



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
POSTGRADO EN MODELOS ALEATORIOS

Modelo para la dispersión de la clorofila en el Lago de Valencia usando una técnica de partícula lagrangiana

Trabajo especial de grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por la **Lic. Alessandra Fariñas C.** para optar al título de Magister Scientiarum en Modelos Aleatorios.

Tutor: Dr. José Rafael León.

Caracas - Venezuela
Enero, 2012.

Dedicado a toda mi familia y amigos.

Hay una fuerza motriz más poderosa que el vapor, la electricidad y la energía atómica: la voluntad.

- **Albert Einstein**

Agradecimientos

Agradezco principalmente al Prof. José Rafael León por todo su interés, tutoría y colaboración; también le doy las gracias al personal del Centro de Procesamiento Digital de Imágenes del Instituto de Ingeniería por toda su asesoría.

Por último, agradezco a todos mis familiares y amigos, que incondicionalmente me guiaron y me brindaron su apoyo; en especial a Jocelyn León y Mariana Urbina por sus consejos y motivación.

Índice general

Resumen	1
Introducción	2
1. Preliminares y Base Teórica	4
1.1. Ecuación de difusión y advección	5
1.2. Ecuación de Fokker-Planck	7
1.2.1. Ecuación de Movimiento	8
1.2.2. Ecuación General de Fokker-Planck	9
1.3. Modelo de profundidad-integrada de la dispersión de contaminantes en superficies líquidas usando una técnica de partícula Lagrangiana	9
1.3.1. Ecuaciones Principales	10
1.3.2. Esquema Numérico	11
1.3.3. Resumen del Método	15
1.4. Coeficiente de Difusión	15
1.4.1. Coeficiente de difusión molecular	16
1.4.2. Difusividad Turbulenta	16
1.4.3. Diferencias entre el coeficiente de difusión molecular y coeficiente de difusión turbulenta	17
1.4.4. Técnica de Estimación	17
1.5. Generación de Mallas	18
1.5.1. Mallas Triangulares	18
1.6. Generación de mallas usando DistMesh	19
1.6.1. Mallas Curvilíneas	23
1.7. Técnica de Kriging	24
1.7.1. Procesos Espaciales	24
1.7.2. Función Variograma	26
1.7.3. Modelos de Semivariograma	26
1.7.4. Kriging Simple y Ordinario	27
1.7.5. Kriging Simple	27
1.7.6. Kriging Ordinario	29

2. Elaboración del modelo de simulación para la dispersión de la clorofila en el Lago de Valencia	31
2.1. Generación de una Malla Triangular sobre el Lago de Valencia	31
2.1.1. Malla Triangular Uniforme	34
2.1.2. Malla Triangular No-Uniforme	35
2.2. Generación de Malla Curvilínea sobre el Lago de Valencia	37
2.3. Estimación de Coeficientes de Difusión	39
2.4. Velocidades y Georreferenciación del Lago	44
2.5. Batimetría del Lago	47
2.6. Desarrollo del Modelo	50
2.6.1. Comportamiento de las partículas	50
2.7. Interfaz Gráfica para el Modelo	52
3. Fase Experimental	54
3.1. Prueba del Modelo	54
3.2. Continuidad de la Investigación	57
Conclusiones	58

Resumen

Los lagos son depósitos de masas de agua sin dinamismo, por ende poseen ecosistemas que pueden ser alterados fácilmente por la contaminación ocasionándose así restricciones en el uso del agua, alteraciones en la fauna y la flora, apariencia y olor desagradables. Un ejemplo en nuestro país de esta problemática es el Lago de Valencia, el cual está siendo afectado por la polución producida por la actividad humana de sus alrededores. Devolver el equilibrio biológico en esta zona es posible mediante el desarrollo científico y tecnológico. En este trabajo de investigación se plantea como objetivo establecer un modelo bidimensional que simule la dispersión de contaminantes sobre el lago, basado en el uso de las ecuaciones en derivadas parciales que describen los fenómenos físicos de la advección y difusión; para llevar esto a cabo, se considera en primer lugar el estudio del modelo presentado en el artículo [14] seguido de su programación y por último de la validación del mismo a través de experimentos fundamentados en el procesamiento de imágenes satelitales.

Introducción

En la actualidad, los modelos matemáticos son una herramienta imprescindible para el estudio de fenómenos ambientales, tal como la propagación de contaminantes en el aire o superficies líquidas; estos ayudan a predecir las trayectorias de los contaminantes, lo que permite la creación de planes de contingencia que reduzcan los daños en el medio ambiente.

Un lugar apropiado para el estudio del transporte de contaminantes es el Lago de Valencia, ya que en sus cercanías existen zonas industriales, en donde se generan desperdicios sintéticos que terminan siendo depositados en el lago, estos desperdicios suelen tener altos contenidos de fosfato y enzimas que aceleran la reproducción de la clorofila, como consecuencia se consumen grandes cantidades de oxígeno causándose así la muerte de los peces; el proceso descrito, es conocido como eutrofización.

En este trabajo de investigación, se planea implementar un modelo de rastreo de partículas, para simular el transporte de contaminantes sobre el Lago de Valencia; debido a la eutrofización del lago, se hará énfasis en el transporte de la clorofila, el modelo se encuentra explícito en [14] y está constituido por una combinación de esquemas determinísticos y estocásticos; cada partícula se traslada con el uso de una velocidad advectiva obtenida del campo de velocidad de su entorno y la difusión de cada partícula se encuentra usando una técnica de caminata aleatoria.

Los modelos de rastreo de partículas, se basan en la idea de representar a un contaminante como un conjunto de partículas discretas, sometidas a procesos de crecimiento o decaimiento y que se transportan gracias a la advección y difusión. Según, R. V. Pearson y R. W. Barber [14], tales modelos son consistentes, a diferencia de otros que se basan en resolver la ecuación de difusión y advección mediante aproximaciones por diferencia finita, ellos argumentan que ese procedimiento presenta inconvenientes cuando se aplica sobre sistemas dominados por la advección, existen sumideros o los gradientes de concentración del contaminante son altos.

La metodología propuesta en esta investigación, consiste en la elaboración de un algoritmo que siga el esquema del modelo, estando este adaptado al Lago de Valencia, que sea de fácil uso y que proporcione mediante animaciones el trayecto de las partículas; se pretende evaluar su eficacia mediante la comparación de la dispersión de la clorofila observada en imágenes satelitales con la dispersión observada en los resultados obtenidos tras su ejecución.

El trabajo de investigación está compuesto por tres capítulos:

El Capítulo 1, presenta una descripción del problema ecológico de estudio y una síntesis de los fundamentos teóricos utilizados.

El Capítulo 2, muestra con detalles la metodología utilizada para cumplir con los objetivos de la investigación.

Finalmente, en el Capítulo 3, se exponen y se analizan los resultados obtenidos tras la ejecución del modelo en el Lago de Valencia.

Capítulo 1

Preliminares y Base Teórica

El Lago de Valencia se sitúa entre Aragua y Carabobo, tiene una extensión de 344 Km^2 . Los ríos que sirven como sus principales fuentes de agua, son El Güigüe, Turmero, Limón, Cabriales, Los Guayos y el Aragua. Tal como lo muestra la figura que sigue.

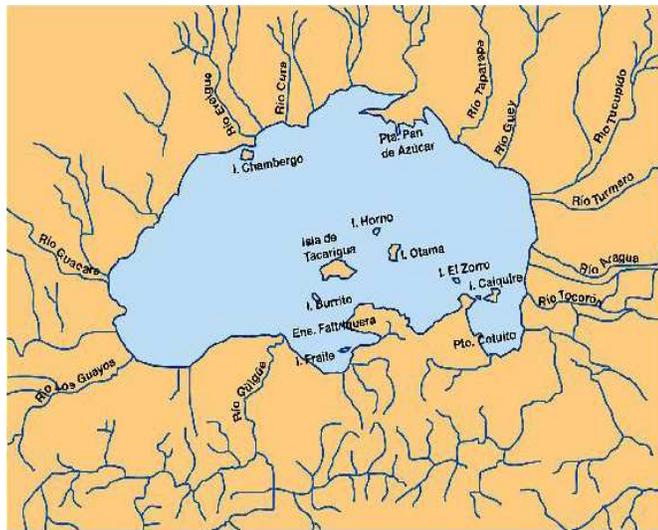


Figura 1.1: Cuenca del Lago de Valencia

El Lago de Valencia es el hogar de una gran variedad de mamíferos y aves. Toda la vida natural que proporciona el lago, se ve afectada por el alto grado de contaminación de sus aguas, la cual, es ocasionada por los desperdicios industriales producidos en los centros urbanos que se encuentran a su alrededor.

Como efecto secundario, se genera un proceso conocido como Eutrofización, el mismo, se concibe debido a que los desperdicios industriales arrojados al lago poseen un elevado contenido de fosfato y enzimas, estos componentes actúan como un acelerador metabólico para plantas e invertebrados, en particular, la reproducción de las algas se acelera, por lo tanto, los niveles de oxígeno en las aguas disminuyen promoviendo así la muerte de los peces. Las aguas

del lago, adquieren un color verde por la presencia de la clorofila y un olor desagradable. La eutrofización en el lago desencadena un desequilibrio total en su ecosistema, imposibilitando el uso de las aguas para el beneficio humano y animal.

Para atacar esta problemática ambiental, se propone la implementación de un modelo estadístico-matemático-hidráulico que permita simular el transporte de contaminantes y su distribución en el Lago de Valencia.

Tradicionalmente, la dispersión de contaminantes ha sido simulada usando aproximaciones por diferencia finita de la ecuación de difusión y advección estándar expresada en la forma de profundidad integrada o promediada. Sin embargo, las mallas Eulerianas basadas en métodos de diferencia finita presentan problemas cuando se aplican sobre sistemas de fluidos dominados por la advección. En particular, las mallas basadas en esta metodología tienen dificultad modelando puntos de fuentes y altos gradientes de concentración del contaminante. Además, en simulaciones donde la contaminación no ocupa todo el dominio, los esquemas de diferencia finita son a menudo computacionalmente ineficientes comparados con los métodos de rastreo de partículas.

La simulación de la dispersión de un contaminante usando una técnica de rastreo de partícula es basada en la simple idea de que la contaminación puede ser representada por partículas discretas sujetas a la advección, difusión y decaimiento. Estos procesos son modelados por una combinación de esquemas numéricos determinísticos y estocásticos; es decir, la traslación de cada partícula se busca usando una velocidad advectiva derivada del campo de velocidad de su entorno y la difusión de cada partícula se busca usando una técnica de caminata aleatoria.

1.1. Ecuación de difusión y advección

Un fluido es una sustancia o medio continuo que se deforma continuamente en el tiempo ante la aplicación de una tensión tangencial. La masa o densidad de partículas de un fluido en un volumen puede variar a lo largo del tiempo debido a fuentes y sumideros o a flujos de masa que atraviesan sus límites. En un sistema de fluidos existen dos tipos de flujo másico: la advección y la difusión.

Cuando en un sistema existe un gradiente de concentraciones, se origina un flujo irreversible de materia, desde las altas concentraciones a las bajas. A este flujo se le llama difusión. La difusión tiende a devolver al sistema a su estado de equilibrio de concentración constante. La ley de Fick afirma que el flujo difusivo que atraviesa una superficie es directamente proporcional al gradiente de concentración.

Si la concentración varía en la dirección del eje x y llamamos a J como la densidad de corriente de partículas que atraviesan por unidad de tiempo un área unitaria perpendicular al

flujo de la materia, entonces la ley de Fick se puede formular de la siguiente manera:

$$J = \Gamma \frac{\partial c}{\partial x}$$

donde, c es la concentración y Γ es el coeficiente de difusión; el cual depende tanto del soluto como del medio en donde se disuelve.

La acumulación de partículas por unidad de tiempo en un volumen $S \cdot dx$ es igual a la diferencia de flujo entrante y saliente del volumen, es decir,

$$\frac{\partial c}{\partial t}(Sdx) = \frac{\partial J}{\partial x}(Sdx)$$

utilizando la ley de Fick se obtiene que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial c}{\partial x} \right) = \frac{\partial c}{\partial t} \quad (1.1)$$

La ecuación en derivadas parciales (1.1) describe el fenómeno de la difusión en una dimensión. En dos dimensiones, el fenómeno es descrito por un tensor de difusión,

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{xx} & \Gamma_{xy} \\ \Gamma_{yx} & \Gamma_{yy} \end{pmatrix}$$

y la ecuación de difusión sería

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &= \nabla \cdot (\Gamma \nabla c) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \left[\begin{pmatrix} \Gamma_{xx} & \Gamma_{xy} \\ \Gamma_{yx} & \Gamma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial c}{\partial y} \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma_{xx} \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma_{xy} \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma_{yx} \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma_{yy} \frac{\partial c}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Por otro lado, la ecuación que simula el flujo advectivo en dos dimensiones es

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(uc)}{\partial x} + \frac{\partial(vc)}{\partial y} = 0$$

donde, u es la velocidad en la dirección del eje x y v es la velocidad en la dirección del eje y que posee la partícula.

Finalmente, los problemas físicos que combinan la advección y difusión, son modelados por la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial uc}{\partial x} + \frac{\partial vc}{\partial y} = \nabla \cdot (\Gamma \nabla c) + f,$$

La cual, también se puede deducir mediante el principio de conservación de masa, que representa una previsión de la adición y sustracción de masa de una región concreta de fluido.

$$\begin{array}{l} \text{Velocidad del} \\ \text{cambio de masa} \\ \text{en el tiempo} \end{array} = - \begin{array}{l} \text{Flujo de advección} \\ \text{entrante en el} \\ \text{volumen} \end{array} + \begin{array}{l} \text{Flujo difusivo} \\ \text{entrante en el} \\ \text{volumen} \end{array} + \begin{array}{l} \text{Fuente} \\ \text{de masa} \end{array} - \begin{array}{l} \text{Decaimiento} \\ \text{de masa} \end{array}$$

Incluyendo la variable de profundidad D obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial(cD)}{\partial t} = & - \overbrace{\left(\frac{\partial(ucD)}{\partial x} + \frac{\partial(vcD)}{\partial y} \right)}^{\text{transporte advectivo}} + \frac{\partial}{\partial x} \left(D\Gamma_{xx} \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(D\Gamma_{xy} \frac{\partial c}{\partial y} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(D\Gamma_{yx} \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D\Gamma_{yy} \frac{\partial c}{\partial y} \right) + S - d \end{aligned}$$

- c : Concentración de la sustancia
- D : Profundidad
- u : Velocidad en x
- v : Velocidad en y
- S : Fuentes de la sustancia
- d : Decaimiento de la sustancia.

Existen muchos métodos para resolver la ecuación de difusión y advección; en el presente informe se destaca el método o técnica Lagrangiana, el cual consiste en subdividir el fluido en N partículas; a cada una se le busca la velocidad y la posición en el espacio en un tiempo t .

A la vez, el método Lagrangiano permite el uso de conceptos probabilísticos ya que representa el transporte de un conjunto de partículas mediante una componente advectiva (determinística) y una componente difusiva (aleatoria).

1.2. Ecuación de Fokker-Planck

La ecuación de Fokker-Planck, fue usada inicialmente para describir el movimiento Browniano de las partículas.

Definición 1 *El movimiento Browniano o proceso de Wiener describe el movimiento aleatorio de las partículas que se encuentran inmersas en un fluido; matemáticamente se define como un proceso estocástico $\{W_t : t \geq 0\}$ sobre algún espacio (Ω, \mathcal{F}, P) , que cumple con las siguientes cuatro condiciones:*

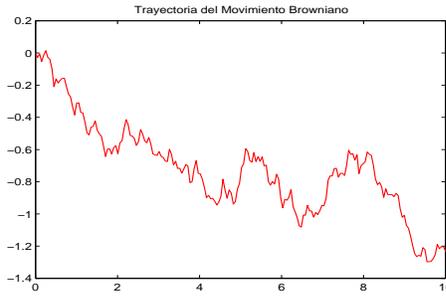
1. El proceso comienza desde cero,

$$P(W_0 = 0) = 1$$

2. Tiene incrementos estacionarios e independientes.

3. Para $0 \leq s < t$, el incremento $W_t - W_s$ se distribuye normal con esperanza cero y varianza $t - s$, es decir, para $t > 0$, W_t tiene distribución $N(0, t)$.

4. Tiene trayectorias continuas.



Nótese que $W_t - W_s$ y W_{t-s} se distribuyen $N(0, t - s)$, por otro lado, debido a la propiedad de incrementos estacionarios, se tiene que, $W_t - W_s = W_{t-s} - W_0 = W_{t-s}$, por lo tanto, se concluye que $W_t - W_s \stackrel{d}{=} W_{t-s}$.

1.2.1. Ecuación de Movimiento

Las fuerzas de fricción y fluctuación que actúan sobre las partículas en un medio fluido varían con el tiempo y son aleatorias, por lo tanto, las velocidades de las partículas también son aleatorias, así nacen las siguientes incógnitas, ¿cuál es la probabilidad de encontrar velocidades en $(v, v + dv)$?, ¿cuántas partículas poseen velocidades en $(v, v + dv)$?. Dado que v es una variable continua, entonces se puede establecer $W(v)$ como una distribución probabilística; a la vez la función de distribución depende de t y de una distribución inicial. La ley de Stokes y la de Conservación de Energía permiten definir la ecuación de movimiento para $W(v, t)$ como sigue.

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \gamma \frac{\partial v W}{\partial v} + \gamma \frac{kT}{m} \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} \quad (1.2)$$

Donde,

- γ : Constante que depende de la masa de la partícula
- T : Temperatura
- k : Constante de Boltzmann
- v : variable de velocidad
- t : variable de tiempo

La ecuación (1.2) es una expresión simple y especial de la ecuación de Fokker-Planck.

1.2.2. Ecuación General de Fokker-Planck

En la subsección anterior, se definió (1.2) como la ecuación de movimiento para $W(v, t)$ de un movimiento Browniano de una dimensión, la ecuación general de Fokker-Planck describe la evolución en el tiempo de la función de densidad de la posición de una partícula; la misma para una variable, es la siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t} W = \left[-\frac{\partial}{\partial x} D^1(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^2(x, t) \right] W.$$

Para un conjunto de N variables

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \left[-\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} [D_i^1(x_1, \dots, x_N)] + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [D_{ij}^2(x_1, \dots, x_N)] \right] W$$

donde, D^1 es el vector de advección y D^2 el tensor de difusión.

1.3. Modelo de profundidad-integrada de la dispersión de contaminantes en superficies líquidas usando una técnica de partícula Lagrangiana

Esta sección, describe el modelo seleccionado para el desarrollo de la investigación; el cual, se encuentra explícito en el artículo de R.V. Pearson y R. W. Barber [14].

R.V. Pearson y R. W. Barber, establecieron un modelo bidimensional de partícula Lagrangiana para simular la dispersión con profundidad-integrada de contaminantes en estuarios y costas marítimas. En primer lugar, la ecuación de difusión y advección es transformada hasta obtener la ecuación de Fokker-Planck, permitiendo así la implementación de un consistente método Lagrangiano para simular la difusión con una variable espacial de difusividad. El artículo describe un novedoso algoritmo de rastreo de partículas que puede ser usado sobre mallas arbitrarias no ortogonales ajustadas al borde. Por definición, el método de rastreo de partículas es perfectamente conservativo. El esquema es también capaz de preservar altas concentraciones del contaminante puesto que permite simulaciones con un buen grado de precisión

sobre puntos de fuentes.

1.3.1. Ecuaciones Principales

La ecuación de advección y difusión con profundidad-promediada que representa el destino de un contaminante conservativo puede ser expresada como

$$\frac{\partial(cD)}{\partial t} + \frac{\partial(ucD)}{\partial x} + \frac{\partial(vcD)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D\Gamma_{xx} \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(D\Gamma_{xy} \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D\Gamma_{yx} \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D\Gamma_{yy} \frac{\partial c}{\partial y} \right) \quad (1.3)$$

Donde u y v son las velocidades promediadas según la profundidad en las direcciones x e y respectivamente, D es la profundidad de agua local, c es la concentración del contaminante promediada según la profundidad, y

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \Gamma_{xx} & \Gamma_{xy} \\ \Gamma_{yx} & \Gamma_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Gamma_L & 0 \\ 0 & \Gamma_T \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

es el tensor de difusión en el sistema cartesiano y el sistema alineado al flujo. Si $\theta = \tan^{-1}(v/u)$ es el ángulo entre la dirección local de flujo y el eje x , entonces los coeficientes de difusión en el sistema cartesiano pueden ser evaluados como:

$$\Gamma_{xx} = \Gamma_L \cos^2 \theta + \Gamma_T \sin^2 \theta \quad (1.5)$$

$$\Gamma_{xy} = (\Gamma_L - \Gamma_T) \sin \theta \cos \theta \quad (1.6)$$

$$\Gamma_{yy} = \Gamma_L \sin^2 \theta + \Gamma_T \cos^2 \theta \quad (1.7)$$

donde, Γ_L y Γ_T son los coeficientes de difusión longitudinal y transversal medidos sobre el vector local de velocidad en forma paralela y perpendicular.

Se busca reescribir la ecuación de advección y difusión de una forma que pueda ser interpretada desde la perspectiva de rastreo de partículas. Esto se logra introduciendo una nueva variable de concentración $C = Dc$ en la ecuación (1.3), de esta manera obtenemos que

$$\frac{\partial(C)}{\partial t} + \frac{\partial(uC)}{\partial x} + \frac{\partial(vC)}{\partial y} = \overbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(D\Gamma_{xx} \frac{\partial c}{\partial x} \right)}^1 + \overbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(D\Gamma_{xy} \frac{\partial c}{\partial y} \right)}^2 + \overbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left(D\Gamma_{yx} \frac{\partial c}{\partial x} \right)}^3 + \overbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left(D\Gamma_{yy} \frac{\partial c}{\partial y} \right)}^4 \quad (1.8)$$

Es necesario encontrar expresiones para los términos 1, 2, 3 y 4 en donde aparezca la nueva variable C , por ejemplo, para el término 1 observamos que

$$\Gamma_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} = \Gamma_{xx} \frac{\partial(Dc)}{\partial x} = D\Gamma_{xx} \frac{\partial c}{\partial x} + c\Gamma_{xx} \frac{\partial D}{\partial x}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} D\Gamma_{xx} \frac{\partial c}{\partial x} &= \Gamma_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} - c\Gamma_{xx} \frac{\partial D}{\partial x} \\ &= \Gamma_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{C}{D} \Gamma_{xx} \frac{\partial D}{\partial x} \\ &= \frac{\partial(\Gamma_{xx} C)}{\partial x} - C \frac{\partial \Gamma_{xx}}{\partial x} - \frac{C}{D} \Gamma_{xx} \frac{\partial D}{\partial x} \end{aligned}$$

Análogamente se encuentran expresiones para los términos 2, 3 y 4 que posteriormente se sustituyen en (1.8), lo que da lugar a la siguiente ecuación

$$\frac{\partial(C)}{\partial t} + \frac{\partial(UC)}{\partial x} + \frac{\partial(VC)}{\partial y} = \frac{\partial^2(\Gamma_{xx}C)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2(\Gamma_{xy}C)}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2(\Gamma_{yy}C)}{\partial y^2} \quad (1.9)$$

en donde

$$U = u + \frac{\partial\Gamma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\Gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{\Gamma_{xx}}{D} \frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\Gamma_{xy}}{D} \frac{\partial D}{\partial y} \quad (1.10)$$

$$V = v + \frac{\partial\Gamma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\Gamma_{xy}}{\partial x} + \frac{\Gamma_{yy}}{D} \frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\Gamma_{xy}}{D} \frac{\partial D}{\partial x} \quad (1.11)$$

Si C es considerada una función de densidad de probabilidad, entonces la ecuación (1.9) es idéntica a la ecuación de Fokker-Planck. Las ecuaciones (1.10) y (1.11) representan velocidades de advección modificadas, que permiten que el esquema de rastreo de partícula simule la difusión usando una consistente técnica pobabilística. Sin esta modificación, las partículas pueden acumularse en regiones de baja difusividad.

1.3.2. Esquema Numérico

Para facilitar una representación exacta del complejo dominio de flujo encontrado en regiones costeras, el modelo numérico es basado sobre una malla no-ortogonal ajustada al borde. Una malla suave y curvilínea es generada resolviendo una par de ecuaciones de Poisson

$$\begin{cases} \xi_{xx} + \xi_{yy} = P(\xi, \eta) \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi, \eta) \end{cases} \quad (1.12)$$

Relacionando así las coordenadas físicas (x, y) con las coordenadas transformadas (ξ, η) (aquí los subíndices denotan la usual diferenciación parcial). Las funciones P y Q se denominan **operadores de atracción** o **funciones de control** que pueden ser usadas para alterar la estructura interna de la malla curvilínea. Después de intercambiar las variables dependientes e independientes de (1.12) se obtiene un sistema elíptico quasi-lineal

$$\begin{cases} \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} + J^2(Px_{\xi} + Qx_{\eta}) = 0 \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} + J^2(Py_{\xi} + Qy_{\eta}) = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

donde

$$\alpha = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2, \quad \beta = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta}, \quad \gamma = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2$$

y J es el jacobiano de la transformación que está dado por $J = x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi}$. Las expresiones mostradas en (1.13) son reescritas en diferencias finitas y resueltas utilizando un método iterativo para encontrar una función inyectiva entre el plano transformado (ξ, η) y el plano físico (x, y) .

El método iterativo recomendado es el de SOR (successive over relaxation); el cual consiste en resolver un sistema de ecuaciones $Ax = b$ mediante las iteraciones

$$\begin{cases} x^{(0)} = 0 \\ Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b \quad \text{con } k = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (1.14)$$

Tomando $M = \alpha^{-1}(D + \alpha L)$, $N = \alpha^{-1}(-\alpha U + (1 - \alpha)D)$ y $A = L + D + U$.

Donde,

- α : Parámetro real en $(0, 2)$
- L : Matriz triangular inferior de A
- D : Matriz diagonal de A
- U : Matriz triangular superior de A

Antes de resolver la ecuación de advección y difusión es necesario decidir la configuración de la malla sobre la cual se representarán todas las constantes y variables correspondientes al modelo de transporte de contaminantes, la malla presentada en el artículo se muestra en la siguiente figura

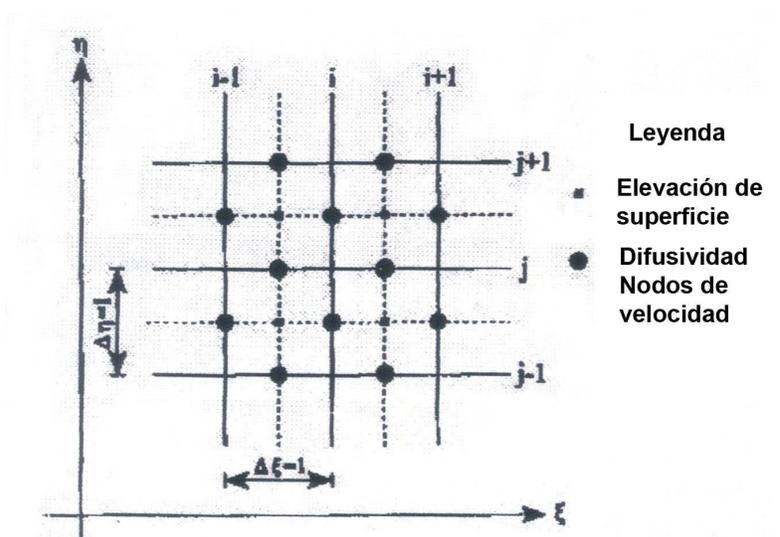


Figura 1.2: Configuración computacional de la malla

El movimiento de partículas ocurre bajo la acción de la advección y difusión en cada paso de tiempo. Para trasladar las partículas tomando en cuenta solo la advección, es necesario calcular las velocidades de advección modificadas mostradas en (1.10) y (1.11) en cada posición de la partícula; se debe tomar en cuenta que la variación de la difusividad de celda a celda es generalmente muy pequeña, por tal razón en este esquema los términos de (1.10) y (1.11) que indican esta variación son asumidos constantes para todas las partículas que comparten una

celda en particular, durante un instante de tiempo. Por ejemplo, si dos partículas comparten una celda durante un instante de tiempo, los términos K_u y K_v de una de las partículas

$$U = u + \overbrace{\frac{\partial \Gamma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_{xy}}{\partial y}}^{K_u} + \frac{\Gamma_{xx}}{D} \frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\Gamma_{xy}}{D} \frac{\partial D}{\partial y}$$

$$V = v + \overbrace{\frac{\partial \Gamma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_{xy}}{\partial x}}^{K_v} + \frac{\Gamma_{yy}}{D} \frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\Gamma_{xy}}{D} \frac{\partial D}{\partial x}$$

coinciden en magnitud con los términos respectivos de la otra partícula. Recordemos que las velocidades (1.10) y (1.11) están adaptadas al sistema cartesiano, para calcularlas sobre la malla no-ortogonal ajustada al borde es necesario adaptarlas al sistema (ξ, η) ; dicho procedimiento se logra mediante la siguiente transformación:

$$\begin{cases} f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(f,y)}{\partial(\xi,\eta)} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} = \frac{1}{J}(y_\eta f_\xi - f_\eta y_\xi) \\ f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial(x,f)}{\partial(\xi,\eta)} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} = \frac{1}{J}(x_\xi f_\eta - f_\xi x_\eta) \end{cases} \quad (1.15)$$

Sustituyendo la transformación anterior en todas las derivadas parciales con respecto a las variables x e y de (1.10) y (1.11) se obtienen las velocidades advectivas modificadas en el sistema (ξ, η)

$$U = u + \frac{1}{JD} \left[y_\eta \left(\frac{\partial \Gamma_{xx}}{\partial \xi} D + \frac{\partial D}{\partial \xi} \Gamma_{xx} \right) - y_\xi \left(\frac{\partial \Gamma_{xx}}{\partial \eta} D + \frac{\partial D}{\partial \eta} \Gamma_{xx} \right) \right. \\ \left. + x_\xi \left(\frac{\partial \Gamma_{xy}}{\partial \eta} D + \frac{\partial D}{\partial \eta} \Gamma_{xy} \right) - x_\eta \left(\frac{\partial \Gamma_{xy}}{\partial \xi} D + \frac{\partial D}{\partial \xi} \Gamma_{xy} \right) \right] \quad (1.16)$$

$$V = v + \frac{1}{JD} \left[x_\xi \left(\frac{\partial \Gamma_{yy}}{\partial \eta} D + \frac{\partial D}{\partial \eta} \Gamma_{yy} \right) - x_\eta \left(\frac{\partial \Gamma_{yy}}{\partial \xi} D + \frac{\partial D}{\partial \xi} \Gamma_{yy} \right) \right. \\ \left. + y_\eta \left(\frac{\partial \Gamma_{xy}}{\partial \xi} D + \frac{\partial D}{\partial \xi} \Gamma_{xy} \right) - y_\xi \left(\frac{\partial \Gamma_{xy}}{\partial \eta} D + \frac{\partial D}{\partial \eta} \Gamma_{xy} \right) \right] \quad (1.17)$$

La celda en donde cada partícula permanece, es calculada usando algoritmos que determinan si un punto está en el interior o exterior de un polígono. Ahora es posible calcular todos los términos con derivadas en las ecuaciones (1.16) y (1.17) usando diferencia central con respecto al centro de la celda. Los valores de las velocidades advectivas u y v , son calculadas usando series de Taylor de segundo orden alrededor de la velocidad distinta de cero del nodo más cercano de la celda que contiene a la partícula. Si las distancias en las direcciones de x e y entre la partícula y el más cercano nodo de velocidad distinto de cero están denotadas como Δx y Δy y si las velocidades de los nodos están representadas como u_n y v_n , entonces los componentes de la velocidad en cada posición de la partícula pueden ser expresados como

$$u = u_n + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x_n} + \Delta y \frac{\partial u}{\partial y_n} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + \frac{\Delta y^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y_n^2} + \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial y_n} \quad (1.18)$$

$$v = v_n + \Delta x \frac{\partial v}{\partial x_n} + \Delta y \frac{\partial v}{\partial y_n} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2} + \frac{\Delta y^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial y_n^2} + \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 v}{\partial x_n \partial y_n} \quad (1.19)$$

Otra vez es necesario transformar las ecuaciones a las coordenadas curvilíneas, pero esta vez, las segundas derivadas también son requeridas, las cuales se obtienen derivando (1.15) con respecto a x e y .

Una vez que las velocidades advectivas modificadas son conocidas, la nueva posición de la partícula tomando en cuenta solo la advección, puede ser calculada usando el siguiente método iterativo

$$\begin{cases} U &= \frac{x_a(t+\Delta t) - x_a(t)}{\Delta t} \\ V &= \frac{y_a(t+\Delta t) - y_a(t)}{\Delta t} \end{cases} \quad (1.20)$$

donde, x_a y y_a son las coordenadas x e y de la posición de la partícula que se mueve solo por advección.

Al final del cálculo advectivo, a la distribución resultante de las partículas se le debe agregar la difusión. Esto se logra añadiendo componentes de velocidad aleatorios a cada partícula con una desviación estándar apropiada. Las velocidades aleatorias longitudinal y transversal se pueden generar de la siguiente manera

$$u'_L = r_1 \sqrt{\frac{2\Gamma_L}{\Delta t}}, \quad u'_T = r_2 \sqrt{\frac{2\Gamma_T}{\Delta t}} \quad (1.21)$$

Donde, r_1 y r_2 son números aleatorios independientes y normalmente distribuidos con media cero y desviación estándar uno. Es esencial generar números suficientemente aleatorios para que el proceso de difusividad pueda ser simulado correctamente. Luego de calcular la velocidad longitudinal y transversal, es necesario representar las velocidades en el sistema cartesiano mediante la siguiente transformación:

$$u' = u'_L \cos \theta - u'_T \sin \theta \quad (1.22)$$

$$v' = u'_L \sin \theta + u'_T \cos \theta \quad (1.23)$$

Las coordenadas finales x e y de la partícula pueden ser expresadas como

$$\begin{cases} x &= x_a(t + \Delta t) + u' \Delta t \\ y &= y_a(t + \Delta t) + v' \Delta t \end{cases} \quad (1.24)$$

Cualquier partícula que cruce el borde es inmediatamente reflejada regresando así al dominio del flujo; lo que permite mantener la conservación de masa. El método es conservativo e incondicionalmente estable aunque el paso del tiempo sea limitado, lo cual es un hecho cuando se desea obtener una representación exacta del transporte advectivo.

1.3.3. Resumen del Método

El esquema expuesto en el artículo se puede resumir con los siguientes pasos:

1. Dadas las funciones Γ_L y Γ_T encontrar Γ_{xx} , Γ_{xy} y Γ_{yy} .
2. Generar una malla uniforme sobre la región de estudio.
3. Crear un nuevo sistema de coordenadas mediante una malla curvilínea sobre la región a estudiar, usando las ecuaciones de Poisson (1.12); obteniendo así las funciones $\xi(x, y)$ y $\eta(x, y)$.
4. Encontrar las funciones inversas $x(\xi, \eta)$ e $y(\xi, \eta)$ tras resolver el sistema (1.13).
5. Encontrar las velocidades advectivas de la partícula u y v mostradas en las ecuaciones (1.18) y (1.19) utilizando aproximación por Taylor.
6. Encontrar las velocidades advectivas de la partícula u y v mostradas en las ecuaciones (1.18) y (1.19) sobre el sistema curvilíneo (ξ, η) .
7. Encontrar las velocidades advectivas modificadas U y V sobre la malla curvilínea, expresadas en (1.16) y (1.17) respectivamente.
8. Dadas las velocidades U y V es posible encontrar la posición (x_a, y_a) de la partícula tomando en cuenta solo la advección, utilizando el método iterativo mostrado en (1.20).
9. Encontrar las velocidades de difusión longitudinal u'_L y transversal u'_T mediante las fórmulas de (1.21).
10. Transformar las velocidades de difusión u'_L y u'_T al sistema cartesiano usando las ecuaciones (1.22) y (1.23).
11. Finalmente encontrar la posición de la partícula (x, y) tomando en cuenta tanto la advección como difusión utilizando las ecuaciones dadas en (1.24).

Como se vio en el paso 1, es de necesidad encontrar las funciones de difusión Γ_L y Γ_T que intervienen directamente en el modelo descrito. En la siguiente sección, se muestran los fundamentos para la búsqueda de estas funciones.

1.4. Coeficiente de Difusión

La difusividad es un coeficiente o medida que indica la velocidad en que una especie química se difunde en un medio; esta se expresa con un número positivo, su unidad de medida es $(\text{longitud})^2 \cdot (\text{tiempo})^{-1}$, es decir, $\text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-1}$ y se puede clasificar en dos tipos, molecular y turbulenta.

La difusividad molecular o laminar, está asociada a un régimen de flujo caracterizado por las fuerzas de viscosidad frente a las fuerzas de inercia, por otro lado, la difusividad turbulenta está caracterizada por un régimen de flujo turbulento, en donde se suelen mezclar las diferentes partes del medio por agitación.

1.4.1. Coeficiente de difusión molecular

El movimiento aleatorio de las moléculas se debe al movimiento Browniano, la energía cinética de una molécula, proviene del bombardeo de las moléculas de un fluido consigo mismas, el resultado es un movimiento químico aleatorio. Sin embargo, el movimiento está dirigido de un espacio con concentraciones altas a otro con concentraciones bajas.

La Ley de Fick afirma que el flujo de una sustancia es proporcional a su gradiente de concentración, en una dimensión se enuncia de la siguiente forma

$$J = -\Gamma \frac{\partial C}{\partial x}$$

En donde, Γ es el coeficiente de difusión.

La difusividad depende del tamaño molecular y viscosidad del medio, por ejemplo, el aire es menos denso que el agua, esto quiere decir que la difusividad es mayor en el aire que en el agua, por lo general la difusividad en el aire está por alrededor de $0,1\text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-1}$, para un medio acuoso, la difusividad es 10^4 veces menor, acotándose de la siguiente forma

$$10^{-5} \text{ cm}^2 \cdot \text{sec}^{-1} > \Gamma > 10^{-10} \text{ cm}^2 \cdot \text{sec}^{-1}.$$

1.4.2. Difusividad Turbulenta

La difusión molecular es importante principalmente en una escala microscópica, en una escala macroscópica como ríos o lagos la difusión molecular es extremadamente lenta para causar un transporte. Sobre distancias largas, el transporte es causado por el movimiento de un fluido consigo mismo, es decir por advección, solo en distancias muy cortas en donde la viscosidad inhibe el movimiento del fluido el transporte por difusión molecular es relevante; hay una distancia crítica en donde la difusión molecular y advectiva juegan en mismo rol en el transporte químico.

Los fluidos son turbulentos cuando el transporte se describe por corrientes complicadas, la turbulencia puede ser vista como una fina estructura del movimiento de un fluido que se opone al patrón del flujo en corrientes de gran escala.

De esta manera, un coeficiente de difusión advectivo conocido en inglés como Eddy Diffusion, puede ser definido, en la dirección vertical y en la horizontal.

A pesar de que existe una cantidad considerable de trabajos referentes a la teoría de la turbulencia, en la práctica se suele recurrir a la obtención de los coeficientes mediante experimentos y teoría empírica, para así obtener valores más aproximados a la realidad.

1.4.3. Diferencias entre el coeficiente de difusión molecular y coeficiente de difusión turbulenta

Algunas de las diferencias entre el coeficiente de difusión molecular y los coeficientes de difusión turbulenta (eddy) son las siguientes:

- El coeficiente turbulento depende solo del movimiento del fluido (estructura turbulenta del fluido) y no de la sustancia descrita por la concentración C , el coeficiente molecular depende de las propiedades físico-químicas de la sustancia y el medio, por ejemplo, la viscosidad del medio.
Esto es debido a que la intensidad de la turbulencia depende fuertemente de fuerzas como el viento, radiación solar, el flujo del río o lago, etc., debido a las corrientes, los coeficientes de difusión turbulenta varían en espacio y tiempo.
- En la superficie del océano la difusividad turbulenta varía por distintos ordenes de magnitud (10^2 a $10^8 \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-1}$, el valor más bajo es 10^7 más grande que la difusividad molecular), la influencia del viento sobre la superficie del agua, es una de las más importantes fuentes de movimiento turbulento, la difusividad en regiones profundas del océano o lagos es usualmente menor como por uno o dos ordenes de magnitud, debido a que el volumen de agua no se ve afectado tanto por el viento.

Algunos aspectos que se deben considerar al comparar los coeficientes de difusión turbulenta entre el océano y los lagos son:

- Los lagos están menos expuestos a los vientos que los océanos, por lo tanto, hay menos turbulencia.
- Los lagos no tienen sistemas de corrientes de larga duración.
- Las regiones profundas de un lago son menos turbulentas que las superficiales.

1.4.4. Técnica de Estimación

Los coeficientes de difusión de la clorofila están asociados directamente con su tasa de reproducción, por lo tanto se pretende estimarlos midiendo esta tasa de crecimiento; según Reynolds [11], la misma se puede encontrar mediante la siguiente fórmula:

$$\mu = \frac{\ln X_2 - \ln X_1}{t_2 - t_1} (\text{horas})^{-1} \quad (1.25)$$

donde,

X_1 = concentración en el tiempo t_1 .

X_2 = concentración en el tiempo t_2 .

La concentración de la clorofila requerida para la búsqueda de los coeficientes, se puede medir ópticamente; debido a que la clorofila es un pigmento fotorreceptor capaz de transformar la energía de la luz solar en energía química. Esta tiene típicamente dos picos de absorción en el espectro visible, uno en el entorno de la luz azul y otro en la zona roja del espectro; sin

embargo reflejan la parte media del espectro, la más nutrida y correspondiente al color verde. Esta es la razón por la que la clorofila tiene color verde. De esta manera, puede detectarse fácilmente gracias a su comportamiento frente a la luz o reflectancia.

A continuación, se ahondará sobre otro de los pasos necesarios para la implementación del modelo mostrado en la sección (1.3), el cual es la discretización de la región de estudio, para ello se tomarán en consideración las mallas triangulares y curvilíneas.

1.5. Generación de Mallas

1.5.1. Mallas Triangulares

Para la generación de mallas triangulares, se usará un código iterativo denominado DistMesh, que posiciona un conjunto de nodos sobre el dominio usando un procedimiento de suavizamiento basado en fuerzas, DistMesh realiza mallas con buena forma en regiones simples o irregulares con geometría poligonal como la del Lago de Valencia.

Método de Elemento Finito

El algoritmo se basa en el Método de Elemento Finito, el cual, consiste en representar un dominio Ω en uno discreto Ω_h dado por la unión de M triángulos K_i , es decir,

$$\Omega_h = \bigcup_{i=1}^M K_i$$

Ω_h se denomina malla triangular sobre Ω .

El tamaño de la malla es definido como

$$h = \max_{i=1, \dots, M} \text{diam}(K_i)$$

donde, $\text{diam}(K)$ es el diámetro del triángulo K o longitud de su lado más largo; la cantidad h es una medida de que tan fina será la malla.

El procedimiento se basa en construir un subespacio finito dimensional V_h del espacio $V = \{v \mid v \text{ es una función continua en } \Omega, \text{ con derivadas parciales continuas a trozos y acotadas tal que } v = 0 \text{ en el borde de } \Omega\}$. Sean N_i para $i = 1, \dots, M$ los nodos de la triangulación $T_h = K_1, \dots, K_M$ y $\varphi_1, \dots, \varphi_M$ una base del subespacio V_h , definida como $\varphi_i(N_j) = \delta_{ij}$.

El Método de Elemento Finito, es un problema de optimización en donde se busca encontrar la función $u_h \in V_h$ que mejor se adapte al dominio Ω , mediante un sistema de ecuaciones lineales $A\xi = b$, en donde el vector incógnita $\xi \in \mathbb{R}^M$ contiene los valores de la función u_h .

En el sistema, $A = (a_{ij})$ y $b = (b_1, \dots, b_M)$, están dados como a continuación

$$a_{ij} = \sum_{K \in T_h} a_{ij}^K \quad b_i = \sum_{K \in T_h} b_i^K$$

Tomando,

$$a_{ij}^K = \int_K \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j + \varphi_i \varphi_j dx \quad b_i^K = \int_K f \varphi_i dx + \int_{K \cap \Gamma} g \varphi_i ds$$

donde, Γ denota al borde de Ω y las funciones f y g son continuas y dadas mediante ecuaciones de equilibrio.

Definición 2 Una función de distancia que señala un conjunto Ω es aquella definida como

$$d(x) = \begin{cases} < 0 & x \in \Omega \quad (\text{interior de } \Omega) \\ 0 & x \in \Gamma \quad (\text{Borde de } \Omega) \\ > 0 & x \in \Omega \quad (\text{exterior de } \Omega). \end{cases} \quad (1.26)$$

La función $d : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ determina que tan cerca está un punto $x \in \mathbb{R}^n$ del borde del conjunto Omega.

1.6. Generación de mallas usando DistMesh

DistMesh es un algoritmo implementado en MatLab que se basa en el método de elemento finito y combina principios físicos de equilibrio con fundamentos geométricos obtenidos mediante el uso de funciones de distancia.

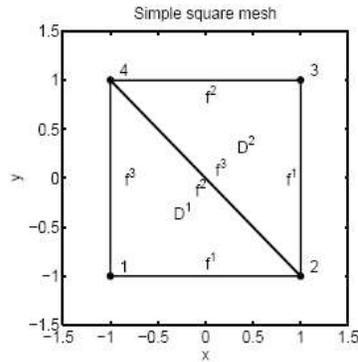
El algoritmo realiza los siguientes pasos:

1. Define un dominio usando funciones de distancia.
2. Distribuye un conjunto de nodos en el interior del dominio.
3. Reubica los nodos hasta obtener un equilibrio.

Después de ejecutar DistMesh se presentan dos matrices:

- p : es una matriz de orden $n \times 2$; en cada fila de p se muestran las coordenadas x e y de los vértices que definen los triángulos de la malla.
- t : es una matriz de orden $m \times 3$, en donde, m denota el número de triángulos que estructuran la malla. En cada fila se identifican los nodos que conforman a los triángulos.

Ejemplo 1 En la siguiente figura se muestra una malla uniforme de dos triángulos para un cuadrado.



En este caso las matrices p y t están dadas por

$$p = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Al hacer el llamado de DistMesh en la ventana de comandos de Matlab se deben definir ciertos argumentos concernientes a la región sobre la cual se quiere realizar la malla.

`[p, t] = distmesh2d (@fd, @fh, h, box, fixed)`

- `fd`: el nombre de la función de distancia definida en la región.
- `fh`: el nombre de la función de densidad; la misma define la uniformidad de la malla.
- `h`: el espaciado inicial entre los nodos de la malla, en mallas uniformes h es constante.
- `box`: Matriz en donde se define una cota inferior y otra superior de la región, tal como a continuación, `box = [xmín, ymín; xmáx, ymáx]`.
- `fixed`: matriz con las coordenadas de los puntos que deben estar fijos en la malla.

¿Cómo elaborar una función de distancia?

El paquete de DistMesh contiene diversas funciones que permiten la creación de funciones de distancia, por ejemplo:

- `dcircle`: crea la función de distancia para la región definida por una circunferencia.
- `dellipse`: crea la función de distancia para la región definida por una elipse.
- `drectangle`: crea la función de distancia para la región definida por un rectángulo.
- `dpoly`: crea la función de distancia para la región definida por una aproximación poligonal.

A menudo, el usuario tiende a combinar varias funciones de distancia hasta obtener la geometría que se quiere triangulizar, usando funciones como:

- `ddiff`: crea la función de distancia para la región definida por la diferencia de dos regiones.
- `dunion`: crea la función de distancia de la unión de dos o más regiones.
- `dintersec`: crea la función de distancia definida por la intersección de dos o más regiones.

$$\begin{aligned} \text{Unión} & : & d_{A \cup B}(x, y) & = \min(d_A(x, y), d_B(x, y)) \\ \text{Diferencia} & : & d_{A-B}(x, y) & = \max(d_A(x, y), -d_B(x, y)) \\ \text{Intersección} & : & d_{A \cap B}(x, y) & = \max(d_A(x, y), d_B(x, y)) \end{aligned}$$

Luego de ejecutar DistMesh, comienza el procesamiento de los resultados.

- Ordenar los vértices en sentido horario o anti-horario:

Para asegurarnos de que los vértices que conforman los triángulos de la malla estén ordenados en sentido horario o antihorario, se tiende a buscar el escalar D por cada triángulo tal como se muestra a continuación.

$$D = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ y_1 - y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_2 - y_3 \\ -(x_2 - x_3) \end{pmatrix}$$

Donde, (x_i, y_i) para $i = 1, 2, 3$ son las coordenadas de los vértices.

Si $D < 0$ el orden es horario y si $D > 0$ es anti-horario. El algoritmo representado en MATLAB es el siguiente

Algorithm 1: Orden Anti-horario

```
function to=orden(t,x,y)
x1 = x(t(:,1)); y1 = y(t(:,1));
x2 = x(t(:,2)); y2 = y(t(:,2));
x3 = x(t(:,3)); y3 = y(t(:,3));
D = (x1 - x3) .* (y2 - y3) - (x2 - x3) .* (y1 - y3);
i=find(D < 0);
to(i,:)=t(i,[1 3 2]);
```

Donde, $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$.

■ Calidad de la Malla:

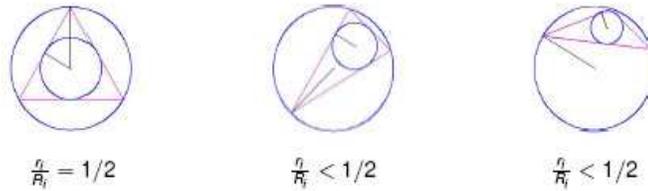
Una medida para la calidad de la malla fue descrita por Persson y Strang (2004); la misma consiste en calcular por cada triángulo el radio

$$q = 2 \frac{r_{in}}{R_{out}}$$

donde, r_{in} es el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo y R_{out} es el radio de la circunferencia circunscrita del triángulo.

Algunas características de q son dadas y visualizadas a continuación.

- En los triángulos equiláteros $q = 1$.
- En los triángulos degenerados, es decir, aquellos cuyos vértices están alineados $q = 0$.
- En general, se considera que un triángulo en la malla es óptimo si $q > 0,5$.



Podemos identificar la calidad de una malla con las siguientes dos reglas:

1. Los triángulos con ángulos muy grandes o muy pequeños deben ser evitados, esto sugiere que los triángulos equiláteros son los más eficientes.
2. Si nuestro propósito es aplicar una función sobre la malla, entonces los elementos deben situarse con más densidad en lugares en donde se espera que la función o su derivada varíen rápidamente, a la vez, es recomendable que la malla sea densa, ya que así los errores son menores.

Otra manera de identificar la calidad de la malla es mediante un estudio de su isotropía.

Definición 3 *La Isotropía es una propiedad espacial referente al hecho de que ciertas magnitudes vectoriales medibles dan resultados idénticos con independencia de la dirección escogida por la medida. Cuando una determinada magnitud no presenta isotropía, decimos que presenta anisotropía.*

Decimos que una malla es óptima o de buena calidad, si el promedio de las medidas q es cercano a 1 y la varianza es pequeña. Esto es, que la misma presente isotropía con respecto a la medida q .

- Otras opciones de procesamiento:

DistMesh ofrece varias opciones para modificar una malla, por ejemplo, se pueden rotar las coordenadas de los vértices (nodos), un ángulo ϕ con el uso de la función **protate** o se pueden trasladar con la función **pshift**.

Por otro lado, se pueden actualizar las matrices p y t utilizando la función **fixmesh**; la misma descarta las coordenadas de los nodos que estén duplicados.

1.6.1. Mallas Curvilíneas

En el modelo expuesto en la sección (1.3), se propone implementar sobre la región de estudio una malla no-ortogonal ajustada al borde. Esta es generada resolviendo una par de ecuaciones de Poisson del tipo:

$$\begin{cases} \xi_{xx} + \xi_{yy} = P(\xi, \eta) \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi, \eta) \end{cases} \quad (1.27)$$

Las ecuaciones de Poisson son ecuaciones diferenciales parciales elípticas, con la siguiente forma

$$\begin{aligned} \nabla^2 u(x, y) + g(x, y)u(x, y) &= \\ \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + g(x, y)u(x, y) &= f(x, y) \end{aligned} \quad (1.28)$$

Sobre un dominio $D = \{(x, y) \mid x_0 \leq x \leq x_f, y_0 \leq y \leq y_f\}$ con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} u(x, y_0) &= b_{y0}(x) \\ u(x_0, y) &= b_{x0}(y) \\ u(x, y_f) &= b_{yf}(x) \\ u(x_f, y) &= b_{xf}(y) \end{aligned}$$

La ecuación (1.28) es la ecuación de Poisson cuando $g(x, y) = 0$ y es la ecuación de Laplace cuando $g(x, y) = 0$ y $f(x, y) = 0$.

Para resolver numéricamente la ecuación (1.28) se utilizan diferencias finitas, que consiste en dividir el dominio en M_x secciones de longitud $\Delta x = (x_f - x_0)/M_x$ a lo largo del eje x , y en M_y secciones de longitud $\Delta y = (y_f - y_0)/M_y$ a lo largo del eje y , respectivamente, después se aproximan las segundas derivadas por diferencia central de tres puntos.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \right|_{x_j, y_i} &\cong \frac{u_{i, j+1} - 2u_{i, j} + u_{i, j-1}}{\Delta x^2} \text{ con } x_j = x_0 + j\Delta x, y_i = y_0 + i\Delta y \\ \left. \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \right|_{x_j, y_i} &\cong \frac{u_{i+1, j} - 2u_{i, j} + u_{i-1, j}}{\Delta y^2} \text{ con } u_{i, j} = u(x_j, y_i) \end{aligned} \quad (1.29)$$

Así, para todo punto interior (x_j, y_i) con $1 \leq i \leq M_y - 1$ y $1 \leq j \leq M_x - 1$, obteniendo la ecuación en diferencia finita

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta y^2} + g_{i,j}u_{i,j} = f_{i,j} \quad (1.30)$$

Donde, $u_{i,j} = u(x_j, y_i)$, $f_{i,j} = f(x_j, y_i)$ y $g_{i,j} = g(x_j, y_i)$.

Estas ecuaciones pueden mostrarse como un arreglo de un sistema de ecuaciones con $(M_y - 1) \cdot (M_x - 1)$ variables.

Otra técnica matemática que será de utilidad en el desarrollo del modelo, es el Kriging.

1.7. Técnica de Kriging

En las ecuaciones (1.16) y (1.17) del modelo de rastreo de partículas, se observa la dependencia de la profundidad del lago, se usará la técnica estadística de Kriging, para crear una función que describa la batimetría del lago de Valencia. Antes de presentar la definición de Kriging, se muestra un preámbulo de la estadística espacial.

La estadística espacial, es la reunión de un conjunto de metodologías apropiadas para el análisis de datos que corresponden a la medición de variables aleatorias en diversos sitios (puntos del espacio o agregaciones espaciales) de una región. De manera más formal se puede decir que la estadística espacial trata con el análisis de realizaciones de un proceso estocástico $\{Z(s) \mid s \in D\}$ en el que $s \in \mathbb{R}^d$ representa una ubicación en el espacio euclidiano d -dimensional, $Z(s)$ es una variable aleatoria en la ubicación s y s varía sobre un conjunto de índices $D \subset \mathbb{R}^d$.

1.7.1. Procesos Espaciales

Los datos espaciales, son aquellos que tienen asociada una localización en el espacio, por otro lado, un dato espacio-temporal es simplemente la observación de una variable en cierta localización espacial considerando al tiempo como coordenada adicional.

La idea fundamental con este tipo de datos es que las observaciones más cercanas son más parecidas entre sí, y conforme éstas se distancian, la correlación entre las variables tiende a disminuir, anulándose en algún momento.

Definición 4 Una variable regionalizada es un proceso estocástico espacial Z , definido como $\{Z(x) \mid x \in D \subset \mathbb{R}^d\}$, donde para cualquier n puntos x_1, x_2, \dots, x_n , el vector aleatorio $Z(x) = [Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)]$ está determinado por su función de distribución conjunta

$$F(z_1, z_2, \dots, z_n) = P(Z(x_1) \leq z_1, Z(x_2) \leq z_2, \dots, Z(x_n) \leq z_n)$$

Conocidas las densidades marginales, se puede establecer:

1. $E[Z(x_i)] = m(x_i)$

2. $V[Z(x_i)] = E[(Z(x_i) - m(x_i))^2]$
3. $C(Z(x_i), Z(x_j)) = E[(Z(x_i) - m(x_i))(Z(x_j) - m(x_j))]$: *Función de autocovarianza.*
4. $\gamma(Z(x_i), Z(x_j)) = \frac{1}{2}E[(Z(x_i) - Z(x_j))^2]$: *Función de semivarianza.*

Estacionariedad

La variable regionalizada es estacionaria si su función de distribución conjunta es invariante respecto a cualquier translación del vector h , o lo que es lo mismo, la función de distribución del vector aleatorio $Z(x) = [Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)]$ es igual a la del vector $Z(x) = [Z(x_1 + h), Z(x_2 + h), \dots, Z(x_n + h)]$ para cualquier h .

Estacionariedad de segundo orden

Se dice que $Z(x)$ es estacionario de segundo orden si cumple que:

1. $E[Z(x)] = m, \forall x \in D \subset \mathbb{R}^d$
2. $\text{Cov}[Z(x), Z(x+h)] = C(h)$, es decir, la covarianza es función del valor de separación h

La existencia de la covarianza implica que la varianza existe, es finita y no depende de h , es decir, $V(Z(x_i)) = C(0) = \sigma^2$

Se puede establecer la siguiente relación entre la semivarianza y autocovarianza:

$$\begin{aligned}
 \gamma(Z(x+h), Z(x)) &= \gamma(h) = \frac{1}{2}E[(Z(x+h) - m - Z(x) + m)^2] \\
 &= \frac{1}{2}(E[(Z(x+h) - m)^2] + E[(Z(x) - m)^2] \\
 &\quad - 2E[(Z(x+h) - m)(Z(x) - m)]) \\
 &= \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 - E[(Z(x+h) - m)(Z(x) - m)] \\
 &= \sigma^2 - C(h).
 \end{aligned}$$

Estacionariedad Débil o Intrínseca

Algunos procesos espaciales no poseen varianza finita, en estos casos, se trabaja con la condición de que los incrementos $[Z(x+h) - Z(x)]$ sean estacionarios, cumpliéndose que:

1. $Z(x)$ tiene esperanza finita, por lo tanto $E[Z(x+h) - Z(x)] = 0$
2. $V(Z(x+h) - Z(x)) = E[(Z(x+h) - Z(x))^2] = 2\gamma(h)$

Si una variable aleatoria espacial es estacionaria fuerte entonces también será estacionaria débil. En el campo espacial existen múltiples direcciones y por lo tanto se debe asumir que en todas el fenómeno es estacionario. Cuando la esperanza de la variable no es la misma en todas las direcciones o cuando la covarianza o correlación dependan del sentido en que se determinan, no habrá estacionariedad. Si la correlación entre los datos no depende de la dirección en la que esta se calcule se dice que el fenómeno es isotrópico, en caso contrario se hablará de anisotropía.

1.7.2. Función Variograma

El Variograma es la función varianza de los incrementos del campo aleatorio Z , es decir, $V(Z(x+h) - Z(x)) = 2\gamma(h)$. La función $\gamma(h)$ se conoce como semivarianza y se puede calcular muestralmente con la fórmula

$$\bar{\gamma}(h) = \frac{1}{2n} \sum (Z(x+h) - Z(x))^2$$

donde n es el número de elementos que se encuentran a una distancia h del sitio x .

1.7.3. Modelos de Semivariograma

Los modelos de semivariograma tienen tres parámetros en común:

- **Efecto Pepita** (nugget). Se denota como C_0 y representa una discontinuidad del semivariograma en el origen de tamaño C_0
- **Meseta**. Es la cota superior del semivariograma.
- **Rango**. Es la distancia a partir de la cual, dos observaciones son aproximadamente independientes.

Algunos de los modelos son:

Modelo Esférico

Este tiene un crecimiento rápido cerca del origen.

$$\gamma(h) = \begin{cases} C_0 + C_1 \left(\frac{3h}{a} - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right) & h \leq a \\ C_0 + C_1 & h > a \end{cases} \quad (1.31)$$

Donde, C_1 es la meseta, a es el rango y h la distancia.

Modelo Exponencial

Este es óptimo cuando el semivariograma tiene un crecimiento exponencial. Su expresión es

$$\gamma(h) = C_0 + C_1 \left(1 - \exp\left(\frac{-3h}{a}\right) \right) \quad (1.32)$$

Modelo Gaussiano

Es parecido al exponencial, con cierta forma parabólica. Su expresión es

$$\gamma(h) = C_0 + C_1 \left(1 - \exp\left(\frac{-h^2}{a^2}\right) \right) \quad (1.33)$$

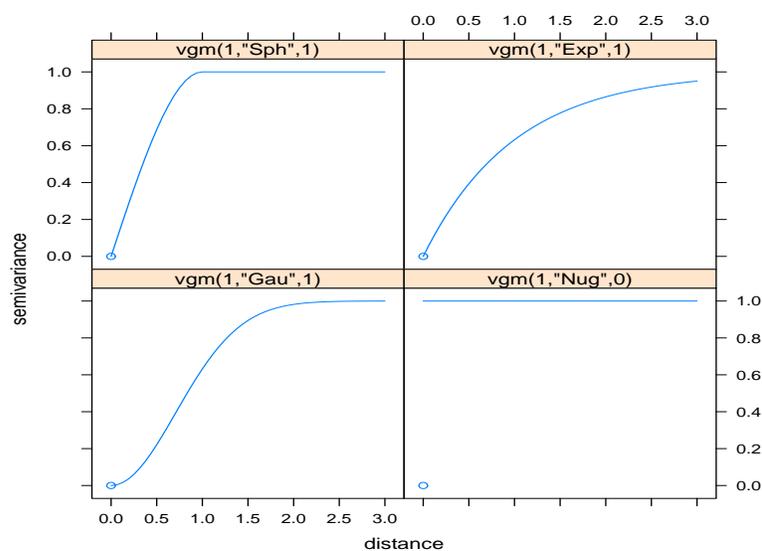
Modelo Monómico

Los modelos lineales son aquellos que no alcanzan una meseta, su fórmula es

$$\gamma(h) = Kh^\theta \quad 0 < \theta < 2 \quad (1.34)$$

Cuando θ es igual a uno, el modelo es lineal.

En la siguiente figura se puede apreciar las formas de los semivariogramas antes descritos, incluyendo el semivariograma Nugget o de pepita, que sólo se usa cuando los datos son independientes.



1.7.4. Kriging Simple y Ordinario

El Kriging es un método estadístico de predicción que proporciona la continuidad espacial de los datos, su planteamiento consiste en considerar $Z(u)$ como una combinación lineal de las observaciones disponibles

$$Z^*(u) = \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha}(u) Z(u_{\alpha})$$

Los pesos λ_{α} se escogen de manera que el estimador sea insesgado y que la varianza $var[Z(u) - Z^*(u)]$ sea mínima, utilizando la hipótesis de estacionariedad.

1.7.5. Kriging Simple

En el kriging simple se supone conocida la esperanza del campo, $E[Z(u)] = m$.

Caso 1: m=0

En este caso, el estimador es insesgado, ya que

$$E[Z^*(u)] = \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha}(u) E[Z(u_{\alpha})] = 0 = E[Z(u)]$$

Para buscar los pesos, se impone la condición de que $var[Z(u) - Z^*(u)]$ sea mínima, por ejemplo, para una observación, el procedimiento es el siguiente:

$$Z^*(u) = \lambda_1 Z(u_1)$$

Entonces

$$\begin{aligned} var[Z(u) - Z^*(u)] &= var[Z(u)] + \lambda_1^2 var[Z(u_1)] - 2\lambda_1 cov[Z(u), Z(u_1)] \\ &= \sigma^2 + \lambda_1^2 \sigma^2 - 2\lambda_1 cov(u - u_1) \end{aligned}$$

Derivando con respecto al parámetro λ_1 e igualando a cero, se obtiene que

$$\lambda_1 = \frac{cov(u - u_1)}{\sigma^2} = \rho(u - u_1)$$

Así, la predicción en u sería $Z^*(u) = \rho(u - u_1)Z(u_1)$.

Adicionalmente se tiene que, $Cov[Z(u) - Z^*(u), Z^*(u)] = 0$, lo que indica que el estimador es ortogonal al error, así $var[Z^*(u)] \leq var[Z(u)]$ debido a que $var[Z(u)] = var[Z(u) - Z^*(u)] + var[Z^*(u)]$.

En el caso general,

$$Z^*(u) = \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} Z(u_{\alpha})$$

Luego,

$$\begin{aligned} var[Z(u) - Z^*(u)] &= var\left[\sum_{\alpha=0}^N \lambda_{\alpha}(u) Z(u_{\alpha})\right] \\ &= \sum_{\alpha=0}^N \lambda_{\alpha}^2(u) var[Z(u_{\alpha})] + \sum_{\alpha \neq \beta} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} cov(u_{\alpha} - u_{\beta}) \\ &\quad - 2 \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} cov(u - u_{\alpha}) \end{aligned}$$

Derivando con respecto a cada parámetro e igualando a cero se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} C(0) & C(u_1 - u_2) & \cdots & C(u_1 - u_N) \\ C(u_2 - u_1) & C(0) & \cdots & C(u_2 - u_N) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C(u_N - u_1) & C(u_N - u_2) & \cdots & C(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(u_1 - u) \\ C(u_2 - u) \\ \vdots \\ C(u_N - u) \end{pmatrix}$$

La varianza del error de predicción; también conocida como varianza de kriging, puede ser calculada sin conocer los valores en los datos; para encontrarla, se sustituye el valor de cada parámetro en (1.35), su expresión general es

$$\text{var}[Z(u) - Z^*(u)] = \sigma^2 - \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} C(u - u_{\alpha})$$

Caso $E[Z(u)] = m \neq 0$

En este caso se define un campo $Y(u)$ centrado y se aplica Kriging simple; es decir

$$Y(u) = Z(u) - m$$

de esta manera

$$Y^*(u) = \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} Y(u_{\alpha})$$

$$Z^*(u) = m + Y^*(u).$$

1.7.6. Kriging Ordinario

El kriging ordinario es usado cuando el valor de la media m es desconocido. Para que el estimador sea insesgado debe ocurrir que

$$E[Z(u)] = m = E[Z^*(u)]$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} E[Z^*(u)] &= \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha}(u) E[Z(u_{\alpha})] \\ &= m \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha}(u) \end{aligned}$$

Por lo tanto, se debe cumplir que

$$\sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha}(u) = 1 \tag{1.35}$$

Como consecuencia se deben encontrar los λ 's que minimicen $var[Z(u) - Z^*(u)]$ y que cumplan (1.35). Este sería un problema de optimización con restricciones que se puede resolver por medio de multiplicadores de Lagrange.

El procedimiento consiste en definir la función

$$\phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N, \mu) = var[Z(u) - Z^*(u)] + 2\mu(1 - \sum_{i=1}^N \lambda_i)$$

Al derivar ϕ con respecto a cada parámetro e igualar a cero, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$2 \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} cov(u_{\alpha} - u_j) - 2\mu = 2cov(u - u_j) \quad j = 1, \dots, N$$

$$\sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha}(u) = 1$$

El sistema se representa matricialmente como

$$\begin{pmatrix} C(0) & C(u_1 - u_2) & \cdots & C(u_1 - u_N) & 1 \\ C(u_2 - u_1) & C(0) & \cdots & C(u_2 - u_N) & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\ C(u_N - u_1) & C(u_N - u_2) & \cdots & C(0) & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_N \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(u_1 - u) \\ C(u_2 - u) \\ \vdots \\ C(u_N - u) \\ 1 \end{pmatrix}$$

La expresión de la varianza del kriging en el sitio u es

$$var[Z(u) - Z^*(u)] = \sigma^2 - \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} C(u - u_{\alpha}) - \mu$$

Capítulo 2

Elaboración del modelo de simulación para la dispersión de la clorofila en el Lago de Valencia

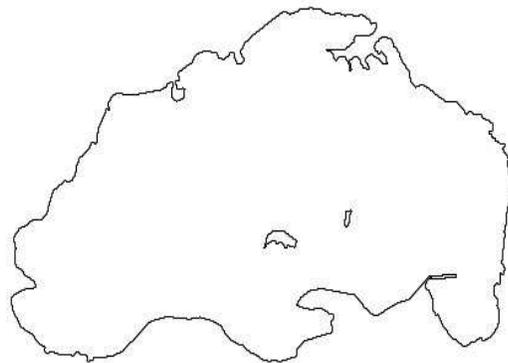
La implementación del modelo, fue llevada a cabo siguiendo los pasos que se muestran en las secciones de a continuación.

2.1. Generación de una Malla Triangular sobre el Lago de Valencia

En esta sección, se presenta el procedimiento necesario para la elaboración de una malla triangular sobre el Lago de Valencia utilizando DistMesh.

Paso 1

Extracción del borde o contorno del Lago con el uso de Photoshop



Paso 2

Se Traslada la imagen a Matlab con el uso de los comandos **Imread** e **Imshow**; posteriormente se extraen M puntos del borde del Lago y de su isla más importante, formando así dos matrices con las coordenadas de estos puntos.

La extracción de puntos se realiza con el comando **ginput**, de la siguiente forma,

```
>> [x, y] = ginput;
```

Al graficar los puntos se puede observar una aproximación poligonal del Lago

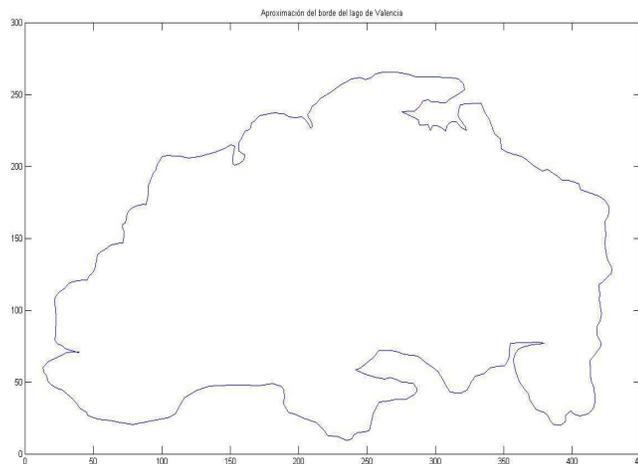


Figura 2.1: Aproximación Poligonal del Lago de Valencia

Paso 3

En este paso se definirán los argumentos necesarios para ejecutar DistMesh.

■ Función de Distancia

Para crear la función de distancia que señalice el lago y su isla se utilizará la función **dpoly**, luego se extraera el área de la isla con la función **ddiff**.

```
function d = distancia(p)
```

```
% Puntos del borde del Lago
```

```

b1 = [ 39,4089  205,2810
       25,4609  200,6317
       :        :
       39,4089  205,2810]
% Puntos del borde de la Isla
b2 = [ 227,9173  174,4265
       227,9173  171,8905
       :        :
       227,9173  174,4265]

d1 = dpoly(p, b1);
d2 = dpoly(p, b2);
d = ddiff(d1, d2);
return
end

```

- Función de Densidad

En este apartado se pueden colocar dos funciones; se coloca la función **huniform** si se desea obtener una malla uniforme.

En caso de desear una malla no uniforme se puede implementar el siguiente algoritmo

```

function h = densidad ( p )

hmax = 5;
hmin = 1;
dmax = max(abs(distancia(p)));
dmin = min(abs(distancia(p)));
h = ((dmax - abs(distancia(p))) * hmin
      +(abs(distancia(p)) - dmin) * hmax)
      /(dmax - dmin);

return
end

```

- Definir una matriz que contenga una cota superior y una inferior de la región de estudio; esto es posible con la siguiente instrucción:

```
>> box=[min(b1(:,1)), min(b1(:,2)); max(b1(:,1)), max(b1(:,2))];
```

Ya realizados los pasos anteriores se puede hacer el llamado del código DistMesh, se elaboraron 3 mallas triangulares distintas para el Lago de Valencia, con la finalidad de que sirvan como soporte en el desarrollo del modelo.

2.1.1. Malla Triangular Uniforme

Para un tamaño de la malla $h = 8,5$ se obtuvo la siguiente malla después de 6000 iteraciones.

```
>> [p,t]=distmesh2d(@distancia,@densidad,8.5,box,fixed);
```

Malla Triangular Uniforme

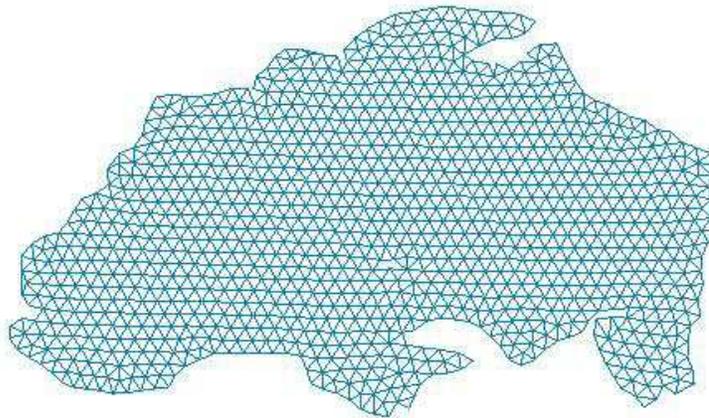


Figura 2.2: Malla Uniforme

La calidad de la malla se obtuvo usando la función **simpqual**; la misma se puede estudiar con el siguiente histograma; en donde, la línea roja representa el promedio de isotropía presente en los triángulos; mientras esta se acerque más a 1, mejor es la calidad.

Los pasos para obtenerlo fueron los siguientes:

```
>> q = simpqual ( p, t, 1 );  
>> hist( q , 90 );
```

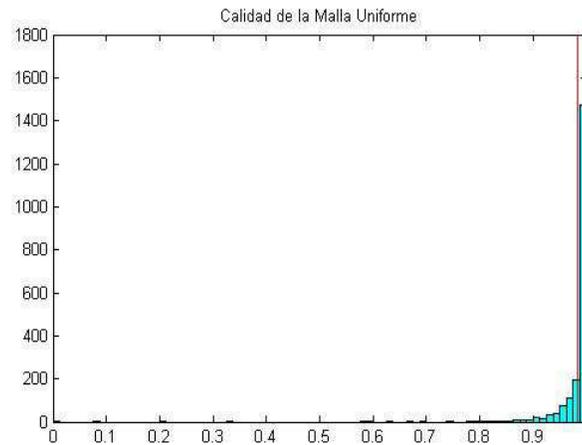


Figura 2.3: Calidad de la Malla Uniforme

En el histograma se observa que la calidad de la malla puede ser calificada como buena ya que su promedio es cercano a 1.

2.1.2. Malla Triangular No-Uniforme

Para un tamaño de la malla $h = 8,5$ se obtuvo la siguiente malla después de 700 iteraciones.

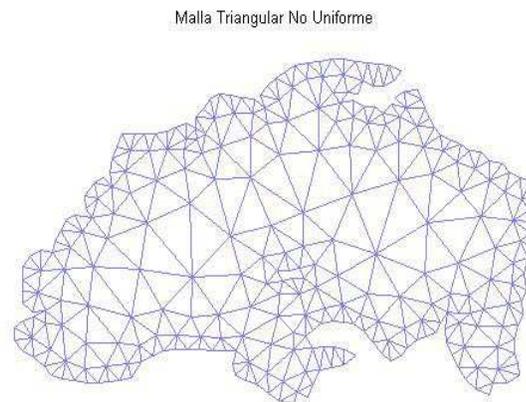


Figura 2.4: Malla No-Uniforme

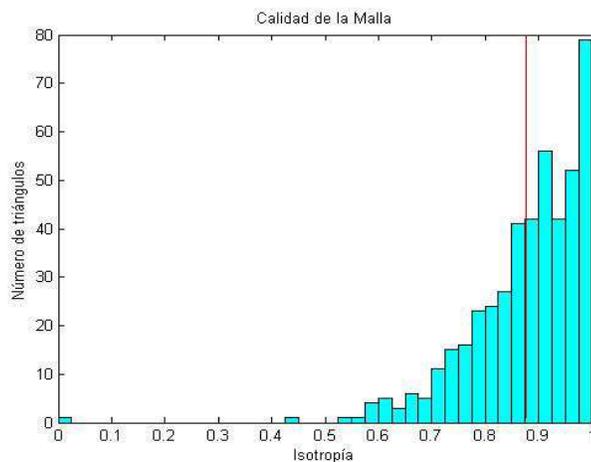


Figura 2.5: Calidad de la Malla Uniforme

El hecho de que la malla es no uniforme y que el tamaño h es grande hacen disminuir su calidad, aún así se puede ver que esta es mayor a 0,5 y se puede clasificar como buena, cabe destacar que tanto la malla anterior como la que aparece a continuación, se obtuvieron después de 700 iteraciones, mientras mayor es el número de iteraciones la calidad tiende a ser mejor.

Ahora, si $h = 5$

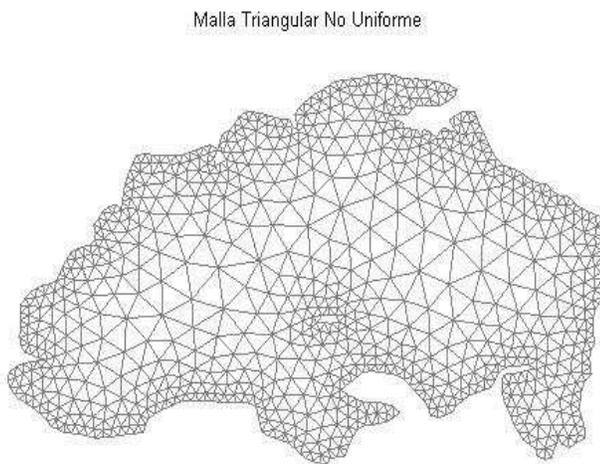


Figura 2.6: Malla No-Uniforme

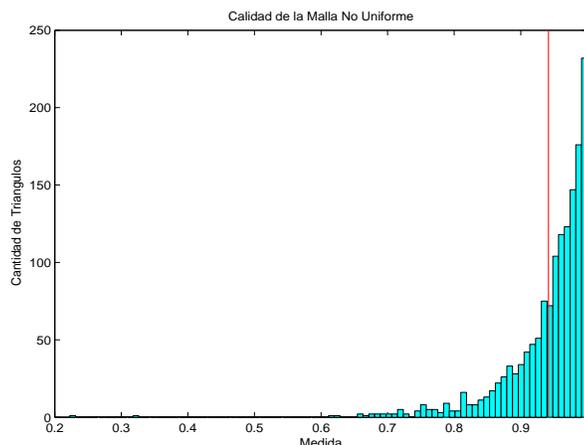


Figura 2.7: Calidad de la Malla No-Uniforme

Al disminuir el tamaño h , la calidad de la malla no uniforme mejoró, el promedio está más cercano a 1 y la dispersión o varianza de las medidas con respecto al promedio disminuyó.

2.2. Generación de Malla Curvilínea sobre el Lago de Valencia

Tal como se mostró en la sección (1.3.2), la generación de una malla curvilínea sobre la región de estudio, proporcionará exactitud en los resultados. La construcción de esta malla se realizará a través de la resolución de las ecuaciones expresadas en (1.27).

Las ecuaciones de Poisson (1.27), serán resueltas mediante un algoritmo iterativo basado en diferencias finitas. El código extraído de [1], utiliza la expresión mostrada en (1.30) reescrita como sigue:

$$u_{i,j} = r_y(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + r_x(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + r_{xy}(g_{i,j}u_{i,j} - f_{i,j})$$

Donde,

$$r_y = \frac{\Delta y^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}, \quad r_x = \frac{\Delta x^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}, \quad r_{xy} = \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$$

A continuación, se muestra el algoritmo implementado en MatLab:

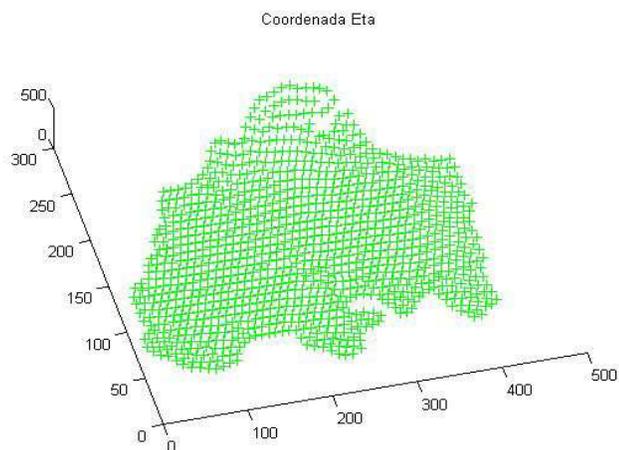
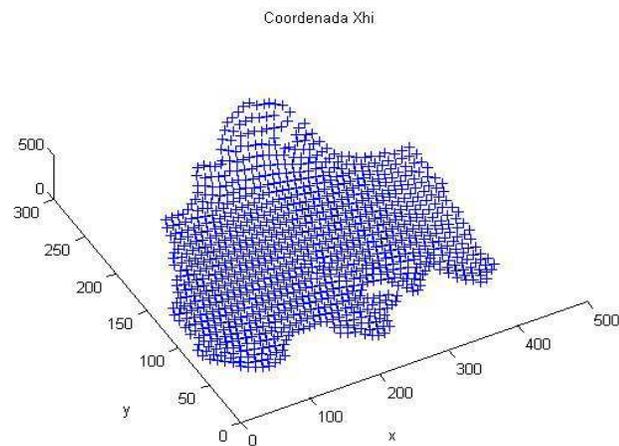
Algorithm 2: Malla Curvilínea

```

function [u,x,y]=poisson(tol,maxiter)
D=[14.0490 429.5283 33.8553 289.1447];
x0=D(1); xf=D(2); y0=D(3); yf=D(4);
Mx=100; My=100;
dx=(xf-x0)/Mx; dy=(yf-y0)/My;
x=linspace(x0,xf,101);
y=linspace(y0,yf,101);
Mx1=Mx+1;
My1=My+1;
for m=1: Mx1 do
    c1x=condicion1x(x(m));
    c2x=condicion2x(x(m));
    u(m,[1 Mx1])=[c1x c2x];
for m=1: My1 do
    c1y=condicion1y(y(m));
    c2y=condicion2y(y(m));
    u([1 My1],m)=[c1y c2y];
sumofbv=sum(sum([u(1:100, [1 100]) u([1 100], 1:100)']));
u(2:My,2:Mx)=sumofbv/(2*(Mx+ My-2));
for i=1: My do
    for j=1: Mx do
        f(i,j)=0;
        dx2=dx*dx; dy2=dy*dy; dxy2=2*(dx2+dy2);
        rx=dx2/dxy2; ry=dy2/dxy2; rxy=rx*dy2;
        for itr=1: maxiter do
            for j=2: Mx do
                for i=2: My do
                    u(i,j)=ry*(u(i,j+1)+u(i,j-1))+ rx*(u(i+1,j)+u(i-1,j))-rxy*f(i,j);
                end
            end
            if (itr ≤ 1 and max(max(abs(u-u0))) ≥ tol) break;
            u0=u;
        end
    end

```

Tras ejecutar el código se obtuvieron las coordenadas curvilíneas (ξ, η) .



Ya construidas las mallas, se procede a la búsqueda de la estimación de funciones que definan los coeficientes de difusión en la región del lago.

2.3. Estimación de Coeficientes de Difusión

Los coeficientes de difusión serán aproximados mediante la tasa de crecimiento algal; según Reynolds [11] esta tasa se puede encontrar mediante la siguiente fórmula:

$$\mu = \frac{\ln X_2 - \ln X_1}{t_2 - t_1} (\text{horas})^{-1} \quad (2.1)$$

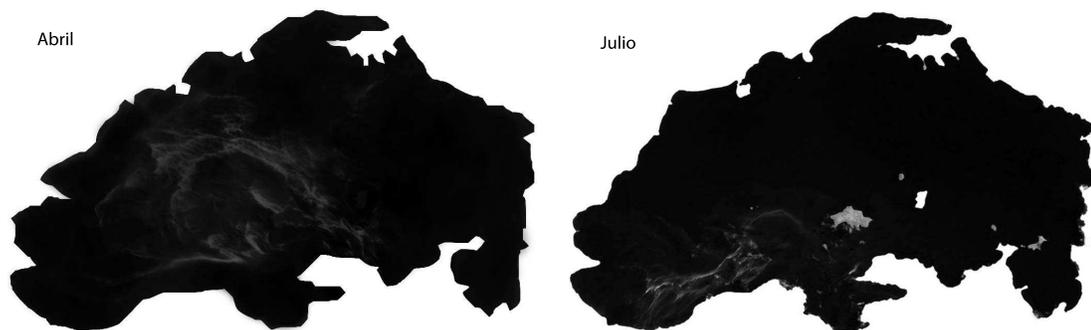
donde,

- X_1 = concentración en el tiempo t_1 .
 X_2 = concentración en el tiempo t_2 .

Para aplicar la fórmula anterior es necesario conocer la concentración de la clorofila sobre el lago, en vista de que no se cuenta con la cantidad de datos necesarios para establecer la concentración sobre toda la región de estudio, entonces se procederá a encontrar la reflectancia a través de imágenes satelitales, posteriormente se puede encontrar la concentración planteando una relación lineal entre la clorofila y la reflectancia.

Se descargaron tres imágenes satelitales del sitio web <http://www.usgs.gov/>, las mismas fueron obtenidas a través del satélite Landsat a una resolución espacial de 240 metros en los meses de Abril, Julio y Agosto del año 2002.

Se tomaron en cuenta las imágenes de los meses Abril y Julio. Si se colocan en escala de grises; la clorofila toma un tono claro.



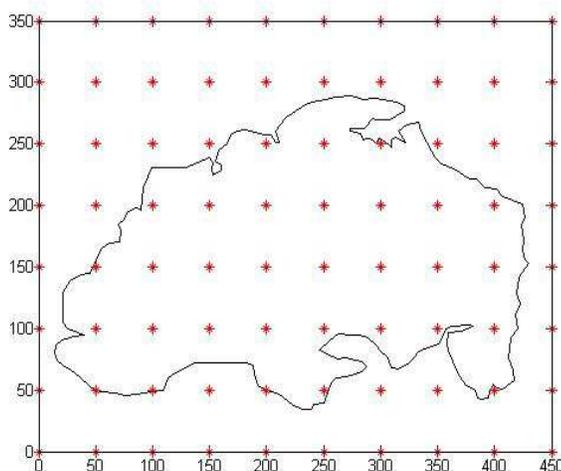
Las imágenes descargadas fueron captadas por el sensor Thematic Mapper Mejorado (ETM); este tiene 6 bandas en el espectro electromagnético que va desde el visible hasta el infrarrojo medio, de las cuales se emplean algunas para el cálculo de los índices o cocientes de bandas. El índice adecuado para obtener la reflectancia de la clorofila es el de vegetación.

El índice de vegetación, denominado también como NDVI es el resultado de la siguiente operación entre bandas:

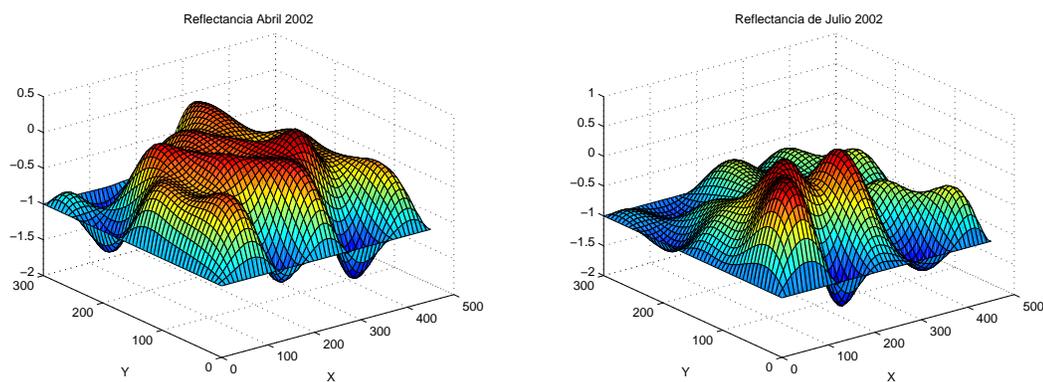
$$\text{NDVI} = \frac{\text{Banda4} - \text{Banda3}}{\text{Banda4} + \text{Banda3}}$$

Donde, la Banda 4 es el infrarrojo y la Banda 3 es el rojo.

Después de obtener el NDVI, se extrajo el valor de la reflectancia con el uso de ENVI en los nodos situados sobre el lago de la siguiente malla.



Los valores obtenidos tuvieron como rango $[-1,1]$. Por último, se interpolaron los puntos mediante curvas suaves, obteniendo como resultado



Para establecer la relación entre la concentración de la clorofila y la reflectancia se realizó una regresión lineal con los datos correspondientes a Julio del año 2002.

Estación	Clorofila mg/m^3	Reflectancia
3	62.7	0.20
5	123.7	0.404
6	170.3	0.333
12A	37	-0.26
16	30.2	-0.5
20	26.7	-0.333
34	60.5	-0.8
39	50.4	-0.375

El resultado se puede observar en la siguiente gráfica.

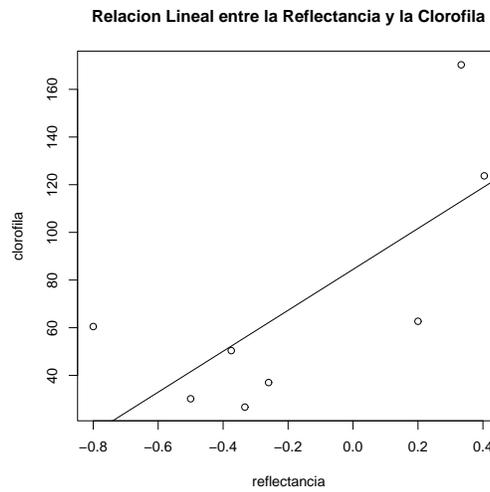
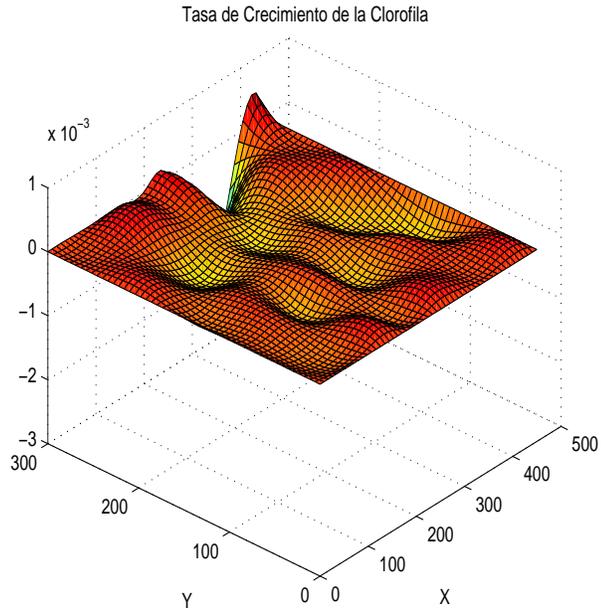


Figura 2.8: Regresión Lineal

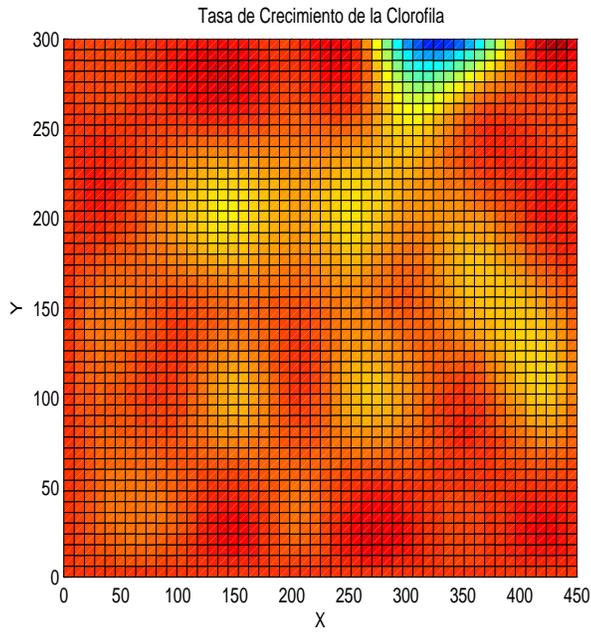
La fórmula precisa está dada por

$$\text{concentración} = 84.47 + (85.83)\text{reflectancia}$$

Así es posible encontrar la concentración en cualquier zona del lago, por lo tanto se puede aplicar (2.1). Finalmente, la tasa de crecimiento de la clorofila sobre el lago de Valencia puede ser representada por la función de a continuación.



También se puede visualizar en dos dimensiones.



Otras de las condiciones necesarias para la ejecución del modelo, es la construcción de funciones que definan las velocidades de las aguas del lago.

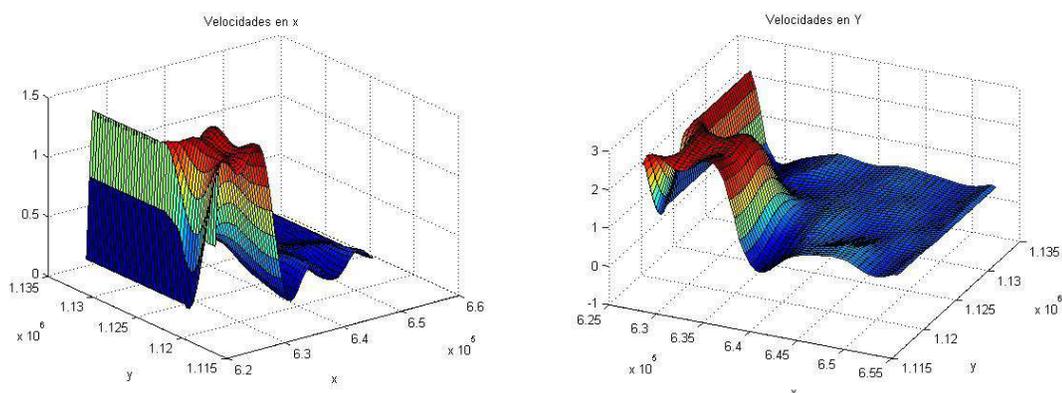
2.4. Velocidades y Georreferenciación del Lago

Para que los resultados arrojados por el algoritmo se asemejen a la dispersión real de la clorofila sobre el Lago de Valencia, se deben insertar datos obtenidos mediante mediciones hechas en el propio lago; tales como las velocidades de las aguas, batimetría y coeficientes de difusión.

Se cuentan con los datos de velocidades en diversas zonas del lago, estos fueron obtenidos a partir del software GCLAM (Modelo del Lago de Valencia en Coordenadas Curvilíneas), desarrollado en la Universidad de Carabobo; se contó con la colaboración de la Lic. Jocelyn León, quien procesó la data y la completó usando Kriging. Luego de organizar los datos, se generaron curvas suaves de interpolación entre los datos.

Para obtener estas curvas, se definieron en MATLAB los vectores X_n e Y_m que estructuran la malla uniforme sobre la cual se realizó el Kriging, también se definen las predicciones de las velocidades sobre esta malla; estas son matrices $VX_{m \times n}$ y $VY_{m \times n}$, finalmente es posible utilizar la función de interpolación **csapi**, permitiendo de esta manera obtener las velocidades en las direcciones x e y en cualquier punto del lago.

A continuación, se pueden observar las funciones de velocidades generadas.



El dominio de estas funciones está conformado por las coordenadas geográficas del lago; por ende, se necesitó georreferenciar la malla que cubre la región, utilizando los formatos de medida nombrados en la definición que sigue.

Definición 5 *La medición de la latitud y longitud se suele expresar con el uso de los formatos:*

1. Formato DMS

El formato DMS (Degrees, Minutes and Seconds), como su nombre lo indica, expresa la latitud y longitud con la notación de grados, minutos y segundos.

2. Formato DD

El Formato DD (Decimal Degrees), es el más utilizado a la hora de programar, el mismo

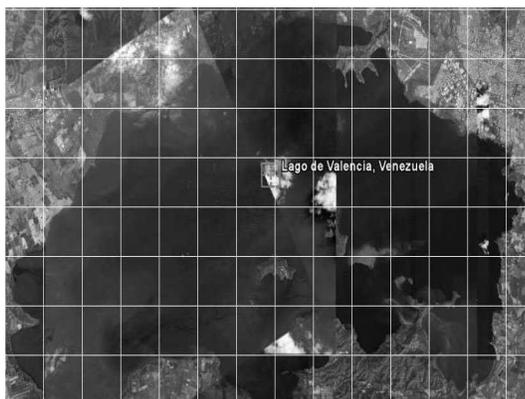
consiste en expresar los minutos y segundos en grados, siguiendo la fórmula

$$\text{GradosDecimales} = \text{Grados} + \frac{\text{minutos}}{60} + \frac{\text{segundos}}{3600} \quad (2.2)$$

Por ejemplo, la latitud $42^{\circ} 21'30''$ N es equivalente a 42.35833 N en el formato DD.

Para la georreferenciación, se utilizaron datos e imágenes extraídas de Google Earth, el procedimiento utilizado se puede resumir con los siguientes pasos:

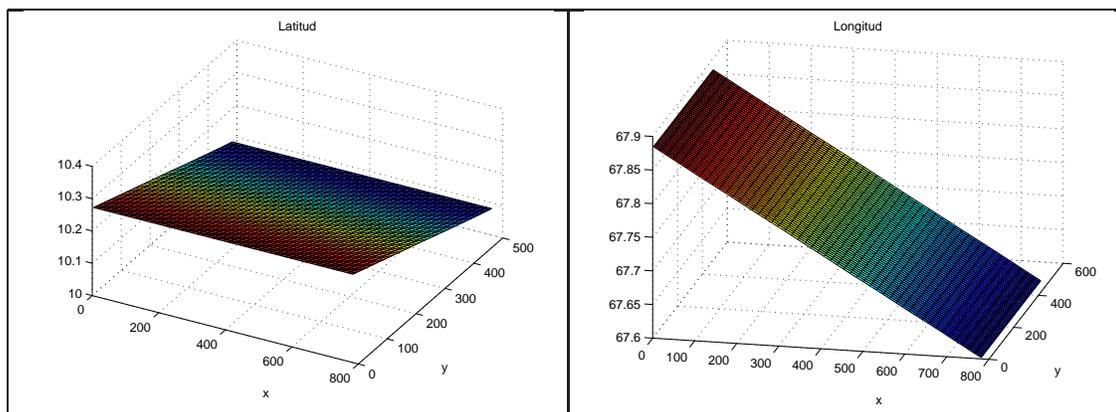
1. Se extrajo la imagen del lago desde Google Earth
2. Se editó la imagen a escala de grises en Matlab y se le colocó una malla uniforme, de manera de que cada recuadro de la malla tuviese una resolución de 60×60 píxeles, tal como a continuación



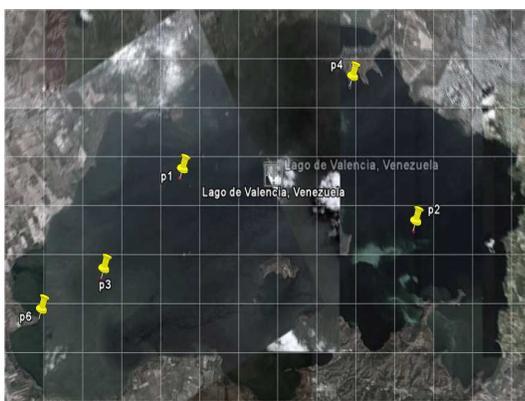
3. La imagen anterior se superpuso en Google Earth en la ubicación del lago de Valencia y se tomó como muestra, la latitud y longitud de los nodos de la malla, restringidas por las coordenadas que acotan al lago, estas son aproximadamente:

Latitud Máxima	:	$10^{\circ}16'7.72''$ N
Latitud Mínima	:	$10^{\circ}6'0.82''$ N
Longitud Máxima	:	$67^{\circ}52'46.40''$ O
Longitud Mínima	:	$67^{\circ}35'21.90''$ O

4. La muestra obtenida, se transformó a notación decimal y se realizó un algoritmo en Matlab usando la función de ajuste **csapi**, obteniendo las siguientes funciones para la latitud y longitud del Lago.



5. Se evaluó el algoritmo con los cinco puntos de prueba de la imagen anterior y se compararon los resultados con Google Earth.



Puntos	(latitud,longitud) en Matlab	(latitud,longitud) en Google Earth	Error
(272,209)	(10.19682,67.78580)	(10.19811,67.78556)	(0.0013,0.0002)
(632,274)	(10.17322,67.65547)	(10.17521,67.65586)	(0.0020,0.0004)
(151,333)	(10.15164,67.82952)	(10.15424,67.82933)	(0.0025,0.0001)
(533,96)	(10.23726,67.69124)	(10.23885,67.69094)	(0.0015,0.0003)
(54,380)	(10.13481,67.86471)	(10.13637,67.86405)	(0.0015,0.0006)

Dado que, los resultados fueron obtenidos en el formato DD, se elaboró un convertidor al formato DMS

Con el uso del convertidor se observó que el error del algoritmo es solo a nivel de los segundos, los grados y minutos se obtienen con certeza, por ejemplo,

Algorithm 3: Covertidor DD a DMS

```
function [grados,min,seg]=convertidor(l)
grados=fix(l);
m=(l-grados)*60;
min=fix((l-grados)*60);
seg=fix((m-min)*60);
```

Punto	(latitud,longitud) en Matlab	(latitud,longitud) en Google Earth
(272,209)	(10°11'48",67°47'8")	(10°11'53",67°47'8.3")

Para finalizar con la lista de las condiciones iniciales necesarias para la ejecución del modelo, se presenta el procedimiento para la obtención de la batimetría del lago, el cual hace uso de la técnica estadística Kriging.

2.5. Batimetría del Lago

Para emplear Kriging en MatLab, se deben descargar anticipadamente las funciones *Variogram*, *Variogramfit* y *Kriging* del portal web: www.mathworks.com.

Con la función **variogram** se puede crear y graficar el variograma.

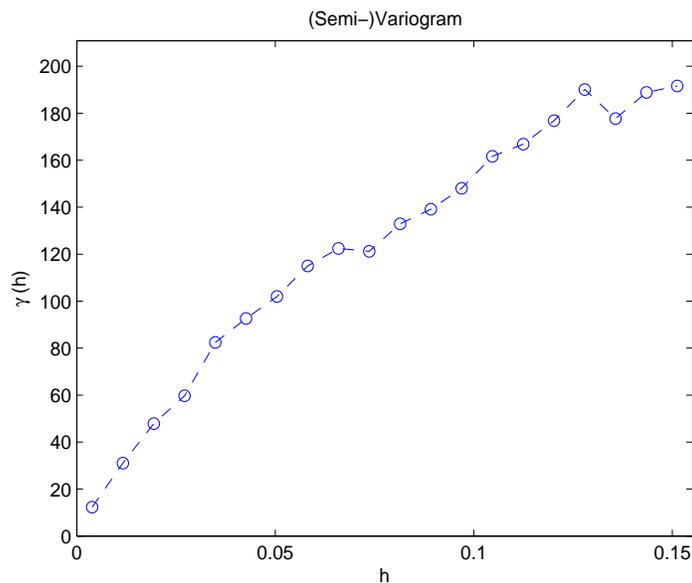
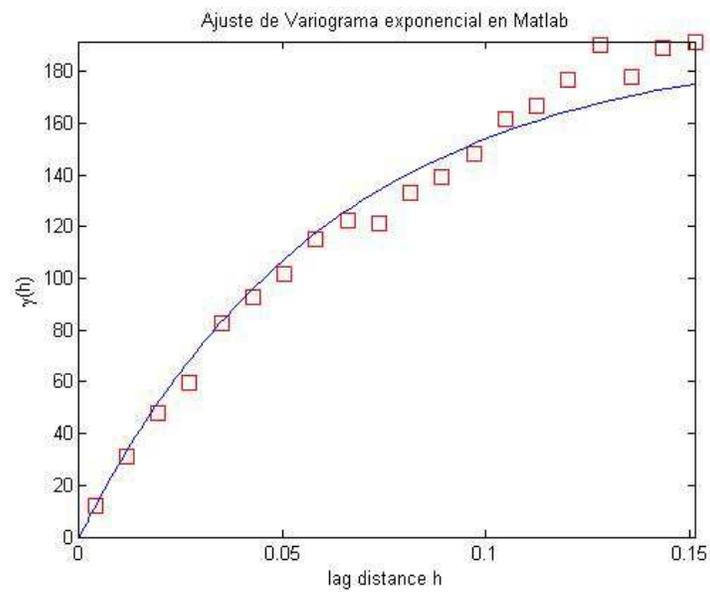


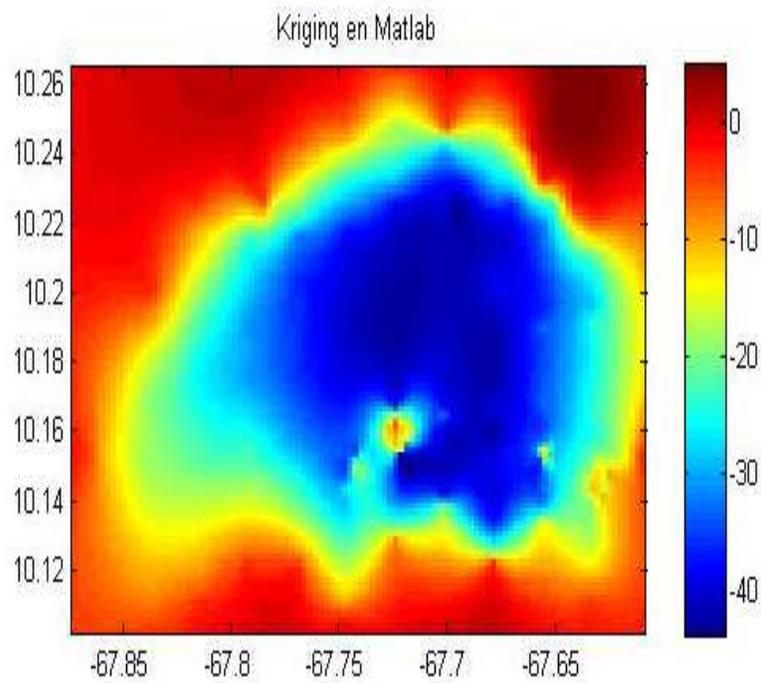
Figura 2.9: Variograma

Con **variogramfit** se probaron los modelos de variograma lineal, esférico y exponencial;

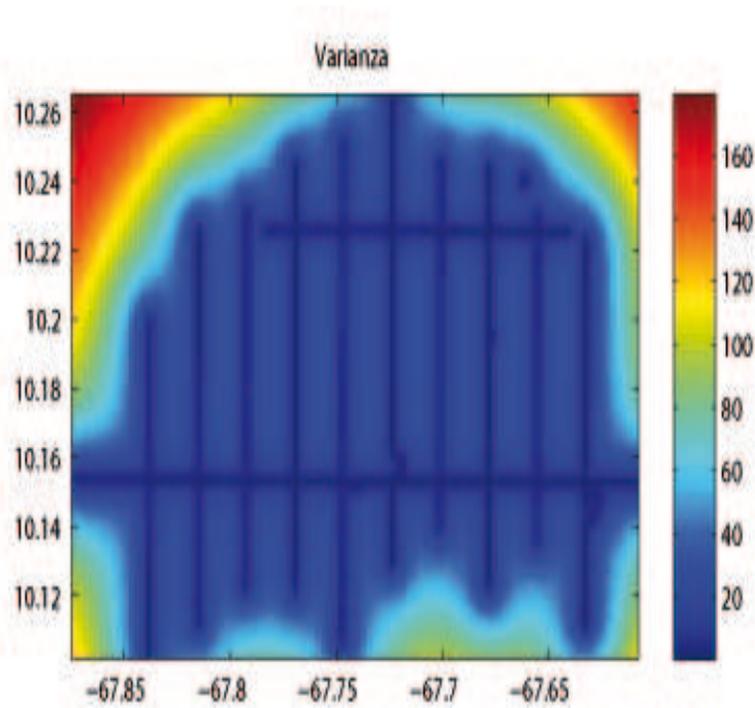
notando que el de mejor ajuste fue el exponencial.



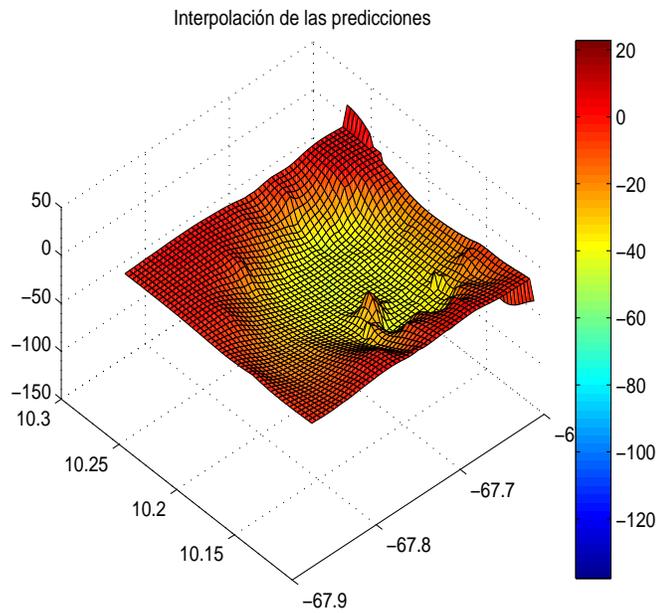
Por último, al realizar kriging se generó el gráfico de a continuación.



Otra salida de la función kriging es la varianza del error que se visualiza en el siguiente gráfico.



Una vez que se cuenta con las predicciones del kriging en una malla uniforme; estas se pueden interpolar y de esta manera se crea una función que simula la profundidad en cualquier punto del lago.



Ya implementadas las metodologías para la búsqueda de las condiciones iniciales del modelo, se inicia la programación del código principal.

2.6. Desarrollo del Modelo

La elaboración del modelo propuesto fue flexible sólo en cuanto a la búsqueda de las velocidades del lago y al ajuste de la malla curvilínea, pues no se siguieron los pasos expuestos en el artículo [14]. Es decir, los pasos 4 y 5 del esquema del modelo expuesto en la sección (1.3.3) variaron adaptándose a la factibilidad del estudio.

Tal como se observó en la sección (2.4) las velocidades no se buscaron por aproximaciones de Taylor, como lo recomienda el artículo de referencia del modelo, sino con el uso de kriging e interpolación por spline.

Por otro lado, el ajuste de la malla curvilínea, es un factor fundamental en la búsqueda de las velocidades advectivas modificadas de las partículas; pues dependen directamente de las coordenadas curvilíneas (ξ, η) .

$$U = u + \frac{1}{JD} \left[y_\eta \left(\frac{\partial \Gamma_{xx}}{\partial \xi} D + \frac{\partial D}{\partial \xi} \Gamma_{xx} \right) - y_\xi \left(\frac{\partial \Gamma_{xx}}{\partial \eta} D + \frac{\partial D}{\partial \eta} \Gamma_{xx} \right) \right. \\ \left. + x_\xi \left(\frac{\partial \Gamma_{xy}}{\partial \eta} D + \frac{\partial D}{\partial \eta} \Gamma_{xy} \right) - x_\eta \left(\frac{\partial \Gamma_{xy}}{\partial \xi} D + \frac{\partial D}{\partial \xi} \Gamma_{xy} \right) \right] \quad (2.3)$$

$$V = v + \frac{1}{JD} \left[x_\xi \left(\frac{\partial \Gamma_{yy}}{\partial \eta} D + \frac{\partial D}{\partial \eta} \Gamma_{yy} \right) - x_\eta \left(\frac{\partial \Gamma_{yy}}{\partial \xi} D + \frac{\partial D}{\partial \xi} \Gamma_{yy} \right) \right. \\ \left. + y_\eta \left(\frac{\partial \Gamma_{xy}}{\partial \xi} D + \frac{\partial D}{\partial \xi} \Gamma_{xy} \right) - y_\xi \left(\frac{\partial \Gamma_{xy}}{\partial \eta} D + \frac{\partial D}{\partial \eta} \Gamma_{xy} \right) \right] \quad (2.4)$$

La búsqueda de los términos x_ξ , x_η , y_ξ y y_η se basó en derivar aproximaciones lineales; por ejemplo, para obtener y_η se buscaba una constante k tal que $y = k\eta$. Las derivadas restantes se buscaron evaluando los coeficientes de difusión y la batimetría sobre la posición de la partícula y luego usando diferencia finita hacia atrás.

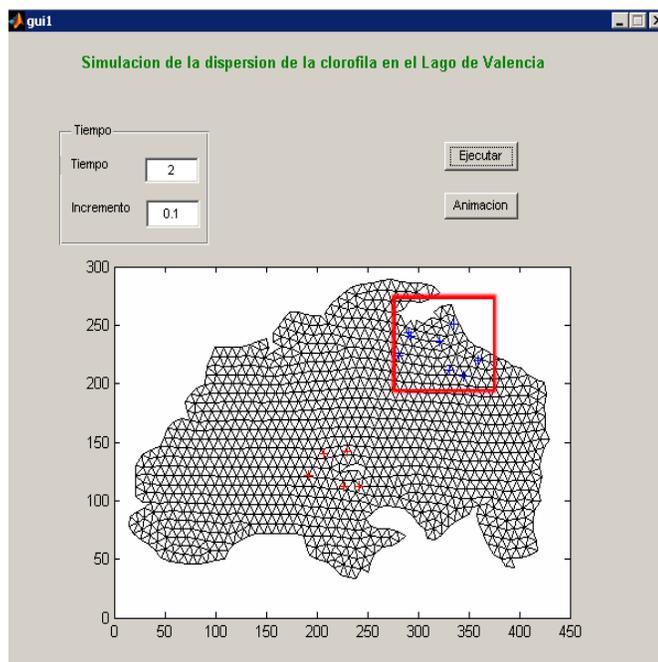
Una vez encontradas las velocidades modificadas se calculan las velocidades difusivas. Ambas permiten encontrar el desplazamiento de la partícula después de un instante de tiempo, así como se precisa en la sección (1.3). Este procedimiento se repite iterativamente por cada partícula a rastrear.

Adicionalmente, se implementaron restricciones que permitieron agregar un comportamiento realista en el traslado de las partículas.

2.6.1. Comportamiento de las partículas

Para darle un enfoque realista y conservativo al movimiento de las partículas, se propuso lo siguiente:

Cuando las partículas llegan al borde del lago, estas deben rebotar o con cierta probabilidad quedarse asentadas.



En la figura anterior, se puede apreciar que luego de un instante de tiempo, se les impide a las partículas salirse del dominio del lago; como consecuencia estas rebotan o se quedan asentadas en la orilla con una probabilidad de 0.05.

Para lograr este avance, se utilizaron funciones del paquete DistMesh, específicamente la función que señala al lago, cuyo rol es evitar la creación de nodos fuera del mismo. Tal función se define como

$$d(x) = \begin{cases} < 0 & x \in \Omega \quad (\text{interior de } \Omega) \\ 0 & x \in \Gamma \quad (\text{Borde de } \Omega) \\ > 0 & x \in \Omega \quad (\text{exterior de } \Omega). \end{cases} \quad (2.5)$$

$d : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ determina que tan cerca está un punto $x \in \mathbb{R}^n$ del borde del conjunto Ω .

Si en un instante de tiempo, $d(x) > 0$ para una partícula con la posición x , entonces las velocidades se invierten para simular un rebote en la orilla. Simultáneamente se genera un número aleatorio r siguiendo una distribución uniforme en $[0, 1]$; según el valor de r , se decide si la partícula se queda asentada en la orilla en vez de rebotar. Es decir,

```
Data: Posición  $x$  y número  $r$ 
if  $d(x) > 0$  then
  if  $r \leq 0,05$  then
    | La partícula se queda asentada
  else
    | La partícula rebota
```

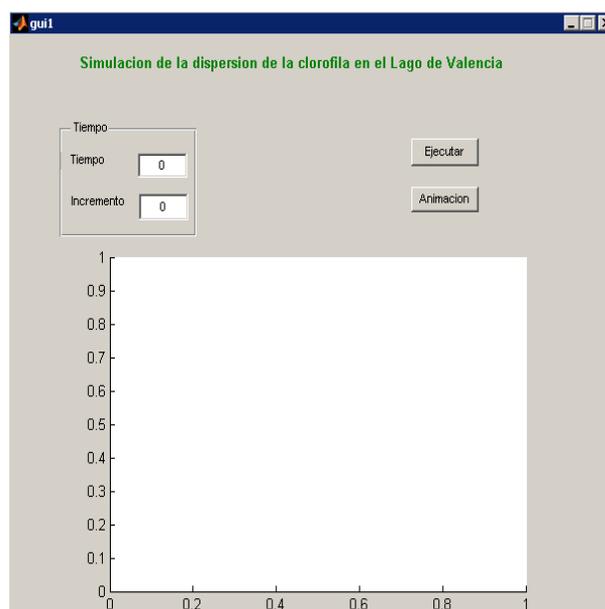
Como complemento, se agregó una fuente de partículas situada en la desembocadura del río Los Guayos; su funcionalidad es incrementar el número de partículas en cada instante de tiempo con una probabilidad de 0.9

Finalmente, se adapta el código del modelo a una interfaz gráfica, con la finalidad de que el mismo pueda ser ejecutado con facilidad.

2.7. Interfaz Gráfica para el Modelo

Antes de incorporar el programa a la GUI (graphical user interface), se hicieron todo tipo de pruebas con él hasta tener seguridad de que la funcionalidad del código era la requerida. Ya guardada la versión final del algoritmo, se colocaron los distintos trozos del mismo en la GUI, de modo que al hacer las pruebas sobre la GUI se lograron contrastar los resultados con los que obtenidos sin el uso de la interfaz. Por último, para certificar el correcto funcionamiento de la GUI, se hicieron pruebas sucesivas.

El diseño realizado para el modelo de estudio se puede detallar con la imagen de a continuación.



En el diseño de la interfaz, se puede observar que se cuenta con la posibilidad de elegir el tiempo en que se desea realizar la simulación, la misma se realizará por partes, dependiendo del tamaño de los incrementos de tiempo; estos también son de elección del usuario. Ya elegidos los parámetros referentes al tiempo, se puede accionar el botón de ejecución del algoritmo situado a la derecha de la parte superior.

Al presionar el botón de **Ejecutar** se realizaran los siguientes pasos:

1. Se superpone una malla triangular uniforme sobre el Lago de Valencia.
2. Se cargarán los campos de georreferenciación del Lago.
3. Se cargarán los campos de velocidades respectivos al Lago.
4. Se cargarán las coordenadas curvilíneas.
5. Se cargarán los coeficientes de difusión.
6. Se cargará la batimetría del Lago.
7. Se cargarán las ubicaciones de las partículas que se desean rastrear.
8. Se procede a rastrear cada partícula de manera iterativa durante el tiempo requerido.

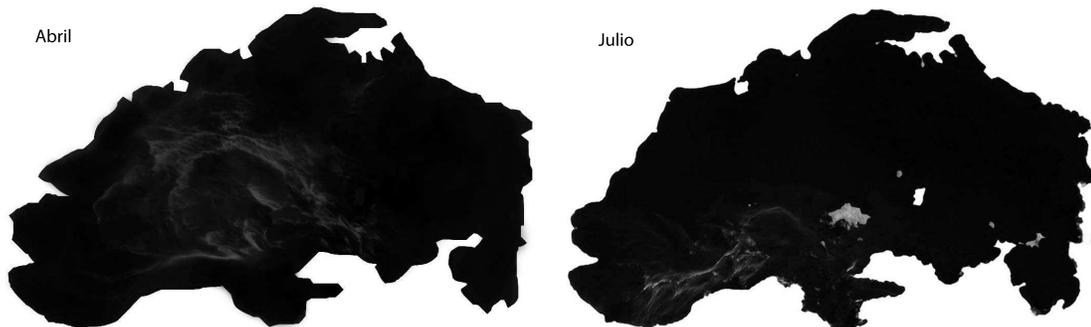
Cuando la ejecución culmina emerge una ventana notificandole este hecho al usuario y se ofrece la opción de guardar en un archivo la animación que muestra el trayecto de las partículas, a la cual se puede acceder presionando el botón **Animación**.

Capítulo 3

Fase Experimental

En la fase de prueba del modelo, se planteó comparar la dispersión de la clorofila obtenida mediante la simulación con la observada en imágenes satelitales.

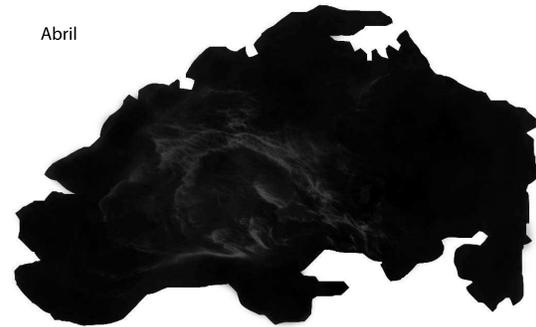
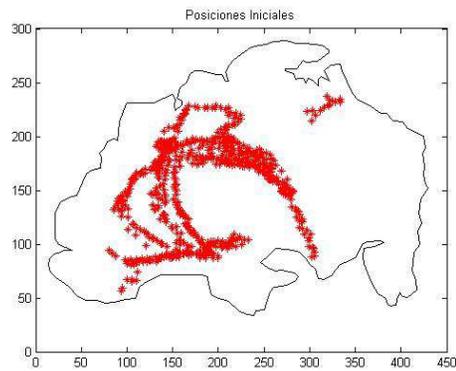
Las imágenes fueron captadas por el satélite Landsat a una resolución espacial de 240 metros en los meses de Abril y Julio del año 2002.



La implementación y prueba del modelo se realizó en una computadora portátil con un procesador de 1.6 GHz y 0.99 GB de RAM, se hizo uso del programa de cálculo matemático MatLab del año 2007.

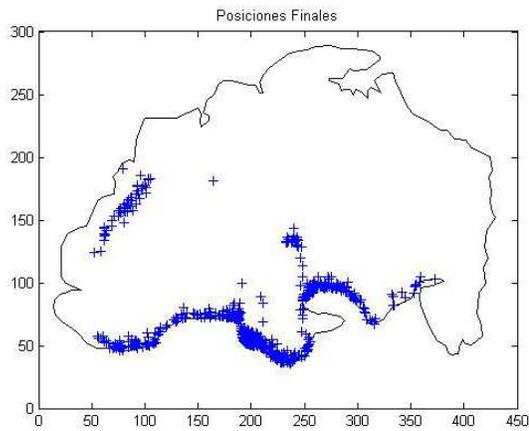
3.1. Prueba del Modelo

En primer lugar se recreó la condición inicial, posicionando 600 partículas de manera de que su distribución fuera semejante a la observada en la imagen del lago captada en Abril del 2002.

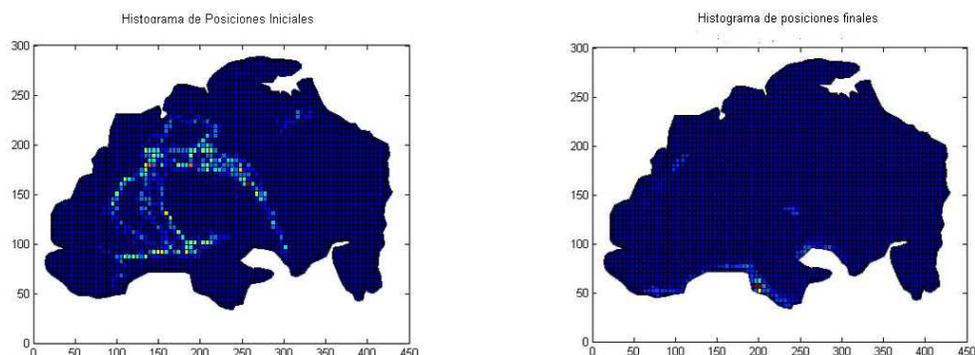


El tiempo en horas que transcurrió desde comienzos de Abril hasta comienzos de Julio del 2002, fue de 2160 horas, se colocó como incremento de tiempo 5 horas; por lo tanto el algoritmo realizó 432 iteraciones, cada una con una duración aproximada de 20 minutos, es decir, la ejecución tardó 6 días.

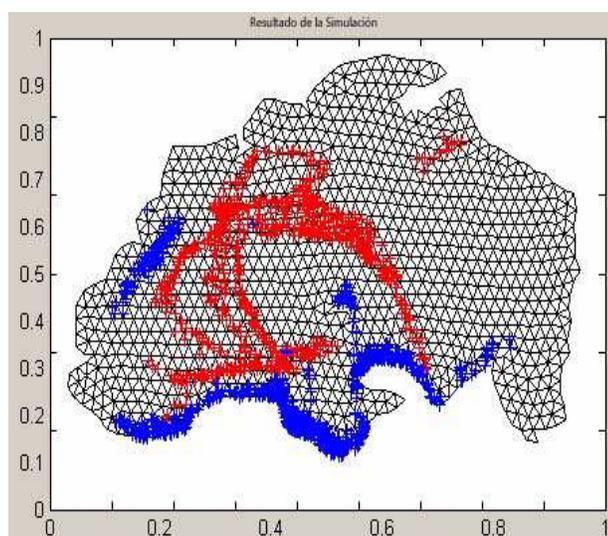
Los resultados se pueden apreciar en las gráficas de a continuación:



La densidades obtenidas por la simulación fueron:



El modelo muestra los resultados con el estilo de la gráfica que sigue; en la misma, se identifican las posiciones iniciales con el color rojo y las finales con el color azul.



En la gráfica anterior, se puede notar que las partículas se desplazaron hacia la parte inferior del lago, algunas se asentaron a orillas de la isla y otras en la parte superior del lado izquierdo del lago, la cantidad de partículas se incrementó de 600 a 732.

Las velocidades de las aguas del lago y los coeficientes de difusión son factores fundamentales; estos influyen directamente en el desplazamiento de las partículas. Otro elemento importante, es la función de señalamiento del lago, pues impidió que las partículas se escaparan del dominio que conforma el lago.

La densidad final, se asemeja a la ubicación de la clorofila observada en la imagen de julio 2002, debido a que las partículas se posicionan en la parte inferior izquierda del lago. Una predicción con más certeza puede ser obtenida tomando un intervalo de tiempo más pequeño

y tratando que la fecha de toma de velocidades coincida con la fecha en que se capturen las imágenes.

3.2. Continuidad de la Investigación

Para un desarrollo a futuro de la investigación, se definen las siguientes perspectivas:

1. Determinar las concentraciones de clorofila a través de la observación de imágenes satelitales.
2. Describir la evolución de la mancha de la clorofila por medio del modelo y corregirla con los valores observados.
3. Calcular por medio de un método numérico la concentración o la densidad de probabilidad de dicha concentración.
4. Ver si existen épocas del año en donde hay un aumento considerable de la concentración de clorofila. Si se determina este cambio correlacionarlo con otros eventos: climáticos o ambientales.

Conclusiones

Adaptar el modelo a la dispersión de la clorofila del Lago de Valencia, fue un proceso largo por la búsqueda de las condiciones necesarias para su implementación. A pesar de esto, la metodología aplicada en la investigación fue concisa y bien fundamentada. Para darle continuidad a este estudio, se recomienda lo siguiente:

- Utilizar imágenes satelitales del Lago de Valencia tomadas con pocos días de diferencia.
- La data de la concentración de la clorofila y las velocidades de las aguas del lago deben coincidir con la fecha de la captura de las imágenes.
- Buscar métodos alternativos que permitan crear o manipular de manera practica mallas curvilíneas.

Los modelos de rastreo de partículas, como el construido, son eficientes por mostrar mediante animaciones el trayecto completo de un fluido. Se espera que este trabajo de investigación motive la elaboración de otros similares y que sea una herramienta que contribuya a minimizar los daños ocasionados por la contaminación, mediante la elaboración de planes de contingencia.

Bibliografía

- [1] Amoretti Vidal Jesús Esteban, *Solución numérica de la ecuación de Laplace y su aplicación a potenciales eléctricos*, Universidad Nacional de Ingeniería, Perú, 2007, pp.1-5.
- [2] *An Introduction to Mesh Generation*, Technical University of Denmark, 2009, pp. 6-44, Página Web: <http://www2.imm.dtu.dk/~apek/DGFEMCourse2009/Lecture06.pdf>
- [3] *Curso Introductorio a la Geomática*, Instituto de Ingeniería, Venezuela, 2009, pp. 1-67.
- [4] E. B. Welch, T. Lindell, *Ecological effects of wastewater: applied limnology and pollution effects*, Spon Press, London, 1980.
- [5] G. S. Bhat y A. Krothapalli, *Simulation of a Round Jet and a Plume in a Regional Atmospheric Model*, AMS Journals, Vol. 128, The Florida State University, 2000.
- [6] G. T. Csanady, *Turbulent diffusion in the environment*, Springer, Luwer Academic Publishers, Holland, 1973.
- [7] I. A. Fernández, *Las Coordenadas Geográficas y la Proyección UTM*, Universidad de Valladolid, España, [s.a], pp. 4-15.
- [8] J. A. Fay, *Mecánica de Fluidos*, Compañía Editorial Continental, México, 1996.
- [9] J. León, *Aplicación del cálculo estocástico en el modelaje del esparcimiento de contaminantes en la superficie del agua*, Tutores: (M. Colina y J. R. León), Universidad Central de Venezuela, 2008.
- [10] M. S. Milgram, *Does a point lie inside a polygon?*, Journal of Computational Physics, Vol. 84, 1989.
- [11] Isabel Albarracín, Gabriela Pío, Ruth Salomón y Marcela Cravero, *Inhibición del Crecimiento de Chlamydomonas SP. por la Sal Isopropilamina de N-(Fosfonometil)Glicina*, Universidad Nacional de la Patagonia, Argentina, [s.a], pp. 3-4.
- [12] Remacle Jean Francois, *An introduction to Mesh Generation*, Department of Civil Engineering, Université catholique de Louvain, Belgium, [s.a], pp. 1-40.
- [13] Reynolds C. S, *The ecology of freshwater phytoplankton*, Cambridge Univ. Press, p. 384, 1984.

-
- [14] R. V. Pearson, R. W. Barber, *Modelling depth-integrated contaminant dispersion in the Humber Estuary using a Lagrangian particle technique*, University of Salford, United Kingdom, 1995.
- [15] T. Mikosch, *Elementary Stochastic Calculus*, University of Groningen, World Scientific, Holanda, 1998.
- [16] Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, WPS, 1996.
- [17] Yuan-Hui Li, *Vertical Eddy Diffusion Coefficient in Lake Zürich*, Birkhauser Verlag Basel, Vol 35, EAWAG, ETH, 1973.
- [18] Y. Obayashi, T. Isobe, A. Subramanian, S. Suzuki and S. Tanabe, *Teasing out the Non-Linearity in the POPs-Phytoplankton Bioconcentration Processes*, Centre for Marine Environmental Studies, Japón, 2009, pp. 11-18.