# Variable Compleja para Ingeniería

William La Cruz

VERSIÓN PRELIMINAR para el uso en el curso
*Variable Compleja y Cálculo Operacional*
Escuela de Ingeniería Eléctrica
Departamento de Electrónica, Computación y Control

**ADVERTENCIA:** Estas notas están incompletas y pueden contener errores.
Se distribuyen en primer lugar para los estudiantes de mis cursos.
Por favor contácteme para otros usos.
william.lacruz@ucv.ve



Universidad Central de Venezuela
*La casa que vence las sombras*

Facultad de Ingeniería

# Contenido

# Capítulo 1

# Números Complejos

En este capítulo se introducen algunas propiedades del conjunto de los números complejos. Tal conjunto de números es ampliamente utilizado en el desarrollo de las ideas teóricas de la Ingeniería, en especial, de Ingeniería Eléctrica.

## 1.1 Definición

Se dice que $z$ es un ***número complejo*** si se expresa como $z = x + i\,y$ o, de manera equivalente, $z = x + y\,i$, donde $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, y $\mathbb{R}$ denota el conjunto de los números reales. El símbolo $i$ se conoce como ***unidad imaginaria***. El conjunto de los números complejos se denota como $\mathbb{C}$, y $z \in \mathbb{C}$ indica que $z$ pertenece al conjunto de los números complejos.

Por otra parte, un número complejo $z = x + i\,y$ también se puede definir como el par ordenado $z = (x, y)$. Esta definición equivalente de número complejo permite definir a $i$ como el número complejo dado por

$$i = (0, 1).$$

Más adelante se demostrará que $i^2 = -1$.

Se denota con $x = \operatorname{Re} z$ la parte real del número complejo $z$, y con $y = \operatorname{Im} z$ la parte imaginaria de $z$. Los números complejos de la forma $x + i\,0$, se denominan reales puros o, simplemente, reales. Además, los números complejos de la forma $0 + i\,y$, se denominan imaginarios puros.

Los números reales 0 y 1, también se pueden definir como números complejos. El cero de los números complejos, denotado 0, se define como $0 = 0 + i\,0$. El 1 de los números complejos, denotado 1, se define por $1 = 1 + i\,0$.

**Definición 1.1.** Se dice que dos números complejos $z$ y $w$ son iguales si, y sólo si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales. En otras palabras, si

$$z = x + i\,y \qquad \text{y} \qquad w = u + i\,v,$$

entonces $z = w$, si y sólo si

$$x = u \qquad \text{e} \qquad y = v.$$

En particular,

$$z = x + i\,y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 0.$$

*Observación* 1.1. No existe relación de orden en los números complejos. En los números reales, por ejemplo, se tiene que $5 > 3$, pero no tiene sentido afirmar que $1+i\ < 2+i\,3$.

## 1.2 Operaciones Algebraicas

Seguidamente se definen las operaciones algebraicas de números complejos, a saber: *suma*, *resta*, *multiplicación* y *división*.

**Definición 1.2** (Suma)**.** La suma de los números complejos $z_1 = x_1 + i\,y_1$, y $z_2 = x_2 + i\,y_2$ se define como

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2).$$

**Definición 1.3** (Resta)**.** La resta de los números complejos $z_1 = x_1 + i\,y_1$, y $z_2 = x_2 + i\,y_2$ se define como

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2).$$

**Definición 1.4** (Multiplicación)**.** La multiplicación de los números complejos $z_1 = x_1 + i\,y_1$, y $z_2 = x_2 + i\,y_2$ se define como

$$z_1 \cdot z_2 = z_1\,z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + x_2y_1).$$

**Definición 1.5** (División)**.** La división de los números complejos $z_1 = x_1 + i\,y_1$, y $z_2 = x_2 + i\,y_2 \neq 0$ se define como

$$z_1 \div z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) + i\,\left(\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right).$$

*Observación* 1.2. Las operaciones suma, resta y multiplicación, son *leyes de composición interna* sobre el conjunto de los números complejos, es decir, son operaciones que asocian a cada par de números complejos otro número complejo. La división también es una ley de composición interna sobre el conjunto de los números complejos distintos de cero.

En la siguiente proposición se describen algunas propiedades de las operaciones algebraicas de los números complejos. Esta proposición permite asegurar que el conjunto de números complejos conforma un *cuerpo*, esto es, un conjunto algebraico con leyes de composición interna como la suma y la multiplicación.

**Proposición 1.1.** *Para todo $z, w, s \in \mathbb{C}$ se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Conmutativa*

   - $z + w = w + z$
   - $zw = wz$

2. *Asociativa*
   - $z + (w + s) = (z + w) + s$
   - $z(ws) = (zw)s$
3. *Elemento Neutro*
   - $z + 0 = z$
   - $1 \cdot z = z$
4. *Elemento Inverso*
   - *Para todo* $z \in \mathbb{C}$, *existe* $-z \in \mathbb{C}$ *tal que* $z + (-z) = 0$.
   - *Para todo* $z \neq 0$, *existe* $z^{-1} \in \mathbb{C}$, *denominado inverso multiplicativo, tal que* $z\, z^{-1} = 1$.
5. *Distributiva*
   - $z(w + s) = zw + zs$.

*Demostración.* Es una consecuencia inmediata de la definición de número complejo y las definiciones de suma y multiplicación. □

**Ejercicio 1.1.** Sean $z_1 = 1-i$, $z_2 = i-3$, y $z_3 = i/2$. Realizar las siguientes operaciones algebraicas:

a) $z_1 + z_2 + z_3$

b) $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$

c) $z_1(z_2 + z_3)$

d) $z_2/z_3$

e) $z_1/(z_2 \cdot z_1)$

f) $z_3/(z_1/z_2)$

La siguiente proposición relaciona la división de números complejos con el inverso multiplicativo. Además, proporciona una manera equivalente de definir división de números complejos.

**Proposición 1.2.** *Sean* $z, w \in \mathbb{C}$. *Si* $w \neq 0$, *entonces* $\dfrac{z}{w} = z\, w^{-1}$.

*Demostración.* Demostremos que las partes real e imaginaria de los números complejos $\dfrac{z}{w}$ y $z\, w^{-1}$ son iguales. Tomemos $z = x + i\, y$, $w = u + i\, v$, y asumamos sin pérdida de generalidad que $w \neq 0$. Se tiene que

$$\frac{z}{w} = \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + i\, \frac{yu - xv}{u^2 + v^2}. \tag{1.1}$$

Ahora, veamos la forma que tiene $w^{-1}$. Asumamos que $w^{-1} = a + i\,b$. Por la Proposición 1.1 se tiene que $w\,w^{-1} = 1$. Por tanto, podemos escribir

$$1 = w\,w^{-1} = (u + i\,v)(a + i\,b) = (ua - vb) + i\,(ub + va),$$

de donde se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales con variables $a$ y $b$.

$$\begin{cases} ua - vb & = & 1 \\ va + ub & = & 0 \end{cases}$$

Resolviendo este último sistema de ecuaciones lineales obtenemos

$$a = \frac{u}{u^2 + v^2} \qquad \text{y} \qquad b = \frac{-v}{u^2 + v^2},$$

luego,

$$w^{-1} = \frac{u}{u^2 + v^2} + i\,\frac{-v}{u^2 + v^2}.$$

Ahora, empleando es última ecuación se tiene que

$$z\,w^{-1} = \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + i\,\frac{yu - xv}{u^2 + v^2}. \tag{1.2}$$

Por (1.1) y (1.2) podemos concluir que $\dfrac{z}{w} = z\,w^{-1}$. □

## 1.3 Representación Geométrica

Cada número complejo $z = x + i\,y$ puede definirse como un único par ordenado $(x, y)$. Así, el número complejo $z$ puede representarse geométricamente como un punto en el plano cartesiano $xy$, lo cual se aprecia gráficamente en la Figura 1.1.

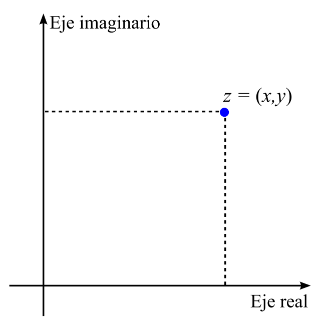



**Figura 1.1**. Representación como par ordenado

Cuando se utiliza el plano cartesiano para representar un número complejo, éste se denomina *plano complejo* o plano $z$. Además, el eje $x$, o eje horizontal, se denomina *eje real*, mientras que el eje $y$, o eje vertical, se conoce como *eje imaginario*.

Otra representación posible de $z = x + i\,y$ en el plano cartesiano es en forma de vector, es decir, un vector orientado cuyo extremo inicial es el origen $(0, 0)$ y su extremo final es el punto $(x, y)$. En la Figura 1.2 se observa un ejemplo de esta representación. De esta forma, un número complejo se puede representar como un par ordenado o como un vector en el plano $xy$.

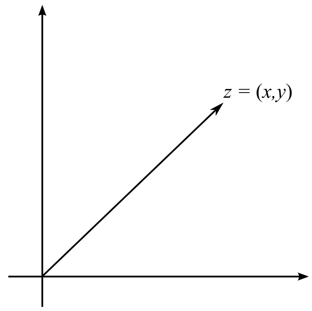



**Figura 1.2**. Representación como vector

## 1.4 Valor Absoluto y Conjugado

La representación del número complejo $z$ como un vector orientado, permite que $z$ herede algunas propiedades de los vectores, entre ellas la magnitud o valor absoluto.

**Definición 1.6** (Valor absoluto)**.** El *valor absoluto* del número complejo $z = x + i\,y$, denotado por $|z|$, se define como la longitud del vector $z$, la cual se calcula a través de la fórmula

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

El valor absoluto $|z|$ representa la distancia del punto $(x, y)$ al origen $(0, 0)$.

**Definición 1.7** (Conjugado)**.** El *conjugado* del número complejo $z = x + i\,y$, denotado por $\overline{z}$, se define como

$$\overline{z} = x + i\,(-y).$$

El conjugado $\overline{z}$ se puede interpretar geométricamente como la reflexión del punto $(x, y)$ con respecto al eje real. En la Figura 1.3 se muestra un ejemplo gráfico del conjugado de un número complejo.

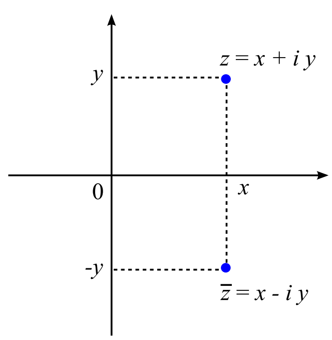



**Figura 1.3**. Conjugado de un número complejo

La Proposición 1.3 presenta algunas propiedades del valor absoluto y el conjugado.

**Proposición 1.3.** *Sean $z_1$ y $z_2$, números complejos. Las siguientes propiedades se cumplen:*

1. $\overline{\overline{z_1}} = z_1$.
2. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$.
3. $\overline{z_1\, z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.
4. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, *siempre y cuando* $z_2 \neq 0$.
5. $|\overline{z_1}| = |z_1|$.
6. $z_1\,\overline{z_1} = |z_1|^2$.
7. $z_1^{-1} = \dfrac{\overline{z_1}}{|z_1|^2}$, *siempre y cuando* $z_1 \neq 0$.
8. $|z_1| \geq |\mathrm{Re}\, z_1| \geq \mathrm{Re}\, z_1$.
9. $|z_1| \geq |\mathrm{Im}\, z_1| \geq \mathrm{Im}\, z_1$.
10. $|z_1\, z_2| = |z_1|\,|z_2|$.
11. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, *siempre y cuando* $z_2 \neq 0$.

*Demostración.* Se deja como ejercicio para el lector. □

La suma de los números complejos $z_1 = x_1 + i\,y_1$ y $z_2 = x_2 + i\,y_2$, tiene una interpretación simple en términos vectoriales. El vector que representa la suma de los números $z_1$ y $z_2$ se obtiene sumando vectorialmente los vectores de $z_1$ y $z_2$; es decir, empleando la regla del paralelogramo. Este esquema geométrico se puede utilizar para obtener la desigualdad triangular. La longitud de un lado cualquiera de un triángulo es menor o igual que la suma de las longitudes de los otros lados. Esto es, la longitud correspondiente a $z_1 + z_2$ es $|z_1 + z_2|$, es menor o igual que la suma de las longitudes, $|z_1|$ y $|z_2|$. En la Proposición 1.4 damos la expresión matemática de la desigualdad triangular.

**Proposición 1.4** (Desigualdad Triangular)**.** *Sean $z_1$ y $z_2$ números complejos. Entonces, la siguiente desigualdad se cumple*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

*Demostración.* Usando la propiedad 6 dada en la Proposición 1.3, podemos escribir:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\,\overline{(z_1 + z_2)} \\ &= (z_1 + z_2)\,(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} + |z_2|^2, \end{aligned}$$

pero

$$z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} = 2\,\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}) \leq 2\,|z_1\overline{z_2}| = 2\,|z_1|\,|\overline{z_2}| = 2\,|z_1|\,|z_2|,$$

luego

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2\,|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2\,,$$

de donde se deduce que

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

con lo cual queda establecida la desigualdad triangular. □

La desigualdad triangular se puede extender a más de dos vectores, es decir, la longitud de la suma de un número finito de vectores es menor o igual que la suma de las longitudes de tales vectores. En la siguiente proposición se muestra la expresión matemática de este resultado, el cual se denomina desigualdad triangular generalizada.

**Proposición 1.5** (Desigualdad Triangular Generalizada)**.** *Sean* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *números complejos, donde* $n$ *es un entero mayor o igual que* 2*. Entonces, la siguiente desigualdad se cumple*

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|.$$

*Demostración.* Realicemos la demostración por inducción. Por la Proposición 1.4 la desigualdad se cumple para $n = 2$. Supongamos, como hipótesis inductiva, que la desigualdad se cumple para $n = h$, es decir, se tiene que

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_h| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_h|.$$

Ahora demostremos que esta desigualdad se cumple para $n = h + 1$. Por la hipótesis inductiva y la Proposición 1.4 podemos escribir:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2 + \cdots + z_h + z_{h+1}| &\leq |z_1 + z_2 + \cdots + z_h| + |z_{h+1}| \\ &\leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_h| + |z_{h+1}|, \end{aligned}$$

para todo entero $h \geq 1$. Con esto queda demostrada la desigualdad. □

## 1.5 Coordenadas Polares

De la representación gráfica del número complejo $z = x + i\,y$ como vector, se deriva la representación en coordenadas polares $(r, \theta)$ de $z$, donde $r = |z|$ y $\theta$ es el *argumento* de $z$.

**Definición 1.8** (Argumento de $z$)**.** El argumento del número complejo $z \neq 0$, denotado por $\arg z$, es cualquiera de los ángulos orientados formados por el vector $z \in \mathbb{C}$ con la parte positiva del eje real.

En la Figura 1.4 mostramos un ejemplo de la representación en coordenadas polares de un número complejo ubicado en el primer cuadrante.

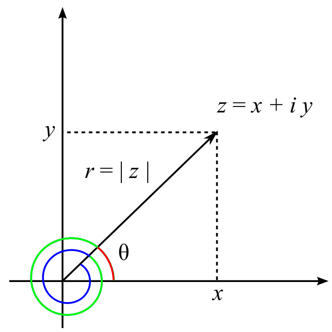



**Figura 1.4**. Coordenadas polares

*Observación* 1.3.

- Los valores de $r$ y $\theta = \arg z$ definen de manera única a $z$; es decir, para cada par $(r, \theta)$ existe un único número complejo $z$ que tiene como coordenadas polares a $(r, \theta)$.

- El número complejo $z$ caracteriza de manera única a $r$, pero no a $\theta = \arg z$; esto es, dado un número complejo $z$, entonces existe un único $r > 0$ tal que $r = |z|$, pero existen infinitos valores de $\theta = \arg z$ tales que $(r, \theta)$ son las coordenadas polares de $z$.

- Se tiene que $x = r\cos\theta$ e $y = r \operatorname{sen}\theta$. Así pues,

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

es la ***forma polar*** de $z$.

- Los valores de $\theta = \arg z$ se pueden encontrar empleando la ecuación

$$\tan\theta = \frac{y}{x}.$$

- Para obtener una única representación en coordenadas polares $(r, \theta)$, el valor de $\theta$ se debe tomar en una determinación, es decir, escoger un intervalo de longitud $2\pi$, por ejemplo, $\theta \in [0, 2\pi)$, ó $\theta \in [-\pi, \pi)$, etc.

**Ejemplo 1.1.** Para el número complejo $z = 1$, se tiene que

$$\theta = \arg z \in \{0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots\}.$$

**Definición 1.9** (Argumento principal)**.** El *argumento principal* de $z \neq 0$ o valor principal de $\arg z$, denotado por $\operatorname{Arg} z$, se define como el único valor de $\arg z$ tal que

$$-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi.$$

El argumento principal de un número complejo $z = x + i\,y$ se puede calcular empleando la ecuación $\theta = \arctan(y/x)$. Esta última ecuación se utiliza en la siguiente expresión para calcular el argumento principal de un número complejo.

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} 0, & x > 0,\ y = 0, \\ \arctan(y/x), & x > 0,\ y > 0, \\ \pi/2, & x = 0,\ y > 0, \\ \arctan(y/x) + \pi, & x < 0,\ y > 0, \\ \pi, & x < 0,\ y = 0, \\ \arctan(y/x) - \pi, & x < 0,\ y < 0, \\ -\pi/2, & x = 0,\ y < 0, \\ \arctan(y/x), & x > 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Como se puede apreciar, la fórmula anterior considera la posición del número complejo $z$ en el plano complejo para calcular el valor de $\operatorname{Arg} z$, es decir, dependiendo del cuadrante donde se encuentre $z$, el argumento principal se calcula de una forma muy particular.

**Ejemplo 1.2.** Utilizando el argumento principal, represente en forma polar los siguientes números complejos: $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = -1 - i$, y $z_4 = 1 - i$.

*Solución.* Se tiene que el valor absoluto de $z_1$ es $r = |z_1| = \sqrt{1^1 + 1^2} = \sqrt{2}$. Como $z_1 = 1 + i$ está en el primer cuadrante, su argumento principal es

$$\operatorname{Arg} z_1 = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Por lo tanto, la fórmula polar de $z_1 = 1 + i$ empleando el argumento principal es

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \operatorname{sen}(\pi/4)).$$

Por un razonamiento similar, se puede verificar que la forma polar de los números complejos $z_2 = -1 + i$, $z_3 = -1 - i$, y $z_4 = 1 - i$, es respectivamente:

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i \operatorname{sen}(3\pi/4)), \\ z_3 &= \sqrt{2}(\cos(3\pi/4) - i \operatorname{sen}(3\pi/4)), \\ z_4 &= \sqrt{2}(\cos(\pi/4) - i \operatorname{sen}(\pi/4)). \end{aligned}$$

$\Diamond$

Pasemos a describir algunas propiedades del argumento, las cuales se muestran en la siguiente proposición.

**Proposición 1.6.** *Si $z_1$ y $z_2$ son números complejos distintos de cero, entonces se satisfacen las siguientes identidades:*

*1.* $\arg(z_1\, z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

*2.* $\arg\left(\dfrac{1}{z_2}\right) = -\arg(z_2)$.

*3.* $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$.

*Demostración.* Supongamos que la forma polar de $z_1$ y $z_2$ está dada respectivamente por $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$.

*Demostración de 1.* Utilizando identidades trigonométricas podemos escribir:

$$\begin{aligned} z_1\,z_2 &= (r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1))\,(r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)) \\ &= (r_1 r_2)\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1 \text{sen}\,\theta_2) + i\,(\cos\theta_1 \text{sen}\,\theta_2 + \text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2)\right] \\ &= (r_1 r_2)\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{sen}\,(\theta_1+\theta_2)\right], \end{aligned}$$

que es la forma polar de $z_1\,z_2$ y $\theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2$ es un valor del argumento $\arg(z_1\,z_2)$. Por lo tanto, se cumple la identidad *1*.

*Demostración de 2.* Empleando la forma polar de $z_2$ podemos escribir:

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)} = \frac{1}{r_2}\cdot\frac{\cos\theta_2 - i\,\text{sen}\,\theta_2}{\cos^2\theta_2 + \text{sen}^2\theta_2} = r_2^{-1}(\cos(-\theta_2) + i\,\text{sen}\,(-\theta_2)),$$

que es la forma polar de $1/z_2$ y $\arg(1/z_2) = -\theta_2$; luego, se cumple la identidad *2*.

*Demostración de 3.* Como

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\cdot\frac{1}{z_2},$$

entonces, por las identidades *1* y *2*, se prueba que la identidad *3* se cumple. □

**Ejemplo 1.3.** La Proposición 1.6 se puede utilizar para calcular un valor del argumento de $z_1\,z_2$ o $z_1/z_2$. Por ejemplo, tomemos $z_1 = i$ y $z_2 = -1 + i$. La forma polar de estos números complejos es $z_1 = \cos(\pi/2) + i\,\text{sen}\,(\pi/2)$ y $z_2 = \sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i\,\text{sen}\,(3\pi/4))$. Así, un valor del argumento de $z_1\,z_2$ es

$$\arg(z_1 z_1) = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} = \frac{5\pi}{4},$$

lo cual efectivamente es un valor del argumento de $z_1 z_2 = -1 - i$ (verifique esta afirmación). Pero, este valor no es el argumento principal de $z_1 z_2 = -1 - i$, aunque $\pi/2$ y $3\pi/4$ sí son los argumentos principales de $z_1$ y $z_2$, respectivamente.

El Ejemplo 1.3 nos permite asegurar que, en general,

$$\text{Arg}\,(z_1 z_2) \neq \text{Arg}\,z_1 + \text{Arg}\,z_2 \qquad \text{y} \qquad \text{Arg}\,(z_1/z_2) \neq \text{Arg}\,z_1 - \text{Arg}\,z_2.$$

### 1.5.1 Fórmula de Euler

Sea $z = x + i\,y$ un número complejo con módulo $r = 1$ y $\theta = \arg z$. Escribiendo

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$$

se obtiene

$$z = e^{i\theta},$$

que se conoce como ***fórmula de Euler***.

Ahora, para cualquier número complejo $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, con $r > 0$, se puede utilizar la fórmula de Euler para reescribir a $z$ como:

$$z = re^{i\theta}$$

y, además, si $z_1 = r_1\, e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2\, e^{i\theta_2}$, entonces las siguientes identidades son ciertas:

1. $z_1\, z_2 = (r_1 r_2)e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.
2. $\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1}{r_1}\, e^{i(-\theta_1)} = \dfrac{1}{r_1}\, e^{-i\theta}$.
3. $\dfrac{z_1}{z_2} = \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right) e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.

Considerando esta notación, la forma polar de $z$ utilizando la fórmula de Euler es $z = re^{i\theta}$, donde $r$ y $\theta$ son sus coordenadas polares ($\theta$ no necesariamente es el argumento principal de $z$).

**Ejemplo 1.4.** La forma polar, utilizando la fórmula de Euler, de los números complejos $z_1 = 1 + i$ , $z_2 = -1 + i$ , $z_3 = -1 - i$, y $z_4 = 1 - i$, es

$$z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\theta\pi/4}, \quad z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\theta 3\pi/4}, \quad z_3 = \sqrt{2}\, e^{-i\theta 3\pi/4}, \quad z_4 = \sqrt{2}\, e^{-i\theta\pi/4}.$$

Observe que en la forma polar de los números dados se utilizó el argumento principal, pero pudiera también emplearse cualquier valor del argumento.

## 1.6 Potencias y Raíces

**Definición 1.10** (Potencia $n$-ésima)**.** Sean $z = r\, e^{i\theta}$, y $n$ un entero positivo. La potencia $n$-ésima de $z$, denotada por $z^n$, se define como

$$z^n = r^n\, e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\, n\theta).$$

**Definición 1.11** (Raíces $n$-ésimas)**.** Sean $z = r\, e^{i\theta}$, y $n$ un entero positivo. Las raíces $n$-ésimas de $z$, denotadas por $z^{1/n}$, se definen como

$$\begin{aligned} z^{1/n} &= \sqrt[n]{r}\, e^{i\,\frac{\theta+2k\pi}{n}} \\ &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right), \end{aligned}$$

para $k = 0, 1, \ldots, n-1$, donde $\sqrt[n]{r}$ denota la raíz $n$-ésima positiva del número real $r$.

*Observación* 1.4. En las definiciones de potencia y raíz $n$-ésima, se utiliza cualesquiera valor de $\theta$, no es necesariamente el argumento principal de $z$.

**Ejemplo 1.5.** Se deja como ejercicio para el lector verificar que

$$(1+i)^3 = \sqrt[2]{2^3}\, e^{i\,\frac{3\pi}{4}} \qquad \text{y} \qquad (1+i)^{1/5} = \sqrt[10]{2}\, e^{i\,\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{5}}, \quad k = 0, 1, \ldots, 4.$$

## 1.7 Regiones en el Plano Complejo

En esta sección se describen conjuntos especiales de números complejos, o puntos, y la proximidad de unos a otros.

**Definición 1.12** (Vecindad)**.**
El conjunto de puntos

$$B(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

para cada $z_0 \in \mathbb{C}$ y cada $\varepsilon > 0$, se denomina *vecindad* de $z_0$.

La vecindad $B(z_0, \varepsilon)$ de un número complejo $z_0$ representa geométricamente el interior de la circunferencia $|z - z_0| = \varepsilon$, como se aprecia en la Figura 1.5.

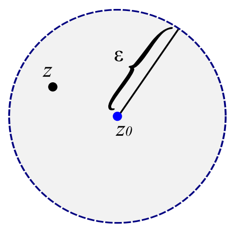



**Figura 1.5**. Vecindad de un número complejo

**Definición 1.13** (Conjunto abierto)**.** Se dice que un conjunto de números complejos $S$ es ***abierto***, si para cada $z \in S$ existe una vecindad de $z$, $B(z, \varepsilon)$, tal que $B(z, \varepsilon) \subset S$.

**Ejemplo 1.6.** Los siguientes conjuntos del plano complejo son ejemplos de conjuntos abiertos.

(a) $S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

(b) $S_2$ es la región del plano complejo formada por los puntos interiores del cuadrado cuyos vértices son los puntos $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1 + i$, y $z_4 = i$.

(c) $S_3$ es la región del plano complejo formada por los puntos $z = x + i\,y$ que satisfacen el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x - y & > & -1 \\ x + y & < & 1 \\ y & > & 0 \end{cases}$$

Los conjuntos $S_1$, $S_2$ y $S_3$, se aprecian en la Figura 1.6.

**Definición 1.14** (Frontera de un conjunto)**.** Sea $S$ un conjunto de números complejos. La ***frontera*** de $S$ es el conjunto formado por los puntos $z \in \mathbb{C}$ tales que todas las vecindades de $z$ contienen puntos de $S$ y puntos que no están en $S$.

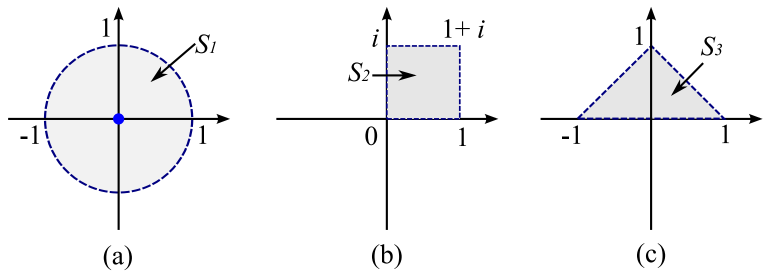



**Figura 1.6**. Ejemplos de conjuntos abiertos

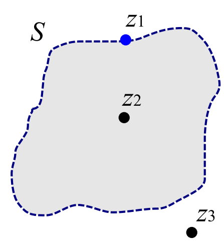



**Figura 1.7**. Frontera de un conjunto

**Ejemplo 1.7.** En la Figura 1.7 observamos un conjunto $S$ y tres puntos $z_1$, $z_2$ y $z_3$. En este caso, $z_1$ es un punto de la frontera de $S$, en cambio $z_2$ y $z_3$ no pertenecen a la frontera de $S$ (se deja al lector justificar esta afirmación).

**Ejercicio 1.2.** Determine la expresión matemática de la frontera de los conjuntos $S_1$, $S_2$ y $S_3$ definidos en el Ejemplo 1.6.

**Definición 1.15** (Punto de acumulación)**.** Sea $S$ un conjunto de números complejos. Se dice que $z_0$ es un ***punto de acumulación*** si toda vecindad de $z_0$ contiene por lo menos un punto de $S$ diferente de $z_0$.

**Ejemplo 1.8.** Considere el conjunto $S$ de la Figura 1.7. Aquí observamos que $z_1$ y $z_2$ son puntos de acumulación de $S$, pero $z_3$ no es un punto de acumulación de $S$, ya que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(z_3, \varepsilon) \cap S = \emptyset$.

**Definición 1.16** (Conjunto cerrado)**.** Se dice que un conjunto de números complejos $S$ es ***cerrado***, si todos sus puntos de acumulación pertenecen a él. De forma equivalente, $S$ es cerrado si contiene a su frontera.

**Ejemplo 1.9.** Considere todos los conjuntos $S$ mostrados en las Figuras 1.5, 1.6 y 1.7. Suponga que con estos conjuntos se forman nuevos conjuntos que contienen los puntos de la frontera. Estos últimos conjuntos son todos cerrados.

**Definición 1.17** (Conjunto conexo)**.** Se dice que un conjunto de números complejos $S$ es ***conexo***, si dados dos puntos cualesquiera de $S$, existe una trayectoria formada por segmentos de recta que los une y cuyos puntos pertenecen todos a $S$.

**Ejemplo 1.10.** En la Figura 1.8 observamos dos conjuntos $S_1$ y $S_2$. El conjunto $S_1$ es conexo y $S_2$ es no conexo.

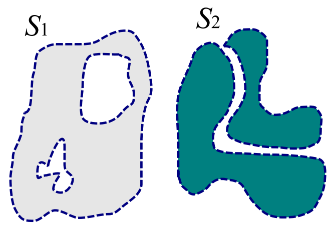



**Figura 1.8**. Conjuntos conexo y no conexo

**Definición 1.18** (Dominio)**.** Se dice que un conjunto de números complejos $S$ es un ***dominio***, si $S$ es abierto y conexo.

**Ejemplo 1.11.** Todos los conjuntos $S$ mostrados en las Figuras 1.5, 1.6 y 1.7 son un dominio. Asimismo, el conjunto $S_1$ de la Figura 1.8 también es un dominio.

**Definición 1.19** (Conjuntos acotado y no acotado)**.** Se dice que un conjunto de números complejos $S$ es ***acotado***, si existe un número real $R > 0$ tal que todo punto de $S$ queda dentro de la circunferencia $|z| = R$. Por el contrario, si $|z| > R$ para todo $R > 0$ y algún $z \in S$, se dice que $S$ es ***no acotado***.

**Ejemplo 1.12.** En la Figura 1.9 observamos dos conjuntos $S_1$ y $S_2$. El conjunto $S_1$ es acotado y $S_2$ es no acotado.

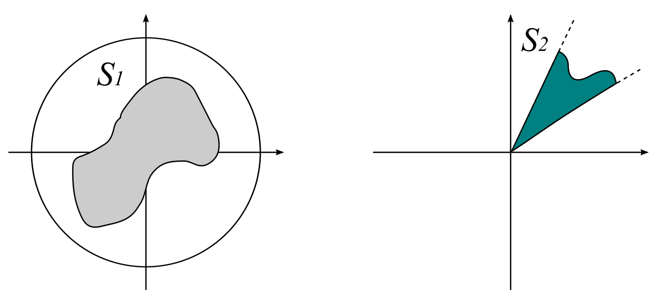



**Figura 1.9**. Conjuntos acotado y no acotado

## 1.8 Ejercicios Propuestos

**1.** Exprese los siguientes números complejos en la forma cartesiana $x + iy$:

(a) $(2 + 3i) + (4 + i)$ *Resp.* $6 + i\,4$

(b) $\dfrac{2+3i}{4+i}$ *Resp.* $\frac{11}{17} + i\,\frac{10}{17}$

(c) $\dfrac{1}{i} + \dfrac{3}{1+i}$ *Resp.* $\frac{3}{2} - \; i\,\frac{5}{2}$

(d) $(2+3i)(4+i)$ *Resp.* $5 + i\,14$

(e) $(8+6i)^3$ *Resp.* $-352 + i\,936$

(f) $\left(1 + \dfrac{3}{1+i}\right)^2$ *Resp.* $4 - \; i\,\frac{15}{2}$

(g) $\dfrac{1+2i}{3-4i} + \dfrac{2-i}{5i}$ *Resp.* $-\,\frac{2}{5}$

(h) $(1-i)^4$ *Resp.* $-4$

**2.** Encuentre las soluciones de las siguientes ecuaciones:

(a) $z^2 = 3 - 4i$ *Resp.* $z_1 = i - 1,\ z_2 = 2 - i$

(b) $(z+1)^2 = 3 + 4i$ *Resp.* $z_1 = 1 + i,\ z_2 = -3 - i$

**3.** Simplifique las siguientes expresiones:

(a) $(-i)^{-1}$ *Resp.* $i$

(b) $(1-i)^{-1}$ *Resp.* $\frac{1}{2} + i\,\frac{1}{2}$

(c) $\dfrac{1+i}{1-i}$ *Resp.* $i$

(d) $1 - \sqrt{2i}$ *Resp.* $-i$, ó $2 + i$

(e) $\dfrac{1}{1+\sqrt{-2i}}$ *Resp.* $\frac{2}{5} + i\,\frac{1}{5}$, ó $-i$

**4.** Resuelva las siguientes ecuaciones:

(a) $z^5 - 2 = 0$ *Resp.*
$$\begin{cases} z_0 = 2^{\frac{1}{5}} \\ z_1 = 2^{\frac{1}{5}} \left( \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{\sqrt{5}+5}\,i}{4} \right) \\ z_2 = -2^{\frac{1}{5}} \left( \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{5-\sqrt{5}}\,i}{4} \right) \\ z_3 = -2^{\frac{1}{5}} \left( \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{5-\sqrt{5}}\,i}{4} \right) \\ z_4 = -2^{\frac{1}{5}} \left( \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{\sqrt{5}+5}\,i}{4} \right) \end{cases}$$

(b) $z^4 + i = 0$ *Resp.*
$$\begin{cases} z_0 = -\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}\,i}{2} \\ z_1 = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}\,i}{2} \\ z_2 = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}\,i}{2} \\ z_3 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}\,i}{2} \end{cases}$$

(c) $z^6 + 8 = 0$ *Resp.* $\begin{cases} z_0 = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}\,i}{2} \\ z_1 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}\,i}{2} \\ z_2 = -\sqrt{2}\,i \\ z_3 = \sqrt{2}\,i \\ z_4 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) \\ z_5 = -\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) \end{cases}$

(d) $z^3 - 4 = 0$ *Resp.* $\begin{cases} z_0 = 2^{\frac{2}{3}} \\ z_1 = 2^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\,i}{2}\right) \\ z_2 = -2^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\,i}{2}\right) \end{cases}$

**5.** Determine el conjugado de los siguientes números complejos:

(a) $\dfrac{(3+8i)^4}{(1+i)^{10}}$ *Resp.* $-165 + i\,\frac{721}{32}$

(b) $\dfrac{(1-2i)^{10}}{(2+2i)^5}$ *Resp.* $-\frac{3353}{256} + i\,\frac{2879}{256}$

(c) $\dfrac{i(2+3i)(5-2i)}{(-2-i)}$ *Resp.* $\frac{6}{5} + i\,\frac{43}{5}$

(d) $\dfrac{(2-3i)^2}{(8+6i)^2}$ *Resp.* $-\frac{323}{2500} - i\,\frac{9}{625}$

**6.** Calcule el módulo de los siguientes números complejos:

(a) $\dfrac{(3+8i)^4}{(1+i)^{10}}$ *Resp.* $\frac{5329}{32}$

(b) $\dfrac{(1-2i)^{10}}{(2+2i)^5}$ *Resp.* $\frac{3125\sqrt{32768}}{32768}$

(c) $\dfrac{i(2+3i)(5-2i)}{(-2-i)}$ *Resp.* $\frac{\sqrt{1885}}{5}$

(d) $\dfrac{(2-3i)^2}{(8+6i)^2}$ *Resp.* $\frac{13}{100}$

**7.** Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 1$. Entonces, calcular $|1+z|^2 + |1-z|^2$. *Resp.* 4

**8.** Demuestre que $|(2\,\overline{z} + 5)(\sqrt{2} - i)| = \sqrt{3}|2z + 5|$.

**9.** Sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$ números complejos. Demuestre que

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|.$$

**10.** Si $|z_1| \neq |z_2|$, entonces demuestre que

$$|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

**11.** Si $|z_2| \neq |z_3|$, entonces demuestre que

$$\left|\frac{z_1}{z_2+z_3}\right| \leq \frac{|z_1|}{||z_2|-|z_3||}.$$

**12.** Encontrar todos los valores del argumento de $z$ cuando el número complejo $z$ está dado por:

(a) $z = \dfrac{i}{i-1}$ *Resp.* $\frac{\pi}{4} + 2n\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

(b) $z = \dfrac{\left[(2\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-2)\,i\right]\ (3+i)}{5-5i}$ *Resp.* $\frac{\pi}{3} + 2n\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

(c) $z = \dfrac{3+\sqrt{3}+(3-\sqrt{3})i}{3+3i}$ *Resp.* $-\frac{\pi}{6} + 2n\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**13.** Si $z_1 z_2 \neq 0$, aplicar la forma polar para demostrar que $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = |z_1|\,|z_2|$ si, y sólo si $\theta_1 - \theta_2 = 2n\pi$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, donde $\theta_1 = \arg z_1$ y $\theta_2 = \arg z_2$.

**14.** Demostrar que la identidad

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1-z},$$

se satisface para todo entero $n \geq 1$ y todo $z \neq 1$.

**15.** Exprese las características de los siguientes conjuntos de puntos, en cuanto a: cerrado o abierto, conexo o no, acotado o no.

(a) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = -2\}$ *Resp.* Cerrado, No acotado

(b) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq \operatorname{Im} z\}$ *Resp.* Conexo, No acotado

(c) $\{z \in \mathbb{C} : z\overline{z} > 2\operatorname{Re} z\}$ *Resp.* Abierto, Conexo, No acotado

(d) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 3 + 4i| \leq 6\}$ *Resp.* Cerrado, Conexo, Acotado

(e) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 2 + 5i| \leq 0\}$ *Resp.* Acotado

(f) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - 2 + 1| < 2\}$ *Resp.* Abierto, Conexo, Acotado

(g) $\{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} z < 1\}$ *Resp.* Abierto, Conexo, No acotado

(h) $\{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \pi/2\}$ *Resp.* Abierto, Conexo, No acotado

(i) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\overline{z} - i) = 2\}$ *Resp.* Cerrado, No acotado

(j) $\{z \in \mathbb{C} : |z + 2i| + |z - 2i| \leq 10\}$ *Resp.* Cerrado, Conexo, Acotado

# Capítulo 2

# Funciones de Variable Compleja

Las funciones de variable compleja poseen muchas aplicaciones en distintas áreas de la Ingeniería, por ejemplo, en la teoría de corrientes alternas, el movimiento de fluidos o el procesamiento de señales. En este tema se presentan los fundamentos matemáticos de las funciones de variable compleja. Se presta mucha atención a la definición y a las propiedades de continuidad y diferenciación de una función de variable compleja. Asimismo, se describe un procedimiento para transformar regiones del plano complejo a través de funciones lineales.

## 2.1 Definición

Una *función $f$ de variable compleja* es una regla de asignación que le hace corresponder a un número complejo $z = x + i\,y$ uno o varios números complejos $w = u + i\,v$. El número $w$ se llama *valor* o *imagen* de $f$ en $z$ y se designa por $f(z)$, es decir, $w = f(z)$ o, equivalentemente, $u + i\,v = f(x + i\,y)$.

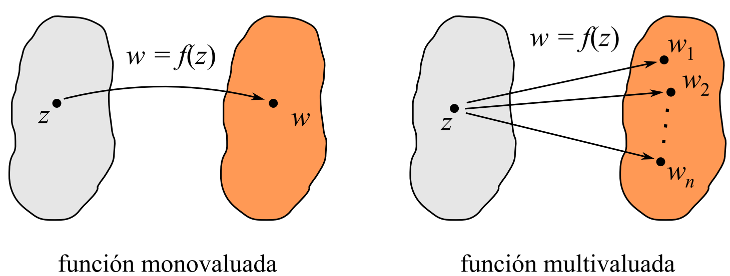



**Figura 2.1**. Funciones monovaluada y multivaluada

**Definición 2.1** (Funciones monovaluadas y multivaluadas)**.** Sea $f(z)$ una función de variable compleja. Si a cada $z$ la función $f$ le hace corresponder una y sólo una imagen $w$, se dice que $f$ es *monovaluada.* Ahora, si la función $f$ le hace corresponder a $z$ más de una imagen, digamos $w_1, w_2, \ldots$, se dice que $f$ es *multivaluada.* En la Figura 2.1 se muestra una representación gráfica, a través de diagramas, de funciones monovaluadas y multivaluadas.

**Definición 2.2** (Dominio y rango)**.** El conjunto de números complejos $z$ donde la función $f$ está bien definida (no hay división por cero) se denomina *dominio* de $f$. El conjunto de números complejos conformado con todas las imágenes $w = f(z)$ es llamado *rango* de $f$.

**Definición 2.3** (Polinomio complejo)**.** Sean $n \geq 0$ un entero y $a_0, a_1, \ldots, a_n$ constantes complejas. La función

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n, \qquad (a_n \neq 0)$$

se denomina *polinomio complejo* o, simplemente, *polinomio de grado n*.

**Ejercicio 2.1.** Determinar el dominio y el rango de un polinomio de grado $n$.

**Definición 2.4** (Función racional)**.** Sean $p(z)$ y $q(z)$ polinomios. La función $r(z)$ dada por

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

se denomina *función racional* y está definida en todo número complejo $z$, excepto donde $q(z) = 0$, esto es, $\{z \in \mathbb{C} : q(z) \neq 0\}$.

**Ejemplo 2.1.** Determinar el dominio y el rango de la función

$$r(z) = \frac{z+1}{z-i}.$$

*Solución.* Se tiene que el dominio de $r(z)$ es el conjunto de número complejos $z$ tales que $r(z)$ está bien definida, es decir, el conjunto de números complejos que no produzcan una división por 0, esto es, $\{z \in \mathbb{C} : z \neq i\}$.

Ahora, para determinar el rango de $r(z)$ se utiliza el siguiente procedimiento. Se toma $w = r(z)$ y luego se despeja a $z$ en función de $w$. A la función obtenida, que depende de $w$, se le determina el dominio. Este último conjunto de números complejos constituye el rango de $r(z)$. Así, se tiene

$$w = \frac{z+1}{z-i},$$

despejando $z$ en función de $w$, se obtiene

$$z = \frac{1-iw}{w-1},$$

de lo cual se deduce que el rango de $r(z)$ es $\{w \in \mathbb{C} : w \neq 1\}$. $\Diamond$

## 2.2 Límite y Continuidad

Pasemos ahora a estudiar las propiedades del análisis infinitesimal de las funciones de variable compleja, esto es, límite, continuidad y derivabilidad. El objetivo de esta parte es utilizar los resultados del análisis infinitesimal de variable real para desarrollar los conceptos de límite, continuidad y diferenciación de funciones de variable compleja. Para ello, inicialmente se introduce el concepto de funciones componentes.

### 2.2.1 Funciones Componentes

Las funciones de variable compleja se pueden expresar en términos de una par de funciones de variable real monovaluadas. Esto es, si $f(z)$ es una función de variable compleja y $z = x + i\,y$, entonces $f(z)$ se puede expresar como

$$f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y),$$

donde $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, y $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, se denominan *funciones componentes* de $f(z)$.

**Ejemplo 2.2.** Las funciones componentes, $u(x, y)$ y $v(x, y)$, de $f(z) = z^2 + a$, donde $a = a_1 + i\,a_2$, están dadas por

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + a_1, \qquad v(x, y) = 2xy + a_2.$$

**Ejemplo 2.3.** Las funciones componentes, $u(x, y)$ y $v(x, y)$, de $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$ están dadas por

$$u(x, y) = \frac{x(x^2 + y^2 + 1)}{x^2 + y^2}, \qquad v(x, y) = \frac{y(x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + y^2}.$$

### 2.2.2 Límite

Sea $f(z)$ una función de variable compleja definida en un dominio $D \subset \mathbb{C}$. Sea $z_0$ un punto de $D$. Seguidamente veremos que la definición de límite de una función de variable compleja es una extensión del límite de una función de variable real.

**Definición 2.5** (Límite)**.** Sea $f(z)$ una función definida en todos los puntos de cierta vecindad de $z_0$ excepto, posiblemente en el mismo $z_0$. Se dice que $w_0$ es un *límite* de $w = f(z)$, si para cada número positivo $\varepsilon$, existe un número positivo $\delta$ tal que

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon, \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Denotamos con

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

para indicar que $w_0$ es un límite de $f(z)$, cuando $z$ tiende a $z_0$.

Algunas de las fórmulas de límites que se estudiaron en el cálculo elemental tienen sus homólogas en el caso de funciones de variables compleja. Las fórmulas equivalentes, que se presentan aquí, se demuestran usando la definición de límite.

**Teorema 2.1.** *Sean $f(z)$ y $g(z)$ funciones de variable complejas tales que*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \quad y \quad \lim_{z\to z_0} g(z) = W_0.$$

*Entonces,*

1. $\lim_{z\to z_0} [f(z) + g(z)] = w_0 + W_0$;
2. $\lim_{z\to z_0} [f(z) \cdot g(z)] = w_0 \cdot W_0$;
3. $\lim_{z\to z_0} \left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right] = \dfrac{w_0}{W_0}$.

*Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$. Demostración de 1. Como $w_0$ y $W_0$ son respectivamente los límites de $f(z)$ y $g(z)$ cuando $z$ tiende a $z_0$, podemos escribir:

$$|f(z) - w_0| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta_1.$$

y

$$|g(z) - W_0| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta_2,$$

donde $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ dependen de $\varepsilon$. Así, por la desigualdad triangular tenemos que

$$|[f(z) + g(z)] - [w_0 + W_0]| \leq |f(z) - w_0| + |g(z) - W_0| < \varepsilon,$$

siempre que $0 < |z - z_0| < \delta$, donde $\delta \leq \text{mín}(\delta_1, \delta_2)$. Por lo tanto, $w_0 + W_0$ es el límite de $f(z) + g(z)$ cuando $z$ tiende a $z_0$.

Demostración de 2. Supongamos que

$$|f(z) - w_0| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta_3.$$

y

$$|g(z) - W_0| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta_4,$$

donde $\delta_3 > 0$ y $\delta_4 > 0$ dependen de $\varepsilon$. Como $W_0(f(z) - w_0) = W_0 f(z) - W_0 w_0$ y $w_0(g(z) - W_0) = w_0 g(z) - w_0 W_0$, entonces es claro que $\lim_{z\to z_0} W_0 f(z) = W_0 w_0$ y $\lim_{z\to z_0} w_0 g(z) = w_0 W_0$; luego, por 1, $\lim_{z\to z_0} (W_0 f(z) - w_0 g(z)) = 0$. Ahora, tenemos que

$$f(z)g(z) - w_0 W_0 = (f(z) - w_0)(g(z) - W_0) - (W_0 f(z) - w_0 g(z)).$$

Así, por todo lo anterior podemos escribir

$$\begin{aligned}
|f(z)g(z) - w_0 W_0| &= |(f(z) - w_0)(g(z) - W_0) - (W_0 f(z) - w_0 g(z))| \\
&\leq |(f(z) - w_0)|\,|(g(z) - W_0)| + |(W_0 f(z) - w_0 g(z))| \\
&< \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

siempre que $0 < |z - z_0| < \delta$, donde $\delta \leq \text{mín}(\delta_3, \delta_4)$. Luego, $w_0 W_0$ es el límite de $f(z)g(z)$ cuando $z$ tiende a $z_0$.

La demostración de 3 se deja como ejercicio para el lector. □

El siguiente teorema muestra la relación entre el límite de una función de variable compleja y el límite de sus funciones componentes que, por supuesto, son funciones reales.

**Teorema 2.2.** *Sea $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ una función de variable compleja. Sean $z_0 = x_0 + i\, y_0$ y $w_0 = u_0 + i\, v_0$. Entonces,*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

*si, y sólo si*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \quad y \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = v_0.$$

*Demostración.* Sean $f_1(z)$ y $f_2(z)$ funciones de variable compleja definidas respectivamente por

$$f_1(z) = u(x, y), \quad \text{y} \quad f_2(z) = v(x, y).$$

Es claro que $f(z) = f_1(z) + i\, f_2(z)$, además, si $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$, entonces por el Teorema 2.1 tenemos que

$$\lim_{z\to z_0} f_1(z) = u_0 = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) \qquad \text{y} \qquad \lim_{z\to z_0} f_2(z) = v_0 = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y).$$

Ahora, si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = \lim_{z\to z_0} f_1(z) = u_0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = \lim_{z\to z_0} f_2(z) = v_0,$$

entonces, por el Teorema 2.1 obtenemos $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$. □

### 2.2.3 Continuidad

La continuidad es uno de los conceptos más importantes del análisis. A continuación veremos que la continuidad de una función de variable compleja se puede ver como una extensión del concepto de continuidad de una función de variable real.

**Definición 2.6.** Se dice que una función $f(z)$ es *continua* en $z_0$, si satisface las dos condiciones siguientes:

(i) $f(z_0)$ está bien definido;

(ii) $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existe y
$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Se dice que $f(z)$ es continua en un dominio $D$, si es continua en todo $z \in D$.

**Ejemplo 2.4.** Estudiemos la continuidad de la función

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2 - 1}{z - 1}, & z \neq 1, \\ 1, & z = 1. \end{cases}$$

Tomemos $z = x + i\,y$. Para $z \neq 1$, la función $f(z)$ se puede expresar como

$$f(z) = \frac{(z-1)(z+1)}{(z-1)} = z + 1 = (x+1) + i\,y,$$

luego, las funciones componentes de $f(z)$ son $u(x, y) = x + 1$, y $v(x, y) = y$. Como el valor de $f(z_0)$ está bien definido para todo $z_0 = x_0 + i\,y_0 \neq 1$, entonces por el Teorema 2.2 podemos escribir:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) + i \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = x_0 + 1 + i\,y_0 = z_0 + 1 = f(z_0),$$

en otras palabras, $f(z)$ es continua en todo $z_0 \neq 1$.

Para $z = 1$, se tiene que $f(1)$ está bien definido, pero $\lim\limits_{z\to 1} f(z) = 2 \neq f(1) = 1$. Por lo tanto, $f(z)$ no es continua en $z = 1$.

El siguiente teorema dice que las funciones definidas como la suma, multiplicación o división de funciones continuas, son también funciones continuas en su dominio de definición. La demostración de este teorema se obtiene utilizando el Teorema 2.1.

**Teorema 2.3.** *Sean $f(z)$ y $g(z)$ dos funciones de variable compleja continuas en un dominio $D$. Entonces:*

1. *la función $f(z) + g(z)$ es continua en $D$;*
2. *la función $f(z)g(z)$ es continua en $D$;*
3. *la función $f(z)/g(z)$ es continua en $D \setminus \{z \in \mathbb{C} : g(z) = 0\}$.*

*Observación* 2.1. Una aplicación inmediata del Teorema 2.3 es que nos permite asegurar que un polinomio es una función continua en todo el plano complejo; además, también nos permite aseverar que una función racional es continua en todo el plano complejo excepto donde su denominador se anule.

De la misma forma que en el cálculo elemental, la composición de funciones reales continuas es continua; así mismo, también la composición de funciones de variable compleja continuas es continua. Esta afirmación se plantea en el siguiente teorema, cuya demostración se obtiene directamente de la definición de continuidad.

**Teorema 2.4.** *Sean $f(z)$ y $g(z)$ dos funciones de variable compleja definidas respectivamente en los dominios $D$ y $E$, tales que $f(D) \subseteq E$. Si $f$ es continua en $D$ y $g$ es continua en $f(D)$, entonces la función $h(z) = g(f(z))$ es continua en $D$.*

Por otra parte, dado que el límite de una función de variable compleja se puede calcular a través del límite de sus funciones componentes (Teorema 2.2), es natural inferir que la continuidad de una función de variable compleja se corresponde con la continuidad de sus funciones componentes. Seguidamente se muestra un teorema que trata este aspecto, cuya demostración es inmediata utilizando la definición de continuidad de funciones reales conjuntamente con el Teorema 2.2.

**Teorema 2.5.** *Sea $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ una función de variable compleja. Entonces, $f$ es continua en un punto $z_0 = x_0 + i\,y_0$ si, y sólo si sus funciones componentes, $u(x,y)$ y $v(x,y)$, son continuas en el punto $(x_0, y_0)$.*

A continuación damos un ejemplo que muestra la aplicación de los Teoremas 2.3 y 2.5, en el estudio de la continuidad de una función de variable compleja.

**Ejemplo 2.5.** Estudiemos la continuidad en $z = 1$ de la función

$$f(z) = 2x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Verifiquemos la continuidad de $f(z)$ de dos maneras. Primero utilizando el Teorema 2.3 y después empleando el Teorema 2.5. Escribamos a $f(z)$ en función de $z$, para ello consideremos las siguientes expresiones de $x$ e $y$

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad y = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Sustituyendo convenientemente estas expresiones en la fórmula de definición de $f(z)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} f(z) &= 2\left(\frac{z + \overline{z}}{2}\right) + i\left(\frac{z - \overline{z}}{2i}\right) + \frac{\frac{z+\overline{z}}{2} + i\,\frac{z-\overline{z}}{2i}}{z\,\overline{z}} \\ &= z + \overline{z} + \frac{z - \overline{z}}{2} + \frac{\overline{z}}{z\,\overline{z}} \\ &= \frac{3}{2}\,z + \frac{1}{2}\,\overline{z} + \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Definamos tres funciones $f_1(z)$, $f_2(z)$ y $f_3(z)$ como

$$f_1(z) = \frac{3}{2}\,z, \quad f_2(z) = \frac{1}{2}\,\overline{z}, \quad f_3(z) = \frac{1}{z}.$$

Las funciones $f_1(z)$ y $f_3(z)$, son respectivamente un polinomio de grado uno y una función racional. Así, $f_1(z)$ es continua en todo el plano, particularmente en $z = 1$, y $f_3(z)$ es continua en todo el plano excepto en $z = 0$, por lo tanto $f_3(z)$ es continua en $z = 1$. En cuanto a la función $f_2(z)$, se deja como ejercicio para el lector verificar que es continua en $z = 1$ (Ayuda: utilice el Teorema 2.5). En consecuencia, como $f_1(z)$, $f_2(z)$ y $f_3(z)$ son continuas en $z = 1$ y $f(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z)$, entonces por el Teorema 2.3 se tiene que $f(z)$ es continua en $z = 1$.

Ahora apliquemos el Teorema 2.5 en el estudio de la continuidad de $f(z)$ en $z = 1$. Para ello es necesario encontrar las funciones componentes, $u(x,y)$ y $v(x,y)$, de $f(z)$. Operando obtenemos:

$$f(z) = \left(2x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) + i\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right),$$

de donde se deduce que

$$u(x,y) = 2x + \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad \text{y} \qquad v(x,y) = y - \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Como $u$ y $v$ están bien definidas en el punto $(1,0)$ y

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} u(x,y) = 3 = u(1,0), \qquad \lim_{(x,y)\to(0,1)} v(x,y) = 0 = v(1,0),$$

podemos concluir que $u$ y $v$ son continuas en $(1,0)$. Entonces, por el Teorema 2.5 la función $f(z)$ es continua en $z=1$.

## 2.3 Diferenciación

Inmediatamente damos la definición de derivada de una función de variable compleja.

**Definición 2.7** (Derivada)**.** Sea $f(z)$ una función de variable compleja definida en un dominio $D$. Sea $z_0$ un punto de acumulación de $D$. La *derivada* de $f(z)$ en $z_0$, denotada por $\dfrac{d}{dz}f(z_0)$ o $f'(z_0)$, se define mediante la ecuación

$$\frac{d}{dz}f(z_0) = f'(z_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}, \tag{2.1}$$

donde $h$ es un número complejo. Se dice que $f(z)$ es *derivable* en un dominio $D$ de números complejos, si la derivada de $f(z)$ existe en cada punto $z\in D$.

**Teorema 2.6.** *Si la derivada de $f(z)$ en $z_0$ existe, entonces $f(z)$ es continua en $z_0$.*

*Demostración.* Como la derivada de $f(z)$ existe en $z_0$, entonces $|f'(z_0)|<\infty$ y $f(z_0)$ está bien definido. Por tanto,

$$\lim_{h\to 0}|f(z_0+h)-f(z_0)| = \lim_{h\to 0}|h|\,|f'(z_0)| = 0,$$

de donde se deduce que $f(z)$ es continua en $z_0$. □

*Observación* 2.2. El Teorema 2.6 nos garantiza que toda función derivable es continua. Lo que no es cierto es que toda función continua es derivable; por ejemplo, $f(z)=|z|^2$ es continua en todo el plano complejo, pero es derivable solamente en $z=0$ (se deja al lector verificar este hecho).

### 2.3.1 Fórmulas o Reglas de Diferenciación

Sean $f(z), f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ funciones derivables en $z\in\mathbb{C}$. Las siguientes propiedades son ciertas y su demostración se obtiene fácilmente utilizando la definición de derivada y los Teoremas 2.1 y 2.2.

1. Si $f(z)=c$, entonces $f'(z)=0$, donde $c\in\mathbb{C}$.
2. Si $h(z)=c\,f(z)$, entonces $h'(z)=c\,f'(z)$, donde $c\in\mathbb{C}$.
3. Si $f(z)=z$, entonces $f'(z)=1$.
4. $[f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)]' = f_1'(z)+f_2'(z)+\cdots+f_n'(z)$.

5. $[f_1(z)f_2(z)]' = f_1'(z)f_2(z) + f_2'(z)f_1(z)$.

6. $[(f(z))^m]' = m\,(f(z))^{m-1}\,f'(z)$, donde $m$ es un entero.

7. Si $f(z) = z^m$, entonces $f'(z) = m\,z^{m-1}$, donde $m$ es un entero.

8. Si $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m$, entonces
$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots + m\,a_m z^{m-1}.$$

9. $\left[\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}\right]' = \dfrac{f_1'(z)f_2(z) - f_2'(z)f_1(z)}{(f_2(z))^2}$, siempre y cuando $f_2(z) \neq 0$.

10. *Regla de la Cadena.* Sean $f(z)$ derivable en $z_0$ y $g(w)$ derivable en $f(z_0)$. Entonces la función $h(z) = g(f(z))$ es derivable en $z_0$, y
$$h'(z_0) = g'(f(z_0))\,f'(z_0).$$

### 2.3.2 Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Si una función de variable compleja es derivable en un punto, sus funciones componentes satisfacen las llamadas ecuaciones de Cauchy-Riemann en ese punto. A continuación damos una breve deducción de estas ecuaciones, que son las condiciones necesarias para la existencia de la derivada de una función compleja en un punto.

**Teorema 2.7.** *Sea $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ derivable en $z_0 = x_0 + i\,y_0$. Entonces, las funciones componentes, $u(x,y)$ y $v(x,y)$, satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el punto $(x_0,y_0)$, esto es:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & = & \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) & = & -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \end{array}\right. \tag{2.2}$$

*Demostración.* Como $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es derivable en $z_0 = x_0 + i\,y_0$, se tiene
$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}.$$

Ahora bien, utilizando las funciones componentes de $f(z)$ y tomando $h = h_1 + i\,h_2$, obtenemos:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{[u(x_0+h_1, y_0+h_2) + i\,v(x_0+h_1, y_0+h_2)] - [u(x_0,y_0) + i\,v(x_0,y_0)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[u(x_0+h_1, y_0+h_2) - u(x_0,y_0)] + i\,[v(x_0+h_1, y_0+h_2) - v(x_0,y_0)]}{h}. \end{aligned}$$

Como la derivada de $f(z)$ existe en $z_0$, podemos tender a 0 tomando $h$ un real puro o un imaginario puro y el límite, que define la derivada de $f(z)$ en $z_0$, siempre es igual. Supongamos primero que $h = h_1 > 0$, es decir, $h_2 = 0$, entonces obtenemos:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h_1\to 0} \frac{[u(x_0+h_1,y_0)-u(x_0,y_0)]+i\,[v(x_0+h_1,y_0)-v(x_0,y_0)]}{h_1} \\ &= \lim_{h_1\to 0} \frac{u(x_0+h_1,y_0)-u(x_0,y_0)}{h_1} + i \lim_{h_1\to 0} \frac{v(x_0+h_1,y_0)-v(x_0,y_0)}{h_1} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ahora, si tomamos $h = i\,h_2$ con $h_2 > 0$, es decir, $h_1 = 0$, entonces obtenemos:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h_2\to 0} \frac{[u(x_0,y_0+h_2)-u(x_0,y_0)]+i\,[v(x_0,y_0+h_2)-v(x_0,y_0)]}{i\,h_2} \\ &= \lim_{h_2\to 0} \frac{u(x_0,y_0+h_2)-u(x_0,y_0)}{i\,h_2} + i \lim_{h_2\to 0} \frac{v(x_0,y_0+h_2)-v(x_0,y_0)}{i\,h_2} \\ &= -i\,\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0). \end{aligned} \tag{2.4}$$

De las ecuaciones (2.3) y (2.4) se deduce que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\,\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0),$$

es decir, $f(z)$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann (2.2) en $(x_0, y_0)$. □

El hecho que una función satisfaga las ecuaciones de Cauchy-Riemann en un punto $z_0 = x_0 + i\,y_0$, no es suficiente para garantizar que $f(z)$ sea derivable en $z_0$. Por ejemplo, la función

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\overline{z}^2}{z}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0, \end{cases}$$

satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $z = 0$, pero no es derivable en ese punto (se deja al lector verificar este hecho).

Así pues, la validez de las ecuaciones de Cauchy-Riemman en un punto es una condición necesaria para que exista la derivada en dicho punto. El solo hecho que las ecuaciones de Cauchy-Riemman sean válidas para una función, no significa que todas las trayectorias por las que $z_0 + h$ se aproxime a $z_0$ den lugar a un mismo valor límite de la definición de derivada. El siguiente teorema muestra las condiciones necesarias y suficientes para que una función sea derivable en un punto.

**Teorema 2.8.** *Sean $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ y $z_0 = x_0 + i\,y_0$. Si $u(x,y)$ y $v(x,y)$ tienen primeras derivadas parciales continuas, con respecto a $x$ e $y$, en $(x_0,y_0)$, y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (2.2) en $(x_0,y_0)$, entonces $f'(z_0)$ existe y está dada por (2.3) ó (2.4).*

*Demostración.* La demostración es inmediata utilizando el Teorema 2.7 y el hecho que $u(x, y)$ y $v(x, y)$ tienen primeras derivadas parciales continuas, con respecto a $x$ e $y$, en $(x_0, y_0)$. □

**Ejemplo 2.6.** Demostremos que la función $f(z) = e^x \cos y + i\, e^x \operatorname{sen} y$ es derivable en todo punto $z$ del plano complejo. Las funciones componentes de $f(z)$ están dadas por

$$u(x, y) = e^x \cos y, \qquad v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y.$$

Así, las derivadas parciales de $u$ y $v$, con respecto a $x$ e $y$, son:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y,$$

las cuales son continuas en todo $\mathbb{R}^2$ y, además, satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo $z = x + i\, y$. Entonces, por el Teorema 2.8 la función $f(z) = e^x \cos y + i\, e^x \operatorname{sen} y$ es derivable en todo el plano complejo.

## 2.4 Funciones Analíticas

En esta sección introducimos un conjunto de funciones de variable compleja denominadas *analíticas* que poseen una propiedad muy particular: si $f(z)$ es analítica en un punto $z_0$, entonces es derivable en todo punto $z$ muy cercano a $z_0$. Esta cualidad de las funciones analíticas las hace muy importantes para el desarrollo teórico de aplicaciones en Ingeniería.

**Definición 2.8** (Función analítica)**.** Se dice que una función $f(z)$ es *analítica* en $z_0 \in \mathbb{C}$, si la derivada de $f(z)$ existe en $z_0$ y en todo punto de alguna vecindad de $z_0$. Si $f(z)$ es analítica en todos los puntos de un dominio $D \subset \mathbb{C}$, se dice que $f(z)$ es analítica en $D$.

**Ejemplo 2.7.** Determinemos el conjunto de números complejos $z = x + i\, y$ donde la función $f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i\,(3x^2y - y^3)$ es analítica. Se tiene que las funciones componentes de $f(z)$ están dadas por:

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2, \qquad \text{y} \qquad v(x, y) = 3x^2y - y^3.$$

Ahora, las derivadas parciales de $u$ y $v$, con respecto a $x$ e $y$, son

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$$

Como las derivadas parciales de $u$ y $v$ son continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todos los puntos $(x, y)$ del plano, entonces $f(z)$ es derivable en todo el plano complejo. Por lo tanto, $f(z)$ es analítica en todo el plano complejo.

**Ejemplo 2.8.** Determinemos el conjunto de números complejos $z = x + i\,y$ donde la función $f(z) = x^2 + i\,y^2$ es analítica. Las funciones componentes de $f(z)$ son: $u(x, y) = x^2$, y $v(x, y) = y^2$. Al forzar que se satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann obtenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = 2y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

de donde se deduce que $f(z)$ es derivable únicamente en los puntos $z = x + i\,y$ que pertenecen a la recta $y = x$. Si $z_0$ es un punto de esta recta, toda vecindad de $z_0$ contiene puntos en los que $f'(z_0)$ no existe. Así pues, $f(z)$ no es analítica en ningún punto del plano complejo.

Los ejemplos anteriores muestran que la propiedad que una función sea analítica es muy fuerte, dado que al ser analítica en un punto, se está garantizando que la función es derivable en una vecindad del punto en cuestión. Por ello, las funciones analíticas, gracias a sus maravillosas propiedades, juegan un papel muy importante en la teoría de las funciones de variable compleja.

El siguiente teorema afirma que la suma, diferencia, multiplicación y división de funciones analíticas es otra función analítica. Además, también establece que la composición de funciones analíticas es una función analítica. La demostración de este teorema se deja al lector.

**Teorema 2.9.** *Sean $f(z)$ y $g(z)$ dos funciones analíticas en un dominio $D \subset \mathbb{C}$. Entonces, $f(z) + g(z)$, $f(z) - g(z)$ y $f(z)g(z)$, son funciones analíticas en $D$. La función $f(z)/g(z)$ es analítica en el conjunto $\{z \in D : g(z) \neq 0\}$. Si la función $g(z)$ es analítica en el conjunto $f(D)$, entonces la función $h(z) = g(f(z))$ es analítica en $D$.*

**Definición 2.9** (Función entera)**.** Se dice que una función $f(z)$ es *entera* si es analítica en todo punto $z$ del plano complejo.

**Ejemplo 2.9.** En el Ejemplo 2.6 vimos que la función $f(z) = e^x \cos y + i\, e^x \operatorname{sen} y$ es derivable en todo punto $z$ del plano complejo. Por lo tanto, $f(z)$ es analítica en todo el plano, de lo cual se deduce que $f(z)$ es entera.

Ahora bien, para ciertas funciones que son analíticas en determinados conjuntos de números complejos, existen puntos donde no son analítica, a tales puntos es muy importante identificarlos. Seguidamente definimos estos puntos.

**Definición 2.10** (Punto singular)**.** Sea $f(z)$ una función de variable compleja. Se dice que un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es un *punto singular* de $f(z)$, si $f(z)$ no es analítica en $z_0$, pero sí es analítica en al menos un punto $z$ de toda vecindad de $z_0$.

*Observación* 2.3. La función racional

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m}$$

es analítica en todo el plano complejo salvo en los puntos $z$ tales que $b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m = 0$, es decir, salvo en las raíces del polinomio del denominador. Estas raíces son los puntos singulares de $f(z)$.

**Ejemplo 2.10.** El punto $z_0 = 0$ es el único punto singular de $f(z) = 1/z$.

## 2.5 Funciones Armónicas

**Definición 2.11** (Función armónica)**.** Se dice que una función $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es *armónica* en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$, si en todo punto $(x, y) \in D$ tiene derivadas parciales, primera y segunda, continuas y satisface la ecuación en derivadas parciales

$$\nabla^2 h(x,y) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = 0,$$

conocida como ecuación de Laplace.

**Definición 2.12** (Armónica conjugada)**.** Sean $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones. Si $u$ y $v$ son armónicas en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ y sus primeras derivadas parciales satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (2.2) para todo $(x, y) \in D$, se dice que $v$ es *armónica conjugada* de $u$.

El siguiente teorema establece una relación entre las funciones armónicas y las funciones analíticas.

**Teorema 2.10.** *Una función $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ es analítica en un dominio $D \subset \mathbb{C}$ si, y sólo si $v$ es armónica conjugada de $u$.*

*Demostración.* ($\Rightarrow$) Supongamos que $f(z) = u(x, y)+i\,v(x, y)$ es analítica en un dominio $D \subset \mathbb{C}$ y demostremos que $v$ es armónica conjugada de $u$. Como $f(z)$ es analítica, sus funciones componentes, $u$ y $v$, satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, además, sus primeras derivadas parciales son continuas en $D$. Por ello, basta demostrar que $u$ y $v$ son armónicas para garantizar que $v$ es armónica conjugada de $u$. Así, derivando con respecto a $x$ la ecuación de Cauhy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, obtenemos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}. \tag{2.5}$$

Ahora, derivando con respecto a $y$ la otra ecuación de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, obtenemos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}. \tag{2.6}$$

Como las primeras derivadas parciales de $u$ y $v$ son continuas en $D$, se tiene que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}. \tag{2.7}$$

Por (2.5), (2.6) y (2.7) podemos escribir:

$$\nabla^2 u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0,$$

con lo cual se demuestra que $u$ es armónica en $D$. Utilizando un razonamiento similar se demuestra que $v$ también es armónica. En consecuencia, $u$ y $v$ son funciones armónicas

que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $D$, es decir, $v$ es armónica conjugada de $u$.
($\Leftarrow$) Supongamos que $v$ es armónica conjugada de $u$ en $D$ y demostremos que $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es analítica en $D$. Como $v$ es armónica conjugada de $u$ en $D$, entonces $u$ y $v$ son armónicas en $D$ y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann; además, sus primeras derivadas parciales son continuas en $D$. Así, por el Teorema 2.8 la función $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es analítica en $D$. □

*Observación* 2.4. El Teorema 2.10 nos garantiza que una función $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es analítica si $v$ es armónica conjugada de $u$. No es cierto que si $u$ y $v$ son armónicas y no satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, entonces $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es analítica; por ejemplo, si tomamos $u(x,y) = x+y$ y $v(x,y) = x$, observamos que $u$ y $v$ son armónicas en todo el plano, pero $f(z) = (x+y) + i\,x$ no es analítica en ningún punto del plano (se deja al lector demostrar esta afirmación).

Es bueno aclarar que si $v$ es armónica conjugada de $u$ en cierto dominio $D$, no es en general cierto que $u$ sea armónica conjugada de $v$ en ese dominio. Por ejemplo, consideremos las funciones $u(x,y) = x^2 - y^2$ y $v(x,y) = 2xy$. Vemos que $u$ y $v$ son las partes real e imaginaria, respectivamente, de $f(z) = z^2$, que es una función entera. Por el Teorema 2.10 $v$ es armónica conjugada de $u$ en todo el plano, pero $u$ no puede ser una armónica conjugada de $v$, ya que la función $g(z) = 2xy + i\,(x^2 - y^2)$ no es analítica en ningún punto del plano, por que sus funciones componentes no satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Por otra parte, es cierto que una armónica conjugada, cuando existe, es única, excepto por una constante aditiva. Expliquemos con un ejemplo un método para obtener una armónica conjugada de una función armónica dada.

**Ejemplo 2.11.** Determine $v(x,y)$, la armónica conjugada de $u(x,y)$, si $u(x,y) = x+y$.

*Solución.* Para que $v$ sea armónica conjugada de $u$, ésta debe ser armónica y, además, debe satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann (2.2). El método para generar $v$, una armónica conjugada de $u$, consiste en forzar que se cumplan las ecuaciones de Cauchy-Riemann y luego resolver ciertas ecuaciones diferenciales. Apliquemos tal metodología al problema planteado.

Como $u(x,y) = x+y$, se tiene que $u$ es armónica y

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 1.$$

Ahora, utilizando una de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, digamos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

podemos escribir:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 1.$$

Integrando con respecto a $y$ esta ecuación obtenemos:

$$v(x,y) = y + \phi(x), \tag{2.8}$$

donde $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ahora, utilizando la otra ecuación de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

podemos escribir:

$$\phi'(x) = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -1,$$

es decir,

$$\phi'(x) = -1.$$

Integrando con respecto a $x$ la ecuación anterior, obtenemos:

$$\phi(x) = -x + c,$$

donde $c$ es una constante real. Sustituyendo la expresión de $\phi(x)$ en (2.8), la función $v$ armónica conjugada de $u$ está dada por

$$v(x,y) = y - x + c,$$

que es armónica (se deja al lector verificar esta afirmación). Es decir, hemos construido una familia de funciones armónicas conjugadas de $u$ que se diferencian entre sí por una constante. Para obtener una de ellas es necesario un valor de $v$ en algún punto del plano. Por ejemplo, si $v(0,0) = 1$, entonces la constante $c$ correspondiente sería $c = 1$ y la función $v$ sería $v(x,y) = y - x + 1$. $\Diamond$

El procedimiento anterior para calcular $v$ armónicas conjugadas de $u$, también se puede utilizar, según el Teorema 2.10, para construir funciones analíticas a partir de una de sus funciones componentes, como se muestra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.12.** Determine una función analítica $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ tal que $v(x,y) = x$ y $f(0) = -1$.

*Solución.* Como $v(x,y) = x$, se tiene que $v$ es armónica y

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 1, \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Ahora, utilizando la ecuación de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, podemos escribir:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Integrando con respecto a $x$ esta ecuación obtenemos:

$$u(x,y) = \phi(y),$$

donde $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ahora, utilizando la otra ecuación de Cauchy-Riemann, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, podemos escribir:

$$\phi'(y) = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -1,$$

es decir,

$$\phi'(y) = -1.$$

Integrando con respecto a $y$ esta ecuación obtenemos:

$$\phi(y) = -y + c,$$

donde $c$ es una constante real. Sustituyendo convenientemente la expresión de $\phi(y)$, la función $u$ está dada por

$$u(x, y) = -y + c.$$

Por construcción, $v$ es armónica conjugada de $u$, luego, por el Teorema 2.10 las funciones $f(z)$ dadas por

$$f(z) = c - y + i\,x,$$

son una familia de funciones enteras que se diferencian entre sí por una constante real $c$. Ahora, la función deseada debe satisfacer $f(0) = -1$. Forzando esta última condición, la función pedida es

$$f(z) = -1 - y + i\,x = iz - 1.$$

$\Diamond$

## 2.6 Funciones Elementales

A continuación damos una breve descripción de las funciones elementales de variable compleja.

### 2.6.1 Función Exponencial

La *función exponencial*, denotada por $e^z$, se define como

$$e^z = e^x \cos y + i\, e^x \operatorname{sen} y, \tag{2.9}$$

para todo número complejo $z = x + i\,y$. Las funciones componentes de $e^z$ son

$$u(x, y) = e^x \cos y \qquad \text{y} \qquad v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y,$$

las cuales satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann y sus derivadas parciales son continuas en todo el plano complejo. Luego, la función exponencial es analítica en todo el plano complejo (ver Ejemplo 2.6). Por lo tanto, $e^z$ es una función entera, cuya derivada está dada por:

$$\frac{d}{dz} e^z = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i\, e^x \operatorname{sen} y = e^z,$$

que coincide con la propiedad deseada de la función exponencial real.

**Otras propiedades de la función exponencial**

- Si $z = a \in \mathbb{R}$, entonces $e^z = e^a \cos 0 + i\, e^a \operatorname{sen} 0 = e^a$, es decir, $e^z$ se reduce a la función $e^x$ si $z$ toma valores reales.

- El rango de la función exponencial es todo el plano complejo excepto $z = 0$. En efecto, como $|e^z| = e^x > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $|e^z| > 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Por lo tanto, $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

- La función exponencial es periódica con un periodo imaginario puro de $2\pi i$. En efecto, por la periodicidad de las funciones trigonométricas sen y cos podemos escribir:

$$\begin{aligned} e^{(z+2\pi i)} &= e^{x+i\,(y+2\pi)} \\ &= e^x\left(\cos(y+2\pi) + i \operatorname{sen}(y+2\pi)\right) \\ &= e^x\left(\cos y + i \operatorname{sen} y\right) \\ &= e^z, \end{aligned}$$

  es decir, $e^z$ es periódica con periodo $2\pi i$.

- Propiedades algebraicas. Sean $z_1 = x_1 + i\, y_1$ y $z_2 = x_2 + i\, y_2$. Las siguientes propiedades son ciertas:

  i) $e^{z_1}\, e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$;
  ii) $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$;
  iii) $e^0 = 1$;
  iv) $\dfrac{1}{e^{z_1}} = e^{-z_1}$;
  v) $(e^{z_1})^n = e^{n\, z_1}$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

### 2.6.2 Funciones Trigonométricas

Se definen la función *seno* como

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{2.10}$$

y la función *coseno* como

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \tag{2.11}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Las funciones $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ son combinaciones lineales de las funciones enteras $e^{iz}$ y $e^{-iz}$, por lo tanto, $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ son funciones enteras; además, sus derivadas son respectivamente:

$$\frac{d}{dz} \operatorname{sen} z = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{2i} = \cos z,$$

y

$$\frac{d}{dz} \cos z = \frac{i(e^{iz} - e^{-iz})}{2i} = -\operatorname{sen} z.$$

**Otras Propiedades de las Funciones Seno y Coseno**

- Cuando $z$ es un número real, $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ coinciden con las funciones reales $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

- Las identidades trigonométricas que satisfacen el seno y el coseno real también son válidas en el caso complejo; por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z &= 1, \\
\operatorname{sen}(z_1 \pm z_2) &= \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \operatorname{sen} z_2, \\
\cos(z_1 \pm z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 \mp \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2,
\end{aligned}$$

  entre otras.

- A partir de la definición de $\operatorname{sen} z$ dada en (2.10) podemos escribir, para $z = x + i\,y$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} z &= \frac{e^{i(x+i\,y)} - e^{-i(x+i\,y)}}{2i} \\
&= \frac{e^{-y}}{2i}(\cos x + i \operatorname{sen} x) - \frac{e^{y}}{2i}(\cos x - i \operatorname{sen} x) \\
&= \operatorname{sen} x \left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right) + i\, \cos x \left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right).
\end{aligned}$$

  En otras palabras, la función $\operatorname{sen} z$ se puede expresar equivalentemente como:

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \,\cosh y + i\, \cos x \,\operatorname{senh} y. \tag{2.12}$$

  De la misma manera, al utilizar la definición de $\cos z$ dada en (2.11) obtenemos:

$$\cos z = \cos x \,\cosh y - i \operatorname{sen} x \,\operatorname{senh} y. \tag{2.13}$$

- Las funciones seno y coseno son periódicas con periodo $2\pi$ (se deja al lector la demostración).

- Los ceros de $\operatorname{sen} z$ son todos los números complejos $z = n\pi$, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. En efecto, para que $z \in \mathbb{C}$ sea un cero de $\operatorname{sen} z$, se debe cumplir que $\operatorname{sen} z = 0$, luego, utilizando la ecuación (2.12) podemos escribir:

$$\operatorname{sen} x \,\cosh y = 0, \qquad \cos x \,\operatorname{senh} y = 0.$$

  Ahora, utilizando la ecuación $\operatorname{sen} x \,\cosh y = 0$, se deduce que $y = 0$. Sustituyendo este valor de $y$ en la ecuación $\operatorname{sen} x \,\cosh y = 0$, obtenemos $\operatorname{sen} x = 0$, de lo cual se tiene que $x = n\pi$, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. En consecuencia, los ceros de $\operatorname{sen} z$ son todos los números complejos $z = n\pi$, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

- Los ceros de $\cos z$ son todos los números complejos $z = (n + \frac{1}{2})\pi$, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. (Se deja al lector verificar este hecho).

**Otras Funciones Trigonométricas**

Las demás funciones trigonométricas de argumento complejo se definen fácilmente por analogía con las funciones trigonométricas de argumento real, esto es,

*Tangente*

$$\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$$

*Cotangente*

$$\cot z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$$

*Secante*

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}$$

*Cosecante*

$$\csc z = \frac{1}{\operatorname{sen} z}$$

Para los valores de $z$ donde no se anule el denominador de las funciones anteriores, su derivada existe y es, respectivamente,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\tan z &= \sec^2 z, \\ \frac{d}{dz}\cot z &= -\csc^2 z, \\ \frac{d}{dz}\sec z &= \tan z \sec z, \\ \frac{d}{dz}\csc z &= -\cot z \csc z. \end{aligned}$$

### 2.6.3 Funciones Hiperbólicas

Se definen la función *seno hiperbólico* como

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \tag{2.14}$$

y la función *coseno hiperbólico* como

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \tag{2.15}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Las funciones $\operatorname{senh} z$ y $\cosh z$ son combinaciones lineales de las funciones enteras $e^z$ y $e^{-z}$, por lo tanto, $\operatorname{senh} z$ y $\cosh z$ son funciones enteras; además, sus derivadas son respectivamente:

$$\frac{d}{dz}\operatorname{senh} z = \cosh z,$$

y

$$\frac{d}{dz}\cosh z = \operatorname{senh} z.$$

**Otras Propiedades de las Funciones Seno y Coseno Hiperbólicos**

- Cuando $z$ es un número real, $\operatorname{senh} z$ y $\cosh z$ coinciden con las funciones reales $\operatorname{senh} x$ y $\cosh x$.
- Las identidades hiperbólicas que satisfacen el seno y coseno hiperbólicos reales también son válidas en el caso complejo; por ejemplo:

$$\begin{aligned}\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z &= 1,\\ \operatorname{senh}(z_1+z_2) &= \operatorname{senh} z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \operatorname{senh} z_2,\\ \cosh(z_1+z_2) &= \cosh z_1 \cosh z_2 + \operatorname{senh} z_1 \operatorname{senh} z_2,\end{aligned}$$

  entre otras.
- A partir de las definiciones de $\operatorname{senh} z$ y $\cosh z$ se deduce, para $z = x + i\,y$:

$$\operatorname{senh} z = \operatorname{senh} x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y \tag{2.16}$$

  y

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y. \tag{2.17}$$

- Las funciones seno y coseno hiperbólicos son periódicas con periodo $2\pi i$.
- Los ceros de $\operatorname{senh} z$ son todos los números complejos $z = n\pi i$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$
- Los ceros de $\cosh z$ son todos los números complejos $z = (n+\frac{1}{2})\pi i$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

**Otras Funciones Hiperbólicas**

Las demás funciones hiperbólicas de argumento complejo se definen fácilmente por analogía con las funciones hiperbólicas de argumento real, esto es,

*Tangente hiperbólica*

$$\tanh z = \frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z}$$

*Cotangente hiperbólica*

$$\coth z = \frac{\cosh z}{\operatorname{senh} z}$$

*Secante hiperbólica*

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}$$

*Cosecante hiperbólica*

$$\operatorname{csch} z = \frac{1}{\operatorname{senh} z}$$

Para los valores de $z$ donde no se anule el denominador de las funciones anteriores, su derivada existe y es, respectivamente,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\tanh z &= \operatorname{sech}^2 z,\\
\frac{d}{dz}\coth z &= -\operatorname{csch}^2 z,\\
\frac{d}{dz}\operatorname{sech} z &= -\tanh z \operatorname{sech} z,\\
\frac{d}{dz}\operatorname{csch} z &= -\coth z \operatorname{csch} z.
\end{aligned}$$

### 2.6.4 Función Logaritmo

Se define la función *logaritmo*, para todo $z \neq 0$, como

$$\log z = \ln|z| + i \arg z, \tag{2.18}$$

donde $\ln\cdot$ denota el logaritmo natural. Veamos que $\log z$ es una función multivaluada. Se tiene que, para todo $z \neq 0$, el argumento de $z$ se puede escribir como:

$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2n\pi \qquad (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

De esta forma, la ecuación (2.18) se puede escribir equivalentemente como

$$\log z = \ln|z| + i\,(\operatorname{Arg} z + 2n\pi) \qquad (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

Observe que para cualquier $z \neq 0$, los valores de $\log z$ tienen la misma parte real y sus partes imaginarias difieren en múltiplos enteros de $2\pi$. Por lo tanto, $\log z$ es una función multivaluada. El siguiente ejemplo ilustra este hecho.

**Ejemplo 2.13.** Calculemos todos los valores de $\log(1+i)$. Se tiene que

$$\operatorname{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}, \qquad |1+i| = \sqrt{2}.$$

Así,

$$\log(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) \qquad (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

**Definición 2.13** (Valor principal del logaritmo)**.** El *valor principal* de $\log z$ es el valor que se obtiene de la fórmula (2.18) cuando se utiliza el argumento principal de $z$. Ese valor se denota como $\operatorname{Log} z$ y se da por medio de la ecuación

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z, \qquad \text{para } z \neq 0. \tag{2.19}$$

### Algunas Propiedades del Valor Principal del Logaritmo

- La función $w = \operatorname{Log} z$ es monovaluada y su dominio de definición es el conjunto de todos los números complejos diferentes de cero; su rango es la franja $-\pi < \operatorname{Im} w \leq \pi$.

- El valor principal del logaritmo se reduce al logaritmo natural si $z$ es un número real positivo, en otras palabras, si $z = r > 0$, entonces $\operatorname{Log} z = \ln r$.

- La función inversa de $\operatorname{Log} z$ es $e^z$; en otras palabras, si $w$ es un número complejo tal que $-\pi < \operatorname{Im} w \leq \pi$, entonces $w = \operatorname{Log} z$ si, y sólo si $z = e^w$.

- La función $\operatorname{Log} z$ es continua en el dominio $(|z| > 0,\ -\pi < \arg z < \pi)$. (Se deja al lector la prueba).

- La función $\operatorname{Log} z$ es analítica en el dominio $(|z| > 0,\ -\pi < \arg z < \pi)$, y su derivada está dada por
$$\frac{d}{dz}\operatorname{Log} z = \frac{1}{z}.$$
(Se deja al lector la verificación).

### Ramas del Logaritmo

**Definición 2.14** (Rama de una función multivaluada)**.** Una *rama* de una función multivaluada $f(z)$, es una función monovaluada $F(z)$ que es analítica en cierto dominio $D \subset \mathbb{C}$, y coincide con $f(z)$ en $D$, es decir, $F(z) = f(z)$ para todo $z \in D$.

**Definición 2.15** (Corte y punto ramal)**.** Un *corte ramal* es una línea o curva de puntos singulares que se introducen al definir una rama de una función multivaluada. El punto común a todos los cortes ramales de una función multivaluada se denomina *punto ramal*.

Observe que $\operatorname{Log} z$ es una rama de la función multivaluada $\log z$, además, se tiene que $\operatorname{Log} z = \log z$, para todo $z \neq 0$ tal que $|z| > 0$ y $-\pi < \arg z < \pi$. La función $\operatorname{Log} z$ se denomina *rama principal del logaritmo*. El corte ramal de $\operatorname{Log} z$ es el eje real negativo con el origen.

Otras ramas de $\log z$ se definen como

$$\log z = \ln |z| + i \arg z \qquad (|z| > 0,\ \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi),$$

donde $\alpha$ es un número real fijo. El corte ramal de esta rama es el rayo $\arg z = \alpha$.

**Ejemplo 2.14.** Determinemos el valor de $\log(1+i)$, si $\log z$ está definido por

$$\log z = \ln |z| + i \arg z \qquad (|z| > 0,\ \pi/2 < \arg z < 5\pi/2).$$

Se tiene que $1 + i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$, pero $\pi/4 \notin (\pi/2, 5\pi/2)$. Luego, el argumento principal de $1+i$ no es el valor indicado para calcular $\log(1+i)$. Para encontrar $\arg(1+i) \in$

$(\pi/2, 5\pi/2)$, se utiliza el argumento principal de $1+i$. Se tiene que el valor del argumento de $1+i$ buscado está dado por

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4} \in (\pi/2, 5\pi/2),$$

por lo tanto, $\arg(1+i) = 9\pi/4$ es el valor indicado para calcular $\log(1+i)$. Así,

$$\log(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\,\frac{9\pi}{4}.$$

### 2.6.5 Función Exponente Complejo

Sea $c$ un número complejo. Se define la función *exponente complejo* como

$$z^c = e^{c\,\log z}, \tag{2.20}$$

para todo $z \neq 0$. Esta función generalmente es multivaluada. Los siguientes ejemplos ilustran este hecho.

**Ejemplo 2.15.** Calculemos todos los valores de $i^i$. Se tiene que

$$i^i = e^{i\ \log i} = e^{i(\ln 1 + i(2n+\frac{1}{2})\pi)} = e^{-(2n+\frac{1}{2})\pi},$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

**Ejemplo 2.16.** Calculemos el valor de $i^2$. Se tiene que

$$i^2 = e^{2\ \log i} = e^{2(\ln 1 + i(2n+\frac{1}{2})\pi)} = e^{(4n+1)\pi i},$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; pero,

$$e^{(4n+1)\pi i} = e^{4n\pi i}\,e^{\pi i} = -1,$$

para todo $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; por lo tanto, $i^2 = -1$.

El Ejemplo 2.15 muestra que la función exponente complejo es, generalmente, una función multivaluada. Por ello, se pueden definir ramas de esta función. Las ramas de la función exponente complejo se definen como

$$z^c = e^{c(\ln|z| + i\arg z)},$$

donde $|z| > 0$, $\alpha < \arg z < \alpha + 2\pi$ con $\alpha$ un número real fijo. En otras palabras, las ramas de la función exponente complejo se definen según la rama del logaritmo que se esté utilizando. De esta forma, cuando $\alpha = -\pi$, estaremos empleando la rama principal del logaritmo para definir la rama principal de la función exponente complejo. Para obtener la derivada de la función exponente complejo se emplea la regla de la cadena. Así, la derivada de cada una de las ramas de la función exponente complejo está dada por

$$\frac{d}{dz}\,z^c = c\,z^{c-1}.$$

**Función Exponencial de Base $c$**

La *función exponencial de base c*, donde $c$ es un número complejo distinto de cero, se define como

$$c^z = e^{z \log c}, \tag{2.21}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. De igual manera que la función exponente complejo, la función exponencial de base $c$ es generalmente multivaluada, cuyas ramas se definen según la rama del logaritmo que se esté empleando; por ejemplo, si utilizamos el valor principal de $\log c$, entonces la rama que se obtiene es la rama principal de la función exponencial de base $c$. Para cada rama de la función exponencial de base $c$, su derivada está dada por:

$$\frac{d}{dz} c^z = c^z \log c.$$

### 2.6.6 Funciones Trigonométricas Inversas

Comencemos con la deducción de una expresión cerrada para la función inversa del seno. Un procedimiento similar se puede utilizar para la deducción de las expresiones de las demás funciones trigonométricas inversas. Para definir la función inversa de $\operatorname{sen} z$, denotada por $\operatorname{sen}^{-1} z$, se escribe $w = \operatorname{sen}^{-1} z$ siempre y cuando $z = \operatorname{sen} w$. Ahora, utilizando la definición de $\operatorname{sen} w$ podemos escribir:

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

o, equivalentemente,

$$e^{2iw} - 2iz\, e^{iw} - 1 = 0.$$

Para expresar $w$ en términos de $z$, primero se despeja $e^{iw}$ al resolver la ecuación, que es una ecuación cuadrática en $e^{iw}$. Se tiene que

$$e^{iw} = iz + (1 - z^2)^{1/2},$$

donde $(1 - z^2)^{1/2}$ es una función bivaluada de $z$. Si tomamos logaritmo en ambos miembros y recordamos que $w = \operatorname{sen}^{-1} z$, se llega a la siguiente fórmula cerrada de la función $\operatorname{sen}^{-1} z$

$$\operatorname{sen}^{-1} z = -i \log\left(iz + (1 - z^2)^{1/2}\right). \tag{2.22}$$

Las funciones inversas del coseno y la tangente se pueden obtener fácilmente realizando un procedimiento similar al antes descrito. Las expresiones de $\cos^{-1} z$ y $\tan^{-1} z$ son, respectivamente:

$$\cos^{-1} z = -i \log\left(z + i(1 - z^2)^{1/2}\right), \tag{2.23}$$

$$\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \log\left(\frac{i + z}{i - z}\right). \tag{2.24}$$

**Ejercicio 2.2.** Deducir las expresiones cerradas de $\sec^{-1} z$, $\csc^{-1} z$, y $\cot^{-1} z$.

En general, las funciones trigonométricas inversas son multivaluadas. Por ejemplo, para la función $\operatorname{sen}^{-1} z$ podemos elegir dos valores igualmente válidos para la raíz cuadrada que aparece en su definición. Una vez que hemos elegido una valor, existe un número infinito de valores posibles para el logaritmo de $iz + (1 - z^2)^{1/2}$. En resumen, vemos que, debido a la raíz cuadrada y al logaritmo, hay dos conjuntos distintos de valores de $\operatorname{sen}^{-1} z$, cada uno de los cuales posee un número infinito de elementos. Este hecho sucede de forma semejante para las restantes funciones trigonométricas inversas.

Las derivadas de las funciones trigonométricas inversas se obtienen directamente de sus expresiones cerradas. Las derivadas de las funciones inversa del seno e inversa del coseno dependen de los valores escogidos de la raíces cuadradas, a saber:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \operatorname{sen}^{-1} z &= \frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}}, \\ \frac{d}{dz} \cos^{-1} z &= \frac{-1}{(1 - z^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

En cambio, la derivada de la inversa de la tangente,

$$\frac{d}{dz} \tan^{-1} z = \frac{1}{1 + z^2},$$

no depende de la manera en que la función se haga monovaluada.

**Ejercicio 2.3.** Determinar las expresiones cerradas de las derivadas de $\sec^{-1} z$, $\csc^{-1} z$, y $\cot^{-1} z$.

El siguiente ejemplo ilustra la aplicación de las expresiones de las funciones inversas en la resolución de ecuaciones que involucran funciones trigonométricas.

**Ejemplo 2.17.** Resolver la ecuación

$$\operatorname{sen}^2 z + 2i \operatorname{sen} z - 1 = 0.$$

*Solución.* La ecuación dada se puede escribir equivalentemente como

$$(\operatorname{sen} z + i)^2 = 0,$$

la cual es cierta si, y sólo si la siguiente ecuación se cumple

$$\operatorname{sen} z = -i.$$

Al tomar la inversa del seno en ambos miembros de la ecuación anterior podemos escribir:

$$\begin{aligned} z &= \operatorname{sen}^{-1}(-i) \\ &= -i \log\left(i(-i) + (1 - (-i)^2)^{1/2}\right) \\ &= -i \log\left(1 + 2^{1/2}\right) \\ &= -i \log\left(1 \pm \sqrt{2}\right). \end{aligned}$$

Según el valor de la raíz cuadrada empleado, obtenemos dos conjuntos de valores de $z$ que resuelven la ecuación dada. Así, uno de estos conjuntos de números complejos está dado por:

$$z_k = -i\,\log\left(1+\sqrt{2}\right) = 2k\pi - i\,\ln\left(1+\sqrt{2}\right), \quad \text{para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

El otro conjunto es:

$$z_n = -i\,\log\left(1-\sqrt{2}\right) = (2n+1)\pi - i\,\ln\left|1-\sqrt{2}\right|, \quad \text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$\diamondsuit$

### 2.6.7 Funciones Hiperbólicas Inversas

Las expresiones cerradas de las funciones hiperbólicas inversas se pueden obtener fácilmente a través de un procedimiento similar al empleado en la deducción de la función inversa del seno. Las expresiones cerradas de las funciones inversas del $\operatorname{senh} z$, $\cosh z$ y $\tanh z$, son, respectivamente:

$$\begin{aligned}
\operatorname{senh}^{-1} z &= \log\left(z + (z^2+1)^{1/2}\right), \\
\cosh^{-1} z &= \log\left(z + (z^2-1)^{1/2}\right), \\
\tanh^{-1} z &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right).
\end{aligned}$$

**Ejercicio 2.4.** Deducir las expresiones cerradas de $\operatorname{sech}^{-1} z$, $\operatorname{csch}^{-1} z$, y $\coth^{-1} z$.

Las derivadas de las funciones $\operatorname{senh}^{-1} z$ y $\cosh^{-1} z$, dependen de los valores escogidos de las raíces cuadradas, a saber:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\operatorname{senh}^{-1} z &= \frac{1}{(z^2+1)^{1/2}}, \\
\frac{d}{dz}\cosh^{-1} z &= \frac{-1}{(z^2-1)^{1/2}}.
\end{aligned}$$

La derivada de la función $\tanh^{-1} z$,

$$\frac{d}{dz}\tanh^{-1} z = \frac{1}{1-z^2},$$

no depende de la manera en que la función se haga monovaluada.

## 2.7 Mapeos

En esta sección se estudia la transformación de regiones del plano complejo a través de funciones de variable compleja, tales como polinomios de grado 1 y funciones racionales obtenidas como el cociente de dos polinomios de grado 1. Estudiamos el efecto de una función variable compleja sobre un conjunto de números complejo como una transformación, ya que una diferencia entre una función $f(z) = u + i\,v$ de una variable compleja y una función $y = f(x)$ de variable real, es que, en general, la relación $y = f(x)$ puede representarse gráficamente en el plano cartesiano, en cambio, no es tan fácil elaborar la gráfica de una función compleja. Se requieren dos números $x$ e $y$ para definir un valor $z$ cualquiera y otros dos números para los valores de $u$ y $v$ correspondientes. Por lo tanto, se requiere un espacio de cuatro dimensiones para representar $w = f(z)$ en forma gráfica. Evidentemente una gráfica de cuatro dimensiones no es un medio conveniente para estudiar el efecto gráfico de una función de variable compleja. Es preciso recurrir a otros medios para visualizar $w = f(z)$.

Aquí, visualizamos la relación $w = f(z)$ como el efecto que tiene la función $f(z)$ sobre un conjunto de puntos complejos. A este proceso lo denominamos mapear o transformar y a la función $f(z)$ de variable compleja la denominamos *transformación* o *mapeo*. El objetivo principal de esta parte es determinar analítica y gráficamente el efecto que tiene un mapeo sobre un conjunto de puntos del plano complejo; en particular, estudiamos mapeos lineales, inversión y bilineales, para lo cual necesitamos la siguiente notación:

- denotamos con $w = f(z)$ la imagen de $z$ bajo $f$, donde $z = x + i\,y$, y $w = u + i\,v$;
- para todo conjunto $S$ de números complejos, denotamos con $f(S)$ el transformado o la imagen de $S$ bajo $f$;
- la *imagen inversa* de un punto $w$ del rango de $f$ es el conjunto de todos los puntos $z$, en el dominio de $f$, que tienen a $w$ como su imagen.

En la Figura 2.2 se aprecia la representación gráfica de un mapeo o transformación.

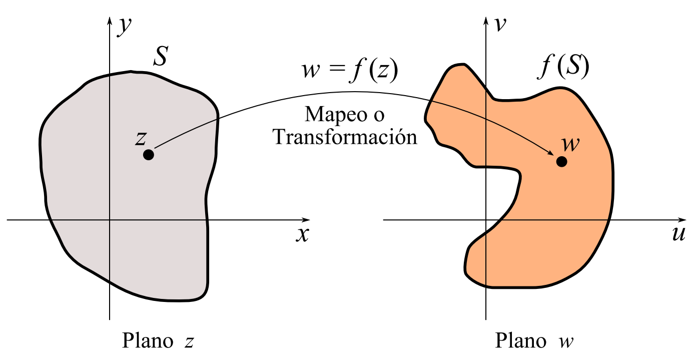



**Figura 2.2**. Representación gráfica de un mapeo

**Definición 2.16** (Mapeo inyectivo)**.** Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Se dice que el mapeo $w = f(z)$ es inyectivo, si $z_1 \neq z_2$ implica que $f(z_1) \neq f(z_2)$.

Inicialmente describimos los mapeos lineales: $w = z + c$, $w = bz$, y $w = bz + c$. Seguidamente mostramos el mapeo inversión $w = 1/z$. Por último, describimos el mapeo bilineal $w = (az + b)/(cz + d)$.

### 2.7.1 Mapeo $w = z + c$

El mapeo del plano $z$ en el plano $w$ definido por la ecuación

$$w = z + c, \tag{2.25}$$

donde $c$ es una constante compleja, es una *traslación* en la dirección del vector $c$. En la Figura 2.3 se aprecia el movimiento geométrico que tiene un punto $z_0$ cuando se transforma con una traslación.

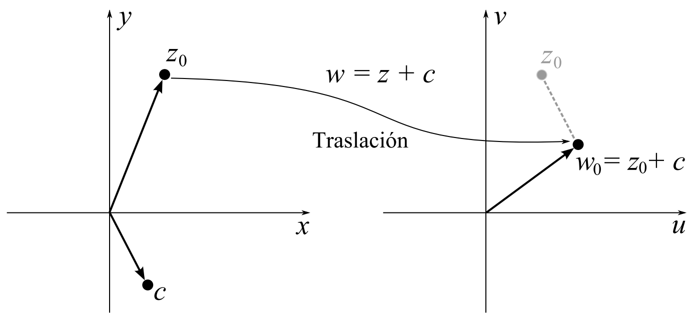



**Figura 2.3**. Movimiento geométrico de la traslación

*Observación* 2.5.

- El mapeo (2.25) es inyectivo; por tanto, posee *mapeo inverso* definido como

$$f^{-1}(w) = w - c. \tag{2.26}$$

- El mapeo (2.25) transforma rectas en el plano $z$ a rectas en el plano $w$.
- El mapeo (2.25) transforma circunferencias en el plano $z$ a circunferencias en el plano $w$.

A continuación determinamos el transformado de una recta o una circunferencia bajo el mapeo $w = z + c$, y verificaremos que, efectivamente, una traslación transforma rectas a rectas y circunferencias a circunferencias.

Sean $z = x + i\,y$, $w = u + i\,v$, y $c = c_1 + i\,c_2$. Para obtener el transformado de una recta o una circunferencia bajo el mapeo $w = z + c$, utilizamos el mapeo inverso dado por (2.26), esto es, empleando la ecuación $x + i\,y = f^{-1}(u + i\,v)$, escribimos a $x$ e $y$ en función de $u$ y $v$, para luego sustituir convenientemente estos valores en la ecuación que describe una recta o una circunferencia. Ahora, la ecuación general de una recta o una circunferencia está dada por

$$\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \delta y + \gamma = 0, \tag{2.27}$$

donde $\alpha, \beta, \delta, \gamma \in \mathbb{R}$. Es decir, todo punto $z = x + i\,y$ tal que $x$ e $y$ satisfacen la ecuación (2.27) pertenece a una recta o a una circunferencia. Utilizando el mapeo inverso podemos escribir:

$$x + i\,y = f^{-1}(u + i\,v) = u + i\,v - c_1 + i\,c_2 = (u - c_1) + i\,(v - c_2),$$

de donde se deduce que $x = u - c_1$, e $y = v - c_2$. Sustituyendo convenientemente estos últimos valores en la ecuación (2.27), obtenemos la siguiente ecuación

$$\alpha((u - c_1)^2 + (v - c_2)^2) + \beta(u - c_1) + \delta(v - c_2) + \gamma = 0,$$

que describe analíticamente el conjunto transformado de una recta o una circunferencia, bajo el mapeo $w = z + c$. Entonces, si $\alpha = 0$, la ecuación (2.27) describe una recta en el plano $z$, y la ecuación del transformado de esta recta bajo el mapeo $w = z + c$ está dada por

$$\beta u + \delta v + (\delta - \beta c_1 - \delta c_2) = 0,$$

que describe una recta en el plano $w$. En cambio, si $\alpha \neq 0$, la ecuación (2.27) describe una circunferencia en el plano $z$, y la ecuación del transformado de esta circunferencia bajo el mapeo $w = z + c$ está dada por

$$\alpha(u^2 + v^2) + (\beta - 2c_1\alpha)u + (\delta - 2c_2\alpha)v + (\alpha c_1^2 + \alpha c_2^2 - \beta c_1 - \delta c_2 + \gamma) = 0,$$

que también describe una circunferencia en el plano $w$.

A continuación damos un ejemplo donde se emplea la ecuación $z = f^{-1}(w)$ para obtener el transformado, bajo el mapeo traslación, de un conjunto de números complejos definido por inecuaciones.

**Ejemplo 2.18.** Sea $S$ el conjunto de números complejos que se muestra en la Figura 2.4.

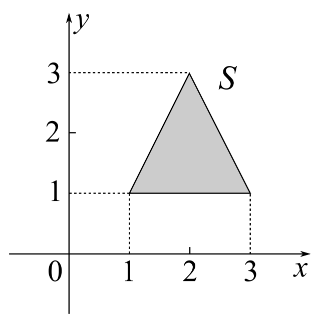



**Figura 2.4**. Conjunto $S$

Determinemos el transformado de $S$ bajo el mapeo $w = f(z) = z - i$. Se tiene que todo $z = x + i\,y \in S$ satisface el siguiente conjunto de inecuaciones

$$\begin{cases} 2x - y & \geq & 1 \\ 2x + y & \leq & 7 \\ y & \geq & 1 \end{cases}$$

Además, la función inversa de $f(z) = z - i$ es $f^{-1}(w) = w + i$. Ahora, utilizando la ecuación $x + i\,y = f^{-1}(u + i\,v)$ obtenemos: $x = u$, e $y = v + 1$. Sustituyendo convenientemente estas últimas expresiones en el conjunto de inecuaciones que describe a $S$, se tiene el siguiente sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} 2u - v & \geq & 2 \\ 2u + v & \leq & 6 \\ v & \geq & 0 \end{cases}$$

que describe los números complejos $w = u + i\,v$ del transformado de $S$ bajo el mapeo $w = z - i$, cuya gráfica se aprecia en la Figura 2.5.

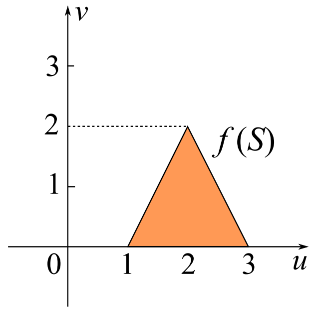



**Figura 2.5**. Conjunto $f(S)$

### 2.7.2 Mapeo $w = bz$

El mapeo del plano $z$ en el plano $w$ definido por la ecuación

$$w = bz, \tag{2.28}$$

donde $b$ es un número complejo distinto de cero, es una *rotación* en el ángulo $\operatorname{Arg} b$ y una *expansión ó contracción* según sea el valor de $|b|$. Si $|b| < 1$, se dice que el mapeo (2.28) es una rotación y contracción; en cambio, si $|b| \geq 1$, el mapeo (2.28) es una rotación y expansión.

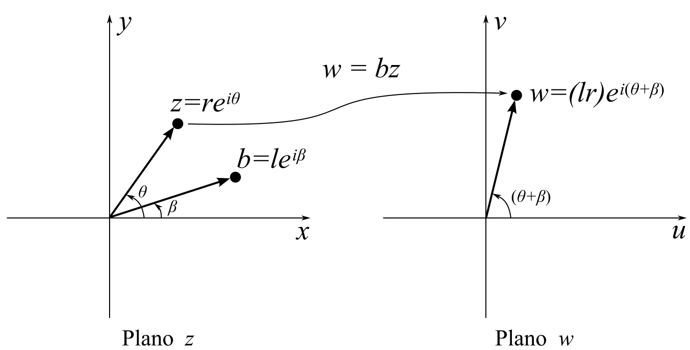



**Figura 2.6**. Movimiento geométrico de la rotación y expansión o contracción

En la Figura 2.6 se aprecia el movimiento geométrico que tiene un punto $z = re^{i\theta}$ cuando se transforma con el mapeo (2.28). Si tomamos $b = le^{i\beta}$ y $z = re^{i\theta}$, entonces el transformado de $z$ bajo el mapeo $w = bz$ está dado, en su forma polar, por

$$w = (lr)e^{i(\beta+\theta)},$$

de lo cual se infiere que (2.28) es una rotación en el ángulo $\beta$ y una expansión o contracción según $l$.

*Observación* 2.6.

- El mapeo (2.28) es inyectivo; por tanto, posee ***mapeo inverso*** definido como
$$f^{-1}(w) = \frac{w}{b}. \tag{2.29}$$
- El mapeo (2.28) transforma rectas en el plano $z$ a rectas en el plano $w$.
- El mapeo (2.28) transforma circunferencias en el plano $z$ a circunferencias en el plano $w$.

**Ejercicio 2.5.** Demuestre que el mapeo lineal (2.28) transforma rectas a rectas y circunferencias a circunferencias. *Ayuda:* Utilice la ecuación general de una recta o una circunferencia (2.27) conjuntamente con la expresión del mapeo inverso (2.29).

**Ejemplo 2.19.** Sea $S$ el conjunto de números complejos que se muestra en la Figura 2.7.

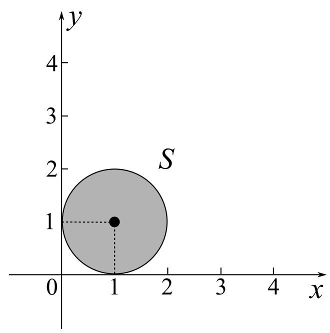



**Figura 2.7**. Conjunto $S$

Determinemos el transformado de $S$ bajo el mapeo $w = f(z) = (1-i)z$. Se tiene que todo $z = x + i\,y \in S$ satisface que $|z-(1+i)| \leq 1$; además, $f^{-1}(w) = w/(1-i)$. De esta forma, utilizando la ecuación $z = f^{-1}(w) = w/(1-i)$ convenientemente con $|z-(1+i)| \leq 1$, obtenemos:
$$|z-(1+i)| = \left|\frac{w}{1-i} - (1+i)\right| = \frac{|w-2|}{|1-i|} \leq 1,$$
es decir, todo punto $w$ que pertenece a $f(S)$ satisface que $|w-2| \leq \sqrt{2}$. En la Figura 2.8 se observa el transformado de $S$ bajo el mapeo $w = (1-i)z$.

### 2.7.3 Mapeo $w = bz + c$

El mapeo del plano $z$ en el plano $w$ definido por la ecuación
$$w = bz + c, \tag{2.30}$$
donde $b$ y $c$ son números complejos, es una *rotación* en el ángulo $\operatorname{Arg} b$ y una **expansión** ó *contracción* según sea el valor de $|b|$, seguida de una *traslación* en la dirección del vector $c$. En efecto, el mapeo (2.30) se puede expresar como la siguiente sucesión de mapeos:

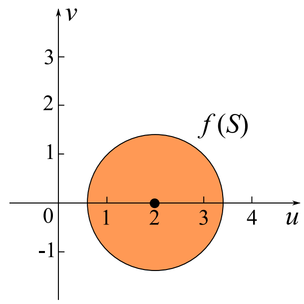



**Figura 2.8**. Conjunto $f(S)$

$$z \xrightarrow[\substack{\text{Rotación y}\\ \text{Expansión ó}\\ \text{Contracción}}]{} Z = bz \xrightarrow[\text{Traslación}]{} w = Z + c$$

*Observación* 2.7.

- El mapeo (2.30) es inyectivo ya que es la composición de mapeos inyectivos; por tanto, posee *mapeo inverso* definido como
$$f^{-1}(w) = \frac{w-c}{b}, \qquad b \neq 0. \tag{2.31}$$
- Como (2.30) es la composición de una rotación y una traslación, entonces (2.30) transforma rectas a rectas y circunferencias a circunferencias.

**Ejemplo 2.20.** Sea $S$ el conjunto de números complejos que se muestra en la Figura 2.9.

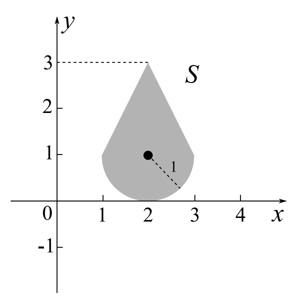



**Figura 2.9**. Conjunto $S$

Determinemos el transformado de $S$ bajo el mapeo $w = f(z) = iz + 3 - i$. Se tiene que el mapeo inverso es $f^{-1}(w) = -iw + 1 + 3i$, además, el conjunto $S$ se puede escribir como $S = D_1 \cup D_2$, donde $D_1$ y $D_2$ son conjuntos de números complejos definidos respectivamente por:

$$D_1 = \{z = x + i\,y : 2x - y \geq 1,\ 2x + y \leq 7,\ y \geq 1\}$$

y

$$D_2 = \{z = x + i\,y : (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 1,\ y \leq 1\}.$$

De esta forma, el transformado de $S$ está dado por $f(S) = f(D_1) \cup f(D_2)$. Ahora, utilizando la ecuación $x + i\,y = f^{-1}(u + i\,y)$, podemos escribir:

$$x = v + 1, \quad y = 3 - u.$$

Sustituyendo los valores de $x$ e $y$ en las inecuaciones que describen a los conjuntos $D_1$ y $D_2$ obtenemos que los conjuntos transformados de $D_1$ y $D_2$, bajo el mapeo $w = iz+3-i$, están dados por

$$f(D_1) = \{w = u + i\,v : u + 2v \geq 2,\ -u + 2v \leq 2,\ u \leq 2\}$$

y

$$f(D_2) = \{w = u + i\,v : (u-2)^2 + (v-1)^2 \leq 1,\ u \geq 2\}.$$

Así, la unión de $f(D_1)$ y $f(D_2)$ conforma el transformado de $S$ bajo el mapeo $w = iz + 3 - i$, cuya representación gráfica se aprecia en la Figura 2.10.

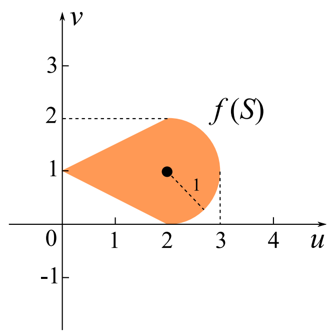



**Figura 2.10**. Conjunto $f(S)$

### 2.7.4 Mapeo Inversión

El mapeo del plano $z$ en el plano $w$ definido por la ecuación

$$w = \frac{1}{z}, \tag{2.32}$$

para todo $z \neq 0$, se denomina mapeo *inversión*, y establece una correspondencia uno a uno entre los puntos de los planos $z$ y $w$ distintos de cero. Por lo tanto, el mapeo inverso de $f(z) = 1/z$ es $f^{-1}(w) = 1/w$, es decir, el mismo mapeo inversión.

Por otra parte, el mapeo (2.32) también puede escribirse como

$$w = \frac{\overline{z}}{|z|^2}, \quad \text{para todo } z \neq 0.$$

Por ello, el mapeo inversión se puede expresar como la siguiente sucesión de mapeos:

$$z \longrightarrow Z = \frac{1}{|z|^2}\, z \longrightarrow w = \overline{Z}$$

El primero de estos mapeos se denomina inversión con respecto a la circunferencia unitaria $|z| = 1$. Es decir, la imagen de un punto $z \neq 0$ es el punto $Z = (1/|z|^2)z$ con las siguientes propiedades:

$$|Z| = \frac{1}{|z|} \quad \text{y} \quad \arg Z = \arg z.$$

En otras palabras, los puntos exteriores a la circunferencia $|z| = 1$ se transforman en los puntos diferentes de cero interiores a la misma y recíprocamente. Cualquier punto sobre la circunferencia unitaria se transforma sobre sí mismo.

El segundo mapeo $w = \overline{Z}$ es, simplemente, una reflexión con respecto al eje real.

### Transformación de rectas y circunferencias

Pasemos a ver el efecto que tiene el mapeo inversión sobre las rectas y las circunferencias. Recordemos que la ecuación general de una recta o una circunferencia está dada por

$$\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \delta y + \gamma = 0, \tag{2.33}$$

donde $\alpha, \beta, \delta, \gamma \in \mathbb{R}$. También recordemos que si $\alpha = 0$, la ecuación anterior describe una recta en el plano $z$; en cambio, si $\alpha \neq 0$, describe una circunferencia.

Si $z = x + i\,y$ es un punto que satisface la ecuación general de una recta o una circunferencia para ciertos valores de $\alpha, \beta, \delta, \gamma$, entonces su transformado

$$w = u + i\,v = \frac{1}{z}$$

satisface la siguiente ecuación (se deja al lector verificar esta relación):

$$\gamma(u^2 + v^2) + \beta u - \delta v + \alpha = 0. \tag{2.34}$$

A continuación consideramos ciertos valores de $\alpha, \beta, \delta, \gamma$, que describen algunas rectas y circunferencias muy particulares, que nos servirán como ejemplo para mostrar la utilidad de las ecuaciones (2.33) y (2.34), para transformar rectas y circunferencias bajo el mapeo inversión.

- *Circunferencia que no pasa por el origen.*
  La ecuación (2.33) con $\alpha \neq 0$ y $\delta \neq 0$, describe una circunferencia que no pasa por el origen en el plano $z$. Por la ecuación (2.34), esta circunferencia se transforma, bajo la inversión, en una circunferencia que no pasa por el origen en el plano $w$.

  **Ejemplo 2.21.** La circunferencia $|z - (1 + i)| = 1$ que no pasa por el origen en el plano $z$, se transforma, bajo la inversión, en la circunferencia $|w - (1 - i)| = 1$ que no pasa por el origen en el plano $w$.

- *Circunferencia que pasa por el origen.*
  La ecuación (2.33) con $\alpha \neq 0$ y $\delta = 0$, describe una circunferencia que pasa por el origen en el plano $z$. Por la ecuación (2.34), esta circunferencia se transforma, bajo la inversión, en una recta que no pasa por el origen en el plano $w$.

**Ejemplo 2.22.** La circunferencia $(x-1)^2+(y+1)^2=2$ que pasa por el origen en el plano $z$, se transforma, bajo la inversión, en la recta $2u+2v=1$ que no pasa por el origen en el plano $w$.

- *Recta que no pasa por el origen.*
  La ecuación (2.33) con $\alpha=0$ y $\delta\neq 0$, describe una recta que no pasa por el origen en el plano $z$. Por la ecuación (2.34), esta recta se transforma, bajo la inversión, en una circunferencia que pasa por el origen en el plano $w$.

  **Ejemplo 2.23.** La recta $x-y=-1$ que no pasa por el origen en el plano $z$, se transforma, bajo la inversión, en la circunferencia $(u+1)^2+(v+1)^2=2$ que pasa por el origen en el plano $w$.

- *Recta que pasa por el origen.*
  La ecuación (2.33) con $\alpha=0$ y $\delta=0$, describe una recta que pasa por el origen en el plano $z$. Por la ecuación (2.34), esta recta se transforma, bajo la inversión, en una recta que pasa por el origen en el plano $w$.

  **Ejemplo 2.24.** La recta $x-y=0$ que pasa por el origen en el plano $z$, se transforma, bajo la inversión, en la recta $u+v=0$ que pasa por el origen en el plano $w$.

**Ejercicio 2.6.** Compruebe cada uno de los transformados de los Ejemplos 2.21-2.24.

**Ejemplo 2.25.** Sea $S$ el conjunto de números complejos dado en el Ejemplo 2.18 y que se muestra en la Figura 2.4. Comprobemos que el transformado de $S$ bajo el mapeo inversión es el conjunto de números complejos que se muestra en la Figura 2.11.

Se tiene que

$$S=\{z=x+i\,y: 2x-y\geq 1,\ 2x+y\leq 7,\ y\geq 1\},$$

además, la función inversa de $f(z)=1/z$ es $f^{-1}(w)=1/w$. Ahora, utilizando la ecuación $x+i\,y=f^{-1}(u+i\,v)$ obtenemos: $x=u/(u^2+v^2)$, e $y=-v/(u^2+v^2)$. Sustituyendo convenientemente estas últimas expresiones en el conjunto de inecuaciones que describe a $S$, se tiene que los puntos $w=u+i\,v$ del transformado de $S$ bajo el mapeo inversión satisfacen las siguientes inecuaciones

$$(u-1)^2+\left(v-\frac{1}{2}\right)^2\geq\frac{5}{4},\quad \left(u-\frac{1}{7}\right)^2+\left(v+\frac{1}{7}\right)^2\geq\frac{2}{49},\quad u^2+(v+1)^2\leq 1.$$

Por lo tanto, el transformado de $S$ bajo el mapeo inversión es el conjunto de números complejos que se muestra en la Figura 2.11.

### 2.7.5 Mapeo Bilineal

El mapeo del plano $z$ en el plano $w$ definido por la ecuación

$$w=\frac{az+b}{cz+d}, \tag{2.35}$$

donde $a$, $b$, $c$ y $d$ son números complejos, se denomina *mapeo bilineal* o *transformación de Möbius*.

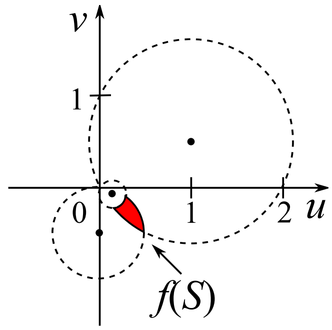



**Figura 2.11**. Conjunto $f(S)$

*Observación* 2.8.

- El mapeo (2.35) es inyectivo para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $cz + d \neq 0$; por tanto, en ese conjunto de puntos posee *mapeo inverso* definido como
$$f^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a}. \tag{2.36}$$
- Cuando $c = 0$, el mapeo (2.35) adquiere la forma
$$w = \frac{a}{d}\, z + \frac{b}{d},$$
lo cual indica que (2.35) es un mapeo lineal.
- Cuando $c \neq 0$, el mapeo (2.35) se puede escribir equivalentemente como
$$w = \frac{a}{c} + \left(\frac{bc - ad}{c}\right) \frac{1}{cz + d},$$
donde el número $ad - bc$ se *denomina determinante del mapeo.* Esto nos permite afirmar que el mapeo (2.35) se puede expresar como la siguiente sucesión de mapeos:

$$z \xrightarrow[\substack{\text{Rotación con}\\ \text{Expansión ó}\\ \text{Contracción, y}\\ \text{Traslación}}]{} Z = cz + d \xrightarrow[\text{Inversión}]{} W = \frac{1}{Z} \xrightarrow[\substack{\text{Rotación con}\\ \text{Expansión ó}\\ \text{Contracción, y}\\ \text{Traslación}}]{} w = \frac{a}{c} + \left(\frac{bc - ad}{c}\right) W$$

- Como el mapeo (2.35) es la composición de mapeos lineales, él transforma circunferencias o rectas en el plano $z$ a circunferencias o rectas en el plano $w$.
- Cuando el determinante del mapeo es cero, $ad - bc = 0$, el mapeo (2.35) adquiere la forma
$$w = \frac{a}{c},$$
es decir, el mapeo (2.35) transforma todo el plano complejo en el punto $w = a/c$.

**Ejemplo 2.26.** Sea $S$ el conjunto de números complejos dado en el Ejemplo 2.18 y que se muestra en la Figura 2.4. Determinemos el transformado de $S$ bajo el mapeo bilineal

$$w = f(z) = \frac{iz + 1 + i}{iz + i}.$$

Se tiene que

$$S = \{z = x + i\,y : 2x - y \geq 1,\ 2x + y \leq 7,\ y \geq 1\}.$$

Además, la función inversa de $f(z) = (iz + 1 + i)/(iz + i)$ es

$$f^{-1}(w) = \frac{i}{1 - w} - 1.$$

Ahora, utilizando la ecuación $x + i\,y = f^{-1}(u + i\,v)$ obtenemos:

$$x = \frac{-v - ((u-1)^2 + v^2)}{(u-1)^2 + v^2}, \qquad y = \frac{1 - u}{(u-1)^2 + v^2}.$$

Sustituyendo convenientemente estas últimas expresiones en el conjunto de inecuaciones que describe a $S$, se tiene que los puntos $w = u + i\,v$ del transformado de $S$, bajo el mapeo bilineal dado, satisfacen las siguientes inecuaciones

$$\left(u - \frac{3}{2}\right)^2 + (v+1)^2 \leq \frac{5}{4}, \quad \left(u - \frac{17}{18}\right)^2 + \left(v + \frac{2}{18}\right)^2 \geq \frac{5}{18^2}, \quad \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 \leq \frac{1}{4}.$$

La gráfica del transformado de $S$ se aprecia en la Figura 2.12.

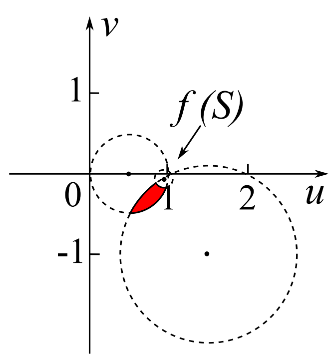



**Figura 2.12**. Conjunto $f(S)$

## 2.8 Ejercicios Propuestos

**1.** Encuentre el dominio de definición de cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(z) = \dfrac{1}{1 - |z|^2}$ *Resp.* $\{z \in \mathbb{C} : |z| \neq 1\}$

(b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ *Resp.* $\{z \in \mathbb{C} : z \neq \pm i\}$

(c) $g(z) = \dfrac{z}{z+\overline{z}}$ *Resp.* $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \neq 0\}$

(d) $g(z) = \dfrac{1-z}{z^3+iz^2+3z-i}$ *Resp.* $\{z \in \mathbb{C} : z \neq i,\, (-1 \pm \sqrt{2})i\}$

(e) $g(z) = \dfrac{|z|^2-1}{|z+i|}$ *Resp.* $\{z \in \mathbb{C} : z \neq -i\}$

(f) $h(z) = \dfrac{1}{2-(z-i)^2}$ *Resp.* $\{z \in \mathbb{C} : z \neq i \pm \sqrt{2}\}$

(g) $h(z) = \operatorname{Arg}(1/z)$ *Resp.* $\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$

(h) $h(z) = \dfrac{z^2-z+(1-z)i}{z^3+z}$ *Resp.* $\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, \pm i\}$

**2.** Encuentre las funciones componentes, $u(x,y)$ y $v(x,y)$, de las siguientes funciones $f(z)$, donde $z = x+iy$:

(a) $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$.

(b) $f(z) = \dfrac{z+1}{2z-5}$.

(c) $f(z) = z^2 - 3z + 2$.

(d) $f(z) = \dfrac{z+2}{2z-1+i}$.

**3.** Dada la función $f(z) = \dfrac{z+2}{2z-1}$, establecer en cada caso el conjunto de puntos $z \in \mathbb{C}$ tales que:

(a) $f(z) = i$ *Resp.* $z = -i$

(b) $f(z) = z$ *Resp.* $z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

(c) $f(z) = 2$ *Resp.* $z = \frac{4}{3}$

**4.** Calcule los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{z\to 2i} \frac{1-z}{1+z}$ *Resp.* $-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\,i$

(b) $\displaystyle\lim_{z\to 2i} (2z^3 - 3z^2 + z + i)$ *Resp.* $12 - 13\,i$

(c) $\displaystyle\lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{4}}} \frac{z^2}{z^4+z+1}$ *Resp.* $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

(d) $\displaystyle\lim_{z\to 2+i} \frac{z^2-2i\,z}{z^2+4}$ *Resp.* $\frac{7}{13} - \frac{4}{13}\,i$

(e) $\displaystyle\lim_{z\to 2i} \frac{z^2-2i\,z}{z^2+4}$ *Resp.* $\frac{1}{2}$

(f) $\displaystyle\lim_{z\to i} \frac{z^2+1}{z^6+1}$ *Resp.* $\frac{1}{3}$

(g) $\displaystyle\lim_{z\to(3-4i)} \frac{z}{z+\overline{z}}$ *Resp.* $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\,i$

(h) $\displaystyle\lim_{z\to(1-i)} \frac{|z|^2-1}{|z+i|}$ *Resp.* 1

(i) $\displaystyle\lim_{z\to i} \operatorname{Arg}(1/z)$ *Resp.* $-\frac{\pi}{2}$

(j) $\displaystyle\lim_{z\to -i} (\ln|z| + i\operatorname{Arg} z)$ *Resp.* $-\frac{\pi}{2}\,i$

**5.** Pruebe que los siguientes límites no existen en punto alguno $z_0 \in \mathbb{C}$.

(a) $\displaystyle\lim_{z\to z_0} \frac{\overline{z}-\overline{z_0}}{z-z_0}$.

(b) $\displaystyle\lim_{z\to z_0} \frac{\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0}{z-z_0}$.

**6.** Determine el conjunto de números complejos donde las siguientes funciones son continuas:

(a) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{3z^2-5iz+2}{z^2+iz+6}, & z \neq 2i; \\ \frac{7}{15}, & z = 2i. \end{cases}$ *Resp.* $\mathbb{C} - \{-3i\}$

(b) $g(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2+1}{z+i}, & z \neq -i; \\ -2i, & z = i. \end{cases}$ *Resp.* $\mathbb{C}$

(c) $h(z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Re} z}{1+\operatorname{Im} z}, & \operatorname{Re} z \neq \operatorname{Im} z,\ \operatorname{Im} z \neq 0; \\ 1, & \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z,\ \operatorname{Im} z \neq 0; \\ \operatorname{Re} z, & \operatorname{Im} z = 0. \end{cases}$ *Resp.* $\mathbb{C} - \{z : \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z \neq 0\}$

**7.** Pruebe que cada una de las siguientes funciones satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

(a) $f(z) = e^x(-\operatorname{sen} y + i\cos y)$.

(b) $f(z) = \cos x\, \cosh y - i \operatorname{sen} x\ \operatorname{senh} y$.

(c) $f(z) = \operatorname{sen} x\, \cosh y + i\, \cos x\ \operatorname{senh} y$.

(d) $f(z) = e^{x^2-y^2}(\cos(2xy) + i\operatorname{sen}(2xy))$.

**8.** Determine en qué conjunto $D$ de números complejos $z = x + i\,y$, las siguientes funciones son derivables y calcule su derivada.

(a) $f(z) = x^2 + i\,y^2$ *Resp.* $\begin{cases} D = \{z = x + i\,y : y = x\} \\ f'(z) = 2x \end{cases}$

(b) $f(z) = x^2 + 2x - i\,y$ *Resp.* $\begin{cases} D = \{z = x + i\,y : x = -1\} \\ f'(z) = 2x + 1 \end{cases}$

(c) $f(z) = 2xy + i\,(x + \frac{2}{3}y^3)$ *Resp.* $\begin{cases} D = \{-\frac{1}{2},\, -\frac{1}{2} + i\} \\ f'(z) = 2y + i \end{cases}$

**9.** Si $u$ y $v$ se expresan en términos de las coordenadas polares $(r, \theta)$, muestre que las ecuaciones de Cauchy-Riemann pueden escribirse de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}, \qquad r \neq 0.$$

**10.** Utilizando las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de derivada, demostrar que $f'(z)$ no existe en punto alguno del plano complejo si $f(z)$ está dada por:

(a) $f(z) = \overline{z}$.
(b) $f(z) = z - \overline{z}$.
(c) $f(z) = 2x + ixy^2$.
(d) $f(z) = e^x e^{-iy}$.

**11.** Determine el conjunto $D$ de todos los números complejos donde cada una de las siguientes funciones $f(z)$ es analítica y calcule su derivada:

(a) $f(z) = (z + 1)^2$ *Resp.* $\begin{cases} D = \mathbb{C} \\ f'(z) = 2(z + 1) \end{cases}$

(b) $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$ *Resp.* $\begin{cases} D = \mathbb{C} - \{0\} \\ f'(z) = 1 - \frac{1}{z^2} \end{cases}$

(c) $f(z) = \dfrac{3z - 1}{3 - z}$ *Resp.* $\begin{cases} D = \mathbb{C} - \{3\} \\ f'(z) = \frac{8}{(z-3)^2} \end{cases}$

(d) $f(z) = \dfrac{2z + 1}{z(z^2 + 1)}$ *Resp.* $\begin{cases} D = \mathbb{C} - \{0,\ \pm i\} \\ f'(z) = \frac{2}{z\,(z^2+1)} - \frac{4\,z+2}{(z^2+1)^2} - \frac{2\,z+1}{z^2\,(z^2+1)} \end{cases}$

(e) $f(z) = \dfrac{z^4}{1 + z^4}$ *Resp.* $\begin{cases} D = \mathbb{C} - \left\{\pm\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\right)\right\} \\ f'(z) = \frac{4\,z^3}{z^4+1} - \frac{4\,z^7}{(z^4+1)^2} \end{cases}$

(f) $f(z) = \dfrac{\operatorname{Log}(z + 4)}{z^2 + i}$ *Resp.* $\begin{cases} D = \mathbb{C} - \{z : z = \pm i, \text{ ó } \operatorname{Re} z \leq -4,\ \operatorname{Im} z = 0\} \\ f'(z) = \frac{1}{(z+4)(z^2+i)} - \frac{2z\operatorname{Log}(z+4)}{(z^2+i)^2} \end{cases}$

(g) $f(z) = e^{e^z}$ *Resp.* $\begin{cases} D = \mathbb{C} \\ f'(z) = e^{z+e^z} \end{cases}$

(h) $f(z) = \operatorname{sen}(e^z)$ *Resp.* $\begin{cases} D = \mathbb{C} \\ f'(z) = e^z \cos(e^z) \end{cases}$

**12.** Comprobar que cada una de las siguientes funciones son enteras:

(a) $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$.

(b) $f(z) = e^{-y}e^{ix}$.

(c) $f(z) = (z^2 - 2)e^{-z}$.

(d) $f(z) = \operatorname{sen}(x^2 - y^2)\cosh(2xy) + i\cos(x^2 - y^2)\operatorname{senh}(2xy)$.

**13.** Determine en qué conjunto del plano cada una de las siguientes funciones son armónicas, y encuentre de ser posible su armónica conjugada.

(a) $u(x, y) = \operatorname{Im}(z^2 + 3z + 1)$

(b) $u(x, y) = \dfrac{x - 1}{x^2 + y^2 - 2x + 1}$

(c) $v(x, y) = \operatorname{Im}(z + 1/z)$

(d) $v(x, y) = \dfrac{y}{(x - 1)^2 + y^3}$

**14.** Demostrar las siguientes identidades.

(a) $e^{(2\pm 3\pi i)} = -e^2$

(b) $e^{z+\pi i} = -e^z$

(c) $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(iz)}$, para $z \in \mathbb{C}$

(d) $\operatorname{senh}(z + \pi i) = -\operatorname{senh} z$, para $z \in \mathbb{C}$

(e) $\cosh(z + \pi i) = -\cosh z$, para $z \in \mathbb{C}$

(f) $\operatorname{senh} 2z = 2 \operatorname{senh} z \cosh z$, para $z \in \mathbb{C}$

(g) $\operatorname{Log}(ei) = 1 + (\pi/2)i$

(h) $\operatorname{Log}(1 + i) = \frac{1}{2}(\ln 2 + (\pi/2)i)$

(i) $\log 1 = 2n\pi i$, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

(j) $\log(-1) = (2n + 1)\pi i$, para $n = 0, \pm 1, \ldots$

(k) $\log\left(i^{1/2}\right) = (n + 1/4)\pi i$, para $n = 0, \pm 1, \ldots$

(l) $(1 + i)^i = \exp(-\pi/4 + 2n\pi)\exp((i/2)\ln 2)$, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

(m) $(-1)^{1/\pi} = \exp((2n + 1)i)$, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**15.** Demostrar que:

(a) si $\log z = \ln r + i\theta$, para todo $z$ tal que $r = |z| > 0$ y $\pi/4 < \theta = \arg z < 9\pi/4$, entonces $\log(i^2) = 2\log i$.

(b) si $\log z = \ln r + i\theta$, para todo $z$ tal que $r = |z| > 0$ y $3\pi/4 < \theta = \arg z < 11\pi/4$, entonces $\log(i^2) \neq 2\log i$.

**16.** Encontrar todas las raíces de cada una de las siguientes ecuaciones:

(a) $\cosh z = 1/2$
(b) $\operatorname{senh} z = i$
(c) $\cosh z = -2$
(d) $\log z = (\pi/2)i$
(e) $e^z = -3$

**17.** Encontrar el valor principal de;

(a) $i^i$
(b) $[(e/2)(-1 - i\sqrt{2})]^{3\pi i}$
(c) $(1 - i)^{4i}$

**18.** Determine la rama principal y su derivada, para cada una de las siguientes funciones multivaluadas:

(a) $f(z) = \sqrt{e^z + 1}$
(b) $f(z) = \cos(\log z)$
(c) $f(z) = \log(e^z + 1)$
(d) $f(z) = z^{\log z} \equiv e^{(\log z)^2}$
(e) $f(z) = i^{\cos z} \equiv e^{\cos z \, \log i}$
(f) $f(z) = z^{\operatorname{sen} z} \equiv e^{\operatorname{sen} z \log z}$
(g) $f(z) = i^{e^z} \equiv e^{e^z \log i}$

**19.** Sea $f(z)$ una función de variable compleja definida como

$$f(z) = 10^{e^z} \equiv e^{e^z \log 10},$$

donde se utiliza un rama tal que se satisface $|f'(i\pi/2)| = e^{-\pi}$. Determine $f'(z)$ y $f'(i)$.

**20.** Demostrar que la transformación $w = iz + i$ mapea el semiplano $x > 0$ sobre el semiplano $v > 1$.

**21.** Demostrar que si $c_1 < 0$, la imagen del semiplano $x < c_1$ bajo la transformación $w = 1/z$ es el interior de un círculo. ¿Cuál es la imagen cuando $c_1 = 0$?

**22.** Demostrar que la imagen del semiplano $y > c_2$ bajo la transformación $w = 1/z$ es el interior de un círculo, siempre y cuando $c_2 > 0$. Encontrar la imagen cuando $c_2 < 0$; también cuando $c_2 = 0$.

**23.** Sean $\alpha$ un número real y $z_0$ un número complejo tal que $\operatorname{Im} z_0 > 0$. Demostrar que el mapeo bilineal

$$w = e^{i\alpha}\left(\frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}\right),$$

transforma al semiplano superior $\operatorname{Im} z \geq 0$ sobre en el disco unitario $|w| < 1$.

**24.** Sean $\alpha$ un número real y $z_0$ un número complejo tal que $|z_0| \leq 1$. Demostrar que la transformación bilineal

$$w = e^{i\alpha}\left(\frac{z - z_0}{z\overline{z}_0 - 1}\right),$$

mapea el disco $|z| \leq 1$ sobre disco $|w| \leq 1$.

**25.** Sea $S$ el conjunto de números complejos que se muestra en la siguiente figura.

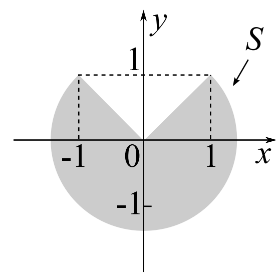



**Figura 2.13**. Conjunto $S$

Determine el transformado de $S$ bajo cada uno de los siguientes mapeos:

(a) $w = \dfrac{1}{z}$.

(b) $w = \dfrac{1 - z}{i + z}$.

(c) $w = \dfrac{i - z}{i + z}$.

(d) $w = \dfrac{z + 2}{z - 2i}$.

# Capítulo 3

# Series de Potencias y Singularidades Aisladas

En este capítulo se estudian los conceptos básicos de las series de números complejos, en particular, se estudia la representación en series de potencias de las funciones de variable compleja, hecho éste de gran importancia para la resolución de problemas en Ingeniería. Inicialmente se dan los conceptos de sucesión y series de números complejos; después, se describen las series de potencias y los desarrollos de Taylor y Laurent. Finalmente, se caracterizan los puntos singulares asilados de una función de variable compleja.

## 3.1 Serie de Números Complejos

**Definición 3.1** (Sucesión de números complejos)**.** El conjunto de números complejos $\{z_0, z_1, z_3, \ldots\}$, se denomina sucesión de números complejos, y se denota por $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$.

**Definición 3.2** (Sucesión convergente)**.** La sucesión de números complejos $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ tiene límite o converge a un número complejo $z$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número entero $N > 0$ tal que

$$|z_n - z| < \varepsilon \quad \text{siempre que } n \geq N.$$

Cuando la sucesión $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a $z$, se escribe

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z.$$

*Observación* 3.1. Para cada sucesión de números complejos $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$, existen sucesiones de números reales $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ tales que

$$z_n = x_n + i\, y_n, \qquad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

**Ejemplo 3.1.** Sea $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión de números complejos definida por

$$z_n = \frac{1}{(1+i)^n}.$$

Entonces, las sucesiones de números reales $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ tales que $z_n = x_n + i\,y_n$ están definidas como

$$x_n = 2^{-n/2}\cos(n\pi/4) \quad \text{y} \quad y_n = -2^{-n/2}\operatorname{sen}(n\pi/4).$$

El siguiente teorema permite estudiar la convergencia de las sucesiones de números complejos a través de la convergencia de sucesiones de números reales. La demostración de este teorema se obtiene inmediatamente de la definición de convergencia de sucesiones.

**Teorema 3.1.** *Sean* $z_n = x_n + i\,y_n$ *(*$n = 0, 1, 2, \ldots$*) con* $x_n, y_n \in \mathbb{R}$*, y* $z = x + i\,y$ *con* $x, y \in \mathbb{R}$*. Entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z$$

*si, y sólo si*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad y \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

**Ejemplo 3.2.** Determinar si la sucesión

$$z_n = \frac{1}{n} + i\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

converge y halle el límite si es el caso.

*Solución.* Se tiene que $z_n = x_n + i\,y_n$, donde

$$x_n = \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad y_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, y $\lim_{n\to\infty} y_n = 1$, entonces por el Teorema 3.1 la sucesión $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge y su límite es

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n = i.$$

$\Diamond$

**Definición 3.3** (Serie de Números Complejos)**.** La suma de los términos de una sucesión de números complejos $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$, se denomina *serie de números complejos*, esto es

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z_0 + z_1 + z_2 + \cdots$$

**Definición 3.4** (Serie Convergente)**.** Se dice que una serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *converge* a un número complejo $S$, si la sucesión

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} z_n$$

de sumas parciales converge a $S$; entonces se escribe

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = S.$$

*Observación* 3.2. Para toda serie de números complejos $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, siempre existen series de números reales $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ tales que $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + i \sum_{n=0}^{\infty} y_n$. A las series $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ normalmente se les denominan respectivamente parte real y parte imaginaria de $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$.

El hecho descrito en la observación anterior permite estudiar la convergencia de las series de números complejos a través de la convergencia de series de números reales. En el siguiente teorema se establece que una serie de números complejos converge si, y sólo si las series de su parte real y parte imaginaria convergen.

**Teorema 3.2.** *Sean $z_n = x_n + i\,y_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ con $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, y $S = X + i\,Y$ con $X, Y \in \mathbb{R}$. Entonces,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = S$$

*si, y sólo si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = X \qquad y \qquad \sum_{n=0}^{\infty} y_n = Y.$$

*Demostración.* Sean $\{X_N\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{X_N\}_{n=0}^{\infty}$ las sucesiones de sumas parciales definidas respectivamente por

$$X_N = \sum_{n=0}^{N} x_n \quad \text{y} \quad Y_N = \sum_{n=0}^{N} y_n.$$

Así,

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} z_n = \sum_{n=0}^{N} x_n + i \sum_{n=0}^{N} y_n = X_N + i\,Y_N.$$

Como

$$S = X + i\,Y = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} X_N + i \lim_{N\to\infty} Y_N$$

si, y sólo si

$$\lim_{N\to\infty} X_N = X \qquad y \qquad \lim_{N\to\infty} Y_N = Y,$$

entonces, podemos concluir que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge a $S = X + i\,Y$ si, y sólo si las series $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ convergen respectivamente a $X$ e $Y$. $\square$

### 3.1.1 Serie de Potencias

**Definición 3.5** (Serie de potencias)**.** Dada una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ de números complejos y $z_0 \in \mathbb{C}$, a la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{3.1}$$

se le llama *serie de potencias*, donde $z \in \mathbb{C}$. Los números $a_n$ se denominan coeficientes de la serie y $z_0$ se denomina centro de la serie.

El siguiente teorema da una idea completa del campo de convergencia de las series de potencias. La demostración de este teorema se puede apreciar en [5].

**Teorema 3.3** (Teorema de Cauchy-Hadamard)**.** *Consideremos la serie de potencias* (3.1)*. Sea* $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$*. Entonces: si* $\alpha = \infty$*, la serie es convergente en el único punto* $z = z_0$*; si* $0 < \alpha < \infty$*, la serie es absolutamente convergente en el círculo* $|z - z_0| < 1/\alpha$ *y es divergente en el exterior de este círculo; y si* $\alpha = 0$*, la serie es absolutamente convergente en todo el plano complejo.*

De este modo, cuando $0 < \alpha < \infty$, existe un círculo con centro en el punto $z = z_0$, en el interior del cual la serie (3.1) es absolutamente convergente y en el exterior del cual la serie es divergente. Éste se llama *círculo de convergencia* de la serie de potencias y su radio $R = 1/\alpha$, *radio de convergencia* de la misma. Los casos $\alpha = \infty$, y $\alpha = 0$ se pueden considerar como casos límites. En el primero de ellos el círculo de convergencia se reduce a un punto $z_0$ y su radio $R$ es igual a cero. En el segundo, el círculo de convergencia se extiende a todo el plano, de modo que se puede considerar que su radio es igual a $\infty$. Llamando en los tres casos al número $R$ radio de convergencia de la serie de potencias, el contenido de la fórmula de Cauchy-Hadamard puede expresarse por la fórmula

$$R = \frac{1}{\alpha}.$$

Esta última se llama *fórmula de Cauchy-Hadamard*. Para las aplicaciones de la fórmula de Cauchy-Hadamard, en muchos casos suele ser útil la relación siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}. \tag{3.2}$$

La demostración de esta relación se deja como ejercicio para el lector.

**Ejemplo 3.3.** Hallar el círculo y el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n.$$

*Solución.* Se tiene que

$$a_n = \frac{n^n}{n!} \quad \text{y} \quad z_0 = 0.$$

Ahora, utilizando la ecuación (3.2) obtenemos

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = e.$$

Por lo tanto, el radio de convergencia de la serie es

$$R = \frac{1}{e},$$

y el círculo de convergencia de la misma es

$$|z| < \frac{1}{e}.$$

◊

En muchos casos resulta conveniente determinar el radio de convergencia de una serie de potencias mediante el criterio del cociente, es decir, tomando

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Así, para la serie del Ejemplo 3.3 se tiene

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

por consiguiente, el radio de convergencia de la serie es $R = 1/e$.

**Ejemplo 3.4.** Determine el círculo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

También determine a qué converge esta serie.

*Solución.* Como $a_n = 1$, para $n \geq 0$, y $z_0 = 0$, entonces el radio de convergencia de la serie es $R = 1$ y su círculo de convergencia es $|z| < 1$. Ahora, para determinar a qué converge la serie dada consideremos la sucesión de sumas parciales

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^N = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}, \quad z \neq 1.$$

Por lo tanto, utilizando la ecuación anterior podemos escribir

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{N\to\infty} S_N(z) = \lim_{N\to\infty} \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}, \quad |z| < 1.$$

◊

### 3.1.2 Serie de Taylor

En esta parte se estudia una cualidad muy importante de las funciones analíticas, a saber: *toda función analítica se puede expresar como una serie de potencias que converge a dicha función en algún dominio.* En el siguiente teorema se establece que si una función $f(z)$ es analítica en un círculo centrado en un punto $z_0 \in \mathbb{C}$, entonces $f(z)$ se puede representar como una serie de potencias en dicho círculo. Para la descripción formal del resultado del siguiente teorema es necesario suponer que $f(z)$ es infinitamente diferenciable, lo cual, como veremos más adelante en el capítulo de Integración Compleja, es una propiedad que posee toda función analítica.

**Teorema 3.4** (Teorema de Taylor)**.**
*Si $f(z)$ es una función analítica en todo punto del disco $|z - z_0| < r_0$, entonces $f(z)$ se expresa como*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \tag{3.3}$$

*para $|z - z_0| < r_0$.*

*Observación* 3.3.

- El Teorema de Taylor garantiza que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ converge a $f(z)$ para todo $z$ tal que $|z - z_0| < r_0$.
- La serie de potencias (3.3) se denomina *desarrollo en serie de Taylor* o, simplemente, *desarrollo de Taylor* de $f(z)$ centrado en el punto $z_0$.
- Si $z_0 = 0$, entonces el desarrollo de Taylor adquiere la forma

  $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

  y se denomina *desarrollo de Maclaurin* de $f(z)$.

El siguiente teorema nos garantiza que el desarrollo de Taylor de una función $f(z)$ alrededor de $z_0$, es la única serie de potencias que converge a $f(z)$ en un disco centrado en $z_0$.

**Teorema 3.5.** *El desarrollo en serie de Taylor de una función $f(z)$ alrededor de $z_0$ es la única serie en potencias de $(z - z_0)$ que converge a $f(z)$ en todo punto de un disco centrado en $z_0$.*

*Observación* 3.4. Sean $f(z)$ y $g(z)$ funciones tales que su desarrollo de Taylor centrado en $z_0$ está dado respectivamente por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{para } z \text{ tal que } |z - z_0| < r_1,$$

y

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \quad \text{para } z \text{ tal que } |z - z_0| < r_2.$$

Entonces del desarrollo de Taylor de $f(z) + g(z)$ centrado en $z_0$ es

$$f(z) + g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) (z - z_0)^n, \quad \text{para } z \text{ tal que } |z - z_0| < r,$$

donde $r = \text{mín}(r_1, r_2)$.

El siguiente teorema nos permite calcular el radio de convergencia del mayor círculo para el cual existe la serie de Taylor de una función $f(z)$.

**Teorema 3.6.** *Consideremos el desarrollo en serie de Taylor* (3.3) *de una función* $f(z)$ *alrededor de* $z_0$. *El mayor círculo dentro del cual esta serie converge a* $f(z)$ *en cada punto es* $|z - z_0| < r$*, donde* $r$ *es la distancia entre* $z_0$ *y el punto singular de* $f(z)$ *más cercano.*

Obsérvese que este teorema no afirma que la serie de Taylor no converja fuera de $|z - z_0| = r$. Sólo asevera que éste es el mayor círculo en todo punto del cual la serie converge a $f(z)$. El círculo en todo punto del cual la serie de Taylor (3.3) converge a $f(z)$ y el círculo en todo punto del cual la serie converge no son necesariamente iguales. El segundo de ellos puede tener un radio mayor. No obstante, se puede mostrar que cuando el punto singular más cercano a $z_0$ es tal que $|f(z)|$ se hace infinito, los dos círculos coinciden. Éste es el caso en la mayor parte de las funciones que consideraremos.

**Ejemplo 3.5.** Comprobar cada uno de los siguientes desarrollos de Taylor.

a) $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, z^n, \quad |z| < \infty.$

b) $\operatorname{sen} z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1}, \quad |z| < \infty.$

c) $\cos z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, z^{2n}, \quad |z| < \infty.$

d) $\operatorname{senh} z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\, z^{2n+1}, \quad |z| < \infty.$

e) $\cosh z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\, z^{2n}, \quad |z| < \infty.$

f) $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.$

g) $\dfrac{1}{1+z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, z^n, \quad |z| < 1.$

h) $\dfrac{1}{z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, (z-1)^n, \quad |z-1| < 1.$

i) $\dfrac{1}{z(3-z)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left[(-1)^n + 2^{-(n+1)}\right] (z-1)^n, \quad |z-1| < 1.$

*Solución.* a) Se tiene que $f(z) = e^z$ es una función entera y $f^{(n)}(z) = e^z$. Así, por los Teoremas 3.4 y 3.6, el desarrollo de Maclaurin de $e^z$ es

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, z^n, \quad |z| < \infty.$$

b) Se tiene que $f(z) = \operatorname{sen} z$ es una función entera, además, $\operatorname{sen} z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$. De esta forma, utilizando el desarrollo de Macalurin de $e^z$ podemos escribir:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(iz)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-iz)^n}{2i} \\
&= \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(i^n - (-i)^n) z^n.
\end{aligned}$$

Ahora, utilizando la expresión anterior y el hecho que

$$(i^n - (-i)^n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par}, \\ 2i(-1)^m, & \text{si } n = 2m+1 \text{ es impar}, \end{cases}$$

obtenemos que el desarrollo de Macalurin de $\operatorname{sen} z$ es

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad |z| < \infty.$$

La verificación de c), d) y e), se deje como ejercicio pare el lector.

f) Se tiene que $f(z) = \frac{1}{1-z}$ es analítica en todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $z \neq 1$, entonces por el Teorema 3.6 el desarrollo de Maclaurin de $f(z) = \frac{1}{1-z}$ es válido para todo $|z| < 1$. Ahora, utilizando el procedimiento empleado en el Ejemplo 3.4 se tiene que el desarrollo de Maclaurin de $f(z) = \frac{1}{1-z}$ es

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.$$

g) Como $f(z) = \frac{1}{1+z}$ es analítica en todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $z \neq 1$, entonces por el Teorema 3.6 el desarrollo de Maclaurin de $f(z) = \frac{1}{1+z}$ es válido para todo $|z| < 1$. A continuación hallamos el desarrollo de Maclaurin de $f(z) = \frac{1}{1+z}$ empleando el desarrollo de Taylor de $\frac{1}{1-z}$ dado en f). Se tiene que

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1.$$

h) Aquí utilizamos el desarrollo de Taylor dado en g) para hallar el desarrollo de Taylor de $f(z) = 1/z$ centrado en $z_0 = 1$. Se tiene que

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n, \quad |z-1| < 1.$$

i) Para hallar el desarrollo de Taylor de $f(z) = \frac{1}{z(3-z)}$ centrado en $z_0 = 1$ utilizamos fracciones simples, desarrollos de Taylor conocidos y operaciones algebraicas simples. Se tiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z(3-z)} &= \frac{1/3}{z} + \frac{-1/3}{z-3} \\
&= \frac{1/3}{1+(z-1)} + \frac{-1/3}{(z-1)-2} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+(z-1)} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{(z-1)}{2}} \\
&= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} (-1)^n (z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} 2^{-(n+1)} (z-1)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left[ (-1)^n + 2^{-(n+1)} \right] (z-1)^n, \quad |z-1| < 1.
\end{aligned}
$$

$\Diamond$

### 3.1.3 Serie de Laurent

El desarrollo en *serie de Laurent* o, simplemente, *desarrollo de Laurent* de una función $f(z)$ centrado en el punto $z_0$ es de la forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

donde la serie converge a $f(z)$ en cierto dominio o región y $c_n \in \mathbb{C}$. Así pues, un desarrollo de Laurent, a diferencia del desarrollo de Taylor, puede contener uno o más términos con $(z - z_0)$ elevado a una potencia negativa. También puede contener potencias positivas de $(z - z_0)$.

Normalmente los desarrollos de Laurent se obtienen a partir de los desarrollos de Taylor. Por ejemplo, para encontrar el desarrollo de Laurent de $f(z) = e^{1/z}$ centrado en $z_0 = 0$, se considera el desarrollo de Maclaurin de $e^s$,

$$e^s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} s^n,$$

después, se hace $s = 1/z$ en la ecuación anterior para obtener

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}, \quad z \neq 0,$$

que es, efectivamente, el desarrollo de Laurent de $e^{1/z}$ centrado en $z_0 = 0$ y es válido en todo el plano complejo excepto en $z = 0$.

¿Qué clase de funciones pueden representarse por medio de series de Laurent y en qué región del plano complejo será válida dicha representación? La respuesta se encuentra en el siguiente teorema. Antes de dar el teorema, definiremos anillo o dominio anular.

**Definición 3.6** (Anillo o dominio anular)**.** Sean $r_1 > 0$ y $r_2 > 0$ tales que $r_1 < r_2$. Se denomina *anillo* o *dominio anular* centrado en $z_0 \in \mathbb{C}$, al conjunto de números complejos $z$ tales que $r_1 < |z - z_0| < r_2$.

**Teorema 3.7** (Teorema de Laurent)**.**
*Si $f(z)$ es una función analítica en el anillo $r_1 < |z - z_0| < r_2$, centrado en $z_0$, entonces $f(z)$ se puede expresar como*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, (z - z_0)^{-n},$$

*para todo $z$ tal que $r_1 < |z - z_0| < r_2$.*

*Observación* 3.5.

- El Teorema de Laurent garantiza que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, (z-z_0)^{-n}$ converge a $f(z)$ para todo $z$ tal que $r_1 < |z - z_0| < r_2$.

- Si $f(z)$ es analítica en todos los puntos de la región $|z - z_0| < r_2$, entonces el desarrollo de Laurent de $f(z)$ centrado en $z_0$, se convierte en el desarrollo de Taylor de $f(z)$ centrado en $z_0$.

- Si $f(z)$ es analítica en todos los puntos de la región $|z - z_0| < r_2$ excepto en en el punto $z_0$, entonces el desarrollo de Laurent es válido en toda la región $0 < |z - z_0| < r_2$.

- Los coeficientes de la serie de Laurent se pueden definir como una integral que involucra a la función $f(z)$. Este último hecho permite calcular integrales utilizando los resultados de series de potencias, lo cual se estudiará en el capítulo de Integración Compleja.

**Ejemplo 3.6.** Determine el desarrollo de Laurent en potencias de $z$ de la función

$$f(z) = \frac{1}{1+z}.$$

*Solución.* Observamos que el único punto singular de $f(z)$ es $z = 1$, entonces existen dos regiones donde $f(z)$ posee desarrollos de Laurent centrados en $z_0 = 0$, a saber: (a) $|z| < 1$, y (b) $|z| > 1$.

Como $f(z)$ es analítica en todo punto del disco $|z| < 1$, el desarrollo de Laurent de $f(z)$ centrado en $z_0 = 0$ válido en el dominio (a), coincide con su desarrollo de Maclaurin, es decir,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1.$$

Ahora bien, para determinar el desarrollo de Laurent de $f(z)$ centrado en $z_0 = 0$ válido en el dominio (b), procedamos de la siguiente manera:

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z^{-1}+1} = z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-(n+1)}, \quad |z^{-1}| < 1,$$

de donde se obtiene que el desarrollo de Laurent de $f(z)$ centrado en $z_0 = 0$ válido en el dominio (b) está dado por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-(n+1)}, \quad |z| > 1.$$

$\Diamond$

**Ejercicio 3.1.** Compruebe que todos los desarrollos de Laurent centrados en $z_0 = i$ de la función

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

están dados por:

- $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left[(1-i)^{-(n+1)} - (2-i)^{-(n+1)}\right](z-i)^n$, para $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z-i| < \sqrt{2}$,
- $f(z) = -\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1-i)^n (z-i)^{-(n+1)} - \sum_{n=0}^{\infty}(2-i)^{-(n+1)}(z-i)^n$, para $z \in \mathbb{C}$ tal que $\sqrt{2} < |z-i| < \sqrt{5}$,
- $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left[(2-i)^n - (1-i)^n\right](z-i)^{-(n+1)}$, para $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z-i| > \sqrt{5}$.

### 3.1.4 Propiedades Adicionales de las Series

#### Diferenciación término a término

Si una función $f(z)$ está representada con una serie de potencias en una región anular $R$, la serie que se obtiene por diferenciación término a término converge a $f'(z)$ dentro de $R$. Este procedimiento puede repetirse un número indefinido de veces.

Los siguientes ejemplos utilizan la propiedad de diferenciación término a término para encontrar desarrollos de Taylor.

**Ejemplo 3.7.** Usando el desarrollo de Taylor de $1/z$ centrado en $z_0 = 1$, obtenga el desarrollo de $1/z^2$ centrado en el mismo punto.

*Solución.* Primero determinemos el desarrollo de Taylor de $1/z$ centrado en $z_0 = 1$, luego diferenciando término a término el mismo obtendremos el desarrollo de $1/z^2$ centrado en $z_0 = 1$. Se tiene que

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n, \quad |z| < 1,$$

ahora, como

$$\frac{d}{dz}\frac{1}{z} = -\frac{1}{z^2},$$

entonces utilizando el desarrollo de Taylor de $1/z$ centrado en $z_0 = 1$, podemos escribir:

$$\frac{1}{z^2} = -\frac{d}{dz}\frac{1}{z} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dz}[(-1)^n(z-1)^n] = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}n\,(z-1)^{n-1}, \quad |z| < 1.$$

$\Diamond$

**Ejemplo 3.8.** Calcular el desarrollo de Maclaurin de

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

*Solución.* Se tiene que el desarrollo de Maclaurin de $1/(1-z)$ está dado por:

$$\frac{1}{(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.$$

Como

$$\frac{d}{dz}\frac{1}{(1-z)} = \frac{1}{(1-z)^2},$$

entonces utilizando el desarrollo de Maclaurin de $1/(1-z)$, podemos escribir:

$$\frac{z}{(1-z)^2} = z\frac{d}{dz}\frac{1}{(1-z)} = z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dz}z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n\,z^n, \quad |z| < 1.$$

$\Diamond$

## 3.2 Singularidades Aisladas

**Definición 3.7** (Punto singular aislado)**.** Se dice que $z_0 \in \mathbb{C}$ es un *punto singular aislado* de una función $f(z)$, si $z_0$ es un punto singular de $f(z)$ y, además, existe una vecindad de $z_0$ en todo punto de la cual $f(z)$ es analítica excepto en $z_0$.

**Ejemplo 3.9.** Cada punto $z_0$ indicado es un punto singular aislado de la función dada.

- $f(z) = \dfrac{1}{z}, \qquad z_0 = 0$
- $f(z) = \dfrac{z+1}{(z-1)(z-i)}, \qquad z_0 = 1,\ z_1 = i$
- $f(z) = \cot z, \qquad z_n = n\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**Ejemplo 3.10.** El punto $z_0 = 0$ no es un punto singular aislado de la función

$$f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(1/z)}.$$

**Ejercicio 3.2.** Verificar lo afirmado en los Ejemplos 3.9 y 3.10.

**Definición 3.8** (Parte principal)**.** Sea $z_0$ un punto singular aislado de $f(z)$. Sea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}, \quad 0 < |z - z_0| < r_0, \tag{3.4}$$

el desarrollo de Laurent de $f(z)$ centrado en $z_0$ válido en el anillo $0 < |z - z_0| < r_0$. Se denomina *parte principal* de $f(z)$ en $z_0$, a la parte del desarrollo de Laurent (3.4) que posee potencias negativas de $(z - z_0)$.

**Ejemplo 3.11.** Determine la parte principal de $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ en cada uno de sus puntos singulares.

*Solución.* Los puntos singulares aislados de $f(z)$ son $z_1 = 0$ y $z_2 = 1$. Como

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{-1}{z} + \frac{1}{(z-1)},$$

el desarrollo de Laurent de $f(z)$ centrado en $z_1 = 0$ válido en el anillo $0 < |z| < 1$, está dado por:

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{(1-z)} - \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)z^n + (-1)z^{-1}, \quad 0 < |z| < 1,$$

por lo tanto, la parte principal de $f(z)$ en $z_1 = 0$ es $(-1)z^{-1}$.

Ahora, el desarrollo de Laurent de $f(z)$ centrado en $z_2 = 1$ válido en el anillo $0 < |z - 1| < 1$, está dado por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z-1)} &= -\frac{1}{z} + \frac{1}{(z-1)} \\ &= -\frac{1}{1 + (z-1)} + (z-1)^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-1)^n + (z-1)^{-1}, \quad 0 < |z-1| < 1, \end{aligned}$$

por lo tanto, la parte principal de $f(z)$ en $z_2 = 1$ es $(z-1)^{-1}$. ◊

Los puntos singulares aislados se pueden caracterizar según la forma que adquiere la parte principal de la función en tales puntos. Se distinguen tres tipos de singularidades aisladas: polo de orden $m$, punto singular esencial y punto singular removible. A continuación se definen cada una de ellas.

### 3.2.1 Polo de Orden $m$

**Definición 3.9.** Sea $z_0$ un punto singular aislado de $f(z)$. Se dice que $z_0$ es un *polo de orden* $m$ de $f(z)$, si la parte principal de $f(z)$ en $z_0$ tiene un número finito de términos, esto es, el desarrollo de Laurent de $f(z)$ centrado en $z_0$, válido en el anillo $0 < |z - z_0| < r_0$, tiene la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m},$$

donde $b_m \neq 0$ y $b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = 0$. Los polos de orden $m = 1$ se llaman *polos simples.*

La definición anterior nos indica que para determinar si $z_0$ es un polo de $f(z)$, se debe observar el desarrollo de Laurent de $f(z)$ centrado en $z_0$; pero este procedimiento no es práctico. Existen otros procedimientos más adecuados para verificar si un punto es o no un polo. El siguiente teorema nos da un procedimiento para determinar si un punto es o no un polo de una función sin construir su serie Laurent.

**Teorema 3.8.** *Si $f(z)$ tiene un polo en $z_0$, entonces* $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$.

*Demostración.* Como $z_0$ es un polo de orden $m$ de $f(z)$, el desarrollo de Laurent de $f(z)$ centrado en $z_0$, válido en el anillo $0 < |z - z_0| < r_0$, tiene la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m},$$

donde $b_m \neq 0$. Multiplicando en ambos lados de la ecuación anterior por $(z - z_0)^m$ tenemos

$$(z - z_0)^m f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+m} + b_1(z - z_0)^{m-1} + b_2(z - z_0)^{m-2} + \cdots + b_m,$$

de lo cual se deduce que

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = b_m \neq 0, \infty. \tag{3.5}$$

Como $\lim_{z \to z_0} |(z - z_0)^m| = 0$, entonces por (3.5) se tiene que $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$. $\square$

El teorema anterior no solo nos permite identificar si un punto es un polo, sino también el orden del mismo. Basándose en este teorema y, particularmente, en la ecuación (3.5), las siguientes reglas nos permiten identificar si un punto singular aislado $z_0$ es un polo y, además, calcular el orden del mismo.

**Regla I** Si existe el $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z)$ y si dicho límite no es cero ni infinito, entonces $z_0$ es un polo de orden $m$ de $f(z)$.

**Regla II** Si $z_0$ es un polo es un polo de orden $m$ de $f(z)$, entonces

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z) = \begin{cases} 0, & \text{si } n > m, \\ \infty, & \text{si } n < m. \end{cases}$$

**Ejemplo 3.12.** Sea $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$. Probar que 0 y 1 son polos simples de $f(z)$.

*Solución.* Utilicemos el Teorema 3.8 y las Reglas I y II, para determinar que los puntos 0 y 1 son polos simples de $f(z)$. Se tiene que

$$\lim_{z\to 0}|f(z)| = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{z\to 1}|f(z)| = \infty,$$

luego 0 y 1 son polos de $f(z)$. Además,

$$\lim_{z\to 0} z^n\, f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z^{n-1}}{(z-1)} = \begin{cases} 0, & \text{si } n > 1, \\ -1, & \text{si } n = 1, \\ \infty, & \text{si } n < 1, \end{cases}$$

y

$$\lim_{z\to 1}(z-1)^n\, f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)^{n-1}}{z} = \begin{cases} 0, & \text{si } n > 1, \\ 1, & \text{si } n = 1, \\ \infty, & \text{si } n < 1. \end{cases}$$

Por lo tanto, 0 y 1 son polos simples de $f(z)$. ♢

Es común encontrarse con problemas en los que se quiere determinar el orden de los polos de una función de la forma $f(z) = p(z)/q(z)$, por ello les dedicaremos una atención especial. El siguiente teorema nos permite identificar si un punto es un polo y, además su orden, para una función $f(z) = p(z)/q(z)$.

**Teorema 3.9.** *Sea $z_0 \in \mathbb{C}$. Sea $f(z)$ una función tal que se puede escribir como*

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

*donde $p(z)$ y $q(z)$ son analíticas en $z_0$ y $p(z_0) \neq 0$. Entonces, $z_0$ es un polo de orden $m$ de $f(z)$ si, y sólo si*

$$q(z_0) = q'(z_0) = \cdots = q^{(m-1)}(z_0) = 0$$

*y*

$$q^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

*Demostración.* ($\Rightarrow$) Supongamos que $z_0$ es un polo de orden $m$ de $f(z)$ y demostremos que $q(z_0) = q'(z_0) = \cdots = q^{(m-1)}(z_0) = 0$ y $q^{(m)}(z_0) \neq 0$. Como $z_0$ es un polo de orden $m$ de $f(z)$, el desarrollo de Laurent de $f(z)$ centrado en $z_0$, válido en el anillo $0 < |z - z_0| < r_0$, tiene la forma

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m},$$

donde $b_m \neq 0$. Como $q(z)$ es analítica en $z_0$, entonces posee desarrollo de Taylor centrado en $z_0$ de la forma

$$q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Luego, obtenemos que

$$\begin{aligned} p(z) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \cdots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m} \right) \\ &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \right) + \sum_{k=1}^{m} b_k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-k}. \end{aligned}$$

Como $p(z)$ es analítica en $z_0$, entonces la expresión anterior es el desarrollo de Taylor de $p(z)$ centrado $z_0$, por lo que no puede tener potencias negativas de $(z - z_0)$. Para que esto se satisfaga se debe cumplir que $q(z_0) = q'(z_0) = \cdots = q^{(m-1)}(z_0) = 0$. Además, haciendo $z = z_0$ en el desarrollo de Taylor de $p(z)$ obtenemos

$$p(z_0) = b_m \frac{q^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0,$$

de donde se deduce que $q^{(m)}(z_0) \neq 0$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $q(z_0) = q'(z_0) = \cdots = q^{(m-1)}(z_0) = 0$ y $q^{(m)}(z_0) \neq 0$, y demostremos que $z_0$ es un polo de orden $m$ de $f(z)$. Como $p(z)$ y $q(z)$ son analíticas en $z_0$ con $p(z_0) \neq 0$ y $q(z_0) = 0$, entonces $z_0$ es un punto singular aislado de $f(z)$. Ahora utilizando el desarrollo de Taylor de $q(z)$ centrado en $z_0$ se tiene que

$$\frac{q(z)}{(z - z_0)^m} = \frac{q^{(m)}(z_0)}{m!} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{q^n(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-m},$$

por tanto,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{q(z)}{(z - z_0)^m} = \frac{q^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0, \infty,$$

lo cual implica que

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = \left( \lim_{z \to z_0} p(z) \right) \left( \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)^m}{q(z)} \right) \neq 0, \infty.$$

Lo anterior indica que $z_0$ es un polo de orden $m$ de $f(z)$. □

**Ejemplo 3.13.** Verificar que todos los puntos singulares aislados de la función

$$f(z) = \frac{e^z}{\operatorname{sen} z}$$

son polos simples.

*Solución.* Se tiene que $f(z) = p(z)/q(z)$, donde $p(z) = e^z$ y $q(z) = \operatorname{sen} z$. Ahora, los puntos singulares aislados de $f(z)$ son: $z_n = n\pi$, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Como $p(z_n) \neq 0$, $q(z_n) = 0$ y $q'(z_n) = \cos(n\pi) \neq 0$, para todo $n$, entonces por el Teorema 3.9 todos los puntos singulares de $f(z)$ son polos simples. ♢

**Ejercicio 3.3.** Verifique la existencia de los polos y el orden de los mismos para cada una de las funciones dadas.

a) El punto $z_0 = 0$ es un polo de orden $m = 2$ de la función $f(z) = \dfrac{1}{z(e^z - 1)}$.

b) Los puntos $z_0 = 3i$ y $z_1 = -3i$ son polos simples de la función $f(z) = \dfrac{(z+1)}{(z^2+9)}$.

c) El punto $z_0 = 2$ es un polo simple de la función $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z + 3}{(z-2)}$.

d) El punto $z_0 = 0$ es un polo de orden $m = 3$ de la función $f(z) = \dfrac{\operatorname{senh} z}{z^4}$.

### 3.2.2 Punto Singular Esencial

**Definición 3.10.** Sea $z_0$ un punto singular aislado de $f(z)$. Se dice que $z_0$ es un *punto singular esencial* de $f(z)$, si la parte principal de $f(z)$ en $z_0$ tiene un número infinito de términos diferentes de cero.

De la definición de punto singular esencial, se deduce que $z_0$ es un punto singular esencial de $f(z)$ si, y sólo si $\lim_{z \to z_0} f(z)$ no existe (ni finito ni infinito). De esta forma, para determinar si un punto singular aislado $z_0$ es o no un punto singular esencial de $f(z)$, no es necesario construir el desarrollo de Laurent de $f(z)$ alrededor de $z_0$.

**Ejemplo 3.14.** Verificar que $z_0 = 0$ es un punto singular esencial de $f(z) = e^{1/z}$.

*Solución.* El desarrollo de Laurent de $e^{1/z}$ centrado en $z_0 = 0$ es

$$e^{1/z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\, z^{-n}, \quad |z| > 0.$$

Se observa que la parte principal de $e^{1/z}$ en $z_0 = 0$ tiene un número infinito de términos diferentes de cero; por lo tanto, $z_0 = 0$ es un punto singular esencial de $e^{1/z}$.

Otra manera de ver que $z_0 = 0$ es un punto singular esencial de $e^{1/z}$, es probar que el límite, $\lim_{z\to 0} e^{1/z}$, no existe. Si nos acercamos al origen por la recta $y = 0$, $x > 0$, obtenemos que

$$\lim_{z\to 0} e^{1/z} = \lim_{x \to 0} e^{1/x} = \infty.$$

Ahora, si nos acercamos al origen por la recta $x = 0$, tenemos que

$$e^{1/z} = \cos(1/y) - i \operatorname{sen}(1/y),$$

que es un número complejo de módulo 1 para todo valor de $y$. Por lo tanto, el límite $\lim_{z\to 0} e^{1/z}$ no existe. $\Diamond$

### 3.2.3 Punto Singular Removible

**Definición 3.11.** Sea $z_0$ un punto singular aislado de $f(z)$. Se dice que $z_0$ es un *punto singular removible* de $f(z)$, si todos los coeficientes de la parte principal de $f(z)$ en $z_0$ son cero.

Si $z_0$ es un punto singular removible de $f(z)$, el desarrollo de Laurent de $f(z)$ centrado en $z_0$, válido en el anillo $0 < |z - z_0| < r_0$, tiene la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

de donde se deduce que

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = a_0.$$

Por lo tanto, para determinar si un punto singular aislado $z_0$ es un punto singular removible de $f(z)$, basta con verificar que el $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existe y es finito.

**Ejemplo 3.15.** Verificar que $z_0 = 0$ es un punto singular removible de $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$.

*Solución.* Se tiene que

$$\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = \lim_{z\to 0} \cos z = 1,$$

por tanto, $z_0 = 0$ es un punto singular removible de $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$. $\Diamond$

## 3.3 Ejercicios Propuestos

**1.** Determine el dominio de convergencia de cada una de las siguientes series:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [3 + (-1)^n z^n]$

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$

(h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \cos(in) z^n$

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n, \quad a \in \mathbb{R}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^n n^3}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(z+2)^n}{2^n}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$

**2.** Encuentre todas las representaciones en serie de potencias de $(z - z_0)$ para cada una de las siguientes funciones, según el centro $z_0$ dado, y clasifique de Taylor o Laurent según corresponda:

(a) $f(z) = 1/z, \quad$ para $z_0 = 2i$.

(b) $f(z) = \dfrac{1}{z}, \quad$ para $z_0 = 1$.

(c) $f(z) = \dfrac{1}{z-3}, \quad$ para $z_0 = 2$.

(d) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}, \quad$ para $z_0 = 0$.

(e) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2}, \quad$ para $z_0 = 0$.

(f) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+4z+3}, \quad$ para $z_0 = -1$.

(g) $f(z) = z^3 e^{1/z}, \quad$ para $z_0 = 0$.

(h) $f(z) = \dfrac{z}{3z - z^2 - 2}, \quad$ para $z_0 = -1$.

(i) $f(z) = \dfrac{z+1}{(z-1)^2(z+3)}, \quad$ para $z_0 = -3$.

(j) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2}$, para $z_0 = 0$.

(k) $f(z) = z^3 \cos\left(\dfrac{1}{z-2}\right)$, para $z_0 = 2$.

(l) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(2z)}{(z+1)^3}$, para $z_0 = -1$.

(m) $f(z) = (1 + z + z^2)e^{1/(z-1)}$, para $z_0 = 1$.

**3.** Encuentre los ceros y singularidades de las siguientes funciones complejas. Clasifique las singularidades encontradas.

(a) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z^2 - 4z + 5)}$.

(b) $f(z) = \dfrac{z + i}{z^3 + z^2 - 8z - 12}$.

(c) $f(z) = \dfrac{z - 1}{z^4 - z^2(1 + i) + i}$.

(d) $f(z) = \dfrac{\cos(z - 1)}{z^4 - z^2(1 + i) + i}$.

(e) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2}$.

(f) $f(z) = z^3 e^{1/z}$.

(g) $f(z) = \dfrac{z}{\operatorname{sen} z}$.

(h) $f(z) = \dfrac{e^z}{z(1 - e^{-z})}$

# Capítulo 4

# Integración Compleja

La integración de funciones de variable compleja es una herramienta esencial para el desarrollo teórico de las ideas del cálculo operacional, en particular, el estudio de las transformadas de Laplace, Fourier y Z, que son temas indispensables para la compresión de ciertos conceptos estudiados en Ingeniería Eléctrica. En este capítulo se describen los conceptos básicos de la integración compleja, comenzando con la integral definida, pasando luego por la integral de línea, el Teorema de Cauchy-Goursat y la primitiva de una función, para finalizar con el Teorema de los Residuos.

## 4.1 Integral Definida

Sea $F(t)$ una función de variable real con valores complejos definida como

$$F(t) = U(t) + i\,V(t),$$

donde $U : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $V : [a,b] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas a trozos definidas en el intervalo acotado y cerrado $a \leq t \leq b$. Bajo estas condiciones, la función $F$ es continua a trozos y la *integral definida* de $F(t)$ en el intervalo $a \leq t \leq b$ se define como:

$$\int_a^b F(t)\,dt = \int_a^b U(t)\,dt + i\int_a^b V(t)\,dt$$

y se dice que $F(t)$ es *integrable* en $[a,b]$.

#### Propiedades de la Integral Definida

Sean $F(t) = U(t)+i\,V(t)$, $F_1(t) = U_1(t)+i\,V_1(t)$ y $F_2(t) = U_2(t)+i\,V_2(t)$, integrables en $[a,b]$. A partir de la definición de integral definida se deducen fácilmente las siguientes propiedades:

i) $\operatorname{Re}\left[\int_a^b F(t)\,dt\right] = \int_a^b \operatorname{Re}[F(t)]\,dt.$

ii) $\operatorname{Im}\left[\int_a^b F(t)\,dt\right] = \int_a^b \operatorname{Im}[F(t)]\,dt.$

iii) $\displaystyle\int_a^b c\,F(t)\,dt = c\int_a^b F(t)\,dt$, para todo $c \in \mathbb{C}$.

iv) $\displaystyle\int_a^b [F_1(t)+F_2(t)]\,dt = \int_a^b F_1(t)\,dt + \int_a^b F_2(t)\,dt$.

v) $\displaystyle\left|\int_a^b F(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |F(t)|\,dt$.

**Ejercicio 4.1.** Demostrar las propiedades de la integral definida.

**Ejemplo 4.1.** Calcular la integral

$$\int_0^{\pi/4} e^{it}\,dt.$$

*Solución.* Como $e^{it} = \cos t + i\,\mathrm{sen}\,t$, se tiene que

$$\int_0^{\pi/4} e^{it}\,dt = \int_0^{\pi/4} \cos t\,dt + i\int_0^{\pi/4} \mathrm{sen}\,t\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

$\Diamond$

## 4.2 Integración de Línea

### 4.2.1 Contornos

A continuación presentamos conjuntos de puntos muy particulares denominados contornos que nos permitirán estudiar la integral de una función de variable compleja.

**Definición 4.1** (Curva)**.** Una *curva* $C$ es un conjunto de puntos $z = x + i\,y$ en el plano complejo tales que $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(a \leq t \leq b)$, donde $x(t)$ y $y(t)$ son funciones continuas en el intervalo $[a,b]$. Los puntos de $C$ se pueden describir mediante la función continua

$$z(t) = x(t) + i\,y(t) \qquad (a \leq t \leq b)$$

denominada *parametrización* de $C$.

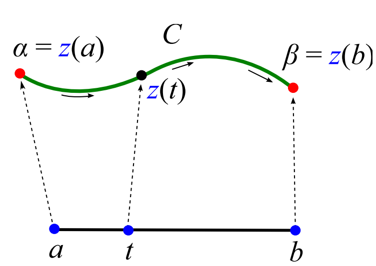


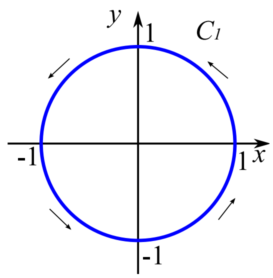

**Figura 4.1**. Gráfica de una curva $C$

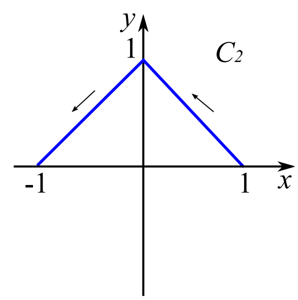
En la Figura 4.1 se aprecia la representación gráfica de una curva. El valor $\alpha = z(a)$ se denomina *extremo inicial* de $C$ y $\beta = z(b)$ *extremo final*. Además, si $x(t)$ y $y(t)$ son funciones diferenciables, entonces la función $z(t) = x(t) + i\, y(t)$ es diferenciable, cuya derivada está dada por

$$z'(t) = x'(t) + i\, y'(t) \qquad (a \leq t \leq b).$$

**Definición 4.2** (Curva suave)**.** Una curva $C$ se llama *curva suave*, si $z'(t)$ existe, es continua y nunca se hace cero en el intervalo $a \leq t \leq b$.

**Ejemplo 4.2.** A continuación se muestran las gráficas de las curvas $C_1$ y $C_2$, y sus respectivas parametrizaciones $z_1(t)$ y $z_2(t)$. La curva $C_1$ es suave, en cambio la curva $C_2$ no es suave (se deja al lector verificar esta aseveración).



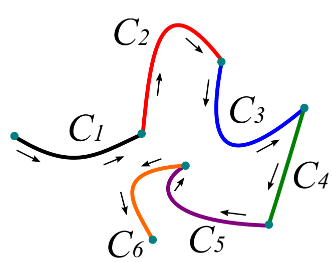




$$z_1(t) = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$z_2(t) = \begin{cases} -t + i(1+t), & -1 \leq t \leq 0, \\ -t + i(1-t), & 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

**Definición 4.3** (Contorno)**.** Un *contorno* o *curva suave a tramos*, es una curva que consta de un número finito de curvas suaves unidas por sus extremos.

**Ejemplo 4.3.** Seguidamente se aprecia una representación gráfica de un contorno conformado por seis curvas suaves $C_1, C_2, \ldots, C_6$.




**Definición 4.4** (Contorno cerrado simple)**.** Se dice que una curva $C$ es un *contorno cerrado simple*, si $C$ es un contorno y $z(a) = z(b)$ y $z(t_1) \neq z(t_2)$ para todo $t_1 \neq t_2 \in (a, b)$.

**Ejemplo 4.4.** En la siguiente gráfica se muestran dos curvas $C$ y $S$. La curva $C$ es un contorno cerrado simple, en cambio $S$ no lo es.


*Observación* 4.1. A todo contorno $C$ representado por la ecuación

$$z(t) = x(t) + i\,y(t) \qquad (a \le t \le b)$$

se le asocia el contorno $-C$, el cual está definido por la ecuación $z = z(-t)$, donde $-b \le t \le -a$. Gráficamente, el contorno $-C$ es el mismo contorno $C$ pero recorrido en sentido contrario.

### 4.2.2 Integral de Línea

Sean $f(z)$ una función y $C$ un contorno representado por la ecuación

$$z(t) = x(t) + i\,y(t) \qquad (a \le t \le b),$$

con extremo inicial $\alpha = z(a)$ y extremo final $\beta = z(b)$. Supongamos que $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es continua a trozos en $C$, es decir, las partes real e imaginaria, $u(x(t),y(t))$ y $v(x(t),y(t))$, de $f(z(t))$ son funciones de $t$ continuas a trozos. Bajo estas condiciones, se define la *integral de línea* de $f(z)$ a lo largo de $C$ como:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt,$$

donde $z'(t) = x'(t) + i\,y'(t)$.

#### Propiedades de las Integrales de Línea

Sean $f(z)$ y $g(z)$ funciones de variable compleja continuas a trozos sobre un contorno $C$ descrito por la ecuación $z(t) = x(t) + i\,y(t)$ $(a \le t \le b)$. A partir de la definición de integral de línea se deducen fácilmente las siguientes propiedades.

i) $\displaystyle\int_C k\,f(z)\,dz = k\int_C f(z)\,dz$, para $k \in \mathbb{C}$.

ii) $\displaystyle\int_C [f(z) + g(z)]\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz$.

iii) $\displaystyle\int_{-C} f(z)\,dz = \int_{-b}^{-a} f(z(-t))\,z'(-t)\,dt = -\int_C f(z)\,dz.$

iv) Si $C$ consta de una curva $C_1$ desde $\alpha_1$ hasta $\beta_1$ y de la curva $C_2$ desde $\alpha_2$ hasta $\beta_2$, donde $\alpha_2 = \beta_1$, se cumple:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

v) $\displaystyle\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq \int_a^b |f(z(t))\,z'(t)|\,dt.$

**Ejercicio 4.2.** Demostrar las propiedades de la integral de línea.

**Ejemplo 4.5.** Calcular la integral

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\,dz,$$

donde $|z| = 1$ es la circunferencia de centro 0 y radio 1, recorrida en sentido positivo.

*Solución.* Una parametrización de la circunferencia $|z| = 1$ es:

$$z(t) = e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t, \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Así,

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}}\,ie^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

$\diamondsuit$

**Ejemplo 4.6.** Calcular la integral

$$\int_C (z-i)\,dz,$$

donde $C$ es el contorno descrito por la ecuación

$$z(t) = \begin{cases} -t + i(1+t), & -1 \leq t \leq 0, \\ -t + i(1-t), & 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

*Solución.* Utilizando la propiedad iv) de la integral de línea podemos escribir:

$$\begin{aligned}
\int_C (z-i)\,dz &= \int_{-1}^0 (-t + i(1+t) - i)\,(-1+i)\,dt + \int_0^1 (-t + i(1-t) - i)\,(-1-i)\,dt \\
&= (-1+i)\int_{-1}^0 t(-1+i)\,dt + (-1-i)\int_0^1 t(-1-i)\,dt \\
&= (-1+i)^2 \int_{-1}^0 t\,dt + (-1-i)^2 \int_0^1 t\,dt \\
&= -2i \cdot \frac{-1}{2} + 2i \cdot \frac{1}{2} = 2i.
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

## 4.3 Teorema de Cauchy-Goursat

El siguiente resultado se conoce como Teorema de Cauchy-Goursat.

**Teorema 4.1** (Teorema de Cauchy-Goursat)**.**
*Sea $C$ un contorno cerrado simple. Sea $f(z)$ una función analítica sobre y en el interior de $C$. Entonces,*

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

El Teorema de Cauchy-Goursat es uno de los resultados más importantes en la teoría de variable compleja. Una de las razones es que puede ahorrarnos una gran cantidad de trabajo al realizar cierto tipo de integraciones. Por ejemplo, integrales como

$$\int_C \operatorname{sen} z\,dz, \quad \int_C \cosh z\,dz \quad \text{y} \quad \int_C e^z\,dz$$

deben anularse si $C$ es un contorno cerrado simple cualquiera. En todos estos casos, el integrando es una función entera.

Obsérvese que la dirección de integración en la ecuación $\int_C f(z)\,dz = 0$ no afecta el resultado pues

$$\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz.$$

El siguiente ejemplo verifica la validez del Teorema de Cauchy-Goursat.

**Ejemplo 4.7.** Verifique que

$$\int_C z^n\,dz = 0,$$

donde $n$ es un entero positivo y $C$ es la circunferencia $|z| = r$, con $r > 0$.

*Solución.* Como $n > 0$, la función $f(z) = z^n$ es entera, luego por el Teorema de Cauchy-Goursat

$$\int_C z^n\,dz = 0.$$

Veamos que esto es efectivamente cierto. Una parametrización de $|z| = r$ es:

$$z(t) = r\,e^{it}, \quad (0 \leq t \leq 2\pi),$$

así,

$$\begin{aligned}
\int_C z^n\,dz &= \int_0^{2\pi} (r\,e^{it})^n\,(ir\,e^{it})\,dt \\
&= ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{(n+1)it}\,dt \\
&= ir^{n+1} \int_0^{2\pi} [\cos((n+1)t) + i \operatorname{sen}((n+1)t)]\,dt \\
&= ir^{n+1} \left[ \frac{\operatorname{sen}((n+1)t) - i\cos((n+1)t)}{(n+1)} \right]\Bigg|_0^{2\pi} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Luego, hemos verificado el Teorema de Cauchy-Goursat para un caso particular. ◊

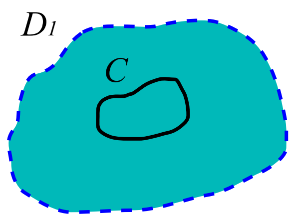
### 4.3.1 Extensión del Teorema de Cauchy-Goursat

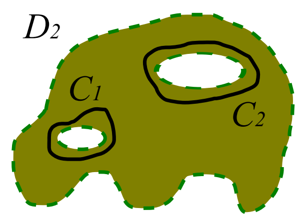
Pasemos ahora a describir la extensión del Teorema de Cauchy-Goursat. Para ello necesitamos definir algunos dominios muy particulares.

**Definición 4.5** (Dominio simplemente conexo)**.** Un dominio $D$ se dice *simplemente conexo* si todo contorno cerrado simple dentro del mismo encierra sólo puntos de $D$.

**Definición 4.6** (Dominio multiplemente conexo)**.** Un dominio $D$ se dice multiplemente conexo si no es simplemente conexo.

**Ejemplo 4.8.** En la siguiente gráfica se muestran dos dominios $D_1$ y $D_2$, y tres contornos cerrados simples $C$, $C_1$ y $C_2$. El Dominio $D_1$ es simplemente conexo, en cambio $D_2$ es multiplemente conexo.




El Teorema de Cauchy-Goursat se puede extender para dominios simplemente conexos.

**Teorema 4.2.** *Si $f(z)$ es analítica en un dominio simplemente conexo $D$, entonces para todo contorno cerrado simple $C$, dentro de $D$, se cumple*

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

De igual forma, el Teorema de Cauchy-Goursat se puede extender para dominios multiplemente conexos.

**Teorema 4.3.** *Se denota a $C$ como un contorno cerrado simple y a $C_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ como un número finito de contornos cerrados simples interiores a $C$ tales que los conjuntos interiores a cada $C_j$ no tienen puntos en común. $R$ es la región cerrada que consta de todos los puntos dentro y sobre $C$ excepto los puntos interiores a cada $C_j$ ($R$ es un dominio multiplemente conexo). Se denota por $B$ la frontera completa orientada de $R$ que consta de $C$ y todos los $C_j$, descrita en una dirección tal que los puntos de $R$ se encuentran a la izquierda de $B$. En este caso, si una función $f(z)$ es analítica en $R$, entonces*

$$\int_B f(z)\,dz = 0.$$

El siguiente ejemplo aclara el significado de este teorema.

**Ejemplo 4.9.** Pruebe que

$$\int_B \frac{dz}{z^2(z^2-1)} = 0,$$

donde $B$ consta de la circunferencia $|z| = 2$ descrita en la dirección positiva, y de las circunferencias $|z+1| = 1/2$, $|z| = 1/2$ y $|z-1| = 1/2$, descritas en la dirección negativa.

*Solución.* Sea $R$ la región cerrada que consta de todos los puntos dentro y sobre $|z| = 2$ excepto los puntos interiores a $|z+1| = 1/2$, $|z| = 1/2$ y $|z-1| = 1/2$. El integrando es analítico excepto en los puntos $z = 0$ y $z = \pm 1$, y estos tres puntos no pertenecen a $R$. Por lo tanto, aplicando el Teorema 4.3 concluimos que

$$\int_B \frac{dz}{z^2(z^2-1)} = 0.$$

$\diamond$

## 4.4 Integral Definida

El Teorema de Cauchy-Goursat es una herramienta valiosa cuando se trata de integrar una función analítica alrededor de un contorno cerrado. En caso de que el contorno no sea cerrado, existen métodos que se pueden deducir a partir de dicho teorema y que facilitan el cálculo de la integral considerada.

El siguiente teorema se conoce como principio de independencia de la trayectoria.

**Teorema 4.4** (Principio de independencia de la trayectoria)**.**
*Sea $f(z)$ analítica en un dominio simplemente conexo $D$ y sean $z_1, z_2 \in D$. Entonces, el valor de la integral*

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz$$

*no depende del contorno, dentro de $D$, utilizado para ir de $z_1$ a $z_2$.*

*Demostración.* Sea $D$ un dominio simplemente conexo y $C_1$ y $C_2$ dos contornos en $D$ sin intersección que van de $z_1$ a $z_2$. Se tiene que los contornos $C_1$ y $-C_2$ forman un contorno cerrado simple, que denominamos $C$. Luego, por el Teorema de Cauchy-Goursat

$$\int_C f(z)\, dz = 0,$$

pero

$$\int_C f(z)\, dz = \int_{C_1} f(z)\, dz + \int_{-C_2} f(z)\, dz = \int_{C_1} f(z)\, dz - \int_{C_2} f(z)\, dz,$$

por lo tanto,

$$\int_{C_1} f(z)\, dz = \int_{C_2} f(z)\, dz,$$

lo cual indica que la integral desde $z_1$ hasta $z_2$ es así independiente del contorno seguido, en tanto ese contorno se encuentre dentro de $D$. $\square$

Del principio de la independencia de la trayectoria podemos definir la primitiva de una función de variable compleja.

**Definición 4.7** (Integral indefinida o primitiva)**.** Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio simplemente conexo $D$. Sea $z_0 \in D$. La función $F(z)$ definida en $D$ por

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)\, ds + c, \tag{4.1}$$

donde $c \in \mathbb{C}$, se denomina *integral indefinida* o *primitiva* de $f(z)$.

En realidad $f(z)$ posee un número infinito de primitivas. Dichas primitivas difieren en valores constantes y son analíticas en $D$, y satisfacen

$$F'(z) = f(z), \quad \text{para todo } z \in D.$$

Usamos la integral indefinida

$$\int f(z)\, dz$$

para indicar todas las posibles primitivas de $f(z)$. El valor de la constante correspondiente a una primitiva específica

$$\int_{z_0}^{z} f(s)\, ds$$

queda determinado por el límite de integración inferior como se muestra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 4.10.** a) Encuentre las primitivas de $f(z) = z \operatorname{sen} z$.

b) Encuentre la primitiva necesaria para calcular la integral $\int_{\pi}^{\pi/2} z \operatorname{sen} z\, dz$ y halle el valor de la integral.

*Solución.* a) Usando integración por partes obtenemos

$$\int z \operatorname{sen} z\, dz = -z\, \cos z + \int \cos z\, dz = -z\, \cos z + \operatorname{sen} z + c = F(z).$$

b) Usando el resultado de a) tenemos

$$\int_{\pi}^{z} s \operatorname{sen} s\, ds = -z\, \cos z + \operatorname{sen} z + c.$$

Para determinar el valor de $c$ observemos que el lado izquierdo de esta ecuación es cero cuando $z = \pi$. Por lo tanto,

$$0 = -\pi\, \cos \pi + \operatorname{sen} \pi + c,$$

de donde se deduce que $c = -\pi$. De esta forma,

$$\int_{\pi}^{z} s \operatorname{sen} s\, ds = -z\, \cos z + \operatorname{sen} z - \pi.$$

Utilizando esta última ecuación tenemos que

$$\int_{\pi}^{\pi/2} z \operatorname{sen} z\, dz = -(\pi/2)\, \cos(\pi/2) + \operatorname{sen}(\pi/2) - \pi = 1 - \pi.$$

$\diamondsuit$

De la ecuación (4.1) se infiere que una integral definida se puede evaluar como el cambio en el valor de la integral indefinida, como en el cálculo elemental

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\, dz = F(\beta) - F(\alpha) = F(z)\Big|_{\alpha}^{\beta}.$$

## 4.5 Fórmula Integral de Cauchy

En esta sección veremos que si una función es analítica en un punto, sus derivadas de todos los órdenes existen en ese punto y son también analíticas ahí. Previo a este resultado veremos un resultado curioso que se obtiene a través del Teorema de Cauchy-Goursat. Si consideramos una función analítica sobre y en el interior de un contorno cerrado simple, basta con conocer los valores que ella toma sobre ese contorno, para determinar los valores que toma en el interior del mismo. Este resultado se conoce como *fórmula integral de Cauchy*.

**Teorema 4.5** (Fórmula Integral de Cauchy)**.**
*Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio simplemente conexo $D$. Sea $C$ un contorno cerrado simple $C$ dentro de $D$. Sea $z_0 \in D$ interior a $C$. Entonces,*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}\,dz. \tag{4.2}$$

La fórmula (4.2) se denomina *fórmula integral de Cauchy*. El siguiente ejemplo aclara el uso de esta fórmula en la evaluación de integrales.

**Ejemplo 4.11.** Hallar el valor de la integral

$$\int_{|z-i|=2} \frac{1}{z^2+4}\,dz.$$

*Solución.* Factorizando el integrando tenemos

$$\frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{(z-2i)(z+2i)}.$$

Observamos que el factor $(z-2i)$ se anula dentro del contorno de integración y que $(z+2i)$ no se anula ni sobre el contorno ni en su interior. Escribiendo la integral considerada en la forma

$$\int_{|z-i|=2} \frac{\dfrac{1}{(z+2i)}}{(z-2i)}\,dz$$

vemos que, como $1/(z+2i)$ es analítica tanto en la circunferencia $|z-i|=2$ como en su interior, podemos usar la fórmula integral de Cauchy. Tomando $f(z)=1/(z+2i)$ y $z_0=2i$, por el Teorema 4.5 podemos escribir:

$$f(2i) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-i|=2} \frac{f(z)}{(z-2i)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-i|=2} \frac{1}{z^2+4}\,dz.$$

Así, como $f(2i) = \dfrac{1}{4i}$, el valor de la integral considerada es

$$\int_{|z-i|=2} \frac{1}{z^2+4}\,dz = 2\pi i f(2i) = \frac{\pi}{2}.$$

$\Diamond$

Veamos que si una función es analítica en un punto, sus derivadas de todos los órdenes existen en ese punto y son también analíticas.

**Teorema 4.6** (Extensión de la Fórmula Integral de Cauchy)**.**
*Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio simplemente conexo $D$. Sea $C$ un contorno cerrado simple $C$ dentro de $D$. Sea $z_0 \in D$ interior a $C$. Entonces, $f(z)$ es infinitamente diferenciable en $D$ y*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz.$$

*Además, $f^{(n)}(z)$ es analítica en $D$ para cada $n$.*

El siguiente ejemplo aclara el uso de la extensión de la fórmula integral de Cauchy en la evaluación de integrales.

**Ejemplo 4.12.** Hallar el valor de la integral

$$\int_{|z-i|=2} \frac{1}{(z^2+4)^2} \, dz.$$

*Solución.* Factorizando el integrando tenemos

$$\frac{1}{(z^2+4)^2} = \frac{1}{(z-2i)^2(z+2i)^2}.$$

Tomando $f(z) = 1/(z+2i)^2$ y $z_0 = 2i$, por el Teorema 4.6 podemos escribir:

$$f'(2i) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-i|=2} \frac{f(z)}{(z-2i)^2} \, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-i|=2} \frac{1}{(z^2+4)^2} \, dz.$$

Así, como $f'(z) = \dfrac{-2}{(z+2i)^3}$, el valor de la integral considerada es

$$\int_{|z-i|=2} \frac{1}{(z^2+4)^2} \, dz = 2\pi i f'(2i) = \frac{\pi}{16}.$$

$\Diamond$

## 4.6 Residuo

**Definición 4.8.** Sea $f(z)$ una función analítica sobre un contorno cerrado simple $C$ y en todo punto interior a $C$, salvo en $z_0$. El *residuo* de $f(z)$ en $z_0$, denotado por $\operatorname*{Res}_{z=z_0} [f(z)]$, se define como

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} [f(z)] = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \, dz.$$

El siguiente teorema describe la relación que existe entre $\operatorname*{Res}_{z=z_0}[f(z)]$ y una serie de Laurent de $f(z)$ centrada en $z_0$.

**Teorema 4.7.** *Sea $z_0$ un punto singular aislado de una función $f(z)$. Entonces, el residuo de $f(z)$ en $z_0$ es igual al coeficiente de $(z-z_0)^{-1}$ en la serie de Laurent que representa a $f(z)$ en el anillo*

$$0 < |z - z_0| < r,$$

*para cierto número real $r > 0$.*

*Demostración.* Como $z_0$ un punto singular aislado de $f(z)$, existe $r > 0$ tal que el desarrollo de Laurent de $f(z)$ centrado en $z_0$, válido en el anillo $0 < |z - z_0| < r$, está dado por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}.$$

Sea $C$ un contorno cerrado simple contenido en el anillo $0 < |z - z_0| < r$ y que contiene a su interior al punto $z_0$. Así, integrando en ambas partes de la ecuación anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_C f(z)\,dz &= \int_C \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n} \right] dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C (z - z_0)^n\,dz + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_C (z - z_0)^{-n}\,dz, \end{aligned}$$

además,

$$\begin{aligned} \int_C (z - z_0)^n\,dz &= 0, \quad \text{para } n \geq 0, \\ \int_C (z - z_0)^{-1}\,dz &= 2\pi i, \\ \int_C (z - z_0)^{-n}\,dz &= 0, \quad \text{para } n \geq 2, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\int_C f(z)\,dz = b_1 2\pi i,$$

de donde se deduce que

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}[f(z)] = b_1,$$

que era lo que deseábamos demostrar. $\square$

**Ejercicio 4.3.** Calcular los siguientes residuos:

a) $\operatorname*{Res}_{z=0}\left[e^{1/z}\right]$

b) $\operatorname*{Res}_{z=i}\left[\dfrac{1}{(z-i)^2}\right]$

c) $\operatorname*{Res}_{z=0}\left[z^4 \operatorname{sen}(1/z)\right]$

### 4.6.1 Cálculo del Residuo

Cuando $z_0$ es un punto singular removible de la función $f(z)$, su residuo en ese punto es cero. Ahora, cuando $z_0$ es un punto singular esencial de $f(z)$, la única manera que podemos determinar el residuo en dicho punto consiste en obtener el desarrollo de Laurent centrado $z_0$, válido en el anillo dado en el Teorema 4.7, y elegir el coeficiente apropiado. Pero, si la función tiene un polo en $z_0$, no es necesario obtener todo el desarrollo de Laurent centrado en $z_0$ para encontrar el coeficiente que buscamos. Existen diversos métodos de los que podemos echar mano siempre y cuando sepamos que la singularidad es un polo.

#### Cálculo del Residuo en un Polo

El siguiente teorema nos permite identificar si un punto $z_0$ es un polo de $f(z)$ y, además, nos dice como calcular el residuo $\operatorname*{Res}_{z=z_0}[f(z)]$.

**Teorema 4.8.** *Sea $z_0$ un punto singular aislado de una función $f(z)$. Si para cierto entero positivo $m$, la función*

$$\phi(z) = (z - z_0)^m f(z)$$

*se puede definir en $z_0$ de modo que sea analítica ahí y $\phi(z_0) \neq 0$, entonces $f(z)$ tiene un polo de orden $m$ en $z_0$ y, además,*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}[f(z)] = \begin{cases} \phi(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} (z - z_0)^m f(z), & m = 1; \\ \dfrac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}, & m > 1. \end{cases} \tag{4.3}$$

*Demostración.* Como $\phi(z) = (z - z_0)^m f(z)$ es analítica en $z_0$ y $\phi(z_0) \neq 0$, entonces la función $f(z)$ se puede escribir como

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

donde $p(z) = \phi(z)$ y $q(z) = (z - z_0)^m$, además,

$$q(z_0) = q'(z_0) = \cdots = q^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad \text{y} \quad q^{(m)}(z_0) = m! \neq 0.$$

Luego, por el Teorema 3.9 $z_0$ es un polo de orden $m$ de $f(z)$.

Pasemos ahora a demostrar la fórmula (4.3). Como $\phi(z)$ es analítica en $z_0$ ella posee desarrollo de Taylor centrado en $z_0$, válido en cierto disco $|z - z_0| < r$, dado por

$$\phi(z) = (z - z_0)^m f(z) = \phi(z_0) + \phi'(z_0)(z - z_0) + \cdots + \frac{\phi^{(m)}(z_0)}{m!}(z - z_0)^m + \cdots .$$

Así, en cada punto $z$ del disco $|z - z_0| < r$ excepto $z_0$, se tiene que

$$f(z) = \frac{\phi(z_0)}{(z - z_0)^m} + \frac{\phi'(z_0)}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!(z - z_0)} + \frac{\phi^{(m)}(z_0)}{m!} + \cdots ,$$

que es el desarrollo de Laurent de $f(z)$ centrado en $z_0$ válido en el anillo $0 < |z - z_0| < r$, con

$$b_1 = \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

Entonces, por el Teorema 4.7 la ecuación (4.3) es cierta. □

En el siguiente ejemplo se muestra la utilidad del teorema anterior en el cálculo del residuo en un polo.

**Ejemplo 4.13.** Hallar el residuo de $f(z) = \dfrac{e^z}{\operatorname{sen} z}$ en cada uno de sus puntos singulares.

*Solución.* Los puntos singulares aislados de $f(z) = \dfrac{e^z}{\operatorname{sen} z}$ son:

$$z_n = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

además, cada $z_n$ es un polo simple de $f(z)$. Definamos la función $\phi_n(z)$ como

$$\phi_n(z) = (z - z_n)f(z) = \begin{cases} \lim\limits_{z \to z_n} (z - z_n)f(z) = (-1)^n e^{n\pi}, & \text{si } z = z_n, \\ \dfrac{(z - z_n)e^z}{\operatorname{sen} z}, & \text{si } z \neq z_n. \end{cases}$$

Es claro que $\phi_n(z)$ es analítica en $z_n$ y $\phi_n(z_n) \neq 0$. Así. utilizando la ecuación (4.3) se tiene que el residuo de $f(z) = \dfrac{e^z}{\operatorname{sen} z}$ en cada uno de sus puntos singulares $z_n$ es

$$\operatorname*{Res}_{z=z_n}\left[\frac{e^z}{\operatorname{sen} z}\right] = (-1)^n e^{n\pi}.$$

◊

**Ejercicio 4.4.** Calcular los siguientes residuos:

a) $\operatorname*{Res}\limits_{z=0}\left[\dfrac{e^z}{z^2(z^2+1)}\right]$.

b) $\operatorname*{Res}\limits_{z=2}\left[\dfrac{z^{1/2}}{z(z-2)^2}\right]$. (Utilizando la rama principal de $z^{1/2}$)

c) $\operatorname*{Res}\limits_{z=1}\left[\dfrac{\operatorname{Log} z}{z^4(z-1)^2}\right]$.

d) $\operatorname*{Res}\limits_{z=n\pi i}\left[\dfrac{\operatorname{sen} z - z}{z \operatorname{senh} z}\right]$, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

### 4.6.2 Teorema de los Residuos

El siguiente teorema nos permite calcular la integral de una función $f(z)$ a lo largo de un contorno cerrado simple $C$, tal que $f(z)$ es analítica en $C$ y en su interior, salvo en un número finito de puntos singulares interiores a $C$.

**Teorema 4.9** (Teorema de los Residuos).
*Sea $C$ un contorno cerrado simple, dentro y sobre el cual una función $f(z)$ es analítica excepto en un número finito de puntos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ interiores a $C$. Entonces,*

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k}[f(z)].$$

*Demostración.* Se deja como ejercicio para el lector. □

En los siguientes ejemplos utilizamos el Teorema de los Residuos para calcular la integral de una función $f(z)$, a lo largo de un contorno que posee en su interior un número finito de puntos singulares de $f(z)$.

**Ejemplo 4.14.** Calcular la integral

$$\int_C \frac{z-2}{(z-1)z}\,dz,$$

donde $C$ es la circunferencia $|z| = 3$ orientada positivamente.

*Solución.* Sea $f(z) = \dfrac{z-2}{(z-1)z}$. Los puntos singulares de $f(z)$ son $z_0 = 0$ y $z_1 = 1$, que son puntos interiores a $C$, además, $z_0$ y $z_1$ son polos simples de $f(z)$. Luego,

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}[f(z)] = 2 \quad \text{y} \quad \operatorname*{Res}_{z=z_1}[f(z)] = -1.$$

Como $f(z)$ es analítica dentro y sobre $C$ excepto en $z_0$ y $z_1$, entonces por el Teorema de los Residuos obtenemos

$$\int_C \frac{z-2}{(z-1)z}\,dz = 2\pi i \left[\operatorname*{Res}_{z=z_0}[f(z)] + \operatorname*{Res}_{z=z_1}[f(z)]\right] = 2\pi i.$$

◊

**Ejemplo 4.15.** Calcular la integral

$$\int_C (1+z+z^2)(e^{1/z} + e^{1/(z-1)} + e^{1/(z-2)})\,dz,$$

donde $C$ es un contorno cerrado simple que contiene en su interior a los puntos 0, 1 y 2.

*Solución.* Sean $f_1(z)$, $f_2(z)$ y $f_3(z)$ funciones definidas respectivamente como

$$\begin{aligned} f_1(z) &= (1+z+z^2)\, e^{1/z}, \\ f_2(z) &= (1+z+z^2)\, e^{1/(z-1)}, \\ f_3(z) &= (1+z+z^2)\, e^{1/(z-2)}. \end{aligned}$$

Así,

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z),$$

luego,

$$\int_C (1+z+z^2)(e^{1/z} + e^{1/(z-1)} + e^{1/(z-2)})\, dz = \int_C f_1(z)dz + \int_C f_2(z)dz + \int_C f_3(z)dz.$$

Ahora, los únicos puntos singulares de $f_1(z)$, $f_2(z)$ y $f_3(z)$ son, respectivamente, 0, 1 y 2, además, cada uno de ellos son puntos singulares esenciales, lo cual nos obliga a determinar el desarrollo de Laurent para calcular el residuo en tales puntos. Se tiene que el desarrollo de Laurent de $f_1(z)$ centrado 0, válido en el anillo $|z| > 0$, está dado por

$$\begin{aligned} f_1(z) &= (1+z+z^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{1-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2-n}, \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\operatorname*{Res}_{z=0} [f_1(z)] = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{10}{6}.$$

Asimismo, el desarrollo de Laurent de $f_2(z)$ centrado 1, válido en el anillo $|z-1| > 0$, está dado por

$$\begin{aligned} f_2(z) &= (3 + 3(z-1) + (z-1)^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z-1)^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n!} (z-1)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n!} (z-1)^{1-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z-1)^{2-n}, \end{aligned}$$

que implica

$$\operatorname*{Res}_{z=1} [f_2(z)] = 3 + \frac{3}{2} + \frac{1}{6} = \frac{28}{6}.$$

Ahora, el desarrollo de Laurent de $f_3(z)$ centrado 2, válido en el anillo $|z-2| > 0$, está dado por

$$\begin{aligned} f_3(z) &= (7 + 5(z-2) + (z-2)^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z-2)^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7}{n!} (z-2)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{n!} (z-2)^{1-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z-2)^{2-n}, \end{aligned}$$

luego

$$\operatorname*{Res}_{z=1}[f_2(z)] = 7 + \frac{5}{2} + \frac{1}{6} = \frac{58}{6}.$$

De esta forma, utilizando el Teorema de los Residuos obtenemos

$$\begin{aligned}\int_C f_1(z)dz &= \frac{10}{3}\pi i,\\ \int_C f_2(z)dz &= \frac{28}{3}\pi i,\\ \int_C f_3(z)dz &= \frac{58}{3}\pi i,\end{aligned}$$

en consecuencia, el valor de la integral dada es

$$\int_C (1+z+z^2)(e^{1/z} + e^{1/(z-1)} + e^{1/(z-2)})\,dz = \frac{10}{3}\pi i + \frac{28}{3}\pi i + \frac{58}{3}\pi i = 32\pi i.$$

$\diamondsuit$

### 4.6.3 Expansión en Fracciones Parciales

Una aplicación de gran importancia del cálculo de residuos, es la expansión en fracciones parciales de algunas funciones racionales particulares. La expansión en fracciones parciales se aplica a funciones racionales propias, esto es, a funciones del tipo

$$f(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \cdots + b_M z^M}{a_0 + a_1 z + \cdots + z^N},$$

donde $M < N$. La expansión en fracciones parciales consiste en expresar la función racional propia $f(z)$ como una suma de fracciones simples. El siguiente teorema nos muestra explícitamente la forma de la expansión en fracciones parciales, dependiendo de la multiplicidad de los polos de $f(z)$.

**Teorema 4.10.** *Sea $f(z)$ una función racional propia dada por*

$$f(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \cdots + b_M z^M}{a_0 + a_1 z + \cdots + z^N},$$

*donde $M < N$. Sean $p_k$ los polos de $f(z)$ y $r_k$ sus respectivas multiplicidades, para $k = 1, 2, \ldots, T$, donde $T$ es un entero positivo tal que $N = \sum_{k=1}^{T} r_k$. Entonces:*

*(i) Si todos los polos de $f(z)$ son simples, la expansión en fracciones parciales de $f(z)$ es:*

$$f(z) = \frac{A_1}{(z-p_1)} + \frac{A_2}{(z-p_2)} + \cdots + \frac{A_N}{(z-p_N)},$$

*donde los números complejos $A_k$, denominados coeficientes, se calculan como*

$$A_k = \operatorname*{Res}_{z=p_k}[f(z)],$$

*para $k = 1, 2, \ldots, N$.*

*(ii) Si todos los polos de $f(z)$ son simples, excepto el polo $p_\ell$ que es de orden $r_\ell$, la expansión en fracciones parciales de $f(z)$ es:*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{A_1}{(z-p_1)} + \frac{A_2}{(z-p_2)} + \cdots + \frac{A_{\ell-1}}{(z-p_{\ell-1})} \\ &\quad + \frac{A_{\ell,1}}{(z-p_\ell)} + \frac{A_{\ell,2}}{(z-p_\ell)^2} + \cdots + \frac{A_{\ell,r_\ell}}{(z-p_\ell)^{r_\ell}} \\ &\quad + \frac{A_{\ell+1}}{(z-p_{\ell+1})} + \frac{A_{\ell+2}}{(z-p_{\ell+2})} + \cdots + \frac{A_T}{(z-p_T)}, \end{aligned}$$

*donde*

$$A_k = \operatorname*{Res}_{z=p_k}[f(z)],$$

*para $k = 1, 2, \ldots, T$, y $k \neq \ell$; y*

$$A_{\ell,\jmath} = \frac{1}{(r-\jmath)!} \cdot \left[ \frac{d^{(r-\jmath)}}{dz^{(r-\jmath)}} \left[ (z-p_\ell)^{r_\ell} f(z) \right] \right] \Bigg|_{z=p_\ell},$$

*para $\jmath = 1, 2, \ldots, r_\ell$.*

El teorema anterior se puede extender a funciones racionales propias que tienen dos o más polos cuyo orden es mayor que 1. En el siguiente ejemplo se muestra tal extensión.

**Ejemplo 4.16.** Halle la expansión en fracciones parciales de

$$f(z) = \frac{144\,z^2 + 144\,z + 144}{(z-3)^2(z-2)^2(z+1)}.$$

*Solución.* Los puntos $p_1 = -1$, $p_2 = 2$ y $p_3 = 3$ son los polos de $f(z)$. Se observa que $p_1$ es de orden 1 y $p_2$ y $p_3$ son de orden 2. De esta forma, la expansión en fracciones parciales de $f(z)$ es de la forma

$$f(z) = \frac{A_1}{(z+1)} + \frac{A_{2,1}}{(z-2)} + \frac{A_{2,2}}{(z-2)^2} + \frac{A_{3,1}}{(z-3)} + \frac{A_{3,2}}{(z-3)^2}.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} A_1 &= \operatorname*{Res}_{z=-1}[f(z)] = 1, \\ A_{2,2} &= \left[(z-2)^2 f(z)\right]_{z=2} = 336, \\ A_{2,1} &= \left[\frac{d}{dz}[(z-2)^2 f(z)]\right]_{z=2} = 800, \\ A_{3,2} &= \left[(z-3)^2 f(z)\right]_{z=3} = 468, \\ A_{3,1} &= \left[\frac{d}{dz}[(z-3)^2 f(z)]\right]_{z=3} = -801, \end{aligned}$$

así, la expansión en fracciones parciales de la función dada es

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)} + \frac{800}{(z-2)} + \frac{336}{(z-2)^2} - \frac{801}{(z-3)} + \frac{468}{(z-3)^2}.$$

$\Diamond$

## 4.7 Ejercicios Propuestos

**1.** Calcule la integral $\displaystyle\int_C 1/z\,dz$ si la curva $C$ es:

(a) el segmento de recta que va de $z = i$ a $z = 1$;

(b) la semicircunferencia $|z| = 1$, $-\pi/2 \leq \arg z \leq \pi/2$ (el camino se inicia en el punto $z = -i$).

**2.** Evalúe la integral $\displaystyle\int_C \frac{\overline{z}^3}{z^2}\,dz$, donde $C$ es la circunferencia $|z| = 1$ tomada en sentido positivo.

**3.** Evalúe la integral $\displaystyle\int_C \operatorname{Log} z\,dz$, donde $C$ es la curva $z(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$.

**4.** Sea $f(z)$ una función de variable compleja definida por

$$f(z) = \begin{cases} 0, & \text{si } \operatorname{Re} z < -1; \\ z^2, & \text{si } -1 \leq \operatorname{Re} z \leq 0; \\ z, & \text{si } 0 < \operatorname{Re} z \leq 1; \\ 0, & \text{si } \operatorname{Re} z > 1. \end{cases}$$

Entonces, evalúe la integral $\displaystyle\int_{|z|=2} f(z)\,dz$.

**5.** Para cada una de las siguientes integrales, diga las características del contorno cerrado simple $C$ para que el valor de la integral sea cero, según el Teorema de Cauchy-Goursat. (Justifique su respuesta.)

(a) $\displaystyle\int_C \frac{\cos z}{z+2}\,dz$

(b) $\displaystyle\int_C \operatorname{Log} z\,dz$

(c) $\displaystyle\int_C \frac{1}{1+e^z}\,dz$

(d) $\displaystyle\int_C \frac{1}{1-e^z}\,dz$

**6.** Para la función de $f(z) = \dfrac{1}{(z-i)^2}$ determine la primitiva de $f(z)$ tal que:

(a) esté definida en el dominio $\operatorname{Re} z > 0$.

(b) sea igual a cero cuando $z = i + 1$.

**7.** Evalúe las siguientes integrales. Use la fórmula integral de Cauchy (o su extensión) o bien el Teorema de Cauchy-Goursat donde sea necesario. En cada una de las integrales, $C$ es un contorno cerrado simple.

(a) $\displaystyle\int_{|z-a|=a} \frac{z}{z^4-1}\,dz,\ a>1.$

(b) $\displaystyle\int_C \frac{1}{e^z(z-2)}\,dz$, donde $C$ es el contorno $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1.$

(c) $\displaystyle\int_C \frac{\operatorname{sen}(e^z+\cos z)}{(z-1)^2(z+3)}\,dz$, donde $C$ es el contorno $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1.$

(d) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\cos(2z)}{z^{21}}\,dz.$

(e) $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z^2+a^2}\,dz$, donde $C$ es un contorno cerrado simple que contiene a $|z|\le a$.

(f) $\displaystyle\int_C \frac{z\,e^z}{(z-a)^3}\,dz$, donde $a$ es un punto interior del contorno $C$ cerrado simple.

**8.** En cada una de las siguientes integrales determine el mínimo valor de la constante positiva $M$ que satisface

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le M,$$

para cada función $f(z)$ considerada en cada caso.

(a) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{z}\,dz$

(b) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=1/2} \frac{1}{z^2+1}\,dz$

(c) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{e^z-1}\,dz$

(d) $\displaystyle\int_C \frac{z}{z-i}\,dz$, donde $C$ está conformado con los puntos del cuadrado con vértices en los puntos $-1+2i$, $1+2i$, $1$ y $-1$.

**9.** Determine los residuos de las siguientes funciones complejas en cada polo o en el polo indicado:

(a) $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2-z-2}.$

(b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(1-z)}$.

(c) $f(z) = \dfrac{3z^2+2}{(z-1)(z^2+9)}$.

(d) $\dfrac{z^3 - z^2 + z + 1}{z^2 + 4z}$

(e) $\dfrac{z+1}{(z-1)^2(z+3)}$

(f) $\dfrac{\cos z}{z}$, $z_0 = 0$

(g) $\dfrac{z^4-1}{z^4+1}$, $z_0 = e^{\frac{\pi}{4}i}$

(h) $\dfrac{\operatorname{sen} z}{z^4+z^2+1}$, $z_0 = e^{\frac{\pi}{3}i}$

(i) $\dfrac{z}{\operatorname{sen} z}$, $z_0 = \pi$

**10.** Use el Teorema de los Residuos para evaluar las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_C \frac{z\,dz}{z^2+1}$, para

$$C = \begin{cases} (i) & |z| = 1/2 \\ (ii) & |z| = 2 \end{cases}$$

(b) $\displaystyle\int_C \frac{z^2+3i-2}{z^3+9z}dz$, para

$$C = \begin{cases} (i) & |z| = 1 \\ (ii) & |z| = 4 \end{cases}$$

(c) $\displaystyle\int_C \frac{(z^2+2)(z^2+4)}{(z^2+1)(z^2+6)}dz$ para

$$C = \begin{cases} (i) & |z| = 2 \\ (ii) & |z-i| = 1 \\ (iii) & |z| = 4 \end{cases}$$

(d) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z^2(1+z^2)^2}$, para

$$C = \begin{cases} (i) & |z| = 1 \\ (ii) & |z| = 2 \end{cases}$$

(e) $\displaystyle\int_C \frac{3z^2+2}{(z^2+4)(z-1)}dz$, para

$$C = \begin{cases} (i) & |z-2| = 2 \\ (ii) & |z| = 4 \end{cases}$$

(f) $\displaystyle\int_C \frac{z^2-2z}{(z^2+4)(z-1)^2}dz$, para

$$C = \begin{cases} (i) & |z| = 3 \\ (ii) & |z+i| = 2 \end{cases}$$

(g) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z+1)^3(z-1)(z-2)}$, para

$$C = \begin{cases} (i) & |z+1| = 1 \\ (ii) & \text{el rectángulo de vértices} \\ & \text{en } \pm i, 3 \pm i \end{cases}$$

# Bibliografía


[1] Churchil, R. y Ward, J. (2004). *Variable Compleja y Aplicaciones*. McGraw-Hill/Interamericana, Madrid.

[2] David, A. (1997). *Variable Compleja con Aplicaciones* 2da. ed. Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, Delaware.

[3] Derrick, W. (1987). *Variable Compleja con Aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

[4] James, G. (2002). *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería* 2da. ed. Prentice Hall, México.

[5] Markushévich, A.I. (1967). *Teoría de las Funciones Analíticas*, vol. I. Editorial Mir, Moscu.