



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
POSTGRADO EN MODELOS ALEATORIOS

UN MODELO DE REPRESENTACIÓN DE ESPACIO DE ESTADOS  
PARA LA INTERRELACIÓN ENTRE LA INFLACIÓN Y  
EL CRECIMIENTO ECONÓMICO EN VENEZUELA

*Trabajo de Grado de Maestría presentado ante la  
ilustre Universidad Central de Venezuela por la Lic.  
en Matemáticas Ovando Begui, para optar al título  
de Magister Scientiarium en Modelos Aleatorios.  
Tutor: Doctor Barráez Daniel.*

Caracas - Venezuela  
Febrero 2012

## *Dedicatoria*

*Esta dedicado a:*

*Dios.*

*Padre, madre, hermanos, hermanas, sobrinos y madrina.*

*Mis profesores Bárcenas Diómedes, Barrález Daniel, Castro Glaysar y Uzcateguiz Carlos.*

*Todos aquellos amigos y amigas que me tienen en su corazón.*

---

---

## *Agradecimiento*

Agradecer es un gesto muy puro, bello y a veces difícil de hacer... Sí, mis ojos están a punto de soltar lágrimas de alegría ... Primero quiero agradecer a Dios por darme fortaleza y llenarme cada día de amor e inspirarme en cada momento. A mi familia completa por su amor, cariño, confianza, paciencia y tolerancia, gracias por estar siempre dando a mis bases estabilidad, ellos son Contreras María Benilde, Ovando Guido Amando, Echenique Francis, Duarte Roque, Duarte Rocio, Duarte Rosmar, Ovando Guibi, Ovando María, Ovando Veronica, Ovando Guido Andres, Labrador Wladimir, Hernandez Daniel, Labrador Ivor, Labrador Isaías y Hernandez Emmanuel.

A las personas que me dieron la luz para llegar y aprender el mundo de las matemáticas y de los modelos aleatorios; a la Facultad de Ciencias a sus profesores quienes nos brindan sus conocimientos para cada día crecer más y realizar nuestro aporte a la investigación, muy especialmente a Castro Glaysar, Ludeña Carenne y Barráez Daniel.

Barráez Daniel y Pagliacci Carolina gracias por los conocimientos aportados dandome la bienvenida a este inicio, al conocimiento de la economía venezolana, por su colaboración, disposición, estímulo y la amabilidad de realizar esta investigación junto a su equipo de trabajo en el BCV, por cultivar en mí la paciencia, tolerancia, confianza y fortaleza. Aprecio su amistad y su humildad.

Durante este proceso de crecimiento conocí personas especiales que cada día con sus gestos de cariño y ánimo, aportaron conocimiento en todo los ambitos, enriqueciendo mi bienestar y las capacidades intelectuales. Llenando poco a poco un espacio en mi corazón, brindando una sincera amistad. Como los son Balza Dayanna, Aray Jesser, Bastida Anny, Barreto Eduardo, a las hermanas Cardenas en especial Margoret, De la Hoz Claudia, Guevara Moraima, Hernandez Adriana, Paccione Roberto de Jesús, Paiva Albaro, Peña Eddre, Perdomo Mariela, Petaquero María Carlota, Pimstein Laura, Quijadas Paul, Ramírez Aryana y Anayra, Ramirez Maria Fabiola, Rivas Alvaro, Rodriguez Leidy, Villegas Bertha. También están Adames Maria de los Angeles, Arriojas Mercedes, Benito José, Colina Mairene, Escalona Jhony, Guevara Juan, Matamoro Leonardo, Salazar Dora,

---

ustedes tuvieron la disposición de leer este trabajo realizando las correcciones pertinentes, GRACIAS.

Al Banco Central de Venezuela por permitir realizar la pasantía y este trabajo de grado, en especial al equipo de trabajo de la Oficina de Investigaciones Económicas y el Departamento Modelos Económicos.

Al Fondo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovaciones, por otorgarme el financiamiento a través de la Misión Ciencia para la realización de estos estudios de Postgrado.

Pido disculpa por no colocar los nombres de los demás familiares y amigos ... sé que todos están plasmados en estas líneas.

Un paso más realizado, ahora falta es seguir el camino... A todos ustedes gracias por el apoyo.

---

UN MODELO DE REPRESENTACIÓN DE ESPACIO DE ESTADOS  
PARA LA INTERRELACIÓN ENTRE LA INFLACIÓN Y  
EL CRECIMIENTO ECONÓMICO EN VENEZUELA

LIC. BEGUI OVANDO  
UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA

*Resumen*

*En este trabajo se estima un modelo de espacio de estados para estudiar la dinámica de la interrelación entre la inflación y el producto interno bruto (PIB) en Venezuela, en el período comprendido desde 1991 hasta 2008. Se consideran una curva de Phillips y una ecuación de demanda agregada, que tienen como variables no observadas la inflación estructural y el producto potencial, permitiendo con ello, obtener estimaciones de la brecha del producto y la inflación estructural. La técnica de estimación del modelo combina el filtro de Kalman, con el algoritmo de Maximización de la Esperanza (EM) y el algoritmo de Newton-Ramphson*

*Palabras Clave: Representación de espacio de estados, filtro de Kalman, EM, curva de Phillips y la ecuación de demanda agregada.*

---

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>x</b>
<b>1. Representación de Espacio de Estados y Filtro de Kalman</b>	<b>1</b>
1.1. Representación de Espacio de Estados . . . . .	2
1.2. Filtro de Kalman y El Suavizado . . . . .	9
1.2.1. Filtro de Kalman . . . . .	12
1.2.2. Suavizado de Kalman . . . . .	16
1.3. Estimación de Máxima Verosimilitud. . . . .	17
<b>2. Algoritmo EM</b>	<b>19</b>
2.1. Representación de Espacio de Estados Simples . . . . .	21
2.2. Representación de Espacio de Estados Generales . . . . .	38
2.3. Maximizaciones Numéricas . . . . .	47
2.3.1. Algoritmo Newton-Raphson . . . . .	47
2.3.2. Algoritmo Sugerido por Durbin y Koopman . . . . .	48
<b>3. La Relación Producto e Inflación en la Economía Venezolana</b>	<b>50</b>

---

3.1. Representación de Espacio de Estados . . . . .	53
3.1.1. Análisis de la Brecha del PIB y de la Brecha Inflacionaria . . . . .	61
3.1.2. Análisis desde la Optica Económica de la Brecha del PIB y de la Brecha Inflacionaria . . . . .	73
<b>Conclusiones</b>	<b>81</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>84</b>
<b>A. Programas en Matlab</b>	<b>87</b>
A.1. Programas en Matlab . . . . .	87
<b>B. Gráficos</b>	<b>93</b>
B.1. Gráficos . . . . .	93
B.2. Coeficiente de Correlación . . . . .	107

---

# Índice de cuadros

2.1. <i>Propiedades</i> . . . . .	32
3.1. <i>Valores de los parámetros iniciales</i> . . . . .	56
3.2. <i>Valores de los parámetros estimados</i> . . . . .	57
3.3. <i>Ciclos Expansivo y Recesivo</i> . . . . .	61
3.4. <i>Inflación, el Producto y Sucesos Políticos-Económicos</i> . . . . .	64
3.5. <i>Resultados de la ecuación 3.1</i> . . . . .	69
3.6. <i>Resultados de la ecuación 3.2</i> . . . . .	71
B.1. <i>Coefficiente de Correlación</i> . . . . .	107

# Índice de figuras

3.1. Inflación & Inflación Estructural . . . . .	59
3.2. Producto & Producto Potencial . . . . .	60
3.3. Brecha Inflacionaria & Brecha del Producto . . . . .	65
3.4. Brecha del Producto & Variables Exógenas . . . . .	66
3.5. Inflación & Brecha del Producto . . . . .	67
3.6. Brecha Inflacionaria & Variables Exógenas . . . . .	68
3.7. Brecha PIB . . . . .	76
3.8. Brecha $\pi$ . . . . .	80
B.1. Crecimiento del Gasto Real del Sector Público ( $G_{t-1}$ ) . . . . .	94
B.2. Crecimiento de los Ingresos de las Exportaciones Petroleras ( $W_{t-2}$ ) . . . . .	95
B.3. Brechas del Producto . . . . .	96
B.4. Dinero Creado por el Sector Público ( $M_{t-2}$ ) . . . . .	97
B.5. Tasa de Depreciación de la Moneda ( $E_{t-1}$ ) . . . . .	98
B.6. Brecha Inflacionaria & Producto Rezagado . . . . .	99
B.7. Brecha del Producto Rezagado . . . . .	100

---

B.8. El Acervo Capital ( $k$ ) . . . . .	101
B.9. Cantidad de Trabajadores Empleados ( $l$ ) . . . . .	102
B.10. Exportaciones Petroleras ( $ep$ ) . . . . .	103
B.11. Ingresos Petroleros (Miles BsF) . . . . .	104
B.12. Logaritmo de los Ingresos Petroleros (Miles BsF) . . . . .	105

---

## Introducción

La representación de espacio de estados fue planteada originalmente como un método para resolver algunos problemas en ingeniería aeroespacial por Kalman (1960), con Bucy (1961) continuó aplicando este método en la misma área de la Ingeniería. La representación de espacio de estados permite modelar una extensa clase de problemas con variables parcialmente observables, cuya estimación (tanto de las variables no observadas como los parámetros del modelo) se puede efectuar de forma recursiva mediante el filtro de Kalman. Posteriormente se implementó este método como una herramienta a ser usada en áreas como la economía, medicina y ciencias del suelo, entre otros y figuran como sus aplicadores Harrison y Stevens (1976), Havery y Pierse (1984), Harrison y Todd (1983), Kitagawa y Gersh (1984), Shumway y Stoffer (1982), Jone (1984) Shumway (1985) [20].

En este tipo de modelo, el comportamiento del sistema en un momento dado del tiempo se describe a través de un conjunto de variables que forman el vector de estado (variables no observadas). Los sucesivos vectores de estado describen la evolución del sistema como función del tiempo.

Kalman (1960) a la vez que plantea el modelo señalado anteriormente, desarrolla el algoritmo denominado filtro de Kalman, que permite estimar el vector estado a partir de las variables observadas relacionadas con el vector, de forma que la estimación se actualiza cada vez que se dispone de nueva información. También permite evaluar la función verosimilitud de una forma simple y directa con todos los datos. Con los resultados obtenidos se puede aplicar un algoritmo de suavizado, como una extensión de la formulación original diseñada por Kalman, para obtener una estimación óptima del vector estado. En el capítulo 1 se expone la teoría de la representación de espacio de estados basados en Hamilton [10], Kim y Nelson [14], Shumway y Stoffer [20].

En el capítulo 2 trabajamos métodos de maximización numérica, entre ellos tenemos el algoritmo EM y Newton-Raphson, complementando el trabajo del capítulo 1 para obtener

---

---

la estimación de máxima verosimilitud de los parámetros de la representación de espacio de estados, siguiendo lo expuesto por Ghahramani y Hinton [8], Shumway y Stoffer [20].

Luego, en el capítulo 3 se usa el modelo económico propuesto por Pagliacci y Barráez (2008) [17], para desarrollar la técnica de representación de espacios de estados usando los fundamentos teóricos expuestos en los capítulos previos. Se utilizan las observaciones históricas de inflación y producto interno bruto (PIB) de Venezuela para formular una representación de espacio de estados de la curva de Phillips y la ecuación de demanda agregada. A la vez se obtendrá la estimación del producto potencial y la inflación estructural, cuyas variables juegan un papel importante para la comprensión de la dinámica de las fluctuaciones de la economía venezolana, haciendo uso del programa Matlab.

---

# Representación de Espacio de Estados y Filtro de Kalman

La representación de espacio de estados, es una herramienta ampliamente utilizada para modelar series temporales con componentes que no son observados; fue propuesta por Kalman (1960) [20]. El comportamiento del modelo en un momento dado del tiempo, se describe a través de un conjunto de variables que forman el vector de estado. Los elementos del **vector estado** son los componentes posiblemente no observables del modelo de la serie temporal.

Una vez que el modelo de serie temporal ha sido formulado en una representación de espacio de estados, el filtro de Kalman proporciona el medio para estimar los componentes no observados o **vector estado** a partir de magnitudes observadas relacionadas con éste, de forma que la estimación se actualice cada vez que se dispone de nueva información; también podemos emplear el algoritmo suavizado para obtener una estimación óptima del **vector estado** en cualquier punto de la muestra. Además el filtro de Kalman, permite calcular la función de verosimilitud a través de la descomposición del error de predicción, con lo cual, se lleva a cabo la estimación de los parámetros del modelo.

A continuación nos basamos en los autores Hamilton [10], Kim y Nelson [15], Shumway y Stoffer [20], para realizar una exposición más detallada de los aspectos fundamentales de la representación de espacio de estados, para posteriormente definir el filtro de Kalman.

## 1.1. Representación de Espacio de Estados

Una representación de espacio de estados de un modelo de serie temporal, es un par  $(y_t, x_t)$  de series de tiempos, donde  $y_t$  es un vector de variables observadas de dimensión  $(q \times 1)$  relacionada con el **vector estado** a través de la siguiente expresión, denominada *Ecuación de Observación*

$$y_t = A_t x_t + \Gamma_t u_t + v_t, \quad (1.1)$$

y  $x_t$  es el **vector de estado** de dimensión  $(p \times 1)$  que establece una relación con  $x_{t-1}$ , a través de la siguiente expresión, denominada

*Ecuación de Estado*

$$x_t = \Phi_t x_{t-1} + \Upsilon_t u_t + w_t. \quad (1.2)$$

con  $t$  variando en  $t = \{1, 2, \dots, T\}$ . Donde:

La matriz  $A_t$  de dimensión  $(q \times p)$  denominada matriz de observación o de medida, relaciona el vector  $y_t$  con el vector de estado  $x_t$ ; los elementos de esta matriz  $A_t$  pueden ser constantes o variables en el tiempo.

La matriz de  $\Phi_t$  de dimensión  $(p \times p)$  es de transición o de estado, también llamada matriz autoregresiva del vector de estado, además, se considerará el caso en que el valor absoluto de todos los valores propios de  $\Phi_t$  son estrictamente menores que uno.

El vector  $u_t$  es de dimensión  $(r \times 1)$  variables observadas predeterminadas o exógenas.

Las matrices  $\Gamma_t, \Upsilon_t$  son de dimensiones  $(q \times r)$  y  $(p \times r)$ , respectivamente.

Los vectores  $v_t$  y  $w_t$  son de perturbaciones no correlacionadas de dimensiones  $(q \times 1)$  y  $(p \times 1)$  respectivamente, asimismo cabe destacar que son ruidos blancos, ya que cumplen las siguientes condiciones:

El vector de perturbación  $v_t$  de la ecuación de observación tiene distribución normal con media cero y matriz de covarianza  $R_t$ ,

$$v_t \sim \mathbb{N}(0, R_t).$$

El vector de perturbación  $w_t$  de la ecuación de estado tiene distribución Normal con media cero y matriz de covarianza  $Q_t$ ,

$$w_t \sim \mathbb{N}(0, Q_t),$$

donde  $R_t$  y  $Q_t$  son matrices definidas positivas de dimensiones  $(q \times q)$  y  $(p \times p)$  respectivamente.

La ecuación de observación, llamada algunas veces ecuación de medida, establece una relación lineal entre las variables observadas y el vector estado; la ecuación de estado también designada ecuación de transición o evolución, que describe la dinámica de las variables no observadas; es decir, establece una relación lineal entre el vector estado actual con el vector estado del tiempo anterior, el vector de estado es un AR(1). Además, destacamos que el vector estado sigue un proceso de Markov de primer orden.

La representación de espacio de estados necesita dos condiciones iniciales, a saber:

1. Distribución Gaussiana (normal). El vector estado inicial,  $x_0$ , debe tener una distribución Gaussiana con media  $\mu_0$  y matriz de covarianza  $\Sigma_0$ . Es decir,

$$\mathbb{E}(x_0) = \mu_0, \quad \text{Var}(x_0) = \Sigma_0.$$

2. No correlación. Los términos de perturbación de la ecuación de observación y de la ecuación de estado junto con el vector estado inicial ( $x_0$ ) no deben estar correlacionados en ningún momento del tiempo, es decir,

$$\mathbb{E}(v_t w_r') = 0 \quad \text{para todo} \quad t, r = \{1, \dots, T\}, \quad (1.3)$$

$$\mathbb{E}(v_t x_0') = 0 \quad \text{para todo} \quad t = \{1, \dots, T\}, \quad (1.4)$$

$$\mathbb{E}(w_t x_0') = 0 \quad \text{para todo} \quad t = \{1, \dots, T\}. \quad (1.5)$$

Los vectores  $x'_t, w'_t, y'_t, v'_t$ <sup>1</sup> para todo  $t = \{0, 1, 2, \dots, T\}$  denotan la transpuesta de los respectivos vectores  $x_t, w_t, y_t, v_t$ .

Trabajaremos con una representación de espacio de estados con vector estado  $x_0$  y las matrices  $A, \Gamma, \Phi, \Upsilon, Q, R$ , no están en función del tiempo; veamos esa representación en (1.6) y (1.7):

**Ecuación de Observación:**

$$y_t = Ax_t + \Gamma u_t + v_t, \quad (1.6)$$

**Ecuación de Estado:**

$$x_t = \Phi x_{t-1} + \Upsilon u_t + w_t. \quad (1.7)$$

A partir de la ecuación (1.7) se obtiene la siguiente expresión (representación) del vector de estado  $x_t$  como función lineal de  $(x_0, u_1, w_1, \dots, u_t, w_t)$ ,

$$x_t = \Phi^t x_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \Phi^i (w_{t-i} + \Upsilon u_{t-i}), \quad \text{para } t = \{1, \dots, T\}. \quad (1.8)$$

De (1.3), (1.4), (1.5), tenemos que

$$\mathbb{E}(w_t x'_r) = 0, \quad \text{para todo } r = \{t-1, t-2, \dots, 0\} \quad (1.9)$$

tomando en cuenta que  $\mathbb{E}(w_t x'_0) = 0$ ,  $u_t$  es variable exógena o predeterminada y  $w_t \sim \mathbb{N}(0, Q_t)$  es un ruido blanco.

Siguiendo con el mismo orden de ideas y teniendo en consideración que  $\mathbb{E}(v_t x'_0) = 0$ , se observa que

$$\mathbb{E}(v_t x'_r) = 0 \quad \text{para } r = \{0, 1, \dots, T\}. \quad (1.10)$$

Tenemos que  $v_t$  es un ruido blanco y de (1.10), concluimos que

$$\mathbb{E}(v_t y'_r) = \mathbb{E}[v_t (Ax_r + \Gamma u_r + v_r)'] = 0, \quad \text{para } r = \{t-1, t-2, \dots, 0\}, \quad (1.11)$$

además de (1.3) y (1.9) también es evidente que,

$$\mathbb{E}(w_t y'_r) = 0, \quad \text{para } r = \{t-1, t-2, \dots, 0\}. \quad (1.12)$$

---

<sup>1</sup>Denota como vector o matriz transpuesta, según sea el caso, todo vector o matriz que contenga el símbolo ( $'$ ).

---

A continuación mostramos varios ejemplos de modelos de representación de espacio de estados de las series de tiempos, tal como AR(p) y media  $\mu$ .

**Ejemplo 1.1** Consideremos el siguiente modelo AR(p):

$$y_{t+1} - \mu = \phi_1(y_t - \mu) + \phi_2(y_{t-1} - \mu) + \dots + \phi_p(y_{t-p+1} - \mu) + \varepsilon_{t+1}$$

tal que,

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_r) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } t = r \\ 0 & \text{si } t \neq r. \end{cases}$$

Uno de los modelos de las representaciones de espacio de estados que puede tener este modelo AR(p), es la siguiente:

**Ecuación de Observación (n=1):**

$$y_t = Ax_t + \Gamma$$

$$y_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t - \mu \\ y_{t-1} - \mu \\ \vdots \\ y_{t-p+1} - \mu \end{pmatrix} + \mu,$$

**Ecuación de Estado (r=p):**

$$x_{t+1} = \Phi x_t + w_t.$$

$$\begin{pmatrix} y_{t+1} - \mu \\ y_t - \mu \\ \vdots \\ y_{t-p+2} - \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_{p-1} & \phi_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t - \mu \\ y_{t-1} - \mu \\ \vdots \\ y_{t-p+1} - \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

Las siguientes matrices detallan quienes son los diferentes componentes de la representación de espacio de estados:

$$x_t = \begin{pmatrix} y_t - \mu \\ y_{t-1} - \mu \\ \vdots \\ y_{t-p+1} - \mu \end{pmatrix}_{(p \times 1)}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_{p-1} & \phi_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{(p \times p)}$$

$$w_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{(p \times 1)}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{(p \times p)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{(1 \times p)}$$

$$y_t = y_t$$

$$R = 0$$

$$\Gamma = \mu.$$


---

La representación de espacio de estados mostrada en el ejemplo anterior no es única, pueden haber otras representaciones, como se observa en el ejemplo 1.2.

### Ejemplo 1.2 *Un modelo con componentes no observados*

*Una aplicación típica de los modelos de componentes no observados sería la descomposición del logaritmo del PIB real, en dos componentes independientes, una componente es de tendencia estocástica ( $y_{1t}$ ) y la otra es cíclica ( $y_{2t}$ ):*

$$y_t = y_{1t} + y_{2t} \quad (1.13)$$

$$y_{1t} = \delta + y_{1,t-1} + e_{1t} \quad (1.14)$$

$$y_{2t} = \Phi_1 y_{2,t-1} + \Phi_2 y_{2,t-2} + e_{2t} \quad (1.15)$$

$$e_{it} \sim \mathbb{N}(0, \sigma_i^2); \quad i = 1, 2 \quad i.i.d \quad (1.16)$$

$$\mathbb{E}(e_{1t}e_{2s}) = 0 \quad \text{para todo } t \text{ y } s \quad (1.17)$$

Utilizando el operador de rezago  $L^2$ , de modo que las raíces de  $(1 - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2) = 0$  se encuentran fuera del círculo unitario.

A continuación proponemos tres tipos diferentes de representación de espacio de estados:

**Representación 1:** Supongamos que  $y_{2t}$  es una variable no observada, es decir de estado. Utilizando el hecho que el primer componente ( $y_{1t}$ ) es un paseo al azar, podemos obtener una representación de espacio de estados de  $\Delta y_t$  como función de la segunda componente ( $y_{2t}$ )

---

<sup>2</sup>El operador de rezago  $L$  consiste en  $Ly_t = y_{t-1}$ ,  $L^2 y_t = y_{t-2}$ , etc

$$\Delta y_t = \Delta y_{1t} + \Delta y_{2t}, \quad (1.18)$$

$$\Delta y_t = \delta + \Delta y_{2t} + e_{1t}. \quad (1.19)$$

donde la *ecuación de observación* es

$$\Delta y_t = \delta + \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{2t} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + e_{1t}. \quad (1.20)$$

y la *ecuación de estado* es

$$\begin{pmatrix} y_{2t} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{2,t-1} \\ y_{2,t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{2t} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

**Representación 2:** Supongamos que  $y_{1t}$  es un vector de estado. Multiplicando en ambos lados del modelo (1.13) por  $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)$ , entonces podemos obtener una representación de espacio de estados para el modelo (1.13) en función de  $y_{1t}$ :

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)y_t = (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)y_{1t} + (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)y_{2t} \quad (1.22)$$

$$\implies y_t = (\phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2}) + (y_{1t} - \phi_1 y_{1,t-1} - \phi_2 y_{1,t-2}) + e_{2t} \quad (1.23)$$

la *ecuación de observación* es

$$y_t = \begin{pmatrix} 1 & -\phi_1 & -\phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{1,t-1} \\ y_{1,t-2} \end{pmatrix} + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + e_{2t}. \quad (1.24)$$

la *ecuación de estado* es

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{1,t-1} \\ y_{1,t-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{1,t-2} \\ y_{1,t-3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{1t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

**Representación 3:** Ahora sean  $y_{1t}$  y  $y_{2t}$  variables no observadas, es decir, ambos son componentes del vector estado, con:

*ecuación de observación*

$$y_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

*y ecuación de estado*

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & \phi_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \\ y_{2,t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

En la próxima sección se presentará cómo estimar los vectores de estado a través del algoritmo de Kalman, tomando en consideración que las matrices  $A, \Gamma, \Phi, \Upsilon, Q, R$  están dadas.

## 1.2. Filtro de Kalman y El Suavizado

El filtro de Kalman, es un proceso recursivo para estimar el vector estado  $x_t$ . También nos proporciona la estimación del error cuadrático medio de  $x_t$ , dado el conjunto de información considerado.

Dependiendo de la información que se utiliza tenemos el filtro y suavizado. El filtro, consiste en estimar  $x_t$  basado en la información disponible hasta el tiempo  $t$  y el suavizado estima  $x_t$  basado en toda la información disponible de la muestra, hasta el tiempo  $T$ .

Consideraremos que las matrices  $A, \Phi, \Upsilon, \Gamma, R, Q$ , las variables observadas  $\{y_1, y_2, \dots, y_T\}$  y las variables exógenas  $\{u_1, u_2, \dots, u_T\}$  están dadas. Asimismo, la siguiente notación se usará para formular el filtro de Kalman y el suavizado:

1.  $Y_t = \{y_1, \dots, y_t, u_1, \dots, u_t\}$  para  $t = \{1, 2, \dots, T\}$ .
2.  $x_t^s = \mathbb{E}(x_t|Y_s)$ , es la esperanza condicional de  $x_t$  dada las observaciones y variables exógenas hasta el tiempo  $s$  (el mejor predictor lineal de  $x_t$  dada  $Y_s$  y es la proyección lineal de  $x_t$  en  $Y_t$ ). El problema es llamado predicción si  $s < t$ , en cambio cuando  $s = t$  es llamado filtro y cuando  $s > t$  es llamado suavizado.
3.  $y_t^s = \mathbb{E}(y_t|Y_s)$ , es la predicción de  $y_t$ , si  $s < t$ .
4.  $\eta_t^s = y_t - y_t^s$ , es el error de predicción de  $y_t$ , si  $s < t$ . Por lo tanto  $\eta_t^s = y_t - Ax_t^s - \Gamma\mu_t$ .
5.  $P_{t_1, t_2}^s = \mathbb{E}\{(x_{t_1} - x_{t_1}^s)(x_{t_2} - x_{t_2}^s)'|Y_s\}$ , es la matriz de covarianza del error de predicción de  $x_t$ , condicionada por las observaciones y variables exógenas hasta el tiempo  $s$  ó la matriz del error cuadrático medio de predicción, si  $s < t$ . Se denota por  $P_{t_1}^s$  si  $t_1 = t_2$ .
6.  $f_t^s = \mathbb{E}\{(y_t - y_t^s)(y_t - y_t^s)'\}$ , es la matriz de covarianza del error de predicción de  $y_t$  condicionada por las observaciones y variables exógenas hasta el tiempo  $s$ , donde  $s < t$ .

Esta matriz  $f_t^s$  se emplea en el algoritmo de Kalman, para esto es conveniente demostrar que  $f_t^s$  tiene otra expresión igual a  $AP_t^sA' + R$ .

La demostración se inicia teniendo presente las siguientes ecuaciones

$$x_t = \Phi x_{t-1} + \Upsilon u_t + w_t, \quad (1.28)$$

$$y_t = Ax_t + \Gamma u_t + v_t, \quad (1.29)$$

$$y_{t-1} = Ax_{t-1} + \Gamma u_{t-1} + v_{t-1}. \quad (1.30)$$

El error de predicción de  $y_t$  es,

$$\begin{aligned} \eta_t^{t-1} &= Ax_t + \Gamma u_t + v_t - (Ax_t^{t-1} + \Gamma u_t) \\ &= Ax_t - Ax_t^{t-1} + v_t \\ &= A(x_t - x_t^{t-1}) + v_t. \end{aligned} \quad (1.31)$$

El error cuadrático medio  $\mathbb{E}(\eta_t^{t-1}\eta_t^{t-1'})$  es igual a,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ (A(x_t - x_t^{t-1}) + v_t)(A(x_t - x_t^{t-1}) + v_t)' \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ A(x_t - x_t^{t-1})(x_t - x_t^{t-1})'A' + A(x_t - x_t^{t-1})v_t' + v_t(x_t - x_t^{t-1})'A' + v_tv_t' \right] \\ &= A \mathbb{E}[(x_t - x_t^{t-1})(x_t - x_t^{t-1})']A' + A \mathbb{E}[(x_t - x_t^{t-1})v_t'] + \mathbb{E}[v_t(x_t - x_t^{t-1})']A' + \mathbb{E}[v_tv_t']. \end{aligned}$$

Sabemos que,

$$\begin{aligned} A \mathbb{E}[(x_t - x_t^{t-1})(x_t - x_t^{t-1})']A' &= AP_t^{t-1}A' \\ \mathbb{E}[v_tv_t'] &= R. \end{aligned}$$

Falta mostrar que,

$$\mathbb{E}[v_t(x_t - x_t^{t-1})'] = 0.$$

De la ecuación (1.30), despejamos  $x_{t-1}$

$$x_{t-1} = A^{-1}(y_{t-1} - \Gamma u_{t-1} + v_{t-1}),$$

luego, lo sustituimos en la ecuación (1.28)

$$x_t = \Phi A^{-1}(y_{t-1} - \Gamma u_{t-1} + v_{t-1}) + \Upsilon u_t + w_t,$$

por lo tanto,

$$x_t^{t-1} = \mathbb{E}(x_t | Y_{t-1}) = \mathbb{E}(\Phi A^{-1}(y_{t-1} - \Gamma u_{t-1} + v_{t-1}) + \Upsilon u_t + w_t | Y_{t-1}),$$

como  $\mathbb{E}(v_t) = 0$  y  $\mathbb{E}(w_t) = 0$  para todo  $t$ , se obtiene,

$$x_t^{t-1} = \Phi A^{-1}(y_{t-1} - \Gamma u_{t-1}) + \Upsilon u_t,$$

ahora,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[v_t(x_t - x_t^{t-1})'] &= \mathbb{E}[v_t(x_t - \Phi A^{-1}(y_{t-1} - \Gamma u_{t-1}) - \Upsilon u_t)], \\ \mathbb{E}[v_t(x_t - x_t^{t-1})'] &= \mathbb{E}[v_t x_t' - v_t(y_{t-1} - \Gamma u_{t-1})'(\Phi A^{-1})' - v_t(\Upsilon u_t)], \end{aligned}$$

de (1.10), (1.11) y  $\mathbb{E}(v_t) = 0$ , se observa que  $\mathbb{E}[v_t(x_t - x_t^{t-1})'] = 0$ , en consecuencia se obtiene que  $f_t^{t-1} = AP_t^{t-1}A' + R$ .

---

### 1.2.1. Filtro de Kalman

El filtro de Kalman es un algoritmo cuya iteración fundamental consiste en dos etapas, una es de predicción y la otra es actualización. El paso de predicción consiste en la siguiente identidad

$$x_{t+1}^t = \Phi x_t^t + \Upsilon u_t, \quad (1.32)$$

$$y_{t+1}^t = A x_{t+1}^t + \Gamma u_{t+1}. \quad (1.33)$$

Se obtiene la ecuación (1.32) al tomar la esperanza en ambos lado de la ecuación (1.28) condicionada por  $Y_t$ ,

$$x_{t+1}^t = \Phi x_t^t + \Upsilon u_t + \mathbb{E}(w_t | Y_t),$$

y el último sumando del lado derecho de la igualdad anterior es nulo, en virtud de la ecuación (1.12). La ecuación (1.33) se obtiene de manera similar combinando las ecuaciones (1.11) y (1.29).

El paso de predicción también incluye la siguiente igualdad  $P_{t+1}^t = \Phi P_t^t \Phi' + Q$ , que se obtiene de (1.7), (1.33) y usando que  $w_t \sim \mathbb{N}(0, Q)$ , observemos cómo

$$\begin{aligned} P_{t+1}^t &= \mathbb{E}\{(x_{t+1} - x_{t+1}^t)(x_{t+1} - x_{t+1}^t)'\} \\ &= \mathbb{E}\{[\Phi(x_t - x_t^t) + w_{t+1}][\Phi(x_t - x_t^t) + w_{t+1}]'\} \\ &= \mathbb{E}\{\Phi(x_t - x_t^t)(x_t - x_t^t)'\Phi' + \Phi(x_t - x_t^t)w_{t+1}' + w_{t+1}(x_t - x_t^t)'\Phi' + w_{t+1}w_{t+1}'\} \\ &= \Phi P_t^t \Phi' + Q. \end{aligned}$$

Así damos por terminado la demostración del paso de predicción. Para demostrar el paso de actualización se remite a Shumway y Stoffer [20].

#### Algoritmo de Kalman

En el algoritmo de Kalman en la representación de espacio de estados (1.6) y (1.7), se suponen las siguientes condiciones iniciales:

- $x_0^0 = \mu_0$  y  $P_0^0 = \Sigma_0^0$ .

- Las matrices  $\Phi, \Upsilon, A, \Gamma, Q, R$ , están dadas

Aplicación

Paso I: **Inicializar**

- Predicción, para  $t = 1$

$$x_1^0 = \Phi x_0^0 + \Upsilon u_t,$$

$$y_1^0 = Ax_1^0 + \Gamma u_1$$

el error de predicción

$$\eta_1^0 = (y_1 - Ax_1^0 - \Gamma u_1).$$

- Matrices de covarianzas de los errores de predicciones,

$$P_1^0 = \Phi P_0^0 \Phi' + Q$$

$$f_1^0 = AP_1^0 A' + R.$$

Paso II: **La ganancia de Kalman**

$$K_t = P_t^{t-1} A' [f_t^{t-1}]^{-1}.$$

La ganancia de Kalman a tiempo  $t$  es un operador lineal, que nos permite calcular  $x_t^t$  como expresión lineal de  $x_t^{t-1}$  y el error de predicción  $\eta_t^{t-1}$ .

Paso III: **Actualización (Filtro) y su error**

$$x_t^t = x_t^{t-1} + K_t(\eta_t^{t-1}),$$

$$P_t^t = [I - K_t A] P_t^{t-1},$$

Paso IV: **Predicción**

---

- Predicción para  $t > 1$

$$\begin{aligned}x_{t+1}^t &= \Phi x_t^t + \Upsilon u_t, \\y_{t+1}^t &= Ax_{t+1}^t + \Gamma u_{t+1}\end{aligned}$$

el error de predicción

$$\eta_{t+1}^t = y_{t+1} - y_{t+1}^t.$$

- Matrices de covarianza de los errores de predicciones

$$\begin{aligned}P_{t+1}^t &= \Phi P_t^t \Phi' + Q, \\f_{t+1}^t &= AP_{t+1}^t A' + R.\end{aligned}$$

Repetimos el paso II hasta el paso IV para  $t = \{2, \dots, n\}$ . De esta manera se estima el vector estado y viene representado en este algoritmo como  $x_t^t$ .

Cuando el modelo de representación de espacio de estados no tiene las condiciones iniciales ( $x_0^0 = \mu_0$  y  $P_0^0 = \Sigma_0$ ) para la aplicación del algoritmo de Kalman, estas se pueden calcular según sea el caso, los cuales son demostrados a continuación:

- *Caso 1:* Cuando el modelo es estable.

Si el modelo es estable, entonces es estacionario. Una condición necesaria y suficiente para que el modelo sea estable, es que los valores propios de  $\Phi$  deben ser estrictamente menor que uno.

Por lo tanto para obtener  $x_0^0$ , es a través de la esperanza no condicionada en la ecuación (1.7)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(x_t) &= \mathbb{E}(\Phi x_{t-1} + \Upsilon u_t + w_t), \\ \mathbb{E}(x_t) &= \Phi \mathbb{E}(x_{t-1}) + \Upsilon \mathbb{E}(u_t) + \mathbb{E}(w_t),\end{aligned}$$

como la esperanza de  $x_t$  es no condicionada y estacionaria, tenemos que

$$(I - \Phi)\mathbb{E}(x_t) = \Upsilon \mathbb{E}(u_t),$$


---

recordando que  $x_t$  es estable, entonces  $(I - \Phi)$  no es singular, por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(x_t) &= (I - \Phi)^{-1}\Upsilon\mathbb{E}(u_t) \\ x_0^0 &= (I - \Phi)^{-1}\Upsilon\mathbb{E}(u_t).\end{aligned}$$

□

Observemos como se obtiene  $P_0^0$  en el caso que no se tenga la variable exógena ( $u_t$ ) a través de la matriz de covarianza del error cuadrático medio no condicionada.

$$\begin{aligned}P_t^t &= Cov(x_t) \\ &= Cov(\Phi x_{t-1} + w_t) \\ &= \Phi Cov(x_{t-1})\Phi' + Cov(w_t),\end{aligned}$$

entonces

$$P_t^t = \Phi Cov(x_{t-1})\Phi' + Cov(w_t),$$

como la matriz de covarianza de  $x_t$  no condicionada es estacionaria se obtiene que,

$$\begin{aligned}P_0^0 &= \Phi Cov(x_0)\Phi' + Q \\ &= \Phi P_0^0\Phi' + Q,\end{aligned}$$

aplicando el operador  $vec$ <sup>3</sup> y el producto Kronecker<sup>4</sup> [13], se tiene que

$$\begin{aligned}vec(P_0^0) &= vec(\Phi P_0^0\Phi') + vec(Q), \\ vec(ABC) &= (C' \otimes A)vec(B),\end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Sea  $A = (a_1, \dots, a_n)$  una matriz de dimensión  $(m \times n)$ . El operador  $vec$  transforma a la matriz  $A$  en un vector de dimensión  $(mn \times 1)$ , es decir,

$$vec(A) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

<sup>4</sup>Sean  $A$  y  $B$  matrices de dimensiones  $(m \times n)$  y  $(p \times q)$  respectivamente, entonces al aplicarle el producto Kronecker se transforma en una matriz de dimensión  $(mp \times np)$ , es decir,

$$A \otimes B := \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}.$$


---

en consecuencia,

$$\begin{aligned} \text{vec}(P_0^0) &= (\Phi \otimes \Phi)\text{vec}(P_0^0) + \text{vec}(Q) \\ (I - \Phi \otimes \Phi)^{-1}\text{vec}(P_0^0) &= \text{vec}(Q) \\ \text{vec}(P_0^0) &= (I - \Phi \otimes \Phi)^{-1}\text{vec}(Q). \end{aligned}$$

□

- *Caso 2:* Cuando  $x_t$  no sea estacionaria.

En el caso que  $x_t$  no sea estacionaria en la ecuación (1.7),  $x_0^0$  y  $P_0^0$  se estiman a través del método de máxima verosimilitud, junto a otros parámetros por estimar y luego podemos ejecutar el filtro, fijando  $x_0^0 = \hat{x}_0^0$  y  $P_0^0 = \text{Cov}(\hat{x}_0^0)$ .

### 1.2.2. Suavizado de Kalman

El suavizado nos ofrece una mejor estimación del vector estado en cualquier instante de tiempo con toda la información de la variable observada (muestra). Así pues, mientras el filtro de Kalman estima sobre el presente y pasado, y la predicción depende del pasado, el suavizado implica que cada valor estimado es una función que depende del presente, futuro y pasado. Es importante indicar que los valores iniciales ( $x_n^n$  y  $P_n^n$ ) para el suavizado se obtienen de la última iteración del filtro de Kalman y la diferencia entre  $P_t^n$  y  $P_t^{t-1}$  mide la ganancia obtenida con el suavizado. A continuación presentaremos el algoritmo del suavizado de Kalman.

#### El Suavizado de Kalman

El suavizado de Kalman es

$$x_{t-1}^n = x_{t-1}^{t-1} + J_{t-1}(x_t^n - x_{t-1}^{t-1}),$$

$$P_{t-1}^n = P_{t-1}^{t-1} + J_{t-1}(P_t^n - P_t^{t-1})J_{t-1}'$$

donde el tiempo  $t = \{n, n-1, \dots, 1\}$  y

$$J_{t-1} = P_{t-1}^{t-1} \Phi' [P_t^{t-1}]^{-1}.$$

Las matrices  $K_t$ ,  $J_t$  y  $P_n^n$  se computan durante la ejecución del algoritmo de Kalman (tanto el filtro como el suavizado). Las siguientes identidades serán requeridas en la implementación del EM.

$$P_{n,n-1}^n = (I - K_n A_n) \Phi P_{n-1}^{n-1}$$

para  $t = \{n, n-1, \dots, 2\}$

$$P_{t-1,t-2}^n = P_{t-1}^{t-1} J'_{t-2} + J_{t-1} (P_{t,t-1}^n - \Phi P_{t-1}^{t-1}) J'_{t-2}.$$

### 1.3. Estimación de Máxima Verosimilitud.

En esta sección plantaremos el problema de estimación del vector de parámetros de la representación de espacio de estados, mediante el método de estimación de máxima verosimilitud (MLV); que elige como estimaciones aquellos valores de los parámetros que maximizan la función de verosimilitud. Siendo el vector de parámetros  $\Theta = \{\mu_0, \Sigma_0, \Phi, Q, R, A, \Upsilon, \Gamma\}$  y la representación de espacio de estados esta expresada en (1.6) y (1.7). El error de predicción es proporcionado por el algoritmo del filtro de Kalman y se obtiene en

$$\epsilon_t = (y_t - Ax_t^{t-1} - \Gamma u_t) = \eta_t^{t-1},$$

con

$$\eta_t^{t-1} \sim \mathbb{N}(0, \Sigma_t)$$

y

$$\Sigma_t = AP_t^{t-1} A' + R = f_t^{t-1}.$$

Entonces, la verosimilitud  $L_Y(\Theta)$  viene dada por:

$$-\ln L_Y(\Theta) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \ln |\Sigma_t(\Theta)| + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \epsilon_t(\Theta)' \Sigma_t(\Theta)^{-1} \epsilon_t(\Theta).$$

Dado que  $\epsilon_t(\Theta) \sim \mathbb{N}(0, \Sigma_t(\Theta))$ , independientes para todo  $t = \{1, 2, \dots, n\}$ . Entonces, la función de densidad de probabilidad es:

$$\begin{aligned} f(\epsilon_t(\Theta)) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma_t(\Theta)|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\epsilon_t(\Theta))' \Sigma_t(\Theta)^{-1} (\epsilon_t(\Theta))\right] \\ \ln(f(\epsilon_t(\Theta))) &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln |\Sigma_t(\Theta)| - \frac{1}{2} (\epsilon_t(\Theta))' \Sigma_t(\Theta)^{-1} (\epsilon_t(\Theta)). \end{aligned}$$

Luego la verosimilitud  $L_Y(\Theta)$  es:

$$\sum_{t=1}^n \ln(f(\epsilon_t(\Theta))) = -\frac{n^2}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n [\ln |\Sigma_t(\Theta)| + (\epsilon_t(\Theta))' \Sigma_t(\Theta)^{-1} (\epsilon_t(\Theta))]$$

multiplicando por  $-1$

$$-\sum_{t=1}^n \ln(f(\epsilon_t(\Theta))) = \frac{n^2}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n [\ln |\Sigma_t(\Theta)| + (\epsilon_t(\Theta))' \Sigma_t(\Theta)^{-1} (\epsilon_t(\Theta))],$$

eliminando el valor constante  $-\frac{n^2}{2} \ln(2\pi)$ , se obtiene que

$$-\sum_{t=1}^n \ln(f(\epsilon_t(\Theta))) = -\ln L_Y(\Theta).$$

El máximo de ésta función de verosimilitud, no se puede calcular de manera cerrada, computando los ceros de su derivada. Es necesario realizar maximizaciones numéricas. Por esto, en este trabajo se considerarán dos tipos de algoritmos para maximizar la función de verosimilitud, a saber Newton-Rapson, EM o la combinación de ambos algoritmos, cuya descripción se exponen en el próximo capítulo.

## Algoritmo EM

El algoritmo EM (Maximización de la Esperanza) es un método general para calcular el estimador de máxima verosimilitud de los parámetros de una distribución de probabilidad, cuando parte de la información no es observada. Este algoritmo fue desarrollado por Dempster en 1977. Ahora expondremos de una manera general el algoritmo EM de acuerdo con lo expuesto por Ghahramani y Hinton [8], Shumway y Stoffer [20].

Sea el conjunto de datos completos  $(X_n, Y_n)$ , donde los datos  $Y_n = \{y_1, \dots, y_t, \dots, y_n\}$  son observados, pero los datos  $X_n = \{x_1, \dots, x_t, \dots, x_n\}$  no son observados y  $\Theta$  es el conjunto de parámetros de la representación de espacio de estados, entonces la función de densidad conjunta de  $(X_n, Y_n)$  es

$$f((y, x)|\Theta) = f(x|y, \Theta)f(y|\Theta).$$

La función de densidad de  $Y_n$  está relacionada con la función de densidad conjunta de  $(X_n, Y_n)$  por

$$f(y|\Theta) = \int f((x, y)|\Theta)dx,$$

usando la información de  $f(y|\Theta)$ , la función de densidad de  $X_n$  dado  $Y_n$  y  $\Theta$  es

$$f(x|y, \Theta) = f((x, y)|\Theta) \Big| \int f((x, y)|\Theta)dx.$$

La función de verosimilitud de la data completa  $(X_n, Y_n)$  es,

$$L_{X_n, Y_n}(\Theta) = L(\Theta|Y_n, X_n) = \prod_{t=1}^n f(y_t, x_t|\Theta).$$

Se considera  $X_n$  como variable aleatoria, por lo que la función de verosimilitud  $L_{X_n, Y_n}(\Theta)$  es variable aleatoria, por lo tanto se puede aplicar la esperanza condicional a  $L_{X_n, Y_n}(\Theta)$  dado  $Y_n$  y  $\Theta^{j-1}$ , lo cual se denota como

$$Q(\Theta|\Theta^{j-1}) = \mathbb{E}[\ln L_{X_n, Y_n}(\Theta)|Y_n, \Theta^{j-1}].$$

La esperanza es tomada con respecto a la función de densidad condicional de  $X_n$  dado  $Y_n$ ,  $f(x|y, \Theta)$ , es decir

$$Q(\Theta|\Theta^{j-1}) = \int \ln(L_{X_n, Y_n}(\Theta)|Y_n, \Theta^{j-1})f(x|y, \Theta)dx.$$

Luego para  $Q(\Theta|\Theta^{j-1})$  se calcula su máximo,  $\arg \max_{\Theta} Q(\Theta|\Theta^{j-1})$ , esto permite definir el algoritmo EM. La idea general es reemplazar la maximización del logaritmo de la función de verosimilitud de los datos observados por la sucesiva maximización de la esperanza condicional del logaritmo de la función de verosimilitud de los datos completos dado  $Y_n, \Theta^{j-1}$  con respecto a la función de densidad  $f(x|y)$ , como señala Efron [7], la identidad subyacente en el algoritmo EM es la igualdad de Fisher  $\dot{l}_{obs}(\Theta, y) = \mathbb{E}_{\Theta}(\dot{l}_c(\Theta, x)|y)$ . El cual nos permite optimizar  $\Theta$  ( $\Theta^*$ ); este procedimiento se realiza en dos pasos que mostraremos a continuación:

1. *Paso E* (Esperanza): Calcular la esperanza de la función de verosimilitud de  $(Y_n, X_n)$  dado  $Y_n, \Theta^{j-1}$  :

$$Q(\Theta|\Theta^{j-1}) = \mathbb{E}[L_{X_n, Y_n}(\Theta)|Y_n, \Theta^{j-1}].$$

2. *Paso M* (Maximización): Maximiza  $Q$  con respecto a los parámetros:

$$\Theta^j = \arg \max_{\Theta} Q(\Theta|\Theta^{j-1}).$$

Donde  $\arg \max_{\Theta} Q(\Theta|\Theta^{j-1})$  se calcula derivando  $Q$  e igualando a cero:

$$\frac{\partial Q(\Theta|\Theta^{j-1})}{\partial \Theta} = 0.$$


---

Iteramos los dos pasos anteriores hasta alcanzar la convergencia del máximo de la función de verosimilitud de  $(X_n, Y_n)$ .

Gilks y Richardson [9] y Shumway y Stoffer [20], demuestran que el algoritmo EM converge a la estimación MLE de  $Y_n$  para los modelos de representación de espacio de estados. En las secciones siguientes estudiaremos el algoritmo EM para dos casos de representación de espacio de estados, simples y generales.

## 2.1. Representación de Espacio de Estados Simples

La representación de espacio de estados simples, es la representación que omite las variables exógenas en las ecuaciones de observación y de estado. Como se presenta a continuación.

Ecuación de Observación

$$y_t = Ax_t + v_t; \quad v_t \sim \mathbb{N}(0, R), t \in \mathbb{N}.$$

Ecuación de Estado

$$x_t = \Phi x_{t-1} + w_t; \quad w_t \sim \mathbb{N}(0, Q), t \in \mathbb{N}.$$

Se estimarán los parámetros de la representación de espacio de estados simples mediante el algoritmo EM, para esto es necesario hallar su función de verosimilitud. Con el lema 2.1 calcularemos la función de densidad conjunta que nos permite hallar la función de verosimilitud.

### *La Función de Verosimilitud*

#### **Lema 2.1**

Sean los vectores estado  $X_n = \{x_0, \dots, x_t, \dots, x_n\}$ , las observaciones  $Y_n = \{y_1, \dots, y_t, \dots, y_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y el conjunto de parámetros de representación de espacio de estados  $\Theta = \{\mu_0, \Sigma_0, A, \Phi, R, Q\}$ ,

entonces la función de densidad conjunta de los datos completos  $(X_n, Y_n)$  satisfacen la siguiente igualdad:

$$f_{\Theta}(X_n, Y_n) = f_{\mu_0, \Sigma_0}(x_0) \prod_{t=1}^n f_{\Phi, Q}(x_t | x_{t-1}) \prod_{t=1}^n f_R(y_t | x_t)$$

donde  $x_0 \sim \mathbb{N}(\mu_0, \Sigma_0)$ .

### **Demostración:**

Para demostrar que

$$f_{\Theta}(X_n, Y_n) = f_{\mu_0, \Sigma_0}(x_0) \prod_{t=1}^n f_{\Phi, Q}(x_t | x_{t-1}) \prod_{t=1}^n f_R(y_t | x_t),$$

usamos que

$$f_{\Theta}(X_n, Y_n) = f_{\Theta}(Y_n | X_n) f_{\Theta}(X_n). \quad (2.1)$$

Luego dividimos la demostración en dos partes, en primer lugar veremos que

$$f_{\Theta}(Y_n | X_n) = \prod_{t=1}^n f_R(y_t | x_t), \quad (2.2)$$

y seguidamente demostraremos que

$$f_{\Theta}(X_n) = f_{\mu_0, \Sigma_0}(x_0) \prod_{t=1}^n f_{\Phi, R}(x_t | x_{t-1}). \quad (2.3)$$

Veamos que la ecuación (2.2) se satisface. Dado que

$$f_{\Theta}(Y_n | X_n) = f_{\Theta}(y_n, y_{n-1}, \dots, y_1 | x_n, x_{n-1}, \dots, x_1)$$

aplicando  $p(2)$ <sup>1</sup> y dado que  $X_n$  y  $Y_n$  son condicionalmente independientes, se tiene que

$$\begin{aligned} f_{\Theta}(Y_n|X_n) &= f_{\Theta}(y_n|X_n)f_{\Theta}(y_{n-1}|X_n), \dots, f_{\Theta}(y_1|X_n), \\ &= \prod_{t=1}^n f_R(y_t|X_n). \end{aligned}$$

Además como  $y_t = Ax_t + v_t$ , entonces

$$f_{\Theta}(Y_n|X_n) = \prod_{t=1}^n f_R(y_t|x_t).$$

Ahora demostremos la ecuación (2.3)

$$f_{\Theta}(X_n) = f_{\mu_0, \Sigma_0}(x_0) \prod_{t=1}^n f_{\Phi, Q}(x_t|x_{t-1}).$$

Ahora bien, se sabe que

$$\begin{aligned} f_{\Theta}(X_n) &= f_{\Theta}(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0) \\ &= f_{\Theta}(x_n|x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0)f_{\Theta}(x_{n-1}|x_{n-2}, x_{n-3}, \dots, x_0) \dots f_{\Theta}(x_1|x_0)f_{\Theta}(x_0) \end{aligned}$$

como  $x_t = \Phi x_{t-1} + w_t$ , entonces

$$\begin{aligned} f_{\Theta}(X_n) &= f_{\Theta}(x_n|x_{n-1})f_{\Theta}(x_{n-1}|x_{n-2}) \dots f_{\Theta}(x_1|x_0)f_{\Theta}(x_0) \\ &= f_{\mu_0, \Sigma_0}(x_0) \prod_{t=1}^n f_{\Phi, Q}(x_t|x_{t-1}) \end{aligned}$$

por lo tanto, sustituyendo (2.2) y (2.3) en (2.1) se concluye la demostración. □

---

<sup>1</sup>En el artículo de Dawid llamado Conditional independence in statistical theory [4], señala las propiedades de la función densidad conjunta:

1.  $f(X, Y) = f(X|Y)f(Y)$ .
2. Sean  $X, Y$  variables aleatorias condicionalmente independientes dado  $Z$ , si y solo si:

$$p(1) \quad f(X, Y|Z) = f(X|Z)f(Y|Z)$$

o equivalentemente a,

$$p(2) \quad f(X|Y, Z) = f(X|Z).$$


---

Si  $x_0 \sim \mathbb{N}(\mu_0, \Sigma_0)$ , entonces  $x_t$  (variable no observada) tiene distribución Gaussiana para todo  $t = \{1, 2, \dots, n\}$  por (2.3). Como  $y_t$  (variable observada) es generado por  $x_t$ , como se observa en la ecuación de observación, se concluye que  $y_t$  tiene distribución Gaussiana para todo  $t$ .

Si denotamos a los parámetros de la representación de espacio de estados por  $\Theta = \{\mu_0, \Sigma_0, A, \Phi, Q, R\}$  y de  $\ln L_{X_n, Y_n}(\Theta)$  obviamos el valor constante  $[n + n^2] \ln(2\pi)$ , entonces el logaritmo de la función de verosimilitud es como se demuestra en el siguiente lema.

### Lema 2.2

Sean los vectores de estado  $X_n = \{x_0, \dots, x_t, \dots, x_n\}$ , las observaciones  $Y_n = \{y_1, \dots, y_t, \dots, y_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y el conjunto de parámetros de la representación de espacio de estados  $\Theta = \{\mu_0, \Sigma_0, A, \Phi, R, Q\}$ , entonces el logaritmo de la función de verosimilitud de los datos completos  $(X_n, Y_n)$  es

$$\begin{aligned} \ln L_{X_n, Y_n}(\Theta) &= -\frac{1}{2} \{ \ln |\Sigma_0| + (x_0 - \mu_0)' \Sigma_0^{-1} (x_0 - \mu_0) \\ &\quad + n \ln |Q| + \sum_{t=1}^n (x_t - \phi x_{t-1})' Q^{-1} (x_t - \phi x_{t-1}) \\ &\quad + n \ln |R| + \sum_{t=1}^n (y_t - A_t x_t)' R^{-1} (y_t - A_t x_t) \}. \end{aligned}$$

donde  $x_0 \sim \mathbb{N}(\mu_0, \Sigma_0)$ .

### Demostración:

Del lema 2.1 tenemos que

$$f_{\Theta}(X_n, Y_n) = f_{\mu_0, \Sigma_0}(x_0) \prod_{t=1}^n f_{\Phi, Q}(x_t | x_{t-1}) \prod_{t=1}^n f_R(y_t | x_t).$$

A ésta expresión le aplicamos el logaritmo neperiano y la dividimos en tres partes para demostrar el lema 2.2.

Primera parte

$$\begin{aligned}
\ln(f_{\mu_0, \Sigma_0}(x_0)) &= \ln\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma_0|^{\frac{1}{2}}}\right) + \ln\left(e^{-\frac{1}{2}(x_0 - \mu_0)' \Sigma_0^{-1} (x_0 - \mu_0)}\right) \\
&= -\ln(2\pi)^{\frac{n}{2}} - \ln(|\Sigma_0|^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}(x_0 - \mu_0)' \Sigma_0^{-1} (x_0 - \mu_0) \\
&= -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln|\Sigma_0| - \frac{1}{2}(x_0 - \mu_0)' \Sigma_0^{-1} (x_0 - \mu_0).
\end{aligned}$$

Segunda parte

$$\begin{aligned}
\ln \prod_{t=1}^n (f_{\Phi, Q}(x_t | x_{t-1})) &= \sum_{t=1}^n \ln\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |Q|^{\frac{1}{2}}}\right) + \ln\left(e^{-\frac{1}{2}(x_t - \Phi x_{t-1})' Q^{-1} (x_t - \Phi x_{t-1})}\right) \\
&= -\frac{n^2}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln|Q| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (x_t - \Phi x_{t-1})' Q^{-1} (x_t - \Phi x_{t-1}).
\end{aligned}$$

Tercera parte

$$\begin{aligned}
\ln \prod_{t=1}^n (f_R(y_t | x_t)) &= \sum_{t=1}^n -\ln\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |R|^{\frac{1}{2}}}\right) + \ln\left(e^{-\frac{1}{2}(y_t - A_t x_t)' R^{-1} (y_t - A_t x_t)}\right) \\
&= -\frac{n^2}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln|R| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (y_t - A_t x_t)' R^{-1} (y_t - A_t x_t).
\end{aligned}$$

Aplicando las propiedades del logaritmo, sumamos las tres partes y nos queda que

$$\ln L_{X_n, Y_n}(\Theta) = \ln(f_{\mu_0, \Sigma_0}(x_0)) + \ln \prod_{t=1}^n (f_{\Phi, Q}(x_t | x_{t-1})) + \ln \prod_{t=1}^n (f_R(y_t | x_t)),$$

sustituyendo y agrupando los terminos, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\ln L_{X_n, Y_n}(\Theta) &= -\frac{1}{2} \{ [n + n^2] \ln(2\pi) + \ln|\Sigma_0| + (x_0 - \mu_0)' \Sigma_0^{-1} (x_0 - \mu_0) \\
&\quad + n \ln|Q| + \sum_{t=1}^n (x_t - \Phi x_{t-1})' Q^{-1} (x_t - \Phi x_{t-1}) \\
&\quad + n \ln|R| + \sum_{t=1}^n (y_t - A_t x_t)' R^{-1} (y_t - A_t x_t) \}. \quad \square
\end{aligned}$$

Si obviamos el valor constante y multiplicamos ambos lados de la igualdad de  $\ln L_{X_n, Y_n}(\Theta)$

por -2, nos queda como

$$\begin{aligned}
-2 \ln L_{X_n, Y_n}(\Theta) &= \{\ln |\Sigma_0| + (x_0 - \mu_0)' \Sigma_0^{-1} (x_0 - \mu_0) \\
&+ n \ln |Q| + \sum_{t=1}^n (x_t - \phi x_{t-1})' Q^{-1} (x_t - \phi x_{t-1}) \\
&+ n \ln |R| + \sum_{t=1}^n (y_t - A_t x_t)' R^{-1} (y_t - A_t x_t)\}.
\end{aligned}$$

Ésta expresión lo usaremos como resultado del lema 2.2, ya que, nos permite computar el *paso E* del algoritmo EM.

*Paso E* (Esperanza):

$$Q(\Theta|\Theta^{j-1}) \triangleq \mathbb{E}\{-2 \ln L_{X_n, Y_n}(\Theta) | Y_n, \Theta^{j-1}\}.$$

Para una expresión cerrada de  $Q(\Theta|\Theta^{j-1})$ , es importante tener presente la siguiente propiedad de la traza de una matriz:

$$\text{tr}[Q(x - m)(x - m)'] = (x - m)' Q (x - m). \quad (2.4)$$

Así, demostraremos que efectivamente:

$$\begin{aligned}
Q(\Theta|\Theta^{j-1}) &= \ln |\Sigma_0| + \text{tr}\{\Sigma_0^{-1}[P_0^n + (x_0^n - \mu_0)(x_0^n - \mu_0)']\} \\
&+ n \ln |Q| + \text{tr}\{Q^{-1} \sum_{t=1}^n (x_t^n x_t^{n'} + P_t^n) - (x_t^n x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n) \Phi' \\
&- \Phi (x_t^n x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n)' + \Phi (x_{t-1}^n x_{t-1}^{n'} + P_{t-1}^n) \Phi'\} \\
&+ n \ln |R| + \text{tr}\{R^{-1} \sum_{t=1}^n [(y_t - A_t x_t^n)(y_t - A_t x_t^n)' + A_t P_t^n A_t']\}, \quad (2.5)
\end{aligned}$$

ésta igualdad se obtiene al calcular la esperanza condicional de  $-2 \ln L_{X_n, Y_n}(\Theta)$  dado  $Y_n$  y  $\Theta$ ; para demostrarlo nos valdremos del resultado presentado en el lema 2.2 que desglosaremos en tres lemas, como sigue:

**Lema 2.3**

Dado el vector estado inicial  $x_0$  con distribución Gaussiana, media  $\mu_0$  y varianza  $\Sigma_0$ , sean las variables observadas  $Y_n = \{y_1, \dots, y_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y el conjunto de parámetros de la representación de espacio de estados  $\Theta = \{\mu_0, \Sigma_0, A, \Phi, R, Q\}$ , entonces,

$$\mathbb{E} [\ln |\Sigma_0| + (x_0 - \mu_0)' \Sigma_0^{-1} (x_0 - \mu_0) | Y_n, \Theta^{j-1}] = \ln |\Sigma_0| + \text{tr} \{ \Sigma_0^{-1} [P_0^n + (x_0^n - \mu_0)(x_0^n - \mu_0)'] \}$$

**Demostración:**

Primero aplicamos la propiedad (2.4) y la esperanza condicional a

$$\ln |\Sigma_0| + (x_0 - \mu_0)' \Sigma_0^{-1} (x_0 - \mu_0),$$

es decir

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[(\ln |\Sigma_0| + (x_0 - \mu_0)' \Sigma_0^{-1} (x_0 - \mu_0)) | Y_n, \Theta^{j-1}] \\ &= \ln |\Sigma_0| + \mathbb{E}[\text{tr} \{ \Sigma_0^{-1} [(x_0 - \mu_0)(x_0 - \mu_0)'] \} | Y_n, \Theta^{j-1}] \\ &= \ln |\Sigma_0| + \text{tr} \{ \Sigma_0^{-1} \mathbb{E}[(x_0 - x_0^n + x_0^n - \mu_0)(x_0 - x_0^n + x_0^n - \mu_0)' | Y_n, \Theta^{j-1}] \} \\ &= \ln |\Sigma_0| + \text{tr} \{ \Sigma_0^{-1} \mathbb{E}[(x_0 - x_0^n)(x_0 - x_0^n)' + (x_0 - x_0^n)(x_0^n - \mu_0)' \\ &\quad + (x_0^n - \mu_0)(x_0 - x_0^n)' + (x_0^n - \mu_0)(x_0^n - \mu_0)'] | Y_n, \Theta^{j-1}] \}. \end{aligned}$$

Es importante mencionar que  $x_0^n$  es  $Y_n$  medible y recordar la propiedad de la esperanza condicional  $\mathbb{E} [X - \mathbb{E}(X|Y)|Y] = 0$ , ya que, nos lleva a justificar lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(x_0 - x_0^n)(x_0^n)' | Y_n, \Theta^{j-1}] &= \mathbb{E}[(x_0^n)(x_0 - x_0^n)' | Y_n, \Theta^{j-1}] = 0 \\ \mathbb{E}[(x_0 - x_0^n)(\mu_0)' | Y_n, \Theta^{j-1}] &= \mathbb{E}[(\mu_0)(x_0 - x_0^n)' | Y_n, \Theta^{j-1}] = 0. \end{aligned}$$

De la definición de  $P_0^n$  se concluye que,

$$\mathbb{E}[(\ln |\Sigma_0| + (x_0 - \mu_0)' \Sigma_0^{-1} (x_0 - \mu_0)) | Y_n, \Theta^{j-1}] = \ln |\Sigma_0| + \text{tr} \{ \Sigma_0^{-1} [P_0^n + (x_0^n - \mu_0)(x_0^n - \mu_0)'] \}.$$

□

El procedimiento para demostrar los lemas 2.4 y 2.5 es análogo al lema 2.3

**Lema 2.4**

Sean los vectores de estado  $X_n = \{x_1, \dots, x_t, \dots, x_n\}$ , las variables observadas  $Y_n = \{y_1, \dots, y_t, \dots, y_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y el conjunto de parámetros de la representación de espacio de estados  $\Theta = \{\mu_0, \Sigma_0, A, \Phi, R, Q\}$ , entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} & \left[ (n \ln |Q| + \sum_{t=1}^n (x_t - \Phi x_{t-1})' Q^{-1} (x_t - \Phi x_{t-1})) | Y_n, \Theta^{j-1} \right] \\ &= n \ln |Q| + \text{tr} \left\{ Q^{-1} \sum_{t=1}^n (x_t^n x_t^{n'} + P_t^n) - (x_t^n x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n) \Phi' \right. \\ & \quad \left. - \Phi (x_t^n x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n)' + \Phi (x_{t-1}^n x_{t-1}^{n'} + P_{t-1}^n) \Phi' \right\} \end{aligned}$$

**Demostración:**

Usando propiedades de la esperanza condicional y la propiedad (2.4), se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} & \left[ (n \ln |Q| + \sum_{t=1}^n (x_t - \Phi x_{t-1})' Q^{-1} (x_t - \Phi x_{t-1})) | Y_n, \Theta^{j-1} \right] \\ &= n \ln |Q| + \text{tr} \left\{ Q^{-1} \sum_{t=1}^n \mathbb{E}[(x_t - \Phi x_{t-1})(x_t - \Phi x_{t-1})' | Y_n, \Theta^{j-1}] \right\} \end{aligned}$$

observemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} & \left[ (x_t - \Phi x_{t-1})(x_t - \Phi x_{t-1})' | Y_n, \Theta^{j-1} \right] \\ &= \mathbb{E} \left\{ [(x_t - x_t^n) + (x_t^n - \Phi x_{t-1})][(x_t - x_t^n)' + (x_t^n - \Phi x_{t-1})'] | Y_n, \Theta^{j-1} \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ [(x_t - x_t^n)(x_t - x_t^n)'] + [(x_t - x_t^n)(x_t^n - \Phi x_{t-1})'] + [(x_t^n - \Phi x_{t-1})(x_t - x_t^n)'] \right. \\ & \quad \left. + [(x_t^n - \Phi x_{t-1})(x_t^n - \Phi x_{t-1})'] | Y_n, \Theta^{j-1} \right\}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

como la esperanza de la suma es la suma de las esperanzas, entonces podemos resolver cada miembro de la suma. A continuación mostraremos estos resultados.

El primer sumando es igual a:

$$\mathbb{E} \left\{ [(x_t - x_t^n)(x_t - x_t^n)' | Y_n, \Theta^{j-1}] \right\} = P_t^n;$$

el segundo sumando es:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{(x_t - x_t^n)(x_t^n - \Phi x_{t-1})' | Y_n, \Theta^{j-1}\} &= \mathbb{E}\{(x_t - x_t^n)[x_t^n - \Phi x_{t-1}^n + \Phi x_{t-1}^n - \Phi x_{t-1}]' | Y_n, \Theta^{j-1}\} \\ &= \mathbb{E}\{(x_t - x_t^n)(x_t^n - \Phi x_{t-1}^n)' \\ &\quad + (x_t - x_t^n)(x_{t-1}^n - x_{t-1})' \Phi' | Y_n, \Theta^{j-1}\},\end{aligned}$$

como  $x_t^n$  es  $Y_n$  medible para todo  $t$  y por definición de  $P_{t,t-1}^n$ ,  $x_t^n$ , se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{(x_t - x_t^n)(x_t^n - \Phi x_{t-1})' | Y_n, \Theta^{j-1}\} &= \mathbb{E}\{(x_t - x_t^n) | Y_n, \Theta^{j-1}\}(x_t^n - \Phi x_{t-1}^n)' - P_{t,t-1}^n \Phi' \\ &= \{\mathbb{E}(x_t | Y_n, \Theta^{j-1}) - \mathbb{E}(x_t | Y_n)\}(x_t^n - \Phi x_{t-1}^n)' - P_{t,t-1}^n \Phi' \\ &= -P_{t,t-1}^n \Phi'.\end{aligned}$$

El tercer sumando de la ecuación (2.6) representa la transpuesta del segundo sumando, por lo que:

$$\mathbb{E}\{(x_t^n - \Phi x_{t-1})(x_t - x_t^n)' | Y_n, \Theta^{j-1}\} = \{-P_{t,t-1}^n \Phi'\}'.$$

El cuarto sumando es igual a:

$$\begin{aligned}\mathbb{E} & [(x_t^n - \Phi x_{t-1})(x_t^n - \Phi x_{t-1})' | Y_n, \Theta^{j-1}] \\ &= \mathbb{E} \left[ \{(x_t^n - \Phi x_{t-1}^n) + (\Phi x_{t-1}^n - \Phi x_{t-1})\} \{(x_t^n - \Phi x_{t-1}^n) + (\Phi x_{t-1}^n - \Phi x_{t-1})\}' | Y_n, \Theta^{j-1} \right] \\ &= \mathbb{E}[(x_t^n - \Phi x_{t-1}^n)(x_t^n - \Phi x_{t-1}^n)' | Y_n, \Theta^{j-1}] \\ &\quad + \mathbb{E}[(x_t^n - \Phi x_{t-1}^n)(x_{t-1}^n - x_{t-1})' \Phi' | Y_n, \Theta^{j-1}] \\ &\quad + \mathbb{E}[\Phi(x_{t-1}^n - x_{t-1})(x_t^n - \Phi x_{t-1}^n)' | Y_n, \Theta^{j-1}] \\ &\quad + \mathbb{E}[\Phi(x_{t-1}^n - x_{t-1})(x_{t-1}^n - x_{t-1})' \Phi' | Y_n, \Theta^{j-1}];\end{aligned}$$

Se calcula cada una de las esperanzas, donde

$$\mathbb{E}[(x_t^n - \Phi x_{t-1}^n)(x_t^n - \Phi x_{t-1}^n)' | Y_n, \Theta^{j-1}] = x_t^n x_t^{n'} - \Phi x_{t-1}^n x_t^{n'} - x_t^n x_{t-1}^{n'} \Phi' + \Phi x_{t-1}^n x_{t-1}^{n'} \Phi'.$$

Como  $(x_t^n - \Phi x_{t-1}^n)$  es constante y  $\mathbb{E}[\mathbb{E}(x_{t-1} | Y_n) - x_{t-1} | Y_n, \Theta^{j-1}] = 0$  se tiene que

$$\mathbb{E}[(x_t^n - \Phi x_{t-1}^n)(x_{t-1}^n - x_{t-1})' \Phi' | Y_n, \Theta^{j-1}] = 0.$$

Análogamente sucede con

$$\mathbb{E}[\Phi(x_{t-1}^n - x_{t-1})(x_t^n - \Phi x_{t-1}^n)' | Y_n, \Theta^{j-1}] = 0.$$

Por definición se tiene que  $\mathbb{E}[\Phi(x_{t-1}^n - x_{t-1})(x_{t-1}^n - x_{t-1})' \Phi' | Y_n, \Theta^{j-1}] = \Phi P_{t-1}^n \Phi'$ .

Por lo tanto, la ecuación (2.6) se resume en

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(x_t - \Phi x_{t-1})(x_t - \Phi x_{t-1})' | Y_n, \Theta^{j-1}] &= (x_t^n x_t^{n'} + P_t^n) - (x_t^n x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n) \Phi' \\ &\quad - \Phi (x_t^n x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n)' + \Phi (x_{t-1}^n x_{t-1}^{n'} + P_{t-1}^n) \Phi'. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} & \left[ (n \ln |Q| + \sum_{t=1}^n (x_t - \phi x_{t-1})' Q^{-1} (x_t - \phi x_{t-1})) | Y_n, \Theta^{j-1} \right] \\ &= n \ln |Q| + \text{tr} \left\{ Q^{-1} \sum_{t=1}^n (x_t^n x_t^{n'} + P_t^n) - (x_t^n x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n) \Phi' \right. \\ &\quad \left. - \Phi (x_t^n x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n)' + \Phi (x_{t-1}^n x_{t-1}^{n'} + P_{t-1}^n) \Phi' \right\}. \quad \square \end{aligned}$$

Para concluir con el cálculo de la esperanza condicional de  $-2 \ln L_{X_n, Y_n}(\Theta)$  dado  $Y_n$  y  $\Theta$ , demostraremos el lema 2.5

### Lema 2.5

Sean los vectores de estado  $X_n = \{x_1, \dots, x_t, \dots, x_n\}$ , las variables observadas  $Y_n = \{y_1, \dots, y_t, \dots, y_n\}$ , el conjunto de parámetros de la representación de espacio de estados  $\Theta = \{\mu_0, \Sigma_0, A, \Phi, R, Q\}$ , entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} & \left[ n \ln |R| + \sum_{t=1}^n (y_t - Ax_t)' R^{-1} (y_t - Ax_t) | Y_n, \Theta^{j-1} \right] \\ &= n \ln |R| + \text{tr} \left\{ R^{-1} \sum_{t=1}^n [(y_t - Ax_t^n)(y_t - Ax_t^n)' + AP_t^n A'] \right\} \end{aligned}$$

**Demostración:**

Aplicando la propiedad de la traza y de la esperanza, se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ n \ln |R| + \sum_{t=1}^n (y_t - Ax_t)' R^{-1} (y_t - Ax_t) | Y_n, \Theta^{j-1} \right] \\ = n \ln |R| + \text{tr} \left\{ R^{-1} \sum_{t=1}^n \mathbb{E} [(y_t - Ax_t)(y_t - Ax_t)' | Y_n, \Theta^{j-1}] \right\}. \end{aligned}$$

observemos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ (y_t - Ax_t)(y_t - Ax_t)' | Y_n, \Theta^{j-1} \right] \\ = \mathbb{E} \left[ \{(y_t - Ax_t^n) + (Ax_t^n - Ax_t)\} \{(y_t - Ax_t^n) + (Ax_t^n - Ax_t)\}' | Y_n, \Theta^{j-1} \right] \\ = \mathbb{E} \left[ \{(y_t - Ax_t^n)(y_t - Ax_t^n)' + (Ax_t^n - Ax_t)(y_t - Ax_t^n)' \right. \\ \left. + (y_t - Ax_t^n)(Ax_t^n - Ax_t)' + (Ax_t^n - Ax_t)(Ax_t^n - Ax_t)'\} | Y_n, \Theta^{j-1} \right], \end{aligned}$$

como  $x_t^n$  es  $Y_n$  medible y  $\mathbb{E} = [x - \mathbb{E}(X_n | Y - n) | Y_n] = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(Ax_t^n - Ax_t)(y_t - Ax_t^n)' | Y_n, \Theta^{j-1}] &= 0, \\ \mathbb{E} [(y_t - Ax_t^n)(Ax_t^n - Ax_t)' | Y_n, \Theta^{j-1}] &= 0. \end{aligned}$$

Por definición de  $P_t^n$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ (y_t - Ax_t)(y_t - Ax_t)' | Y_n, \Theta^{j-1} \right] \\ = (y_t - Ax_t^n)(y_t - Ax_t^n)' + A \mathbb{E} [(x_t - x_t^n)(x_t - x_t^n)' | Y_n, \Theta^{j-1}] A' \\ = (y_t - Ax_t^n)(y_t - Ax_t^n)' + A P_t^n A' \end{aligned}$$

en consecuencia,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ n \ln |R| + \sum_{t=1}^n (y_t - Ax_t)' R^{-1} (y_t - Ax_t) | Y_n, \Theta^{j-1} \right] \\ = n \ln |R| + \text{tr} \left\{ R^{-1} \sum_{t=1}^n [(y_t - Ax_t^n)(y_t - Ax_t^n)' + A P_t^n A'] \right\}. \quad \square \end{aligned}$$

Combinando los lemas 2.3, 2.4 y 2.5 se tiene la identidad (2.5). El siguiente paso a seguir es el de maximización.

*Paso M* (Maximización): En este paso obtenemos la estimación de cada uno de los elementos de  $\Theta$ , calculando

$$\frac{\partial Q(\Theta|\Theta^{j-1})}{\partial \Theta} = 0.$$

Para esto recordemos las siguientes propiedades:

Cuadro 2.1: *Propiedades*

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$	si $a, b \in (0, +\infty)$
$ A^{-1}  = \frac{1}{ A }$	$A$ es una matriz de dimensión $m \times n$ y no nula
$tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$ $tr(AB') = tr(B'A)$ $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$	Si $A$ y $B$ son de dimensiones $m \times n$ , además $\lambda \in (-\infty, +\infty)$
$tr(AB) = tr(BA) = tr(B'A')$	Si las matrices $A$ y $B$ son de dimensión de $m \times n$ , $n \times m$ respectivamente
$tr(ABC) = tr(A'C'B') = tr(B'A'C')$	Si las matrices $A$ , $B$ y $C$ son de dimensión $m \times n$ , $n \times q$ y $q \times m$ respectivamente
$\frac{\partial B}{\partial X} = 0$	
$\frac{\partial \log  X }{\partial X} = (X^{-1})'$	Si $X$ es una matriz no singular de orden $n$
$\frac{\partial tr(X'AX)}{\partial X} = (A + A')X$	
$\frac{\partial tr(XAX')}{\partial X} = X(A + A')$	
$\frac{\partial tr(XAX)}{\partial X} = (AX)' + (XA)'$	
$\frac{\partial tr(XB)}{\partial X} = \frac{\partial tr(BX)}{\partial X} = B'$ $\frac{\partial tr(BXA)}{\partial X} = B'A'$ $\frac{\partial tr(AX'CX)}{\partial X} = C'XA' + CXA$	Si $A, B, X, C$ son matrices de orden $m \times m, m \times n, n \times m, n \times n$ respectivamente
$A = A'$	Si $A$ es simétrica
$XX'$ es una matriz simétrica	Si $X$ un vector de orden $n \times 1$
$P_{t_1, t_2}^n$ es una matriz simétrica	

Todas las propiedades expuesta anteriormente nos facilita el cálculo de la estimación de  $\Theta^j$ , cuyo resultados se muestra con el siguiente lema.

### Lema 2.6

Sean las predicciones  $x_t^n$ , los errores de predicciones  $P_{t, t-1}^n$  (definidas en la sección 1.2.2), el conjunto de parámetros iniciales  $\Theta^0$  y  $Q(\Theta|\Theta^{j-1})$ , entonces en la  $j$ -ésima iteración del vector  $\Theta^j$  está definido por las siguientes igualdades

$$\mathbf{a)} \hat{\mu}^j = x_0^n$$

$$\mathbf{b}) \hat{\Sigma}_0^j = P_0^n + (x_0^n - \mu_0)(x_0^n - \mu_0)'$$

$$\mathbf{c}) \hat{\Phi}^j = \left( \sum_{t=1}^n x_t^n x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n \right) \left( \sum_{t=1}^n x_{t-1}^n x_{t-1}^{n'} + P_{t-1}^n \right)^{-1}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}) \hat{Q}^j &= n^{-1} \sum_{t=1}^n [(x_t^n x_t^{n'} + P_t^n) - (x_t^n x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n) \Phi'] \\ &\quad - \Phi (x_t^n x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n)' + \Phi (x_{t-1}^n x_{t-1}^{n'} + P_{t-1}^n) \Phi'] \end{aligned}$$

$$\mathbf{e}) \hat{R}^j = n^{-1} \sum_{t=1}^n [(y_t - Ax_t^n)(y_t - Ax_t^n)' + AP_t^n A']$$

$$\mathbf{f}) \hat{A}^j = \left[ \sum_{t=1}^n (y_t x_t^{n'}) \right] \left[ \sum_{t=1}^n x_t^n x_t^{n'} + P_t^n \right]^{-1}.$$

Antes de realizar la demostración, definimos  $S_{11}$ ,  $S_{10}$  y  $S_{00}$  como

$$\begin{aligned} S_{11} &= \sum_{t=1}^n (x_t^n x_t^{n'} + P_t^n), \\ S_{10} &= \sum_{t=1}^n (x_t^n x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n), \\ S_{00} &= \sum_{t=1}^n (x_{t-1}^n x_{t-1}^{n'} + P_{t-1}^n), \end{aligned}$$

entonces se tiene las siguientes expresiones para  $\hat{\Phi}^j$  y  $\hat{Q}^j$

$$\hat{\Phi}^j = S_{10} S_{00}^{-1}$$

y en  $\hat{Q}^j$  al hacer la sustitución de  $\hat{\Phi}^j$ , se obtiene que

$$\hat{Q}^j = n^{-1} (S_{11} - S_{10} S_{00}^{-1} S_{10}').$$

Damos paso a la demostración, tomando en cuenta las definiciones dada anteriormente.

**Demostración:**

A continuación en cada ítem se muestra la estimación de cada elemento de  $\Theta^j$ , realizando el cálculo de  $\frac{\partial Q(\Theta|\Theta^{j-1})}{\partial \theta} = 0$  para todo  $\theta \in \Theta^j$ .

a) Mostraremos que  $\hat{\mu}^j = x_0^n$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(\Theta|\Theta^{j-1})}{\partial \mu_0} &= \frac{\partial}{\partial \mu_0} [\ln |\Sigma_0| + tr\{\Sigma_0^{-1}[P_0^n + (x_0^n - \mu_0)(x_0^n - \mu_0)']\}] \\ &= \frac{\partial}{\partial \mu_0} tr\{\Sigma_0^{-1}P_0^n + \Sigma_0^{-1}x_0^n x_0^{n'} - \Sigma_0^{-1}x_0^n \mu_0' - \Sigma_0^{-1}\mu_0 x_0^{n'} + \Sigma_0^{-1}\mu_0 \mu_0'\} \\ &= \frac{\partial}{\partial \mu_0} tr\{-\Sigma_0^{-1}x_0^n \mu_0' - \Sigma_0^{-1}\mu_0 x_0^{n'} + \Sigma_0^{-1}\mu_0 \mu_0'\} \end{aligned}$$

aplicando propiedades de la traza, nos queda:

$$\frac{\partial Q(\Theta|\Theta^{j-1})}{\partial \mu_0} = \frac{\partial}{\partial \mu_0} tr\{-\mu_0 x_0^{n'} \Sigma_0^{-1'} - \Sigma_0^{-1} \mu_0 x_0^{n'} + \mu_0' \Sigma_0^{-1} \mu_0\},$$

derivando la igualdad anterior, se tiene que:

$$\frac{\partial Q(\Theta|\Theta^{j-1})}{\partial \mu_0} = -[\Sigma_0^{-1'} + \Sigma_0^{-1}]x_0^n + [\Sigma_0^{-1'} + \Sigma_0^{-1}]\mu_0$$

igualando a cero y despejando  $\mu_0$ , se demuestra que:

$$\begin{aligned} -[\Sigma_0^{-1'} + \Sigma_0^{-1}]x_0^n + [\Sigma_0^{-1'} + \Sigma_0^{-1}]\mu_0 &= 0 \\ \mu_0 &= [\Sigma_0^{-1'} + \Sigma_0^{-1}]^{-1}[\Sigma_0^{-1'} + \Sigma_0^{-1}]x_0^n \\ \mu_0 &= x_0^n \end{aligned}$$

b) Probaremos que  $\hat{\Sigma}_0^j = P_0^n + (x_0^n - \mu_0)(x_0^n - \mu_0)'$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(\Theta|\Theta^{j-1})}{\partial \Sigma_0^{-1}} &= \frac{\partial}{\partial \Sigma_0^{-1}} [\ln |\Sigma_0| + tr\{\Sigma_0^{-1}[P_0^n + (x_0^n - \mu_0)(x_0^n - \mu_0)']\}] \\ &= \frac{\partial}{\partial \Sigma_0^{-1}} \{\ln |(\Sigma_0^{-1})^{-1}|\} + \frac{\partial}{\partial \Sigma_0^{-1}} tr\{\Sigma_0^{-1}[P_0^n + (x_0^n - \mu_0)(x_0^n - \mu_0)']\} \end{aligned}$$

aplicando propiedades de la traza, se observa que:

$$\frac{\partial Q(\Theta|\Theta^{j-1})}{\partial \Sigma_0^{-1}} = -\frac{\partial}{\partial \Sigma_0^{-1}} \{\ln |(\Sigma_0^{-1})|\} + \frac{\partial}{\partial \Sigma_0^{-1}} tr\{\Sigma_0^{-1}[P_0^n + (x_0^n - \mu_0)(x_0^n - \mu_0)']\},$$

luego, derivando

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q(\Theta|\Theta^{j-1})}{\partial \Sigma_0^{-1}} &= -[(\Sigma_0^{-1})^{-1}]' + [P_0^n + (x_0^n - \mu_0)(x_0^n - \mu_0)']' \\ &= -[\Sigma_0] + [P_0^n + (x_0^n - \mu_0)(x_0^n - \mu_0)']'\end{aligned}$$

después de igualar a cero y despejando  $\Sigma_0$ , se obtiene que:

$$\Sigma_0 = P_0^n + (x_0^n - \mu_0)(x_0^n - \mu_0)'$$

c) Deduciremos que  $\hat{\Phi}^j = (\sum_{t=1}^n x_t^n x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n)(\sum_{t=1}^n x_{t-1}^n x_{t-1}^{n'} + P_{t-1}^n)^{-1}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q(\Theta|\Theta^{j-1})}{\partial \Phi} &= \frac{\partial}{\partial \Phi} [n \ln |Q| + \text{tr}\{Q^{-1} \sum_{t=1}^n (x_t^n x_t^{n'} + P_t^n) - (x_t^n x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n)\Phi'\} \\ &\quad - \Phi(x_t^n x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n)' + \Phi(x_{t-1}^n x_{t-1}^{n'} + P_{t-1}^n)\Phi'] \\ &= \frac{\partial}{\partial \Phi} [\text{tr}\{Q^{-1} \sum_{t=1}^n -(x_t^n x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n)\Phi' \\ &\quad - \Phi(x_t^n x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n)' + \Phi(x_{t-1}^n x_{t-1}^{n'} + P_{t-1}^n)\Phi'\}] \\ &= \frac{\partial}{\partial \Phi} [\text{tr}\{\sum_{t=1}^n -Q^{-1'}\Phi(x_t^n x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n)' \\ &\quad - Q^{-1}\Phi(x_t^n x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n)' + (x_{t-1}^n x_{t-1}^{n'} + P_{t-1}^n)\Phi'Q^{-1}\Phi\}] \\ &= \sum_{t=1}^n -(Q^{-1} + Q^{-1'})(x_t^n x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n) + (Q^{-1'}\Phi(x_{t-1}^n x_{t-1}^{n'} + P_{t-1}^n)' \\ &\quad + (Q^{-1}\Phi(x_{t-1}^n x_{t-1}^{n'} + P_{t-1}^n)).\end{aligned}$$

Como  $(x_{t-1}^n x_{t-1}^{n'} + P_{t-1}^n)$  es una matriz simétrica, entonces

$$\frac{\partial Q(\Theta|\Theta^{j-1})}{\partial \Phi} = \sum_{t=1}^n -(Q^{-1} + Q^{-1'})(x_t^n x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n) + (Q^{-1} + Q^{-1'})\Phi(x_{t-1}^n x_{t-1}^{n'} + P_{t-1}^n)$$

una vez igualando a cero y despejando a  $\Phi$ , se tiene que:

$$\Phi = \left\{ \sum_{t=1}^n (x_t^n x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n) \right\} \left\{ \sum_{t=1}^n (x_{t-1}^n x_{t-1}^{n'} + P_{t-1}^n) \right\}^{-1}$$

o también lo podemos denotar, como

$$\Phi = S_{10}(S_{00})^{-1}$$

d) Demostraremos que

$$\begin{aligned} \hat{Q}^j &= n^{-1} \sum_{t=1}^n [(x_t^n x_t^{n'} + P_t^n) - (x_t^n x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n) \Phi' - \Phi (x_t^n x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n)' \\ &\quad + \Phi (x_{t-1}^n x_{t-1}^{n'} + P_{t-1}^n) \Phi'] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(\Theta|\Theta^{j-1})}{\partial Q^{-1}} &= \frac{\partial}{\partial Q^{-1}} [n \ln |Q| + \text{tr}\{Q^{-1} \sum_{t=1}^n (x_t^n x_t^{n'} + P_t^n) - (x_t^n x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n) \Phi' \\ &\quad - \Phi (x_t^n x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n)' + \Phi (x_{t-1}^n x_{t-1}^{n'} + P_{t-1}^n) \Phi'\}] \\ &= \frac{\partial}{\partial Q^{-1}} [n \ln |(Q^{-1})^{-1}| + \text{tr}\{Q^{-1} \sum_{t=1}^n -(x_t^n x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n) \Phi' \\ &\quad - \Phi (x_t^n x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n)' + \Phi (x_{t-1}^n x_{t-1}^{n'} + P_{t-1}^n) \Phi'\}] \\ &= -nQ' + [\sum_{t=1}^n (x_t^n x_t^{n'} + P_t^n) - (x_t^n x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n) \Phi' - \Phi (x_t^n x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n)' \\ &\quad + \Phi (x_{t-1}^n x_{t-1}^{n'} + P_{t-1}^n) \Phi']', \end{aligned}$$

veamos que después de igualar a cero y despejando  $Q$ , se verifica:

$$\begin{aligned} Q &= n^{-1} \sum_{t=1}^n [(x_t^n x_t^{n'} + P_t^n) - (x_t^n x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n) \Phi' - \Phi (x_t^n x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n)' \\ &\quad + \Phi (x_{t-1}^n x_{t-1}^{n'} + P_{t-1}^n) \Phi']. \end{aligned}$$

Podemos sustituir en  $Q$  por  $S_{11}$ ,  $S_{10}$ ,  $S_{00}$  y  $\Phi$ , nos queda:

$$\begin{aligned} Q &= n^{-1} (S_{11} - S_{10} \Phi' - \Phi S_{10}' + \Phi S_{00} \Phi') \\ Q &= n^{-1} (S_{11} - S_{10} [S_{10}(S_{00})^{-1}]' - [S_{10}(S_{00})^{-1}] S_{10}' + [S_{10}(S_{00})^{-1}] S_{00} [S_{10}(S_{00})^{-1}]') \\ Q &= n^{-1} (S_{11} - S_{10}(S_{00})^{-1} (S_{10})'). \end{aligned}$$

e) Comprobaremos que  $\hat{R}^j = n^{-1} \sum_{t=1}^n [(y_t - Ax_t^n)(y_t - Ax_t^n)' + AP_t^n A']$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(\Theta|\Theta^{j-1})}{\partial R^{-1}} &= \frac{\partial}{\partial R^{-1}} \left[ n \ln |R| + \text{tr} \left\{ R^{-1} \sum_{t=1}^n [(y_t - Ax_t^n)(y_t - Ax_t^n)' + AP_t^n A'] \right\} \right] \\ &= -nR' + \sum_{t=1}^n [(y_t - Ax_t^n)(y_t - Ax_t^n)' + AP_t^n A']' \end{aligned}$$

igualando a cero y despejando  $R$ , nos queda igual a:

$$R = n^{-1} \sum_{t=1}^n [(y_t - Ax_t^n)(y_t - Ax_t^n)' + AP_t^n A'].$$

f) Verificaremos que  $\hat{A}^j = [\sum_{t=1}^n (y_t x_t^{n'})] [\sum_{t=1}^n x_t^n + P_t^{n'}]^{-1}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(\Theta|\Theta^{j-1})}{\partial A} &= \frac{\partial}{\partial A} \left[ n \ln |R| + \text{tr} \left\{ R^{-1} \sum_{t=1}^n [(y_t - Ax_t^n)(y_t - Ax_t^n)' + AP_t^n A'] \right\} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial A} \left[ \text{tr} \left\{ \sum_{t=1}^n [-R^{-1} y_t x_t^{n'} A' - R^{-1} Ax_t^n y_t' + R^{-1} Ax_t^n x_t^{n'} A' + R^{-1} AP_t^n A'] \right\} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial A} \left[ \text{tr} \left\{ \sum_{t=1}^n [-A(R^{-1} y_t x_t^{n'})' - R^{-1} A(x_t^n y_t') + (x_t^n x_t^{n'}) A' R^{-1} A + P_t^n A' (R^{-1})' A] \right\} \right] \\ &= \sum_{t=1}^n [-(R^{-1} + R^{-1}') (y_t x_t^{n'}) + (R^{-1} + R^{-1}') A (x_t^n x_t^{n'}) + (R^{-1} + R^{-1}') AP_t^n] \\ &= \sum_{t=1}^n [-(R^{-1} + R^{-1}') (y_t x_t^{n'}) + (R^{-1} + R^{-1}') A (x_t^n x_t^{n'} + P_t^n)] \end{aligned}$$

de manera análoga a las demás demostraciones, podemos ver que:

$$A = \left[ \sum_{t=1}^n (y_t x_t^{n'}) \right] \left[ \sum_{t=1}^n x_t^n x_t^{n'} + P_t^n \right]^{-1}.$$

□

La igualdad (2.5), *paso E*, *paso M* y lema 2.6, son los computo requerido para implementar el algoritmo EM para la representación de espacio de estados sin variables exógenas.

## 2.2. Representación de Espacio de Estados Generales

En esta sección se expondrán los detalles de los *pasos E* y *M* para la representación de espacio de estados generales. Esta representación considera en sus ecuaciones las variables exógenas,  $u_t$ , tal como se observa en la:

Ecuación de Observación

$$y_t = Ax_t + \Gamma u_t + v_t; \quad v_t \sim \mathbb{N}(0, R), t \in \mathbb{N}$$

Ecuación de Estado

$$x_t = \Phi x_{t-1} + \Upsilon u_t + w_t; \quad w_t \sim \mathbb{N}(0, Q), t \in \mathbb{N}.$$

En las sucesivas secciones y en el capítulo 3 trabajaremos con la representación de espacio de estados generales; la función de densidad para este caso se demuestra análogamente al lema 2.1. A continuación definiremos el logaritmo de la función verosimilitud.

### *Función de Verosimilitud*

#### **Lema 2.7**

Sean los vectores estado  $X_n = \{x_0, \dots, x_t, \dots, x_n\}$ , las observaciones  $Y_n = \{y_1, \dots, y_t, \dots, y_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , los datos completos  $(X_n, Y_n)$ , el vector de parámetros de la representación de espacio de estados  $\Theta = \{\mu_0, \Sigma_0, A, \Phi, Q, R, \Upsilon, \Gamma\}$  y la densidad conjunta

$$f_{\Theta}(X_n, Y_n) = f_{\mu_0, \Sigma_0}(x_0) \prod_{t=1}^n f_{\Phi, Q}(x_t | x_{t-1}) \prod_{t=1}^n f_R(y_t | x_t)$$

donde  $x_0 \sim \mathbb{N}(\mu_0, \Sigma_0)$ , entonces la función de verosimilitud es

$$\begin{aligned} \ln L_{X_n, Y_n}(\Theta) &= -\frac{1}{2} \{ \ln |\Sigma_0| + (x_0 - \mu_0)' \Sigma_0^{-1} (x_0 - \mu_0) \\ &\quad + n \ln |Q| + \sum_{t=1}^n (x_t - \Phi x_{t-1} - \Upsilon u_t)' Q^{-1} (x_t - \Phi x_{t-1} - \Upsilon u_t) \\ &\quad + n \ln |R| + \sum_{t=1}^n (y_t - A_t x_t - \Gamma u_t)' R^{-1} (y_t - A_t x_t - \Gamma u_t) \}. \end{aligned}$$

**Demostración:**

Aplicando las propiedades del logaritmo neperiano a la función de densidad, se tiene que

$$\ln(f_{\Theta}(X_n, Y_n)) = \ln(f_{\mu_0, \Sigma_0}(x_0)) + \ln\left(\prod_{t=1}^n f_{\Phi, Q}(x_t|x_{t-1})\right) + \ln\left(\prod_{t=1}^n f_R(y_t|x_t)\right).$$

Desarrollaremos cada uno de los terminos del lado derecho de la igualdad. En primer lugar tenemos que

$$\begin{aligned} \ln(f_{\mu_0, \Sigma_0}(x_0)) &= \ln\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\Sigma_0|^{\frac{1}{2}}}\right) + \ln\left(e^{-\frac{1}{2}(x_0 - \mu_0)' \Sigma_0^{-1}(x_0 - \mu_0)}\right) \\ &= -\ln(2\pi)^{\frac{n}{2}} - \ln(|\Sigma_0|^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}(x_0 - \mu_0)' \Sigma_0^{-1}(x_0 - \mu_0) \\ &= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln|\Sigma_0| - \frac{1}{2}(x_0 - \mu_0)' \Sigma_0^{-1}(x_0 - \mu_0). \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \ln\prod_{t=1}^n (f_{\Phi, Q}(x_t|x_{t-1})) &= \sum_{t=1}^n \ln\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|Q|^{\frac{1}{2}}}\right) + \ln\left(e^{-\frac{1}{2}(x_t - \Phi x_{t-1} - \Upsilon u_t)' Q^{-1}(x_t - \Phi x_{t-1} - \Upsilon u_t)}\right) \\ &= -\frac{n^2}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln|Q| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^n (x_t - \Phi x_{t-1} - \Upsilon u_t)' Q^{-1}(x_t - \Phi x_{t-1} - \Upsilon u_t). \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \ln\prod_{t=1}^n (f_R(y_t|x_t)) &= \sum_{t=1}^n -\ln\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|R|^{\frac{1}{2}}}\right) + \ln\left(e^{-\frac{1}{2}(y_t - A_t x_t - \Gamma u_t)' R^{-1}(y_t - A_t x_t - \Gamma u_t)}\right) \\ &= -\frac{n^2}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln|R| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^n (y_t - A_t x_t - \Gamma u_t)' R^{-1}(y_t - A_t x_t - \Gamma u_t). \end{aligned}$$

Sumando estos tres resultados, nos queda que

$$\begin{aligned} \ln L_{X_n, Y_n}(\Theta) &= -\frac{1}{2}\{[n + n^2]\ln(2\pi) + \ln|\Sigma_0| + (x_0 - \mu_0)' \Sigma_0^{-1}(x_0 - \mu_0) \\ &\quad + n\ln|Q| + \sum_{t=1}^n (x_t - \Phi x_{t-1} - \Upsilon u_t)' Q^{-1}(x_t - \Phi x_{t-1} - \Upsilon u_t) \\ &\quad + n\ln|R| + \sum_{t=1}^n (y_t - A_t x_t - \Gamma u_t)' R^{-1}(y_t - A_t x_t - \Gamma u_t)\}. \end{aligned}$$

□

Continuamos con la aplicación del algoritmo EM, demostrando la ecuación del *paso E*, que consiste en calcular la esperanza a  $-2 \ln L_{X_n, Y_n}(\Theta)$  dado  $Y_n, \Theta$ .

*Paso E* (Esperanza):

$$Q(\Theta|\Theta^{j-1}) = E\{-2 \ln L_{X_n, Y_n}(\Theta)|Y_n, \Theta^{j-1}\},$$

nos queda como resultado la siguiente identidad

$$\begin{aligned} Q(\Theta|\Theta^{j-1}) &= \ln |\Sigma_0| + \text{tr}\{\Sigma_0^{-1}[P_0^n + (x_0 - \mu_0)(x_0 - \mu_0)']\} \\ &\quad + n \ln |Q| + \text{tr}\{Q^{-1} \sum_{t=1}^n (x_t^n - \Upsilon u_t)(x_t^n - \Upsilon u_t)' + P_t^n \\ &\quad - (x_t^n x_{t-1}^{n'} - \Upsilon u_t x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n)\Phi' \\ &\quad - \Phi(x_t^n x_{t-1}^{n'} - \Upsilon u_t x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n)' + \Phi(x_{t-1}^n x_{t-1}^{n'} + P_{t-1}^n)\Phi'\} \\ &\quad + n \ln |R| + \text{tr}\{R^{-1} \sum_{t=1}^n [(y_t - A_t x_t^n - \Gamma u_t)(y_t - A_t x_t^n - \Gamma u_t)' + A_t P_t^n A_t']\}. \end{aligned}$$

Para la demostración recordemos el lema 2.3, que nos indica

$$\mathbb{E}(\ln |\Sigma_0| + (x_0 - \mu_0)' \Sigma_0^{-1} (x_0 - \mu_0) | Y_n, \Theta^{j-1}) = \ln |\Sigma_0| + \text{tr}\{\Sigma_0^{-1}[P_0^n + (x_0 - \mu_0)(x_0 - \mu_0)']\} \quad (2.7)$$

Ahora observemos que

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(n \ln |Q| + \sum_{t=1}^n (x_t - \Phi x_{t-1} - \Upsilon u_t)' Q^{-1} (x_t - \Phi x_{t-1} - \Upsilon u_t) | Y_n, \Theta^{j-1}\right) \\ &= n \ln |Q| + Q^{-1} \sum_{t=1}^n \mathbb{E}((x_t - \Phi x_{t-1} - \Upsilon u_t)(x_t - \Phi x_{t-1} - \Upsilon u_t)' | Y_n, \Theta^{j-1}), \end{aligned}$$

lo cual se logró por la aplicación de la propiedad de la traza de una matriz (2.4) y la esperanza condicional de  $(x_t - \Phi x_{t-1} - \Upsilon u_t)' Q^{-1} (x_t - \Phi x_{t-1} - \Upsilon u_t)$ . Sumando y restando  $x_t^n$  nos queda la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left((x_t - \Phi x_{t-1} - \Upsilon u_t + x_t^n - x_t^n)(x_t - \Phi x_{t-1} - \Upsilon u_t + x_t^n - x_t^n)' | Y_n, \Theta^{j-1}\right) \\ &= \mathbb{E}\left([(x_t - x_t^n) + (x_t^n - \Phi x_{t-1} - \Upsilon u_t)][(x_t - x_t^n) + (x_t^n - \Phi x_{t-1} - \Upsilon u_t)]' | Y_n, \Theta^{j-1}\right) \\ &= \mathbb{E}\left([(x_t - x_t^n)(x_t - x_t^n)' + (x_t - x_t^n)(x_t^n - \Phi x_{t-1} - \Upsilon u_t)' + (x_t^n - \Phi x_{t-1} - \Upsilon u_t)(x_t - x_t^n)' \right. \\ &\quad \left. + (x_t^n - \Phi x_{t-1} - \Upsilon u_t)(x_t^n - \Phi x_{t-1} - \Upsilon u_t)'\right] | Y_n, \Theta^{j-1}). \end{aligned}$$

Por definición de  $P_t^n$ , el primer sumando es igual a

$$\mathbb{E} [(x_t - x_t^n)(x_t - x_t^n)'] = P_t^n.$$

Recordemos que  $x_t^n$  es  $Y_n$  medible, el segundo sumando nos queda

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( (x_t - x_t^n)(x_t^n - \Phi x_{t-1} - \Upsilon u_t)' | Y_n, \Theta^{j-1} \right) \\ &= \mathbb{E} \left( (x_t - x_t^n) \{ (x_t^n - \Phi x_{t-1}) - \Upsilon u_t \}' | Y_n, \Theta^{j-1} \right) \\ &= \mathbb{E} \left( (x_t - x_t^n)(x_t^n - \Phi x_{t-1})' - (x_t - x_t^n)(\Upsilon u_t)' | Y_n, \Theta^{j-1} \right) \\ &= \mathbb{E} \left( (x_t - x_t^n)(x_t^n - \Phi x_{t-1})' | Y_n, \Theta^{j-1} \right), \end{aligned}$$

ahora sumamos y restamos  $\Phi x_{t-1}^n$  para obtener

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( (x_t - x_t^n) [(x_t^n - \Phi x_{t-1}^n) + (\Phi x_{t-1}^n - \Phi x_{t-1})]' | Y_n, \Theta^{j-1} \right) \\ &= \mathbb{E} \left( (x_t - x_t^n)(x_t^n - \Phi x_{t-1}^n)' - (x_t - x_t^n)(x_{t-1} - x_{t-1}^n)' \Phi' | Y_n, \Theta^{j-1} \right) \\ &= \mathbb{E} \left( (x_t - x_t^n)(x_t^n - \Phi x_{t-1}^n)' | Y_n, \Theta^{j-1} \right) - P_{t,t-1}^n \Phi' \\ &= -P_{t,t-1}^n \Phi'. \end{aligned}$$

Como el tercer miembro es análogo al segundo, en este caso es la transpuesta, entonces:

$$-\Phi P_{t,t-1}^n {}'.$$

Observemos el cuarto miembro, le sumamos y restamos  $\Phi x_{t-1}^n$  en ambos factores, resultando

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ (x_t^n - \Phi x_{t-1} - \Upsilon u_t)(x_t^n - \Phi x_{t-1} - \Upsilon u_t)' | Y_n, \Theta^{j-1} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ (x_t^n - \Phi x_{t-1} + \Phi x_{t-1}^n - \Phi x_{t-1}^n - \Upsilon u_t)(x_t^n - \Phi x_{t-1} + \Phi x_{t-1}^n - \Phi x_{t-1}^n - \Upsilon u_t)' | Y_n, \Theta^{j-1} \right]. \end{aligned}$$

Ordenando la expresión anterior

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \left[ \Phi(x_{t-1}^n - x_{t-1}) + (x_t^n - \Phi x_{t-1}^n) - \Upsilon u_t \right] \left[ \Phi(x_{t-1}^n - x_{t-1}) + (x_t^n - \Phi x_{t-1}^n) - \Upsilon u_t \right]' | Y_n, \Theta^{j-1} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \Phi(x_{t-1}^n - x_{t-1})(x_{t-1}^n - x_{t-1})' \Phi' + (x_t^n - \Phi x_{t-1}^n)(x_{t-1}^n - x_{t-1})' \Phi' - \Upsilon u_t (x_{t-1}^n - x_{t-1})' \Phi' \right. \\ & \quad \left. + \Phi(x_{t-1}^n - x_{t-1})(x_t^n - \Phi x_{t-1}^n)' + (x_t^n - \Phi x_{t-1}^n)(x_t^n - \Phi x_{t-1}^n)' - \Upsilon u_t (x_t^n - \Phi x_{t-1}^n)' \right. \\ & \quad \left. - \Phi(x_{t-1}^n - x_{t-1})u_t' \Upsilon' - (x_t^n - \Phi x_{t-1}^n)u_t' \Upsilon' + \Upsilon u_t u_t' \Upsilon' | Y_n, \Theta^{j-1} \right]. \end{aligned}$$

Notemos que los siguientes factores son iguales a cero, porque  $x_t^n$  es  $Y_n$  medible

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(x_t^n - \Phi x_{t-1}^n)(x_{t-1}^n - x_{t-1})'\Phi' | Y_n, \Theta^{j-1}] &= 0 \\ \mathbb{E}[\Upsilon u_t(x_{t-1}^n - x_{t-1})'\Phi' | Y_n, \Theta^{j-1}] &= 0 \\ \mathbb{E}[\Phi(x_{t-1}^n - x_{t-1})(x_t^n - \Phi x_{t-1}^n) | Y_n, \Theta^{j-1}] &= 0 \\ \mathbb{E}[\Phi(x_{t-1}^n - x_{t-1})u_t'\Upsilon' | Y_n, \Theta^{j-1}] &= 0.\end{aligned}$$

De la definición de  $P_t^n$ , obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E} & \left[ (x_t^n - \Phi x_{t-1}^n - \Upsilon u_t)(x_t^n - \Phi x_{t-1}^n - \Upsilon u_t)' | Y_n, \Theta^{j-1} \right] \\ &= \Phi P_{t-1}^n \Phi' + x_t^n x_t^{n'} - x_t^n x_{t-1}^{n'} \Phi' - \Phi x_{t-1}^n x_t^{n'} + \Phi x_{t-1}^n x_{t-1}^{n'} \Phi' \\ & \quad - \Upsilon u_t x_t^{n'} + \Upsilon u_t x_{t-1}^{n'} \Phi' - x_t^n u_t' \Upsilon' + \Phi x_{t-1}^n u_t' \Upsilon' + \Upsilon u_t u_t' \Upsilon' \\ &= \Phi(x_{t-1}^n x_{t-1}^{n'} + P_{t-1, t-1}^n) \Phi' + (x_t^n - \Upsilon u_t)(x_t^n - \Upsilon u_t)' \\ & \quad - (x_t^n x_{t-1}^{n'} - \Upsilon u_t x_{t-1}^{n'}) \Phi' - \Phi(x_{t-1}^n x_{t-1}^{n'} - \Upsilon u_t x_{t-1}^{n'})'.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}n \ln |Q| &+ \operatorname{tr} \left[ Q^{-1} \sum_{t=1}^n \mathbb{E} \left( (x_t - \Phi x_{t-1} - \Upsilon u_t)(x_t - \Phi x_{t-1} - \Upsilon u_t)' | Y_n, \Theta^{j-1} \right) \right] \\ &= n \ln |Q| + \operatorname{tr} \left\{ Q^{-1} \sum_{t=1}^n (x_t^n - \Upsilon u_t)(x_t^n - \Upsilon u_t)' + P_t^n - (x_t^n x_{t-1}^{n'} - \Upsilon u_t x_{t-1}^{n'} + P_{t, t-1}^n) \Phi' \right. \\ & \quad \left. - \Phi(x_t^n x_{t-1}^{n'} - \Upsilon u_t x_{t-1}^{n'})' + \Phi(x_{t-1}^n x_{t-1}^{n'} + P_{t-1}^n) \Phi' \right\}.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Por último notemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[n \ln |R| &+ \sum_{t=1}^n (y_t - Ax_t - \Gamma u_t)' R^{-1} (y_t - Ax_t - \Gamma u_t) | Y_n, \Theta] \\ &= n \ln |R| + R^{-1} \sum_{t=1}^n \mathbb{E}[(y_t - Ax_t - \Gamma u_t)(y_t - Ax_t - \Gamma u_t)' | Y_n, \Theta].\end{aligned}$$

Ahora nos fijamos en

$$\mathbb{E}[(y_t - Ax_t - \Gamma u_t)(y_t - Ax_t - \Gamma u_t)' | Y_n, \Theta]$$

le sumamos y restamos  $Ax_t^n$ , luego

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} [(y_t - Ax_t - \Gamma u_t)(y_t - Ax_t - \Gamma u_t)' | Y_n, \Theta] \\
&= \mathbb{E} [(y_t - Ax_t^n - \Gamma u_t + Ax_t^n - Ax_t)(y_t - Ax_t^n - \Gamma u_t + Ax_t^n - Ax_t)' | Y_n, \Theta] \\
&= \mathbb{E} [(y_t - Ax_t^n - \Gamma u_t)(y_t - Ax_t^n - \Gamma u_t)' + (y_t - Ax_t^n - \Gamma u_t)(Ax_t^n - Ax_t)' \\
&\quad + (Ax_t^n - Ax_t)(y_t - Ax_t^n - \Gamma u_t)' + (Ax_t^n - Ax_t)(Ax_t^n - Ax_t)' | Y_n, \Theta].
\end{aligned}$$

Observemos los siguientes factores

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [(y_t - Ax_t^n - \Gamma u_t)(Ax_t^n - Ax_t)' | Y_n, \Theta] &= 0 \\
\mathbb{E} [(Ax_t^n - Ax_t)(y_t - Ax_t^n - \Gamma u_t)' | Y_n, \Theta] &= 0 \\
\mathbb{E} [(Ax_t^n - Ax_t)(Ax_t^n - Ax_t)' | Y_n, \Theta] &= AP_t^n A' \\
\mathbb{E} [(y_t - Ax_t^n - \Gamma u_t)(y_t - Ax_t^n - \Gamma u_t)' | Y_n, \Theta] &= (y_t - Ax_t^n - \Gamma u_t)(y_t - Ax_t^n - \Gamma u_t)'
\end{aligned}$$

y así tenemos que:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[ n \ln |R| + \sum_{t=1}^n (y_t - Ax_t - \Gamma u_t)' R^{-1} (y_t - Ax_t - \Gamma u_t) | Y_n, \Theta \right] \\
&= n \ln |R| + tr \left\{ R^{-1} \sum_{t=1}^n [(y_t - Ax_t^n - \Gamma u_t)(y_t - Ax_t^n - \Gamma u_t)' + AP_t^n A'] \right\} \quad (2.9)
\end{aligned}$$

Y en consecuencia de las ecuaciones (2.7), (2.8), (2.9) se obtiene  $Q(\Theta | \Theta^{j-1})$ .

□

Una vez realizado el paso anterior proseguimos con el cálculo de las estimaciones de los parámetros, es decir el *paso M*.

*Paso M* (Maximización):

En este paso se calcula  $\frac{\partial Q(\Theta | \Theta^{j-1})}{\partial \Theta} = 0$ , obteniendo las siguientes estimaciones

$$\hat{\mu}^j = x_0^n$$

$$\hat{\Sigma}_0^j = P_0^n + (x_0^n - \mu_0)(x_0^n - \mu_0)'$$

$$\hat{\Phi}^j = \sum_{t=1}^n (x_t^n x_{t-1}^{n'} - \Upsilon u_t x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n) \left( \sum_{t=1}^n x_{t-1}^n x_{t-1}^{n'} + P_{t-1,t-1}^n \right)^{-1}$$

$$\hat{Q}^j = n^{-1} \sum_{t=1}^n [(x_t^n - \Upsilon u_t)(x_t^n - \Upsilon u_t)' + P_t^n - (x_t^n x_{t-1}^{n'} - \Upsilon u_t x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n) \Phi' - \Phi(x_t^n x_{t-1}^{n'} - \Upsilon u_t x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n)' + \Phi(x_{t-1}^n x_{t-1}^{n'} + P_{t-1,t-1}^n) \Phi']$$

$$\hat{R}^j = n^{-1} \sum_{t=1}^n [(y_t - Ax_t^n - \Gamma u_t)(y_t - Ax_t^n - \Gamma u_t)' + AP_t^n A']$$

$$\hat{A}^j = \left[ \sum_{t=1}^n (y_t - \Gamma u_t) x_t^{n'} \right] \left[ \sum_{t=1}^n x_t^n x_t^{n'} + P_t^n \right]^{-1}$$

$$\hat{\Gamma}^j = \left[ \sum_{t=1}^n (y_t - Ax_t^n) u_t' \right] \left[ \sum_{t=1}^n u_t u_t' \right]^{-1}$$

$$\hat{\Upsilon}^j = \left[ \sum_{t=1}^n (x_t^n - \Phi x_{t-1}^n) u_t' \right] \left[ \sum_{t=1}^n u_t u_t' \right]^{-1}.$$

Definiendo,

$$S_{11} = \sum_{t=1}^n (x_t^n - \Upsilon u_t)(x_t^n - \Upsilon u_t)' + P_t^n,$$

$$S_{10} = \sum_{t=1}^n (x_t^n x_{t-1}^{n'} - \Upsilon u_t x_{t-1}^{n'} + P_{t,t-1}^n),$$

$$S_{00} = \sum_{t=1}^n (x_{t-1}^n x_{t-1}^{n'} + P_{t-1}^n),$$

entonces  $\Phi = S_{10} S_{00}^{-1}$  y en  $Q$  queda

$$Q = n^{-1} (S_{11} - S_{10} S_{00}^{-1} S_{10}').$$

Solo vamos a demostrar las tres últimas estimaciones, porque el procedimiento para demostrar las otras son análogas al *paso E* de los ítems **a)**, **b)**, **c)**, **d)**, **e)**, del espacio de estados simples. Para calcular la estimación de  $\hat{A}^j$  igualamos a cero la derivada de la esperanza de la función verosimilitud, resolveremos la siguiente expresión:

$$\frac{\partial}{\partial A} \left[ n \ln |R| + tr \left\{ R^{-1} \sum_{t=1}^n [(y_t - \Gamma u_t) - Ax_t^n] [(y_t - \Gamma u_t) - Ax_t^n]' + AP_t^n A' \right\} \right]$$


---

donde resulta que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A} \text{tr}\{R^{-1}AP_t^n A'\} &= \frac{\partial}{\partial A} \text{tr}\{P_t^n A' R^{-1} A\} \\ &= (R^{-1})' AP_t^n + R^{-1} AP_t^n \\ &= ((R^{-1}) + R^{-1})' AP_t^n, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A} & \left[ \text{tr}\{R^{-1}[(y_t - \Gamma u_t) - Ax_t^n][(y_t - \Gamma u_t) - Ax_t^n]'\} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial A} [\text{tr}\{R^{-1}[(y_t - \Gamma u_t)(y_t - \Gamma u_t)' - (y_t - \Gamma u_t)(Ax_t^n)' - (Ax_t^n)(y_t - \Gamma u_t)' + Ax_t^n x_t^{n'} A']\}] \\ &= \frac{\partial}{\partial A} [\text{tr}\{R^{-1}[-(y_t - \Gamma u_t)(Ax_t^n)' - (Ax_t^n)(y_t - \Gamma u_t)' + Ax_t^n x_t^{n'} A']\}] \\ &= \frac{\partial}{\partial A} [\text{tr}\{-(Ax_t^n)(R^{-1}(y_t - \Gamma u_t))' - R^{-1}(Ax_t^n)(y_t - \Gamma u_t)' + x_t^n x_t^{n'} AR^{-1} A'\}] \\ &= -R^{-1}(y_t - \Gamma u_t)(x_t^n)' - (R^{-1})'(y_t - \Gamma u_t)(x_t^n)' + ((R^{-1})' + R^{-1})A(x_t^n x_t^{n'}) \\ &= -((R^{-1})' + R^{-1})(y_t - \Gamma u_t)(x_t^n)' + ((R^{-1})' + R^{-1})A(x_t^n x_t^{n'}). \end{aligned}$$

Agrupando las dos ultimas expresiones, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A} & \left[ n \ln |R| + \text{tr} \left\{ R^{-1} \sum_{t=1}^n [(y_t - \Gamma u_t) - Ax_t^n][(y_t - \Gamma u_t) - Ax_t^n]' + AP_t^n A' \right\} \right] \\ &= \sum_{t=1}^n [ -((R^{-1})' + R^{-1})(y_t - \Gamma u_t)(x_t^n)' + ((R^{-1})' + R^{-1})A(x_t^n x_t^{n'}) + ((R^{-1}) + R^{-1})' AP_t^n ], \end{aligned}$$

y al igualar a cero se obtiene la siguiente estimacion

$$\hat{A}^j = \left[ \sum_{t=1}^n (y_t - \Gamma u_t) x_t^{n'} \right] \left[ \sum_{t=1}^n x_t^n x_t^{n'} + P_t^n \right]^{-1}.$$

Observemos que para demostrar

$$\hat{\Gamma}^j = \left[ \sum_{t=1}^n (y_t - Ax_t^n) u_t' \right] \left[ \sum_{t=1}^n u_t u_t' \right]^{-1}$$

podemos usar el mismo procedimiento anterior, para desarrollar la derivada

$$\frac{\partial}{\partial \Gamma} \left[ n \ln |R| + \text{tr} \left\{ R^{-1} \sum_{t=1}^n [(y_t - Ax_t^n) - \Gamma u_t][(y_t - Ax_t^n) - \Gamma u_t]' + AP_t^n A' \right\} \right]$$

de donde se obtiene que

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \Gamma} [\text{tr}\{R^{-1} \sum_{t=1}^n [((y_t - Ax_t^n)(y_t - Ax_t^n)' - (y_t - Ax_t^n)(\Gamma u_t)' \\
& \quad - (\Gamma u_t)(y_t - Ax_t^n)' + \Gamma u_t u_t' \Gamma') + AP_t^n A']\}] \\
&= \frac{\partial}{\partial \Gamma} [\text{tr}\{R^{-1} \sum_{t=1}^n [-(y_t - Ax_t^n)(\Gamma u_t)' - (\Gamma u_t)(y_t - Ax_t^n)' + \Gamma u_t u_t' \Gamma']\}] \\
&= \frac{\partial}{\partial \Gamma} [\text{tr}\{\sum_{t=1}^n [-(\Gamma u_t)[R^{-1}(y_t - Ax_t^n)]' - R^{-1}(\Gamma u_t)(y_t - Ax_t^n)' \\
& \quad + u_t u_t' \Gamma' R^{-1} \Gamma]\}] \\
&= \sum_{t=1}^n [-(R^{-1}(y_t - Ax_t^n))u_t' - (R^{-1})'(u_t(y_t - Ax_t^n))' \\
& \quad + ((R^{-1})' + R^{-1})\Gamma u_t u_t'] \\
&= \sum_{t=1}^n [-(\Gamma u_t)'(y_t - Ax_t^n)u_t' + ((R^{-1})' + R^{-1})\Gamma u_t u_t'].
\end{aligned}$$

Igualando a cero resulta la expresión para el estimador correspondiente.

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^n ((R^{-1})' + R^{-1})\Gamma u_t u_t' &= \sum_{t=1}^n ((R^{-1})' + R^{-1})(y_t - Ax_t^n)u_t' \\
\hat{\Gamma}^j &= \left( \sum_{t=1}^n (y_t - Ax_t^n)u_t' \right) \left( \sum_{t=1}^n u_t u_t' \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

□

De forma análoga a las demostraciones anteriores para el cálculo de las estimaciones de los elementos del vector de parámetros  $\Theta$  se demuestra la siguiente igualdad,

$$\hat{\Upsilon}^j = \left[ \sum_{t=1}^n (x_t^n - \Phi x_{t-1}^n)u_t' \right] \left[ \sum_{t=1}^n u_t u_t' \right]^{-1}.$$

Proseguimos con el resumen de la aplicación del algoritmo EM para estimar el vector de parámetros para la representación de espacio de estados.

---

*Síntesis del Algoritmo EM para la Representación de Espacio de Estados:*

1. El procedimiento se inicia a partir de la selección de los valores del vector de los parámetros de la representación de espacio de estados  $\Theta^0 = \{\mu_0, \Sigma_0, \Phi, \Upsilon, \Gamma, A, Q, R\}$ . En la iteración  $j$ , ( $j = \{1, 2, \dots\}$ ) :
2. Calculamos la función de verosimilitud de los datos conocidos,  $-\ln L_{Y_n}(\Theta^{j-1})$ , usando el filtro del Kalman.
3. El *paso E*. Usando  $\Theta^{j-1}$  empleamos el filtro, el suavizado y  $P_{t-1,t-2}^n$  para obtener las matrices  $x_t^n$ ,  $P_t^n$  y  $P_{t,t-1}^n$ , en todo  $t = \{1, \dots, n\}$ . Además utilizamos los resultados del suavizado para calcular  $S_{11}, S_{10}, S_{00}$ .
4. El *paso M*. Actualización de los estimadores  $\mu_0, \Sigma_0, \Phi, \Upsilon, \Gamma, A, Q, R$  para obtener  $\Theta^j$ .
5. Repetimos los pasos 2 – 4 hasta converger.

## 2.3. Maximizaciones Numéricas

Se manejaron distintos métodos de maximización de la función de verosimilitud, EM, Newton-Raphson y Genético; al trabajar estos métodos individualmente no arrojaron resultados satisfactorios.

El algoritmo que presentamos en este trabajo es el sugerido por Durbin y Koopman [6], que combina Newton-Raphson y EM. Este algoritmo se emplea el Newton-Raphson para estimar todos los parámetros salvo las matrices de covarianza  $Q$  y  $R$ . Éstas matrices se estiman con el algoritmo EM porque garantiza (a diferencia de Newton-Raphson) que las estimaciones son definidas positivas.

### 2.3.1. Algoritmo Newton-Raphson

El procedimiento es fijar el vector de parámetros de la representación de espacio de estados  $\Theta^0$  y desarrollar un conjunto de iteraciones de la función de verosimilitud y sus

---

dos primeras derivadas. Dado los valores iniciales de los parámetros y aplicando el método de Newton-Raphson estimamos los valores de los parámetros. Los pasos del método son:

1. Se inicializa, seleccionando los valores iniciales del vector de los parámetros de la representación de espacio de estados  

$$\Theta^0 = \{A^0, \Upsilon^0, \Phi^0, \Gamma^0, Q^0, R^0\}.$$
 En la iteración  $j = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
2. Empleamos el filtro del Kalman, usando  $\Theta^j$ , para obtener el conjunto de los errores de predicción y su matriz de covarianza de los errores ( $\{\epsilon_t^{(j)}; t = \{1, \dots, n\}\}$  y  $\{\Sigma_t^{(j)}; t = \{1, \dots, n\}\}$ ).
3. Corremos una iteración de Newton-Raphson usando a la función  $-\ln L_{Y_n}(\Theta)$  como función objetivo para obtener el nuevo vector de parámetros, llamado  $\Theta^{(j+1)}$ . El calculo de la función de verosimilitud se obtiene con el filtro de Kalman.
4. Repetimos los pasos 2 y el 3 cambiando  $j + 1 = j$ , es decir se inicializa con el último  $\Theta^{(j+1)}$  estimado, que se denota por  $\Theta^{(j)}$ . Los pasos se repiten hasta que se estabilice  $-\ln L_{Y_n}(\Theta)$  o se estabilicen los valores de los parámetros estimados.

### 2.3.2. Algoritmo Sugerido por Durbin y Koopman

Combina el algoritmo Newton-Raphson y EM.

0. Inicializamos con la selección de los datos iniciales  $\Theta^0 = \{\Phi^0, \Upsilon^0, Q^0, A^0, \Gamma^0, R^0\}$ .  
 En la iteración  $j = \{1, 2, 3, \dots\}$  :

Para este método mencionaremos dos estilos diferentes de su aplicación:

1. Versión 1: Se estima primero todos los parámetros salvo las matrices de covarianza.
    - 1.0 Se emplea el filtro de Kalman para usar la función de verosimilitud  $-\ln(L_{Y_n}(\Theta))$  como función objetivo.
-

- 1.1 Con una iteración de Newton-Raphson para el vector  $\Theta^{j-1}$  se computa  $\{\Phi^j, \Upsilon^j, A^j, \Gamma^j\}$ .
- 1.2 Usando  $\{\Phi^j, \Upsilon^j, A^j, \Gamma^j, Q^{j-1}, R^{j-1}\}$  con EM se calcula  $Q^j, R^j$ .
- 1.3 Volvemos usar el filtro de Kalman para calcular  $-\ln(L_{Y_n}(\Theta^j))$  para compararlo con el valor del  $-\ln(L_{Y_n}(\Theta^{j-1}))$ .

Se repite los pasos del 1.0 hasta 1.3; se detiene cuando se estabilice  $-\ln(L_{Y_n}(\Theta))$  y arrojen valores satisfactorios.

2. Versión 2: Se estima primero las matrices de covarianza.

- 2.0 Se emplea el filtro de Kalman para usar la función de verosimilitud,  $-\ln(L_{Y_n}(\Theta))$ , como función objetivo.
- 2.1 Empleamos el algoritmo EM usando  $\Theta^{j-1}$  para estimar  $R^j, Q^j$ .
- 2.2 Usando  $\{\Phi^{j-1}, \Upsilon^{j-1}, A^{j-1}, \Gamma^{j-1}, Q^j, R^j\}$  aplicamos una iteración del algoritmo Newton-Raphson para calcular  $\{\Phi^j, \Upsilon^j, A^j, \Gamma^j\}$ .
- 2.3 Calculamos  $-\ln(L_{Y_n}(\Theta^j))$  con el filtro de Kalman para compararlo con el valor del  $-\ln(L_{Y_n}(\Theta^{j-1}))$ .

Se repite los pasos del 2.0 hasta 2.3; se detiene cuando se estabilice  $-\ln(L_{Y_n}(\Theta))$  y arrojen valores satisfactorios.

3. Se selecciona el  $\Theta$  del versión 1 ó 2, el que mejor resultado arroje, luego aplicamos el filtro de Kalman y su suavizado para estimar los vectores de estados y graficar sus resultados. En este trabajo se usaron los resultados dado por el versión 1.

## La Relación Producto e Inflación en la Economía Venezolana

El producto considerado en este trabajo es el PIB (producto interno bruto), es un indicador estadístico que mide la cantidad total de bienes y servicios producidos por el país en un periodo de tiempo. La inflación es el crecimiento continuo y generalizado de los precios de los bienes, servicios y factores productivos de una economía a lo largo del tiempo. La relación entre la inflación y el producto es un tema de gran importancia para los economistas, evidencia de ello se refleja en el constante esfuerzo que dedican para cuantificar esta relación.

Los conceptos de producto potencial, producto observado (actual) y la brecha del producto, son necesario para la comprensión de este trabajo. Se define el producto potencial como el nivel máximo de producción que puede realizar una economía considerando los recursos humanos físicos, organizacionales y tecnológicas con que se cuenta (el nivel de producción de pleno empleo). El producto observado es la producción que se registra cada año. Se conoce como brecha del producto la diferencia entre el producto potencial y producto observado.

Cuando el producto observado es mayor que el potencial hay presiones inflacionarias, es decir la demanda presiona a un nivel mayor de inflación. Mientras que si el producto

observado está por debajo del potencial, quiere decir, que no se están utilizando los recursos de los que la economía dispone, por tanto los precios no perciben presiones inflacionarias. Los conceptos expuestos anteriormente se encuentra en los libros de macroeconomía de los autores Bernanke Ben y Frank Robert [2], Larraín y Sachs [16].

La relación lineal con pendiente positiva entre la inflación y la brecha del producto en la economía se denomina curva de Phillips. Existen diferentes modelos de curva de Phillips, muchas de ellas difieren del tratamiento que se le da a la inflación estructural, la inflación inercial y a las expectativas inflacionarias. Es importante mencionar que la inflación estructural, es la inflación que habría si el producto fuese igual a su producto potencial y no hubiera perturbaciones de oferta, definido por David Romer [18].

En este trabajo consideramos el modelo conformado por una curva de Phillips Neo-keynesiana y la curva de la demanda agregada, planteado en el artículo de Pagliacci y Barraéz (2008)[17]. Donde la inflación estructural lo miden como la inflación rezagada o el comportamiento inercial de la inflación, en tanto que el producto potencial lo estiman a través del filtro de Hodrick-Prescott; también ellos toman en cuenta el cambio de régimen<sup>1</sup> y estiman al modelo de forma univariada por medio del algoritmo EM, siguiendo las sugerencias de Halmiton[11].

La curva de Phillips Neo-Keynesiana estudiado por Pagliacci y Barraéz (2008)[17], donde la inflación depende de la inflación estructural y de la brecha del producto, es descrita de la siguiente manera:

$$\pi_t = \hat{\pi}_{s_i} + \alpha_{s_i}(y_{t-1} - y_{t-1}^*) + \gamma_{s_i}M_{t-2} + \delta_{s_i}\hat{E}_{t-1} + \pi_t^* + \epsilon_t^\pi, \text{ para } s_i = \{1, 2\}, t \in \{1, 2, \dots, 72\}.$$

Siendo  $\pi_t$  la tasa anual promedio de la inflación,  $\pi_t^*$  la inflación estructural,  $y_t^*$  el producto potencial de la economía,  $y_t$  el producto observado,  $M_t$  la proporción que representa el dinero creado por el sector público en un año respecto al valor nominal del producto interno bruto y  $\hat{E}_t$  la tasa de depreciación anual promedio de la moneda nacional, medida como la variación logarítmica anual del tipo de cambio nominal promedio<sup>2</sup>. El subíndice

---

<sup>1</sup>El cambio de régimen a considerarse en la demanda agregada son del ciclo económico expansivo y recesivo; para la inflación son de alta y baja inflación.

<sup>2</sup>Durante los períodos de control de cambio (1994-1996 y 2003-2009), este tipo de cambio se refiere al

$s_i$  de los coeficientes de la ecuación, denota que sus valores están sujetos a la ocurrencia de cambios de regímenes.

Consideran también la curva de la demanda agregada, que representa la relación entre el crecimiento de corto plazo del producto y los principales determinantes de sus componentes por el lado de la demanda, estas son, el comportamiento del consumo y la inversión. Por medio de esta curva se modela el producto, estructurado de la siguiente forma:

$$y_t = \hat{y}_{s_i} + \lambda_{s_i}(y_{t-1} - y_{t-1}^*) + \phi_{s_i}\hat{G}_{t-1} + \varphi_{s_i}\hat{W}_{t-2} + y_t^* + \epsilon_t^y \text{ para } s_i = \{1, 2\}, t \in \{1, 2, \dots, 72\}.$$

en la cual, el producto a tiempo  $t$  es función del producto rezagado,  $\hat{G}_t$  es el crecimiento anual promedio del gasto real del sector público<sup>3</sup> y  $\hat{W}_t$  es la tasa de crecimiento de los ingresos anuales por concepto de exportaciones petroleras de la economía venezolana; ambas variables calculadas por variación logarítmica anual del tipo de cambio nominal promedio.

En nuestro caso, consideraremos el modelo anterior conformado por la curva Phillips Neo-Keynesiana y la curva de la demanda agregada sin cambio de régimen y se incluye tres variables exógenas, estas son, el acervo de capital de la economía  $k$ , la cantidad de trabajadores empleados  $l$  y las exportaciones petroleras  $ep$ ; estas variables exógenas están expresadas en variación logarítmicas anual. La variante del modelo es:

la inflación,

$$\pi_t = \hat{\pi} + \alpha(y_{t-1} - y_{t-1}^*) + \gamma M_{t-2} + \delta \hat{E}_{t-1} + \pi_t^* + \epsilon_t^\pi, \quad (3.1)$$

el producto,

$$y_t = \hat{y} + \lambda(y_{t-1} - y_{t-1}^*) + \phi \hat{G}_{t-1} + \varphi \hat{W}_{t-2} + y_t^* + \epsilon_t^y. \quad (3.2)$$

Donde,

$$\pi_t^* = \rho_1 \pi_{t-1}^* + \rho_2 \pi_{t-2}^* + \tau_1 + \tau_2 M_{t-2} + \tau_3 \hat{E}_{t-1} + \tau_4 ep + \nu_1, \quad (3.3)$$

$$y_t^* = \rho_3 \pi_{t-1}^* + \rho_4 y_{t-1}^* + \rho_5 y_{t-2}^* + \tau_5 + 0,55k + 0,3l + 0,15ep + \nu_2. \quad (3.4)$$

---

valor del U.S dólar en el mercado no oficial de divisas.

<sup>3</sup>Esta variable es definida como los gastos corrientes del gobierno central y la compañía estatal petrolera (PDVSA), deflactados por el índice de precios al consumidor.

---

Es importante destacar, la inflación estructural y el producto potencial son variables que no son directamente observables y esta es una de las razones por las cuales, la labor que tienen los economistas de comprender la dinámica de las fluctuaciones de la economía se dificulta. Estas variables forman el vector llamado vector de estado, su estimación lo realizamos conjuntamente aplicando el filtro de Kalman en una representación de espacio de estados, para mostrar la interrelación que hay entre la inflación estructural y el producto potencial. Estableciendo la diferencia con el modelo de Pagliacci y Barráez, porque el modelo conformado por las ecuaciones (3.1) hasta (3.4) las variables no observadas son endógenas y se estiman de forma multivariada.

### 3.1. Representación de Espacio de Estados

La representación formada de espacio de estados del modelo planteado en las ecuaciones (3.1) hasta (3.4) es la siguiente

**Ecuación de Observación:**

$$y_t = Ax_t + \Gamma u_t + \nu_t, \quad t \in \{1, 2, \dots, 72\}.$$

En forma matricial, es

$$\begin{pmatrix} \pi_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_t^* \\ y_t^* \\ \pi_{t-1}^* \\ y_{t-1}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\pi} & \alpha & \gamma & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{y} & \lambda & 0 & 0 & \phi & \varphi & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y_{t-1} \\ M_{t-2} \\ \hat{E}_{t-1} \\ \hat{G}_{t-1} \\ \hat{W}_{t-2} \\ k \\ l \\ ep \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_t^\pi \\ \epsilon_t^y \end{pmatrix}$$

**Ecuación de Estado:**

$$x_t = \Phi x_{t-1} + \Upsilon u_t + w_t, \quad \text{con } w_t \sim N(0, Q) \text{ y } t \in \{1, 2, \dots, 72\}.$$

En forma matricial, es

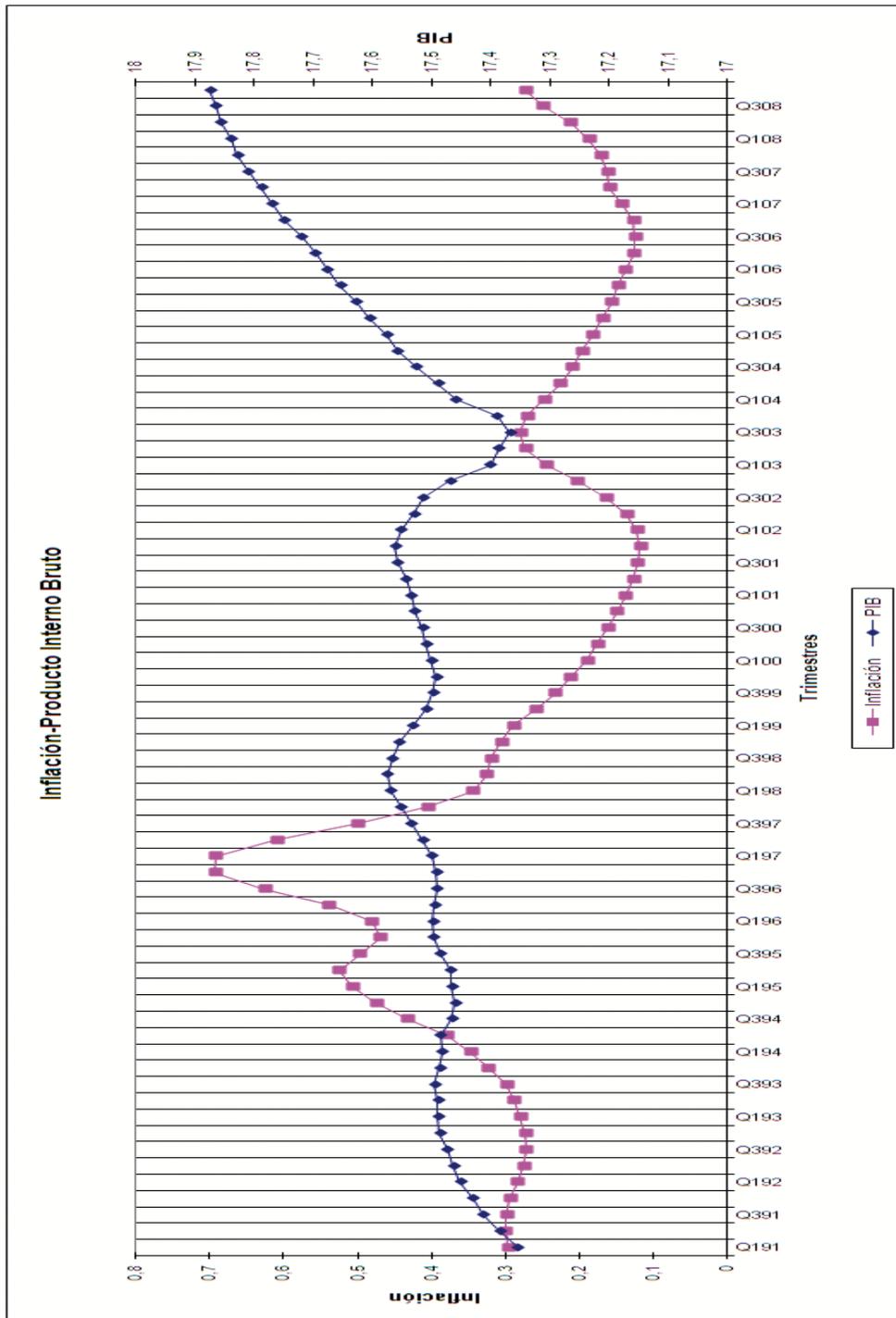
$$\begin{pmatrix} \pi_t^* \\ y_t^* \\ \pi_{t-1}^* \\ y_{t-1}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & \rho_2 & 0 \\ \rho_3 & \rho_4 & 0 & \rho_5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_{t-1}^* \\ y_{t-1}^* \\ \pi_{t-2}^* \\ y_{t-2}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 & \tau_2 & \tau_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_4 \\ \tau_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,55 & 0,3 & 0,15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y_{t-1} \\ M_{t-2} \\ \hat{E}_{t-1} \\ \hat{G}_{t-1} \\ \hat{W}_{t-2} \\ k \\ l \\ ep \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} q1 & q2 & 0 & 0 \\ q2 & q3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De acuerdo a lo establecido por la teoría económica y lo señalado en el artículo de Pagliacci y Barrález [17] en la ecuación de observación los parámetros  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\lambda$ ,  $\delta$ ,  $\phi$ ,  $\varphi$  deben ser mayor que cero. Supondremos en la ecuación de estado, la inflación estructural y el producto potencial tienen un proceso autorregresivo de segundo orden, la ecuación de estado nos muestra que la inflación estructural está únicamente determinada por las variables nominales y las exportaciones petroleras donde la incidencia en el comportamiento de la inflación es de corto plazo (la cantidad relativa de dinero y el tipo de cambio nominal), nos permite pensar que  $\tau_2, \tau_3, \tau_4$  sean mayor estricto al valor cero ( $\tau_2, \tau_3, \tau_4 > 0$ ). Es decir, el nivel de inflación estructural no está atado al nivel de producto potencial y puede tomar múltiples valores una vez establecido el nivel de dicho producto. También, la inflación estructural pasada afecta al producto potencial actual, esto sucede si  $\rho_3$  tiene valor distinto de cero ( $\rho_3 \neq 0$ ). Igualmente notamos, que el producto potencial está en función del acervo de capital de la economía, la cantidad de trabajadores empleados y las exportaciones petroleras, sus coeficientes son valores fijados y estos son 0,55, 0,35, 0,1 respectivamente, basado en los estudios de Dorta [5]; generando sobre la producción un incremento en la renta petrolera.

La fuente de las variables observadas  $y_t$ ,  $\pi_t$  y exógenas  $y_{t-1}$ ,  $M_{t-2}$ ,  $\hat{E}_{t-1}$ ,  $\hat{G}_{t-1}$ ,  $\hat{W}_{t-2}$ ,  $k$ ,  $l$ ,  $ep$  son del Banco Central de Venezuela (BCV) y del Instituto Nacional de Estadística (INE). Los datos de las variables son desde el primer trimestre del año 1991 hasta el cuarto trimestre del año 2008, asimismo teniendo un total de 72 datos de cada una de las

variables. Observemos el comportamiento de la inflación ( $\pi$ ) y el producto interno bruto (PIB) denotada como  $y_t$  durante el periodo de estudio.



Para obtener los vectores de estados por medio del filtro de Kalman, necesitamos las estimaciones de los parámetros de la representación de espacios de estados; estos se obtienen partiendo de numerosos valores iniciales, algunos de los cuales convergieron a diversos máximos locales de la función verosimilitud, lo mostramos en el cuadro 3.1. Para simplificar el procedimiento de estimación, supondremos que no hay errores de medición; es decir  $\epsilon_t^\pi = \epsilon_t^y = 0$ , por lo tanto, la única fuente de perturbaciones aleatorias esta presente en la ecuación de estado.

Cuadro 3.1: *Valores de los parámetros iniciales*

Parámetros	Valor inicial	Variable asociado
Ecuación de Observación		Inflación
$\hat{\pi}$	-0.07	1
$\alpha$	0.3	$(y_{t-1} - y_{t-1}^*)$
$\gamma$	0	$M_{t-2}$
$\delta$	0.25	$\hat{E}_{t-1}$
		Producto
$\hat{y}$	0	1
$\lambda$	0.8	$(y_{t-1} - y_{t-1}^*)$
$\phi$	0.1	$\hat{G}_{t-1}$
$\varphi$	0.05	$\hat{W}_{t-2}$
Ecuación de Estado		Inflación Estructural
$\rho_1$	1.5	$\pi_{t-1}^*$
$\rho_2$	0.15	$\pi_{t-2}^*$
$\tau_1$	0.05	1
$\tau_2$	0.1	$M_{t-2}$
$\tau_3$	0.05	$\hat{E}_{t-1}$
$\tau_4$	0.1	$ep$
		Producto Potencial
$\rho_3$	-0.1	$\pi_{t-1}^*$
$\rho_4$	-0.4	$y_{t-1}^*$
$\rho_5$	-0.1	$y_{t-2}^*$
$\tau_5$	13.7	1
$Q$		
$q_{1,1}$	0,1225	
$q_{1,2}$	0,000525	
$q_{2,2}$	0,0225	

Después de exhaustivos e infructuosos intentos de la combinación del algoritmo genético y EM, se obtuvieron resultados satisfactorios por medio de la combinación de los algoritmos Newton-Raphson y EM, estimando  $\Phi, A, \Gamma, \Upsilon$  y  $Q$  respectivamente. Ya que, así nos evitamos que no sea definida positiva la matriz de covarianza de la ecuaciones de estado. Esta idea es tomada de Durbin y Koopman [6] y seguimos los pasos mencionados en la sección 2.3.2.

A continuación los resultados de las estimaciones de los parámetros.

Cuadro 3.2: *Valores de los parámetros estimados*

Parámetros	Estimación	Variable asociado
Ecuación de Observación		Inflación
$\hat{\pi}$	-0.127	1
$\alpha$	0.228	$(y_{t-1} - y_{t-1}^*)$
$\gamma$	0.407	$M_{t-2}$
$\delta$	0.356	$\hat{E}_{t-1}$
		Producto
$\hat{y}$	-0.0099	1
$\lambda$	0.567	$(y_{t-1} - y_{t-1}^*)$
$\phi$	0.046	$\hat{G}_{t-1}$
$\varphi$	0.024	$\hat{W}_{t-2}$
Ecuación de Estado		Inflación Estructural
$\rho_1$	0.999	$\pi_{t-1}^*$
$\rho_2$	0	$\pi_{t-2}^*$
$\tau_1$	0.005	1
$\tau_2$	-0.009	$M_{t-2}$
$\tau_3$	-0.001	$\hat{E}_{t-1}$
$\tau_4$	0	$ep$
		Producto Potencial
$\rho_3$	-0.073	$\pi_{t-1}^*$
$\rho_4$	-0.343	$y_{t-1}^*$
$\rho_5$	-0.141	$y_{t-2}^*$
$\tau_5$	13	1

Usando Newton-Raphson para estimar los parámetros a partir de los datos iniciales, luego estas estimaciones son usada para estimar el nuevo  $Q$  aplicando el algoritmo EM,

así obtenemos los siguientes resultados:

$$Q = \begin{pmatrix} 0,00661053356520321 & 0,00304370828492593 & 0 & 0 \\ 0,00304370828156526 & 0,0145778276849266 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de  $Q$  son:

$$\begin{pmatrix} 0,00558083802645442 \\ 0,0156075232236754 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Q_{11}$	0.0813051878123605
$Q_{22}$	0.205519698857997
Coefficiente de correlación	0.310054731302355

El valor del logaritmo de la verosimilitud es -378.19; de acuerdo al resultado del coeficiente de correlación nos indica que la relación entre los errores es débil. Con respecto a la ecuación de observación, notamos que los valores estimados de los parámetros  $\alpha, \lambda, \gamma, \delta, \phi, \varphi$  tienen sentidos económicos significativos, porque todos ellos toman valores dentro del intervalo abierto desde el valor cero hasta el valor uno ( $0 < \alpha, \lambda, \gamma, \delta, \phi, \varphi < 1$ ). Analizando los parámetros estimados de la ecuación de estados, se nota que la inflación estructural sigue un proceso de un autorregresivo de orden uno, ya que,  $\rho_1 = 0,99, \rho_2 = 0$  y  $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \approx 0$ , además está determinada por el impacto que ocasiona las variables  $M_{t-2}$  y  $\hat{E}_{t-1}$ , con un comportamiento cercano al de una caminata aleatoria. En cambio para el producto potencial, los resultados de la estimación muestra que éste tiene un comportamiento de un autorregresivo de orden dos; podemos observar que un aumento en la inflación estructural pasada genera una contracción del producto potencial ( $\rho_3 < 0$ ), no se descarta la idea de que altas inflaciones pueden deteriorar el crecimiento de la economía a largo plazo. Con todos los parámetros estimados podemos hacer uso del algoritmo del filtro de Kalman y el suavizado, así mismo obtenemos la inflación estructural y el producto potencial, lo logramos observar en las siguientes gráficas de Inflación & Inflación Estructural y del Producto & Producto Potencial.

Figura 3.1: Inflación & Inflación Estructural

Coef. Corr 0,845

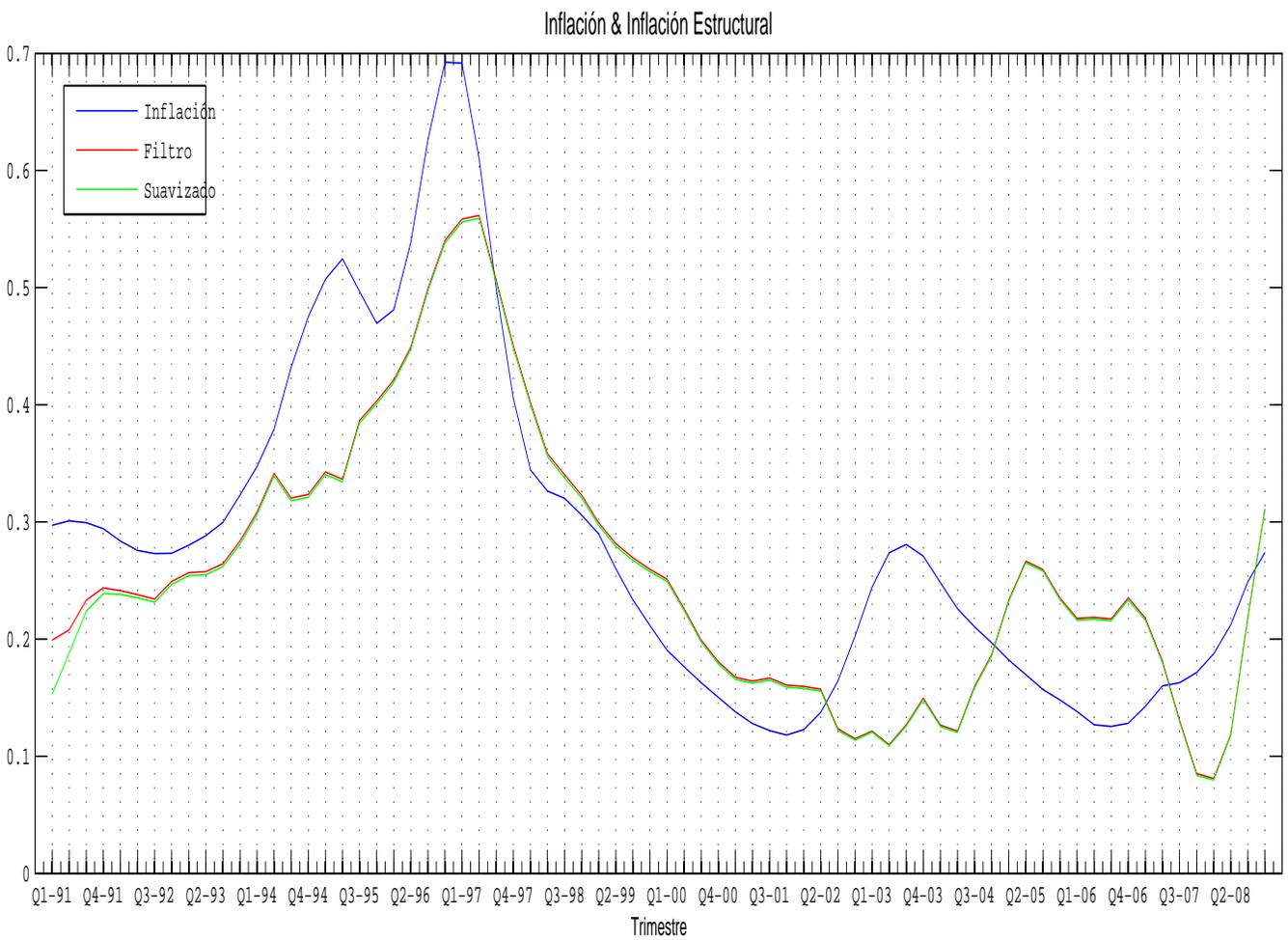
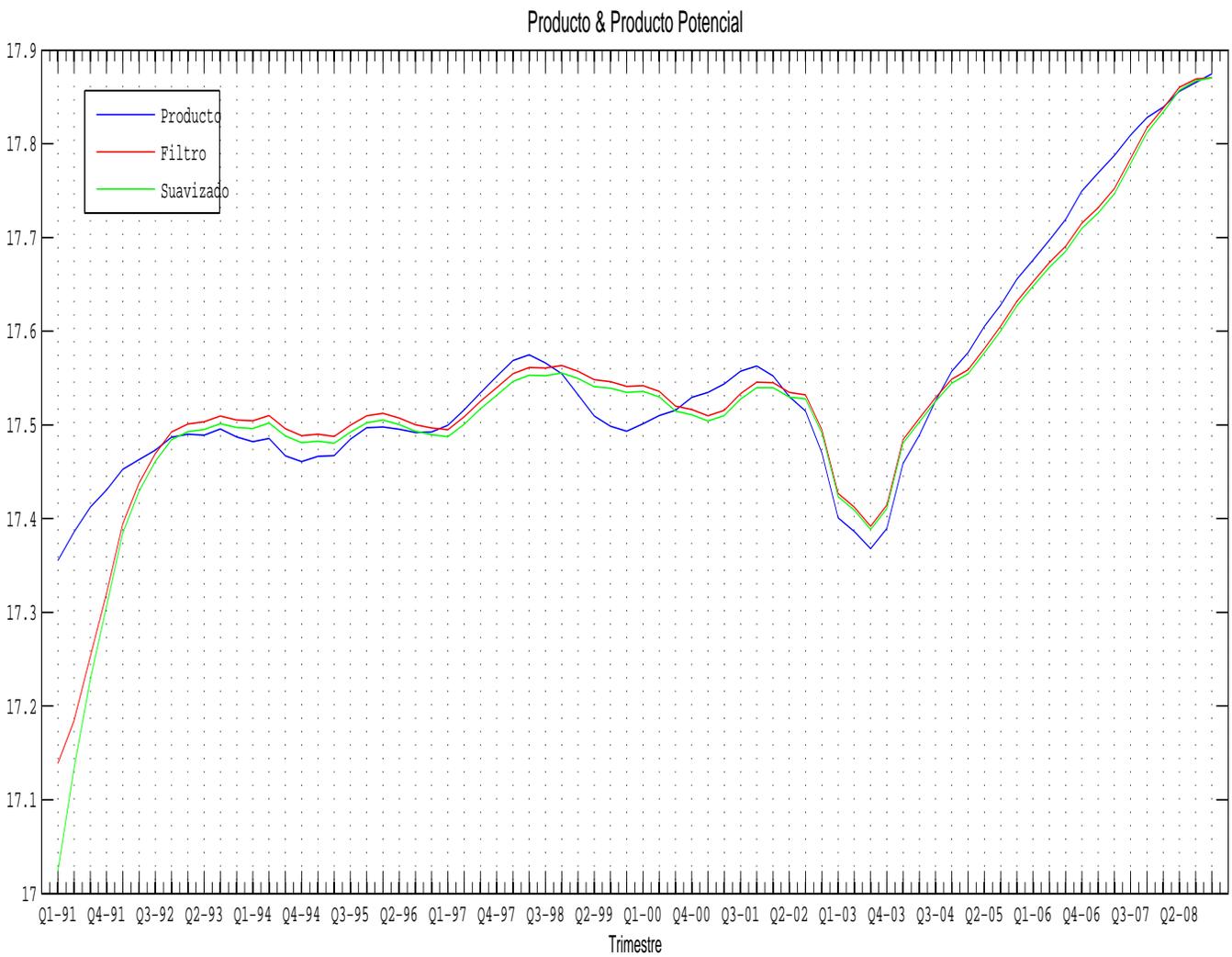


Figura 3.2: Producto & Producto Potencial  
Coef. Corr 0,936



### 3.1.1. Análisis de la Brecha del PIB y de la Brecha Inflacionaria

Se entiende como ciclo económico la diferencia entre el producto y el producto potencial; si la diferencia es positiva ( $y - y^* > 0$ ) por dos o más trimestres consecutivos es llamado ciclo expansivo. En el caso contrario es ciclo recesivo, donde la diferencia es negativa ( $y - y^* < 0$ ) por dos o más trimestres consecutivos. Información dada por Cartaya Virginia en la revista *bcvoz* [3].

De acuerdo a los gráficos del Producto & Producto Potencial (figura 3.2), Brecha Inflacionaria & Brecha del Producto (figura 3.3, pag.65), Brecha del Producto & Variables Exógenas (figura 3.4, pag.66) y de los cuadros 3.3, 3.4 (pag.61 y pag.64), se observan ocho ciclos, donde el producto fluctúa alrededor del producto potencial. A continuación explicaremos los periodos donde ocurre los cambios en el producto en base a los valores de las variables explicativas tabuladas en el cuadro 3.6 (pag.71), representadas graficamente en las figuras 3.4, 3.5, B.1 y B.2.

Cuadro 3.3: *Ciclos Expansivo y Recesivo*

$\pi > \pi^*$ Brecha Inflacionaria Positiva	$\pi < \pi^*$ Brecha Inflacionaria Negativa	$y > y^*$ Ciclo Expansivo	$y < y^*$ Ciclo Recesivo
$Q_1 - 91$ hasta $Q_2 - 97$	$Q_3 - 97$ hasta $Q_2 - 02$	$Q_1 - 91$ hasta $Q_3 - 92$	$Q_4 - 92$ hasta $Q_4 - 96$
$Q_3 - 02$ hasta $Q_4 - 04$	$Q_1 - 05$ hasta $Q_2 - 07$	$Q_1 - 97$ hasta $Q_3 - 98$	$Q_4 - 98$ hasta $Q_3 - 00$
$Q_3 - 07$ hasta $Q_3 - 08$	$Q_4 - 08$ hasta $Q_4 - 08$	$Q_4 - 00$ hasta $Q_1 - 02$	$Q_2 - 02$ hasta $Q_3 - 04$
		$Q_4 - 04$ hasta $Q_4 - 07$	$Q_1 - 08$ hasta $Q_4 - 08$

En el primer ciclo expansivo esta comprendido desde el primer trimestre del año 1991 hasta el tercer trimestre del año 1992, es ocasionado por la tasa de crecimiento de los ingresos por las exportaciones petroleros rezagado a dos periodos  $\hat{W}_{t-2}$  y la brecha rezagada, ya que, supera al gasto real del sector público  $\hat{G}_{t-1}$ ; entonces hay presiones inflacionarias durante este ciclo.

Seguido a este ciclo, se genera un ciclo recesivo que culmina en el cuarto trimestre del año 1996. En la primera parte del segundo ciclo recesivo, se observa una caída del gasto real del sector público  $\hat{G}_{t-1}$ , de la brecha rezagada y de los ingresos petroleros. En la segunda parte el aumento de los ingresos petroleros no compensa la caída del gasto real

del sector público y la brecha rezagada.

Posteriormente, puede apreciarse el tercer ciclo expansivo, que inicia el primer trimestre del año 1997 y culmina el tercer trimestre del año 1998, es propiciado por el aumento de la brecha rezagada, el gasto real del sector público  $\hat{G}_{t-1}$  y los ingresos petroleros rezagado  $\hat{W}_{t-2}$ .

El cuarto ciclo, comprendido entre el cuarto trimestre del año 1998 hasta el tercer trimestre del año 2000 es recesivo, se presenta una fuerte caída en las variables rezagadas representadas por  $\hat{W}_{t-2}$ ,  $\hat{G}_{t-1}$ , así como de la brecha rezagada.

En contraste el quinto ciclo, el cual finaliza en el primer trimestre del año 2002, es un ciclo expansivo donde se observa un aumento en el gasto real del sector público  $\hat{G}_{t-1}$ , seguido por el aumento de la brecha rezagada y de los ingresos petroleros rezagados  $\hat{W}_{t-2}$ .

En el siguiente ciclo es recesivo, producto de la caída en los ingresos petroleros rezagados  $\hat{W}_{t-2}$ , que propició una disminución del gasto real público rezagado  $\hat{G}_{t-1}$ . Adicionalmente, durante este periodo se produjo el paro petrolero que condujo a una fuerte depresión del producto, este ciclo se acaba en el tercer trimestre del año 2004.

Ahora para este penúltimo ciclo expansivo se aprecia aumentos de la brecha rezagada, en el gasto del sector público  $\hat{G}_{t-1}$  y de los ingresos petroleros rezagados  $\hat{W}_{t-2}$ , que conlleva a un periodo de auge económico.

En cambio durante todo el año 2008 se observa un leve aumento de los ingresos petroleros rezagados  $\hat{W}_{t-2}$ , pero una fuerte caída de la brecha rezagada, así como en el gasto real del sector público  $\hat{G}_{t-1}$ , que conllevaron a un ciclo recesivo.

De acuerdo a lo planteado por los libros de macroeconomía de Bernank y Frank [2] y de Larrain y Sachs [16], durante los ciclos expansivos se debería esperar un aumento en la inflación y durante los ciclos recesivos ésta debería bajar. Sin embargo, para el caso Venezolano esto no se cumple, debido a que en el país se puede observar que la brecha del producto es negativa y la brecha inflacionaria es positiva en el mismo periodo de tiempo, tal como se puede apreciar en el gráfico de la Brecha Inflacionaria & Brecha del Producto (figura 3.3, pag.65). Esto es debido, a la combinación del dinero creado por el sector

---

público, las devaluaciones de la moneda (dado que tiene un fuerte impacto inflacionario debido a la fuerte dependencia de insumos y productos importados), así como también la incertidumbre política-económica.

Evaluando el cuadro 3.3 y los graficos de la Brecha Inflacionaria & Brecha del Producto (figura 3.3, pag.65) y de la Inflación & Brecha del Producto (figura 3.5, pag.67); se observa que la brecha inflacionaria es representada por la diferencia entre la inflación y la inflación estructural, además tiene cinco ciclos, donde las causas de dichos ciclos serán explicadas a través de los valores de las variables explicativas, tabuladas en el cuadro 3.5, representadas graficamente en las figuras 3.6, B.4 y B.5.

El primer ciclo, comprendido desde el primer trimestre de 1991 hasta el segundo trimestre del año 1997, la brecha inflacionaria es positiva, como consecuencia de la fuerte devaluación de la moneda rezagado  $\hat{E}_{t-1}$ , así como también del aumento en el dinero creado por el sector público rezagado  $\hat{M}_{t-2}$ .

El segundo ciclo, entre el tercer trimestre de 1997 hasta el segundo trimestre del 2002, se observa que la brecha inflacionaria es negativa como consecuencia de la caída que registra la brecha rezagada.

El tercer ciclo, que abarca entre el tercer trimestre del 2002 y cuarto trimestre del 2004, se revierte la tendencia positiva propiciado por los mismo factores del primer ciclo.

El cuarto ciclo comprendido entre el primer trimestre del 2005 y el segundo trimestre del 2007, se registra el valor más bajo de la brecha inflacionaria en comparación a los demás ciclos, producida por la fuerte apreciación de la moneda  $\hat{E}_{t-1}$  ocurrida en este periodo.

El último ciclo entre el tercer trimestre del 2007 y el tercer trimestre del 2008, la brecha inflacionaria es positiva ocasionada por el auge de la brecha rezagada, el aumento del dinero creado por el sector público rezagado por dos periodos  $\hat{M}_{t-2}$  y la depreciación de la moneda rezagada en un periodo  $\hat{E}_{t-1}$ .

El siguiente cuadro 3.4 se resume todo lo descrito anteriormente y le adicionamos los sucesos políticos y económicos más resaltantes de cada ciclo.

---

Cuadro 3.4: *Inflación, el Producto y Sucesos Políticos-Económicos*

Trimestre	Producto	Inflación	Sucesos Políticos-Económicos	$M_{t-2}$	$\hat{E}_{t-1}$	$\hat{G}_{t-1}$	$\hat{W}_{t-2}$	Ing. Petroleros
$Q_{191}$ hasta $Q_{392}$	$y > y^*$	$\pi > \pi^*$	4 de feb 1992, inestabilidad política.	$\downarrow Q_{191}$ $\uparrow Q_{392}$		$\uparrow Q_{191}$	$\uparrow Q_{491}$	bajos
$Q_{492}$ hasta $Q_{496}$	$y < y^*$	$\pi > \pi^*$	27 de nov. 1992, inestabilidad política. Inicio de feb. 1994 hasta 1995, crisis bancaria. 1994-1996 control de cambio Mediados de 1996 inicia la Agenda Venezuela	$\downarrow Q_{294}$ $\uparrow Q_{494}$  $\downarrow Q_{495}$	$\uparrow Q_{295}$ $\downarrow Q_{196}$	$\uparrow Q_{492}$ $\downarrow Q_{394}$	$\downarrow Q_{492}$	sube debilmente
$Q_{197}$ hasta $Q_{297}$	$y > y^*$	$\pi > \pi^*$	Agenda Venezuela		$\uparrow Q_{496}$	$\uparrow Q_{197}$	$\uparrow Q_{297}$	el aumento es
$Q_{397}$ hasta $Q_{398}$	$y > y^*$	$\pi < \pi^*$	Agenda Venezuela	$\uparrow Q_{398}$	$\downarrow Q_{198}$	$\uparrow Q_{298}$		moderado
$Q_{498}$ hasta $Q_{300}$	$y < y^*$	$\pi < \pi^*$	Finales de 1998 culmina Agenda Venezuela	$\uparrow Q_{199}$ $\downarrow Q_{100}$	$\uparrow Q_{299}$	$\downarrow Q_{399}$	$\downarrow Q_{299}$	crece, luego $\downarrow Q_{199}$
$Q_{400}$ hasta $Q_{102}$	$y > y^*$	$\pi < \pi^*$	11 de Sep. 2001 Caída de las Torres Gemelas		$\downarrow Q_{102}$	$\uparrow Q_{101}$	$\uparrow Q_{400}$	$\downarrow Q_{102}$
$Q_{202}$ hasta $Q_{202}$	$y < y^*$	$\pi < \pi^*$	11 de Abril de 2002 inestabilidad política					
$Q_{302}$ hasta $Q_{304}$	$y < y^*$	$\pi > \pi^*$	2 Dic 2002 hasta feb 2003 El paro petrolero 6 feb 2003 el control de cambio por CADIVI	$\uparrow Q_{302}$ $\downarrow Q_{204}$	$\uparrow Q_{303}$ $\downarrow Q_{403}$ $\uparrow Q_{104}$	$\downarrow Q_{403}$	$\downarrow Q_{302}$	$\downarrow Q_{103}$
$Q_{404}$ hasta $Q_{404}$	$y > y^*$	$\pi > \pi^*$	Referéndum revocatorio presidencial			$\uparrow Q_{404}$		
$Q_{105}$ hasta $Q_{207}$	$y > y^*$	$\pi < \pi^*$	7 Mar. 2007 reconversión monetaria	$\uparrow Q_{205}$ $\downarrow Q_{406}$ $Q_{107}$	$\downarrow Q_{205}$ $Q_{305}$ $\uparrow Q_{106}$ $\downarrow Q_{406}$	$\uparrow Q_{107}$	$\uparrow Q_{105}$ $Q_{205}$	$\downarrow Q_{107}$
$Q_{307}$ hasta $Q_{407}$	$y > y^*$	$\pi > \pi^*$	Disminución del Impuesto al valor Agregado		$\uparrow Q_{108}$		$\downarrow Q_{407}$	$\downarrow Q_{108}$
$Q_{108}$ hasta $Q_{308}$	$y < y^*$	$\pi > \pi^*$	Caída de los precios del petróleo	$\uparrow Q_{208}$				
$Q_{408}$ hasta $Q_{408}$	$y > y^*$	$\pi < \pi^*$		$\downarrow Q_{408}$	$\downarrow Q_{408}$	$\downarrow Q_{208}$ $Q_{308}$	$\uparrow Q_{408}$	

Notación
$Q_i$ = Trimestre $i$
$\uparrow Q_i$ = Máximo local
$\downarrow Q_i$ = Mínimo local

Esta información está sustentado por los datos reflejados en los graficos y datos obtenidos en las paginas Web Wikipedia y de los informes económicos anuales del BCV |

Figura 3.3: Brecha Inflacionaria & Brecha del Producto

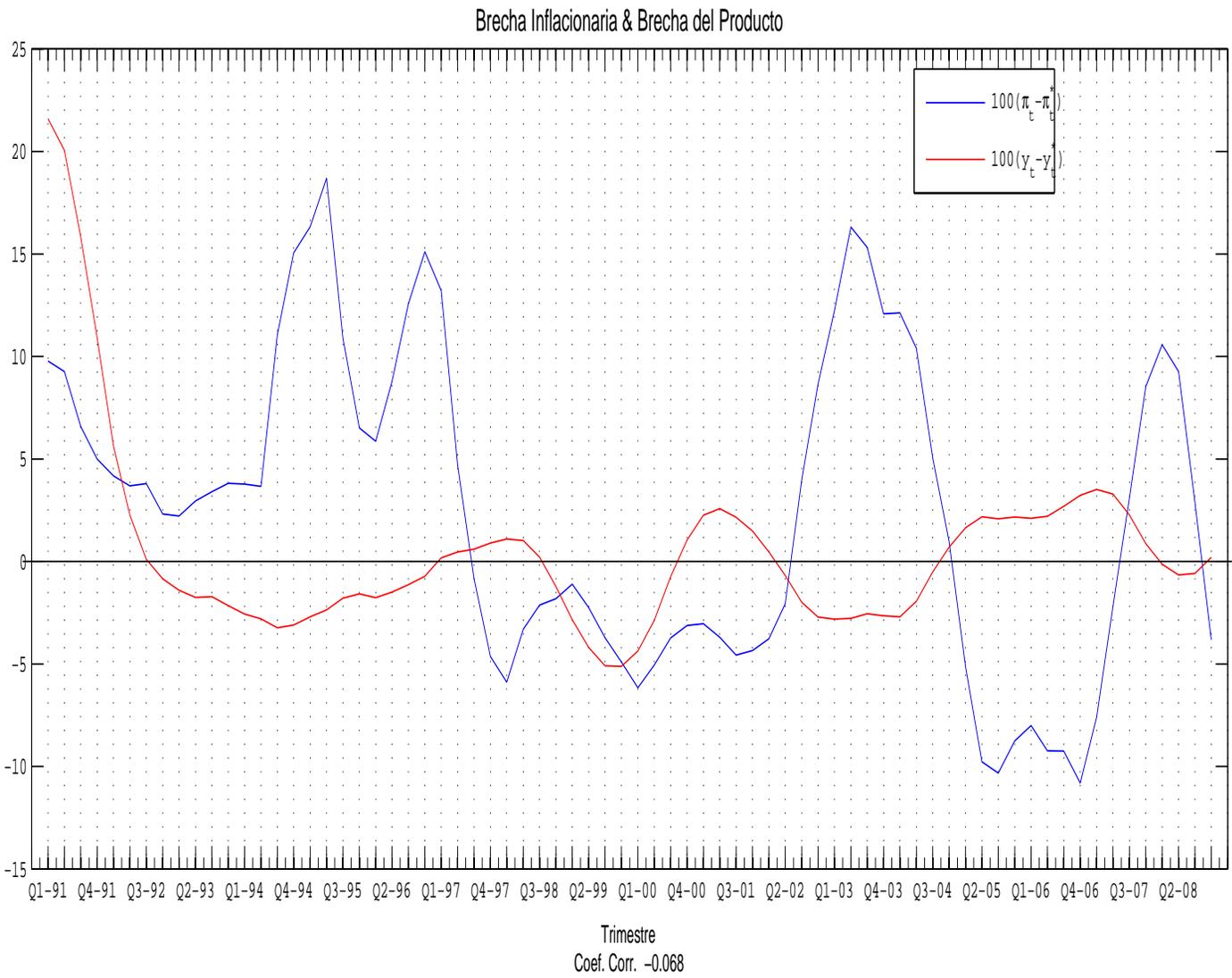


Figura 3.4: Brecha del Producto & Variables Exógenas

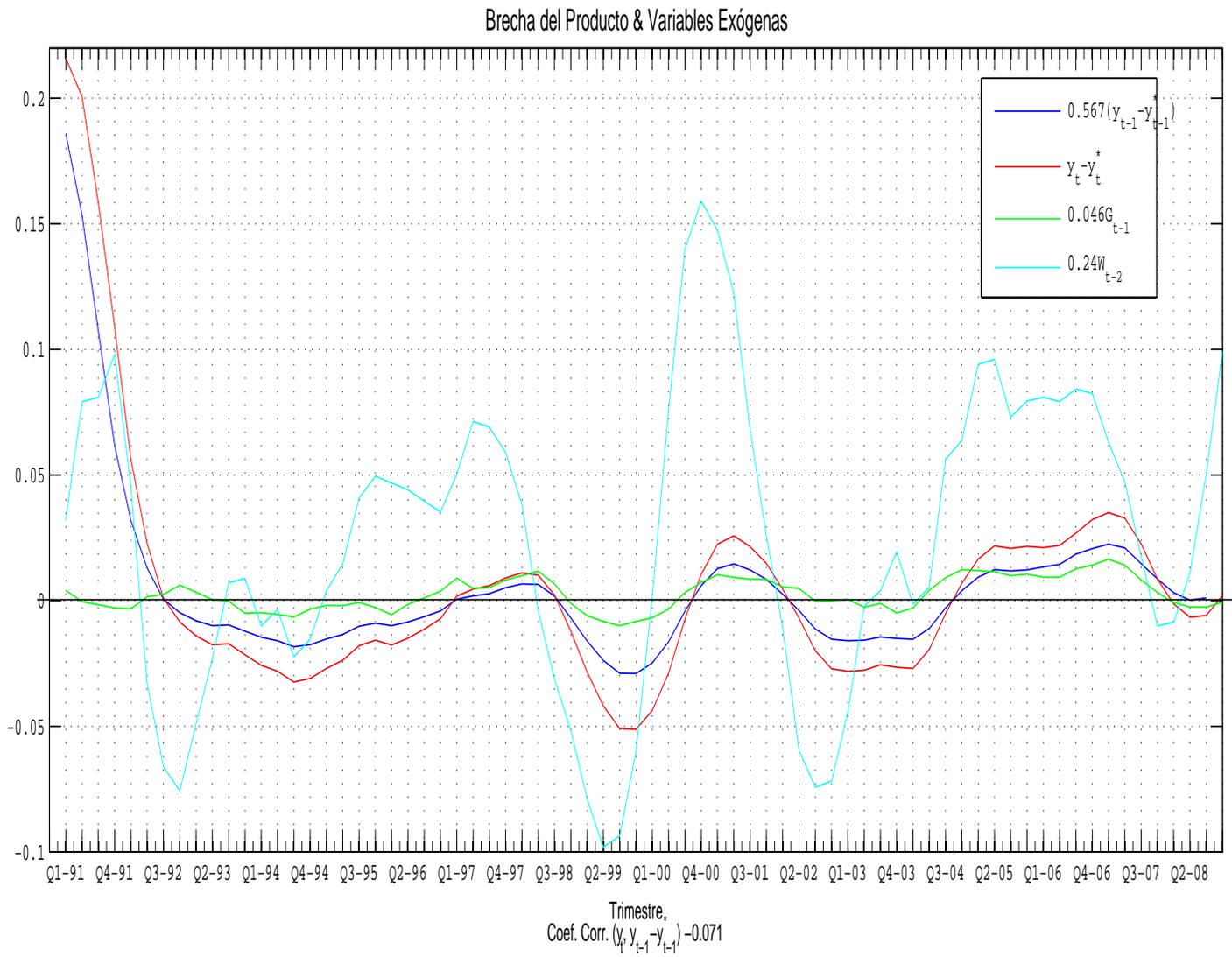


Figura 3.5: Inflación & Brecha del Producto

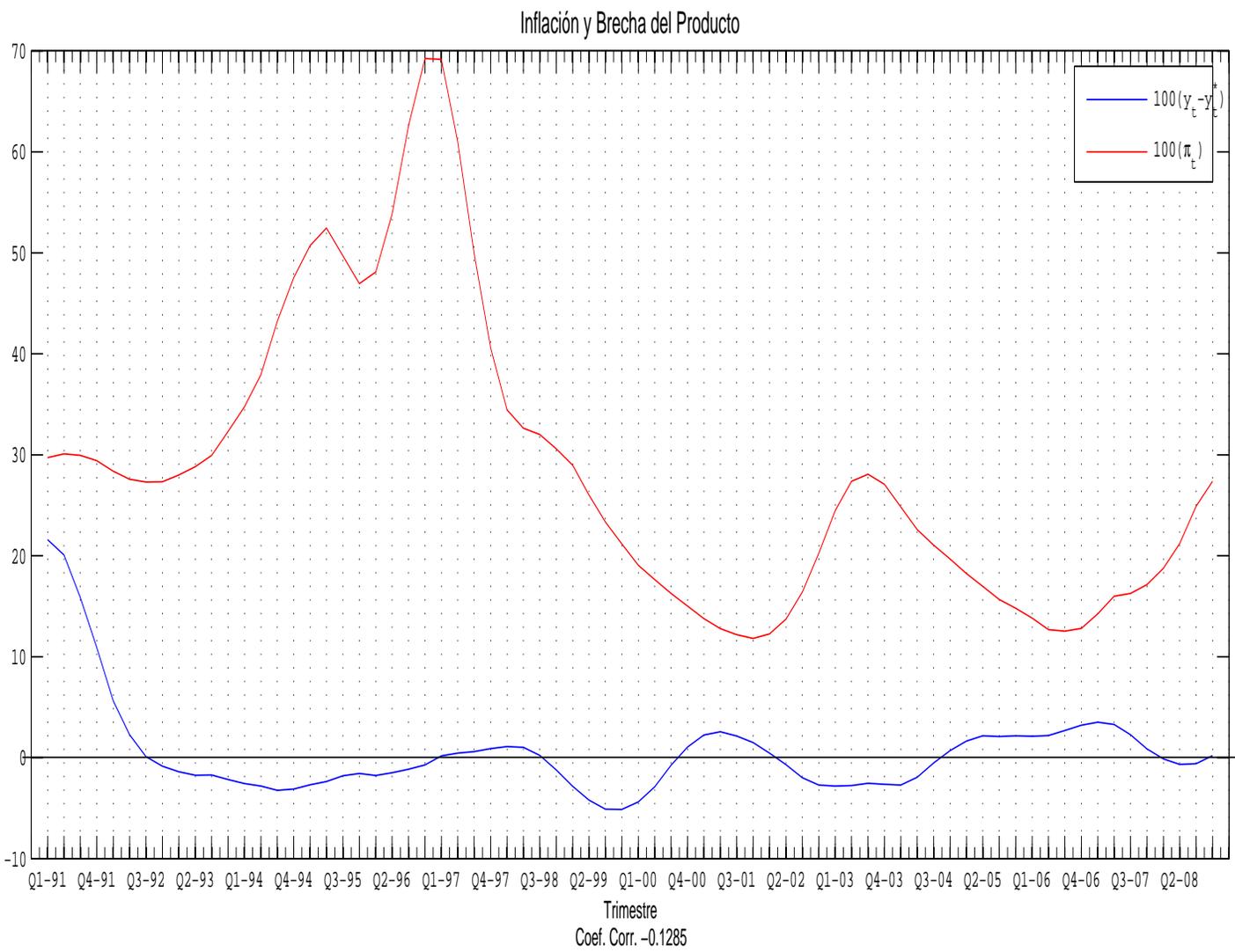
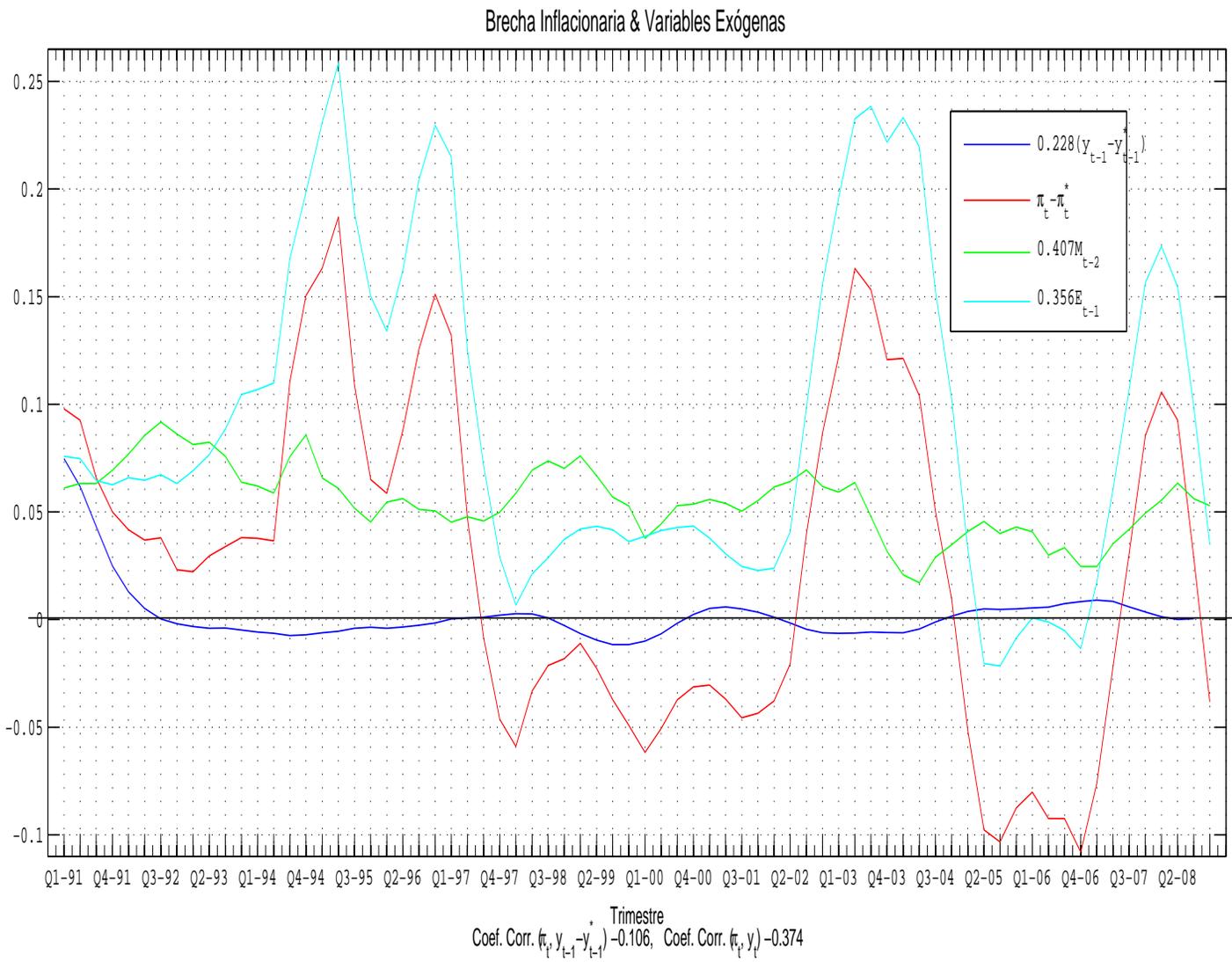


Figura 3.6: Brecha Inflacionaria & Variables Exógenas



Cuadro 3.5: Resultados de la ecuación 3.1

trimestres	$\pi$	$\pi^*$	$\pi - \pi^*$	$0,228(y_{t-1} - y_{t-1}^*)$	$0,407M_{t-2}$	$0,356\hat{E}_{t-1}$
Q <sub>1</sub> 91	0,297029318	0,199212448	0,09781687	0,074781952	0,061062657	0,075861182
Q <sub>2</sub> 91	0,300768955	0,208127965	0,09264099	0,061763953	0,063235312	0,074782359
Q <sub>3</sub> 91	0,299318752	0,233417867	0,065900885	0,043187776	0,063235312	0,064647246
Q <sub>4</sub> 91	0,29420127	0,244207282	0,049993988	0,02486198	0,069366712	0,062658206
Q <sub>1</sub> 92	0,283674845	0,241951969	0,041722876	0,012842279	0,076872287	0,065897731
Q <sub>2</sub> 92	0,275706754	0,238823165	0,036883589	0,005181275	0,085528913	0,064720991
Q <sub>3</sub> 92	0,272993105	0,235045807	0,037947298	0,000232391	0,091794259	0,067275543
Q <sub>4</sub> 92	0,273248281	0,250041523	0,023206758	-0,001944446	0,086141426	0,063147109
Q <sub>1</sub> 93	0,280014477	0,257836534	0,022177943	-0,003200572	0,081294264	0,069143129
Q <sub>2</sub> 93	0,288207041	0,258637712	0,029569329	-0,004001061	0,082401634	0,07668081
Q <sub>3</sub> 93	0,299500693	0,265553232	0,033947461	-0,003914345	0,07576179	0,088488633
Q <sub>4</sub> 93	0,322964277	0,284847108	0,038117169	-0,004912224	0,063778309	0,10455873
Q <sub>1</sub> 94	0,34737487	0,309665856	0,037709014	-0,005859156	0,062060776	0,106860754
Q <sub>2</sub> 94	0,379343603	0,342768695	0,036574908	-0,006400264	0,058777857	0,109955583
Q <sub>3</sub> 94	0,432149189	0,321604623	0,110544566	-0,00738155	0,075725739	0,167537119
Q <sub>4</sub> 94	0,47509799	0,324586943	0,150511047	-0,007080562	0,085848904	0,198381301
Q <sub>1</sub> 95	0,507088229	0,34387143	0,163216799	-0,006151465	0,065724613	0,230929155
Q <sub>2</sub> 95	0,524510318	0,337560886	0,186949432	-0,005404599	0,060931789	0,258544627
Q <sub>3</sub> 95	0,496805068	0,387862001	0,108943067	-0,004094774	0,051712982	0,189003481
Q <sub>4</sub> 95	0,469521747	0,404406198	0,065115549	-0,003604203	0,045365873	0,150204272
Q <sub>1</sub> 96	0,481043813	0,422434238	0,058609575	-0,00403481	0,054580127	0,133990916
Q <sub>2</sub> 96	0,53843373	0,450510707	0,087923023	-0,003416818	0,056146821	0,162175924
Q <sub>3</sub> 96	0,62617059	0,500494912	0,125675678	-0,002593909	0,0511370947	0,204342378
Q <sub>4</sub> 96	0,692525258	0,541413518	0,151111174	-0,001643542	0,050507906	0,229609837
Q <sub>1</sub> 97	0,691673582	0,559561033	0,132112549	0,00023366	0,045263233	0,214917786
Q <sub>2</sub> 97	0,609989264	0,56272536	0,047263904	0,000754196	0,047737398	0,125710268
Q <sub>3</sub> 97	0,499364455	0,507743591	-0,008379136	0,00112829	0,045750881	0,071524168
Q <sub>4</sub> 97	0,405733019	0,45202964	-0,046296621	0,002054262	0,049931288	0,029034723
Q <sub>1</sub> 98	0,344523949	0,40344086	-0,058916911	0,002667402	0,058686037	0,006707037
Q <sub>2</sub> 98	0,326298993	0,359482202	-0,033183209	0,002583823	0,069367288	0,021127384
Q <sub>3</sub> 98	0,320010075	0,341313663	-0,021303588	0,000716403	0,073727561	0,028717756
Q <sub>4</sub> 98	0,305880571	0,324003455	-0,018122884	-0,002774741	0,070181569	0,037294476
Q <sub>1</sub> 99	0,289621554	0,300684587	-0,011063033	-0,006479466	0,07600481	0,042016271
Q <sub>2</sub> 99	0,260036376	0,282614378	-0,022578002	-0,009575507	0,066833061	0,043397853
Q <sub>3</sub> 99	0,233392625	0,270618407	-0,037225782	-0,011620476	0,056942998	0,04176374
Q <sub>4</sub> 99	0,211636722	0,26070606	-0,049069338	-0,01167078	0,052769716	0,036190606
Q <sub>1</sub> 00	0,190446993	0,252142281	-0,061695288	-0,009976638	0,037745639	0,038661222
Q <sub>2</sub> 00	0,176377863	0,226975069	-0,050597206	-0,006570624	0,044441236	0,041408077
Q <sub>3</sub> 00	0,162629415	0,200008162	-0,037378747	-0,001692964	0,052934951	0,042765611
Q <sub>4</sub> 00	0,150190064	0,181397888	-0,031207824	0,002378847	0,053608039	0,043422175
Q <sub>1</sub> 01	0,137840471	0,168267918	-0,030427447	0,005131989	0,055876805	0,037869106
Q <sub>2</sub> 01	0,12777999	0,164804694	-0,037026695	0,005870264	0,053941039	0,030461328
Q <sub>3</sub> 01	0,121817691	0,167473401	-0,04565571	0,004903847	0,050329727	0,024690118
Q <sub>4</sub> 01	0,118058433	0,161556258	-0,043497825	0,003385275	0,055283899	0,022833057
Q <sub>1</sub> 02	0,122622291	0,16036472	-0,037742429	0,001041267	0,061521579	0,023846798
Q <sub>2</sub> 02	0,137338427	0,158016539	-0,020678112	-0,001567641	0,064143269	0,040644422

trimestres	$\pi_t$	$\pi_t^*$	$\pi_t - \pi_t^*$	$0,228(y_{t-1} - y_{t-1}^*)$	$0,407M_{t-2}$	$0,356\hat{E}_{t-1}$
Q <sub>3</sub> 02	0,16410609	0,124222707	0,039883383	-0,0045404	0,069519501	0,098459486
Q <sub>4</sub> 02	0,202398657	0,115759128	0,086639529	-0,00619419	0,06181539	0,155951709
Q <sub>1</sub> 03	0,244495807	0,122177342	0,122318465	-0,006406767	0,059222885	0,19593904
Q <sub>2</sub> 03	0,273629718	0,110499012	0,163130706	-0,006322254	0,063656378	0,232589943
Q <sub>3</sub> 03	0,28078755	0,127572839	0,153214711	-0,005817938	0,047852563	0,238435428
Q <sub>4</sub> 03	0,270717841	0,149913889	0,120803952	-0,006045372	0,031632338	0,221743692
Q <sub>1</sub> 04	0,24829079	0,126998576	0,121292214	-0,006162386	0,020832982	0,233208507
Q <sub>2</sub> 04	0,225885843	0,12196026	0,103925583	-0,004442143	0,017099104	0,219665203
Q <sub>3</sub> 04	0,210443774	0,160048961	0,050394813	-0,001170735	0,028933702	0,15256414
Q <sub>4</sub> 04	0,196775214	0,187050638	0,009724576	0,001588762	0,03476615	0,102782947
Q <sub>1</sub> 05	0,182198488	0,233768451	-0,051569963	0,003759599	0,040845935	0,032635925
Q <sub>2</sub> 05	0,169497678	0,267206714	-0,097709036	0,004957599	0,045529794	-0,020362508
Q <sub>3</sub> 05	0,156773972	0,260046009	-0,103272037	0,004746412	0,039948926	-0,021541961
Q <sub>4</sub> 05	0,148028815	0,235601002	-0,087572187	0,004930994	0,042944055	-0,008635831
Q <sub>1</sub> 06	0,138181866	0,21830941	-0,080127544	0,005400451	0,04077266	0,000783807
Q <sub>2</sub> 06	0,126681442	0,219099946	-0,092418504	0,005797277	0,029921679	-0,001128598
Q <sub>3</sub> 06	0,125402688	0,217883812	-0,092481124	0,007436218	0,033380246	-0,005053397
Q <sub>4</sub> 06	0,12798963	0,236026849	-0,108037219	0,00833224	0,024618033	-0,013501348
Q <sub>1</sub> 07	0,142469546	0,218524379	-0,076054833	0,009046362	0,024710066	0,017462596
Q <sub>2</sub> 07	0,159998078	0,181920529	-0,021922451	0,008443322	0,03523131	0,060352377
Q <sub>3</sub> 07	0,162694036	0,131696473	0,030997563	0,005930999	0,041891974	0,10719393
Q <sub>4</sub> 07	0,171451803	0,086122933	0,08532887	0,003483733	0,049415586	0,156508854
Q <sub>1</sub> 08	0,187445961	0,081750159	0,105695802	0,001265237	0,055349782	0,173375306
Q <sub>2</sub> 08	0,212227653	0,119555748	0,092671905	6,69E-05	0,063440463	0,154490003
Q <sub>3</sub> 08	0,249153352	0,220213254	0,028940098	0,000429749	0,056211407	0,099198784
Q <sub>4</sub> 08	0,273777366	0,312024441	-0,038247075		0,052945041	0,034902589

Cuadro 3.6: Resultados de la ecuación 3.2

Trimestres	$y_t$	$y_t^*$	$y_t - y_t^*$	$0,567(y_{t-1} - y_{t-1}^*)$	$0,046\hat{G}_{t-1}$	$0,24\hat{W}_{t-2}$
Q <sub>1</sub> 91	17,35507926	17,13909606	0,215983199	0,185970908	0,004026587	0,003209516
Q <sub>2</sub> 91	17,38569774	17,18504659	0,20065115	0,153597199	-0,000410475	0,007921601
Q <sub>3</sub> 91	17,41242038	17,25399589	0,158424491	0,10740118	-0,00162578	0,00810194
Q <sub>4</sub> 91	17,43063378	17,32158989	0,109043894	0,061827826	-0,002948715	0,009804562
Q <sub>1</sub> 92	17,45255257	17,39622665	0,056325916	0,031936721	-0,003228285	0,004559043
Q <sub>2</sub> 92	17,46301636	17,44029136	0,022724999	0,012885012	0,001617855	-0,003311455
Q <sub>3</sub> 92	17,47320301	17,47218368	0,001019327	0,000577919	0,002462988	-0,006610168
Q <sub>4</sub> 92	17,48694638	17,49547462	-0,00852824	-0,004835529	0,006189314	-0,007572097
Q <sub>1</sub> 93	17,49019539	17,50423299	-0,014037595	-0,007959316	0,003398941	-0,004890488
Q <sub>2</sub> 93	17,48902195	17,50657044	-0,017548493	-0,009950007	0,000400928	-0,002294575
Q <sub>3</sub> 93	17,49571013	17,51287828	-0,017168149	-0,009734357	-0,000262683	0,000707249
Q <sub>4</sub> 93	17,48716992	17,50871471	-0,021544794	-0,012215926	-0,005014626	0,00088343
Q <sub>1</sub> 94	17,48213249	17,50783046	-0,025697971	-0,014570795	-0,004812226	-0,001005089
Q <sub>2</sub> 94	17,48549023	17,51356154	-0,028071314	-0,015916446	-0,005485366	-0,000348993
Q <sub>3</sub> 94	17,46706378	17,49943897	-0,03237519	-0,01835675	-0,006509692	-0,002247383
Q <sub>4</sub> 94	17,46086781	17,49192288	-0,031055074	-0,017608238	-0,003382073	-0,001541066
Q <sub>1</sub> 95	17,46638057	17,4933606	-0,026980029	-0,015297722	-0,001911705	0,0003824
Q <sub>2</sub> 95	17,46730898	17,49101326	-0,023704281	-0,013440384	-0,001974299	0,001460323
Q <sub>3</sub> 95	17,48473912	17,50269852	-0,017959403	-0,010183055	-0,000701024	0,004077649
Q <sub>4</sub> 95	17,49709716	17,51290494	-0,015807777	-0,008963083	-0,002730263	0,004957515
Q <sub>1</sub> 96	17,4978509	17,515547367	-0,017696467	-0,010033936	-0,005569407	0,004680521
Q <sub>2</sub> 96	17,49549628	17,5104823	-0,014986016	-0,008497088	-0,001486884	0,004408289
Q <sub>3</sub> 96	17,49185682	17,50323366	-0,011376844	-0,006450642	0,00113359	0,003960772
Q <sub>4</sub> 96	17,49259009	17,49979866	-0,007208566	-0,004087228	0,003753147	0,003519479
Q <sub>1</sub> 97	17,49962764	17,49785127	0,001776374	0,000581075	0,008892734	0,00503257
Q <sub>2</sub> 97	17,51604634	17,51149189	0,004554448	0,001875567	0,004870805	0,007133542
Q <sub>3</sub> 97	17,53405366	17,5281006	0,00595306	0,002805879	0,005142118	0,00691179
Q <sub>3</sub> 97	17,55182571	17,54281579	0,009009922	0,005108626	0,008224836	0,005899251
Q <sub>1</sub> 98	17,56873254	17,55773431	0,010998232	0,006633408	0,009919587	0,003807639
Q <sub>2</sub> 98	17,5747847	17,564626182	0,010158518	0,006425561	0,011732248	-0,000428235
Q <sub>3</sub> 98	17,56615056	17,56398015	0,002170409	0,001781582	0,006634288	-0,003139486
Q <sub>4</sub> 98	17,55476195	17,56693187	-0,012169918	-0,006900343	-0,001080032	-0,005176983
Q <sub>1</sub> 99	17,53228275	17,56070145	-0,028418699	-0,016113408	-0,005966889	-0,007878682
Q <sub>2</sub> 99	17,50960296	17,55160079	-0,041997827	-0,023812774	-0,008331221	-0,009813792
Q <sub>3</sub> 99	17,49853704	17,54950404	-0,050967001	-0,028898289	-0,009957011	-0,009366825
Q <sub>4</sub> 99	17,49320077	17,5443884	-0,051187631	-0,029023387	-0,008281888	-0,006008824
Q <sub>1</sub> 00	17,50114538	17,54490257	-0,043757186	-0,024810324	-0,006818989	0,00015544
Q <sub>2</sub> 00	17,50992305	17,53874158	-0,028818526	-0,016340104	-0,003450517	0,007628911
Q <sub>3</sub> 00	17,51556561	17,52299089	-0,007425279	-0,004210133	0,003253575	0,013971628
Q <sub>4</sub> 00	17,52940679	17,51897325	0,010433538	0,005915816	0,007159146	0,015915309
Q <sub>1</sub> 01	17,53459382	17,5120851	0,022508723	0,012762446	0,010320068	0,014728904
Q <sub>2</sub> 01	17,54364911	17,51790234	0,025746774	0,014598421	0,009228368	0,012244608
Q <sub>3</sub> 01	17,55725961	17,53575151	0,0215081	0,012195093	0,008530172	0,006821929
Q <sub>4</sub> 01	17,56278582	17,54793812	0,014847697	0,008418644	0,00842838	0,002575695
Q <sub>1</sub> 02	17,55214948	17,54758252	0,004566959	0,002589466	0,005497258	-0,00106768

Trimestres	$y_t$	$y_t^*$	$y_t - y_t^*$	$0,567(y_{t-1} - y_{t-1}^*)$	$0,046\hat{G}_{t-1}$	$0,24\hat{W}_{t-2}$
Q <sub>2</sub> 02	17,53026668	17,5371423	-0,006875619	-0,003898476	0,004810426	-0,005959452
Q <sub>3</sub> 02	17,51469434	17,53460838	-0,019914035	-0,011291258	-0,000223485	-0,007422638
Q <sub>4</sub> 02	17,47006018	17,49722768	-0,027167498	-0,015403971	-0,000121108	-0,007184643
Q <sub>1</sub> 03	17,40083656	17,42893641	-0,028099854	-0,015932617	0,000518603	-0,004438242
Q <sub>2</sub> 03	17,38627613	17,41400531	-0,027729183	-0,015722447	-0,002600769	-0,000236247
Q <sub>3</sub> 03	17,36787463	17,3933919	-0,025517274	-0,014468294	-0,001083785	0,000396273
Q <sub>4</sub> 03	17,38933482	17,41584961	-0,026514791	-0,015033886	-0,004864028	0,001936971
Q <sub>1</sub> 04	17,45881705	17,48584507	-0,027028019	-0,015324881	-0,002917415	-0,000138362
Q <sub>2</sub> 04	17,48903369	17,50851679	-0,019483102	-0,011046907	0,004151799	0,00054767
Q <sub>3</sub> 04	17,52568196	17,53081677	-0,005134811	-0,002911432	0,009116062	0,005623078
Q <sub>4</sub> 04	17,55727517	17,55030695	0,006968216	0,003951001	0,012297056	0,006382007
Q <sub>1</sub> 05	17,57710453	17,56061508	0,016489449	0,009349529	0,01190644	0,009397693
Q <sub>2</sub> 05	17,60495959	17,58321576	0,021743835	0,012328766	0,011533665	0,009605545
Q <sub>3</sub> 05	17,62781433	17,60699675	0,020817577	0,011803578	0,009916967	0,007301103
Q <sub>4</sub> 05	17,65547132	17,63384415	0,021627167	0,012262604	0,010562758	0,007951192
Q <sub>1</sub> 06	17,67587235	17,65480229	0,021070058	0,013430069	0,009365618	0,008097395
Q <sub>2</sub> 06	17,69721204	17,67519929	0,022012752	0,014416912	0,00931049	0,007926029
Q <sub>3</sub> 06	17,7193487	17,6924962	0,026852502	0,0184927	0,012638914	0,008427894
Q <sub>4</sub> 06	17,74961854	17,71738867	0,032229871	0,020720965	0,014080349	0,008247889
Q <sub>1</sub> 07	17,76902023	17,73396052	0,035059706	0,022496874	0,016512433	0,006304314
Q <sub>2</sub> 07	17,78740306	17,75453894	0,032864124	0,020997209	0,014097594	0,00471623
Q <sub>3</sub> 07	17,80920669	17,78657324	0,022633454	0,014749458	0,008246599	0,001763509
Q <sub>4</sub> 07	17,82798512	17,81931465	0,008670469	0,008663493	0,003290298	-0,001009621
Q <sub>1</sub> 08	17,83895003	17,84030838	-0,001358345	0,003146445	-0,000828839	-0,000858697
Q <sub>2</sub> 08	17,85606292	17,86271207	-0,006649146	0,000166468	-0,002503361	0,001095188
Q <sub>3</sub> 08	17,86539469	17,87128714	-0,005892447	0,00106871	-0,002633199	0,005031574
Q <sub>4</sub> 08	17,87469416	17,87268864	0,002005516		-0,000594977	0,009944765

### 3.1.2. Análisis desde la Óptica Económica de la Brecha del PIB y de la Brecha Inflacionaria

Desde la óptica un poco más economista, se puede explicar cada ciclo expansivo y ciclo recesivo por medio de la figura 3.7 de la brecha del PIB y el cuadro 3.4 de inflación, producto y sucesos políticos-económicos, que es estructurada como:

#### **Primer Ciclo expansivo $Q_1$ 1991 hasta $Q_3$ 1992 (21 meses)**

Durante el primer ciclo económico, es de crecimiento económico positivo, fue alentado, por el crecimiento de los precios petroleros desde el primer trimestre de 1991 al primer trimestre de 1992 a su vez que la brecha del producto también colaboro a este crecimiento, al mostrarse como una variable de expectativas positivas de crecimiento desde el primer trimestre de 1991 al tercer trimestre de 1992. Durante este periodo de tiempo, el gasto fiscal de la economía, pudiésemos definirlo como contra-cíclico hasta el segundo trimestre de 1992, cuando esta variable comienza a tener variaciones positivas, posiblemente debido al descenso de los precios petroleros que se venia suscitando desde el segundo trimestre de 1992.

#### **Primer Ciclo recesivo $Q_3$ 1992 hasta $Q_4$ 1996 (51 meses)**

Durante este primer ciclo recesivo de la economía, se observa el fuerte descenso del gasto publico desde mediado de  $Q_3$  1992 en principio las variaciones del gasto fiscal fueron positivas pero cada vez menores hasta que desde el tercer trimestre de 1993 y hasta el 2do trimestre de 1996 las variaciones del gasto fueron negativas, que aunado a las variaciones negativas del PIB pudiésemos indicar como una política Pro-cíclica del gasto fiscal, durante este periodo de tiempo. En cuanto a los ingresos petroleros, estos seguían disminuyendo pero cada vez a menores tasas, hasta que en el primer trimestre de 1995 fueron positivos, y fue cuando a partir de entonces, el PIB también comenzó una tasa de crecimiento positiva.

---

**Ciclo Expansivo  $Q_4$ 1996 hasta  $Q_3$ 1998 (24 meses)**

Durante este periodo de tiempo el PIB presento tasas de crecimiento positiva, apalancada por el constante crecimiento de los gasto público y por la tasa de crecimiento de los ingresos petroleros, que sin embargo fue descendió a través del tiempo, hasta llegar al segundo trimestre del año 98 donde se cambia su tendencia de crecimiento; este ciclo finaliza con el decrecimiento de los ingresos petroleros y una fuerte disminución, del gasto público para finales del tercer trimestre de 1998.

**Ciclo recesivo  $Q_3$ 1998 hasta  $Q_3$ 2000 (21 meses)**

Durante este periodo de tiempo, la economía Venezolana, presento tasas de crecimiento negativa a partir del tercer trimestre de 1999, sin embargo ya desde el 4to trimestre de 1998 el crecimiento fue menor. Esta evolución del PIB esta asociado a una caída del gasto publico, que durante todo este periodo decreció, mientras que los precios petroleros también descendían. Es importante tomar en cuenta, que el repunte del PIB a partir del 2do trimestre de 2000 esta asociado al fuerte crecimiento de los precios del crudo desde el primer trimestre del 2000.

**Ciclo Expansivo  $Q_3$ 2000 hasta  $Q_1$ 2002 (21 meses)**

En este ciclo se observa que el PIB posee una tendencia positiva, apoyada por el crecimiento del gasto público que se mantiene durante este periodo, con respecto a los precios del petróleo, durante este tiempo presentan una tasa de crecimiento positiva, pero que cada vez es menor, hasta llegar al primer trimestre de 2002, cuando son negativos. El PIB a pesar de crecer a partir del cuarto trimestre de 2001, disminuye su tasa de crecimiento.

**Ciclo recesivo  $Q_1$ 2002 hasta  $Q_3$ 2004 (27 meses)**

Durante este periodos, los precios petroleros, poseen tasas negativas de crecimiento, hasta el tercer trimestre de 2003 cuando cambia su tendencia, mientras que el gasto fiscal que en el periodo pasado se mantuvo estable, presenta disminuciones hasta llegar a ser negativo desde el 2do trimestre de 2003 hasta cambiar su tendencia en el segundo trimestre

---

de 2004 los factores anteriores, contribuyeron a tasas cada vez menores del PIB hasta ser negativo su crecimiento entre el primer trimestre del 2003 hasta el cuarto trimestre de ese mismo año cuando cambia su tendencia, ayudado por el crecimiento del gasto fiscal y el incremento de los precios petroleros.

**Ciclo Expansivo  $Q_3$ 2004 hasta  $Q_4$ 2007 (42 meses)**

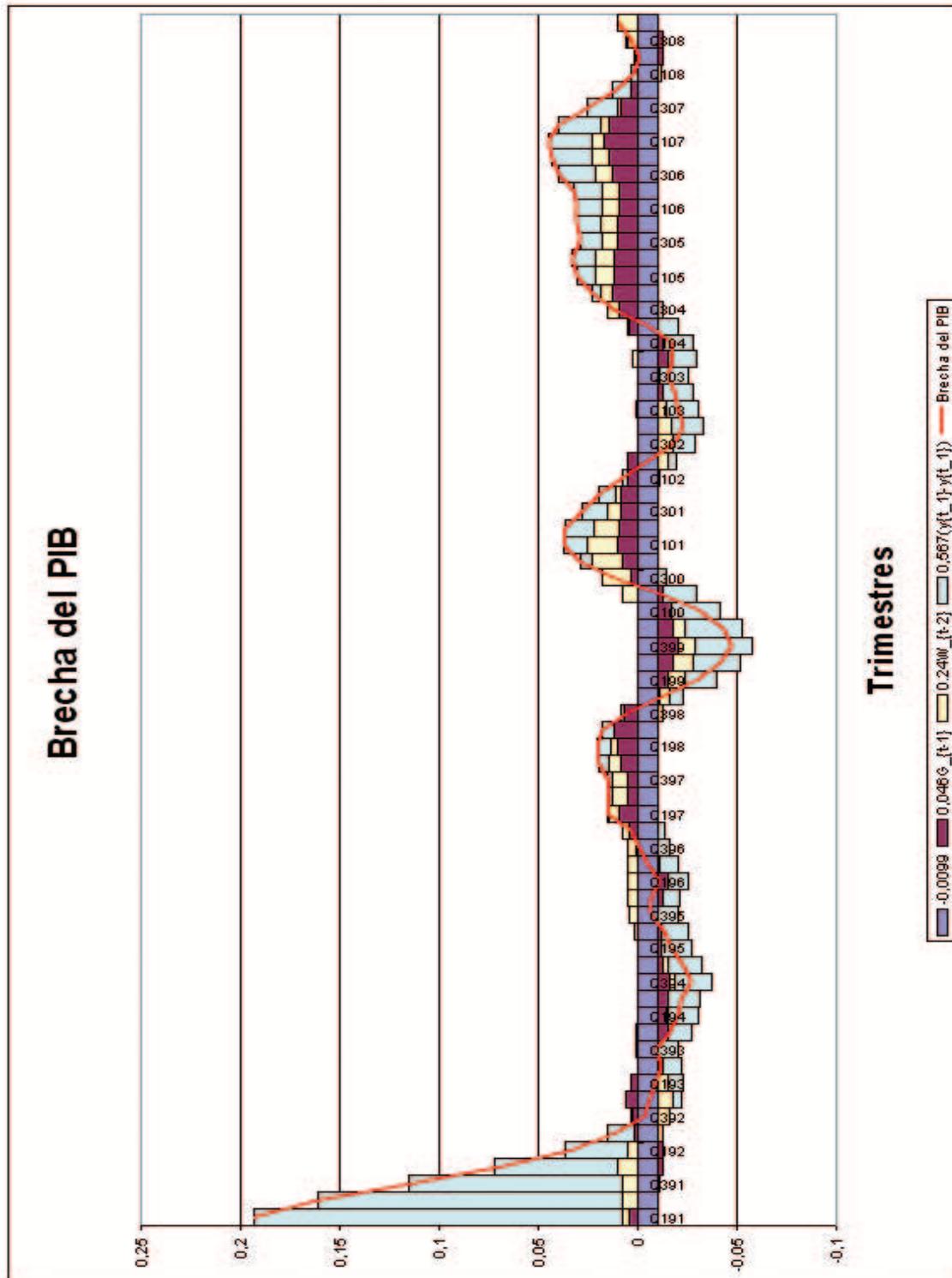
Para este ciclo se observa que el crecimiento económico del país es positivo, ayudado con un crecimiento del gasto fiscal y un crecimiento positivo, aunque cada vez con tasas inferiores de los precios de los hidrocarburos.

**Ciclo recesivo  $Q_4$ 2007 hasta  $Q_4$ 2008 (12 meses)**

En este ciclo el gasto público decreció, mientras los precios del petróleo se mantuvieron al alza, permitiendo en conjunto con la brecha del PIB un crecimiento del PIB.

---

Figura 3.7: Brecha PIB



A continuación las posibles causas de las brechas inflacionarias positivas y negativas, observando la figura 3.8 y el cuadro 3.4 de inflación, producto y sucesos políticos-económicos .

**1er Brecha de Inflación Positiva  $Q_1$ 1991 hasta  $Q_3$ 1997 (81 Meses)**

**Incluye: Primer Ciclo expansivo  $Q_1$ 1991 hasta  $Q_3$ 1992 (21 meses)**

**Primer Ciclo recesivo  $Q_3$ 1992 hasta  $Q_4$ 1996 (51 meses)**

**Ciclo Expansivo  $Q_4$ 1996 hasta  $Q_3$ 1998 (24 meses)**

Durante este periodo de tiempo, la inflación corriente, se mantuvo por encima de la inflación estructural definida esta como la inflación que acompaña al PIB potencial) en este lapso de tiempo, hay que destacar, la fuerte correlación positiva que tiene sobre la inflación corriente la devaluación del tipo de cambio rezagada (0,88).

Durante este periodo de tiempo muchos cambios ocurrieron sobre esta economía, para inicios de la década de los '90 en Venezuela, se había suscitando un fuerte movimiento social durante 1989 este movimiento social fue debido a las políticas económicas que había emprendido el segundo gobierno de CAP las cuales se caracterizaban, por una liberación de precios, reducción del sector público y privatización de algunas empresas estatales.

De igual manera para inicios de esta década, los precios del crudo eran bajos, lo cual, tampoco contribuía de manera importante a la reactivación de la economía vía gasto público, sin embargo, con el inicio de la guerra del golfo pérsico los precios del crudo reaccionaron de manera positiva, sumado a la destitución del presidente de la república no se terminaron de cumplir las políticas que llevaron al estallido social de 1989.

Para 1994 en esta economía, se vivió una crisis bancaria, con lo cual las ayudas del gobierno se incrementaron con el fin de mantener a flote el sistema financiero, sin embargo, esta crisis bancaria, conllevó a una crisis del tipo de cambio, lo cual apuntó nuevamente al alza la inflación en nuestro país.

Ya para el año 1996, el gobierno de turno, decide aplicar un nuevo paquete de políticas consistentes una vez más en la reducción del estado, liberalización de precios, flexibilización del mercado laboral y privatización de algunas empresas estatales, entre otras políticas estructurales, llamada agenda Venezuela, la cual tuvo vigencia hasta finales de 1998. Sin

---

embargo, ya desde Julio de 1996 se desmonto el control cambiario y se aplico un sistema de banda de flotación controlada por parte de BCV lo cual ayudo a la disminución de las expectativas de devaluación.

**1er Brecha de Inflación negativo  $Q_3$ 1997 hasta  $Q_3$ 2002 (60 Meses)**

**Incluye: Ciclo Expansivo  $Q_1$ 1997 hasta  $Q_3$ 1998 (21 meses)** (solo los meses de inflación negativa)

**Ciclo recesivo  $Q_3$ 1998 hasta  $Q_3$ 00 (21 meses)**

**Ciclo Expansivo  $Q_3$ 2000 hasta  $Q_1$ 2002 (18 meses)**

Durante este periodo de tiempo, se vio el resultado de un mayor control de los saldos monetarios, con la cual contribuyo la agenda Venezuela, debido a que la política cambiaria, fue bastante creíble, disminuyendo las expectativas de devaluación, y disminuyendo el dinero sin contraparte creado por el sector público, estas fueron las principales razones para la disminución de la inflación. La economía internacional a pesar de que se había sufrido las crisis asiática, rusa y argentina, desde mediados de los '90 la economía de EEUU venia viviendo un fuerte crecimiento de su economía lo cual al margen que la nuestra economía viviese estos embates.

**Brecha de Inflación Positivo  $Q_3$ 2002 hasta  $Q_1$ 2005 ( 30 Meses)**

**Incluye: Ciclo Recesivo  $Q_3$ 2002 hasta  $Q_3$ 2004 (27 meses)** (solo los meses de inflación positiva)

**Ciclo Expansivo  $Q_3$ 2004 hasta  $Q_4$ 2004 (3 meses)**

Durante este periodo de tiempo sucedió el paro petrolero lo cual ocasiono una caída del producto interno bruto, una devaluación del tipo de cambio y la constitución de un regimen cambiario fijo administrado por CADIVI a partir de febrero del 2002, por todo lo anterior se puede identificar como las variables de mayor peso en la explicación de la inflación, las expectativa del producto negativas y correlación de -0.82 y la devaluación del tipo de cambio que fue de 0.93.

---

**Brecha de Inflación Negativa  $Q_1$ 2005 hasta  $Q_3$ 2007 ( 30 Meses)**

**Incluye: Ciclo Expansivo  $Q_1$ 2005 hasta  $Q_2$ 2007 (30 meses)** (solo los meses de inflación negativa)

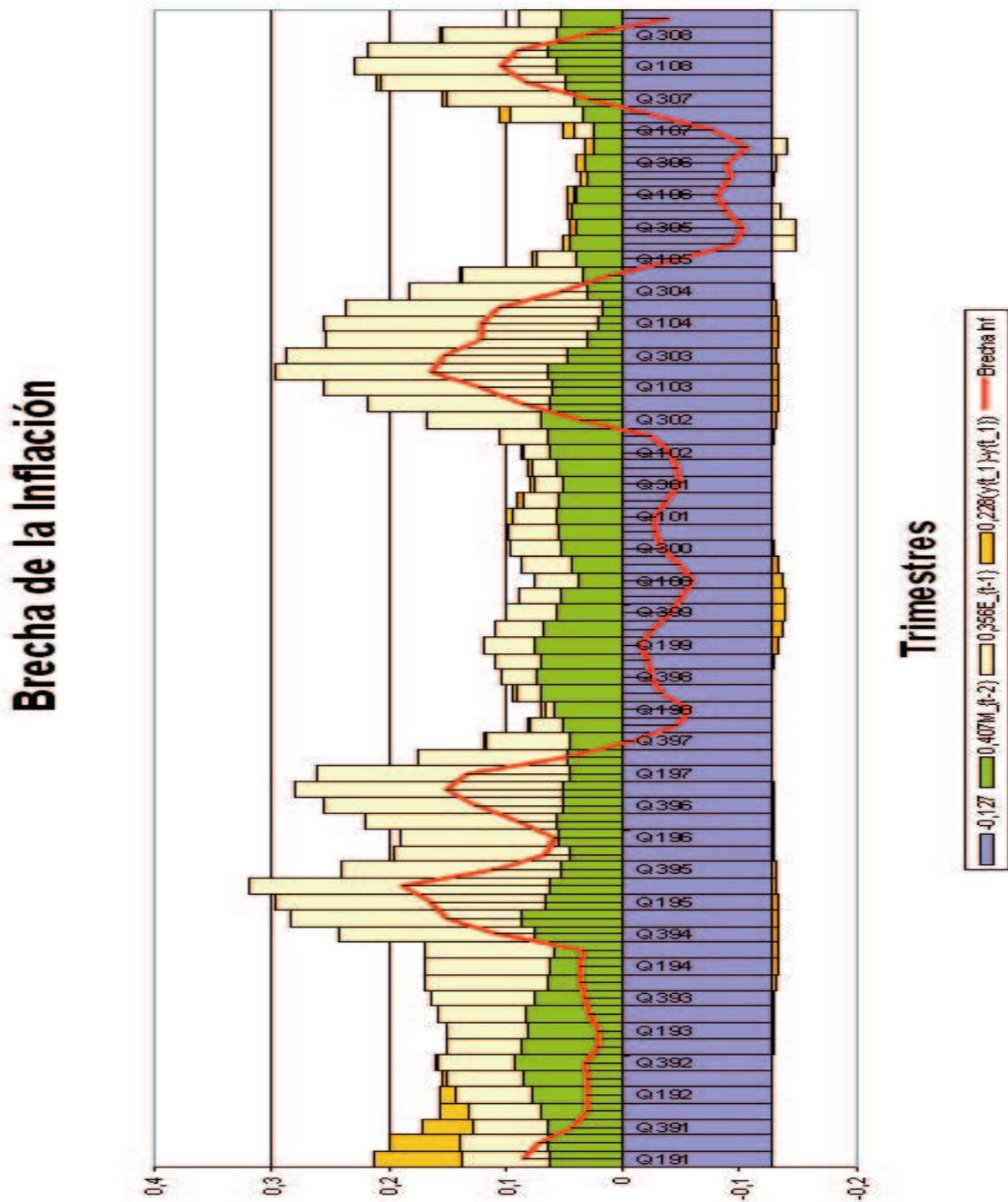
Se observa que hay un ciclo expansivo y el ajuste cambiario realizado en el ciclo anterior favoreció a la actividad económica, así como la coyuntura económica del mundo se encontraba positiva. Ocurrió una apreciación de la moneda, como se observa desde los ciclos anteriores la relación que tiene esta variable sobre la inflación es fuerte por lo tanto nos lleva a un decrecimiento de la inflación.

**Brecha de Inflación positiva  $Q_3$ 2007 hasta  $Q_4$ 2008 (16 Meses)**

**Incluye: Ciclo Expansivo  $Q_3$ 2007 hasta  $Q_4$ 2007** (solo los meses de inflación negativa)  
**Ciclo recesivo  $Q_1$ 2008 hasta  $Q_4$ 2008**

Para este periodo la economía, comienza a sentir los embates de un crecimiento continuo de cerca de 20 trimestres consecutivo, y el largo periodo de precios petroleros, que conllevan a la creación de una mayor masa monetaria por parte del sector público, lo cual hace complicado el descenso de la tasa inflacionaria. Cuando a partir de 2008 la economía venezolana comienza a percibir los embates de la crisis hipotecaria internacional, las expectativas de la economía comienzan a ser negativas, y con ello los agentes económicos, comienzan a tener expectativas negativa, incrementando la tasa inflacionaria en búsqueda de mantener sus tasas de ganancias. Durante este periodo de tiempo, la economía es sujeta a expropiaciones, y leyes habilitantes que generan expectativas económicas sobre la economía.

Figura 3.8: Brecha  $\pi$



---

## Conclusiones

Se propuso un modelo de representación de espacio de estados que permitió estimar en forma conjunta a la curva de Phillips Neo-Keynesiana con la curva de la demanda agregada, para analizar la interrelación entre la inflación y el crecimiento económico en Venezuela, así como la explicación del comportamiento de éstas en base a las variables explicativas estudiadas, el dinero creado por el sector público  $M_{t-2}$ , la tasa de depreciación de la moneda  $\hat{E}_{t-1}$ , el gasto del sector público  $\hat{G}_{t-1}$ , los ingresos por conceptos de la exportaciones petroleras  $\hat{W}_{t-2}$ .

El modelo de representación de espacio de estados, permitió obtener las estimaciones del vector de estado. El vector de estado, conformado por la inflación estructural y el producto potencial; fueron estimados por el filtro de Kalman y también por el suavizado, los resultados arrojados por el suavizado de Kalman son semejantes o casi iguales a los resultados del filtro de Kalman.

También se logró estimar los parámetros del modelo de representación de espacio de estados, que se obtuvieron por la combinación de los algoritmos Newton-Rapshon y EM, cuyos resultados tienen sentido económicos significativos y mejora la eficiencia.

La influencia del uso del modelo de representación de espacio de estados en el aspecto económico permite visualizar en la inflación, que el efecto de la brecha del producto rezagado, la depreciación de la moneda  $\hat{E}_{t-1}$  y el dinero creado por el sector público  $M_{t-2}$  son determinantes en el signo de la dinámica de la brecha inflacionaria. Con respecto a la demanda agregada, los ingresos petroleros  $\hat{W}_{t-2}$  y el gasto real del sector público  $\hat{G}_{t-1}$  que éste financia, son los determinantes de la brecha del producto.

Además, con el modelo de representación de espacio de estados observamos que el comportamiento entre las brechas del producto y de la inflación en la economía venezolana en el periodo estudiado, están determinados esencialmente por el gasto real del sector público  $\hat{G}_{t-1}$  y las incidencias monetarias asociadas  $M_{t-2}$ , provenientes del ingreso petrolero  $\hat{W}_{t-2}$ , conjuntamente con la depreciación de la moneda  $\hat{E}_{t-1}$ .

Este trabajo confirma varios hallazgos de trabajos anteriores, a su vez que describe el

---

---

comportamiento de los ciclos económicos de nuestra economía:

- Durante el periodo de tiempo en estudio, los ciclos económicos expansivos, tuvieron una duración similar a los ciclos de crecimiento negativos.
  - Tal como lo comenta Sáez 2004 [19] encontramos para el periodo de tiempo de estudio que el gasto público en nuestra economía posee un comportamiento procíclico con el ciclo económico.
  - Se encontró una correlación positiva entre los ciclos económicos y la evolución de ingresos petroleros, parece sugerir que existe prociclicidad entre estas variables, sin embargo, no hay contrariedad a lo expuesto por Saez 2004, el cual establece que el mecanismo de transmisión entre los términos de intercambio y la actividad económica Venezolana, es relativamente complejo.
  - En el trabajo se encontró que existe una alta correlación entre la brecha del PIB rezagada y el PIB actual.
  - Durante el periodo de tiempo de estudio de la inflación, se observa que la brecha positiva posee un periodo de duración más largo en promedio a la brecha negativa de la misma.
  - Durante el periodo de tiempo de estudio, encontramos que un crecimiento de la brecha inflacionaria, esta correlacionada de manera negativa con, un crecimiento del PIB por debajo del potencial rezagada un trimestre, es decir, que los ciclos inflacionarios positivos, son anteceditos por crecimientos del PIB por debajo del potencial, lo cual parece sugerir que shocks sobre la demanda parece no afectar el crecimiento de la inflación, lo cual concuerda con lo expuesto por Dorta 2006 [5].
  - Tal como lo establece Pagliacci y Barráez 2009 [17] encontramos que el dinero creado por el sector público rezagado dos periodos tiene un efecto positivo sobre la inflación actual de la economía.
-

- Durante el periodo de estudio, encontramos que el tipo de cambio rezagado un periodo, es la variable que mayor información aporta a la evolución de inflación actual durante todo el periodo de estudio y debido a que la inflación se comporta de forma de caminata aleatoria, tal como lo expresan Alvarez, Dorta, Guerra 2000 [1] y Pagliacci, Barráez 2008, 2009, los diversos cambios de régimen cambiario, han hecho que el efecto de esta variable permanezca en el tiempo, es decir, la inflación ha mostrado alta persistencia, entre otras razones en función los diversos cambios de régimen de tipo de cambio que ha sufrido nuestra economía durante los 18 años de estudio. Y los factores de credibilidad en las políticas económicas influye en la volatilidad de la inflación.

En función de los comentarios finales, podemos sugerir para el periodo de tiempo de estudio que la economía Venezolana, no cumple con los intercambios entre inflación y crecimiento económico, basados en los planteamientos teóricos económicos, esto debido a que la inflación se muestra como una variable persistente en el tiempo, y que se encuentra altamente influenciada a la evolución del tipo de cambio.

A su vez este trabajo confirma lo expuesto Barráez y Pagliacci 2008, 2009 y Dorta 2006 que no rechazan la hipótesis de que altas inflaciones, pueden deteriorar el crecimiento de la economía en el largo plazo, como se observa en la figura 3.3 durante el periodo de estudio.

# Bibliografía

- [1] Alvarez Fernando, Dorta Miguel, Guerra José. (2000) *Persistencia inflacionaria en Venezuela: Evolución, causas e implicaciones*  
Serie de Documentos de Trabajo, Gerencia de Investigaciones Económicas del BCV.
- [2] Bernanke Ben y Frank Robert. (2007). *Macroeconomía*  
Mc Graw Hill, pag 246,339-404.
- [3] Cartaya Virginia. (2010). *Ciclos económicos*  
bcvoz 3 económico, Departamento de Modelos Económicos. Sep-Oct 2010.
- [4] Dawid, AP. (1979). *Conditional independence in statistical theory.*  
Royal Statistical Society, 41(1), 1-31.
- [5] Dorta Miguel.(2006). *La función de Producción, el Producto Potencial y la Inflación en Venezuela 1950-2005.*  
Serie de Documentos de Trabajo, Gerencia de Investigaciones Económicas del BCV.
- [6] Durbin J. y Koopman S. (2001). *Timen Series Analysis by State Space Methods.*  
Oxford University Press, New York.
- [7] Efron, B. (1997). *Discussion on maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm (by A. Dempster, N. Laird, and D. Rubin).*  
J. R. Statist. Soc. B, 39, 1-38.

- 
- [8] Ghahramani, Z. and Hinton, G.E. (1996). *Parameter estimation for linear dynamical systems*.  
Citeseer University of Toronto technical report CRG-TR-96-2, 6.
- [9] Gilks WR, Richardson S y Spiegelhalter DJ (1996). *Markov chain Monte Carlo in practice*.  
Chapman & Hall/CRC, pag 259-272.
- [10] Hamilton, J.D. (1994). *Time series analysis*.  
Princeton University Pr, pag 372-408.
- [11] Hamilton, J.D. (1990). *Analysis of time series subject to changes in regime\* 1*.  
Elsevier Journal of econometrics, 45(1-2), 39-70.
- [12] Hardy, T. (1993). *Fundamentos de Teoría económica*.  
Ediciones Panapo, Caracas. Segunda edición, 400-455.
- [13] Helmut Lütkepohl. (1993). *Introduction to multiple time series analysis*.  
Segunda edición, Springer-Verlag.
- [14] Kim, C.J. y Nelson, C.R.(1999). *State-space models with regime switching: classical and Gibbs-sampling approaches with applications*.  
The MIT press, volumen (1), pag 19-57.
- [15] Koopman Siem Jan, F. (1993). *Disturbance Smother for State-Space Models*.  
Great Britain Biometrika, 80(1),pag 117-126.
- [16] Larraín y Sachs. (2003). *Macroeconomía*.  
Pearson Prentice Hall.
- [17] Pagliacci, C. y Barráez, D.(2008), (2009). *Inflation and Economic Growth in the Short Run: Behavior under a Markov-Switching Approach*.  
Serie de Documentos de Trabajo, Gerencia de Investigaciones Económicas del BCV.
-

- [18] Romer David. (2006). *Macroeconomía Avanzada*.  
McGRAW-HILL|INTERAMERICANA. Tercera edición, pag 258-259.
- [19] Sáez Francisco (2004). *Patrones Cíclicos de la Economía Venezolana*  
Serie de Documentos de Trabajo, Gerencia de Investigaciones Económicas del BCV.
- [20] Shumway, R.H. y Stoffer, D.S. (2005). *Time series analysis and its applications*.  
Springer Verlag, pag 324-345.
- [21] Genetic Algorithm and Direct Search Toolbox
-

## Programas en Matlab

### A.1. Programas en Matlab

Para obtener la estimación de los vectores de estados apoyandose en la representación de estados, se realizó una secuencia de programas en Matlab versión R2008b, con la finalidad de almacenar datos (variables observables, exógenas, parámetros), estimar parámetros y graficar. A continuación se describen brevemente los programas:

- **Observaciones.m:**

Es un archivo de datos que contiene la variable observada "Y" que es una matrices de dimensión  $2 \times 72$ ; donde la primera fila tiene toda la información de la inflación ( $\pi$ ) y la segunda fila el producto ( $y$ ), estos datos son desde el año 1991 hasta el año 2008 por trimestre.

- **U.m:**

Es un archivo que contiene una matriz de dimensión  $9 \times 72$ , éste representa las variables exógenas, estas son:

- primera fila: es el valor constante 1,
- segunda fila: el producto con un rezago ( $y_{t-1}$ ),

---

tercera fila: la cantidad del dinero creado por el sector público ( $M$ ),  
cuarta fila: de la depreciación de la moneda nacional ( $E$ ),  
quinta fila: gasto real del sector público ( $G$ ),  
sexta fila: ingreso de las exportaciones petroleras ( $w$ ),  
séptima fila: el capital ( $k$ ),  
octava fila: cantidad de trabajadores empleados ( $l$ ),  
novena fila: ingresos petroleros ( $ep$ ),

■ **ee.m:**

Este se utiliza para ingresar los parámetros iniciales de la representación de espacio de estados, estas son:  $\Phi, \Upsilon, Q, A, \Gamma, R$ . A partir de las matrices mencionadas se genera el archivo.m llamado datodeprueba.m

■ **Filtro.m:**

Estima las variables no observadas; es decir, el vector de estado, la inflación estructural ( $\pi^*$ ) y el producto potencial ( $y^*$ ), empleando las técnicas del filtro de Kalman.

■ **Suavizado.m:**

Estima las variables no observadas; es decir el vector de estado, la inflación estructural ( $\pi^*$ ) y el producto potencial ( $y^*$ ), empleando las técnicas del suavizado de Kalman.

■ **RSC.m:**

Calcula los iterados de un rezago del suavizado de la covarianza del error de predicción, éstas estimaciones son importante para ser usadas en EM.m.

■ **EM.m:**

---

---

Es para estimar  $Q$  y  $R$ , siguiendo las indicaciones del algoritmo EM (Expectation Maximization) las ideas son tomadas del libro Shumway and Stoffer "Time Series Analysis and its Applications" pagina 343.

■ **vro18.m o vro21.m:**

Calcula el valor de la función verosimilitud de la representación de espacio de estados; es decir, usa el theta que contiene 18 (ó 21) componentes estimado por el algoritmo genético.

■ **AGotro.m o ga21.m:**

Estima los siguientes parámetros  $\Phi, \Upsilon, A, \Gamma$ , ulitizando el algoritmo genético. En general estima 18 (ó 21) componentes del vector theta generado a partir de los parámetros iniciales.

■ **simple restricción1.m, simple restricción2.m, simple restricción3.m:**

Contiene restricciones que debe considerar el algoritmo genético en los parámetros, por lo tanto éstos son ulitizados en el AGotro.m y en ga21.m.

■ **emga.m:**

Estima  $Q$  y  $R$  usando EM.m, pero usando las matrices  $\Phi, \Upsilon, A, \Gamma$  estimada por AGotro.m o ga21.m con  $R$  y  $Q$  que son dada inicialmente.

■ **emoqrtheta.m:**

Estima  $Q$  y  $R$  usando EM.m, pero usando las matrices  $\Phi, \Upsilon, A, \Gamma, R$  y  $Q$  que son dada inicialmente.

■ **graficas.m:**

Grafica las variables observadas  $(\pi, y)$  y no observadas  $(\pi^*, y^*)$ .

■ **eeob.m:**

---

---

Grafica las observaciones, calculadas a partir de las variables no observadas  $(\pi^*, y^*)$  estimadas del filtro y suavizado de Kalman.

De los parámetros iniciales se obtiene el valor de la función verosimilitud de la representación de espacio de estados, esto se facilita con el filtro de Kalman, es decir con el archivo filtro.m.

También los parámetros iniciales son usados para estimar las variables no observadas con el filtro de Kalman, suavizado y RSC, para lograr estimar  $R$  y  $Q$  con el algoritmo EM (EM.m); además estos parámetros son usados para estimar  $A, \Upsilon, \Phi, \Gamma$  con el algoritmo genético (AGotro.m o ga21.m).

Una vez estimados los parámetros, entonces usamos el filtro y suavizado de Kalman para estimar las variables no observadas y luego se grafica las variables observadas junto con la variables no observadas.

Todo lo mencionado anteriormente se resumen realizando los siguientes pasos:

Paso I:

Usamos ee.m, para ingresar todos los datos.

Paso II: Estimación de los parámetros

II.1 AGotro.m

II.2 emga.m

II.3 emoqrtheta

Paso III:

Graficar, se realiza con grafica.m

Paso IV:

Los graficos, lo observa los especialista en el área y si no se obtiene lo deseado, se repite el paso II y paso III, hasta hallar un resultado aceptable.

---

A continuación se menciona los archivos.m que son funciones y explicando cuales son la entradas y salidas de cada uno.

Función	Entrada	Salida
Filtro.m	$\Phi, \text{Upsilon}, Q, A, \Gamma, R, U, Y$	$x, P, K, \text{LogVerosi}$
Suavizado.m	$\Phi, \text{Upsilon}, Q, A, \Gamma, R, U, Y$	$X_n, P_n, J$
RCS.m	$\Phi, \text{Upsilon}, Q, A, \Gamma, R, U, Y$	$P_{nn}$
EM.m	$\Phi, \text{Upsilon}, Q, A, \Gamma, R, U, Y$	$Q, R$
vro18.m ó vro21.m	$\theta$	$L$
simple restriccion1.m	$\theta$	$c, ceq$
simple restriccion2.m	$\theta$	$c, ceq$
simple restriccion3.m	$\theta$	$c, ceq$

Entrada y Salida	Descripción
$x$	Es una matriz de dimensión $(2p) \times n$ ; que contiene las esperanzas condicionales de los estados dada la información a tiempo $t$ .
$P$	Es una matriz que contiene las covarianzas condicionales de los errores.
$K$	Es una matriz para almacenar la ganancia del filtro de Kalman en el tiempo $t$ .
$\log Verosi$	Es el valor del logaritmo de la función verosimilitud
$Xn$	Es una matriz de dimensión $p \times n$ que contiene las esperanzas de $x$ en el tiempo $t$ dada la información hasta $n$ .
$Pn$	Es una matriz de dimensión $p \times np$ que contiene las covarianzas condicionales de los errores de predicciones en el tiempo $t$ dada la información hasta el tiempo $n$ .
$J$	Es una matriz de dimensión $p \times np$ , va ser usada en RCS.m.
$Pnn$	Es una matriz que contiene un rezago del suavizado de las covarianzas condicionales de los errores.
$Phi$	Es una matriz constante de dimensión $p \times p$ .
$Upsilon$	Es una matriz constante de dimensión $p \times r$ .
$A$	Es una matriz de dimensión $q \times p$ .
$Gamma$	Es una matriz de dimensión $q \times r$ .
$R$	Es la matriz de covarianza de $v_t$ , su dimensión es de $q \times q$ .
$Q$	Es la matriz de covarianza de $w_t$ , de dimensión $p \times p$ .
$U$	Es una matriz de dimensión $r \times n$ que contiene las variables exógenas
$Y$	Es una matriz de dimensión $q \times n$ que contiene las variables observables.
$theta$	Es un vector que contiene los parámetros a estimar o los estimados.
$L$	Da el valor del logaritmo de la función verosimilitud de cada unos de los thetas estimados
$c, ceq$	Da las restricciones que se le asignaron para algunos de los elementos del theta que se estima con el algoritmo genético, a través del AGotro.m o ga21.m

# Apéndice **B**

## Gráficos

### B.1. Gráficos

Gráficos de las variables exógenas que explican el producto interno bruto (PIB) y la inflación

Figura B.1: Crecimiento del Gasto Real del Sector Público ( $G_{t-1}$ )

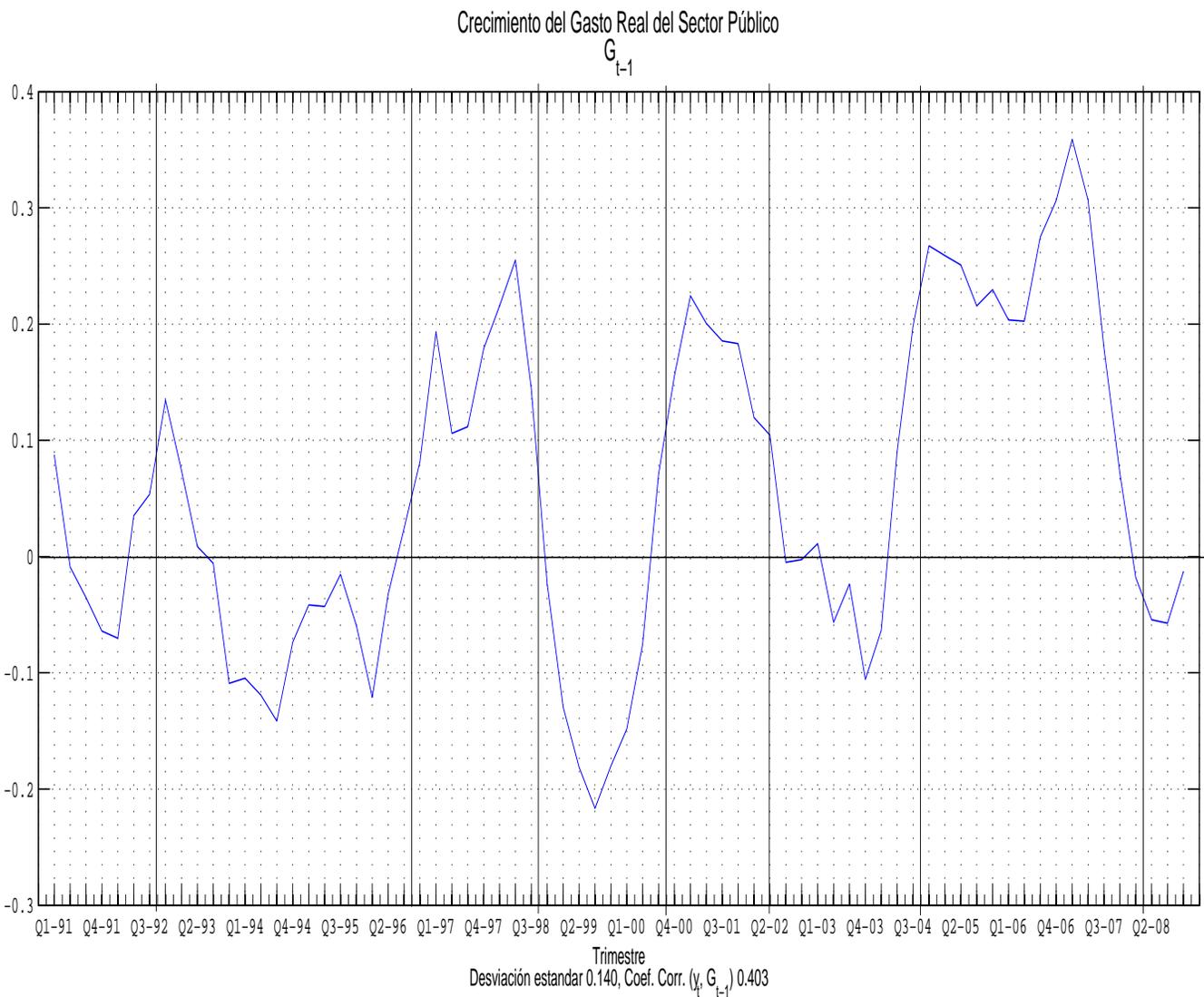


Figura B.2: Crecimiento de los Ingresos de las Exportaciones Petroleras ( $W_{t-2}$ )

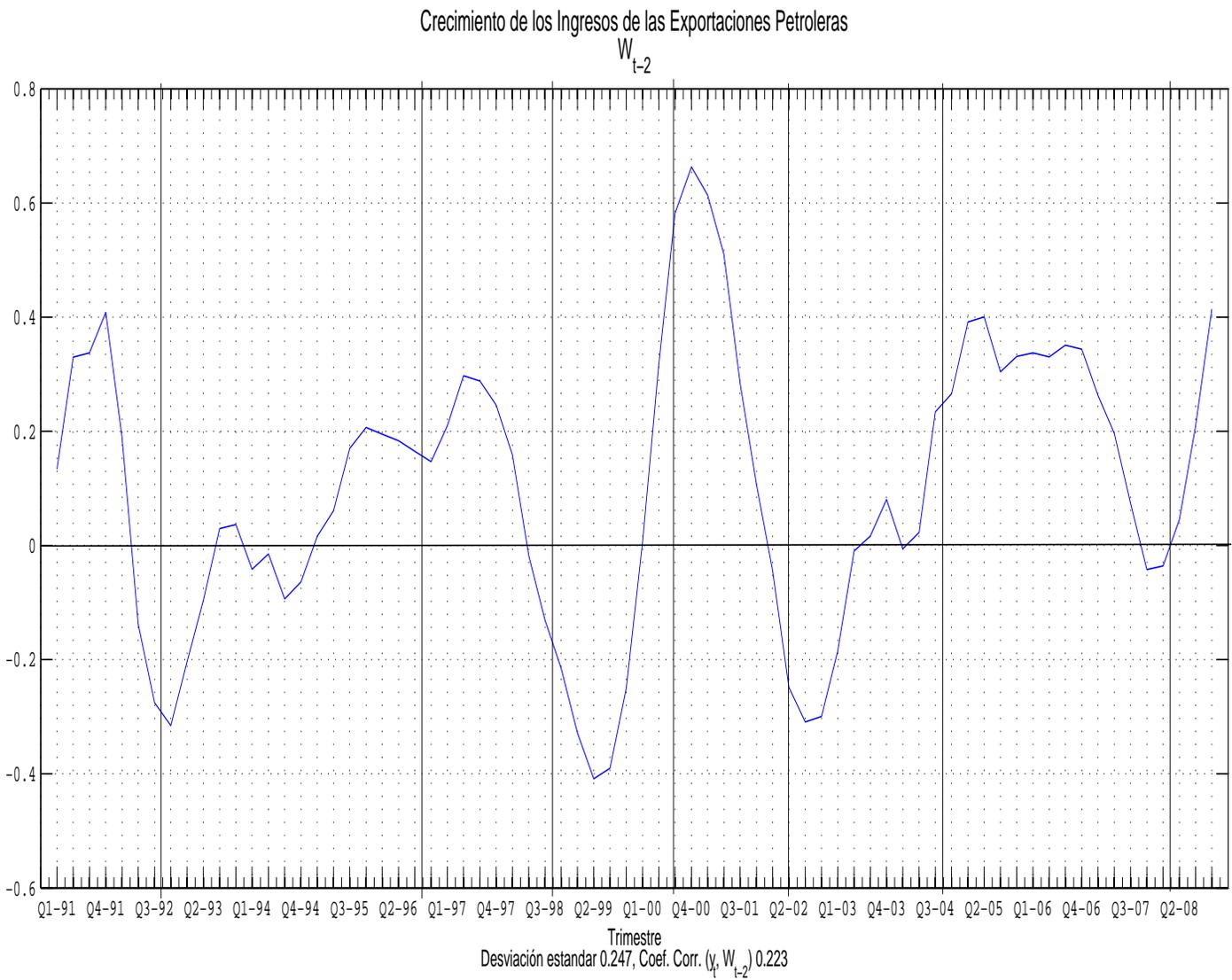
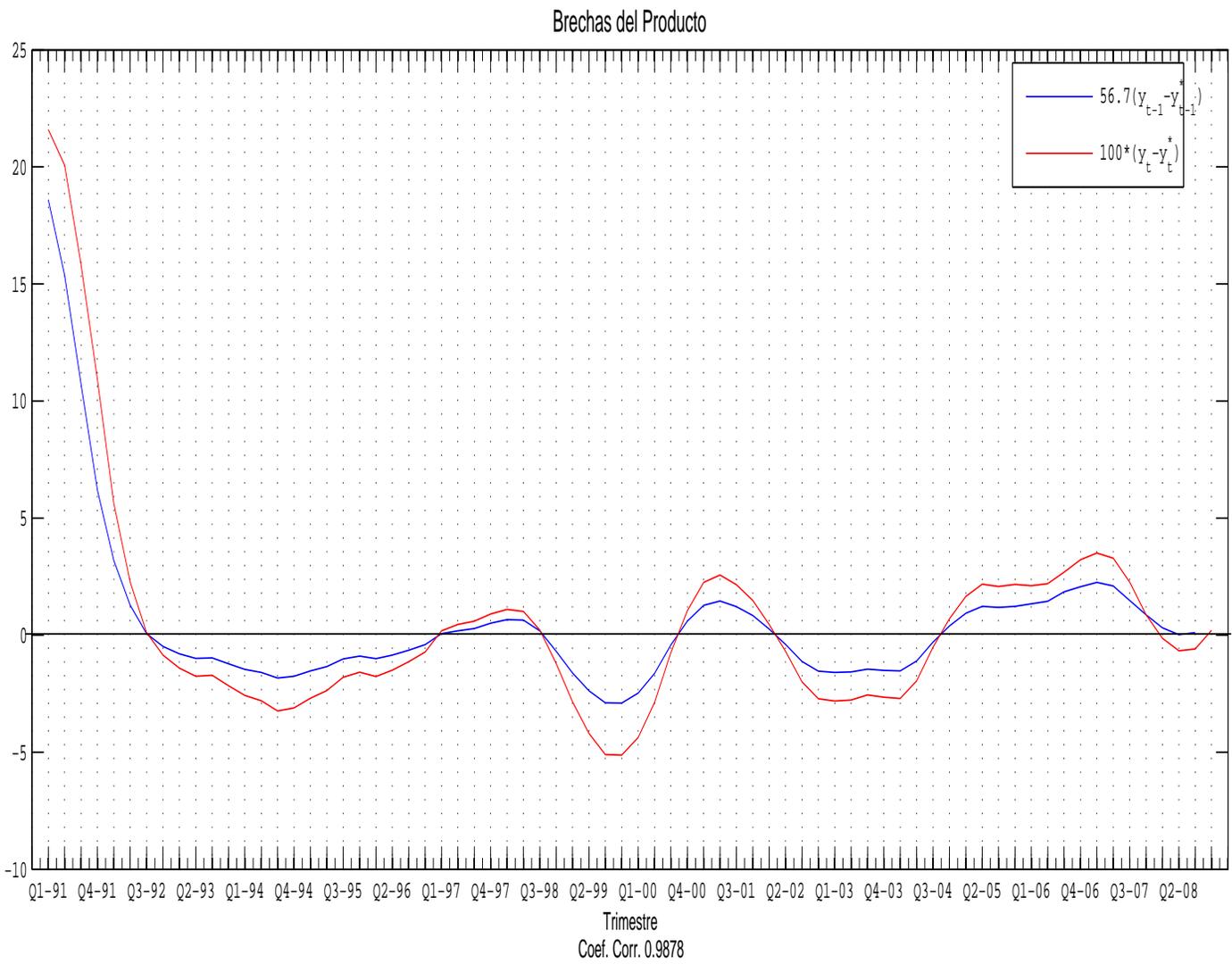


Figura B.3: Brechas del Producto



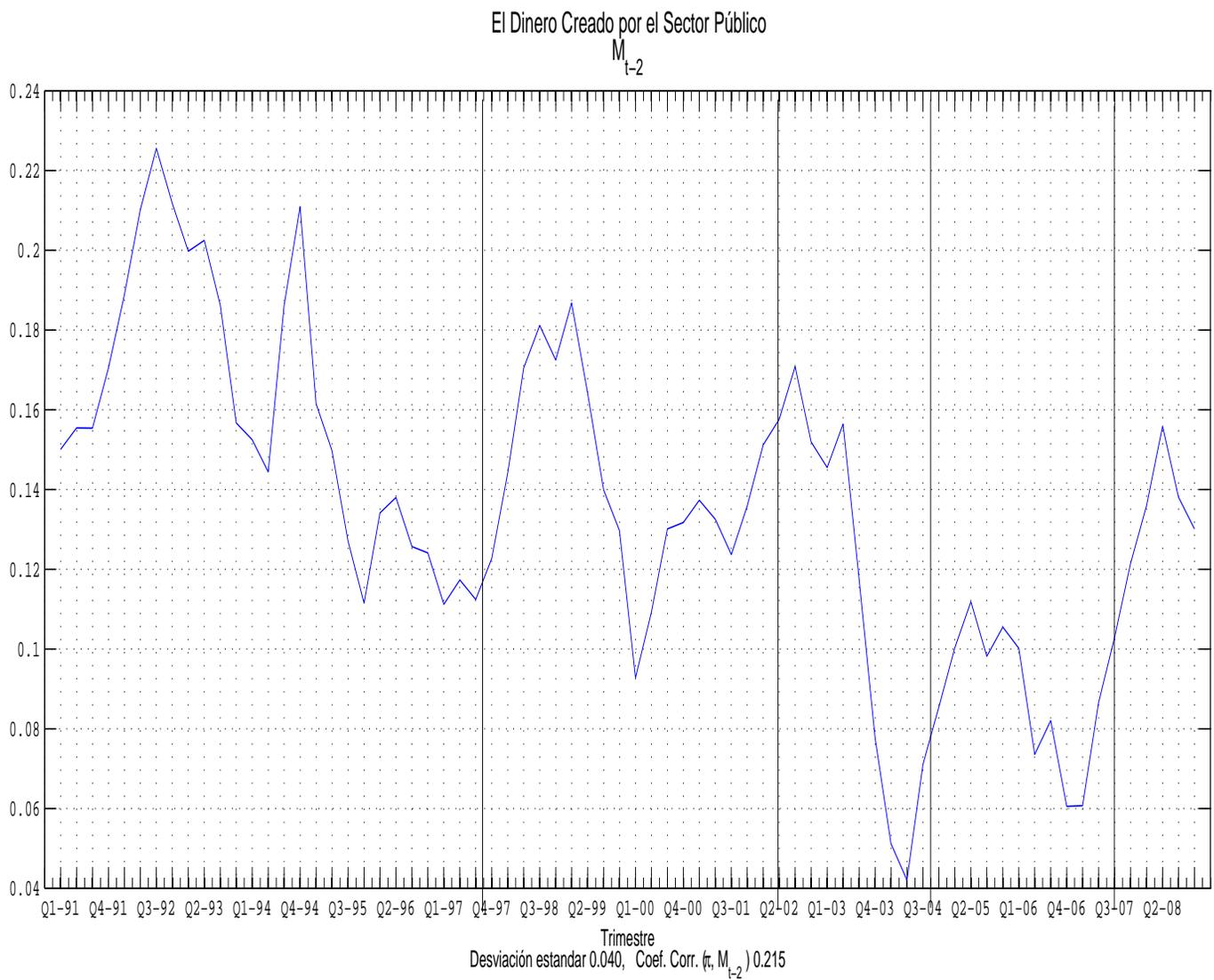


Figura B.4: Dinero Creado por el Sector Público ( $M_{t-2}$ )

Figura B.5: Tasa de Depreciación de la Moneda ( $E_{t-1}$ )

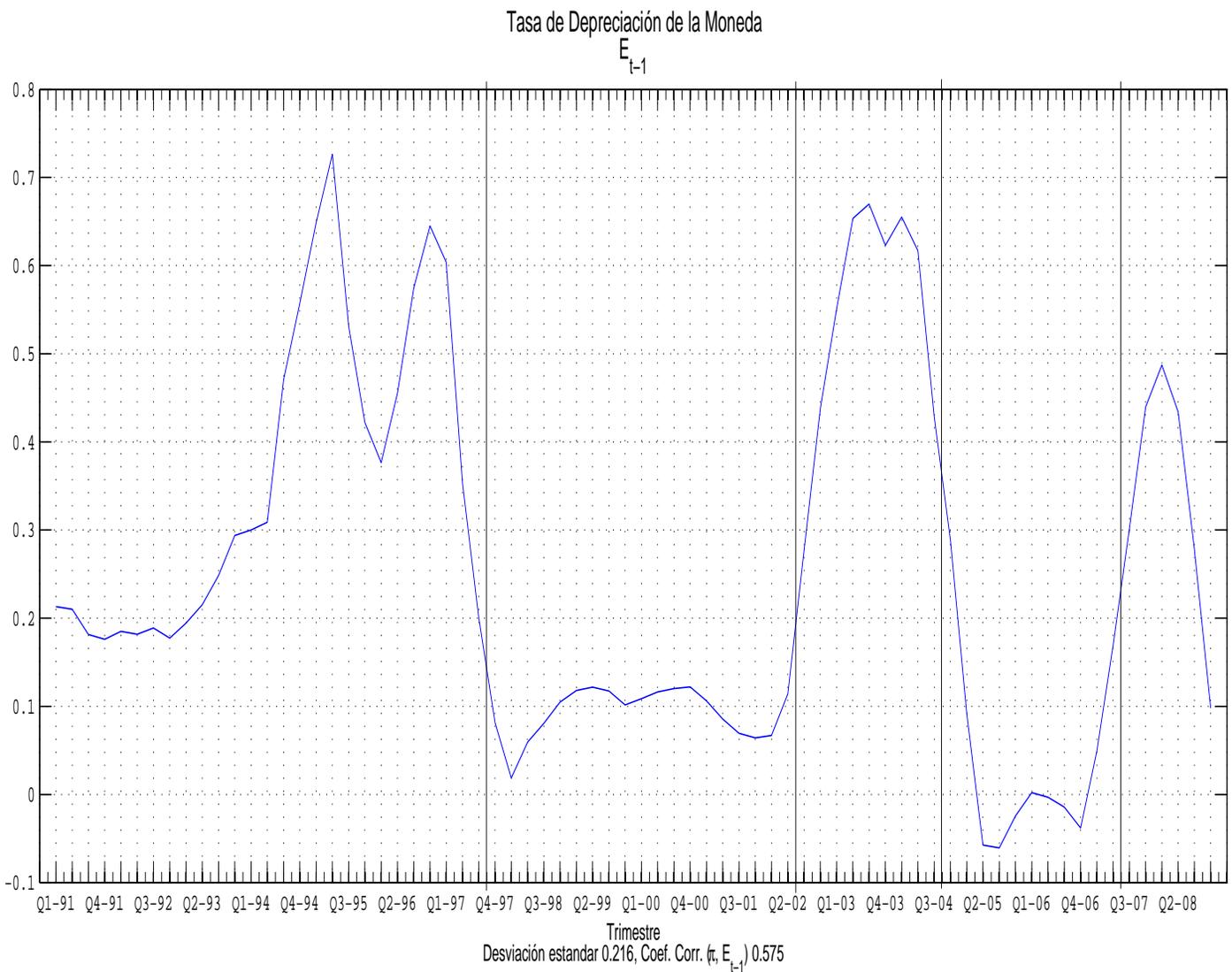


Figura B.6: Brecha Inflacionaria & Producto Rezagado

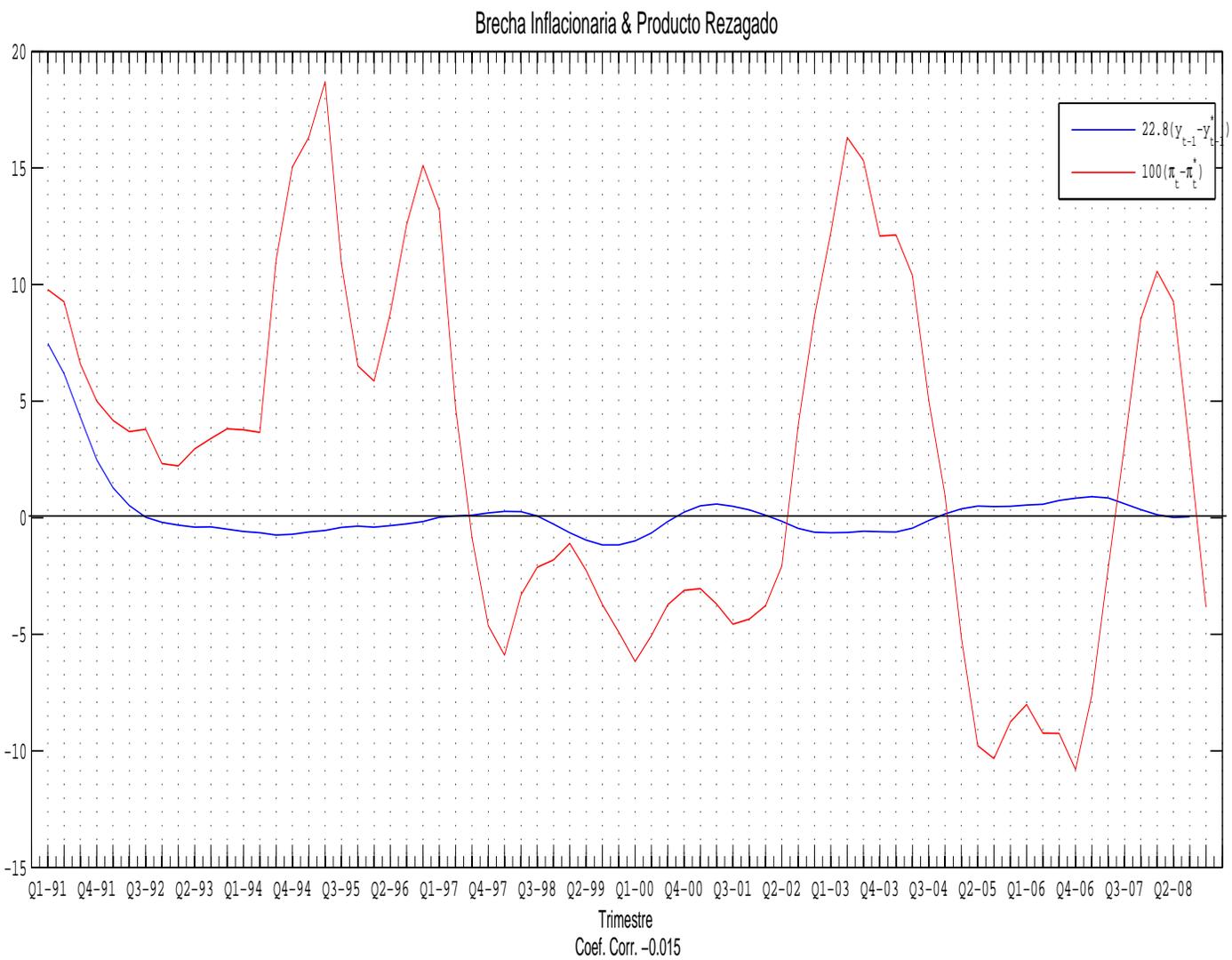


Figura B.7: Brecha del Producto Rezagado

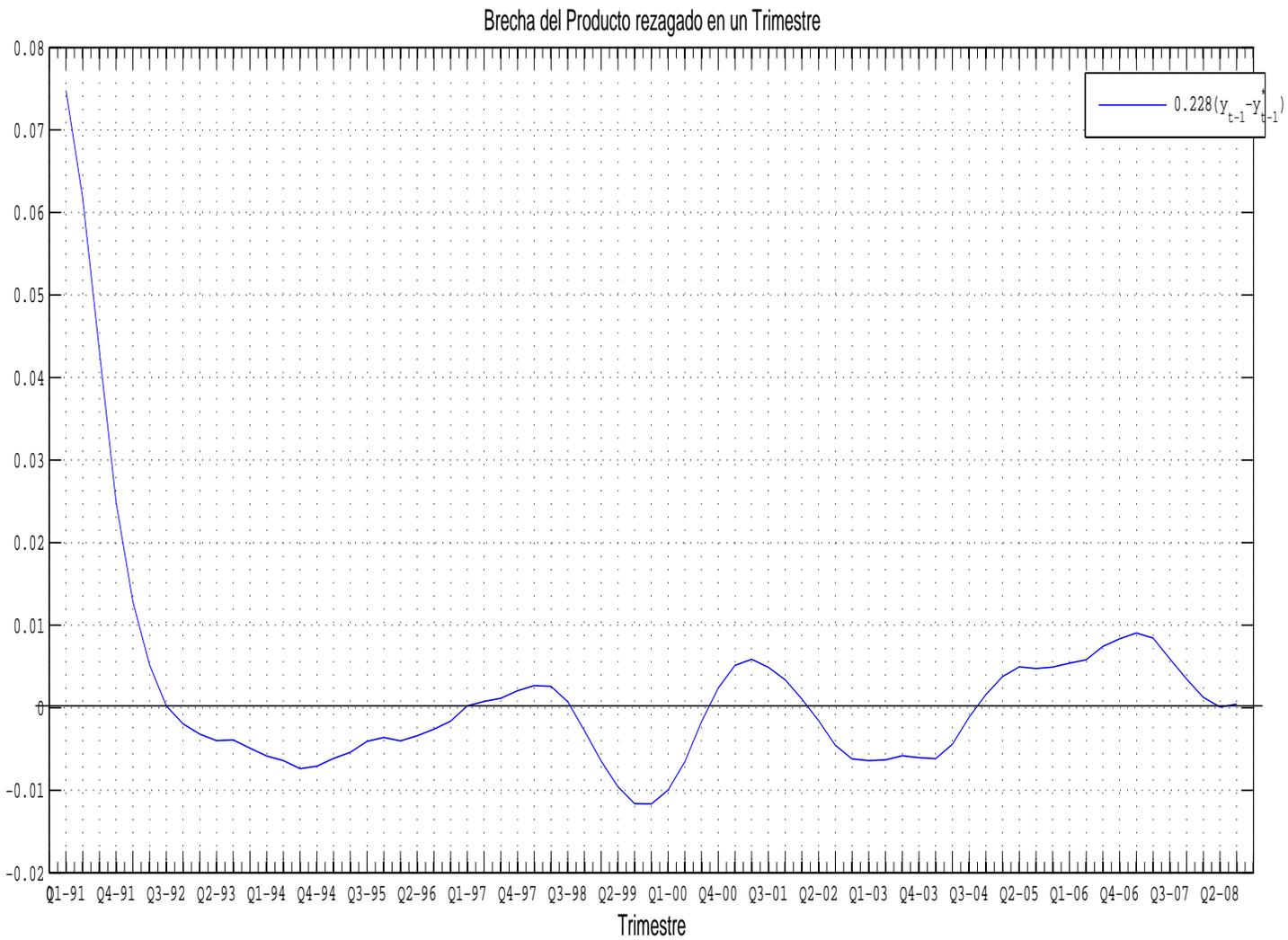


Figura B.8: El Acervo Capital ( $k$ )

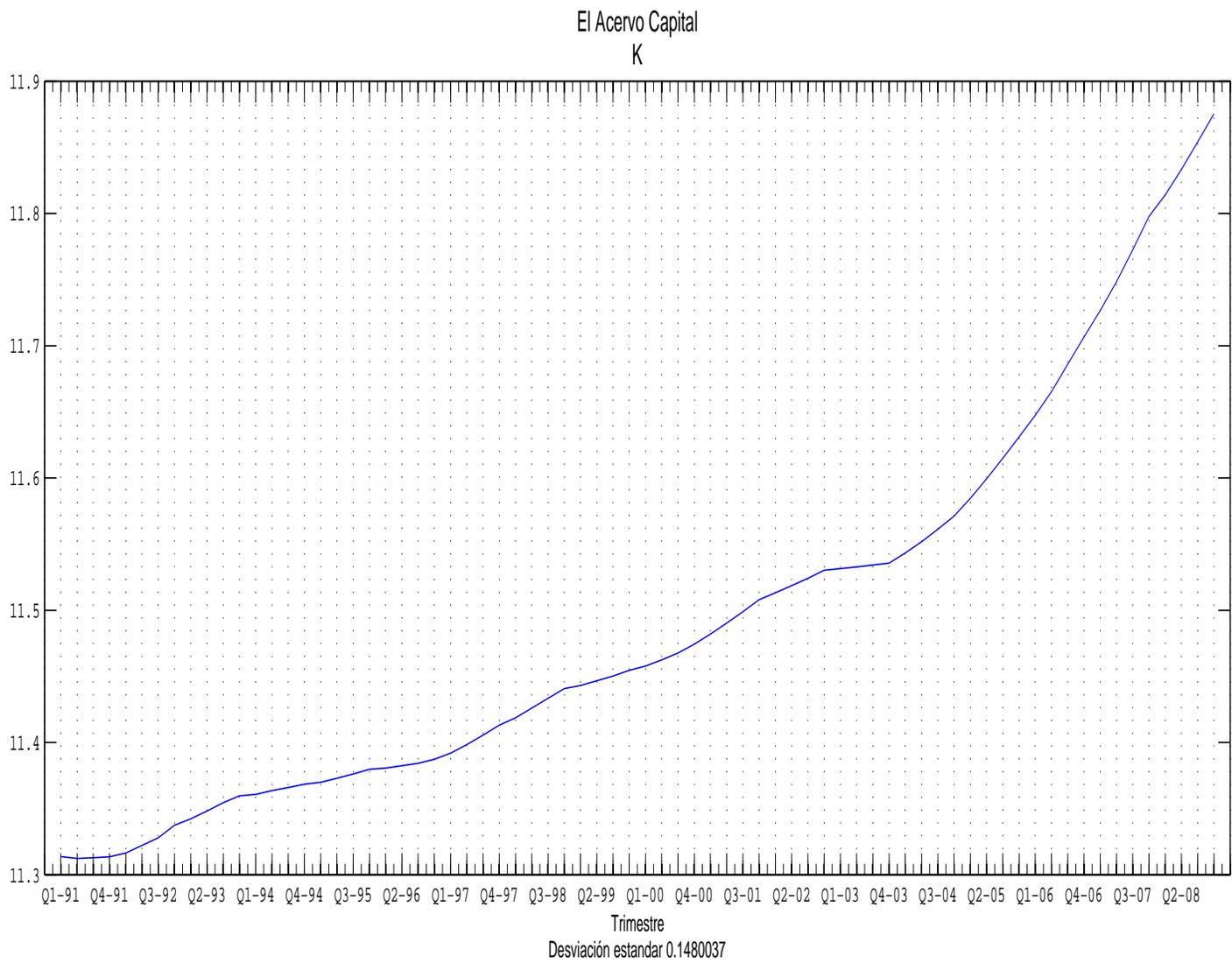


Figura B.9: Cantidad de Trabajadores Empleados (I)

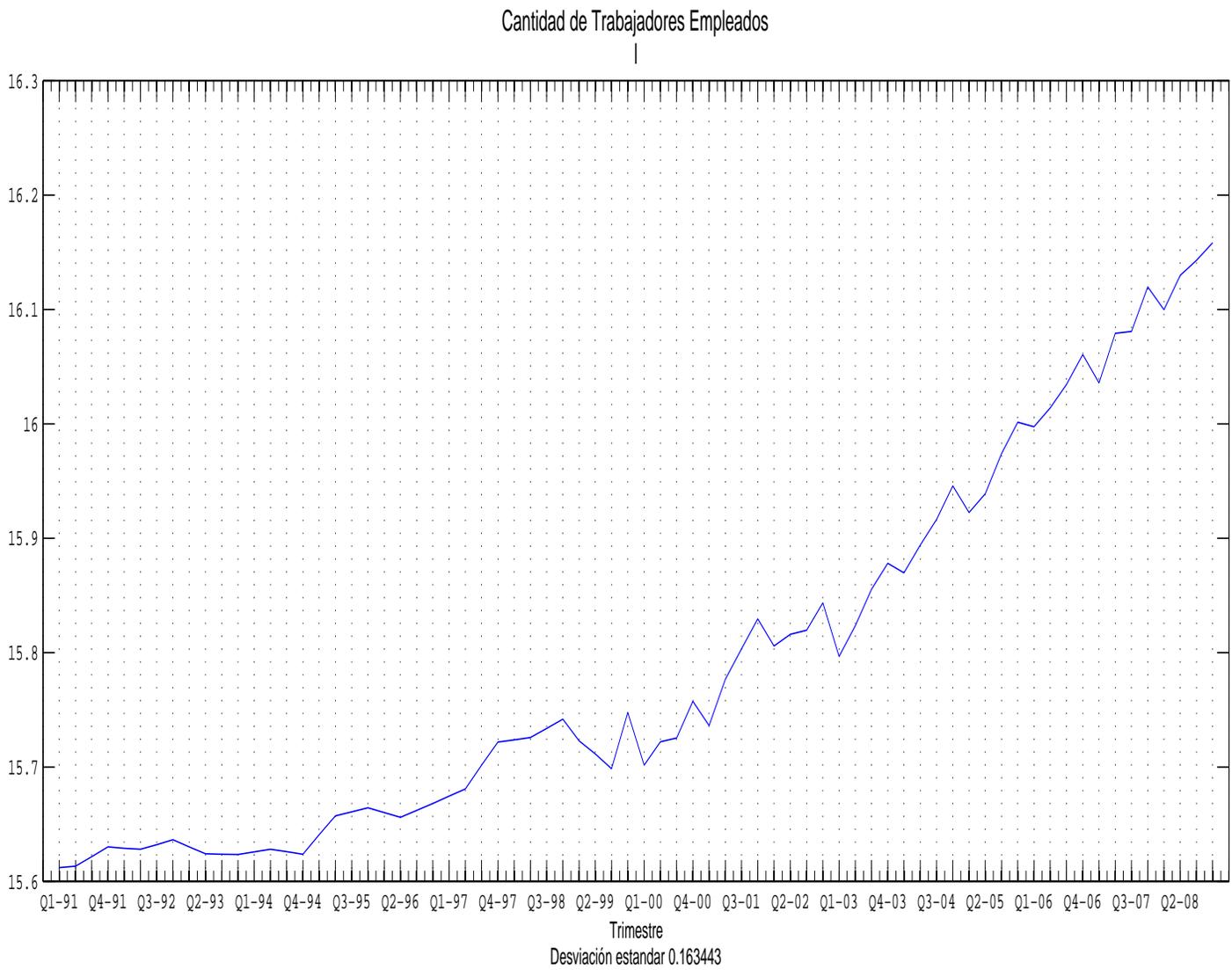


Figura B.10: Exportaciones Petroleras (*ep*)

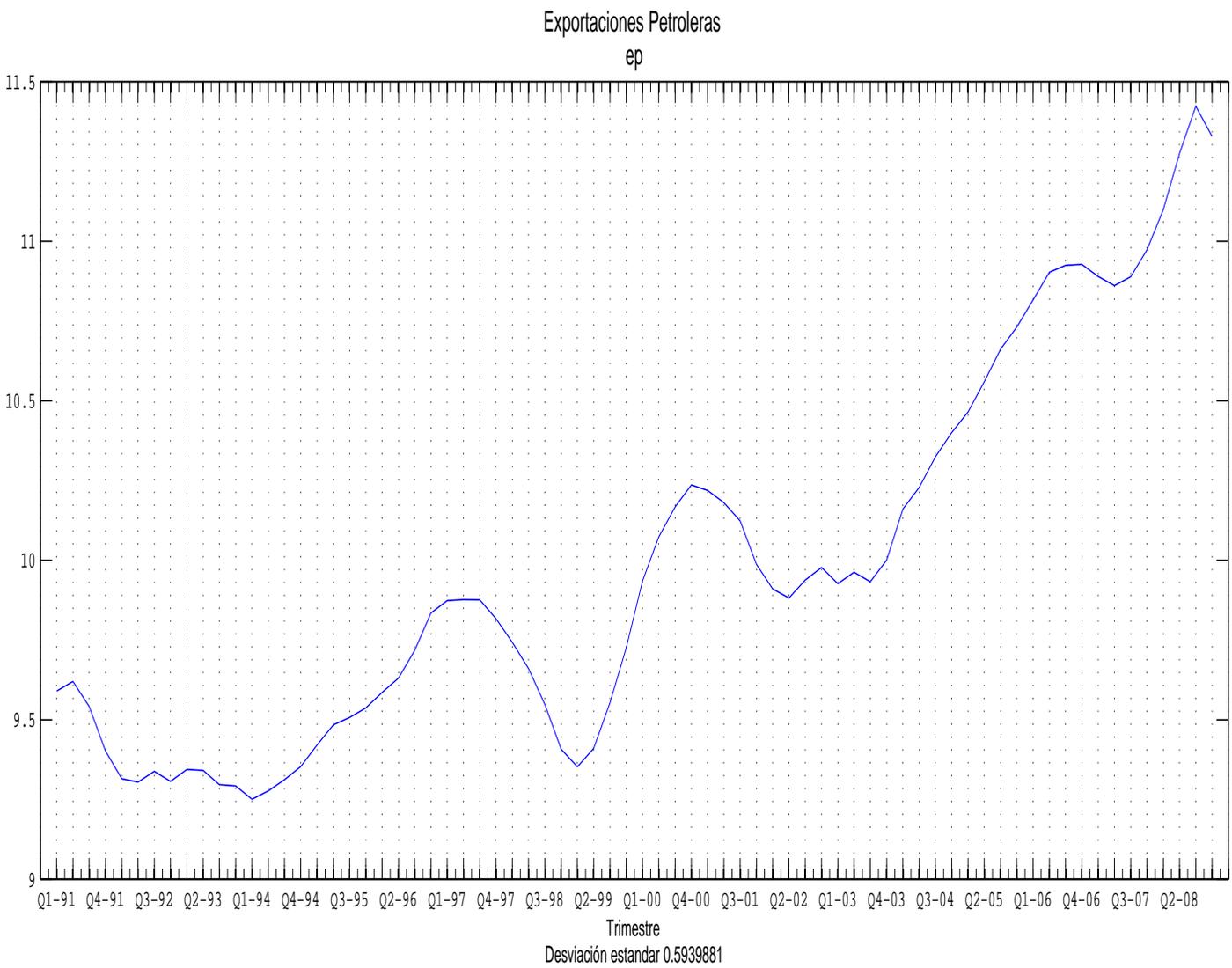


Figura B.11: Ingresos Petroleros (Miles BsF)

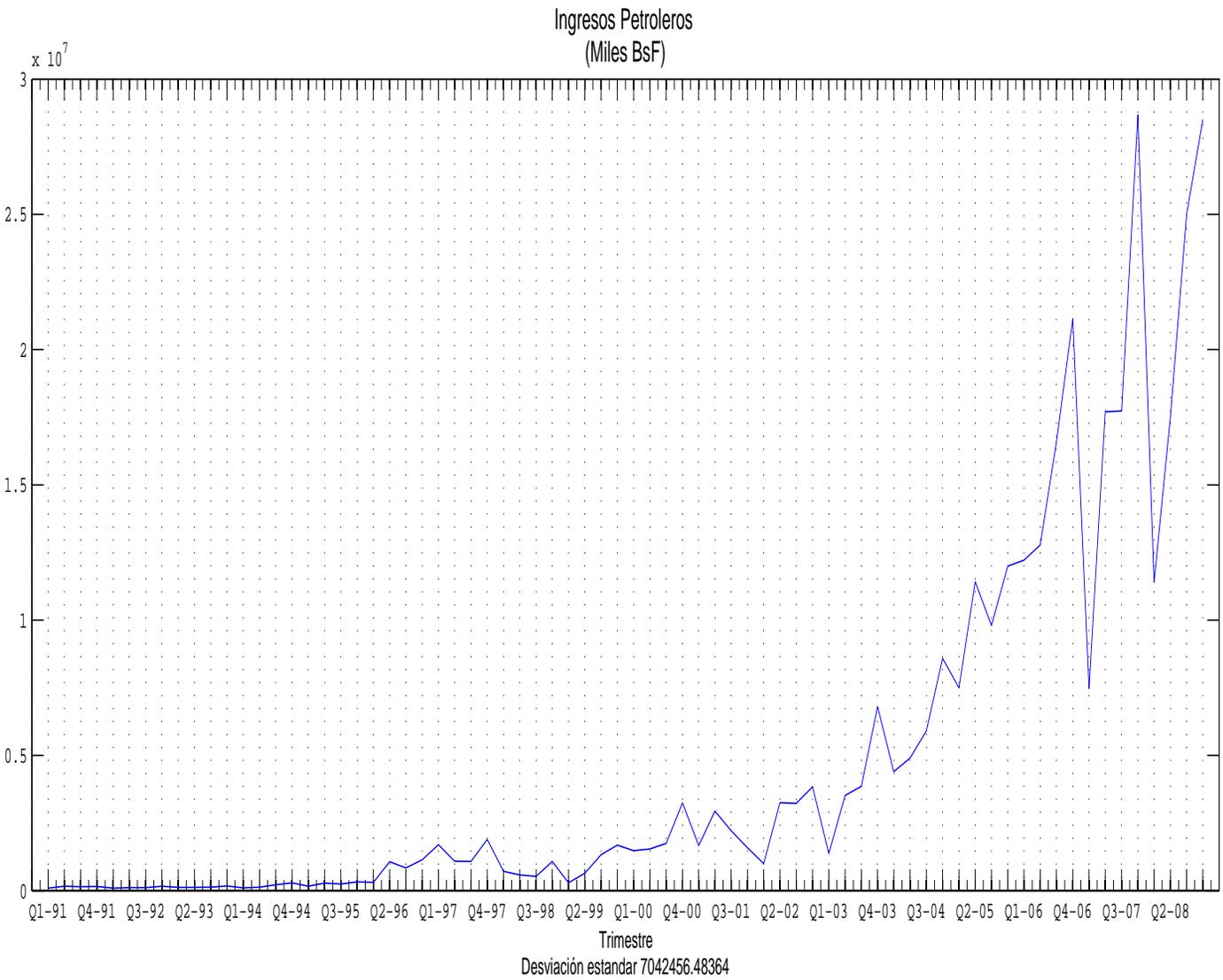
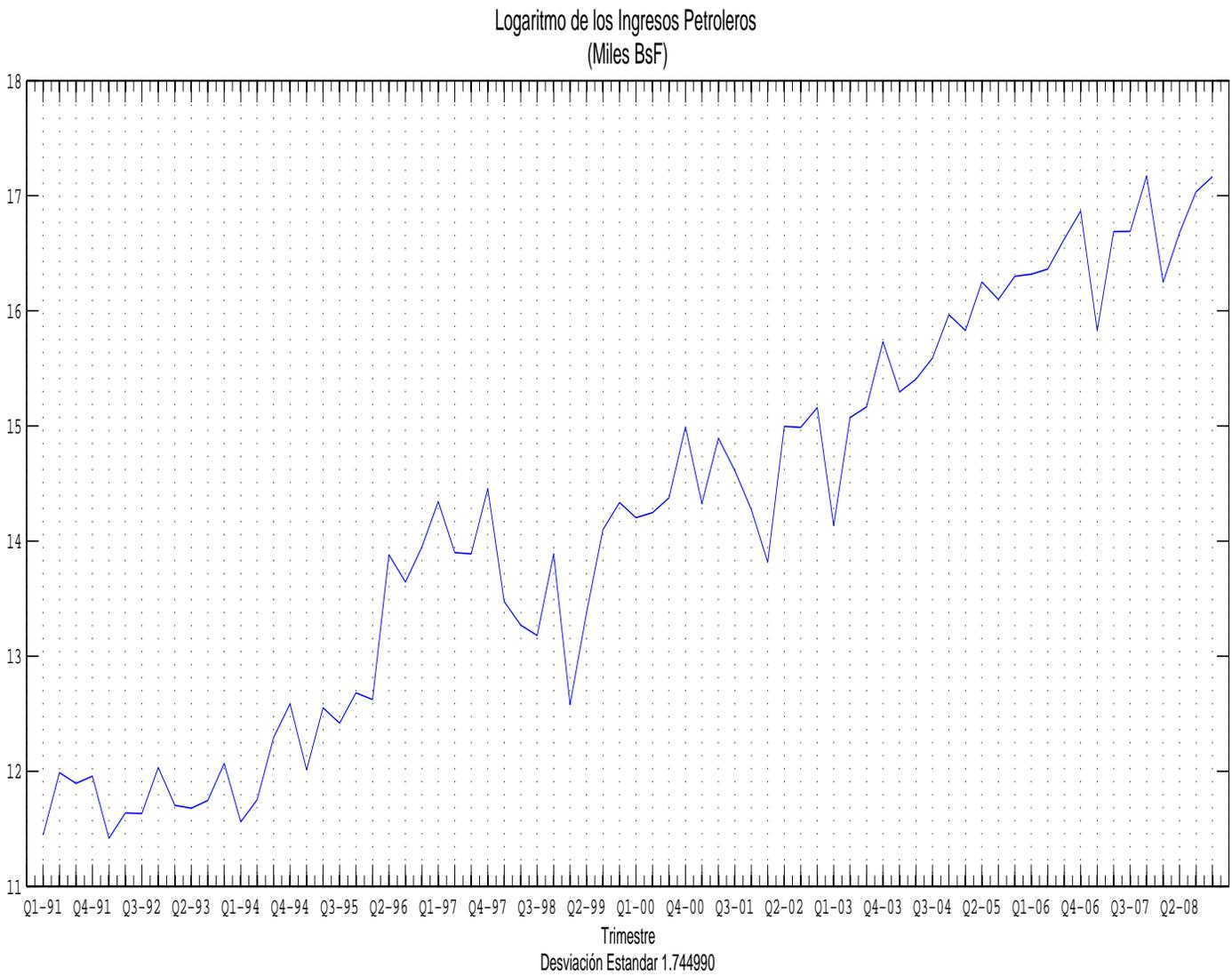
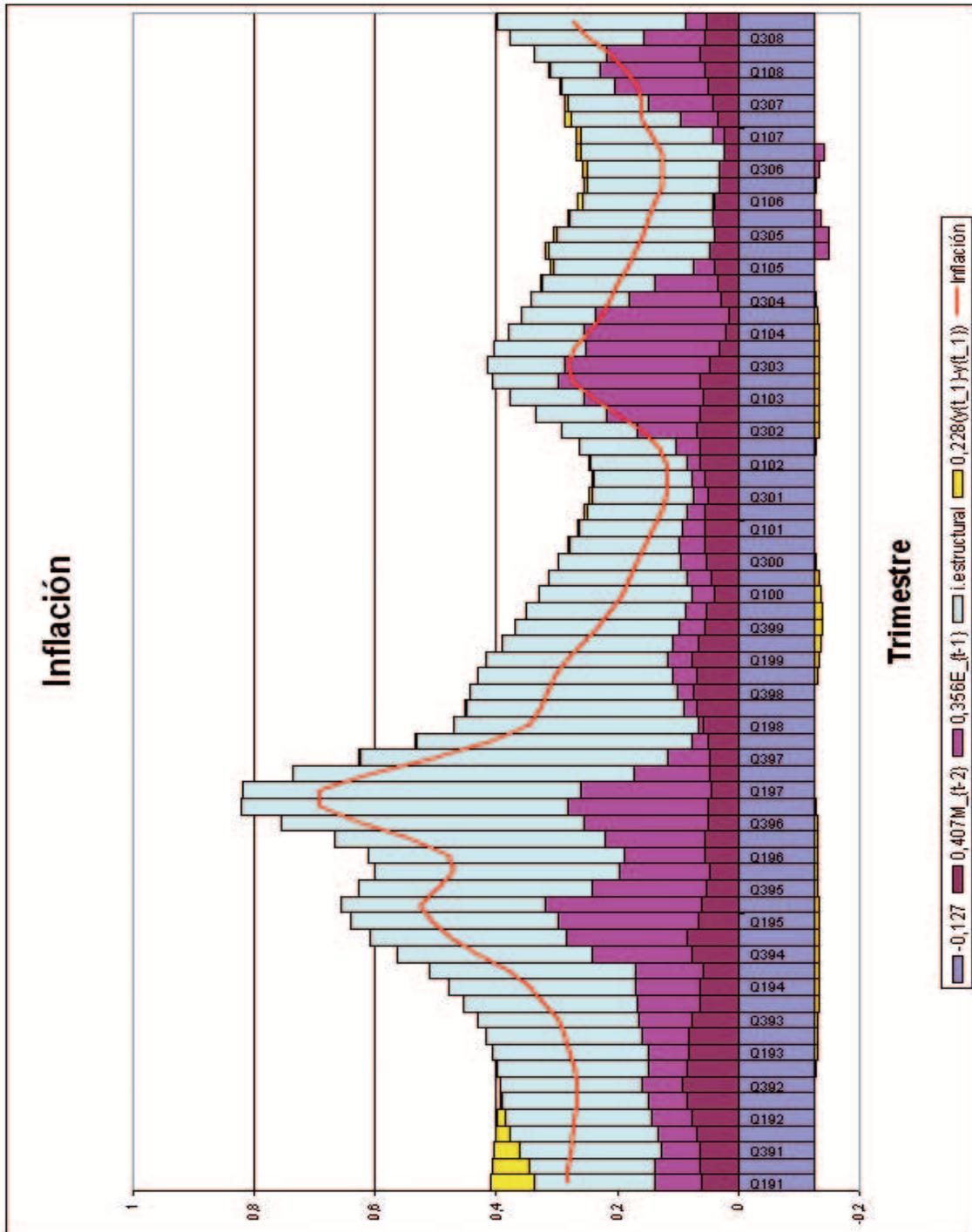


Figura B.12: Logaritmo de los Ingresos Petroleros (Miles BsF)





## B.2. Coeficiente de Correlación

Coeficiente de correlación entre las variables endógenas y exógenas

Cuadro B.1: *Coeficiente de Correlación*

	$\pi_t$	$\pi_t^*$	$\pi_t - \pi_t^*$	$y_t$	$y_t^*$	$y_t - y_t^*$	$y_{t-1} - y_{t-1}^*$	$M_{t-2}$	$\tilde{E}_{t-1}$	$\tilde{G}_{t-1}$	$\tilde{W}_{t-2}$
$\pi_t$	1	0,845	0,600	-0,374	-0,300	-0,128	-0,106	0,215	0,575	-0,314	-0,081
$\pi_t^*$	0,845	1	0,081	-0,180	-0,126	-0,114	-0,122	0,114	0,086	-0,069	0,086
$\pi_t - \pi_t^*$	0,600	0,081	1	-0,427	-0,371	-0,068	-0,015	0,230	0,945	-0,484	-0,280
$y_t$	-0,374	-0,180	-0,427	1	0,936	-0,037	-0,071	-0,329	-0,328	0,403	0,223
$y_t^*$	-0,300	-0,126	-0,371	0,936	1	-0,385	-0,427	-0,302	-0,201	0,265	0,057
$y_t - y_t^*$	-0,128	-0,114	-0,068	-0,037	-0,385	1	0,987	-0,0035	-0,291	0,306	0,424
$y_{t-1} - y_{t-1}^*$	-0,106	-0,122	-0,015	-0,071	-0,427	0,987	1	0,098	-0,244	0,239	0,364
$M_{t-2}$	0,215	0,114	0,230	-0,329	-0,302	-0,0035	0,098	1	-0,010	-0,401	-0,492
$\tilde{E}_{t-1}$	0,575	0,086	0,945	-0,328	-0,201	-0,291	-0,244	-0,010	1	-0,426	-0,233
$\tilde{G}_{t-1}$	-0,314	-0,069	-0,484	0,403	0,265	0,306	0,239	-0,401	-0,426	1	0,490
$\tilde{W}_{t-2}$	-0,081	0,086	-0,280	0,223	0,057	0,424	0,364	-0,492	-0,233	0,490	1