



GUÍA N°1 : FUNCIONES

1. Dadas las siguientes relaciones, a) verifique cuál de ellas es una función, b) en caso de ser función, determine el dominio y el rango.

a) $R_1 = \{ (0,1), (2,1), (3,2), (0,-1) \}$

b) $R_2 = \{ (a,b), (b,c), (a,c) \}$

c) $R_3 = \{ (1, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2) \}$

d) $R_4 = \{ (1, 2), (1, 3), (1, 4) \}$

2. Dados el conjunto de partida A, el conjunto de llegada B y la relación R entre A y B, a) determine cuál de las relaciones R es una función, b) en caso de ser función, determine si es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

a) $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$, $B = \{ a, b, c \}$, $R = \{ (1, b), (2, a), (3, c), (4, b) \}$

b) $A = \{ a, b, c \}$, $B = \{ 1, 2, 3 \}$, $R = \{ (a, 2), (b, 2), (c, 2) \}$

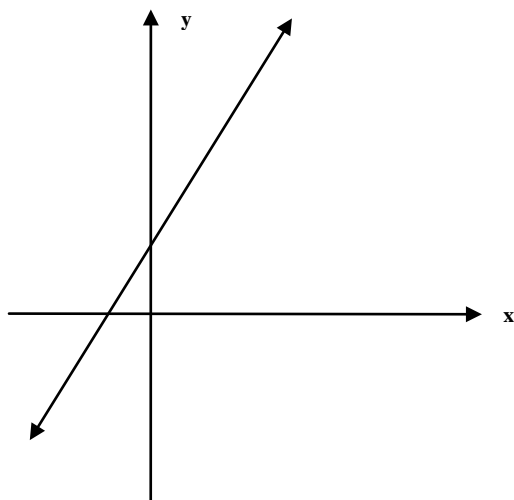
c) $A = \{ 1, 2, 3 \}$, $B = \{ a, b, c \}$, $R = \{ (1, a), (2, c), (3, b) \}$

d) $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$, $B = \{ a \}$, $R = \{ (1,a), (2, a), (3, a), (4, a) \}$

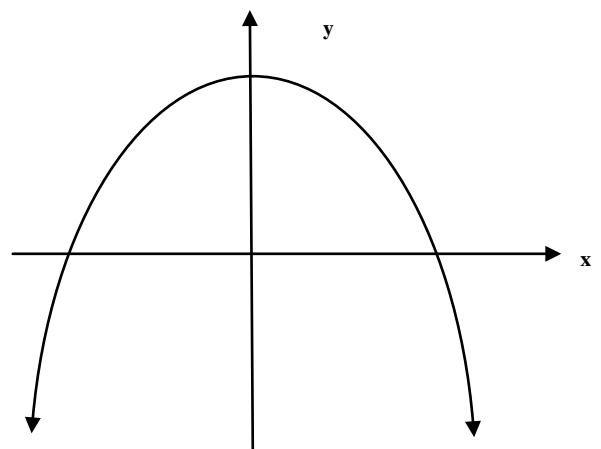
e) $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, $B = \{ a, b, c \}$, $R = \{ (1, a), (2, a), (3, b), (3, c), (4, b), (5, c) \}$

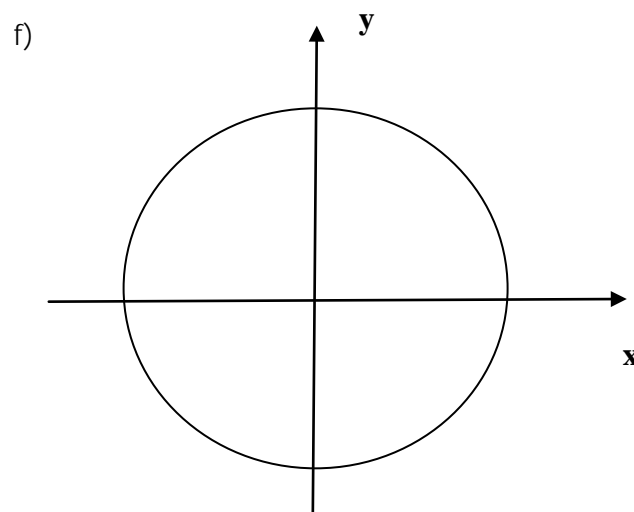
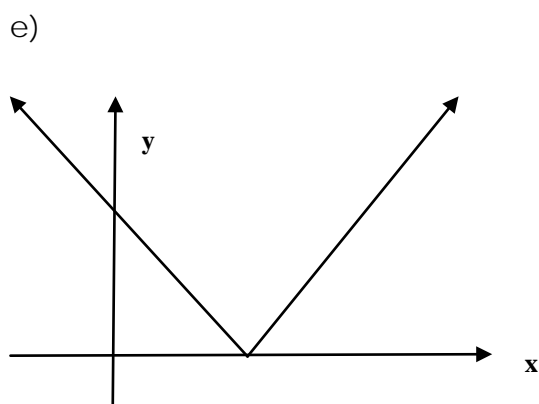
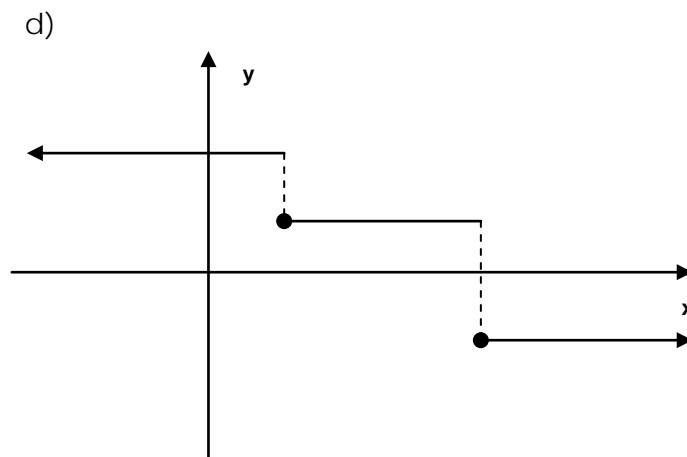
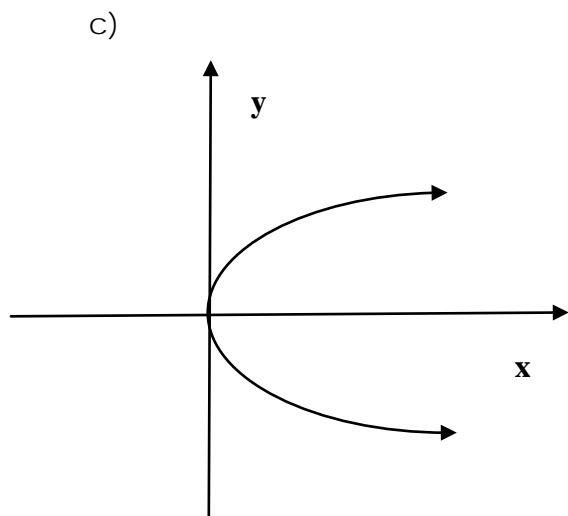
3. Dadas las siguientes gráficas, determine cuál de ellas corresponde a una función:

a)



b)





4. Determine si cada una de las siguientes funciones reales de variable real es biyectiva o no, hallando su inversa en caso de que lo sea.

a) $f(x) = 4x - 7$

b) $f(x) = x^5 + 1$

c) $f(x) = (1-x)^3$

d) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

e) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

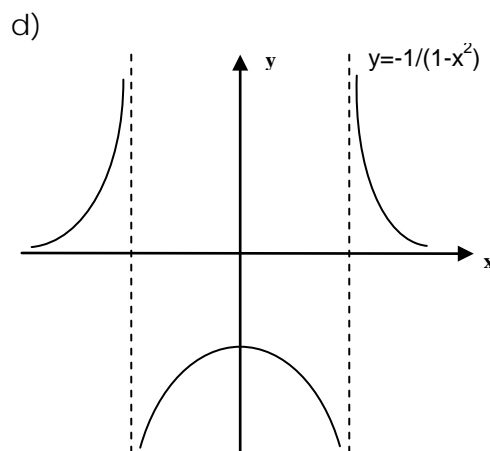
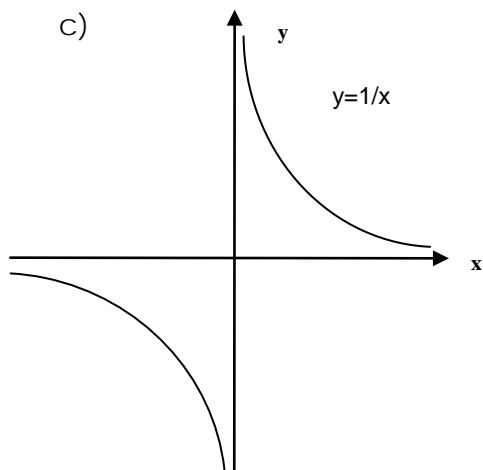
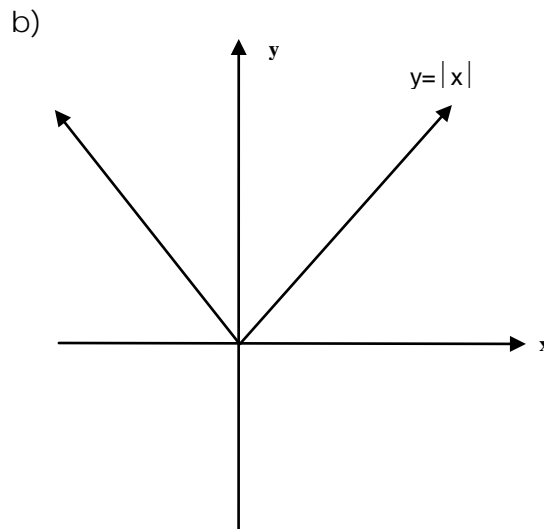
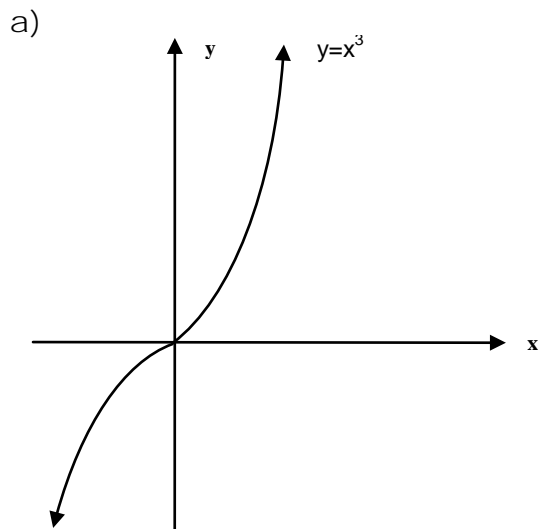
f) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

g) $f(x) = \frac{x}{|x|}$

h) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x-2}$

i) $f(x) = (2-3x^2)^3$

5. Dadas las gráficas de las siguientes funciones reales de variable real, determine cuál de ellas es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva:



6. Determine el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{\frac{x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6}{x^2 - x - 6}}$

b) $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}{x^2 + x + 1}$

c) $t(x) = \ln\left(\frac{2x^4 - x^3 - 35x^2 - 47x - 15}{x^2 + x - 2}\right)$

$$d) h(x) = -\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{2x^2 + 2}$$

$$e) s(x) = \ln(5 - x^2)$$

$$f) m(x) = \sqrt{\frac{-x^2 - 7x - 6}{x + 3}}$$

$$g) n(x) = \sqrt{\ln(x^2 - 1)}$$

$$h) u(x) = \ln(|x^2 + x| - 3)$$

7. Determine el rango de las siguientes funciones reales de variable real:

$$a) f(x) = -\sqrt{x^2 - 1} \qquad b) f(x) = \frac{\ln|x+3|}{3} \qquad c) f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

$$d) f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{5-x^2}{4}\right)}$$

8. Hallar la función inversa de $f(x) = -\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$.

9. Dada la función $f(x) = x^2 - 4x + 7$, calcular:

$$a) f(0) \qquad b) f(-1) \qquad c) f\left(-\frac{1}{2}\right) \qquad d) f(\sqrt{x}) \qquad e) f(x+2)$$

$$f) \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

10. Para cada una de las siguientes funciones, calcule el cociente $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$:

$$a) f(x) = \frac{2}{x} \qquad b) f(x) = \sqrt{x} \qquad c) f(x) = x^2 + 2x \qquad d) f(x) = \frac{x-1}{x}$$

$$e) f(x) = \sqrt{2x+1} \qquad f) f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \qquad g) f(x) = \frac{\sqrt{2x-1}}{x}$$

11. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 3$, $g(x) = x^2 + 5x + 5$ y $h(x) = \frac{x}{4}$, hallar:

- a) $(f \circ g)(x)$ b) $(g \circ f)(x)$ c) $(f \circ h)(x)$ d) $(f \circ g \circ f)(x)$
 e) $(f \circ f \circ f)(x)$ f) $(f \circ h \circ g)(x)$

12. Sabiendo que $(g \circ h)(x) = x^2 + 5x + 5$ y que $g(x) = x^2 + 3x + 1$, determine $h(x)$.

13. Sabiendo que $(f \circ g)(x) = x^2 - 7x + 5$ y que $g(x) = 3x + \sqrt{2}$, determine $f(x)$.

14. Sabiendo que $g(x) = x^2 - 4x + 3$ y que $(g \circ f)(x) = x^2 - 1$, determine $f(x)$.

15. Sabiendo que $g(x) = x^3$ y que $(g \circ f)(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, determine $f(x)$.

16. Sabiendo que $f(x) = 5x - 3$ y que $(g \circ f)(x) = -50x^2 + 60x - 17$, determine $g(x)$.

17. Sabiendo que $f(x) = x^3$ y que $(g \circ f)(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, determine $g(x)$.

18. Determine si las siguientes funciones son pares, impares o ninguna de las dos cosas:

- a) $f(x) = 3x^3 - 4x$ b) $f(x) = 2x^5 - 4x^3$ c) $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$
 d) $f(x) = 7x^4 - x^2 + 7$ e) $f(x) = 2$ f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
 g) $f(x) = 9 - 5x^2$ h) $f(x) = 2x^3 + x^2$ i) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 4}$

19. Grafique las siguientes funciones reales de variable real y a partir de la gráfica determine: a) dominio, b) rango.

- a) $f(x) = 2x + 1$ b) $f(x) = -x^2 + 4x + 21$ c) $f(x) = |2x + 4|$
 d) $f(x) = |x^2 + x - 2|$ e) $f(x) = \begin{cases} -5, & x < -5 \\ x, & |x| \leq 5 \\ 5, & x > 5 \end{cases}$ f) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq -1 \\ x^3, & |x| < 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$

Soluciones:

1. a) R_1 no es función.
 b) R_2 no es función.
 c) R_3 si es función.
 Dominio: $\{ 1, 3, 4, 5 \}$; Rango: $\{ 2 \}$
 d) R_4 no es función.
2. a) Es una función sobreyectiva, no inyectiva.
 b) Es una función no sobreyectiva, no inyectiva.
 c) Es una función biyectiva.
 d) Es una función sobreyectiva, no inyectiva.
 e) No es función.
3. a) Si es función.
 b) Si es función.
 c) No es función.
 d) Si es función.
 e) Si es función.
 f) No es función.
4. a) Es biyectiva. $f^{-1}(x) = \frac{x+7}{4}$
 b) Es biyectiva. $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x-1}$
 c) Es biyectiva. $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$
 d) No es biyectiva.
 e) No es biyectiva.
 f) No es biyectiva.
 g) No es biyectiva.
 h) Es biyectiva. $f^{-1}(x) = (1-x)^3 + 2$
 i) No es biyectiva.
5. a) Biyectiva
 b) No inyectiva, no sobreyectiva
 c) Inyectiva, no sobreyectiva
 d) No inyectiva, no sobreyectiva
6. a) $R - \{-2, 3\}$
 b) $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$
 c) $(-\infty, -3) \cup (-2, -1) \cup (-\frac{1}{2}, 1) \cup (5, +\infty)$
 d) R
 e) $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$
 f) $(-\infty, -6] \cup (-3, -1]$
 g) $(-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$
 h) $(-\infty, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}) \cup (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}, +\infty)$
7. a) $\{y \in R / y \leq 0\}$
 b) R
 c) $\{y \in R / -1 < y < 1\}$
 d) $\{y \in R / 0 \leq y \leq \sqrt[4]{\frac{5}{4}}\}$
8.
$$f^{-1}(x) = -\frac{x^2 + 1}{x}$$
9. a) $f(0) = 7$
 b) $f(-1) = 12$
 c) $f(-1/2) = 37/4$
 d) $f(\sqrt{x}) = x - 4\sqrt{x} + 7$, para $x \geq 0$
 e) $f(x+2) = x^2 + 3$
 f) $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x + h - 4$, si $h \neq 0$.

10.

a) $\frac{-2}{x(x+h)}$

b) $\frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$

c) $2x+h+2$

d) $\frac{1}{x(x+h)}$

e) $\frac{2}{\sqrt{2(x+h)+1} + \sqrt{2x+1}}$

f) $\frac{-2}{(x+h-1)(x-1) \left[\sqrt{\frac{x+h+1}{x+h-1}} + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \right]}$

g) $\frac{-2x^2 - 2xh + 2x + h}{(x+h)^2 x^2 \left[\frac{\sqrt{2(x+h)-1}}{x+h} + \frac{\sqrt{2x-1}}{x} \right]}$

11.

a) $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 22$

b) $x^4 - x^2 - 1$

c) $\frac{x^2}{16} - 3$

d) $x^8 - 2x^6 - x^4 + 2x^2 - 2$

e) $x^8 - 12x^6 + 48x^4 - 72x^2 + 33$

f) $\frac{1}{16}(x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x - 23)$

12.

$h_1(x) = x+1; h_2(x) = -(x+4)$

13.

$f(x) = \frac{1}{9}[x^2 - (2\sqrt{2} + 21)x + (47 + 21\sqrt{2})]$

14.

$f_1(x) = 2+x; f_2(x) = 2-x, \text{ para } x \geq 0$

15.

$f(x) = x-1$

16.

$g(x) = 1-2x^2$

17.

$g(x) = x + 3\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + 1$

18.

a) Impar

b) Impar

c) Ninguna

d) Par

e) Par

f) Par

g) Par

h) Ninguna

i) ninguna

19.

a) Dom(f)=R; Rgo(f)=R

b) Dom(f)=R; Rgo(f)= $(-\infty, 25]$ c) Dom(f)=R; Rgo(f)=[0, $+\infty$)d) Dom(f)=R; Rgo(f)=[0, $+\infty$)

e) Dom(f)=R; Rgo(f)=[-5, 5]

f) Dom(f)=R; Rgo(f)= $(-1, +\infty)$