Universidad Central de Venezuela
Facultad de Farmacia
Matemática - Física
Prof. J. R. Morales

Guía de Vectores
(Resumen de la Teoría)

1. En física distinguiremos dos tipos de cantidades: *vectoriales* y *escalares*. Las cantidades vectoriales constan de *magnitud*, *dirección* y *sentido*; las cantidades escalares quedan determinadas por su magnitud solamente. Ejemplos de cantidades vectoriales en física son: el desplazamiento, la velocidad, la aceleración y las fuerzas. Ejemplos de cantidades escalares son: la temperatura, la presión y el tiempo.

2. Gráficamente, un vector se representa por un segmento de recta orientado, esto es, una flecha. La recta que contiene a esta flecha determina la dirección; la flecha apunta en el sentido del vector y la longitud de esta flecha es la magnitud o módulo del vector. Además, se considerará que rectas paralelas determinan la misma dirección.

3. Se usará la notación $\vec{a}$ para designar vectores. Su magnitud o módulo se denotará por el símbolo $\|\vec{a}\|$ o simplemente por a.

4. *Adición de vectores*: una operación vectorial importante que encontraremos con frecuencia es la adición vectorial. Existen dos métodos para la adición vectorial: el *método geométrico* y el *método analítico*.

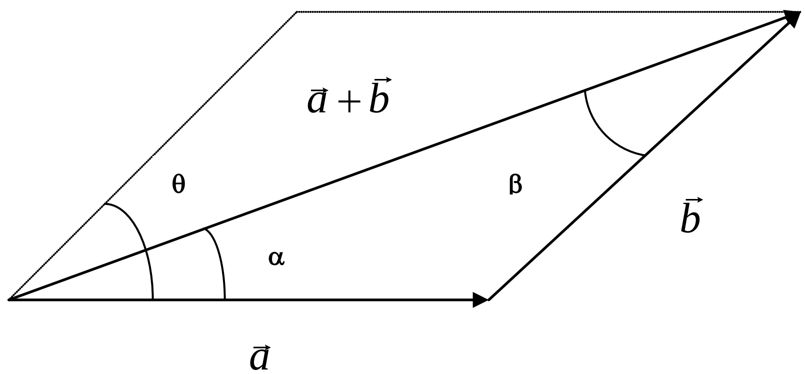
   4.1. *Método geométrico* (Ley del paralelogramo): dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, para hallar el vector $\vec{a}+\vec{b}$ se "coloca el vector $\vec{b}$ a continuación del vector $\vec{a}$" (es decir, el extremo de $\vec{a}$ coincidiendo con el origen de $\vec{b}$,conservando las direcciones de $\vec{a}$ y $\vec{b}$, respectivamente; ver Figura 1). En estas condiciones, el vector resultante $\vec{a}+\vec{b}$ será el vector con origen en el origen de $\vec{a}$ y extremo en el extremo de $\vec{b}$.

   4.1.1. Conociendo las magnitudes de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y el ángulo θ formado entre ellos, se puede calcular la magnitud y la dirección del vector suma mediante el uso de la *Ley del Seno* y la *Ley del Coseno*:

$$\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\| = \sqrt{\left\|\vec{a}\right\|^2 + \left\|\vec{b}\right\|^2 + 2\left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\|\cos\theta} \qquad \text{(ec. 1)}$$

$$\frac{\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|}{sen\theta} = \frac{\left\|\vec{a}\right\|}{sen\beta} = \frac{\left\|\vec{b}\right\|}{sen\alpha} \qquad \text{(ec. 2)}$$

Figura 1



4.1.2. La adición de vectores satisface las siguientes propiedades:

a) *Propiedad conmutativa*: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
b) *Propiedad asociativa*: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

4.1.3. El *opuesto* del vector $\vec{b}$, notado por $-\vec{b}$, es un vector con la misma magnitud y dirección que $\vec{b}$ pero con sentido opuesto. Así:

$$\vec{b} + (-\vec{b}) = \vec{0} \qquad \text{(ec. 3)}$$

donde $\vec{0}$ es el *vector nulo*.

4.1.4. Substraer el vector $\vec{b}$ del vector $\vec{a}$ es, por definición, sumar $\vec{a}$ al opuesto de $\vec{b}$:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \qquad \text{(ec. 4)}$$

4.2. *Método analítico*: nos limitaremos aquí a trabajar en 2 dimensiones. Definamos un *sistema de coordenadas* con un eje *x* y un eje *y* (Ver Figura 2). Dado un vector $\vec{a}$, siempre podemos encontrar dos vectores $\vec{a}_x$ y $\vec{a}_y$ cuya suma vectorial sea igual al vector $\vec{a}$. Estos dos vectores se llaman los *componentes* de $\vec{a}$ y por definición satisfacen la siguiente relación:

$$\vec{a}_x + \vec{a}_y = \vec{a} \qquad \text{(ec. 5)}$$

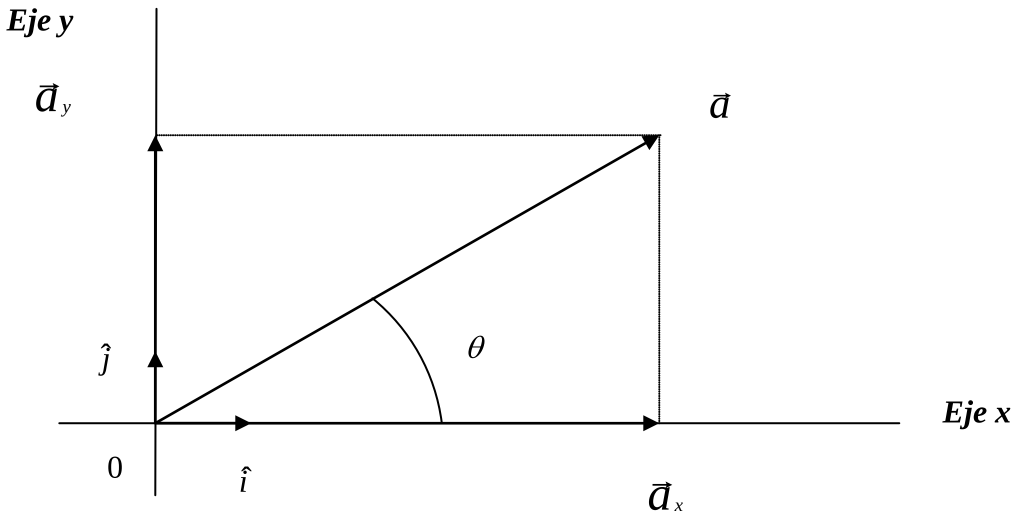


Figura 2

4.2.1. Suponiendo que θ es el ángulo entre el vector $\vec{a}$ y el semieje positivo de las x, las magnitudes de los dos componentes de $\vec{a}$, notadas por a_x y a_y, pueden determinarse fácilmente usando trigonometría:

$$a_x = \|\vec{a}\| \cos(\theta) \qquad \text{(ec. 6a)}$$

$$a_y = \|\vec{a}\|\, sen(\theta) \qquad \text{(ec. 6b)}$$

y el vector $\vec{a}$ puede escribirse como:

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} \qquad \text{(ec. 7)}$$

donde los vectores $\hat{i}$ y $\hat{j}$ son los *vectores coordenados unitarios* (es decir, de magnitud 1) a lo largo de los ejes x e y, respectivamente.

4.2.2. Se puede demostrar que si el vector $\vec{a}$ tiene componentes a_x y a_y, lo cual se denota mediante $\vec{a}$ = (a_x, a_y), y el vector $\vec{b}$ tiene componentes b_x y b_y, o sea, $\vec{b}$ = (b_x, b_y), respecto a un sistema de coordenadas dado, entonces el vector suma ($\vec{a}+\vec{b}$) satisface la relación:

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x,\ a_y+b_y) \qquad \text{(ec. 8)}$$

4.2.3. Si $\vec{a}$ = (a_x, a_y) entonces se puede demostrar, usando el Teorema de Pitágoras, que la magnitud del vector $\vec{a}$ satisface la relación:

$$\|\vec{a}\|=\sqrt{a_x^2+a_y^2} \qquad \text{(ec. 9)}$$

4.2.4. El ángulo θ entre el vector $\vec{a}$ y el semieje positivo de las x se puede obtener a partir de la relación:

$$tg(\theta)=\frac{a_y}{a_x} \qquad \text{(ec. 10)}$$

5. *Multiplicación de un vector por un escalar*: el producto de un vector $\vec{a}$ por un escalar s es un nuevo vector $\vec{b}$ cuya dirección es la misma que la del vector $\vec{a}$, pero cuya magnitud es la magnitud de $\vec{a}$ multiplicada por el valor absoluto de s y cuyo sentido es el mismo que $\vec{a}$ si s>0, o de sentido opuesto si s<0. Podemos resumir esto escribiendo:

$$\|\vec{b}\|=|s|\,\|\vec{a}\| \qquad \text{(ec. 11)}$$

En términos analíticos, se tiene la siguiente relación:

$$s\vec{a}=(s\,a_x,\ s\,a_y) \qquad \text{(ec. 12)}$$

6. *Producto escalar*: Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores, siendo θ el ángulo formado entre ellos. El *producto escalar* de $\vec{a}$ por $\vec{b}$, notado por $\vec{a}\bullet\vec{b}$, se define como el escalar:

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos(\theta) \qquad \text{(ec. 13)}$$

Analíticamente, si $\vec{a}$ = (a_x, a_y) y $\vec{b}$ = $(b_x,\ b_y)$, el producto escalar puede definirse mediante la siguiente relación:

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y \qquad \text{(ec. 14)}$$

El producto escalar satisface la *propiedad distributiva* respecto a la suma vectorial:

$$\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c} \qquad \text{(ec. 15)}$$

Además, el producto escalar satisface la siguiente propiedad:

$$\vec{a} \bullet \vec{a} = \|\vec{a}\|^2 \qquad \text{(ec. 16)}$$

7. *Producto vectorial*: el producto vectorial de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en el espacio (en R^3), notado por $\vec{u}\,\mathrm{x}\,\vec{v}$, es un tercer vector $\vec{c}$ en R^3 que satisface las siguientes propiedades:

a) la magnitud de $\vec{c}$ está dada por:

$$\|\vec{c}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,sen(\theta) \qquad \text{(ec. 17)}$$

donde θ es el menor ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) La dirección de $\vec{c}$ es perpendicular al plano definido por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y el sentido viene determinado por la "*regla de la mano derecha*" (Ver Figura 3).

En general, *el producto vectorial no es conmutativo* sino que satisface:

$$\vec{u}\,x\vec{v} = -\vec{v}\,x\vec{u} \qquad \text{(ec. 18)}$$

En términos analíticos, puede usarse la siguiente expresión para determinar los componentes de $\vec{u}\,\mathrm{x}\,\vec{v}$:

$$\vec{u}\,x\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = (u_y v_z - u_z v_y)\hat{i} + (u_z v_x - u_x v_z)\hat{j} + (u_x v_y - u_y v_x)\hat{k} \qquad \text{(ec. 19)}$$

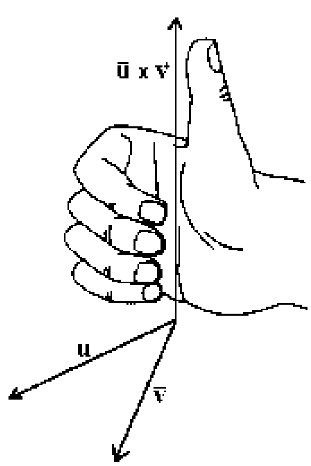


Figura 3

Ejercicios sobre vectores

1. a) ¿Cuál es la suma, en notación de vectores unitarios, de los dos vectores $\vec{A} = 4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = 3\hat{\imath} + 7\hat{\jmath}$?

   b) ¿Cuáles son la magnitud y dirección de $(\vec{A} + \vec{B})$?

   Soluc. a) $\hat{\imath} + 10\hat{\jmath}$ b) ~ 10 unidades a ~ 84° con el eje x

2. Calcular las componentes, la magnitud y la dirección de: a) $(\vec{A} + \vec{B})$ y b) $(\vec{B} - \vec{A})$, si $\vec{A} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = 5\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$.

   Soluc. a) (8, 2) b) (2, -6)

3. Dos vectores están dados por $\vec{A} = 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + \hat{k}$ y $\vec{B} = -\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 4\hat{k}$. Encontrar: a) $\vec{A} + \vec{B}$ b) $\vec{A} - \vec{B}$ c) un vector $\vec{C}$ tal que $\vec{A} - \vec{B} + \vec{C} = \vec{0}$.

   Soluc. a) 3i-2j+5k b) 5i-4j-3k c) el opuesto del vector que aparece en la respuesta b).

4. Sean los vectores, $\vec{A} = 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = 6\hat{\imath} + 8\hat{\jmath}$. Encontrar la magnitud y dirección de $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{A} + \vec{B}$ y $\vec{B} - \vec{A}$.

   Soluc. Las magnitudes son: 5, 10, 11 y 11. Los ángulos con el semieje positivo de las x son: 320°, 53°, 27° y 80°

5. Dos vectores están dados por $\vec{A} = 3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = -2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$. Encontrar: a) $\vec{A} \bullet \vec{B}$ b) $(\vec{A} + \vec{B}) \bullet \vec{B}$

   Soluc. a) 14 b) 34

6. Un vector $\vec{A}$ de 10 unidades de magnitud y otro vector $\vec{B}$ de 6 unidades de magnitud, apuntan en direcciones que difieren en 60°. Encontrar: a) el producto escalar de ambos vectores b) el producto vectorial de los dos vectores.

   Soluc. a) 30 b) un vector de magnitud 52 apuntando de acuerdo con la regla de la mano derecha.

7. La componente *x* de un vector es de –25 unidades y la componente *y* es de +40 unidades. A) ¿Cuál es la magnitud del vector? B) ¿Cuál es el ángulo entre la dirección del vector y el semieje positivo de las x?

   Soluc. a) 47 unidades b) 122°

8. El vector $\vec{A}$ tiene una magnitud de 5 unidades y está dirigido hacia el este. El vector $\vec{B}$ está dirigido a 45° al oeste del norte y tiene una

magnitud de 4 unidades. Construir el diagrama vectorial para calcular $(\vec{A}+\vec{B})$ y $(\vec{B}-\vec{A})$. Estimar las magnitudes y direcciones de $(\vec{A}+\vec{B})$ y $(\vec{B}-\vec{A})$.

Soluc. $(\vec{A}+\vec{B})$ apunta a 35° al este del norte y tiene una magnitud de 3.6 unidades. $(\vec{B}-\vec{A})$ apunta a 70° al oeste del norte y tiene una magnitud de 8.3 unidades.

9. Dos vectores de 6 y 9 unidades de longitud, forman un ángulo entre ellos de: a) 0°, b) 60°. Encontrar la magnitud de su resultante y su dirección con respecto al vector más pequeño.
Soluc. a) 15, θ=0° b) 13.08, θ=36.60°

10. Encontrar el ángulo entre dos vectores de 10 y 15 unidades de longitud, cuando su resultante tiene: a) 20 unidades de longitud, b) 12 unidades de longitud.
Soluc. a) θ = 75°29’ b) θ = 127°6’

11. El vector resultante de dos vectores tiene 10 unidades de longitud y hace un ángulo de 35° con uno de los vectores componentes, el cual tiene 12 unidades de longitud. Encontrar la magnitud del otro vector y el ángulo entre ellos.
Soluc. 6.87, θ = 56.60°

12. Dos vectores de 10 y 8 unidades de longitud forman entre sí un ángulo de: a) 60°, b) 90°. Encontrar la magnitud de la diferencia y al ángulo con respecto al vector mayor.
Soluc. a) θ = -48°41’, 9.165 b) θ = -38°41’, 12.8

13. En cada caso, hallar un vector $\vec{B}$ del plano tal que $\vec{B}\bullet\vec{A}=0$ y $\|\vec{B}\|=\|\vec{A}\|$. a) $\vec{A}=(1,1)$ b) $\vec{A}=(1,-1)$ c) $\vec{A}=(2,-3)$
Soluc. a) (1, -1) o (-1, 1), b) (1, 1) o (-1, -1), c) (3,2) o (-3, -2)

14. Sean $\vec{A}=(1,-2,3)$ y $\vec{B}=(3,1,2)$ dos vectores del espacio. En cada caso, hallar un vector C unitario paralelo a:
a) $\vec{A}+\vec{B}$ b) $\vec{A}-\vec{B}$ c) $\vec{A}-2\vec{B}$
Soluc .a) $(1/\sqrt{42})(4,-1,5)$ b) $(1/\sqrt{42})(-2,-3,1)$ c) $((1/\sqrt{42})(-5,-4,-1)$

15. Sean $\vec{A} = -\hat{\imath} + 2\hat{k}$, $\vec{B} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$, $\vec{C} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$. Calcular los siguientes vectores en función de $\hat{\imath},\ \hat{\jmath},\ \hat{k}$: a) $\vec{A}x\vec{B}$ b) $\vec{B}x\vec{C}$ c) $\vec{C}x\vec{A}$ d) $\vec{A}x(\vec{B}x\vec{C})$ e) $(\vec{A}x\vec{B})x\vec{C}$

Soluc. a) (-2,3,-1) b) (4,-5,3) c) (4,-4,2) d) (10, 11, 5) e) (8, 3, -7)

16. Si $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 3\hat{k}$, $\vec{B} = 2\hat{\imath} + 7\hat{\jmath} + 4\hat{k}$ y $\vec{C} = 3\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 6\hat{k}$, expresar el producto vectorial $(\vec{A} - \vec{C})x(\vec{B} - \vec{A})$ en función de los vectores $\hat{\imath},\ \hat{\jmath},\ \hat{k}$.

Soluc. $8\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 2\hat{k}$