Universidad Central de Venezuela
Facultad de Farmacia
Matemática - Física

Guía de Trabajo y Energía

(Caso unidimensional)

A. Resumen de la Teoría

A.0 Problema Fundamental de la Mecánica

El problema fundamental de la mecánica clásica consiste en, dadas las fuerzas que actúan sobre una partícula y las condiciones iniciales, describir el movimiento futuro de la partícula. Es decir, determinar la función posición en términos del tiempo. Desde un punto de vista matemático, este problema consiste en resolver una ecuación diferencial sometida a condiciones iniciales. Más específicamente, habría que resolver el siguiente *problema de valores iniciales o problema de Cauchy*:

$$\begin{cases} m.\vec{r}\,''(t) = \vec{F} \\ \vec{r}(0) = \vec{r}_0 \\ \vec{v}(0) = \vec{v}_0 \end{cases}$$

donde la fuerza $\vec{F}$, en general, podría depender del tiempo t, la posición $\vec{r}$ y la velocidad $\vec{v}$. O sea, $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$. Este problema es muy complejo desde el punto de vista matemático, ya que la ecuación diferencial anterior es una ecuación diferencial vectorial que equivale a tres ecuaciones diferenciales escalares, una por cada componente, en el caso tridimensional. Si nos restringimos al caso en el cual la fuerza depende únicamente de la posición, es decir, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, existe una metodología que permite resolver el problema de una forma relativamente sencilla. Esta metodología conduce a las nociones de trabajo y energía. En esta guía trataremos el caso unidimensional.

A.1 Trabajo y energía cinética en el caso unidimensional:

Supongamos una partícula de masa *m* que se mueve a lo largo de una línea recta bajo la acción de una *fuerza F que depende únicamente de la posición*, digamos una fuerza del tipo $F = F(x(t))$, donde x(t) designa la función posición de la partícula en el instante t y sea $x_1 = x(t_1)$ y $x_2 = x(t_2)$.

Entonces, la ecuación de movimiento, de acuerdo a la segunda ley de Newton, es:

$$m.x''(t) = F(x(t))$$

Si multiplicamos ambos miembros de esta ecuación por la velocidad v obtenemos:

$$m.x''(t).v(t) = F(x(t)).v(t)$$

Si integramos ambos miembros con respecto al tiempo entre t_1 y t_2, obtenemos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[m.x''(t).v(t)\right] dt = \int_{t_2}^{t_1} \left[F(x(t)).v(t)\right] dt$$

Trabajando la integral del lado izquierdo, podemos escribir el integrando de la siguiente forma:

$$m.x''(t).v(t) = m.v'(t).v(t)$$

ya que $x'(t)=v(t)$. Además, por Regla de la Cadena se tiene que:

$$\left(\frac{1}{2}\left[v(t)\right]^2\right)' = v'(t).v(t)$$

Luego, la integral del lado izquierdo puede escribirse así:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[m.x''(t).v(t)\right] dt = m\int_{t_2}^{t_1} \left(\frac{1}{2}\left[v(t)\right]^2\right)' dt = \frac{1}{2} m\left[v(t)\right]^2 \Big|_{t_2}^{t_1}$$

Si a la cantidad $\frac{1}{2} m\left[v(t)\right]^2$ la llamamos K (*energía cinética* de la partícula), entonces la integral anterior puede escribirse así:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[m.x''(t).v(t)\right] dt = K(t_2) - K(t_1) = \Delta K\Big|_{t_1}^{t_2}$$

Trabajando la integral del lado derecho, podemos hacer el cambio de variable

$$x = x(t)$$

de donde se tiene que:

$$dx = x'(t)dt = v(t)dt$$

Luego, la integral queda así:

$$\int_{t_2}^{t_1} \left[F(x(t)).v(t)\right] dt = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx$$

Si llamamos a la integral $\int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx$ el *trabajo* $W\Big|_{x_1}^{x_2}$ *realizado por la fuerza F para mover la partícula desde x_1 hasta x_2*, la integral del lado derecho puede escribirse así:

$$\int_{t_2}^{t_1} \left[F(x(t)).v(t)\right] dt = W\Big|_{x_1}^{x_2}$$

Combinando las dos expresiones, obtenemos:

$$\Delta K\Big|_{t_1}^{t_2} = W\Big|_{x_1}^{x_2}$$

lo cual nos dice que:

"*La variación de la energía cinética entre dos instantes de tiempo es igual al trabajo realizado por la fuerza para mover la partícula desde la posición inicial hasta la posición final*"

El enunciado anterior se conoce con el nombre de "*Teorema del Trabajo y la Energía*", el cual es *válido para cualquier fuerza dependiente de la posición*.

A.2. *Fuerzas conservativas y energía potencial*:

Una fuerza F, dependiente de la posición, se denomina *conservativa* si existe otra función U(x) asociada a F tal que:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

Luego, si F es conservativa, podemos separar variables en la ecuación diferencial anterior y obtener lo siguiente:

$$F(x)\,dx = -dU$$

Integrando ambos miembros desde x_1 hasta x_2, obtenemos

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} dU = -U(x_2) + U(x_1)$$

La función U(x), cuando existe, se denomina *energía potencial* asociada a la fuerza F.

A.3. Teorema de conservación de la energía mecánica

Supóngase una partícula de masa *m* sometida a una fuerza conservativa $F(x)$ con

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

para alguna función U(x). Si K designa a la energía cinética de la partícula, entonces la cantidad E=K+U se llama *energía mecánica* de la partícula.

Teorema (de conservación de la energía mecánica): Considérese una partícula de masa *m* sometida a una fuerza conservativa $F(x)$ con energía potencial U y energía cinética K. Entonces, la energía mecánica E de la partícula se *conserva*.

Prueba: Sean $x_1=x(t_1)$ y $x_2=x(t_2)$, para t_1, t_2 cualesquiera.

Por el Teorema del Trabajo y la Energía, sabemos que:

$$W\Big|_{x_1}^{x_2} = \Delta K\Big|_{t_1}^{t_2} = K(t_2) - K(t_1)$$

Como $F(x)$ es conservativa, se tiene que:

$$W\Big|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx = -\int_{x_1}^{x_2} dU = -U(x_2) + U(x_1)$$

Entonces, podemos concluir que:

$$K(t_2) - K(t_1) = -U(x_2) + U(x_1) \;\Rightarrow\; K(t_1) + U(x_1) = K(t_2) + U(x_2)$$

O sea,

$$E(t_1) = E(t_2)$$

Para cualesquiera instantes de tiempo t_1, t_2.

Lo cual dice que *la energía mecánica total se conserva a través del tiempo*.

A.4. Casos particulares para la energía potencial:

i) Energía potencial gravitatoria:

En este caso, $F(y) = -m.g$.

Por lo tanto:

$$U(y) = -\int_0^y F(y)\, dy + U(0) = -\int_0^y (-mg)\, dy + U(0) = mgy$$

siempre que se escoja U(0)=0.

iii) Energía potencial de un resorte:

Por la Ley de Hooke, $F(x) = -k.x$, donde k es la constante del resorte. Luego,

$$U(x) = -\int_0^x F(x)\, dx + U(0) = -\int_0^x (-kx)\, dx + U(0) = \frac{1}{2} k\, x^2$$

si escogemos U(0)=0.

Observaciones: Nótese que lo único que podemos calcular acerca de U son los cambios en U y no la U propiamente dicha. Por lo general, lo que se hace es asignar arbitrariamente el valor cero a la energía potencial del cuerpo cuando está en la *posición de referencia* x_0 y se escoge como posición de referencia aquella en la cual la fuerza que actúa sobre el cuerpo es cero.

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Farmacia
Matemática - Física

Guía de Trabajo y Energía
(*Caso General)*

A. Resumen de la Teoría

A.0 Preliminares matemáticos

i) Definición de la integral de línea:

Definición 1: Una función α: [a, b] $\to R^2$ continua se llama una curva en R^2.

Definición 2: Sea α: [a, b] $\to R^2$ una curva en R^2 y sea una función **f**:$R^2 \to R^2$ (es decir, un campo vectorial) definida y acotada sobre la gráfica de α. La integral de línea de **f** a lo largo de α, notada por el símbolo $\int \vec{f} \bullet d\alpha$, se define así:

$$\int \vec{f} \bullet d\alpha = \int_a^b \vec{f}(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t)dt$$

si la integral del segundo miembro existe. Si **A**=α(a) y **B**=α(b) representan los puntos extremos de la curva, a veces la integral de línea se representa por el símbolo:

$$\int_A^B \vec{f} \bullet d\alpha$$

y se denomina la *integral de línea de **f** desde **A** hasta **B** a lo largo de* α.

ii) Derivadas parciales y gradiente:

Definición 3: Sea una función φ:$R^2 \to R$ (es decir, un campo escalar). Se definen las derivadas parciales de φ respecto a x e y, respectivamente, así:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x+h, y) - \varphi(x, y)}{h}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x, y+h) - \varphi(x, y)}{h}$$

Así, una derivada parcial se obtiene manteniendo fija una variable (considerándola como constante) y tomando la derivada ordinaria respecto a la otra variable.
Definición 4: Sea φ un campo escalar φ: $R^2 \to R$. Se define el *gradiente* de φ , notado ∇φ, así:

$$\nabla \varphi(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\hat{j} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$$

Así, el gradiente ∇φ de una función φ asocia un vector a un punto (x, y).

iii) *Teorema Fundamental del Cálculo (para integrales de línea)*

Teorema: Sea **f**:$R^2 \to R^2$ un campo vectorial continuo y supongamos que **f** =∇φ para algún campo escalar φ derivable. Sea α una curva sobre R^2 que une los puntos **A** y **B**. Entonces:

$$\int_A^B \vec{f} \bullet d\alpha = \varphi(B) - \varphi(A)$$

y además la integral de línea de **f** es independiente de la curva α que une los puntos **A** y **B**.
(Lo aceptaremos sin prueba)

A.1 Trabajo:

Definición 5: Supongamos una partícula de masa *m* que se mueve a lo largo de una curva en el plano bajo la acción de un campo de fuerzas **f**. Designemos por **r**(t) la función posición de la partícula en el instante t y sea **A**=**r**(t_1) y **B**=**r**(t_2). Entonces se define el trabajo realizado por **f** durante el intervalo de tiempo [t_1, t_2] como:

$$W\Big|_A^B = \int_A^B \vec{f} \bullet d\vec{r}$$

Casos particulares:

i) *Fuerza constante*: en este caso tenemos que **f**(**r**(t))=**f** (vector constante) y entonces

$$W\Big|_A^B = \int_A^B \vec{f} \bullet d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{f}(\vec{r}(t)) \bullet \vec{r}\,'(t)\,dt = \vec{f} \bullet \int_{t_1}^{t_2} \vec{r}\,'(t)dt = \vec{f} \bullet \vec{r}(t)\Big|_{t_1}^{t_2} = \vec{f} \bullet [\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)]$$

O sea,

$$W\Big|_A^B = \vec{f} \bullet \vec{d}\Big|_{t_1}^{t_2}$$

donde $\vec{d}\Big|_{t_1}^{t_2} = r(t_2) - r(t_1)$ es el vector desplazamiento entre t_1 y t_2.

ii) *Fuerza variable en una dimensión*: en este caso, $\vec{f} = f(x)\hat{\imath}$ y $r(t) = x(t)\hat{\imath}$. Supongamos además que A=x(t_1) y que B=x(t_2). Luego,

$$W\Big|_A^B = \int_A^B \vec{f} \bullet dr = \int_{t_1}^{t_2} [f(x(t))\hat{\imath} \bullet x'(t)\hat{\imath}]dt = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t))x'(t)(\hat{\imath} \bullet \hat{\imath})dt = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t))x'(t)dt$$

O sea,

$$W\Big|_A^B = \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx$$

A.2. *Teorema del trabajo y la energía*:

Definición 6: Supongamos una partícula de masa *m* que se mueve de tal manera que su rapidez en el instante t es v(t). Entonces su energía cinética K se define así:

$$K = \frac{1}{2} m\, v^2(t)$$

Teorema (del trabajo y la energía): si una partícula de masa *m* se mueve a lo largo de una curva en el plano bajo la acción de un campo de fuerzas **f** entonces la variación de la energía cinética en cualquier intervalo de tiempo es igual al trabajo realizado por **f** durante dicho intervalo, o sea,

$$W\Big|_A^B = \Delta K\Big|_{t_1}^{t_2}$$

donde **A**=**r**(t_1) y **B**=**r**(t_2).

Prueba: Por segunda ley de Newton,

$$\vec{f}(r(t)) = mr''(t) \Rightarrow \vec{f}(r(t)) \bullet r'(t) = mr''(t) \bullet r'(t)$$

Luego, integrando ambos miembros respecto a t, tenemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{f}(r(t)) \bullet r'(t)\, dt = m\int_{t_1}^{t_2} r''(t) \bullet r'(t)\, dt$$

Ahora bien, nótese que

$$(r' \bullet r')' = r'' \bullet r' + r' \bullet r'' = 2r'' \bullet r'$$

Luego,

$$r''\bullet r' = \frac{1}{2}\left(r'\bullet r'\right)' = \frac{1}{2}\left((r')^2\right)' = \frac{1}{2}\left(v^2\right)'$$

Entonces,

$$W\Big|_A^B = m\int_{t_1}^{t_2} r''(t)\bullet r'(t)\,dt = \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left((r')^2\right)' dt = \frac{1}{2}m(r')^2\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{2}mv^2\Big|_{t_1}^{t_2} = \Delta K\Big|_{t_1}^{t_2}$$

A.3. *Teorema de conservación de la energía mecánica*

Definición 7: un campo vectorial **f**:$R^2 \to R^2$ se llama *conservativo* si existe un campo escalar φ:$R^2 \to R$ tal que **f**=∇φ. Una tal función φ se llama una *función potencial* para **f**.

Definición 8: Supóngase una partícula de masa *m* sometida a una fuerza conservativa **f** con **f** =∇φ, para alguna función potencial φ. Entonces: $U(r) = -\varphi(r)$ se llama la *energía potencial* de la partícula. La cantidad E=K+U se llama *energía mecánica* de la partícula.

Teorema (de conservación de la energía mecánica): Considérese una partícula de masa *m* sometida a una fuerza conservativa **f** con **f** =∇φ, para una función potencial φ. Entonces, la energía mecánica de la partícula se conserva.

Prueba: Sean **A**=**r**(t_1) y **B**=**r**(t_2), para t_1, t_2 cualesquiera.

Ya sabemos que:

$$W\Big|_A^B = \Delta K\Big|_{t_1}^{t_2} = K(t_2) - K(t_1)$$

Por Teorema Fundamental del Cálculo para integrales de línea, se tiene:

$$\int_A^B \vec{f}\bullet dr = \varphi(B) - \varphi(A)$$

Entonces, podemos concluir que:

$$K(t_2) - K(t_1) = \varphi(B) - \varphi(A) \;\Rightarrow\; K(t_1) - \varphi(A) = K(t_2) - \varphi(B)$$

O sea, $K(t_1) + U(r(t_1)) = K(t_2) + U(r(t_2)) \Rightarrow E(t_1) = E(t_2)$

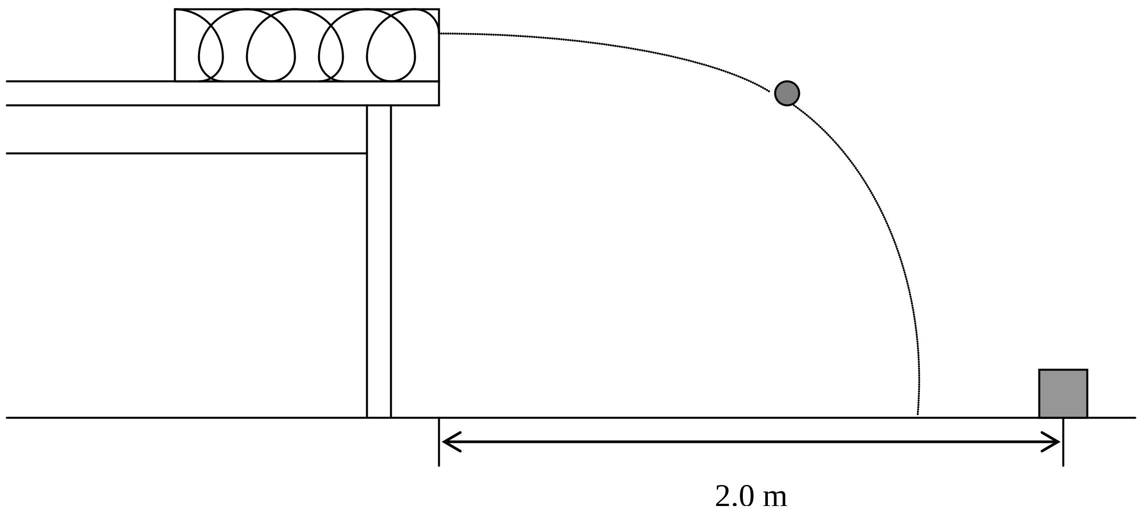
Lo cual dice que *la energía mecánica total se conserva a través del tiempo*.

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Farmacia
Matemática - Física

Guía de Trabajo y Energía
(Problemario)

1. Un hombre que va corriendo tiene la mitad de la energía cinética de un niño que tiene la mitad de su masa. El hombre aumenta su rapidez en 1.0 m/s y entonces tiene la misma energía cinética que el niño. ¿Cuáles eran las velocidades iniciales del hombre y del niño? (Soluc. Hombre: 2.4 m/s, niño: 4.8 m/s)
2. Un automóvil de 1000 kg está moviéndose a 60 Km/h sobre una carretera a nivel. Se aplican los frenos con la fuerza suficiente para efectuar un trabajo de $7.0x10^4$ Joules. a)¿Cuál es la rapidez final del automóvil? b) ¿Qué trabajo debe efectuarse por los frenos para detenerlo? (Soluc. a) 40 km/h b) 7.0×10^4 J)
3. Un cuerpo de 0.10 kg de masa cae de una altura de 3 m sobre un montón de arena. Si el cuerpo penetra 3 cm antes de detenerse, ¿qué fuerza constante ejerció la arena sobre él? (Soluc. 98 N)
4. Una bola de 0.40 kg es lanzada horizontalmente desde la cima de una colina, a 120 m de altura, con una velocidad de 6 m/s. Calcular: a) la energía cinética inicial de la bola, b) su energía potencial inicial, c) su energía cinética al chocar con el suelo y d) su velocidad al chocar con el suelo (Soluc. a)7.2 J b) 470.40 J c) 477.60 J d) 48.8 m/s)
5. Un cuerpo de 0.5 kg de masa es soltado desde una altura de 1 m sobre un pequeño resorte vertical sujeto al suelo y cuya constante es k=2000 N/m. Calcular la máxima deformación del resorte. (Soluc.$7.2x10^{-2}$m)
6. Se apoya una cadena sobre una mesa sin fricción con un quinto de su longitud colgando desde el borde. Si la cadena tiene una longitud *l* y una masa *m*, ¿Qué cantidad de trabajo se requerirá para jalarla hasta apoyarla de nuevo totalmente sobre la mesa? (Soluc. mgl/50)
7. Un proyectil de 10 kg se dispara directamente hacia arriba con una velocidad inicial de 500 m/s a)¿cuál es la energía potencial del proyectil en el máximo de su trayectoria? b) ¿cuál sería la máxima energía potencial si el proyectil hubiese sido disparado con un ángulo de 45° en lugar de haberlo hecho directamente hacia arriba?(Soluc. a) $1.3x10^6$ J b) $6.3x10^5$ J)
8. Desde una ventana se arroja una pelota de 50 g con una velocidad inicial de 8.0 m/s y con un ángulo 30° por encima de la horizontal. Determinar: a) la energía cinética de la pelota en el máximo de su vuelo y b) su rapidez cuando está a 3.0 m por debajo de la ventana. (Soluc. a) 1.2 J b) 11m/s)

9. Dos niños están jugando a un juego en el cual tratan de pegarle a una cajita en el suelo, usando una pistola de balines accionada por un resorte y que está colocada horizontalmente sobre una mesa sin fricción (ver figura). El primer niño comprime el resorte en 1.0 cm y el balín cae a 20 cm por delante del blanco, cuya distancia horizontal al borde de la mesa es de 2.0 m. ¿Cuánto deberá comprimir el resorte el segundo niño para que el mismo balín caiga dentro de la caja? (Soluc. 1.1 cm)



10. El resorte de una pistola automática tiene una constante elástica de 17.79 Nw/m. Cuando la pistola se inclina un ángulo de 30°, se proyecta una bala de 56.69 gramos hasta una altura de 1.83 m. ¿En cuánto se habrá comprimido inicialmente el resorte? (Soluc. 38.1 cm)