

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Farmacia
Matemática - Física

Guía de Mecánica de Fluidos

A. *Definición y caracterización de los fluidos*

1. *Fluidos*: Normalmente reconocemos tres estados de la materia: líquido, sólido y gaseoso. Sin embargo, tanto los líquidos como los gases son *fluidos*: en contraste con los sólidos, carecen de la capacidad para resistir deformaciones. Debido a que un fluido no puede resistir una fuerza de deformación, se mueve, fluye bajo la acción de esa fuerza. Su forma cambiará continuamente hasta tanto actúe la fuerza. La deformación es causada por *fuerzas tangenciales*, también llamadas *esfuerzos cortantes*, que actúan tangencialmente a la superficie. Así, *la característica más notable de un fluido es su comportamiento frente a esfuerzos cortantes*.
2. En referencia a la Figura N°1, la fuerza F es una fuerza tangencial que actúa sobre un elemento rectangular ABCD (línea continua) y produce un paralelogramo A'B'CD (línea punteada).

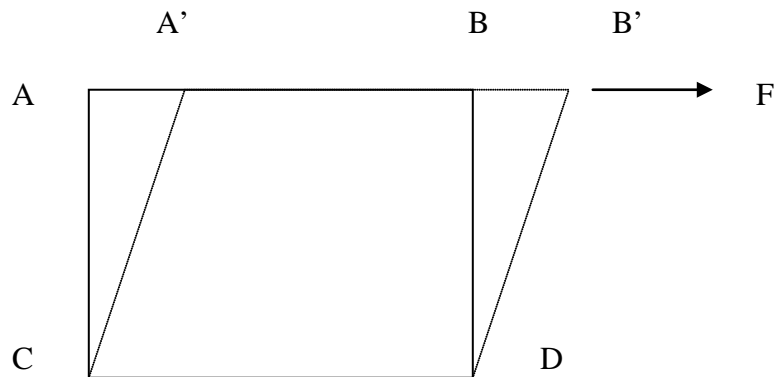


Figura N° 1

Así, un fluido es una substancia que se deforma continuamente cuando se somete a fuerzas tangenciales.

Recíprocamente, esta definición implica que:

Si un fluido está en reposo, no actúan fuerzas tangenciales. Todas las fuerzas deben ser perpendiculares a los planos sobre los cuales actúan.

B Estática de Fluidos

B.1 Condición de equilibrio para fluidos

1. Consideremos un fluido en equilibrio y tomemos un pequeño elemento de volumen que está sumergido totalmente dentro de la masa del fluido. Supongamos que el elemento es un disco delgado que está a una distancia y sobre algún nivel de referencia, como se muestra en la Figura N°2. El espesor del disco es dy y cada una de sus caras tiene un área A . La masa del elemento es $\rho A dy$ y su peso es $\rho g A dy$, donde ρ es la densidad del fluido. Las fuerzas ejercidas sobre el elemento por el fluido que lo rodea son, en cada punto, perpendiculares a su superficie.

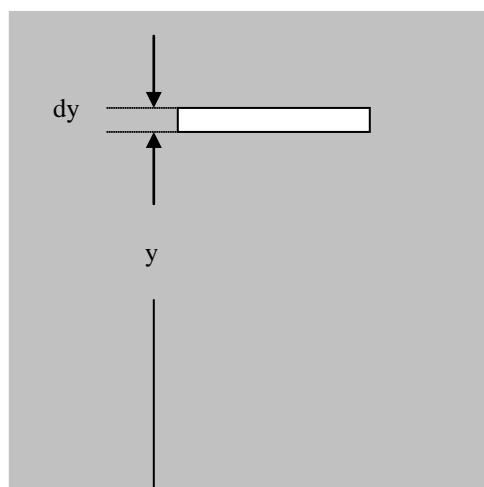
Como el elemento de fluido no está acelerado en la dirección vertical la fuerza vertical resultante sobre él debe ser cero. Luego, si llamamos p a la presión sobre la cara inferior y $p+dp$ a la presión sobre su cara superior, la fuerza hacia arriba es pA (ejercida sobre la cara inferior) y la fuerza hacia abajo es $(p+dp)A$ más el peso del elemento $dw=\rho g A dy$. Por tanto, para que halla equilibrio se debe cumplir que:

$$pA = (p + dp)A + \rho g A dy$$

o sea,

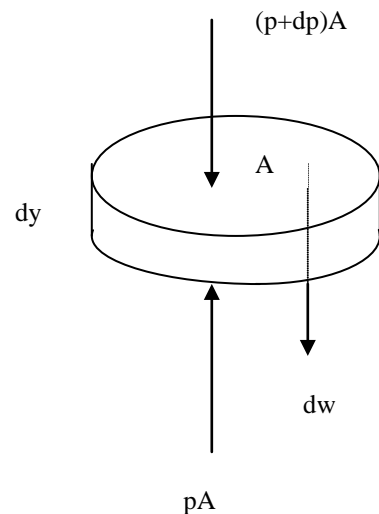
$$\frac{dp}{dy} = -\rho g$$

que es la condición de equilibrio para fluidos.



$y=0$

Figura N°2



2. *Caso ρ constante*: Si ρ y g son constantes (por ejemplo, líquidos homogéneos) y p_1 es la presión correspondiente a una altura y_1 y p_2 la presión correspondiente a la altura y_2 sobre un determinado nivel de referencia, la integración de la ecuación anterior resulta en

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\int_{y_1}^{y_2} \rho g dy$$

Luego,

$$p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1)$$

Si un líquido tiene una superficie libre, y_2 puede ser la altura de dicha superficie, en donde la presión es p_0 , y si y_1 es la altura correspondiente a un nivel en donde la presión valga p (llamando $h=y_2-y_1$) la ecuación queda como

$$p = p_0 + \rho gh$$

B.2 Principios de Pascal y de Arquímedes

1. Principio de Pascal: *La presión aplicada a un fluido contenido en un recipiente se transmite íntegramente a toda porción de dicho fluido y a las paredes del recipiente que lo contiene.*
2. Principio de Arquímedes: *Un cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido es empujado hacia arriba con una fuerza que es igual al peso del fluido desplazado por dicho cuerpo.*

C Dinámica de Fluidos

C.1 La ecuación de continuidad

1. *Características generales del flujo de los fluidos*: el flujo de los fluidos puede ser *estacionario* o *no estacionario*. Cuando la velocidad del fluido en cualquier punto es constante en el tiempo, decimos que el movimiento del fluido es estacionario. Caso contrario, si la velocidad depende del tiempo se denomina no estacionario. El flujo de los fluidos puede ser *rotacional* o *irrotacional*. Si el elemento de fluido en cada punto no tiene una velocidad angular neta alrededor de dicho punto, el flujo se llama irrotacional. Caso contrario se llama rotacional. Un fluido es *incompresible* si no experimenta nunca ninguna disminución del volumen a pesar de toda presión normal que se ejerza sobre él. Caso contrario se llama *compresible*. Finalmente, la *viscosidad* de un fluido es la propiedad que determina la cantidad de resistencia opuesta a las fuerzas tangenciales (es análoga a la fricción en el movimiento de los sólidos).

2. *Líneas de corriente*: La velocidad v en un punto de un flujo estacionario dado es constante en el tiempo. Consideremos el punto P (Ver figura) en el interior del fluido. Como v y P no cambian en el tiempo, toda partícula que llegue a P pasará por él con la misma rapidez y en la misma dirección. Lo mismo se puede decir en relación a los puntos Q y R. Por tanto, si trazamos la trayectoria de la partícula como en la Figura N°3, esta curva nos dará la trayectoria de cualquier partícula que llegue a P. Dicha línea se llama *línea de corriente*.

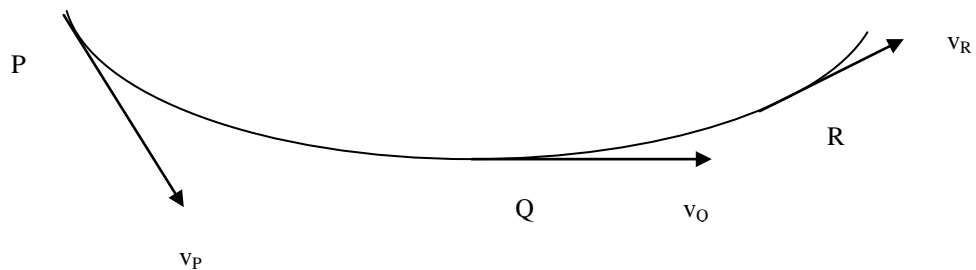


Figura N°3

3. *Tubo de flujo*: Tomemos un fluido estacionario y escojamos un número finito de líneas de corriente para formar un haz, tal como se observa en la Figura N°4. Esta región tubular se llama *tubo de flujo*. Como los límites de dicho tubo están formados por líneas de corriente, ningún fluido puede cruzar el borde de un tubo de flujo y el tubo se comporta, en cierta manera, como una tubería de la misma forma. El fluido que entra por un extremo debe salir por el otro.

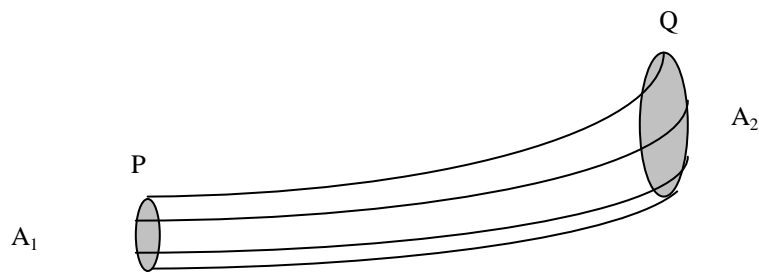


Figura N°4

4. *Flujo de masa*: En referencia a la Figura N°4, la velocidad del flujo en el interior del tubo puede tener diferentes magnitudes en diferentes puntos. Sea v_1 la rapidez de las partículas del fluido en P y v_2 la de las partículas del fluido en Q. Sean A_1 y A_2 las áreas transversales de los tubos perpendiculares a las líneas de corriente en los puntos

P y Q respectivamente, y vamos a suponer que la rapidez es esencialmente constante en cada superficie por separado. En el intervalo de tiempo Δt un elemento de fluido recorre aproximadamente la distancia $v\Delta t$. Por tanto, la masa Δm_1 del fluido que cruza A_1 en el intervalo de tiempo Δt es aproximadamente:

$$\Delta m_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$$

El flujo de masa se define como

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \rho_1 A_1 v_1$$

5. *La ecuación de continuidad:* esta ecuación expresa la conservación de la masa en la dinámica de fluidos. En efecto, trabajando con los flujos de masa en P y Q tenemos que:

Flujo de masa en P = $\rho_1 A_1 v_1$

Flujo de masa en Q = $\rho_2 A_2 v_2$

Donde ρ_1 y ρ_2 son las densidades del fluido en P y en Q, respectivamente. Si suponemos que no hay ni fuentes ni sumideros, la masa que cruza cada sección del tubo por unidad de tiempo debe ser siempre la misma. En particular, el flujo de masa en P debe ser igual al flujo de masa en Q:

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

O lo que es lo mismo,

$$\rho A v = \text{constante}$$

Este resultado se conoce como la *ecuación de continuidad*.

Si el fluido es incompresible, $\rho_1 = \rho_2$ y la ecuación toma la forma más sencilla:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

O sea,

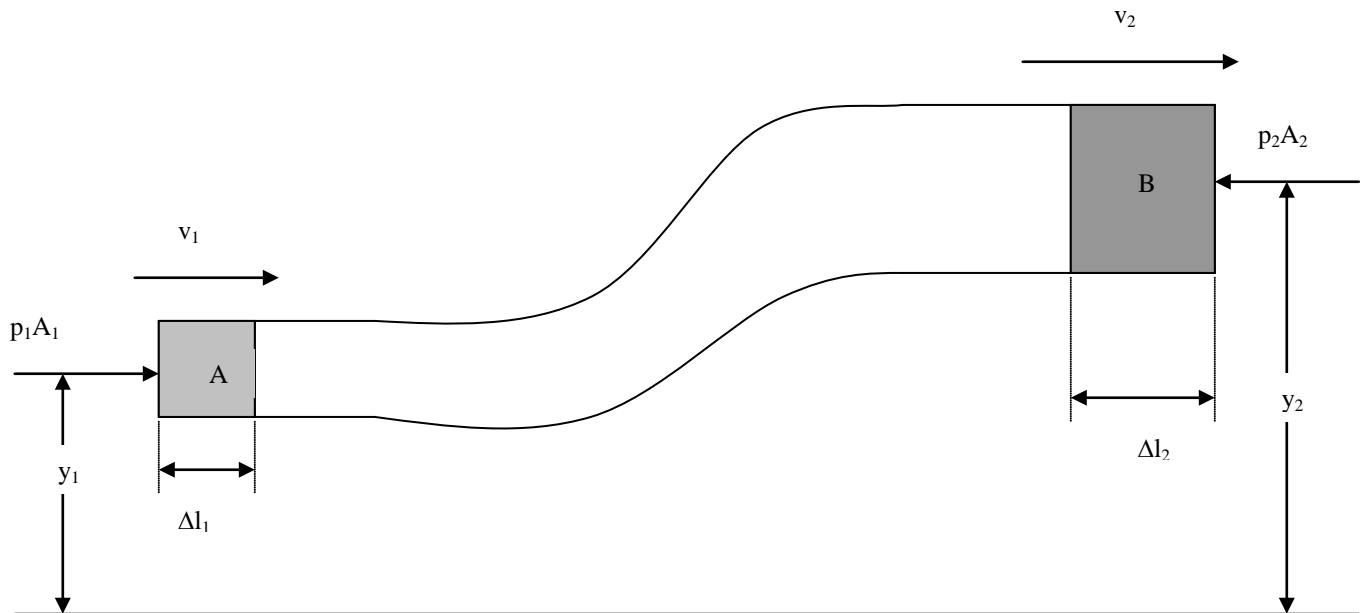
$$A v = \text{constante}$$

El producto $A v$ se denomina *flujo de volumen*. Esta ecuación dice que en un flujo estacionario e incompresible, el flujo de volumen varía inversamente con el área de la sección recta, siendo mayor en la parte más angosta del tubo.

C.2 La ecuación de Bernoulli

La ecuación de Bernoulli es una relación fundamental de la mecánica de fluidos y es una consecuencia del teorema de la variación de la energía cinética.

Consideremos el flujo *no viscoso, estacionario e incompresible* de un fluido a lo largo del conducto mostrado en la Figura N°5.



Estudiemos el movimiento de la porción sombreada del fluido entre las posiciones A y B. En la parte angosta de la tubería, la presión es p_1 y la rapidez es v_1 ; en la porción ancha, la presión es p_2 y la rapidez v_2 . Supongamos que A_1 y A_2 son las secciones transversales de la tubería en los puntos A y B, respectivamente y sea m la masa del fluido en ambas áreas sombreadas y ρ la densidad constante del fluido.

Luego, se tiene que:

- El trabajo efectuado sobre el sistema por la fuerza de presión $p_1 A_1$ es $p_1 A_1 \Delta l_1$
- El trabajo efectuado sobre el sistema por la fuerza de presión $p_2 A_2$ es $-p_2 A_2 \Delta l_2$
- El trabajo efectuado sobre el sistema por la gravedad para elevar la parte sombreada desde y_1 hasta y_2 será $-mg(y_2 - y_1)$

Notar que $A_1\Delta l_1 (= A_2\Delta l_2)$ es el volumen del elemento sombreado, el cual podemos representar por m/ρ .

Entonces, por el teorema de la variación de la energía cinética, tenemos que:

$$(p_1 - p_2)(m/\rho) - mg(y_2 - y_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

O sea,

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

Luego,

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{constante}$$

Esta es la ecuación de Bernoulli para un flujo estacionario, no viscoso e incompresible.

Problemas 1

- Un globo esférico de radio 0.4 m está lleno de gas helio y tiene una masa total de 0.30 kg. El globo está amarrado a una cuerda de longitud 2 m y masa 0.1 kg. Cuando se coloca en el piso y se suelta, el globo se eleva hasta cierta altura, levantando una parte de la cuerda de longitud h . Determine el valor de h ($\rho_{\text{aire}}=1.3 \text{ kg/m}^3$). (Soluc. 0.97m)
- ¿Cuál será la diferencia de presión sanguínea entre el pie de una persona de 1.80 m de alto y su cabeza cuando se mantiene erguida? ($\rho_{\text{sangre}}=1.05 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$) (Soluc. 18522 Pa)
- Una esfera de madera cuya densidad es 600 kg/m^3 se mantiene sumergida en agua a una profundidad de 52 cm. Al soltar la esfera, a) ¿Cuál será su aceleración hacia la superficie? b) ¿En cuánto tiempo alcanzará la superficie? ($\rho_{\text{agua}}=1 \text{ gr/cm}^3$) (Soluc. a) 6.5 m/s^2 b) 0.4 s)
- En un gato hidráulico, un fluido, usualmente aceite, llena las cámaras de dos cilindros conectados. La aplicación de una fuerza pequeña sobre un pistón pequeño, provoca una fuerza mayor sobre un pistón más grande. Si las áreas de los pistones son $4 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ y 2 m^2 , respectivamente, determine la fuerza que es necesario aplicar para sostener un automóvil que pesa 15.000 N. (Soluc. 300 N)
- Por una arteria de radio 0.6 cm circula la sangre con una velocidad de 10 cm/s. En cierta porción de la arteria se ha formado una placa arteriosclerótica, produciendo un engrosamiento de las paredes y así una reducción en el radio de hasta 0.4 cm. a) ¿cuántos litros por minuto está bombeando el corazón por esta arteria? b) ¿cuál es la velocidad de la sangre en la zona afectada? (Soluc. a) 0.678 litros/min b) 0.225 m/s)
- La presión arterial que soportan las jirafas es la mayor que soporta un mamífero. Esto se debe a que las jirafas tienen un cuello muy largo que hace que su cabeza

esté a unos 3 metros por encima del nivel del corazón. Para que la sangre fluya satisfactoriamente a través del cerebro hace falta una presión allí de 60 mm de Hg. ¿Cuál debe ser la presión de la sangre a la salida del corazón? (Soluc. 292 mm de Hg)

7. Un tanque que contiene un líquido de densidad ρ tiene un pequeño orificio en uno de sus lados a una profundidad h . El tanque está abierto a la atmósfera. ¿Cuál es la rapidez del fluido que sale por el orificio? (Soluc. $\sqrt{2gh}$)

8. El tanque de una poceta tiene una sección rectangular de dimensiones 20 cm x 40 cm y el nivel del agua está a una altura de 20 cm por encima de la válvula de desagüe, la cual tiene un diámetro de 5 cm. Al bajar la palanca, se abre la válvula. a) ¿cuál será la rapidez de desagüe por esa válvula en función de la altura del agua remanente en el tanque? b) ¿cuál es la rapidez inicial de desagüe? (Soluc. a)

$$\sqrt{\frac{2gh}{1 - (A_2/A_1)^2}} \quad b) 1.98 \text{ m/s}$$

9. Un recipiente está lleno de agua hasta una altura H y se coloca sobre una mesa. Si se le hace un agujero a una distancia h por debajo de la superficie del agua, a) ¿a qué distancia de la base del recipiente golpea el chorro de agua la mesa? b) ¿Podría hacerse un agujero a otra profundidad tal que el segundo chorro tenga el mismo alcance que el primero? Si es así, ¿a qué profundidad? (Soluc. a) $2\sqrt{h(H-h)}$ b) $H-h$)

10. La fuerza sustentadora sobre un aeroplano es debida principalmente a que las alas tienen un perfil tal que el aire debe viajar mayor distancia (y más rápido) sobre la cara superior que a través de la cara inferior. Así, la presión debajo del ala resulta mayor y el avión sube. Si la velocidad del aire sobre el ala es 200 m/s y por debajo es 180 m/s, ¿cuál debe ser el área total de las alas para sostener un aeroplano cuya masa es 30.000 kg? Suponer que la densidad del aire a la altura en que vuela el aeroplano es $\rho = 0.80 \text{ kg/m}^3$. (Soluc. 96.7 m^2)

Problemas 2

11. Una niña sostiene un globo lleno de Helio mediante una cuerda ligera. El volumen del globo es 0.70 m^3 y la masa de la goma del globo es 30 gr. a) Determine la tensión de la cuerda, b) Si la niña tiene una masa de 30 kg. ¿Cuántos globos puede sostener sin que se levante desde el piso? (Soluc. a) $T = 7.04 \text{ N}$ b) 42 globos)
 $\rho_{\text{aire}} = 1.25 \text{ kg/m}^3$; $\rho_{\text{Helio}} = 0.18 \text{ kg/m}^3$.
12. Una pelota de ping-pong de masa $7.5 \times 10^{-3} \text{ kg}$ y radio 1.5 cm está suspendida en un recipiente con agua sostenida por un hilo ($\rho_{\text{agua}} = 10^3 \text{ kg/m}^3$). ¿Cuál es la tensión del hilo? (Soluc. $T = 6.5 \times 10^{-2} \text{ N}$).
13. Una pelota de densidad igual a $4/5$ la densidad del agua se deja caer desde una altura de 3 metros sobre la superficie de un lago. Si despreciamos la fricción que ofrece el agua durante la caída, ¿hasta qué profundidad se hundirá la pelota antes de devolverse hacia la superficie? (Soluc. 12 metros)
14. Un cubo de hielo de lado 3 cm está flotando en una copa con agua fría, con su cara superior paralela a la superficie del agua. a) ¿A qué distancia por encima del nivel

del agua se encuentra la cara superior del hielo? b) Se vierte lentamente alcohol etílico frío hasta que el cubo quede justamente sumergido (es decir, el nivel del alcohol coincide con la superficie superior del cubo). En equilibrio hidrostático y suponiendo que el alcohol y el agua no se mezclan, ¿cuál es el espesor de la capa de alcohol? (Soluc. a) 0.30 cm b) 1.50 cm) ($\rho_{\text{hielo}}=900 \text{ kg/m}^3$)

15. Se bombea agua desde una represa hasta un pueblo que queda a una altura de 1500 metros a través de una tubería de diámetro 16 cm. a) ¿Cuál es la presión mínima con que debe bombearse el agua para elevarla hasta esa altura? b) Si se bombean 50 litros por segundo, ¿cuál es la velocidad del agua en la tubería? c) ¿Cuál es la presión adicional necesaria para bombear este flujo? (Soluc. a) $P=14.8 \times 10^6 \text{ Pa}$ b) 2.5 m/s c) $3.13 \times 10^3 \text{ Pa}$).

16. Un tanque está lleno de agua y en el fondo tiene conectado un tubo de longitud 1 metro inclinado un ángulo de 30° respecto a la horizontal. Si se mantiene el nivel del agua a una altura constante de 5 metros, ¿cuál será la máxima altura que alcanza el chorro de agua? (Soluc. 1.62 m)

17. Un tanque de sección transversal constante A_1 está inicialmente lleno de líquido hasta una altura h . En el instante $t=0$ se perfora un agujero de área A_2 en el fondo

del tanque. ¿En cuánto tiempo se vacía el tanque? (Soluc. $\left(\frac{A_1}{A_2}\right)\sqrt{2h/g}$)

18. Una jeringa contiene un volumen V de un fluido de densidad ρ . La jeringa termina en un orificio de área transversal A . Si se aplica una fuerza constante F al pistón, determine el trabajo que hay que efectuar para vaciar el cilindro en un tiempo T

(Soluc. $W = \frac{\rho V^3}{2A^2 T^2}$)

19. Una esfera homogénea de volumen V y densidad ρ flota en la frontera entre dos líquidos de densidades ρ_1 y ρ_2 respectivamente, donde $\rho_1 < \rho < \rho_2$. Determine la

fracción de volumen de la esfera que queda en cada líquido (Soluc. $\frac{V_1}{V} = \frac{\rho_2 - \rho}{\rho_2 - \rho_1}$; $\frac{V_1}{V} = \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}$)

20. Un recipiente cónico tiene un diámetro de 0.60 metros y una altura de 1 metro. El recipiente está completamente lleno con un líquido de densidad $\rho \text{ kg/m}^3$. Si se practica en el fondo un pequeño agujero de diámetro 1 cm, ¿en cuánto tiempo se vacía todo el líquido? (Soluc. $t=5.42 \text{ min.}$).