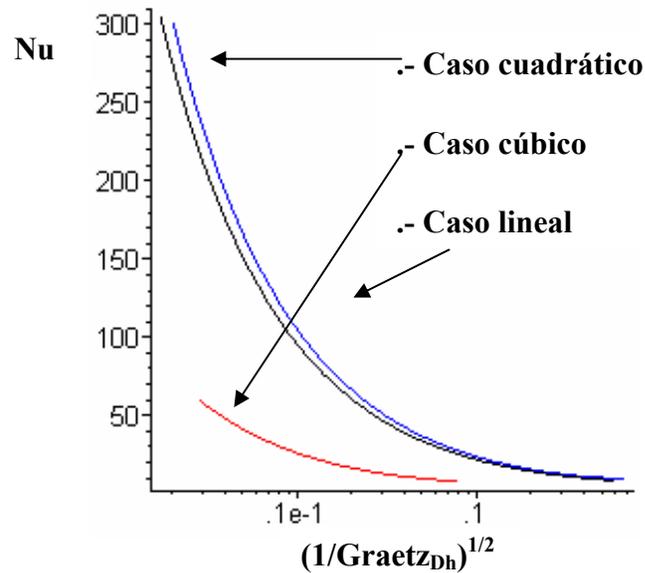


Fig. 6.18.2 Numero de Nusselt local. Caso viscosidad función de la temperatura. Perfiles de temperatura lineal y cuadrático. Parámetro  $B=5$ . Caso cúbico de propiedades constantes.

**6.19 Número de Nusselt promedio como función del N° de Graetz, caso propiedades físicas constantes y caso propiedades físicas variables.**

Se había representado el número de Nusselt local como función del número de Graetz y de  $B$ , parámetro que toma en cuenta el cambio de la viscosidad con temperatura, ahora se puede representar el número de Nusselt promedio como función del N° de Graetz y del parámetro  $B$ , el cual se puede comparar con datos de la bibliografía y con la correlación de Sieder y Tate. Para calcular el número de Nusselt promedio se usará la formulación propuesta en la ecuación (5.6.9) de la formulación matemática del modelo (capítulo V):

De la definición del número de Nusselt se tiene:

$$Nu = \overline{Nu}_m = \frac{\bar{h} \cdot R}{k} = -\frac{\ln(\Theta_b)}{z'} = \frac{1}{z'} \int_0^{z'} Nu \cdot dz' \quad (5.6.9)$$

Donde  $z'$ , es el número de Graetz:

$$\frac{1}{z'} = \frac{z}{R} \cdot \frac{1}{Re \cdot Pr} \quad (5.6.10)$$

Haciendo los cambios respectivos para definir el número de Nusselt y el número de Graetz en función del diámetro hidráulico se tiene:

$$Num = -\frac{\ln(\Theta_{b,\eta})}{\frac{1}{Graetz_{Dh}}} \quad (5.19.1)$$

Para el caso cúbico el perfil de temperatura media de mezcla es:

$$\Theta_{3_{b,c}} := \frac{1}{16} \Delta^3 - \frac{3}{10} \Delta^2 + 1$$

El inverso del número de Graetz es:

$$\frac{1}{Graetz_3} = \frac{1}{32} \Delta^4 + \frac{2}{15} \Delta^3$$

Por lo tanto el número de Nusselt medio es:

$$Num_{3c} = -\frac{16 \ln\left(\frac{1}{16} \Delta^3 - \frac{3}{10} \Delta^2 + 1\right)}{\frac{1}{32} \Delta^4 + \frac{2}{15} \Delta^3} \quad (5.19.2)$$

Análogamente para el perfil lineal se tiene:

$$Num_{1c} = -\frac{16 \ln\left(\frac{1}{8} \Delta^3 - \frac{1}{2} \Delta^2 + 1\right)}{\frac{3}{32} \Delta^4 + \frac{1}{3} \Delta^3} \quad (5.19.3)$$

Para el perfil cuadrático:

$$Nu_{2c} = - \frac{16 \ln \left( \frac{1}{20} \Delta^3 - \frac{1}{4} \Delta^2 + 1 \right)}{-\frac{3}{160} \Delta^4 + \frac{1}{12} \Delta^3} \quad (5.19.4)$$

Sieder y Tate, propusieron la siguiente ecuación para tubos (obtenida a partir de la solución en conducto de placas paralelas, solución de Leveque, según Bird 2006): Si el cambio de la viscosidad con la temperatura de la pared es significativo:

$$Numc = 1.86 \cdot \left( \text{Re} \cdot \text{Pr} \cdot \frac{D}{L} \right)^{1/3} \left( \frac{\mu_b}{\mu_w} \right)^{0.14} \quad (5.19.5)$$

Esta ecuación se puede escribir, considerando propiedades físicas constantes:

$$Numc = 1.86 \cdot (\text{Graetz})^{1/3} = 1.86 \cdot \left( \frac{1}{\text{Graetz}^{1/2}} \right)^{-2/3} \quad (5.19.5)$$

Las ecuaciones del número de Nusselt promedio (ecuaciones 5.19.2, 5.19.3 y 5.19.4) como función de  $\Delta$  y del número de Graetz como función de  $\Delta$  (ecuaciones 6.15.2, 6.15.3 y 6.15.4), se deben combinar para representar en una figura el número de Nusselt como función del número de Graetz.

En la figura 6.19.1, se muestra el número de Nusselt promedio para el caso de propiedades físicas constantes, del perfil lineal, cuadrático y cúbico y la ecuación de Sieder y Tate (ecuación 5.19.5). Se observa que la diferencia de estas ecuaciones es pequeña menor al 4%, por lo que los modelos planteados difieren poco con la ecuación de Sieder y Tate, ampliamente usada en aplicaciones de ingeniería.

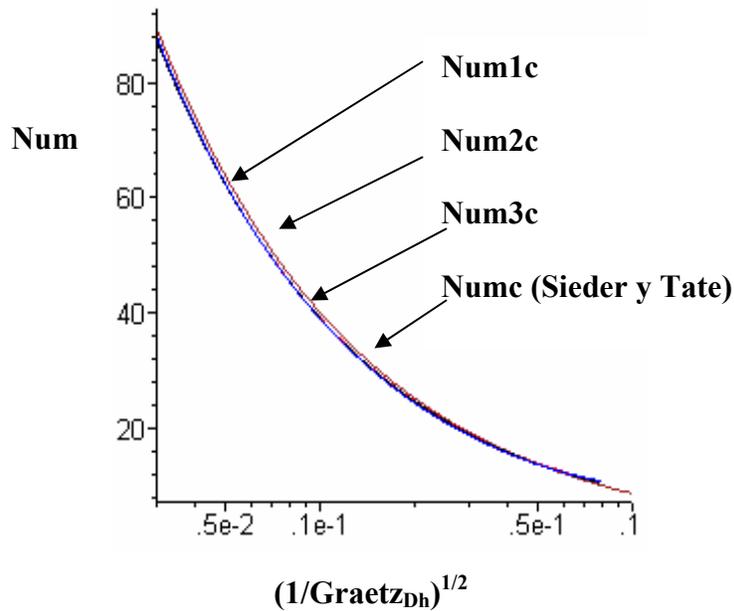


Figura 6.19.1 Número de Nusselt promedio como función del número de Graetz..  
Perfiles de temperatura lineal, cuadrático, cúbico y correlación de Sieder y Tate para propiedades físicas constantes.

En la figura 6.19.2, se muestra el número de Nusselt promedio en función del número de Graetz y del parámetro B (para B=0.1), para el caso en que la viscosidad es función de la temperatura, se muestra el número de Nusselt obtenido del perfil lineal, del perfil cúbico (para propiedades físicas constantes) y la ecuación de Sieder y Tate (ecuación 5.19.5). Se observa que la diferencia de estas ecuaciones es pequeña menor al 4%.

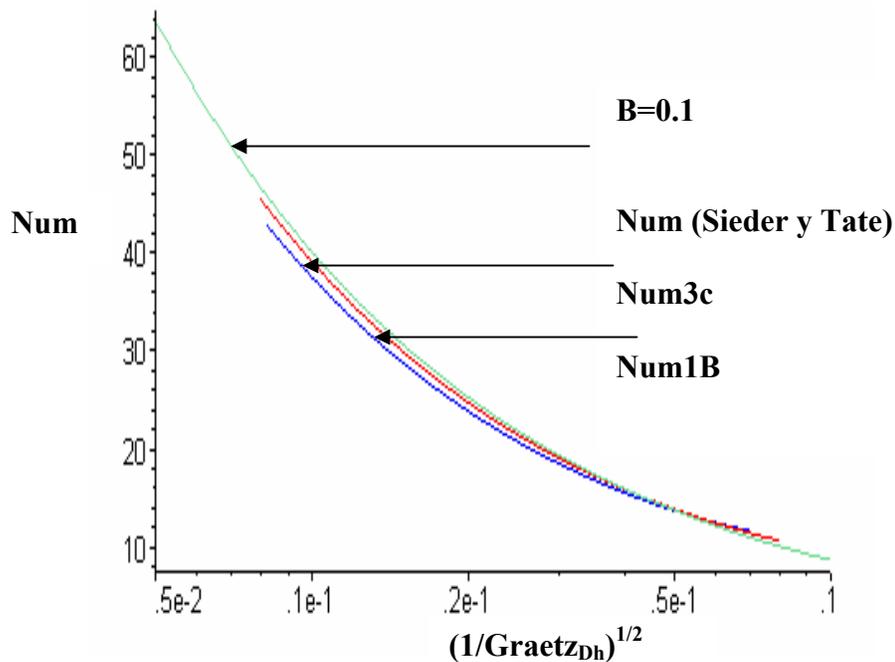


Figura 6.19.2 Número de Nusselt promedio como función del número de Graetz y del parámetro B. Caso viscosidad función de la temperatura. Perfiles de temperatura lineal, cúbico y correlación de Sieder y Tate. Para  $B=0.1$ .

En la figura 6.19.3, se muestra los perfiles del número de Nusselt promedio en función del número de Graetz y del parámetro B (para  $B=3$ ), para el caso en que la viscosidad es función de la temperatura, se muestra el número de Nusselt obtenido del perfil lineal, del perfil cúbico y la ecuación de Sieder y Tate. Se observa que la diferencia de estas ecuaciones es mayor al 20%. De lo anterior se deduce que la ecuación de Sieder y Tate coincide con el modelo propuesto en este trabajo, para valores menores al  $B=3$ , esto es valores de la relación de la viscosidad,  $\frac{\mu_b}{\mu_w} < 20$ , ya que para valores mayores el cambio en el número de Nusselt promedio es significativo, y la ecuación propuesta por Sieder y Tate no considera estos cambios (ver apéndice A). Sin embargo el modelo propuesto en este trabajo considera la

variación de la viscosidad a través de un ajuste exponencial, por lo que modelos más reales pueden producir mejores resultados. Sin embargo la verificación de las condiciones que se predicen con el modelo que se propone en este trabajo se dejan para trabajos posteriores, los cuales deben estar sujetos a datos físicos experimentales o a datos de experimentación numérica, conocidos en la bibliografía especializada como simulación numérica directa.

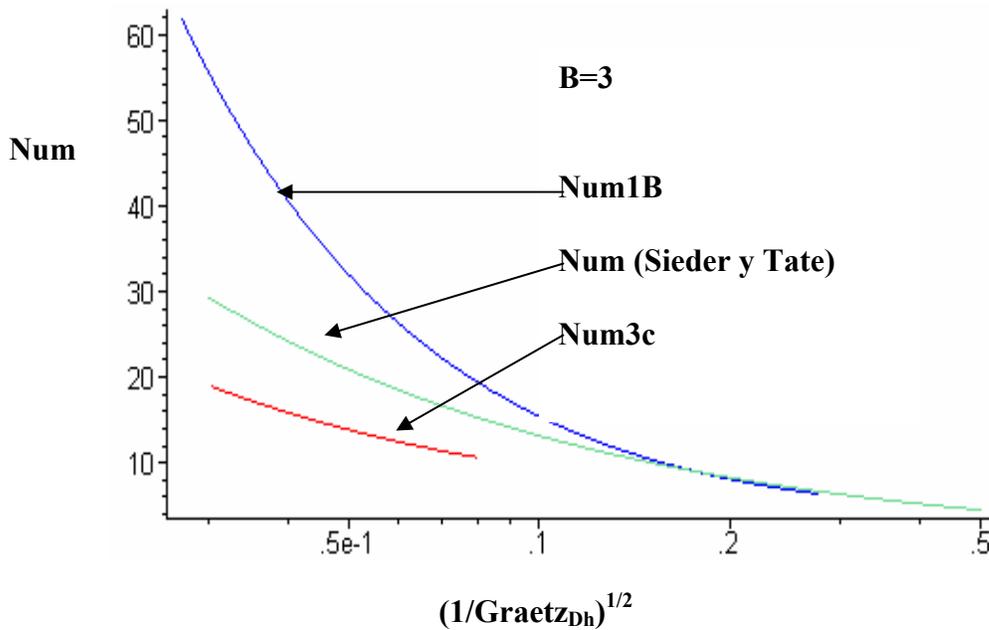


Figura 6.19.3 Número de Nusselt promedio como función del número de Graetz y del parámetro B. Caso viscosidad función de la temperatura. Perfiles de temperatura lineal, cúbico y correlación de Sieder y Tate.  $B=3$

El modelo de Sieder y Tate es una correlación propuesta para el caso en que las propiedades físicas varían ligeramente con la temperatura. Para usar la correlación de Sieder y Tate se debe calcular las propiedades físicas a la temperatura promedio entre la entrada y la salida. Por esto el autor propone que el modelo que se presenta en este trabajo (ya que coincide con el Modelo de Sieder y Tate) sea usado con el valor de las constantes físicas evaluadas a la temperatura media de flujo, ya que para valores bajos del parámetro B, la predicción sería la esperada. En este orden de ideas la

---

correlación de Sieder y Tate se recomienda para elevados números de Prandtl (con propiedades físicas constantes), según las hipótesis simplificadoras que se uso en el capítulo 5, el modelo que se propone en este trabajo es especialmente útil a elevados número de Prandtl, pero toma en cuenta los cambios de la viscosidad con la temperatura. Sin embargo se aclara que el ajuste exponencial usado en este trabajo puede no ser adecuado para algunos fluidos y cuando los gradientes de temperatura son muy pronunciado, se sugiere un modelo con ajuste más realista o usar con prudencia los resultados que se derivan del modelo.

---

---

**CAPÍTULO VII**  
**CONCLUSIONES**

---

---

---

## CAPÍTULO VII

### CONCLUSIONES

1. Se encontró un modelo que permite estudiar la convección forzada para flujo interno en régimen laminar y  $Prandtl \gg 1$ , para fluidos viscosos con viscosidad función exponencial de la temperatura.
2. Se determinó que en la convección forzada en fluidos altamente viscosos el número de Nusselt es función del número de Graetz, del parámetro  $B$ , que toma en cuenta los cambios exponenciales de la viscosidad con la temperatura,  $B = \ln(\mu_0/\mu_w)$ .
3. La suposición de dos fases con viscosidades diferentes permiten obtener una solución más precisa para el número de Nusselt y los perfiles de velocidad y esfuerzo que la solución que se obtiene de un modelo que supone que las propiedades físicas son constantes.
4. Los perfiles de velocidad, esfuerzo y número de Nusselt cambian de manera significativa cuando existe una disminución de la viscosidad en la zona cerca de la pared de calentamiento.

- 
5. El espesor de la capa límite térmica crece más levemente del que se espera de un modelo para propiedades físicas constantes, debido a que el calor que entra al fluido produce una disminución en la viscosidad y a su vez un aumento en la velocidad cerca de la superficie y por ende un aumento del transporte energía axial por convección
  6. Los perfiles aproximados de temperatura lineal y cuadrático, como función de una variable combinada, permiten obtener un modelo apropiado para la transferencia de calor por convección forzada en fluidos viscosos.
  7. Los modelos obtenidos a partir de perfiles de temperatura lineal y cuadrático pueden ser ajustados para mejorar la predicción o simulación de la transferencia de calor por convección forzada en fluidos viscosos.
  8. El esfuerzo de corte en la superficie de calentamiento y el gradiente de presión local, disminuye en la medida que se avanza en la zona de transferencia de calor, ó sea en la medida que crece la longitud axial.
  9. Los valores calculados del número de Nusselt con el modelo propuesto en este trabajo, concuerda con los obtenidos usando la correlación de Sieder y Tate, para valores del parámetro  $B$  menores de tres ( $B < 3$ ). Esto es para cuando la relación entre la viscosidad del fluido a la temperatura de entrada y la viscosidad del fluido a la temperatura de pared es menor que quince,  $< 15$ ,
  10. Los valores calculados del número de Nusselt con el modelo propuesto en este trabajo, difieren significativamente y es mayor que el obtenido con el modelo de propiedades constantes y el modelo de Sieder y Tate cuando el parámetro  $B > 3$ .

---

---

---

**CAPÍTULO VIII**  
**RECOMENDACIONES**

---

---

---

## **CAPÍTULO VII**

### **RECOMENDACIONES**

1. Se recomienda estudiar la convección forzada en fluidos altamente viscosos a través de experimentos físicos o numéricos, para limitar y ajustar el modelo propuesto en este trabajo a un rango preciso del número de Reynolds y del Número de Prandtl.
2. Se proponen mejoras al sistema BES a través de un sistema de aletas de enfriamiento de tipo helicoidal que mejora el efecto de enfriamiento y no produce altas caídas de presión. El modelo propuesto en este trabajo puede ser usado para un estimado inicial.
3. Se recomienda estudiar posibles modificaciones a las aplicaciones de bombas de fluidos altamente viscosos, ya que un calentamiento y a su vez una disminución del esfuerzo de corte en zonas seleccionadas convenientemente podrían aumentar la eficiencia de dicho equipo de bombeo.
4. Se propone extender la metodología de este trabajo para construir un modelo de flujo bifásico, que tome en cuenta fenómenos de transferencia de calor y de masa, para aplicaciones de transporte de flujo multifásicos y en aplicaciones de reactores multifásicos para procesamiento de crudos extrapesados.

---

---

## **APENDICES**

---

---

## APENDICES

A.- La ecuación de Sieder y Tate puede ser obtenida a través de la siguiente metodología (Bird, 2006); Combinando el perfil de velocidad con la ecuación de energía, para el caso de Temperatura de pared constante,  $T=T_w$ .

A.1 Caso propiedades físicas variables (Solución de Leveque):

Ecuaciones flujo desarrollado

$$v_z = \frac{(P_o - P_L)R^2}{4\mu L} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

$$\rho C_v \left( v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right]$$

Ecuaciones para distancias cortas

$$w = \frac{(P_o - P_L)R}{2\mu L} s$$

$$s = R - r$$

$$\rho C_v \left( w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial s^2}$$

Solución usando cambio de variable

$$\Theta = \frac{T - T_o}{T_1 - T_o}; \quad \zeta = \frac{z}{R}; \quad \sigma = \frac{s}{R}; \quad N = \frac{(P_o - P_L)R^* R^2}{2\mu L k};$$

$$\Theta = f(\eta); \quad \eta = \left( \frac{N^* \sigma^3}{9\zeta} \right)^{\frac{1}{3}};$$

$$f'' + 3\eta^2 f' = 0; \dots \dots \eta = 0 \rightarrow f = 1, \dots \dots \eta = \infty \rightarrow f = 0$$

$$f(\eta) = \Gamma(4/3)^{-1} \int_{\infty}^{\eta} e^{-n^3} dn$$

Calor transferido

$$Q = \int_0^L \int_0^{2\pi} \left( +k \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} R d\theta dr$$

$$Nu = \frac{h_n D}{k}$$

Solución de Léveque (1928)

$$Nu = 1.62 \left( \text{Re Pr} \frac{D}{L} \right)^{1/3}$$

---

A.2 Caso viscosidad cambia de ligeramente con la temperatura (Sieder y Tate)  
 Si toma en cuenta que la viscosidad puede ser escrita:

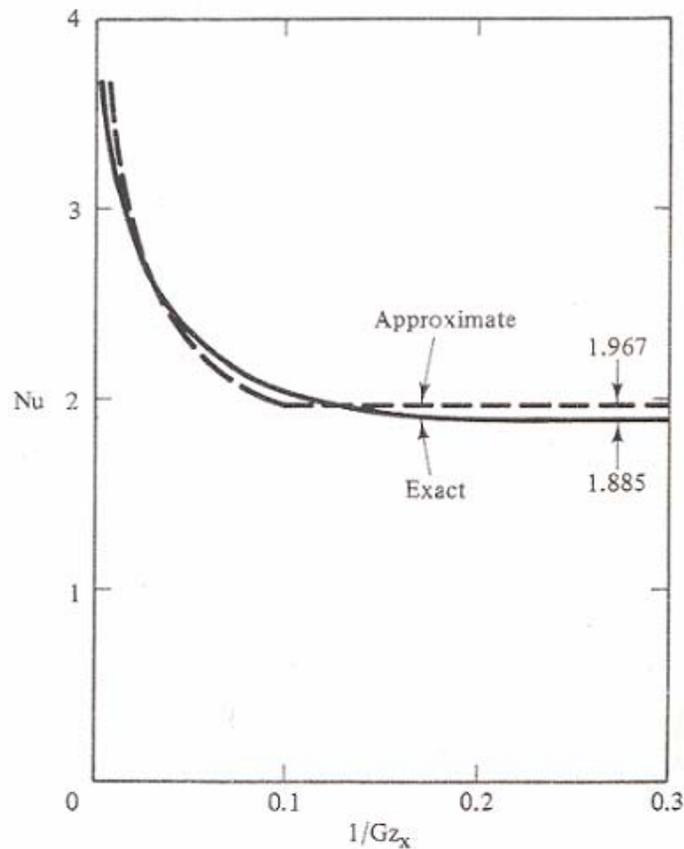
$$\frac{\mu}{\mu_w} = e^{\ln\left(\frac{\mu_o}{\mu_w}\right)\left(\frac{T-T_w}{T_o-T_w}\right)} \quad \text{o} \quad \frac{\mu}{\mu_w} = e^{\ln\left(\frac{\mu_o}{\mu_w}\right)\Theta} = e^{B \cdot \Theta(\eta)}$$

Al suponer que un  $\Theta(\eta) = \text{constante} = 0.5$  ( $\Theta$ , varia entre cero(0) y uno(1)) se tiene siguiendo el procedimiento anterior

$$Nu = 1.62 \left( \text{Re Pr} \frac{D}{L} \right)^{1/3} \left( \frac{\mu_o}{\mu_w} \right)^{0.5/3} = 1.62 \left( \text{Re Pr} \frac{D}{L} \right)^{1/3} \left( \frac{\mu_o}{\mu_w} \right)^{0.16}$$

La cual puede ser comparada con el modelo de Sieder y Tate

B1. Solución aproximada usando un perfil de temperatura cúbico y perfil de velocidad con propiedades físicas constantes: se observa que dicha solución aleja de la exacta (solución de Graetz) como máximo 8% cerca de la longitud de desarrollo, y en la mayoría del rango su desviación es mucho menor al 2%. La figura A.1 fue publicada por Prins, Mulder and Schenk en 1951(ver Bejan A., 1995).



**Fig. 3.30** Exact and approximate values of Nu versus  $1/Gz_x$ , Ex. 3.5.5 (exact curve adapted from Prins, Mulder and Schenk 1951; used by permission)

Figura A.1. Solución exacta y aproximada del problema de Graetz-Nusselt: se compara dichas soluciones, la desviación es del orden del 8% en la zona donde el flujo se encuentra térmicamente desarrollado, en el resto del rango el error del orden del 1%.

B2. En la mayoría de la bibliografía abierta se define el número de Graetz, utilizando como longitud característica el diámetro hidráulico, que para el caso de conductos entre placas paralelas es cuatro (4) veces el semiespesor R (ver Larsen P., 1984). La figura B.2, muestra resultados de la solución exacta del problemas de Graetz, para el caso de propiedades físicas constante. Se observa que los números adimensionales se definieron en función del diámetro hidráulico.

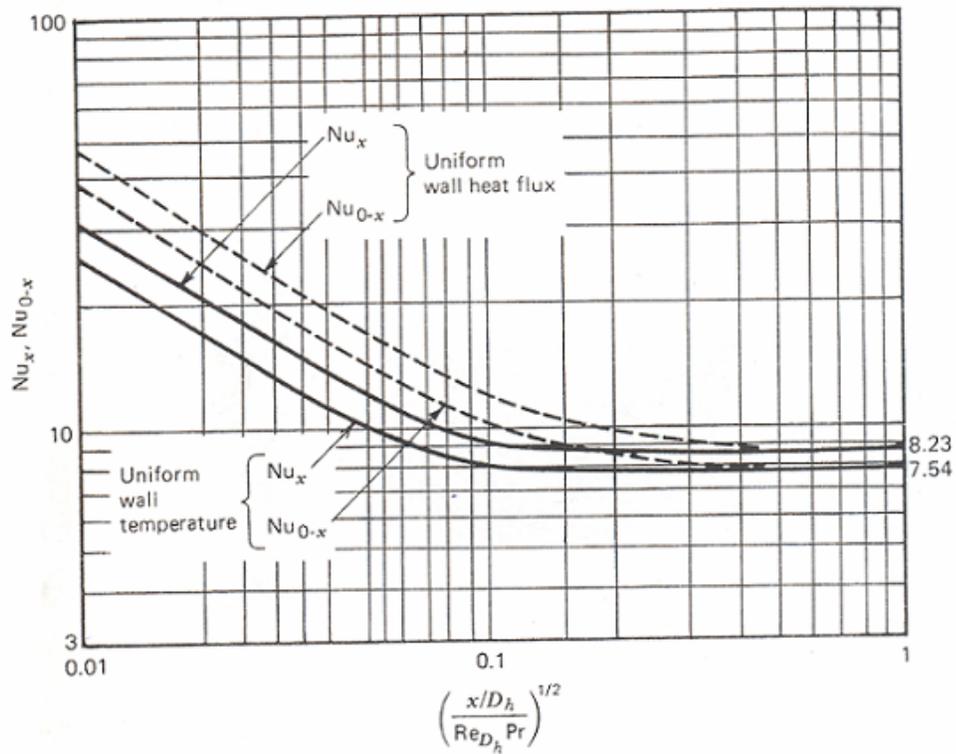


Figure 3.16 Heat transfer in the thermal entrance region of a parallel-plate channel with Hagen-Poiseuille flow (drawn based on data from Ref. 9).

Fig B.2 Solución exacta del problema de Graetz para propiedades constantes.

---

### **Anexo C: Procedimiento con detalle para obtener el modelo aproximado.**

En este anexo se amplía con detalle el desarrollo del modelo (capítulo 5), que permite una solución analítica, vía solución aproximada al modelo propuesto para la convección forzada en fluidos altamente viscosos con viscosidad dependiente de la temperatura.

#### **c.1.1 Perfil de esfuerzo adimensional:**

Como la variación de  $\tau_{rz} = \tau(r, z) = \tau(r, \delta_T)$  con respecto a  $z$  es pequeña, se puede resolver la ecuación diferencial en derivadas parciales como una derivada total y su solución será válida para cada  $z$ . Una metodología análoga ha sido usada para resolver problemas de estado no estacionario, combinando ecuaciones de régimen estacionario con ecuaciones no estacionarias, esto se conoce en la bibliografía como procesos seudo estacionarios (Welty et al., 1999). La ecuación 4.1.22 se escribe

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{rz}) \right) - \rho g \quad (\text{c.1.1})$$

De la ecuación de cantidad de movimiento anterior, se puede despejar el esfuerzo de corte; si se usa  $P = p + \rho g z$ , se obtiene:

$$\tau_{rz} = \frac{1}{2} \left( -\frac{dP}{dz} \right)_z r + \frac{C1}{r} \quad (\text{c.1.2})$$

Se aplica la ecuación anterior a la región cerca de la pared, y lejos de la pared, usando el efecto bifásico tenemos:

$$\tau_{rz}^I = \frac{1}{2} \left( -\frac{dP}{dz} \right)_z r + \frac{C1'}{r} \quad (\text{c.1.3})$$

$$\tau_{rz}'' = \frac{1}{2} \left( -\frac{dP}{dz} \right)_z \cdot r + \frac{C_1''}{r} \quad (\text{c.1.4})$$

Donde:

Fase I = Región cerca de la superficie de calentamiento

Fase II = Región fuera de la capa límite

Usando la siguiente condición de frontera:

$$\text{C.L.1 en } r = \delta_T \quad \tau_{rz}' = \tau_{rz}'' \quad (\text{c.1.5})$$

Se obtiene que  $C_1' = C_1'' = C_1$ , usando este resultado en (c.1.3) o (c.1.4):

$$\tau_{rz} = \frac{1}{2} \left( -\frac{dP}{dz} \right)_z r + \frac{C_1}{r} \quad (\text{c.1.6})$$

Significa que el perfil de esfuerzo es el mismo para ambas fases o regiones y continuo a través de la interfase, dependiente de la coordenada axial  $z$ , o de  $\delta_T$  a través de que  $\delta_T(z)$ .

Para adimensionalizar la ecuación anterior (c.1.6), como se observa es posible relacionar la caída de presión en cualquier valor de  $z$ ,  $\left( -\frac{dP}{dz} \right)_z$ , con la caída de presión en la zona de entrada a la zona de calentamiento, donde el flujo no ha sido afectado por la transferencia de calor (caída de presión en flujo isotérmico y dinámicamente desarrollado),  $\left( -\frac{dP}{dz} \right)_o$ , a través del parámetro adimensional,

$\left( -\frac{dP}{dz} \right)_\eta$ , el cual depende solo  $z$ .

Entonces:

$$\left(-\frac{dP}{dz}\right)_\eta = \frac{\left(-\frac{dP}{dz}\right)_z}{\left(-\frac{dP}{dz}\right)_o} \quad (\text{c.1.7})$$

Si se define el perfil de esfuerzo adimensional por:

$$\tau_{rz\eta} = \frac{\tau_{rz}}{\left(-\frac{dP}{dz}\right)_o R} \quad (\text{c.1.8})$$

En donde R es el radio interno del tubo interno (ver figura c.1.1).

Se obtiene un perfil adimensional de esfuerzo:

$$\tau_{rz\eta} = \frac{1}{2} \left(-\frac{dP}{dz}\right)_\eta \frac{r}{R} + \frac{C_1}{\left(-\frac{dP}{dz}\right)_o R^2} \frac{R}{r} \quad (\text{c.1.9})$$

El valor de la constante de integración se hará en la siguiente sección y en la región de entrada se supondrá que el flujo esta dinámicamente desarrollado.

### **c.1.2 Ecuaciones para obtener los perfiles de velocidades en forma adimensional:**

Si se sustituye la ley de newton de la viscosidad  $\tau_{rz} = -\mu \frac{dw}{dr}$ , en la ecuación de cantidad de movimiento (c.1.6), se llega a las siguientes relaciones:

$$-\mu^I \frac{dw^I}{dr} = \frac{1}{2} \left(-\frac{dP}{dz}\right)_z \cdot r + \frac{C1}{r} \quad \text{Fase I} \quad (\text{c.1.10})$$

$$-\mu^{II} \frac{\partial w^{II}}{\partial r} = \frac{1}{2} \left(-\frac{dP}{dz}\right)_z \cdot r + \frac{C1}{r} \quad \text{Fase II} \quad (\text{c.1.11})$$

---

### c.1.2.1 Perfil de viscosidad Adimensional

Para considerar la influencia de la viscosidad con la temperatura, se supondrá un ajuste exponencial (White, 2004):

$$\mu = A \cdot e^{-B \cdot T} \quad (\text{c.1.12})$$

Donde A y B, pueden determinarse a partir de datos experimentales, y la ecuación c.1.12, puede utilizarse para calcular la viscosidad  $\mu_o$  a la temperatura del fluido a la entrada  $T_o$  y la viscosidad del fluido  $\mu_w$  a la temperatura de pared  $T_w$ .

$$\mu_o = A_1 \cdot e^{-B_1 \cdot T_o}, \quad \mu_w = A_1 \cdot e^{-B_1 \cdot T_w} \quad (\text{c.1.13}) \text{ y } (\text{c.1.14})$$

Manipulando las relaciones (c.1.12), (c.1.13), (c.1.14) se llega a:

$$\frac{\mu}{\mu_w} = e^{\ln\left(\frac{\mu_o}{\mu_w}\right)\left(\frac{T-T_w}{T_o-T_w}\right)} \quad (\text{c.1.1c})$$

Definiendo la temperatura adimensional se puede escribir:

$$\frac{\mu}{\mu_w} = e^{\ln\left(\frac{\mu_o}{\mu_w}\right)\Theta} = e^{B \cdot \Theta(\eta)} \quad (\text{c.1.16a})$$

$$\Theta = \left(\frac{T - T_w}{T_o - T_w}\right) \quad (\text{c.1.16b})$$

Donde  $B = \ln\left(\frac{\mu_o}{\mu_w}\right)$  y  $\Theta$  puede expresarse convenientemente como función de  $\eta$ ,

$$\Theta = \Theta(\eta).$$

Esta última ecuación (c.1.16), se llamará viscosidad adimensional, ya que depende de la temperatura adimensional, y se expresa en parámetros adimensionales. Esta relación será muy útil en la solución del perfil de velocidad.

### c.1.2.2 Perfil de velocidad adimensional

En lo que sigue se adimensionalizará la ecuación de movimiento. Primero es necesario definir una velocidad característica:

$$V_S = \frac{1}{2} \left( -\frac{dP}{dz} \right)_z \frac{R^2}{\mu_w} \quad (c.1.17)$$

Y una variable combinada adimensional como:

$$\eta = \frac{r - KR}{\delta_T - KR} \quad (c.1.18)$$

Derivando y reemplazando las ecuaciones c.1.16, c.1.17 y c.1.18 en las ecuaciones c.1.10 y c.1.11 y definiendo como velocidad adimensional

$$w_{\eta,I}(\eta) = \frac{w^I}{V_S}, \quad w_{\eta,II}(\eta) = \frac{w^{II}}{V_S} \quad (c.1.19 \text{ a y b})$$

para la fase I y para la fase II respectivamente:

Para la fase I

$$-e^{\ln\left(\frac{\mu_0}{\mu_w}\right)\Theta(\eta)} \frac{dw_{\eta,I}}{d\eta} = \frac{[\eta(\delta_T - KR) + KR](\delta_T - KR)}{R^2} + \frac{C1(\delta_T - KR)}{V_S \mu_w [\eta(\delta_T - KR) + KR]} \quad (c.1.20a)$$

Para la fase II

$$-\frac{dw_{\eta,II}}{d\eta} = \frac{\mu_w}{\mu_0} \frac{[\eta(\delta_T - KR) + KR](\delta_T - KR)}{R^2} + \frac{C1(\delta_T - KR)}{V_S \mu_0 [\eta(\delta_T - KR) + KR]} \quad (c.1.20b)$$

---

Estas dos últimas ecuaciones representan las ecuaciones de movimiento en forma adimensional que permitirán determinar los perfiles de velocidad en el espacio anular. La fase I corresponde a la zona dentro de la capa límite térmica, y la fase II, es la zona donde no penetra el calor, la cuales tienen solución analítica con las siguientes condiciones límite:

$$\text{C.L.2} \quad r = KR, \text{ o } \eta = 0 \rightarrow w^I = 0 \text{ y } w_{\eta,I} = 0 \quad (\text{c.1.20c})$$

$$\text{C.L.3} \quad r = \delta_T, \eta = 1 \rightarrow w^I = w^{II} \text{ y } w_{\eta,I} = w_{\eta,II} \quad (\text{c.1.20d})$$

$$\text{C.L.4} \quad r = R, \eta = \frac{R - KR}{\delta_T - KR} = R' \rightarrow w^{II} = 0 \text{ y } w_{\eta,II} = 0 \quad (\text{c.1.20e})$$

El sistema representa un conjunto de dos ecuaciones diferenciales ordinarias con tres constantes de integración por determinar, C1 y dos constantes adicionales que aparecen al integrar cada ecuación diferencial, las cuales pueden ser resueltas analíticamente, siempre que se conozca el perfil de temperatura adimensional  $\Theta = \Theta(\eta)$ , como función de  $\eta$ , en la zona de calentamiento. En la siguiente sección, sección c.1.3, se determina una funcionalidad aproximada de dicho perfil, y en la sección c.1.4, se indica como determinar el perfil de temperatura en variable de similitud,  $\Theta = \Theta(\eta)$ , a partir de la ecuación de energía.

### **c.1.3 Perfil de temperatura adimensional, analogía de Blasius:**

La temperatura más alta del fluido está en la superficie de calentamiento, y debe disminuir con la coordenada radial ( $r$ ), como se aprecia en la figura c.1.3, hasta el espesor de capa límite donde la temperatura se hace prácticamente igual a la del fluido exterior (implícito en la teoría de capa límite de Prandtl). Blasius planteó que este comportamiento sería similar a lo largo del eje axial. Von Kármán propuso una función polinómica para el perfil de temperatura adimensional, como función de una

---

variable combinada (variable de similitud), análoga a la definida en la ecuación (c.1.18), en la cual la variable  $\delta_T$ , se obtiene con ayuda de la ecuación de energía en su forma integral (White, F., 2004).

Usando la analogía de Blasius, y la función polinómica de Von Kármán se construye el perfil de temperatura, tomando en cuenta las siguientes consideraciones:

De la figura c.1.1, se sabe que las condiciones de borde para la temperatura son:

$$\begin{aligned} r = KR, & & T = T_w = \text{Temperatura de la superficie o pared.} \\ r = \delta_T, & & T = T_o = \text{Temperatura del fluido exterior} \end{aligned}$$

Utilizando las ecuaciones c.1.16b y c.1.18, donde se definieron las variables adimensionales para la temperatura y la coordenada radial:

$$\Theta = \frac{T - T_w}{T_o - T_w}, \quad \text{y} \quad \eta = \frac{r - KR}{\delta_T - KR}$$

Se llega a que a las siguientes condiciones de borde:

$$r = KR \quad \text{o} \quad \eta = 0, \quad T = T_w \quad \text{o} \quad \Theta = 0 \quad (\text{c.1.21})$$

$$r = \delta_T \quad \text{o} \quad \eta = 1, \quad T = T_o \quad \text{o} \quad \Theta = 1 \quad (\text{c.1.22})$$

Caso 1: Perfil de temperatura lineal:

Si se supone un perfil de temperatura lineal como  $\Theta = a + b \cdot \eta$ , usando las condiciones de borde se obtiene que  $a=0$ , y  $b=1$ , el perfil adimensional de temperatura resulta:

$$\Theta = \eta \quad (\text{c.1.23})$$

---

Caso 2: Perfil de temperatura cuadrático:

Suponiendo un perfil de temperatura cuadrático como  $\Theta = a + b*\eta + c*\eta^2$ , usando las condiciones de borde (c.1.21), (c.1.22), y con una pendiente cero en borde de la capa límite se obtiene (ver figura c.1.1):

$$r = \delta_T \text{ o } \eta = 1, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=\delta_T} = 0, \text{ se deduce la condición de borde (c.1.24)}$$

$$\eta = 1, \quad \left. \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = 0 \quad (\text{c.1.24})$$

Por lo que para el perfil cuadrático se obtiene:

$$\Theta = 2\eta - \eta^2 \quad (\text{c.1.25})$$

Este procedimiento puede ser extendido hasta cualquier grado de un polinomio de  $\eta$ , pero para este trabajo se utilizará el perfil lineal y cuadrático. Es importante resaltar que los perfiles aproximados de temperatura obtenidos coinciden con los perfiles que se obtienen si la geometría fuese plana (Bird et al, 2006). La figura c.1.2, resume las condiciones límites. Además es importante aclarar que esta funcionalidad permite desacoplar la ecuación de cantidad de movimiento de la ecuación de energía, por lo que se podrá obtener una solución analítica aproximada al caso de estudio.

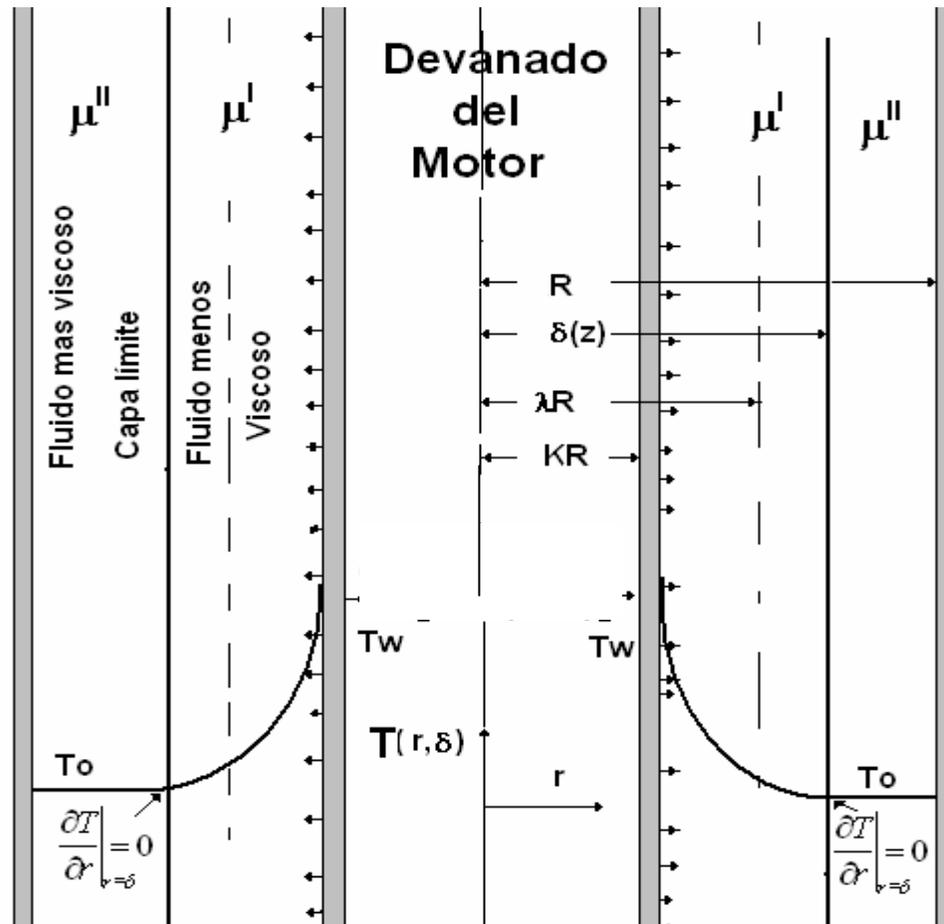


Fig. c.1.2. Perfil de temperatura según analogía de Blasius. Condiciones límites para perfiles aproximados.

#### c.1.4 Perfil de temperatura a partir de la ecuación de energía.

El segundo procedimiento implica combinar la ecuación de continuidad, movimiento y energía. A continuación mostramos el proceso (recuerde  $v_r = u$ ,  $v_z = w$ ).

Ecuación de continuidad:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial}{\partial z}(w) = 0 \quad (\text{c.1.26})$$

Ecuación de energía:

$$\rho C_p \left( u \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] \quad (\text{c.1.27})$$

Combinando la ecuación de continuidad con la de energía:

$$u \frac{\partial T}{\partial r} - \left( \frac{1}{r} \int_{KR}^R \left( \frac{\partial w'}{\partial z} \right) r dr \right) \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right] \quad (\text{c.1.28})$$

Donde  $\alpha = k/\rho c_p$ , es la difusividad térmica.

Esta última ecuación se resuelve para la capa límite en variables adimensionales definidas anteriormente, de lo que se obtiene:

$$\left[ -w_{\eta,1} \cdot \Theta' \cdot \eta + \frac{1}{[\eta(\delta_T - KR) + KR]} \left( \int_0^\eta w'_{\eta,1} \eta [\eta(\delta_T - KR)] d\eta \right) \Theta' \right] \frac{d\delta_T}{dz} = \frac{\alpha}{Vs} \left[ \frac{\Theta''}{(\delta_T - KR)} + \frac{\Theta'}{[\eta(\delta_T - KR) + KR]} \right] \quad (\text{c.1.29})$$

Al resolver la ecuación c.1.29, simultáneamente con la ecuación de cantidad de movimiento adimensional, ecuación c.1.20, se obtienen los perfiles de velocidad y temperatura en variable de similitud, ya que al suponer que el espesor de capa límite varía poco con la longitud axial, la solución se consigue para cada  $\delta_T$ , el cual podrá ser obtenido posteriormente. Sin embargo se debe aclarar que el perfil de temperatura a usar en este trabajo corresponde a las ecuaciones c.1.23 y c.1.25, ya que las mismas permiten obtener una solución analítica aproximada.

---

## c.2 Análisis integral: caudal, caída de presión y espesor de capa límite térmica.

En el análisis diferencial de los perfiles adimensionales se determinó la variación del esfuerzo, velocidad y temperatura como función de la coordenada radial y axial a través del espesor de capa límite térmica. Sin embargo interesa determinar la fuerza sobre la superficie, el gradiente de presión, caudal y la energía transferida a través de los límites del volumen de control; para ello se relacionarán los perfiles indicados con las variables de interés.

### c.2.1. Flujo volumétrico adimensional.

La velocidad volumétrica se puede calcular por:

$$Q_{vol} = \int_0^{2\pi} \int_{KR}^R w r dr d\theta$$

Usando la definición de coordenada adimensional y velocidad adimensional dada por las ecuaciones c.1.17 18 y 19, se obtiene

$$Q_{vol,\eta} = \frac{Q_{vol}}{V_S * (\delta_T - KR) * R} = \int_0^{2\pi} \int_{KR}^R w(\eta) \left( \frac{\eta(\delta_T - KR) + KR}{R} \right) d\eta d\theta \quad (c.2.1)$$

Al integrar sobre las zonas I y zona II para tener el caudal a través del volumen de control:

$$Q_{vol,\eta} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\delta_r'} w_{\eta,I} \left( \frac{\eta(\delta_T - KR) + KR}{R} \right) d\eta d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\delta_r'}^{R'} w_{\eta,II} \left( \frac{\eta(\delta_T - KR) + KR}{R} \right) d\eta d\theta \quad (c.2.2)$$

---

Donde  $R', R' = \frac{R - KR}{\delta_T - KR}$ , se determinará al conocer  $\delta_T$ , lo cual se indica mas adelante.

Esta expresión permite encontrar la velocidad característica,  $V_s$ , ya que el caudal de entrada es un valor conocido (dato de entrada) y a partir de ella encontrar la caída de presión como función del espesor de capa límite térmica.

### **c.2.2. Caída de presión adimensional:**

Integrar la ecuación de cantidad de movimiento (c.1.1), se puede relacionar la caída de presión con el esfuerzo cortante evaluado en la superficie:

$$(P_o - P_L) = \frac{1}{A_{sección}} \iint_{sc} \tau_{rz}|_{superficie} dA + \rho g_z \quad (c.2.3)$$

La ecuación (c.2.3) permite calcular la caída de presión, si se conoce el perfil de esfuerzo. El perfil de esfuerzo, al igual que el de velocidad y temperatura es conocido como función del radio del espesor de la capa límite térmica ( $\delta_T$ ), por lo que la siguiente etapa debe ser como calcular el perfil de capa límite térmica como función de la posición axial.

### **c.2.3 Capa límite térmica ( $\delta_T$ ):**

Para hallar como varía el radio del espesor de la capa límite térmica,  $\delta_T$ , se usará el método integral de Von Kármán (ecuaciones de capa límite de Prandtl en forma integral)(citado por White F., 2004, Welty J., 1999, Bird et al 2006, Shames I., 1995, Schlichting, 1979, Bejan A., 1996).

### c.2.3.1 Método integral de Von Kármán:

La teoría de capa límite propuesta por Prandtl (citado por White F., 2004), sugiere la existencia de una región cerca de la superficie donde está presente el efecto de la transferencia de calor. Para describir el comportamiento cerca de la pared de calentamiento, utilizando la teoría de capa límite, se usará un sistema de coordenadas bidimensional para el flujo alrededor del cilindro interno; entre la superficie externa del cilindro interno y el límite aproximado de la capa límite. En la figura c.2.1, se muestra la zona donde es apreciable la transferencia de calor y los perfiles de temperatura, (ver figura c.1.1).

Para realizar el análisis integral se requiere el uso de las ecuaciones de continuidad y de energía. Es esencial seleccionar adecuadamente el volumen de control, y acá se debe escoger la región de  $O$  a  $h$  a  $\delta_T$  y a  $L$  y vuelta al origen del espesor de capa límite  $O$ , como se muestra en la figura c.2.1. La línea de  $h$  a  $\delta_T$ , es una línea de corriente que pasa justo por fuera de la capa límite térmica, observe que no es horizontal, y no pasa flujo másico a través de ella.

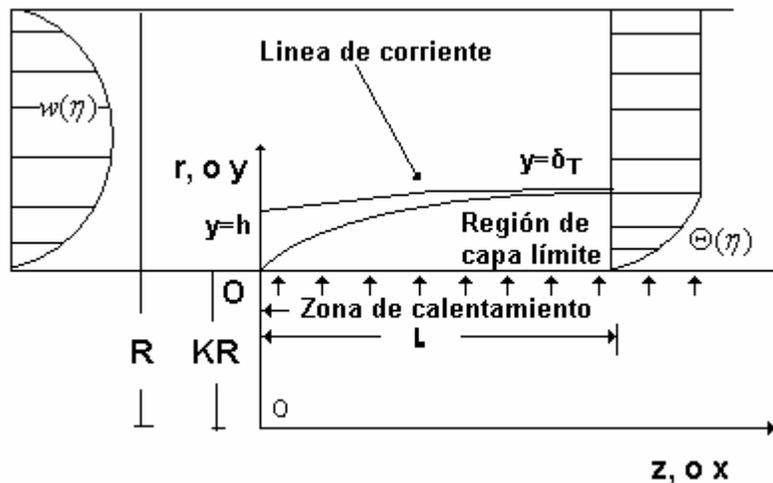


Figura c.2.1. Análisis sobre la transferencia de calor en la región de con ayuda de un volumen de control.

De un balance de energía integral aplicado a la región de capa límite, se obtiene un resultado conocido en la bibliografía (ver Larsen 1984):

$$\frac{d}{dz} \int_0^{\delta_r} w(T - T_o) dy = - \frac{k}{\rho \cdot cp} \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{y=0} \quad (c.2.4)$$

Las ecuaciones (c.2.4), permiten calcular el radio del espesor de capa límite térmica en función de la posición axial ( $z$ ), a partir de las ecuaciones de velocidad y temperatura adimensionales antes planteadas.

Si se definen las siguientes variables adimensionales (caso bidimensional):

$$Z = \frac{z}{R}, \Delta = \frac{\delta_r}{R} \quad (c.2.5)$$

Al adimensionalizar la ecuación (c.2.12) aparecerá el número de Reynolds,  $Re$ , y de Prandtl,  $Pr$ , (ver Larsen 1984)

$$(\Delta - K) \frac{d}{dZ} (\Delta - K) \int_0^1 w_{\eta,t} (\Theta(\eta) - 1) d\eta = - \frac{1}{Re \cdot Pr} \cdot \Theta'(0) \quad (c.2.6)$$

Al integrar la ecuación c.2.15, aparecerá el número de Graetz que es función del número de Reynolds, Prandtl y la relación entre el radio y la longitud del conducto (el inverso del número de Graetz es una longitud axial adimensional). De dicha manipulación se obtiene:

$$\int_0^{\Delta} (\Delta - K) \left( \frac{d}{d\Delta} (\Delta - K) \int_0^1 w_{\eta,t} (\Theta(\eta) - 1) d\eta \right) d\Delta \left( \frac{1}{\Theta'(0)} \right) = - \frac{1}{Graetz}$$

Donde  $Graetz = \frac{1}{Re Pr \frac{R}{L}}$

---

### c.3. Numeros adimensionales. Modelo simplificado.

Definiendo

$$r_i = \frac{r}{R}, \quad \Delta_i = \Delta = \frac{\delta_T}{R}$$

Los perfiles de velocidad y temperatura en su forma adimensional quedán:

$$\tau_{rz\eta} = \left( \frac{dp}{dz} \right)_\eta \frac{r_i}{2} + \frac{2 \cdot C_1}{\left( \frac{dp}{dz} \right)_o R^2} \frac{1}{r_i}, \quad \frac{C_1}{\left( \frac{dp}{dz} \right)_o R^2} = \text{Adimensional} \quad (\text{c.3.1})$$

Perfil de velocidad: Para la fase I, de (c.1.28)

$$-e^{\ln\left(\frac{\mu_0}{\mu_w}\right)\Theta(\eta)} \frac{dw_{\eta,I}}{d\eta} = [\eta(\Delta - K) + K](\Delta - K) + \frac{C_1}{\left( \frac{dp}{dz} \right)_o R^2} \frac{2}{\left( \frac{dp}{dz} \right)_\eta} \frac{(\Delta - K)}{[\eta(\Delta - K) + K]} \quad (\text{c.3.2})$$

Para la fase II, de (c.1.29)

$$-\frac{dw_{\eta,II}}{d\eta} = \frac{\mu_w}{\mu_o} [\eta(\Delta - K) + K](\Delta - K) + \frac{C_1}{\left( \frac{dp}{dz} \right)_o R^2} \frac{2}{\left( \frac{dp}{dz} \right)_\eta} \frac{\mu_w}{\mu_o} \frac{(\Delta - K)}{[\eta(\Delta - K) + K]} \quad (\text{c.3.3})$$

Perfil de temperatura, de (c.1.46)

$$\text{Caso 1: } \Theta = \eta, \quad (\text{c.3.4})$$

$$\text{Caso 2: } \Theta = 2\eta - \eta^2 \quad (\text{c.3.5})$$

$$\int_0^\Delta (\Delta - K) \left( \frac{d}{d\Delta} (\Delta - K) \int_0^1 w_{\eta,I}(\Theta(\eta) - 1) d\eta \right) d\Delta \left( \frac{1}{\Theta'(0)} \right) = -\frac{1}{\text{Graetz}} \quad (\text{c.3.6})$$

---

Estas ecuaciones junto a sus condiciones de borde ecuaciones c.1.20a, c.1.20b y c.1.20c, describen completamente el fenómeno de interés, y sus parámetros adimensionales describen el flujo bajo estudio. Los números adimensionales obtenidos son:

Número de Reynolds, Re

Número de Prandtl, Pr

Relación de Longitud, L, sobre el radio, R.

Relación de viscosidades,  $\frac{\mu_w}{\mu_0}$ , o B =  $\frac{\mu_w}{\mu_0}$

Número de Nusselt, que se obtiene a partir del perfil de temperatura como se demostrará mas adelante.

Estos cinco parámetros adimensionales describen el sistema, y podrían ser correlacionados, realizando experimentos físicos o numéricos. En el siguiente capítulo se representarán estos parámetros al resolver paso a paso las ecuaciones indicadas en este capítulo. En la siguiente sección se indicará como calcular el número de Nusselt a partir de los resultados que se obtendrán al resolver las ecuaciones antes mencionadas (modelo desarrollado en este capítulo).