

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA.
FACULTAD DE INGENIERÍA.
ESCUELA DE GEOLOGÍA, MINAS Y GEOFÍSICA.
DEPARTAMENTO DE GEOFÍSICA

“ Uso de la Técnica de rotación de Alford en la determinación del rumbo de fracturas verticales, y un enfoque analítico – numérico en el estudio de las polarizaciones de las Ondas qS para determinar propiedades de fracturas en medios anisótropos”.

Trabajo Especial de Grado
Presentado ante la Ilustre
Universidad Central de Venezuela
por el Br. Roberto A, Falcón V.
C I: 14 340 923
Para optar al título de Ingeniero Geofísico.

Caracas, Julio 2002.

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA.
FACULTAD DE INGENIERÍA.
ESCUELA DE GEOLOGÍA, MINAS Y GEOFÍSICA.
DEPARTAMENTO DE GEOFÍSICA

“ Uso de la Técnica de rotación de Alford en la determinación del rumbo de fracturas verticales, y un enfoque analítico – numérico en el estudio de las polarizaciones de las Ondas qS para determinar propiedades de fracturas medios anisótropos”.

Trabajo Especial de Grado
Presentado ante la Ilustre
Universidad Central de Venezuela
por el Br. Roberto A, Falcón V.
C I: 14 340 923
Para optar al título de Ingeniero Geofísico.

Tutor Industrial: Dr. Andrey Ortega.
PDVSA – Intevep./ Ingeniería Geofísica UCV.
Tutor Académico: Dr. Marco Figueroa.
Ingeniería Geofísica UCV.

Caracas, Julio 2002.

Caracas, 26 de Julio de 2002

Los abajo firmantes, miembros del Jurado designado por el Consejo de Escuela de Geología, Minas y Geofísica, para evaluar el Trabajo Especial de Grado presentado por el Bachiller Roberto Falcón, titulado:

USO DE LA TÉCNICA DE ROTACIÓN DE ALFORD EN LA DETERMINACIÓN DEL RUMBO DE FRACTURAS VERTICALES, Y UN ENFOQUE ANALÍTICO – NUMÉRICO EN EL ESTUDIO DE LAS POLARIZACIONES DE LAS ONDAS QS PARA DETERMINAR PROPIEDADES DE FRACTURAS EN MEDIOS ANISÓTROPAS.

Consideran que el mismo cumple con los requisitos exigidos por el plan de estudios conducente al Título de Ingeniero Geofísico, y sin que ello signifique que se hacen solidarios con las ideas expuestas por el autor, lo declaran APROBADO.

Prof. Dr. Carlos Gago.

Jurado

Prof. Juan J Infante.

Jurado

Prof. Dr. Marco S Figueroa.

Tutor Académico

Dr. Andrey Ortega

Tutor Industrial

DEDICATORIA

A mi Señor y Salvador JESUCRISTO, quien es y ha sido mi ayudador en todo momento y quien siempre ha sido FIEL.

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi sincera gratitud a todos los que de una manera u otra han estado presentes a lo largo de mi carrera de pregrado, que culmina exitosamente con este Trabajo Especial de Grado.

A Dios, mi Ayudador y Fuente de Inspiración.

A mis excelentes Tutores. Dr. Marco Figueroa, gracias por su valiosa colaboración en la dirección y edición del presente trabajo, así como por su visión de enfocar los problemas desde su naturaleza física y el uso de las herramientas matemáticas para su resolución. Dr. Andrey Ortega, gracias por darme la oportunidad de trabajar para Ud. y para la Industria – PDVSA Intevep, y gracias por enseñarme a pensar según la Escuela de Física; ha sido una enseñanza para mí el enfoque y la manera de solucionar problemas de índole práctica, a pesar del Complejo Fondo Teórico que éstos puedan tener. A mi Tutor de Pasantía, Msc Franklin Ruíz, por ser un ejemplo de trabajo excelente y digno modelo a seguir en la labor de los geocientíficos dentro del ámbito petrolero.

A mis excelentes y bellos padres: Octavia, gracias por tu amor y consejos, tus regaños y oraciones rindieron un fruto bueno; Roberto, gracias por tu ejemplo de fe y constancia, así como por tus insistentes consejos y tu provisión incondicional. Los amo grandemente.

A mis bellos hermanos. Rudy, gracias por ser mi amiga y hermana consejera, eres una persona que admiro por tu deseo de hacer las cosas bien y mejor, espero que el Sr. te bendiga ricamente. Dany, gracias por tu valiosa ayuda y por ser alguien que me admira, deseo ser siempre un buen ejemplo y que tu seas 10 veces mejor. José, eres un ejemplo de humildad, sobriedad, nobleza y dedicación, te admiro mucho hermanito menor. Fanny,

deseo que Dios te llene aún mas de Sabiduría y Talentos y seas de alegría para Él y nosotros.

A mis tíos y primos de la Familia Falcón – Caña: Jose y Miriam, así como sus hijos Miguel, José y Miriam. Gracias por ser factor determinante de la presencia y desarrollo de mi familia en el Oriente.

A mis hermanos (as), del alma: Lizcar, mi cuatrilliza, gracias por tu amistad incondicional, lealtad y cariño; Misael, gracias hermanazo por tus sabios consejos y valiosa amistad, así mismo por estar presente en los momentos más difíciles para mí, eres un excelente amigo y hermano; Deybi, gracias por ser mi amigo y hermano del alma, realmente eres un ejemplo de esfuerzo, constancia y excelencia; Janckarlos, gracias por tu amistad incondicional y tu valiosa cyber- ayuda, eres un talentoso y valioso hermano cuatrillizo; Ernesto, eres un excelente amigo incondicional, trabajador de excelencia y ejemplo de humildad que me ha servido de ejemplo; Juan J, gracias por tu amistad y sabios consejos, aún en los momentos críticos; Sylvia, tu amistad es excelente y eres una bella - talentosa persona, gracias por todas las que te debo; Gaby, tus sabios consejos – regañitos son de mucho provecho, eres una linda persona y gracias por ser mi amiga incondicional.

A mi grupo de amigos, que siempre estuvo pendiente de mi trabajo, los quiero mucho y deseo que el Dios del cielo les bendiga grandemente: Humberto – el papá -, Fermín – el hermano conciliador -, Ebelio - mi pana cardenal -, Christian – el pana fajado-, Juan – el pequeño- , Horacio – el futbolista -, Jean F – el Italiano-, Joao – el portugués -, Reinaldo – el prepa-. Así mismo, mis bellas y queridas amigas: Violeta, Marijor, Yasmelis, Adriana, Analis, Adalis, Heidi, Yudeilys, Thais y Lisbeth.

A la bella familia Oropeza – Palacios, mi familia adoptiva: Sr. Freddy y Sra. Nora, así como a los muchachos Eduardo, Ernesto, Freddy y Jesús. Gracias por su excelente hospitalidad y amor, realmente me hacen sentir como en mi casa.

A mis estupendos compañeros y amigos de Geofísica: Karla (eres muy especial), Juan Römer (mi gran hermano y amigo), Rosmary, Anny, Josmat, Saba, Moralis, Rosaura, Héctor, Modesto, Sergio, Luis, Javier, César, Peterson, Antonio, Hugo, Roger, Angel Z, Joel, Eros, Alexander, Leonardo, Hernando, Iván, Carlos E, Carlos V, Omar y Franklin C. Mención especial para mis compañeros de lucha: Franklin T, Erasmo A, y Alex G.

A mis amigos y hermanos Yoasmaly, Florimar, Tibisay, Libertad, Angel, Harold, Jorge, y demás miembros de la comunidad cristiana CAMEP. A mis amigos y líderes: Simón y Mirtha Elbittar, y Fausto Suárez. Gracias a Uds. por sus sabios consejos, su ayuda oportuna, y sus oraciones

ÍNDICE

<u>I. INTRODUCCIÓN</u>	1
<u>II. MARCO TEORICO</u>	4
2.1.-Ley de Hooke	4
2.2.- Modelado de medios fracturados.	16
2.2.1.- <u>Introducción al modelado de fracturas. modelo de fracturas de Kostrov (1969).</u>	22
2.2.2.- <u>Teoría de Schoenberg y Muir para el cálculo de medios anisotrópicos finamente estratificados.</u>	26
2.2.2.1.- <u>Módulos elásticos de los medios anisotrópicos estratificados.</u>	28
2.2.2.2.- <u>Aproximación de la Teoría de Grupo para la combinación de capas anisotrópicas:</u>	34
2.2.2.3.- <u>Subgrupos de G correspondientes a diversos sistemas de simetría.</u>	39
2.2.2.4.- <u>Elementos de Grupo de los conjuntos de “largas fracturas paralelas”.</u>	43
2.2.2.5.- <u>Medios anisotrópicos azimutalmente: Modelado de una roca fracturada verticalmente, según el modelo de Schoenberg y Muir (1989).</u>	47
2.2.2.5.1.- <u>Medios Monoclínicos.</u>	47
2.2.2.5.2.- <u>Medios Ortorrómicos.</u>	53
2.2.2.5.2.1.- <u>Consideraciones preliminares.</u>	54
2.2.2.5.2.2.- <u>Medio fracturado verticalmente: el modelo ortorrómico.</u>	60
2.2.3.- <u>Las fracturas no alineadas con los ejes coordenados.</u>	66
2.2.3.1.- <u>Fracturas verticales.</u>	66
2.2.3.2.- <u>Fracturas oblicuas.</u>	73

2.3.- Consideraciones matemáticas.	83
2.3.1.- <u>Transformación lineal en espacio 3-d Euclideo.</u>	83
2.3.2.- <u>Transformación de enlace.</u>	87
2.3.3.- <u>Transformación de Jacobi.</u>	88
<u>III. PROPAGACIÓN DE ONDAS CORPÓREAS DE INCIDENCIA NORMAL EN MEDIOS AZIMUTALMENTE ANISOTRÓPICOS.</u>	93
3.1.- Tensor elástico para medios fracturados, azimutalmente anisotrópicos	96
3.1.1.- <u>Fracturas Verticales.</u>	96
3.1.2.- <u>Fracturas Oblicuas.</u>	98
3.1.3.- <u>Fracturas que se interceptan (oblicuas y/o verticales).</u>	99
3.2.- Resolución de la Ecuación de Christoffel, para incidencia normal, determinación de los vectores polarización y del ángulo de polarización horizontal (ϕ_H).	100
3.2.1.- <u>Fracturas Verticales.</u>	101
3.2.2.- <u>Fracturas Oblicuas.</u>	104
87	
3.2.3.- <u>Fracturas que se interceptan.</u>	106
3.3.- Análisis de la variación del ángulo de polarización (ϕ_H) con la inclinación de uno de los dos sistemas de fracturas que se interceptan, y su relación con la orientación de ambos sistemas.	112
3.3.1.- <u>Descripción de los modelos de fracturas que se interceptan.</u>	112
3.3.2.- <u>Datos ploteados</u>	114
3.3.3.- <u>Modelo #1, $\phi_2 = 60^\circ$ (Monoclínico –Ortorrómico)</u>	114

3.3.3.1.- <u>Análisis Numérico de los modelos</u>	114
3.3.4.- <u>Descripción acerca del error estimado.</u>	123
3.3.5.- <u>Modelo Monoclínico - Ortorrómbico – Tetragonal</u>	127
3.4.- Uso de la técnica de Alford para la rotación de Sismogramas, con el fin de desacoplar las ondas de cizalla en una traza sísmica de incidencia normal para una capa fracturada.	132
3.4.1.- <u>Generación de trazas sísmicas sintéticas, de incidencia normal, para un modelo simple de capa fracturada.</u>	132
3.4.2.- <u>Técnica de rotación de Alford, para desacoplar trazas sísmicas grabadas con 2 fuentes de ondas S.</u>	143
<u>IV. USO DE LOS COEFICIENTES DE REFLEXIÓN EN LA DETERMINACIÓN DE PROPIEDADES DE LA FRACTURA.</u>	152
4.1.- Matrices de Impedancia Acústica en medios anisótropos.	152
4.2.- Coeficientes de Transmisión y Reflexión en medios anisótropos.	156
4.3.- Interfases de deslizamiento lineal.	162
4.4.- Reflexión / transmisión en una interfase de deslizamiento lineal.	167
4.4.1.- <u>Anisotropía 2-D.</u>	169
4.4.2.- <u>Formulación isotrópica.</u>	173
4.4.2.1.- <u>Incidencia normal.</u>	178
4.4.2.2.- <u>Angulo de cizalla de 45° en el cual $p_1^2 = 1/(2\beta^2)$.</u>	178
4.4.2.3.- <u>Lentitud Crítica de la onda P, en la que $p_1 = 1/\alpha$.</u>	179
4.4.2.4.- <u>Ejemplo de capa fracturada verticalmente, casos de baja y alta frecuencia.</u>	180

4.4.2.5.- <u>Lentitudes de extinción y estimaciones de la docilidad de las fracturas.</u>	189
4.4.2.5.1.- <u>Lentitud de extinción aproximada para la reflexión SS.</u>	190
4.4.2.5.2.- <u>Lentitud de extinción aproximada de la reflexión PP.</u>	192
4.4.2.6.- <u>Ejemplo numérico.</u>	195
4.5.- Alcance de la sección.	203
V. <u>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</u>	206
VI. <u>BIBLIOGRAFÍA</u>	208
VII. APÉNDICES.	210

ÍNDICE DE FIGURAS

	pág
Figura 1.1: Estados inicial y final de un Sólido Elástico Deformable.	14
Figuras 1.2: Variación del área de influencia de las Tensiones Internas cuando varía el radio de acción.	15
Figura 2.1. Capas finas en contacto, que poseen un espesor y anisotropía característicos.	29
Figura 2.2: Vista 3-D. Capa fracturada por dos fracturas verticales, empotrada en un medio isotrópico y ubicada entre dos semi-espacios isotrópicos.	48
Figura 2.3: Vista 3-D. Capa fracturada por dos fracturas verticales, empotrada en un medio isotrópico y ubicada por encima de un semi-espacio isotrópico.	49
Figura 3.1: Sistema Transversalmente Isotrópico, con un eje vertical de simetría, fracturado por un sistema vertical de fracturas paralelo al plano YZ.	55
Figura 3.2: Sistema Transversalmente Isotrópico, con un eje vertical de simetría, fracturado por un sistema vertical de fracturas paralelo al plano YZ. Modelo de Una Capa Fracturada.	56
Figura 4.1: Fractura vertical cuyo orientación no coincide con algún eje coordenado.	67
Figura 4.2: Fractura vertical cuyo orientación no coincide con algún eje coordenado. Modelo de una Capa.	68
Figura 5.1: Sistema de Fracturas Oblicuas con θ grados de inclinación y ϕ grados de azimut.	74
Figura 5.2: Rotación horaria del sistema de fracturas, primero θ grados alrededor de x_2 , y posteriormente ϕ grados alrededor del nuevo eje x_3' . Modelo de una capa	

fracturada por un Sistema de Fracturas Oblicuas con θ grados de inclinación y ϕ grados de azimut.	75
Figura 6: Descomposición geométrica de los vectores polarización, de un sistema de fracturas verticales, para un estudio sísmico con fuente de cizalla horizontal (SH).	132
Figura 7: Descomposición geométrica de los vectores polarización, de un sistema de fracturas verticales, para un estudio sísmico con fuente de cizalla vertical (SV).	134
Figura (8): Forma de los pulsos respectivos para un estudio sísmico con 2 fuentes de ondas de cizalla.	140
Figura (9): Forma de los trazas sintéticas correspondientes un estudio sísmico con 2 fuentes de ondas de cizalla.	141
Figura (10): Ondicula Ricker de 45 Hz, de frecuencia central.	142
Figura (11): Bases utilizadas para definir el plano horizontal (Técnica de Alford, para arreglo de 4-Componentes en los receptores: Tichelaar y Hatchell, 1997).	145
Figura (12): Descomposición de las Fuentes de cizalla FX y FY en la Base primada (Técnica de Alford, para arreglo de 4-Componentes en los receptores: Tichelaar y Hatchell, 1997).	146
Figura (13): Energía calculada para una rotación antihoraria de 360° .	149
Figura (14): Las cuatro trazas rotadas para el ángulo $\phi < 90^\circ$.	150
Figura (15): Las cuatro trazas rotadas para el ángulo $90 < \phi < 180$.	151
Figura (16.1): Coeficiente de reflexión PP, baja frecuencia.	181
Figura (16.2): Coeficiente de reflexión SP, baja frecuencia.	182

Figura (16.3): Coeficiente de reflexión PS, baja frecuencia.	183
Figura (16.4): Coeficiente de reflexión SS, baja frecuencia.	184
Figura (17.1): Coeficiente de reflexión PP, alta frecuencia.	185
Figura (17.2): Coeficiente de reflexión SP, alta frecuencia.	186
Figura (17.3): Coeficiente de reflexión PS, alta frecuencia.	187
Figura (17.4): Coeficiente de reflexión SS, alta frecuencia.	188
Figura (18.1): Coeficiente de reflexión PP, ejemplo numérico.	196
Figura (18.2): Coeficiente de reflexión SP, ejemplo numérico.	197
Figura (18.3): Coeficiente de reflexión PS, ejemplo numérico.	198
Figura (18.4): Coeficiente de reflexión SS, ejemplo numérico.	199
Figura (18.5): Sismogramas sintéticos PP y SP, ejemplo numérico.	200
Figura (18.6): Sismogramas sintéticos PS y SS, ejemplo numérico.	201

SECCIÓN I

INTRODUCCIÓN

La anisotropía en la mayoría de las partes de la corteza terrestre, particularmente en cuencas sedimentarias y llanuras de inundación volcánica, parece ser muy bien modelada por la simetría ortorrómbica. En las regiones de la corteza que no poseen alineación cristalina diferenciable, ha de esperarse una simetría ortorrómbica ya que la anisotropía en la tierra es dictada por dos causas. La primera es el campo de esfuerzos regional el cual, por ser un tensor simétrico de rango 2, tiene al menos tres planos espejos de simetría mutuamente perpendiculares, ésta última es la propiedad que define a un sólido elástico ortorrómbico. Este campo de esfuerzos generalmente consiste de dos esfuerzos principales - horizontales, desiguales, de carácter tectónico y un esfuerzo principal vertical causado por el peso de la carga litoestática. La segunda causa es la heterogeneidad de la roca la cual, en general, implica estratificación horizontal; siendo esta heterogeneidad al menos dos órdenes de magnitud más fuerte en la dirección vertical que en la horizontal, (Schoenberg y Helbig, 1997). Tal estratificación implica generalmente un comportamiento elástico transversalmente isotrópico (TI); además, la estratificación ocurre a todas las escalas. A escalas muy pequeñas, las lutitas parecen ser compuestas de finas micas más o menos alineadas empotradas en una matriz suave, lo cual, de acuerdo a la hipótesis de Hornby et al. (1994), conduce al comportamiento TI característico de muchas lutitas.

Frecuentemente se asume que la anisotropía azimutal, no es causada directamente por un campo de esfuerzos tectónicos, azimutalmente anisotrópico; en vez de ello, lo que se asume es que dicha anisotropía es causada por la presencia de fracturas verticales alineadas y / ó deformaciones preferenciales del espacio poroso, (Nelson 1985; Liu et al. 1993; Barton 1995; Liu et al. 1996). De donde, se presume que la masa rocosa se comporta como si tuviese sistemas de fracturas paralelas que

incrementan el valor de algunas componentes del tensor de docilidad en algunas direcciones preferenciales. Por ende, dichas docilidades de exceso, contribuyen a la anisotropía de la velocidad de las ondas sísmicas cuyas longitudes de onda son mucho más grandes que el espaciamiento entre fracturas. De allí que la teoría de medios homogéneos, anisótropos, equivalentes en el límite de la longitud de onda larga, se torna físicamente la hipótesis de trabajo, sobre la cual se quiere crear “un modelo”.

El comportamiento elástico de un medio, horizontalmente estratificado en el cual es empotrado un sistema de fracturas verticales paralelas, puede ser modelado por un “medio equivalente”, ortorrómbico homogéneo (en el límite de la longitud de onda larga); sus constantes elásticas se pueden expresar en términos de los módulos de la roca virgen TI y la docilidades de exceso causadas por las fracturas. De las docilidades de la fractura, se puede inferir cierta información sobre el grado de fracturamiento, la textura y el contenido de fluido de las fracturas (ver, e.g., Schoenberg y Sayers, 1995; Hudson, 1981; Schoenberg y Douma, 1988). Por otro lado, el efecto de una estratificación subhorizontal, para el caso de las lutitas, (o la presencia de otro sistema de fracturas), hace que el medio se comporte como uno de tipo monoclinico (MacBeth, 1997).

Alford (1986), propuso una técnica de rotación de sismogramas, que permitía determinar las direcciones preferenciales de polarización de las ondas S y como relacionarlas a la orientación de las fracturas en el subsuelo. No obstante, este caso sólo es válido para fracturas verticales y/o conjuntos de fracturas que se intercepten a un ángulo recto. La suposición de un modelo telúrico más complejo, como los medios anisótropos ortorrómbicos o medios monoclinicos, implica un conocimiento más a fondo, del efecto de las fracturas sobre la roca virgen y de como puede un sistema de fracturas tornarse dominante sobre otro, al momento de conformar la anisotropía sísmica de un medio fracturado.

En el desarrollo de este trabajo, se planteará un enfoque teórico acerca de los medios fracturados, y haciendo uso de éste se pretende obtener información importante sobre la estructura de las fracturas. En este sentido, se considerará la parte cinemática, representada en el estudio de las polarizaciones de las ondas S, y su relación con el rumbo de las fracturas. Así mismo, se estudiarán las variaciones en los coeficientes de reflexión, con el fin de estimar propiedades de las fracturas. La primera sección de este trabajo se concierne con los aspectos conceptuales de fondo, los cuales se emplean para simular medios fracturados, discute la notación usada comúnmente y plantea el enfoque de la anisotropía sísmica, especialmente, en el caso de sistemas de fracturas que se interceptan. En la sección subsiguiente, se esquematiza la deducción de las constantes elásticas del medio homogéneo equivalente, ortorrómbico y/o monoclinico, en términos de las constantes elásticas de un tensor diagonalizado, así como los ángulos de orientación azimutal y de la inclinación del sistema de fracturas. Por lo tanto, se plantean relaciones teóricas y experimentales acerca de la influencia de los sistemas de fracturas, en la determinación de las direcciones de polarización de las ondas S, para el caso de incidencia normal. Finalmente, la última sección plantea el uso de los coeficientes de reflexión en la determinación de propiedades de las fracturas, tales como textura y contenido de fluido.

SECCIÓN II

MARCO TEÓRICO

2.1.-LEY DE HOOKE

En la mecánica del medio continuo, el tema central de los sólidos elásticos deformables es de gran interés, dado que en la naturaleza, la noción de cuerpo perfectamente rígido es sólo una aproximación. En lo concerniente a la evolución de la deformación de los sólidos, siempre puede considerarse un estado inicial arbitrario, no deformado, y un estado final, deformado para $t = t$. En el proceso de deformación existe una causa dinámica, representada por los esfuerzos, y un efecto cinemático, el cual viene dado por las deformaciones generadas sobre el cuerpo, engendradas por los esfuerzos aplicados. Por lo tanto, se hace necesaria la introducción de una relación constitutiva que vincule los campos de esfuerzos y deformaciones (los cuales son de naturaleza distinta). Para tal fin, se formula la Ley de Hooke generalizada, la cual establece que los esfuerzos son iguales a las deformaciones generadas y a la rigidez que posee el medio, mientras que inversamente, las deformaciones son iguales a los esfuerzos aplicados y a la docilidad que presente el medio. Lo anterior se reduce a las siguientes expresiones:

$$\overline{T} = \overline{C} : \overline{E} \quad (2.1.a)$$

esto es,

$$T_{ij} = C_{ijkl} E_{kl} \quad (2.1.b)$$

que inversa o alternativamente,

$$\overline{\overline{E}} = \overline{\overline{C}}^{-1} : \overline{\overline{T}} \equiv \overline{\overline{S}} : \overline{\overline{T}} \quad (2.2.a)$$

es decir,

$$\rightarrow E_{kl} = S_{ijkl} T_{ij} \quad (2.2.b)$$

donde los elementos respectivos son:

$\overline{\overline{T}}$: *Tensor de esfuerzos.*

$\overline{\overline{C}}$: *Tensor de rigidez.*

$\overline{\overline{E}}$: *Tensor de deformaciones.*

$\overline{\overline{C}}^{-1} \equiv \overline{\overline{S}}$: *Tensor de docilidad.*

Lo anterior implica que, si conocemos las propiedades del medio, representadas por su tensor de rigidez o el de docilidad, existen dos posibles relaciones para el uso: (1) dadas las deformaciones, se pueden calcular los esfuerzos respectivos, y (2) dados los esfuerzos, se pueden obtener las deformaciones correspondientes. Ahora bien, se puede hacer una transcripción entre la notación tensorial, dada en las ecuaciones (2.1.b) y (2.2.b), a una notación matricial cuyo uso facilita la manipulación algebraica del problema. Esto se hace visualizando a los tensores de esfuerzos y de deformaciones como a unos grandes vectores columnas, de 9 componentes (espacio 9-D), por lo que el tensor de rigidez, (o docilidad, según sea el caso), representará por una matriz 9X9. De esta manera se puede reescribir la ecuación (2.1) como, de acuerdo a Noguera, 1997):

$$\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ T_{21} \\ T_{22} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{32} \\ T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1112} & c_{1113} & c_{1121} & c_{1122} & c_{1123} & c_{1131} & c_{1132} & c_{1133} \\ c_{1211} & c_{1212} & c_{1213} & c_{1221} & c_{1222} & c_{1223} & c_{1231} & c_{1232} & c_{1233} \\ c_{1311} & c_{1312} & c_{1313} & c_{1321} & c_{1322} & c_{1323} & c_{1331} & c_{1332} & c_{1333} \\ c_{2111} & c_{2112} & c_{2113} & c_{2121} & c_{2122} & c_{2123} & c_{2131} & c_{2132} & c_{2133} \\ c_{2211} & c_{2212} & c_{2213} & c_{2221} & c_{2222} & c_{2223} & c_{2231} & c_{2232} & c_{2233} \\ c_{2311} & c_{2312} & c_{2313} & c_{2321} & c_{2322} & c_{2323} & c_{2331} & c_{2332} & c_{2333} \\ c_{3111} & c_{3112} & c_{3113} & c_{3121} & c_{3122} & c_{3123} & c_{3131} & c_{3132} & c_{3133} \\ c_{3211} & c_{3212} & c_{3213} & c_{3221} & c_{3222} & c_{3223} & c_{3231} & c_{3232} & c_{3233} \\ c_{3311} & c_{3312} & c_{3313} & c_{3321} & c_{3322} & c_{3323} & c_{3331} & c_{3332} & c_{3333} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{13} \\ E_{21} \\ E_{22} \\ E_{23} \\ E_{31} \\ E_{32} \\ E_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.3.1)$$

$$\begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{13} \\ E_{21} \\ E_{22} \\ E_{23} \\ E_{31} \\ E_{32} \\ E_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{1111} & s_{1112} & s_{1113} & s_{1121} & s_{1122} & s_{1123} & s_{1131} & s_{1132} & s_{1133} \\ s_{1211} & s_{1212} & s_{1213} & s_{1221} & s_{1222} & s_{1223} & s_{1231} & s_{1232} & s_{1233} \\ s_{1311} & s_{1312} & s_{1313} & s_{1321} & s_{1322} & s_{1323} & s_{1331} & s_{1332} & s_{1333} \\ s_{2111} & s_{2112} & s_{2113} & s_{2121} & s_{2122} & s_{2123} & s_{2131} & s_{2132} & s_{2133} \\ s_{2211} & s_{2212} & s_{2213} & s_{2221} & s_{2222} & s_{2223} & s_{2231} & s_{2232} & s_{2233} \\ s_{2311} & s_{2312} & s_{2313} & s_{2321} & s_{2322} & s_{2323} & s_{2331} & s_{2332} & s_{2333} \\ s_{3111} & s_{3112} & s_{3113} & s_{3121} & s_{3122} & s_{3123} & s_{3131} & s_{3132} & s_{3133} \\ s_{3211} & s_{3212} & s_{3213} & s_{3221} & s_{3222} & s_{3223} & s_{3231} & s_{3232} & s_{3233} \\ s_{3311} & s_{3312} & s_{3313} & s_{3321} & s_{3322} & s_{3323} & s_{3331} & s_{3332} & s_{3333} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ T_{21} \\ T_{22} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{32} \\ T_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.3.2)$$

En principio, el tensor de rigidez (o el docilidad, según sea el caso) está definido por 81 constantes diferentes).

Ahora bien, se puede verificar que, al apelar a la simetría del tensor de esfuerzos ($T_{ij} = T_{ji}$), se puede pasar de 81 a 54 constantes diferentes, dado que $C_{ijkl} = C_{jikl}$. En consecuencia,

$$\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ + \\ T_{22} \\ T_{23} \\ + \\ + \\ T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1112} & c_{1113} & c_{1121} & c_{1122} & c_{1123} & c_{1131} & c_{1132} & c_{1133} \\ c_{1211} & c_{1212} & c_{1213} & c_{1221} & c_{1222} & c_{1223} & c_{1231} & c_{1232} & c_{1233} \\ c_{1311} & c_{1312} & c_{1313} & c_{1321} & c_{1322} & c_{1323} & c_{1331} & c_{1332} & c_{1333} \\ + & + & + & + & + & + & + & + & + \\ c_{2211} & c_{2212} & c_{2213} & c_{2221} & c_{2222} & c_{2223} & c_{2231} & c_{2232} & c_{2233} \\ c_{2311} & c_{2312} & c_{2313} & c_{2321} & c_{2322} & c_{2323} & c_{2331} & c_{2332} & c_{2333} \\ + & + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & + & + & + & + & + \\ c_{3311} & c_{3312} & c_{3313} & c_{3321} & c_{3322} & c_{3323} & c_{3331} & c_{3332} & c_{3333} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{13} \\ E_{21} \\ E_{22} \\ E_{23} \\ E_{31} \\ E_{32} \\ E_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

donde el signo mas (+) denota al elemento repetido, debido a la acción de la simetría. Análogamente, al apelar a la simetría del tensor de deformaciones ($E_{kl} = E_{lk}$), se debe cumplir que $C_{ijkl} = C_{ijlk}$, de tal manera que se pasará de 54 a 36 constantes diferentes,

$$\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ + \\ T_{22} \\ T_{23} \\ + \\ + \\ T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1112} & c_{1113} & - & c_{1122} & c_{1123} & - & - & c_{1133} \\ c_{1211} & c_{1212} & c_{1213} & - & c_{1222} & c_{1223} & - & - & c_{1233} \\ c_{1311} & c_{1312} & c_{1313} & - & c_{1322} & c_{1323} & - & - & c_{1333} \\ + & + & + & + & + & + & + & + & + \\ c_{2211} & c_{2212} & c_{2213} & - & c_{2222} & c_{2223} & - & - & c_{2233} \\ c_{2311} & c_{2312} & c_{2313} & - & c_{2322} & c_{2323} & - & - & c_{2333} \\ + & + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & + & + & + & + & + \\ c_{3311} & c_{3312} & c_{3313} & - & c_{3322} & c_{3323} & - & - & c_{3333} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{13} \\ - \\ E_{22} \\ E_{23} \\ - \\ - \\ E_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Aquí se ha denotado la eliminación del término repetido como el signo menos (-). Al examinar la expresión (2.5) se puede observar que los elementos restantes, no repetidos, pueden ser agrupados en una nueva representación matricial, cuyos elementos tendrán una dimensionalidad de 6-D. Por lo tanto, la ecuación (2.5) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{13} \\ T_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1123} & c_{1113} & c_{1112} \\ c_{2211} & c_{2222} & c_{2233} & c_{2223} & c_{2213} & c_{2212} \\ c_{3311} & c_{3322} & c_{3333} & c_{3323} & c_{3313} & c_{3312} \\ c_{2311} & c_{2322} & c_{2333} & c_{2323} & c_{2313} & c_{2312} \\ c_{1311} & c_{1322} & c_{1333} & c_{1323} & c_{1313} & c_{1312} \\ c_{1211} & c_{1222} & c_{1233} & c_{1223} & c_{1213} & c_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{23} \\ E_{13} \\ E_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Por otro lado, los grandes procesos de deformación en la corteza, son el producto de los esfuerzos tectónicos, generados por la dinámica de la tectónica de placas. Así mismo, estos procesos están caracterizados, en su mayoría, por rapidez de deformaciones muy lentas en el tiempo geológico a lo largo del cual se realizan, las cuales están mezcladas con algunas muy rápidas, (por ejemplo, en la ocurrencia de sismos y terremotos). Ambos tipos de procesos de deformación, se caracterizan por generar cambios en la energía interna (E) de los sólidos a los cuales afectan, de allí la importancia de apelar al uso de la termodinámica para describir, completamente, el comportamiento de los sólidos deformables. En este sentido, se hace necesario diferenciar entre lo que son procesos reversibles y procesos irreversibles. Así pues, junto con Sommerfeld (1969), definiremos a los procesos reversibles como aquella secuencia de estados de equilibrio, que acompaña a la deformación de un medio continuo. Sin embargo, los procesos que encontramos en la vida real son, en su mayoría, procesos irreversibles, es decir, procesos en los cuales se igualan los estados de equilibrio que ya han sido perturbados. Por lo tanto, se requiere definir el significado de “proceso reversible” por el de procesos infinitamente lentos, cuasi – estáticos, durante los cuales la fricción es despreciable, de tal manera que ninguna energía es disipada en forma de calor, por lo que toda la energía interna (almacenada) se puede aprovechar para ejecutar trabajo mecánico. A este tipo de procesos se le denomina también “procesos adiabáticos”.

A pesar de que esta noción de proceso reversible es extremadamente ideal, al momento de considerar cambios en los sólidos deformables, (como su deformación), éste se torna muy importante en Geofísica. Su importancia radica en el hecho de que al categorizar un proceso geológico como tal, entonces podemos deducir ecuaciones que plasmen o encajen, dentro de un modelo más simple del comportamiento aproximado de la corteza. Igualmente, cuando categorizamos un proceso geológico de irreversible, este nos capacita a escribir desigualdades, que marcan cotas, superiores o inferiores, que a manera de umbral, pueden dar cuenta de la factibilidad de un modelo más complejo para el comportamiento de la corteza. Un criterio físico-

matemático, para definir como reversible a un proceso, establece que el trabajo realizado a lo largo de un circuito cerrado, es independiente de la trayectoria si este es idénticamente igual a cero. Esto implica que, cualesquiera fuerzas aplicadas al sólido deformable, (tales como de superficie y, provenientes de su contorno y campo gravitatorio, sean de carácter de superficie y de volumen), sean de carácter conservatorio, esto es, derivables de ciertas funciones potenciales. Es así como, en el contexto de los medios deformables, Thomson asevera que la I y II Ley de Termodinámica son aplicables al proceso de deformación en un cuerpo empotrado en dicho. Por ende, bajo la hipótesis de que el proceso de deformación es termodinámicamente reversible, el estado de dicho cuerpo, (región $\mathbf{R} \subset \mathbf{R}^3$), se puede definir en forma única, por medio de las variables termodinámicas. Esto implica que, los puntos materiales que han sido perturbados de su posición de equilibrio espacial tienden a ocupar, en la variedad espacio –tiempo, su posición de original¹, una vez que cesen las causas que generaron dicha deformación. En consecuencia, se dice que la deformación ocurre dentro de la zona de comportamiento elástico del sólido deformable. Por lo tanto, si E, Q, W y S denotan respectivamente, la energía interna, la cantidad de calor, el trabajo ejecutado por las fuerzas externas, y la entropía del cuerpo, (todas por unidad de volumen), entonces, (en el caso de pequeñas deformaciones), tenemos la I y II ley de termodinámica,

$$\text{I. } dE = \delta Q + \delta W \quad (2.7.a)$$

$$\text{II. } \delta Q = T \cdot dS, \quad (2.7.b)$$

donde dE y dS son ,respectivamente, los incrementos de la energía interna y entropía que representan las diferenciales totales de las variables termodinámicas que definen el estado del cuerpo, con T denotando la temperatura absoluta de éste.

¹ Esto es cierto para un medio perfectamente elástico.

Eliminando el incremento de calor (dQ) de la (2.7.a), con la (2.7.b), obtenemos la relación termodinámica fundamental, para el proceso de deformación en el cuerpo en cuestión:

$$dU = TdS \pm dW . \quad (2.8)$$

Por lo tanto, definimos al cuerpo elástico, a la usanza de Thomson, como la especificación del tensor de deformación (E_{ij}) y una de las variables termodinámicas, (temperatura T , o entropía S), lo cual , determinara completamente su estado, esto es: el tensor de esfuerzos (T_{ij}) y los potenciales termodinámicos E y $F^2 = U - TS$

La primera ley enuncia que, los cambios totales de energía interna del sólido, serán iguales a la cantidad de calor absorbida (o cedida , según sea el caso) por el sólido, más la cantidad de trabajo que ejecutaron las fuerzas externas sobre el mismo, o bien, menos la cantidad de trabajo que las tensiones internas del sólido que se ejercen sobre le medio externo. Nótese de antemano, el convenio de signo asumido sobre la cantidad de trabajo, dependiendo de que tipo de fuerzas ejecuta el mismo. Por ende, se torna hallar la forma explícita que tiene la expresión del trabajo que se requiere para llevar un sólido deformable, desde un estado inicial, no deformado, a un estado final, deformado. Lo anterior es justificado por el hecho de que para definir termodinámicamente a un sólido, y junto con Oficcer (1974), requerimos que las especificaciones del tensor de deformación (E_{ij}) y una de las variables termodinámicas (T o S) sean suficiente para determinar en forma única el estado termodinámico del sólido en cuestión. Por lo tanto, junto con Landau y Lifshitz (1969), determinaremos el trabajo (dW) realizado por las tensiones internas, debido a un desplazamiento $d\vec{u}$, sobre el estado deformado. En consecuencia,

$$dW = \int_V dw dV \equiv \int_V (\vec{F} \bullet d\vec{U}) dV \equiv \int_V F_i du_i dV \quad (2.9)$$

con lo cual dw es el trabajo por unidad de volumen y correspondientemente, la F_i será la i -ésima componente de la fuerza por unidad de volumen, que se engendra dentro del sólido deformable, debido a las tensiones internas. Dicha fuerza procede de la expresión para la fuerza total que actúa sobre el sólido de volumen V , por medio de la integral, sobre la superficie $\partial V = S$:

$$\int_S \bar{T} \cdot d\bar{S} \equiv \int_S \bar{T} \cdot \hat{n} dS \equiv \int_V (\nabla \cdot \bar{T}) dV$$

es decir,

$$\int_S T_{ij} dS_j = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ij}) dV ,$$

donde hemos usado el Teorema de Gauss. Por ende,

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ij}) dV = \int_V F_i dV ,$$

de lo cual es evidente que

$$F_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ij}) . \tag{2.9.a}$$

Por lo tanto, usando (2.9.a) en (2.9)

$$dW = \int \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ij}) du_i dV , \tag{2.10}$$

y recordando que

² Energía Libre de Helmholtz, (Officcer, 1974).

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ij} du_i) = \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \right) du_i + T_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (du_i),$$

al integrar por partes la (2.10), obtendremos

$$\begin{aligned} dW &= \int_V dV \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ij} du_i) - \int_V dV T_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (du_i), \\ dW &= \int_V dS_j (T_{ij} du_i) - \int_V dV T_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (du_i), \end{aligned} \tag{2.11}$$

donde hemos usado nuevamente el Teorema de Gauss. Sin embargo, observando el integrando del primer término, en el miembro de la derecha de (2.11), podemos argumentar que si T_{ij} es acotado en el espacio: $|T_{ij}| \leq M$, se puede mostrar que si formamos la superficie S , suficientemente grande, entonces T_{ij} se puede hacer insignificamente pequeño sobre cualquier punto de dicha superficie.

Físicamente, sería equivalente a considerar un medio cuyo estado de referencia (no deformado), posee todos los puntos materiales que lo constituyen esparcidos sobre un contorno $\partial V = S$, extremadamente alejado de algún sistema local de coordenadas, $OX_1 X_2 X_3$, empotrado en el sólido deformable (Ver Figura 1.1). Por lo tanto, en dicho estado de referencia, no existen tensiones internas considerables y por ende, tampoco estado de esfuerzos alguno. Mostrar la anterior aseveración puede hacerse a través del siguiente planteamiento. Consideremos un ángulo sólido que emana del origen de coordenadas local, antes referido, en relación al área cerrada $\partial V = S$, ($t = t$). En el estado deformado:

$$d\Omega = \frac{\hat{e}_r \cdot \hat{n} dS}{r^2} = \frac{\cos \theta dS}{r^2} = \frac{dS_r}{r^2},$$

donde,

$$dS_r = \cos \theta dS = b_r dS,$$

con

$$b_r = \cos(\hat{e}_r, \hat{n}).$$

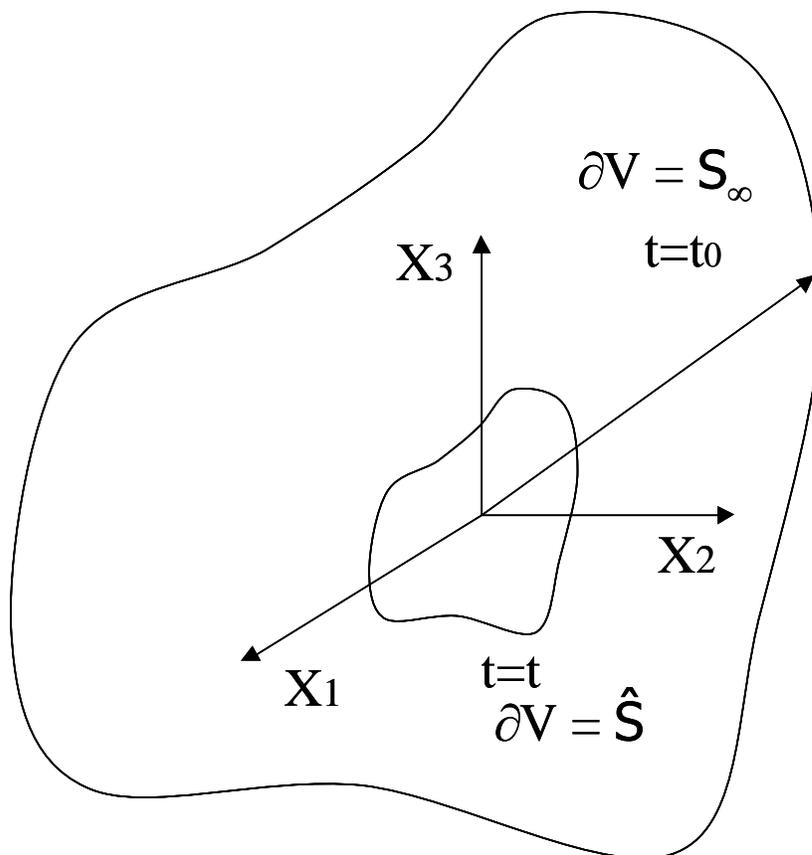


Figura 1.1: Estados inicial y final de un Sólido Elástico Deformable.

A continuación, consideremos la prolongación del mismo ángulo $d\Omega$ como se muestra en la Figura 1.2.b, de donde es evidente que ,

$$d\Omega = \frac{dS_r^{(1)}}{r_1^2} = \frac{dS_r^{(2)}}{r_2^2} . \quad (2.11.a)$$

Por lo tanto, si consideramos una fuerza resultante $\vec{F}^{(r)}$, (acotada), sobre cada una de las secciones transversales de $dS_r^{(1)}$ y $dS_r^{(2)}$, se visualiza fácilmente, que los esfuerzos normales, (T_{ij} , con $i = j = r$), serán:

$$\sigma_1 = \frac{\vec{F}^{(r)}}{dS_r^{(1)}} ; \quad \sigma_2 = \frac{\vec{F}^{(r)}}{dS_r^{(2)}} . \quad (2.11.b)$$

Por lo tanto, (2.11.b) y (2.11.a) dan lugar a:

$$\vec{F}^{(r)} = \sigma_1 dS_r^{(1)} = \sigma_2 dS_r^{(2)} , \quad (2.11.c)$$

$$\therefore \sigma_1 r_1^2 d\Omega = \sigma_2 r_2^2 d\Omega$$

$$\therefore \sigma_2 = \sigma_1 \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} \right) . \quad (2.11.d)$$

Ahora, la bajo la hipótesis de que σ_1 es dado como acotado, y r_1 es la distancia específica sobre $\partial V = S$, ($t = t$), donde pertenece el área dS_1 ; entonces, se puede escribir

$$\sigma(r_2) = \phi_1 / r_2^2 ; \quad \phi_1 \equiv \sigma(r_1) r_1^2 : \text{constante} . \quad (2.11.e)$$

De donde, para cualquier punto (P) a una distancia genérica $r > r_1$, pero aproximadamente cercana a $+\infty$, se deberá tener, usando (2.11.a) y (2.11.c)

$$\sigma(r) dS_r^{(P)} = \phi_1 d\Omega . \quad (2.11.f)$$

Por otro lado, es obvio que ϕ_1 se puede expresar como,

$$\phi_1 = \sigma(r_1)r_1^2 \equiv \sigma(r_1)(\delta u_1 + \Delta r_0), \quad (2.11.g)$$

y en consecuencia, generalizamos la (2.11.e) como,

$$\begin{aligned} \sigma(r) &= \frac{C_{11}}{r^2} + \frac{C_{10}}{r^2} \\ \therefore \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\sigma(r) - \frac{C_{10}}{r^2} \right) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{C_{11}}{r^2} \right), \end{aligned} \quad (2.11.h)$$

donde, hemos puesto,

$$C_{11} \equiv \sigma_1 \delta u_1; \quad C_{10} = \sigma_1 \Delta r_0. \quad (2.11.i)$$

Luego, regresando a (2.11.e), e integrando,

$$\begin{aligned} \int_S \sigma(r) dS_r &= \int_{4\pi} \phi_1 d\Omega = 4\pi \phi_1, \\ \therefore \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\int_S \sigma(r) dS_r \right) &= \lim_{r \rightarrow \infty} (4\pi \phi_1) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{C_{11}}{r^2} + \frac{C_{10}}{r^2} \right) \equiv 0. \end{aligned} \quad (2.11.j)$$

$$dW = \int_V dw dV = - \int_V T_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} du_i dV$$

$$= - \int_V T_{ij} \frac{1}{2} d \left(\frac{\partial}{\partial x_j} u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} u_j \right) dV,$$

y tomando en cuenta la simetría del tensor de esfuerzos T_{ij}

$$\therefore dW = \int_V dw dV \equiv - \int_V T_{ij} dE_{ij} dV, \quad (2.11k)$$

donde se ha usado al pequeño tensor de deformaciones,

$$E_{ij} := \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} U_i + \frac{\partial}{\partial x_i} U_j \right].$$

Retomando el concepto de la definición termodinámica de un sólido elástico, consideremos dos procesos de deformación: (i) Isotérmico y (ii) Adiabático.

En principio, usando la primera y segunda ley de termodinámica se tiene:

$$\therefore dE = T^* dS + T_{ij} dE_{ij}, \quad (2.12.1)$$

con el convenio de signos antes explicado.

No obstante, al igual que en Electrodinámica, se definen “Potenciales”, como funciones auxiliares que expresan varias propiedades físicas, pero de manera tal que conducen hacia la solución de un problema dado con menos incógnitas, en el cual se involucra una ecuación en derivadas parciales. Por ende, una de estas funciones es la energía libre de Helmholtz, y cuya definición viene dada por,

$$F := E - TS; \quad (2.12.2)$$

Metodológicamente, la aplicación de la termodinámica al sólido deformable procede a lo largo del siguiente esquema: dado el estado de deformación, (E_{ij}) y una variable

termodinámica, (T o S), se puede siempre determinar el “estado termodinámico”, $\{(T_{ij}, F) \text{ o } (T_{ij}, E)\}$, en forma única, mediante el uso de la I y la II ley de termodinámica. Por consiguiente, estaremos interesados en dos casos, geológicamente realizables:

- i) Caso Isotérmico: Dado el par (E_{ij}, T) se pretende hallar (T_{ij}, F) ; para la ruptura de la corteza terrestre.
- ii) Caso Adiabático: Dado el par (E_{ij}, S) se pretende hallar (T_{ij}, E) ; para la evolución de la corteza terrestre.

i) Caso isotérmico. Sean E_{ij} y T las variables independientes.

$$F=F(E_{ij}, T) \therefore dF = \frac{\partial F}{\partial E_{ij}} dE_{ij} + \frac{\partial F}{\partial T} dT ; \quad (i.1)$$

$$E = F + TS \therefore dE = dF + TdS + S dT; \quad (i.2)$$

Sustituyendo (i.2) en (i.1):

$$\therefore dF = T_{ij} dE_{ij} - S dT; \quad (2.13)$$

Comparando (2.13) con (i.1), se concluye que

$$\therefore T_{ij} \equiv \left. \frac{\partial F}{\partial E_{ij}} \right|_{T: Cte.} \quad (2.13.1)$$

$$S \equiv - \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_{E_{ij}: Cte.} \quad (2.13.2)$$

Por ende si el proceso es Isotérmico, $T = \text{constante}$, con $dT \equiv 0$, de tal manera que la (2.13) se torna en:

$$\therefore dF \equiv T_{ij} dE_{ij}; \quad (2.14)$$

ii) Caso adiabático. Sean E_{ij} y S las variables independientes.

$$E = E(E_{ij}, S) \therefore dU = \frac{\partial U}{\partial E_{ij}} dE_{ij} + \frac{\partial U}{\partial S} dS; \quad (ii.1)$$

De (ii.1) y (2.11), se concluye que,

$$\therefore T_{ij} \equiv \left. \frac{\partial E}{\partial E_{ij}} \right|_{S: \text{Cte.}}, \quad (2.15.1)$$

$$T \equiv \left. \frac{\partial E}{\partial S} \right|_{E_{ij}: \text{Cte.}}, \quad (2.15.2)$$

Donde dado que E es una función de estado, entonces dE es una diferencial exacta.

Por ende, si el proceso de deformación es adiabático, (i.e, Reversible), en el cual consideramos la entropía (S) del sistema como constante, entonces $dS = 0$ y la (2.11) se torna en,

$$\therefore dE = T_{ij} dE_{ij}$$

$$\therefore dE \equiv dW, \quad (2.15.3)$$

es decir, dW también será una función de estado, con W denotando el potencial del esfuerzo T_{ij} , en el caso adiabático.

Dado que la corteza terrestre permanece mayoritariamente en un proceso de deformación adiabático, es necesario encontrar la expresión explícita de W . Primeramente, si el sólido deformable es lineal y elástico, entonces

$T_{ij} \sim E_{kl}$ o $T_{ij} = C_{ijkl} E_{kl}$, con C_{ijkl} constante, y por ende,

$$dW = T_{ij} dE_{ij} = C_{ijkl} E_{kl} dE_{ij},$$

donde $E_{kl} dE_{ij}$, debe integrar en una función cuadrática homogénea en las deformaciones; de lo contrario, $E_{kl} = E_{kl}(E_{ij})$ implicaría que el sólido no es lineal. Por lo tanto, W debe ser una función cuadrática y homogénea en las deformaciones, con lo cual:

$$W \equiv \int \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} dE_{ij} \equiv \frac{1}{2} \int C_{ijkl} E_{kl} E_{ij} \Leftrightarrow \therefore \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} E_{ij} = 2W,$$

de lo cual se desprende,

$$W \equiv \frac{1}{2} C_{ijkl} E_{kl} E_{ij} \tag{2.16}$$

Lo anterior se conoce como el Teorema de Clapeyron, que no es más que el Teorema de Euler aplicado al caso elástico, para hallar la función de trabajo W . Sin embargo, hay que mencionar que esta forma explícita es válida sólo dentro del límite elástico. Existen expresiones más complejas que incluyen deformaciones dentro del comportamiento plástico del material. No obstante estas no serán consideradas en el presente trabajo. Por lo tanto, haciendo uso de la ecuación (2.16) y recordando que hemos supuesto a W como un función homogénea, entonces (aplicando la condición de igualdad de las derivadas cruzadas, se puede deducir la siguiente simetría:

$$C_{ijkl} \equiv C_{klij}. \quad (2.17)$$

En consecuencia, la matriz de rigidez de 6x6, será simétrica respecto de la diagonal, pasando ahora a tener solamente 21 constantes diferentes. Además, existe una notación de dos subíndices para esta Nueva Matriz de Rigidez (notación de Voight) y que se encuentra reseñada por Winterstein (1990), la misma es,

$$\begin{bmatrix} 11 \\ 22 \\ 33 \\ 23 \\ 13 \\ 12 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

2.2.- MODELADO DE MEDIOS FRACTURADOS.

2.2.1.- INTRODUCCIÓN AL MODELADO DE FRACTURAS. MODELO DE FRACTURAS DE KOSTROV (1969).

En principio, cuando se trabaja dentro de la Mecánica del Medio Continuo, ya sea dentro de la Sismología, la Sísmica, o la Mecánica de Rocas, la discontinuidad material, ocasionada por esfuerzos, se sintetiza en el vocablo genérico de “fractura”. Sin embargo, para enmarcar dicho término dentro de un esquema (menos fenomenológico), tal discontinuidad material se suele clasificar en dos grandes clases: Fracturas Frágiles y Fracturas Dúctiles. Por frágil, se entiende aquella que se genera en el medio sin que haya una deformación permanente. Mientras que una fractura

dúctil, es aquella que viene acompañada de una deformación inelástica considerable. Sin embargo, es necesario aclarar que ambas realizaciones, por lo general, no ocurren simultáneamente. Esto se debe a que la deformación permanente, por definición, sucede en un medio continuo (parte no fracturada del material), y este proceso de deformación no tiene (por sí mismo) influencia sobre el proceso de fracturamiento. Es por eso que, si deseamos distinguir el concepto de fractura frágil del de fractura dúctil, de una manera más precisa, clasificaremos a una fractura como frágil solamente si el material nunca fue sometido a algún proceso de deformación irreversible. No obstante, esto tiene una implicación obvia: ningún material puede tener este tipo de fracturas frágiles excepto, posiblemente, en aquellos cuerpos monocristalinos con estructuras perfectas y sin defectos.

En el marco geológico y tectónico, las rocas fracturadas por fuentes sísmicas como los terremotos y los esfuerzos regionales, experimentan deformaciones inelásticas que incluso pueden ser permanentes. Es por eso que Kostrov et al. (1969) redefinen el concepto de fractura frágil, aplicado al ámbito geofísico, como aquellas fracturas del medio que son el resultado de la formación de fisuras. Así pues, las propiedades del medio con respecto a la fractura, no dependen de las propiedades que este posea con respecto a la deformación (reología), por lo que uno puede considerar cuerpos con distintas reologías: elásticos, viscoelásticos, plásticos, y así sucesivamente.

Junto con Kostrov (op cit), pensamos que el fracturamiento de un medio consiste en un proceso de formación de fisuras (zonas de nucleación, Pobleto 1996), y una consecuente propagación de las fisuras (fracturas) o fallas a través de dicho medio. El fracturamiento real ocurre en los bordes (cantos) de las fisuras, durante su propagación dentro del medio continuo. En efecto, las partículas del medio que están adyacentes a las caras de las fisuras ya se encuentran fracturadas, de tal manera que allí que el fracturamiento es completo. No obstante, las partículas que se encuentran por delante de las fisuras, aún permanecen como parte del continuo, puesto que allí

no ha comenzado aún el proceso de fracturamiento. En síntesis, el comportamiento de las partículas en el estado continuo está descrito por el modelo reológico del medio, y el correspondiente a las partículas fracturadas, adyacentes a las paredes de las fisuras, está descrito por la ley de fricción.

Generalmente, puede se puede invocar un tercer estado (intermedio) de las partículas, el cual se realiza cuando el borde de la grieta pasa a través de la partícula. En este caso, el comportamiento del material no puede ser descrito del todo por un modelo reológico, ni por una ley de fricción. La zona del medio donde ocurre este estado de transición, se denomina “zona de proceso”. Allí, el comportamiento del material puede ser inestable o cercano a la inestabilidad, motivo por el cual los modelos reológico y friccional fallan al momento de describir dicho comportamiento. Por lo tanto, Kostrov et al. (1969) postulan que la “zona de proceso” estará representada por una reología dependiente de la deformación, o por una fricción dependiente de los deslizamientos, o por ambas.

El conjunto de suposiciones relacionadas a la transición de las partículas del medio, desde el estado continuo al estado fracturado, ha sido llamado el “modelo de la fractura” por Kostrov et al. (op cit). En este sentido, el modelo de fractura más simple se tendrá si se asume que no existe el estado intermedio, para las partículas del medio. Tal medio es llamado ideal o perfectamente frágil. En este medio idealmente frágil, las partículas pasan del estado continuo al estado fracturado a lo largo de una curva de comportamiento, llamada “el borde de la grieta”, y en la cual no están presentes las partículas pertenecientes al estado intermedio.

Por otro lado, los modelos de cuerpos imperfectamente frágiles, se obtienen si se asume que existe alguna interacción entre las caras de las fisuras cercanas al borde, que a su vez dependen del salto del desplazamiento, y la cual no puede ser reducida a una ley de fricción (Barenblatt, 1959; Leonov y Panasyuk, 1959; Dugdale, 1960; Ida, 1972; Palmer y Rice, 1973). Así mismo, hay que destacar que las fuerzas de

cohesión, en un medio frágil no ideal, no son necesariamente fuerzas interatómicas. En consecuencia, estas fuerzas son representadas como tracciones que actúan entre las caras de la falla (grieta) (y el concomitante concepto de esfuerzo), lo cual la liga con una descripción de la materia como un medio continuo; por lo tanto, depende del nivel de “macroscopicidad” con que se efectúe la descripción. Para hacer esta discusión mas tangible, consideremos el fenómeno físico que acompaña a la fractura de un determinado medio. Imaginemos el borde de una grieta, en una placa de metal, con un espesor cercano a 1mm. En una región de 10^{-7} cm de longitud característica, el material no puede ser descrito por un modelo continuo, y abusando del idioma, la fractura (si a este nivel puede llamarse a así), se reduce simplemente a la ruptura entre los enlaces interatómicos. Sin embargo, a una escala de 10^{-6} cm, se puede ignorar la estructura molecular del material, y éste puede ser descrito, aproximadamente, como un medio continuo; pero, se preserva el concepto de dislocaciones elementales, cuyos vectores de Burger son definidos por la constante del enrejado atómico (Pavlov y Jojlov, 1987). En las regiones de 10^{-4} cm de tamaño, pierden significado, y hasta se hace imposible el tomar en cuenta, las dislocaciones elementales que se encuentran dentro de las bandas de deslizamiento; mientras que ahora deben tomarse en cuenta las interfases entre los sub-granos. Posteriormente, viene el efecto de la estructura policristalina del material y la descripción de los defectos en términos de la deformación plástica volumétrica. En las regiones de 10^{-1} cm y mayores, es posible describir al material como un medio continuo y suave. Finalmente, en la región cercana a los 100 cm de longitud, la muestra entera puede ser considerada como una partícula del medio. Sin embargo, aún estos casos no abarcan todos los niveles de escala involucrados en el fracturamiento de un medio bajo una fuente tectónica. Por lo tanto, la fractura de un medio continuo debe entenderse como el fracturamiento de aquella parte del material descrita como un medio continuo, para un nivel de macroscopicidad dado. Además, la formación de fisuras de pequeño tamaño no se considera como fracturamiento del medio, aunque en un examen detallado (a nivel microscópico) se dan procesos de nucleación de estas microfracturas y pueden llegar

a formar discontinuidades considerables, dependiendo de la escala de observación con la que se esté describiendo al material.

2.2.2.- TEORÍA DE SCHOENBERG Y MUIR PARA EL CÁLCULO DE MEDIOS ANISOTRÓPICOS FINAMENTE ESTRATIFICADOS.

El objetivo del presente apartado, es el de abordar una técnica que, en el límite de longitudes de onda larga, simule un medio elástico anisotrópico y homogéneo. Para tal fin, adoptaremos la técnica de Schoenberg y Muir (1989). Dicha metodología nos permite obtener distribuciones heterogéneas de capas finas, las cuales pueden ser endosadas con propiedades físicas, propias de estructuras cristalinas específicas. Dado que la técnica en cuestión, hace uso de la teoría de Grupos, y sus representaciones matriciales, entonces encontramos relevante definir dicha noción.

Según Ritschmyer (1981), un grupo G es cualquier conjunto o colección de elementos $\{a, b, c, \dots, x, y, z, \dots\}$, finito o infinito, junto con una ley de composición, denotada por \circ , de manera tal que:

- i) Si a y b son cualesquiera dos elementos de G , entonces $a \circ b$ es también elemento de G (clausura).
- ii) Si a, b y c son cualesquiera tres elementos de G , entonces $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, (i.e., asociatividad).

- iii) Si a y b son cualesquiera dos elementos de G , entonces existen elementos únicos x e y , de manera tal que $a \circ x = b$, e $y \circ a = b$.

A menudo, los Físicos e Ingenieros prefieren remplazar el axioma (iii), por dos axiomas más explícitos y de más directa implicación, (Hamermesh, 1964):

iii)' Existe un elemento e , denominado la identidad, de manera tal que $a \circ e = e \circ a = a$.

- iv) Si a es cualquier elemento de G , entonces también lo es b , de manera tal que $a \circ b = b \circ a = e$; el elemento b se denomina el inverso de a y se denota por $b \equiv a^{-1}$.

Por otro lado, si los elementos de G son números, Matrices, cuaternios, etc., la composición de $a \circ b$, puede ser la suma ordinaria, la Multiplicación interna de matrices, etc. En el caso de aplicaciones (mappings), transformaciones, rotaciones, permutaciones, etc., la ley de composición se sobrentiende de tal manera que, si a y b son transformaciones, entonces, $a \circ b$ es la transformación que resulta de ejecutar b primeramente, y luego a .

En consecuencia, la técnica de Schoenberg y Muir, (1989), comienza estableciendo una asociación 1 a 1 entre los elementos de un grupo (finito) conmutativo (o abeliano) y cada sistema de capas finas representativa de los 8 sistemas de simetrías elásticas. Luego, si se estipula como ley de composición en $G \circ$, definida aquí como una simple suma escalar de matrices, entonces la asociatividad existente en el grupo y la conmutatividad, heredada de la suma escalar, nos capacita a obtener combinaciones de fracturas (representadas por capas muy delgadas), en donde el orden de éstas es irrelevante. Por ende, el elemento inverso corresponde a la resta escalar, implícito en la ley de composición. De aquí que se pueda descomponer en un

medio anisotrópico, en términos de un conjunto de elementos posibles, pero interfoliados.

Ahora bien, para implementar el esquema de grupo abeliano, se postula que las fracturas dependen a lo sumo de seis parámetros independientes de las propiedades del material en el cual ellas están empotradas. Además, se pueden tomar en cuenta múltiples conjuntos de fracturas que poseen distinta orientación, lo cual se hace por medio de la transformación de similitud, aplicada al tensor correspondiente, en donde se describa al objeto según al sistema de coordenadas local (propio del sistema de fracturas) con respecto al sistema de coordenadas global.

2.2.2.1.- Módulos elásticos de los medios anisotrópicos estratificados.

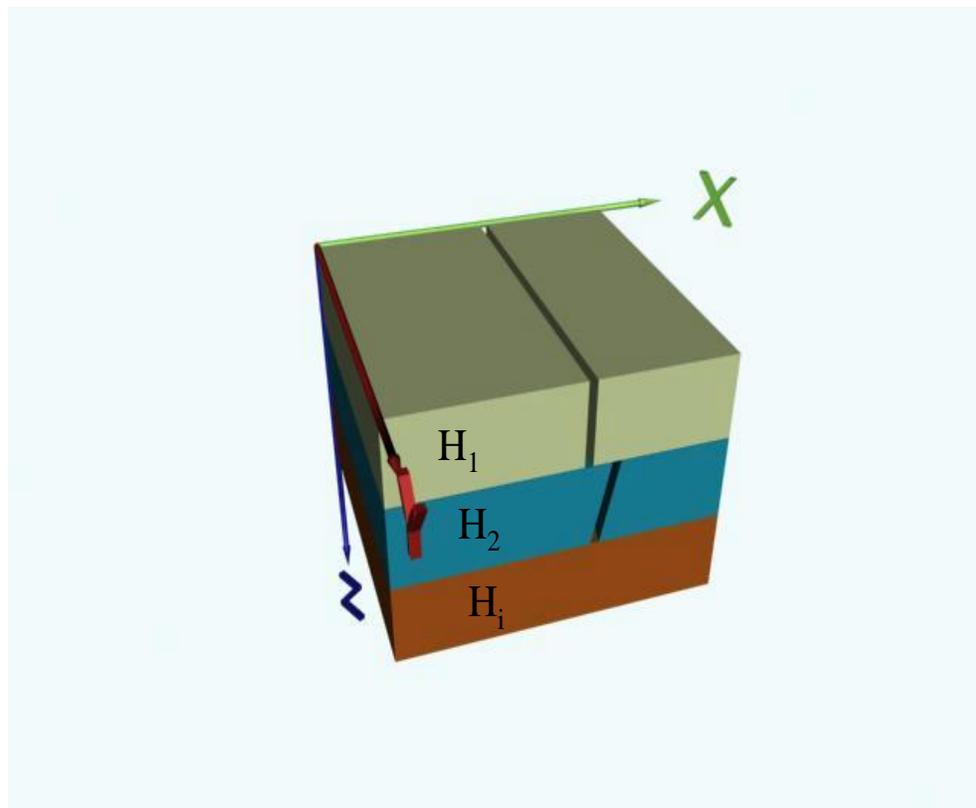
Considere un medio estratificado, compuesto de capas que poseen un tipo de anisotropía arbitraria y que se encuentran en contacto (Figura 2.1). Schoenberg y Muir (1989) asumen dos principios fundamentales a considerar:

- Capas finas: Relacionadas a la longitud de onda, aunque el espesor total considerado, de un medio equivalente, no tiene que ser necesariamente pequeño.
- Estacionaridad: Es necesaria para que el cálculo del medio homogéneo sea equivalente al medio estratificado sobre muchas longitudes de ondas. Por lo tanto, la cantidad relativa de cada constituyente se extiende de manera uniforme sobre todo el medio estratificado, bajo una escala de espesores asumida como una fracción de la longitud de onda más corta.

Por lo tanto, cada constituyente posee los siguientes elementos:

- Un espesor ponderado h_i , relacionado al espesor total proveniente de la suma de todos los espesores de los elementos constituyentes: $h_1 + h_2 + \dots + h_n = 1$.
- Una densidad ρ_i .
- Un tensor de rigidez C_{pqrs}^i . Con sus correspondientes tensores de esfuerzo σ_{pq}^i y deformación ε_{rs}^i .

Figura 2.1. Capas finas en contacto, que poseen un espesor y anisotropía característicos.



Según lo descrito en el apartado (1.1) de la presente sección, la Ley de Hooke puede ser escrita en notación de dos subíndices como:

$$\sigma^i_j = \sum_{k=1}^6 \bar{C}^i_{jk} \varepsilon^i_k, \quad j=1,\dots,6. \quad (2.18)$$

Además, se usa el convenio sobre las deformaciones, tal que:

$$[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6] \equiv [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12}]. \quad (2.18.1)$$

Por otro lado, la matriz de rigidez \bar{C}^i es una matriz simétrica y definitiva positiva, al tomar en cuenta la termodinámica, según lo expuesto en el apartado (1.1), que posee a lo sumo 21 constantes elásticas diferentes. Dichas constantes elásticas, para el medio equivalente anisotrópico de largas longitudes de ondas, pueden ser expresadas en términos del espesor ponderado (anteriormente mencionado). Además, se asume que las componentes de todos los esfuerzos que actúan sobre todas las capas, son los mismos en todas las capas:

$$\sigma^i_{13} \equiv \sigma^i_5 = \sigma_5, \sigma^i_{23} \equiv \sigma^i_4 = \sigma_4, \text{ y } \sigma^i_{33} \equiv \sigma^i_3 = \sigma_3. \quad (2.18.2)$$

Además, se asume que las componentes de las deformaciones que ocurren en el plano de las capas, son los mismos en todas las capas:

$$\varepsilon^i_{11} \equiv \varepsilon^i_1 = \varepsilon_1, \varepsilon^i_{22} \equiv \varepsilon^i_2 = \varepsilon_2, \text{ y } 2\varepsilon^i_{12} \equiv \varepsilon^i_6 = \varepsilon_6. \quad (2.18.3)$$

Las otras componentes de los esfuerzos y las deformaciones pueden variar entre capa y capa, pero se consideran constantes para cada capa y las mismas representan valores promedios dentro de una capa. El plano de las capas será denominado el plano tangencial, mientras que el plano perpendicular al plano de las capas será

denominado el plano transversal. Junto con Schoenberg y Muir (1989), definimos los vectores de esfuerzos y de deformación, de acuerdo al plano donde ellos actúan, de la siguiente manera:

$$[S^i_T] = \begin{pmatrix} \sigma^i_1 \\ \sigma^i_2 \\ \sigma^i_6 \end{pmatrix}, \quad [S^i_N] = \begin{pmatrix} \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{pmatrix}. \quad (2.19.a.1)$$

$$[E^i_T] = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}, \quad [E^i_N] = \begin{pmatrix} \varepsilon^i_3 \\ \varepsilon^i_4 \\ \varepsilon^i_5 \end{pmatrix}, \quad (2.19.b.1)$$

Estas relaciones, permiten expresar los esfuerzos dados en la expresión (2.18) como las combinaciones lineales:

$$\begin{aligned} S^i_T &= \bar{C}^i_{TT} E_T + \bar{C}^i_{TN} E_N, \\ S^i_N &= \bar{C}^i_{NT} E_T + \bar{C}^i_{NN} E_N, \end{aligned} \quad (2.19.a.2) \text{ y } (2.19.b.2)$$

donde,

$$\bar{C}^i_{NT} = \left\{ \bar{C}^i_{TN} \right\}^T \quad (2.19.c.1)$$

y la forma explícita de los nuevos tensores de rigidez usados es dada como submatrices 3x3,

$$\bar{C}^i_{NN} = \begin{bmatrix} c^i_{33} & c^i_{34} & c^i_{35} \\ c^i_{34} & c^i_{44} & c^i_{45} \\ c^i_{35} & c^i_{45} & c^i_{55} \end{bmatrix}, \quad (2.19.c.2)$$

$$\bar{C}^i_{TN} = \begin{bmatrix} c^i_{13} & c^i_{14} & c^i_{15} \\ c^i_{23} & c^i_{24} & c^i_{25} \\ c^i_{36} & c^i_{46} & c^i_{56} \end{bmatrix}, \quad (2.19.c.3)$$

$$\bar{C}^i_{TT} = \begin{bmatrix} c^i_{11} & c^i_{12} & c^i_{16} \\ c^i_{12} & c^i_{22} & c^i_{26} \\ c^i_{16} & c^i_{26} & c^i_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.19.c.4)$$

El medio homogéneo, equivalente para longitud de onda larga, se encuentra mediante una técnica de promedios. No obstante, dicho promedio no puede realizarse directamente, ya que no están determinados los vectores S^i_T o E^i_N . Por lo tanto, se hace necesario resolver las ecuaciones (2.19) para hallar los valores de S^i_T o E^i_N , antes de realizar el promedio. Así pues, para obtener una solución, multiplicamos por la izquierda la ecuación (2.19.b) por la matriz inversa $(\bar{C}^i)^{-1}_{NN}$ y se despeja el valor de E^i_N . Luego, se sustituye el resultado dentro de la ecuación (2.19.a) y se agrupan los términos semejantes. De esta manera, se pueden obtener los siguientes resultados:

$$S^i_T = \left(\bar{C}^i_{TT} - \bar{C}^i_{TN} (\bar{C}^i_{NN})^{-1} \bar{C}^i_{NT} \right) E_T + \bar{C}^i_{TN} (\bar{C}^i_{NN})^{-1} S_N, \quad (2.20.a),$$

$$E^i_N = -(\bar{C}^i_{NN})^{-1} \bar{C}^i_{NT} E_T + (\bar{C}^i_{NN})^{-1} S_N. \quad (2.20.b).$$

La ecuación (2.20.a), muestra las componentes del esfuerzo sobre el plano tangencial de la i -ésima capa. La ecuación (2.20.b) es una versión promedio del esfuerzo tangencial dado por la fuerza total que actúa sobre todos los planos de las capas, divididos por el espesor total; lo anterior es equivalente a utilizar un promedio ponderado por espesores en la ecuación (2.20.a). Así mismo, la deformación que ocurre en el plano perpendicular de muchas capas, está dada por el total de los desplazamientos del tope de la superficie con respecto a la base, dividido por el espesor total; lo anterior es equivalente a un promedio ponderado por espesores de la ecuación (2.20.b). Tomando en cuenta sólo los valores promedios, y denotando los mismos como $\langle xx \rangle$, las ecuaciones (2.20) pueden ser rescritas como,

$$\langle S_T \rangle = \left(\langle \bar{C}_{TT} \rangle - \langle \bar{C}_{TN} \bar{C}_{NN}^{-1} \bar{C}_{NT} \rangle \right) E_T + \langle \bar{C}_{TN} \bar{C}_{NN}^{-1} \rangle S_N, \quad (2.21.a)$$

$$\langle E_N \rangle = - \langle \bar{C}_{NN}^{-1} \bar{C}_{NT} \rangle E_T + \langle \bar{C}_{NN}^{-1} \rangle S_N. \quad (2.21.b)$$

Ahora bien, multiplicando por la izquierda la ecuación (2.21.b) con $\langle \bar{C}_{NN}^{-1} \rangle^{-1}$, para hallar S_N ; y sustituyendo el resultado en la ecuación (2.21.a) obtenen:

$$S_N = \langle \bar{C}_{NN}^{-1} \rangle^{-1} \langle E_N \rangle + \langle (\bar{C}_{NN}^{-1})^{-1} \bar{C}_{NN}^{-1} \bar{C}_{NT} \rangle E_T \quad (2.22.a)$$

y análogamente al caso anterior, obtendremos,

$$\begin{aligned} \langle S_T \rangle = & \left(\langle \bar{C}_{TT} \rangle - \langle \bar{C}_{TN} \bar{C}_{NN}^{-1} \bar{C}_{NT} \rangle + \langle \bar{C}_{TN} \bar{C}_{NN}^{-1} \rangle \langle (\bar{C}_{NN}^{-1})^{-1} \bar{C}_{NN}^{-1} \bar{C}_{NT} \rangle \right) E_T \\ & + \langle \bar{C}_{TN} \bar{C}_{NN}^{-1} \rangle (\bar{C}_{NN}^{-1})^{-1} \langle E_N \rangle, \end{aligned} \quad (2.22.b)$$

Luego, comparando estos resultados con la ecuación (19), podemos escribir las siguientes relaciones:

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_{TT} &= \left(\langle \bar{C}_{TT} \rangle - \langle \bar{C}_{TN} \bar{C}_{NN}^{-1} \bar{C}_{NT} \rangle + \langle \bar{C}_{TN} \bar{C}_{NN}^{-1} \rangle \langle (\bar{C}_{NN}^{-1})^{-1} \bar{C}_{NN}^{-1} \bar{C}_{NT} \rangle \right), \\ \bar{C}_{TN} &= \langle \bar{C}_{TN} \bar{C}_{NN}^{-1} \rangle \bar{C}_{NN}, \\ \bar{C}_{NN} &= (\bar{C}_{NN}^{-1})^{-1}. \end{aligned} \right\} (2.22.c)$$

Las ecuaciones (2.22), son las relaciones esfuerzo – deformación, promediadas correctamente para el medio equivalente formado por n medios anisotrópicos intercalados. Igualmente debe existir una densidad equivalente del medio, dada como una densidad promedio $\langle \rho \rangle$, (Schoenberg, 1983).

2.2.2.2.- Aproximación de la Teoría de Grupo para la combinación de capas anisotrópicas:

Para un constituyente anisotrópico dado, el i-ésimo componente, se distribuye en capas finas, a lo largo de un espesor total H de una región dada. Entonces, denominemos H_i al espesor ponderado de este elemento constituyente en la región, tal que $H_i = h_i H$. Las cantidades H_i , ρ_i , y las tres matrices 3x3 de los módulos elásticos $\{C_{NN}^i, C_{TN}^i \text{ y } C_{TT}^i\}$, del i-ésimo elemento constituyente, son los parámetros del modelo físico. Estos parámetros se aplican a un nuevo conjunto de cinco elementos, formado por dos escalares y tres matrices 3x3. A dicho conjunto se le denomina el Grupo del i-ésimo componente (\underline{G}_i). Así pues, la transformación mediante la cual se realiza la aplicación (apoyándose en los coeficientes respectivos de las ecuaciones <2.20>), está dada por (Schoenberg y Muir, (1989),

$$\begin{bmatrix} H_i \\ \rho_i \\ \bar{C}_{NN}^i \\ \bar{C}_{TN}^i \\ \bar{C}_{TT}^i \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} H_i \\ H_i \rho_i \\ H_i (\bar{C}_{NN}^i)^{-1} \\ H_i \bar{C}_{TN}^i (\bar{C}_{NN}^i)^{-1} \\ H_i [\bar{C}_{TT}^i - \bar{C}_{TN}^i (\bar{C}_{NN}^i)^{-1} \bar{C}_{NT}^i] \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} g^i(1) \\ g^i(2) \\ g^i(3) \\ g^i(4) \\ g^i(5) \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Note que $g^i(1)$, el espesor ponderado del i -ésimo constituyente, tiene dimensiones de longitud; $g^i(2)$, la masa del i -ésimo constituyente en una columna de área unitaria, tiene dimensiones de longitud por densidad. Así mismo, $g^i(3)$, tiene dimensiones de longitud sobre esfuerzo, $g^i(4)$ tiene dimensiones de longitud, y $g^i(5)$ posee unidades de longitud por esfuerzo. Los elementos $g^i(j)$, $j=3, 4, 5$; son H_i veces los coeficientes respectivos que aparecen en las ecuaciones (2.20.a) y (2.20.b). Como se mostró anteriormente, las ecuaciones (2.20) pueden ser promediadas para engendrar las ecuaciones (2.21), las cuales pertenecen al medio equivalente que tiene a las componentes de esfuerzos del plano tangencial, y a las componentes de las deformaciones del plano transversal, iguales a los promedios respectivos de los distintos constituyentes del medio. De esta manera, el conjunto de todos los elementos de grupo ($\underline{\mathbf{G}}_i$) posibles, forman un grupo Abelianiano (llamado \mathbf{G}) bajo la operación fundamental de la suma. Las ecuaciones (2.23) aplican un modelo físico (correspondiente a un determinado elemento constituyente), en un elemento de grupo. De aquí se desprende que a este proceso se le denomine “aplicación de grupo”, en lo sucesivo. La operación de combinación en el grupo, es dada a través de la suma de los distintos constituyentes de los elementos de grupo $\underline{\mathbf{G}}_i$. Así pues, $\underline{\mathbf{G}}_1 + \underline{\mathbf{G}}_2$, corresponde al cálculo del elemento de grupo del medio homogéneo de espesor $H_1 + H_2$, equivalente a capas finamente estratificada y pertenecientes a los medios 1 y 2. Las propiedades asociativa y conmutativa, nos permiten combinar los elementos de grupo, lo cual es equivalente a intercalar una serie de espesores acumulados de las

capas constituyentes, sabiendo que el orden de la combinación de los diversos constituyentes, no son relevantes sobre el resultado final.

Ahora bien, para cada cualquier elemento de grupo \underline{G}_i , tal que $g^i(1) \neq 0$ y $g^i(3)$ sea invertible, podemos regresar al conjunto de los parámetros del modelo físico mediante la “aplicación inversa en el grupo”, del elemento respectivo \underline{G}_i . De donde se puede verificar que, esta transformación inversa es dada por:

$$\begin{bmatrix} g^i(1) \\ g^i(2) \\ g^i(3) \\ g^i(4) \\ g^i(5) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} g^i(1) \\ g^i(2)/g^i(1) \\ g^i(1)(g^i(3))^{-1} \\ g^i(4)(g^i(3))^{-1} \\ [g^i(5) + g^i(4)(g^i(3))^{-1}(g^i(4))^T]/g^i(1) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} H_i \\ \rho_i \\ \bar{C}_{NN}^i \\ \bar{C}_{TN}^i \\ \bar{C}_{TT}^i \end{bmatrix} \cdot (2.24)$$

Debido a que la combinación de medios (capas) elásticos estables, siempre es equivalente a un nuevo medio (capa) elástico, homogéneo y estable, entonces la suma de los elementos de grupo correspondientes, es un elemento de grupo que corresponde a una capa homogénea, estable (clausura). Para ilustrar esto, considere el

elemento de grupo: $\underline{G} = \sum_{i=1}^n \underline{G}_i$, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\underline{g(1)} &= \sum_{i=1}^n \underline{g(1)}_i = \sum_{i=1}^n \underline{H}_i, \\
\underline{g(2)} &= \sum_{i=1}^n \underline{g(2)}_i = \sum_{i=1}^n \underline{H}_i \rho_i. \\
\underline{g(3)} &= \sum_{i=1}^n \underline{g(3)}_i = \sum_{i=1}^n \underline{H}_i (\bar{C}_{NN}^i)^{-1}, \\
\underline{g(4)} &= \sum_{i=1}^n \underline{g(4)}_i = \sum_{i=1}^n \underline{H}_i \bar{C}_{TN}^i (\bar{C}_{NN}^i)^{-1}, \\
\underline{g(5)} &= \sum_{i=1}^n \underline{g(5)}_i = \sum_{i=1}^n \underline{H}_i \left[\bar{C}_{TT}^i - \bar{C}_{TN}^i (\bar{C}_{NN}^i)^{-1} \bar{C}_{NT}^i \right],
\end{aligned} \tag{2.25}$$

y dicho elemento de grupo, tendrá un aplicación inverso que retorna los parámetros del modelo físico de acuerdo a la ecuación (2.24) y usando el valor del espesor relativo h_i , como,

$$h_i = H_i / \sum_{i=1}^n H_i.$$

Así pues, los parámetros físicos del modelo en cuestión son dados como sigue:

$$H = g(1) = \sum_{i=1}^n H^i, \tag{2.26.a}$$

$$\rho = g(2) / g(1) = \sum_{i=1}^n H^i \rho^i / \sum_{i=1}^n H^i = \langle \rho \rangle, \tag{2.26.b}$$

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{NN} &= g(1) * g(3)^{-1} = \sum_{i=1}^n H^i \left(\sum_{i=1}^n H^i (\bar{C}_{NN}^i)^{-1} \right)^{-1} \\
&= \langle \bar{C}_{NN}^{-1} \rangle^{-1},
\end{aligned} \tag{2.26.c}$$

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{TN} &= g(4) * g(3)^{-1} = \sum_{i=1}^n H_i \bar{C}_{TN}^i (\bar{C}_{NN}^i)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n H_i (\bar{C}_{NN}^i)^{-1} \right)^{-1} \\
&= \langle \bar{C}_{TN} \bar{C}_{NN}^{-1} \rangle \langle \bar{C}_{NN}^{-1} \rangle^{-1},
\end{aligned} \tag{2.26.d}$$

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{TT} &= \left[g(5) + g(4) * g(3)^{-1} g(4)^T \right] / g(1) \\
&= \left[\sum_{i=1}^n H^i \left[\bar{C}_{TT}^i - \bar{C}_{TN}^i (\bar{C}_{NN}^i)^{-1} \bar{C}_{NT}^i \right] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^n H^i \bar{C}_{TN}^i (\bar{C}_{NN}^i)^{-1} * \left(\sum_{i=1}^n H_i (\bar{C}_{NN}^i)^{-1} \right)^{-1} * \left(\sum_{i=1}^n H_i \bar{C}_{TN}^i (\bar{C}_{NN}^i)^{-1} \right)^T \right] / \sum_{i=1}^n H^i
\end{aligned}
\tag{2.26.e}$$

Las definiciones dadas en la ecuación (2.22.c) han sido rescritas y presentadas según las ecuaciones (2.26c), (2.26d), y (2.26e).

Por otro lado, se pueden crear nuevos elementos de grupo usando otro tipo de operación distinta a la suma. Entonces, se define la sustracción o resta de un elemento, como la suma del inverso de dicho elemento. Así pues, dicha operación nos permitirá realizar la descomposición de un medio anisotrópico en un conjunto de posibles elementos constituyentes interfoliados. En este sentido, consideremos un medio equivalente “e” con su respectivo elemento de grupo \underline{Ge} . Así mismo, denotemos el elemento de grupo de un determinado conjunto de capas (c) como \underline{Gc} . El sustraer el conjunto de capas c al elemento del grupo general (\underline{Ge}), es lo mismo que sumar el elemento $-\underline{Gc}$ a \underline{Ge} , de manera tal que se obtiene un grupo restante (**b**), denotado como \underline{Gb} , tal que $\underline{Gb} = \underline{Ge} - \underline{Gc}$. No obstante, \underline{Gb} no tiene que corresponder a una capa (equivalente) de un medio estable **b**. Lo anterior implica que, aún si nosotros restamos al espesor $gc(1) = Hc$ el espesor $ge(1)=He$, de tal manera que $Hb > 0$, y a la masa $gc(2) = Hc*\rho_c$ le restamos la correspondiente $ge(2) = He*\rho_e$, tal que $\rho_b > 0$; el resultado de la sustracción podría ser inestable³. Sin embargo, si después de la sustracción, la aplicación inverso de grupo de \underline{Gb} , genera un medio estable **b**,

³ Esto significa, tener un conjunto de matrices $\left[\bar{C}_{NNb}, \bar{C}_{TNb}, \text{ y } \bar{C}_{TTb} \right]$ tales que la totalidad de los módulos elásticos del tensor de rigidez (6x6) no sean definitivos positivos.

entonces los medios **b** y **c** representan una descomposición de capas válida para el medio original **e**.

2.2.2.3.- Subgrupos de G correspondientes a diversos sistemas de simetría.

Las distintas capas anisótropas, que constituyentes el medio equivalente, pueden pertenecer a diferentes sistemas de simetría elástica. El sistema más complejo de conseguir en la naturaleza es aquel que no posea ningún tipo de simetría elástica, y el medio correspondiente que posee este tipo de sistema es denominado medio triclínico.

Con el fin de aprovechar las simplificaciones inherentes a los distintos sistemas de simetrías elásticas, es conveniente a estas alturas, introducir ciertas definiciones y conceptos al respecto.

En la naturaleza, se suelen encontrar cristales de forma exterior poliédrica perfecta, en los cuales las caras y aristas homólogas se repiten. En este caso, se dice que el cristal en cuestión, posee “simetría”. En el sentido más amplio del vocablo, el termino simetría, connota la existencia, en los objetos o fenómenos considerados, de cierta características de éstos la cual permanece invariable (invariante) bajo ciertas transformaciones, (Pavlov y Jojlov, 1987). Por ende, si se trata de una figura geométrica, la simetría es la propiedad de poseer partes iguales, uniformemente dispuestas con referencia a cierta operación. Es decir, si haciéndola girar alrededor de un eje o reflejarse a través de un plano, dicha figura coincide consigo misma. Las operaciones, bajo las cuales la figura se mantiene idéntica en apariencia, se denomina “transformaciones simétricas”, y la imagen geométrica que caracteriza una transformación tal, por separado, se llama “elementos de simetría”. Todo cuerpo cristalino, al igual que toda figura geométrica, puede considerarse como un sistema de puntos. Cada figura finita (acotada) tiene por lo menos un punto que permanece en su sitio, bajo las transformaciones simétricas. Dicho punto es un punto “singular”. En este sentido, los cristales poseen “simetría puntual” a diferencia de la “simetría

espacial característica” de las redes cristalinas, cuyo elemento fundamental de simetría es la translación. En los cristales, el número de elementos de simetría es limitado o finito. En ellos al igual que en las figuras acotadas, se distinguen los siguientes elementos principales de simetría:

- i) Plano especular de simetría,
- ii) Eje de simetría por rotación (simple, de inversión, o especular),
- iii) Centro de simetría o centro de inversión.

El plano especular de simetría, corresponde a la reflexión simple del objeto en el plano, como en un espejo. Este plano, divide al cuerpo en dos partes iguales, las cuales coinciden entre sí en todos sus puntos, al reflejarse en aquel. Dichos planos se pueden designar por σ_h o σ_v para connotar horizontal o vertical.

El eje de simetría por rotación simple, es una recta, la cual posee la propiedad de que si alrededor de ella se gira la figura, una fracción de la circunferencia, en la cantidad $1/n$, (donde n es el orden de simetría del eje), ésta coincide consigo misma en todos sus puntos. Dicho eje se designa por C_n .

El centro de simetría, (o centro de inversión), es un punto singular perteneciente al objeto, en el cual, al reflejarse éste coincide consigo mismo; es decir, la operación de inversión consiste en la reflexión del objeto (o figura) a través de un punto, después de lo cual, éste resulta rotado 180° e invertido.

Un estudio exhaustivo de las posibles formas cristalinas (Hamermesh, 1964), que pueden existir en la naturaleza, revela que todas éstas pueden agruparse en “siete sistemas cristalinos”, con arreglo de acuerdo a su grado de simetría. Cada sistema cristalino se describe por medio de un grupo de ejes de referencia, (que pueden o no coincidir con los ejes de simetría), que difieren en longitud relativa y ángulos mutuos de un sistema a otro. La forma cristalina más sencilla en cada sistema, está representada por caras planas que cortan un eje a una distancia unitaria desde el origen, y paralelamente al plano por los otros dos ejes, excepto en el sistema hexagonal. En consecuencia, se tiene:

- 1) El sistema CÚBICO o isométrico, es el sistema cristalino de mayor simetría. Se describe con referencia a tres ejes perpendiculares entre sí y de igual longitud, y la forma más sencilla es el cubo regular.
- 2) El sistema TETRAGONAL, se describe también, con referencia a tres ejes perpendiculares entre sí, pero en este caso dos son de igual longitud, y el tercero es más largo o corto que los otros dos.
- 3) El sistema ORTORRÓMBICO, se describe con referencia a tres ejes perpendiculares entre sí, pero de distinta longitud.
- 4) El sistema HEXAGONAL, tiene la peculiaridad de que se necesitan cuatro ejes para la descripción de sus caras cristalinas; tres ejes de igual longitud en el mismo plano y formando ángulos de 60° , y el cuarto eje de diferente longitud es perpendicular a este plano.
- 5) El sistema ROMBOHEDRICO, (que a veces se incluye como una división del sistema hexagonal), se describe por dos ejes iguales que forman un ángulo de 120° con un tercer eje de longitud distinta, perpendicular al plano de los dos primeros.
- 6) El sistema MONOCLÍNICO, está descrito por dos ejes no perpendiculares entre sí y un tercer eje perpendicular al plano de los dos primeros.
- 7) El sistema TRICLÍNICO, se describe por tres ejes que no son perpendiculares entre sí. Sus formas cristalinas, son las que poseen la menor simetría de todos los sistemas.

Así mismo, existe una transición entre el tipo de simetría cristalina y el correspondiente de simetría elástica, para el caso de los sólidos deformables. Diversos autores, (Auld, 1973; Koefoed y de Voogd, 1980; Schoenberg, 1980; Nelson, 1985; Kitsunozaki, 1983; Schoenberg y Muir, 1989; entre otros), postulan a los sistemas de fracturas, la estratificación de las capas y las orientaciones preferenciales, de los agregados minerales que conforman las rocas, como las principales causas de la simetría elástica dentro de las rocas. En este sentido, los distintos sistemas de simetría

elástica imponen a su respectivos tensores (de rigidez ó de docilidad) restricciones o condiciones de ligadura sobre las diversas constantes.

Por otro lado, retomando lo concerniente a la teoría de grupos, aplicada a la formación del medio equivalente, y de acuerdo a Hamermesh, 1964, si se selecciona a un subconjunto H del grupo G , ($H \subset G$), y además, se usa la misma ley de composición que en el grupo G , entonces se dice que H es un subgrupo del grupo G . En consecuencia, cada grupo, G , posee dos subgrupos triviales:

- i) El grupo que consiste del elemento identidad y ,
- ii) El grupo G en su totalidad.

Éstos son denominados subgrupos *impropios* de G . El problema de encontrar todos los subgrupos *propios* de un grupo G dado, (aparte de los dos impropios), es uno de los principales problemas en la teoría de grupo, y por ende, para su aplicación. Para tal fin se usa el Teorema de Cayley:

“Cada grupo G , de orden n , es isomórfico, (i.e., de igual estructura), con un subgrupo del grupo de simetría S_n ”. La importancia del Teorema en cuestión reside en el hecho de que debido a él, al menos se limita el trabajo a encontrar estructuras independientes del grupo de orden n , (los subgrupos propios de G). Es importante enfatizar, que para el requerimiento de que H se constituya en un subgrupo de G , es que se use la misma ley de composición que caracteriza a G . De lo anterior se desprende, que para la construcción de un medio equivalente, se tiene que los distintos sistemas de simetría, con sus respectivas restricciones sobre las constantes elásticas, generarán distintos subconjuntos de elementos de grupo G . Por ejemplo, los sistemas ortorrómbicos, generaran un subconjunto de G . Si los ejes de simetría de dicho sistema tienen una dirección particular especificada por a , entonces, este subconjunto G será denotado como OR_a . Si los ejes de simetría coinciden con los ejes coordenados, entonces se suprime el subíndice por convención.

En síntesis, nosotros podemos transcribir las restricciones de los módulos elásticos, como ligaduras sobre los elementos de los componentes matriciales del elemento de grupo respectivo, y prolongar el subconjunto a los diversos elementos de grupo que satisfagan dichas restricciones. Si el subconjunto “prolongado”, es cerrado, (es decir, pertenece al subconjunto), cuando aplicamos la ley de composición, (denominada aquí operación de combinación), entonces estamos verificando que en realidad el subconjunto en cuestión, es un subgrupo propio del G original. Por ende, intuimos que la propiedad de clausura, (ver definición de grupo), se verifica si y solo si, las ligaduras, (restricciones), son **CONDICIONES LINEALES HOMOGÉNEAS** sobre los elementos de $\underline{g}(3)$, $\underline{g}(4)$ y/o de $\underline{g}(5)$. Sin embargo, las ligaduras lineales homogéneas, no pueden relacionar, (operacionalmente), elementos de una representación matricial, (e.g. los de $\underline{g}(3)$), con aquellos de otra, puesto que cada representación posee diferente dimensionalidad.

En el ejemplo de la simetría ortorrómbica, y de acuerdo los resultados de Schoenberg y Muir (1989), las restricciones lineales homogéneas⁴ están dadas por el hecho de que ciertos elementos de las matrices se anulan, es decir:

$$g_{ij}(3) = 0, i \neq j; g_{31}(4) = 0; g_{i2}(4) = 0; g_{i3}(4) = 0; g_{13}(5) = 0; g_{23}(5) = 0. \quad (2.27)$$

2.2.2.4.- Elementos de Grupo de los conjuntos de “largas fracturas paralelas”.

Consideremos a un medio constitutivo “particular”, al cual denotamos por el subíndice f, y el mismo pertenece a una región estratificada de grosor total H. Por ende, H_f será su grosor total y entonces, $h_f \equiv H_f / H$, será su espesor relativo. Así mismo, asuma que su densidad y sus módulos elásticos pueden ser escritos como,

$$\rho_f = h_f \tilde{\rho}, \bar{C}_{NNf} = h_f \tilde{C}_{NN}, \bar{C}_{TNf} = h_f \tilde{C}_{TN}, \bar{C}_{TfT} = h_f \tilde{C}_{TT}. \quad (2.27.a)$$

⁴ Schoenberg y Muir (1989), presentan una tabla de las restricciones lineales homogéneas para los distintos sistemas de simetría.

Si $\tilde{\rho}$, \tilde{C}_{NN} , \tilde{C}_{TN} , y \tilde{C}_{TT} son cantidades fijas, entonces, en el límite cuando $h_f \rightarrow 0$, este constituyente se aproxima a un medio suave con densidad ρ_f despreciable y con módulos elásticos que pertenecen a una región de espesor H_f , y que viene a ser prácticamente inexistente o de grosor infinitésimo. De allí que las capas correspondientes a este tipo de elementos constitutivos, según lo descrito por Schoenberg (1980), vienen a ser fracturas infinitamente largas, cada una de las cuales se comporta como una interfase de deslizamiento lineal⁵. Éste ignora o desprecia cualesquiera de los efectos, no lineales, debidos a la fricción tipo Coulomb o en el flujo de fluido, desde las capas hacia las fracturas. Sin embargo, se debe recordar que existe un material de relleno, que puede ubicarse dentro de las fracturas y que determina, junto con las propiedades de la fractura, los parámetros fijos de los módulos elásticos, los cuales, se denominan en conjunto como el “medio de relleno”. Por otro lado, a lo largo de cada interfase de deslizamiento lineal, las componentes de la tracción σ_{3j} deben ser continuas, así como ellas lo son a lo largo de cualquier capa simple en el límite de la larga longitud de onda. A pesar de ello, las componentes de los desplazamientos u_j no son necesariamente continuas, lo cual indica que las deformaciones en las fracturas vienen a ser infinitas cuando los módulos elásticos se aproximan a cero. Así pues, las propiedades físicas del elemento constituyente que se aproxima a un conjunto de fracturas, son aplicadas a través de la ecuación (1.23), a un elemento de grupo \underline{G}_f , es decir,

$$\begin{bmatrix} H_i \\ \rho_i \\ \bar{C}_{NN}^i \\ \bar{C}_{TN}^i \\ \bar{C}_{TT}^i \end{bmatrix} \equiv \lim_{h_f \rightarrow 0} \begin{bmatrix} h_f H \\ h_f^2 H \tilde{\rho} \\ H \tilde{C}_{NN}^{-1} \\ h_f H \tilde{C}_{TN} \tilde{C}_{NN}^{-1} \\ h_f^2 H \left[\tilde{C}_{TT} - \tilde{C}_{TN} \tilde{C}_{NN}^{-1} \tilde{C}_{NT} \right] \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H \tilde{C}_{NN}^{-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

⁵ También se presenta un descripción más detallada de este tópico en la sección III.

Por lo tanto, el conjunto de las fracturas está caracterizado por la matriz simétrica $\tilde{C}_{NN}^{-1} \equiv \bar{Z}$, llamada la representación matricial del tensor de docilidad del conjunto de las fracturas. La matriz \bar{Z} depende, (a lo sumo), de seis constantes independientes, y ésta especifica el comportamiento de la fractura, que es azimutalmente anisotrópico en el caso general, (Schoenberg y Muir, 1989; Schoenberg y Sayers, 1995). Así mismo, la matriz \bar{Z} es llamada la matriz de docilidad de exceso, (Schoenberg y Helbig, 1997; Schoenberg et al, 1999, Schoenberg y Haugen, 2000), correspondiente al conjunto de fracturas.

Por otro lado, todos los elementos de grupo, correspondientes a todos los sistemas de fracturas, forman un subgrupo de \underline{G} , y su estructura característica está dada por la ecuación (2.28). A pesar de que estos elementos de grupo pueden formar subgrupos, que a su vez sean subgrupos de los sistemas de simetría correspondientes, la simetría del sistema de fracturas, depende solamente de \tilde{C}_{NN} . En este sentido, cuando el medio de relleno es tetragonal, trigonal, o isotrópico transversalmente, \tilde{C}_{NN} es diagonal con $\tilde{C}_{NN22} = \tilde{C}_{NN33}$; por lo tanto, el sistema de fracturas también será isotrópica transversalmente; específicamente isotrópica azimutalmente. En este caso, existen dos parámetros que especifican el comportamiento del conjunto de fracturas, y donde \bar{Z} tiene la forma,

$$\bar{Z} = \begin{bmatrix} Z_N & 0 & 0 \\ 0 & Z_T & 0 \\ 0 & 0 & Z_T \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

donde Z_N es la docilidad normal y Z_T es la docilidad tangencial del sistema de fracturas.

Cuando el medio de relleno es ortorrómbico o monoclinico, con un eje de simetría doble perpendicular a las capas, el sistema de fracturas es azimutalmente anisotrópico, de acuerdo a Schoenberg y Muir (1989), aunque $\underline{g}(3)$ es diagonalizable a través de una rotación alrededor del eje perpendicular a las fracturas. Tales elementos de grupo, (correspondientes a los distintos conjuntos de fracturas), pertenecen al subgrupo Ortorrómbico. En este caso, existen tres docilidades que describen el comportamiento de las fracturas, una normal y dos tangenciales. Por otro lado, cuando el medio de relleno es monoclinico con su eje de simetría doble paralelo a las capas, el sistema de fracturas tiene un elemento de grupo que pertenece al subgrupo de los medios monoclinicos, cuyo eje de simetría doble también es paralelo a las capas. En este caso, existen cuatro docilidades: además de las dos tangenciales principales, (alineadas con los ejes coordenados), y la normal, existe otra docilidad tangencial fuera de la diagonal, que describe el comportamiento de la fractura en una dirección distintas a los ejes coordenados, sobre el mismo plano de la fractura. Cuando el medio de relleno no posee ningún tipo de simetría de las descritas anteriormente, entonces, la matriz \bar{Z} tiene la forma general, con seis docilidades que describen por completo su comportamiento elástico en el plano de las facturas (plano tangencial) así como el plano perpendicular a las mismas (plano perpendicular).

Finalmente, una roca fracturada puede ser formada por un medio de fondo no fracturado, denotado por el subíndice b , de espesor H_b , el cual es fracturado por un conjunto de fracturas paralelas, cuya matriz de docilidad es \bar{Z} . Por lo descrito anteriormente, la única componente de \underline{G}_b que cambia debido al fracturamiento es $\underline{g}_b(3)$, la cual está dada por, $\underline{g}_b \equiv H_b (\bar{C}_{NNb}^{-1} + \bar{Z})$. En ese sentido, Schoenberg y Douma (1988), presentan un discusión completa acerca del aplicación inversa, la cual genera los respectivos parámetros del medio fracturado. Así mismo, Schoenberg y Muir (1989), presentan los cambios respectivos en cada uno de los módulos del medio equivalente, debido a la presencia de las fracturas, los cuales son:

$$\Delta \bar{C}_{NN} = -\bar{C}_{NNb} \bar{X},$$

$$\Delta \bar{C}_{TN} = -\bar{C}_{TNb} \bar{X},$$

y

$$\Delta \bar{C}_{TT} = -\bar{C}_{TNb} \bar{X} \bar{C}_{NNb}^{-1} \bar{C}_{NTb},$$

donde

$$\left(\bar{C}_{NNb}^{-1} + \bar{Z}\right)^{-1} \equiv \bar{C}_{NNb} (\bar{I} - \bar{X}) \Rightarrow \bar{X} = \bar{I} - \left(\bar{I} + \bar{Z} \bar{C}_{NNb}\right)^{-1} \quad (2.30)$$

2.2.2.5.- Medios anisotrópicos azimutalmente: Modelado de una roca fracturada verticalmente, según el modelo de Schoenberg y Muir (1989).

2.2.2.5.1.- Medios Monoclínicos.

Considere una capa delgada fracturada, ubicada entre dos semiespacios isotrópicos o transversalmente isotrópicos (TI), (ver Figura 2.2). Se asume que la capa delgada consta de uno o más conjuntos de fracturas verticales alineadas en un medio de fondo, en su estado deformado. Éste medio se asume que es azimutalmente isotrópico, de tal manera que, la capa delgada fracturada es azimutalmente anisótropa en virtud de la presencia de las fracturas verticales. La docilidad excedente, (la matriz de docilidad \bar{Z} definida anteriormente), atribuida a cada uno de los conjuntos de fracturas verticales alineadas, se asume que es diagonal, (en un sistema de coordenadas alineado con las direcciones normal, tangencial horizontal y tangencial vertical a la fractura). Eso es, su docilidad está especificada completamente por una docilidad normal Z_N , una docilidad tangencial horizontal Z_H , y una docilidad tangencial vertical Z_V , (Schoenberg y Sayers, 1995). El medio homogéneo, anisótropo, equivalente, (en el límite de longitud de onda larga), a este medio fracturado es un medio con simetría “especular”, (i.e., monoclinico con un plano espejo horizontal de simetría). Los medios

ortorrómbicos con un plano de reflexión horizontal de simetría, los medios trigonales con un eje vertical triple de simetría, y los medios transversalmente isotrópicos con eje de simetría horizontales, son casos especiales de medios dependiente del azimut con simetría “especular”. La matriz (6 x 6) del tensor elástico de la capa delgada, C_1 (el índice 1 se refiere a la capa delgada) es el inverso de su matriz docilidad, S_1 , esto es $C_1 = S_1^{-1}$. La matriz docilidad se adecua mejor al modelado de medios fracturados ya que la introducción de fracturas puede ser modulada por la suma de la matriz de docilidad de la fractura a la matriz docilidad del medio no fracturado de fondo; como lo mostrado por Schoenberg y Sayers (1995).

Figura 2.2: Vista 3-D. Capa fracturada por dos fracturas verticales, empotrada en un medio isotrópico y ubicada entre dos semi-espacios isotrópicos.

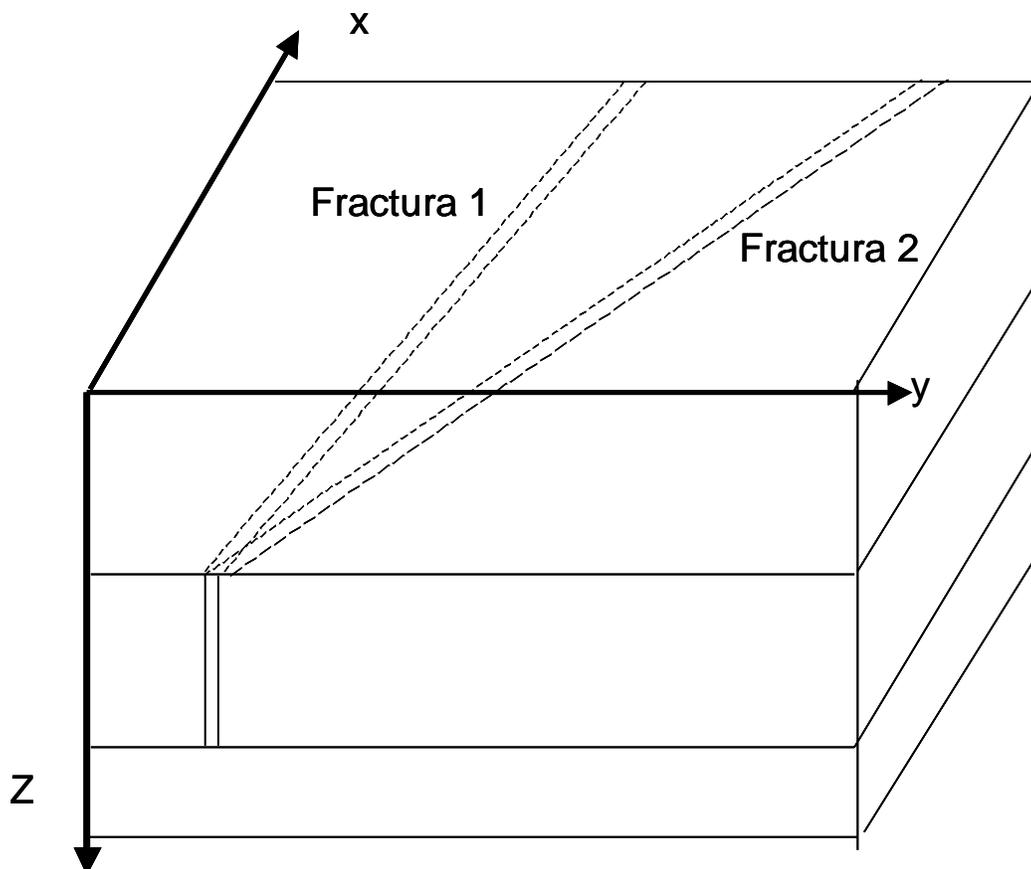
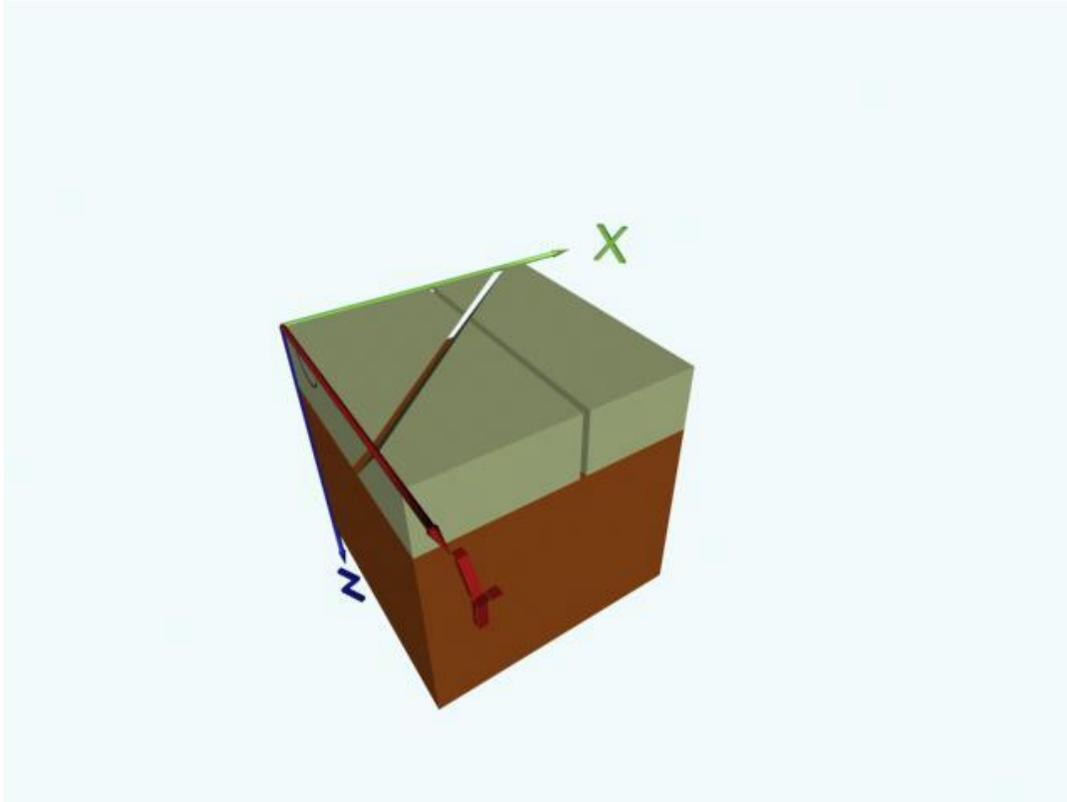


Figura 2.3: Vista 3-D. Capa fracturada por dos fracturas verticales, empotrada en un medio isotrópico y ubicada por encima de un semi-espacio isotrópico.



Un medio monoclinico general tiene 13 constantes elásticas; su matriz de elasticidad o docilidad tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} * & * & * & 0 & 0 & * \\ * & * & * & 0 & 0 & * \\ * & * & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & * \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

donde * indica elementos no nulos. Se indicará debajo que la introducción de fracturas verticales no afecta los elementos (1,3), (2,3), (3,3), y (3,6) de la matriz docilidad. Así que, para el caso considerado aquí, donde el medio de fondo (denotado por el subíndice b) se asume que es azimutalmente isotrópico⁶ ($S_{b13} = S_{b23}$, y $S_{b36}=0$), la matriz docilidad del medio fracturado verticalmente también es sujeto a éstas restricciones, esto es: $S_{113} = S_{123}$, y $S_{136}=0$. Sin embargo, el elemento nulo S_{136} y la igualdad $S_{113} = S_{123}$ no implican que las relaciones correspondientes permanezcan para la matriz de rigidez.

En concordancia con Schoenberg y Sayers (1995), la matriz docilidad para un medio con n conjuntos de fracturas alineadas (asumiendo que se pueden despreciar los posibles efectos de las intersecciones de cualesquiera de las fracturas) se puede escribir:

$$S_l = S_b + \sum_{q=1}^n S_f^{(q)} \equiv S_e \quad (2.32)$$

$$\therefore C_l \equiv C_e \equiv (S_e)^{-1}.$$

⁶ Medio Transversalmente Isotrópico con un eje Vertical de Simetría (TIV).

donde $S_f^{(q)}$ es la matriz docilidad del q-ésimo conjunto de fracturas alineadas, S_b es la matriz docilidad del medio de fondo, y $S_l \equiv S_e$ es la matriz docilidad⁷ de la gran capa homogénea o medio equivalente (en el límite de la larga longitud de onda, descrito anteriormente).

Ahora bien, suponiendo que cada uno de los conjuntos de fracturas es vertical, y que el q-ésimo conjunto de fracturas ($q = 1, \dots, n$) está especificado por: la docilidad normal a la fractura $Z_N^{(q)}$, la tangencial horizontal $Z_H^{(q)}$, la tangencial vertical $Z_V^{(q)}$, y el rumbo $\theta^{(q)}$ medido desde la dirección horizontal X_2 hacia el eje X_1 ⁸, entonces $S^{(q)}$ está dado por:

$$S^{(q)} = \begin{bmatrix} S_{11}^{(q)} & S_{12}^{(q)} & 0 & 0 & 0 & S_{16}^{(q)} \\ S_{12}^{(q)} & S_{22}^{(q)} & 0 & 0 & 0 & S_{26}^{(q)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44}^{(q)} & S_{45}^{(q)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{45}^{(q)} & S_{55}^{(q)} & 0 \\ S_{16}^{(q)} & S_{26}^{(q)} & 0 & 0 & 0 & S_{66}^{(q)} \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

con:

$$S_{11}^{(q)} = \frac{3Z_N^{(q)} + Z_H^{(q)}}{8} + \frac{Z_N^{(q)}}{2} \cos 2\theta^{(q)} + \frac{Z_N^{(q)} - Z_H^{(q)}}{8} \cos 4\theta^{(q)},$$

⁷ Ce es la correspondiente matriz de rigidez del medio equivalente.

⁸ De manera tal que la normal al q-ésimo conjunto de fracturas es $\theta^{(q)}$ desde la dirección horizontal X_1 hacia le eje X_2 .

$$\begin{aligned}
S_{22}^{(q)} &= \frac{3Z_N^{(q)} + Z_H^{(q)}}{8} - \frac{Z_N^{(q)}}{2} \cos 2\theta^{(q)} + \frac{Z_N^{(q)} - Z_H^{(q)}}{8} \cos 4\theta^{(q)}, \\
S_{12}^{(q)} &= \frac{Z_N^{(q)} - Z_H^{(q)}}{8} (1 - \cos 4\theta^{(q)}), \\
S_{66}^{(q)} &= \frac{Z_N^{(q)} + Z_H^{(q)}}{2} - \frac{Z_N^{(q)} - Z_H^{(q)}}{2} \cos 4\theta^{(q)}, \\
S_{16}^{(q)} &= \frac{\text{sen}2\theta^{(q)}}{2} Z_N^{(q)} + \frac{Z_N^{(q)} - Z_H^{(q)}}{4} \text{sen}4\theta^{(q)}, \\
S_{26}^{(q)} &= \frac{\text{sen}2\theta^{(q)}}{2} Z_N^{(q)} - \frac{Z_N^{(q)} - Z_H^{(q)}}{4} \text{sen}4\theta^{(q)}, \\
S_{44}^{(q)} &= Z_V^{(q)} \frac{1 - \cos 2\theta^{(q)}}{2}, \quad S_{55}^{(q)} = Z_V^{(q)} \frac{1 + \cos 2\theta^{(q)}}{2} \\
S_{45}^{(q)} &= Z_V^{(q)} \frac{\text{sen}2\theta^{(q)}}{2}.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Esto puede ser derivado llevando a cabo la multiplicación dada por Nichols et.al. (1989) o directamente usando la notación del tensor de rango 4to y la transformación de enlace descrita por Winterstein (1990). Ahora bien, note que cuando $Z_N(q) = Z_H(q)$, la dependencia del valor $4\theta(q)$ de la docilidad excedente desaparece, $S_{12}(q)$ desaparece, y $S_{66}(q)$ es independiente de $\theta(q)$.

Para $\theta(q) = 0$ (rumbo a lo largo de la dirección X2) y para $\theta(q) = \pi/2$ (rumbo a lo largo de la dirección X1), la matriz $S(q)$ es dada, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^{(q)} &= \begin{bmatrix} Z_N^{(q)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_V^{(q)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_H^{(q)} \end{bmatrix}_{\theta=0}; \\
\mathcal{S}^{(q)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_N^{(q)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_V^{(q)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_H^{(q)} \end{bmatrix}_{\theta=\pi/2};
\end{aligned} \tag{2.35}$$

2.2.2.5.2.- Medios Ortorr6mbicos.

En el estudio de los medios ortorr6mbicos, existen diferentes familias dependiendo de la ubicaci3n de los planos de simetría. Un caso particular es aquel en el cual los planos de simetría coinciden con los planos coordenados. Sin embargo, a pesar de ser un caso com6n, este es muy ilustrativo al momento de describir un modelo de tierra definido por estratificaci3n horizontal y por fracturas verticales, y el cual representa el modelo anisotr3pico m6s simple que se adapta mejor a la mayoría de los medios fracturados en las diversas cuencas sedimentarias, seg6n lo Schoenberg y Helbig (1997), entre otros autores. Es por eso que, a continuaci3n, se

presentará un resumen del modelo de tierra fracturada verticalmente, descrito por Schoenberg y Helbig (op cit).

2.2.2.5.2.1.- Consideraciones preliminares.

En notación condensada, un medio elástico puede ser especificado por una matriz_{6x6} de elasticidades que relacionan las seis componentes independientes del tensor de deformación ϵ_{kl} con las seis componentes independientes del tensor de esfuerzos σ_{ij} . De acuerdo a la convención para la notación condensada, se tiene al vector esfuerzo y al vector deformación como vectores de seis componente etiquetadas de la 1 a la 6, como :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 & \sigma_5 & \sigma_6 \end{bmatrix}^T \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{33} & \sigma_{23} & \sigma_{13} & \sigma_{12} \end{bmatrix}^T$$

y

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 & \epsilon_4 & \epsilon_5 & \epsilon_6 \end{bmatrix}^T \equiv \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{22} & \epsilon_{33} & \epsilon_{23} & \epsilon_{13} & \epsilon_{12} \end{bmatrix}^T ,$$

Donde el exponente T indica la transpuesta. Para un medio ortorrómbico, esta relación esfuerzo – deformación tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} . \quad (2.36)$$

aquí, c_{ij} son las constantes elásticas normalizadas por densidad y, por lo tanto, tiene dimensiones de velocidad al cuadrado. Para medios ortorrómbicos, existen nueve constantes elásticas independientes: los seis elementos de la

diagonal que se relacionan específicamente que las velocidades de partícula a lo largo de los ejes coordenados y tres elementos independientes ubicados fuera de la diagonal. Las constantes elásticas del modelo fracturado son derivadas de aquellas del medio IT de fondo, no fracturado, combinadas con un conjunto de docilidades de la fractura. El eje X_3 será el eje de simetría del medio de fondo IT, usualmente se asume que es el eje vertical, y el eje X_1 será normal a las fracturas de tal manera que se están considerando fracturas verticales como las mostradas en las Figuras 3.1 y 3.2,

Figura 3.1: Sistema Transversalmente Isotrópico, con un eje vertical de simetría, fracturado por un sistema vertical de fracturas paralelo al plano YZ.

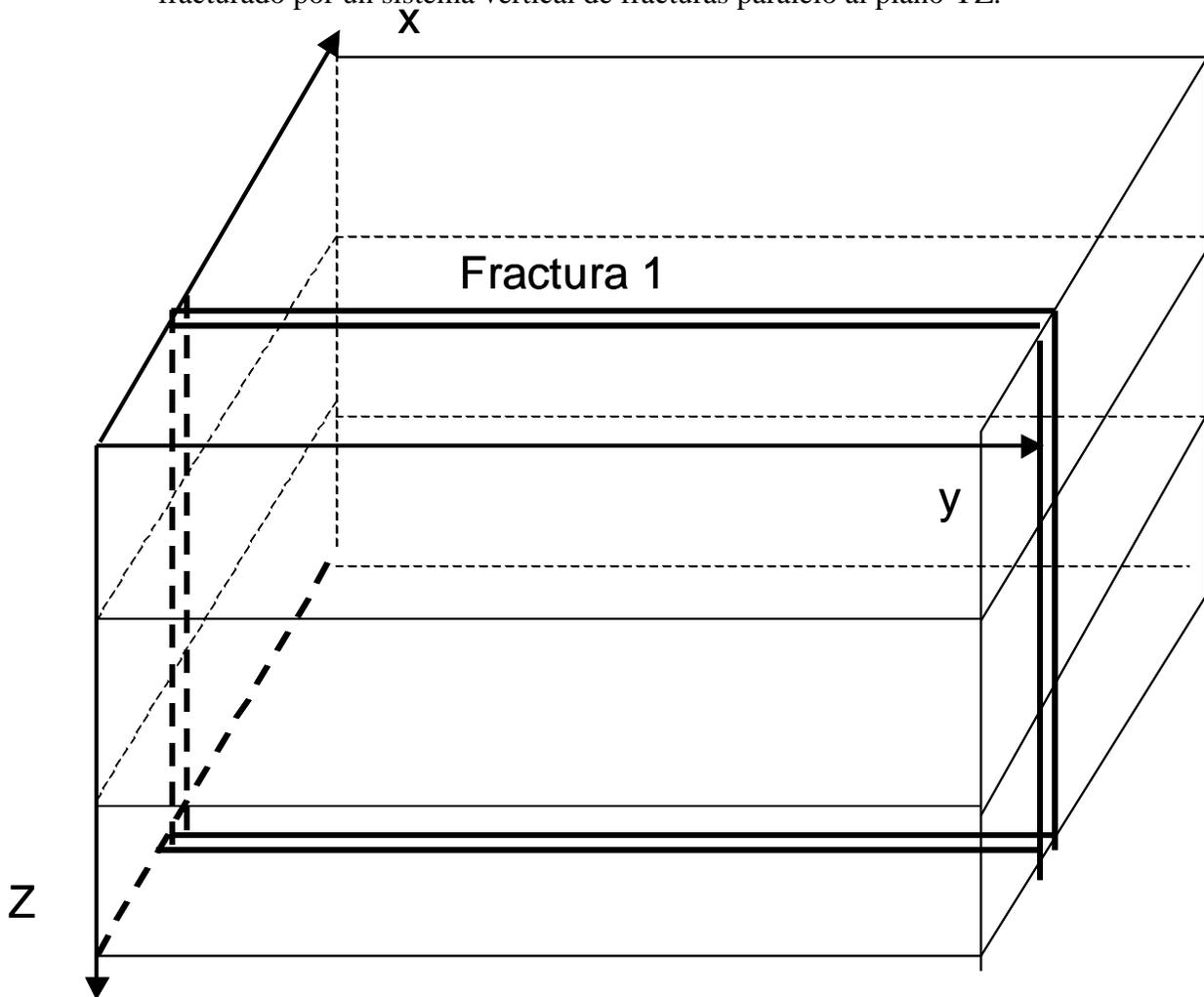
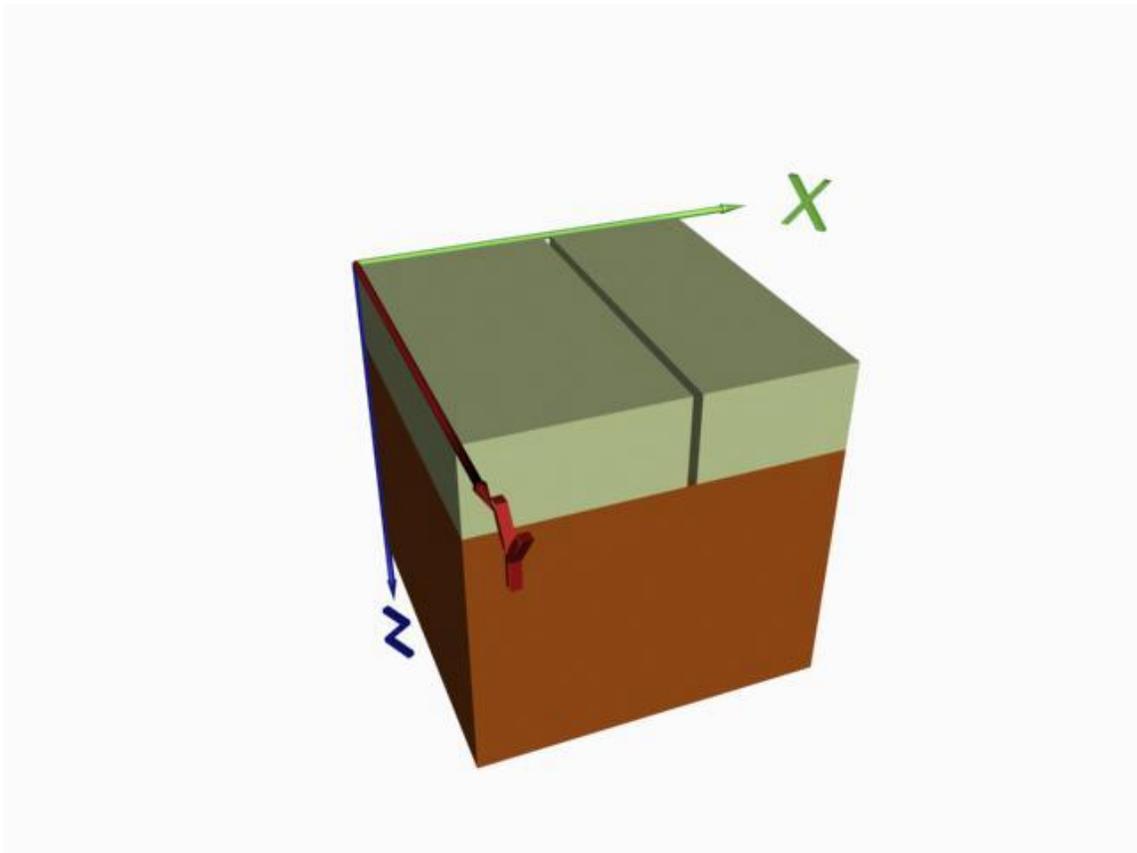


Figura 3.2: Sistema Transversalmente Isotrópico, con un eje vertical de simetría, fracturado por un sistema vertical de fracturas paralelo al plano YZ. Modelo de Una Capa Fracturada.



Una suposición razonable acerca de la naturaleza del comportamiento de las fracturas es que la deformación, excedente, de la deformación normal causada por las fracturas depende solamente de la componente normal de la tracción sobre el plano de fractura σ_{11} . Similarmente, la deformación, excedente, de la deformación de cizalla, proveniente del deslizamiento vertical a través de la fractura, depende solamente de la tracción vertical sobre el plano de fractura σ_{13} , y la deformación, excedente, de la deformación de cizalla, proveniente del deslizamiento horizontal a través de la fractura, depende solamente de la tracción horizontal sobre el plano de fractura σ_{12} . las constantes elásticas y las docilidades del medio homogéneo, equivalente, ortorrómbico en el límite de la longitud de onda larga, son funciones de las cinco elasticidades del medio IT de fondo c_{11b} , c_{33b} , c_{55b} , c_{13b} , y c_{66b} ; y de los tres parámetros positivos de las fracturas Z_N , Z_H , y Z_V , donde Z_N es la docilidad normal excedente producto de las fracturas, Z_H es la docilidad tangencial horizontal, y Z_V es la docilidad tangencial vertical. Valores de docilidades de las fracturas distintos de cero destruyen la isotropía transversal del medio IT de fondo, causando que el medio y de allí su superficie de lentitudes sean anisótropas azimutalmente. Para docilidades más grandes (en un medio de fondo dado) se generará una mayor variación azimutal.

En general, las constantes elásticas están restringidas por las condiciones de estabilidad del medio, i.e., la condición de que la matriz $_{6 \times 6}$ de c_{ij} sea definitiva positiva. Sin embargo, para situaciones como las que ocurren en los medios geológicos, se restringe este modelo a que satisfaga las condiciones de “anisotropía leve” al requerir, en los siguientes términos:

- 1) que no haya polarización anómala en ninguno de los planos coordinados (Helbig y Schoenberg, 1987), i.e., que:

$$c_{23} + c_{44} > 0,$$

$$c_{13} + c_{55} > 0, \quad (2.37)$$

$$c_{12} + c_{66} > 0,$$

lo cual puede ser forzado al requerir que c_{23} , c_{13} , $c_{12} > 0$ (una generalización de requerir que un medio isotrópico tenga una razón de Poisson positiva),

y

2) que la velocidad de onda qS más alta (sobre la totalidad de las direcciones) sea más pequeña que la velocidad de onda qP más baja (sobre la totalidad de las direcciones). Esto implica (pero no es equivalente a)

$$\min [c_{11}, c_{22}, c_{33}] > \max [c_{44}, c_{55}, c_{66}]. \quad (2.38)$$

Estas condiciones de anisotropía leve, ecuaciones (2.37) y (2.38), las cuales son una generalización de las condiciones de anisotropía leve discutidas en Carrion et al. (1992) para medios IT, en ninguna manera implica que la anisotropía es débil. Sin embargo, ellas sí implican que la superficie de lentitud más interna es cuasi – longitudinal o qP, y que ésta está desconectada de las dos superficies más externas que son cuasi – transversales, i.e., que la velocidad de onda qP excede a las velocidades de las ondas qS, en todas las direcciones.

Ahora, el significado físico de cada una de las constantes elásticas de la diagonal en la ecuación (2.36) tiene que ver con las velocidades de las ondas corpóreas. Así pues, se puede demostrar (Ver Sección II), que las velocidades compresionales en las direcciones X_1 , X_2 , y X_3 son dadas por $\sqrt{c_{11}}$, $\sqrt{c_{22}}$, y $\sqrt{c_{33}}$, respectivamente. La velocidad de la onda de cizalla en

la dirección X_3 con polarización en la dirección X_2 , son ambas $\sqrt{c_{44}}$. Consideraciones similares se mantienen para las ondas de cizalla que se propagan en las otras direcciones axiales. La propagación axial se esquematiza en la Tabla 1, presentada por Schoenberg y Helbig (1997) y que puede ser deducida a partir de la particularización de la ecuación de Cristoffel para cada uno de los ejes coordenados. Allí, los elementos de la diagonal son las velocidades de las ondas compresionales y los de fuera de la diagonal son las velocidades de cizalla.

Tabla 1: propagación axial para Medios Ortorrómicos.

	Propagación.		
Polarización	X1	X2	X3
X1	$\sqrt{c_{11}}$	$\sqrt{c_{66}}$	$\sqrt{c_{55}}$
X2	$\sqrt{c_{66}}$	$\sqrt{c_{22}}$	$\sqrt{c_{44}}$
X3	$\sqrt{c_{55}}$	$\sqrt{c_{44}}$	$\sqrt{c_{33}}$

Como un ejemplo, una onda de cizalla propagándose verticalmente (en la dirección X_3) debe ser polarizada paralela a la dirección X_1 o en la dirección X_2 . Cuando $c_{44} \neq c_{55}$, un campo de ondas propagándose verticalmente, generado por una fuente horizontal orientada de manera oblicua con respecto a los ejes horizontales, se separa en dos ondas con distintas velocidades

$\sqrt{c_{55}}$, y $\sqrt{c_{44}}$, y con polarizaciones en las direcciones X_1 Y X_2 , respectivamente. Similar desdoblamiento ocurre en todas las direcciones (con la excepción de un número finito de direcciones discretas), aunque, en general, con polarizaciones no alineadas con los ejes coordenados. Las observaciones de este desdoblamiento de las ondas sísmicas de cizalla requiere del uso de geófonos de tres componentes, y como tal es un indicador real de anisotropía. La diferencia entre las dos velocidades de cizalla en una dirección dada se llama la velocidad de desdoblamiento den esa dirección, la cual es dada, en el caso de la dirección X_3 por $\sqrt{c_{55}} - \sqrt{c_{44}}$. Después de pasar verticalmente a través de un medio ortorrómbico en un tiempo t , las dos ondas tendrán una separación espacial de $(\sqrt{c_{55}} - \sqrt{c_{44}}) t$. De manera correspondiente, los tiempos de arribo de las dos ondas de cizalla separadas, después de una propagación a través de una trayectoria vertical de longitud l , tendrán una diferencia por la cantidad $(1/\sqrt{c_{55}} - 1/\sqrt{c_{44}}) l$ y el factor $(1/\sqrt{c_{55}} - 1/\sqrt{c_{44}})$ podría ser llamado la lentitud de separación en la dirección X_3 .

2.2.2.5.2.2.- Medio fracturado verticalmente: el modelo ortorrómbico.

El modelo ortorrómbico de un medio fracturado verticalmente está compuesto de dos elementos. El primero es un medio IT con un eje vertical de simetría. la isotropía transversal puede ser atribuida a estratificación fina, lutitas con ejes verticales de simetría, o fracturas horizontales. Este medio de fondo frecuentemente se desvía considerablemente de la isotropía, con velocidades de ondas compresional y de cizalla que varían hasta un 30%. En notación condensada (matriz_{6x6}), el tensor elástico c_b del medio IT de fondo (con un eje vertical de simetría) es:

$$c_b = \begin{bmatrix} c_{11b} & c_{12b} & c_{13b} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12b} & c_{11b} & c_{13b} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13b} & c_{13b} & c_{33b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66b} \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

$$\text{con } c_{11b} - c_{12b} - 2 c_{66b} = 0. \quad (2.40)$$

el segundo elemento es un conjunto de fracturas verticales paralelas. Sin pérdida de generalidad, se coloca al eje X_1 como la normal a éstas fracturas, como en la Figura 3. Un conjunto de fracturas paralelas puede ser especificado por una matriz $_{3 \times 3}$ de docilidad de la fractura $[Z]$, la cual es simétrica y definitiva no negativa (Schoenberg y Douma, 1988). El producto de esa matriz de docilidad de la fractura $[Z]$ y la tracción sobre el plano paralelo a las fracturas es el vector deslizamiento total a través de la fractura dividido por la distancia perpendicular a través de la cual se midió el deslizamiento. Las fracturas son llamadas ortotrópicas si la normal a las fracturas es un vector propio de $[Z]$. Físicamente, esto significa que, a través de las fracturas, el movimiento normal – de abrir y cerrar – está desacoplado del movimiento de deslizamiento tangencial. Generalmente, el desplazamiento tangencial y la componente tangencial de la tracción a través de la fracturas no son colineales, excepto en dos direcciones mutuamente perpendiculares. Si estas direcciones son la horizontal (paralela al eje X_2) y vertical (paralela al eje X_3), la matriz de docilidad $[Z]$ de la fracturas ortotrópicas, que especifica el comportamiento del conjunto de fracturas, es la matriz $_{3 \times 3}$ diagonal no negativa:

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_N & 0 & 0 \\ 0 & Z_V & 0 \\ 0 & 0 & Z_H \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

Esta es una suposición razonable para la matriz de docilidad de la fractura ya que en un medio estratificado – o en general un medio IT – no es de sorprenderse si la textura de la superficie vertical tenía características horizontales, dando diferentes rugosidades vertical y horizontalmente.

Para combinar conjuntos arbitrarios de capas elásticas y encontrar sus propiedades del medio equivalente en el límite de la longitud de onda larga, Schoenberg y Muir (1989) derivaron un calculo basado en la suma de elementos de grupo, conmutativos, que fueron expresados en términos de las constantes elásticas de diversos medios. El calculo mostró que es aplicable también cuando a un conjunto de capas viene a ser infinitamente delgadas y sus docilidades también. conduciendo a un simple método de derivar las propiedades del medio equivalente de un medio anisótropo arbitrario en el cual se empotra un conjunto de fractura paralelas.

Sin embargo, ya que la introducción de las fracturas básicamente hace que el medio aumente su docilidad, cuando se trabaja con medio fracturado es más conveniente expresar los elementos del grupo en términos de las docilidades elásticas. Este enfoque reduce el problema a uno de sumar una matriz independiente de la docilidad de la fractura a aquella matriz de docilidad del medio de fondo (ver apartados anteriores). La matriz del tensor elástico del medio fracturado, encontrada mediante la inversión de su matriz de docilidad, tiene ahora una forma más compleja en la que se muestra que sus constantes elásticas dependen tanto de las constantes elásticas del medio de fondo como de los parámetros de las fractura.

Nichols et al. (1989) y Hood (1991) mostraron como un conjunto de fracturas paralelas, con cualquier orientación, puede ser incluida en un medio, arbitrario, anisótropo de fondo. La matriz de docilidad del medio fracturado se encuentra mediante la suma simple de la matriz de docilidad de la fractura, una versión expandida a 6x6 (la cual toma en cuenta cualquier rotación de las fracturas a una orientación arbitraria) con la matriz de docilidad del medio de fondo. La única complejidad algebraica es causada por la inversión de la matriz que se necesita para tener una matriz del tensor elástico que se adecua mejor a los parámetros que se usan para definir un medio fracturado.

El cambio $[\Delta]$ en la matriz de docilidad, que se atribuye a la introducción de un conjunto ortotrópico de fracturas perpendicular al eje X1 [ver la última ecuación de Nichols et al. (1989)] es:

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} Z_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_V & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_H \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

Por lo tanto, la matriz de docilidad del medio equivalente, en límite de la longitud de onda larga, para el medio ITVF es $(\rho c_b)^{-1} + [\Delta]$, y su matriz del tensor elástico, normalizada por densidad, es dada por:

$$[c_e] = [c_b^{-1} + \rho \Delta]^{-1} \equiv [\{ I + \rho \Delta c_b \} c_b^{-1}]^{-1} \equiv (c_b^{-1})^{-1} [I + \rho \Delta c_b]^{-1}$$

$$\therefore [c_e] \equiv [c_b] [I + \rho \Delta c_b]^{-1}. \quad (2.43)$$

Donde I es la matriz 6x6 identidad. La valuación de $[C_e]$ al sustituir las ecuaciones (2.39 y 2.42) dentro de la ecuación (2.43) es algo tedioso, aunque el hecho de que las

matrices 3x3 superior derecha e inferior izquierda de $[\Delta cb]$ constan solamente de ceros y que la matriz 3x3 es diagonal por lo que se necesita invertir solo una matriz 3x3. Para efectos de simplificación, la matriz del tensor elástico resultante, contiene las siguientes cantidades adimensionales definidas como:

$$\begin{aligned}
 0 \leq \delta_N &\equiv \frac{Z_N \rho c_{11b}}{1 + Z_N \rho c_{11b}} < 1, \\
 0 \leq \delta_V &\equiv \frac{Z_V \rho c_{44b}}{1 + Z_V \rho c_{44b}} < 1, \\
 0 \leq \delta_H &\equiv \frac{Z_H \rho c_{66b}}{1 + Z_H \rho c_{66b}} < 1,
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

donde las desigualdades se mantienen ya que Z_N , Z_T y $Z_H \geq 0$ y debido a que c_{11b} , c_{44b} , c_{66b} son positivas. Estas cantidades relacionan la docilidad de la fractura a la docilidad total del medio fracturado. Esto es, δ_N es la proporción de la deformación ϵ_1 que es el resultado de la docilidad normal de la fractura. Similarmente, δ_V es la proporción de ϵ_5 que resulta de la docilidad tangencial, vertical, de la fractura, y δ_H es la proporción de ϵ_6 que resulta de la docilidad tangencial, horizontal, de la fractura. El calculo que se muestra en la ecuación (2.43), usando las cantidades introducidas en la ecuación (2.44) conduce a:

$$[c_e] = \begin{bmatrix} c_{11b}(1-\delta_N) & c_{12b}(1-\delta_N) & c_{13b}(1-\delta_N) & 0 & 0 & 0 \\ c_{12b}(1-\delta_N) & c_{11b}\left(1-\delta_N\frac{c_{12b}^2}{c_{11b}^2}\right) & c_{13b}\left(1-\delta_N\frac{c_{12b}}{c_{11b}}\right) & 0 & 0 & 0 \\ c_{13b}(1-\delta_N) & c_{13b}\left(1-\delta_N\frac{c_{12b}}{c_{11b}}\right) & c_{33b}\left(1-\delta_N\frac{c_{13b}^2}{c_{11b}c_{33b}}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44b}(1-\delta_V) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66b}(1-\delta_H) \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

El valor absoluto de las constantes elásticas del medio fracturado no pueden incrementarse con el incremento de los valores de las docilidades de la fractura, excepto por $|c_{23e}|$, el cual puede incrementarse con el incremento de Z_N solamente bajo la circunstancia inusual de $c_{12b} < 0$. Para el caso especial cuando el fondo es isotrópico y las fracturas son simétricas rotacionalmente ($Z_H=Z_V$), la expresión (2.45) para $[c_e]$ se simplifica, en la forma, y concuerda precisamente con los resultados obtenidos por Hudson (1981) para microfracturas alineadas en un fondo isotrópico, para la teoría de primer orden en la densidad de fracturas y por Hudson (1986) para la teoría de segundo orden. Bajo éstas suposiciones, el medio es IT, con un eje horizontal de simetría.

La estructura de $[c_e]$ implica varias desigualdades en las constantes elásticas del medio fracturado verticalmente además de las condiciones usuales de estabilidad en los medios ortorrómbicos; i.e.,

$$c_{55e} \leq c_{44e},$$

$$c_{11e} \leq c_{22e}, \quad (2.46)$$

$$|c_{13e}| \leq |c_{23e}|.$$

La velocidad de desdoblamiento en la dirección X3 es dada $\sqrt{c_{44e}} [1 - \sqrt{1 - \delta_B}]$, con la polarización de la onda más rápida alineada con el rumbo de las fracturas, i.e., la dirección X2. Además, las 9 constantes elásticas del medio ortorrómbico general dependen en este caso de 8 parámetros (las cinco constantes elásticas del medio IT y las tres docilidades de la fractura). Así que, debe existir una restricción adicional entre las nueve cije, y es fácil verificar que

$$c_{13_e} (c_{22_e} + c_{12_e}) \equiv c_{23_e} (c_{11_e} + c_{12_e}). \quad (2.47)$$

Según Schoenberg y Helbig (1997), un medio que parezca ser ortorrómbico y satisfaga las desigualdades en la ecuación (2.46) y una versión normalizada de la ecuación (2.47), se puede asumir que tiene un comportamiento ITFV. Entonces, usando la formulación de Schoenberg y Muir (1989), se puede “sustraer” las fracturas (con tres docilidades desconocidas). Específicamente, la condición es que el medio de fondo que resulta debe ser IT, con el eje de simetría perpendicular a las fracturas (en la dirección X3), podría ser usado para hallar las tres docilidades desconocidas de las fracturas y de allí las cinco constantes elásticas del medio de fondo IT (Hood y Schoenberg, 1989).

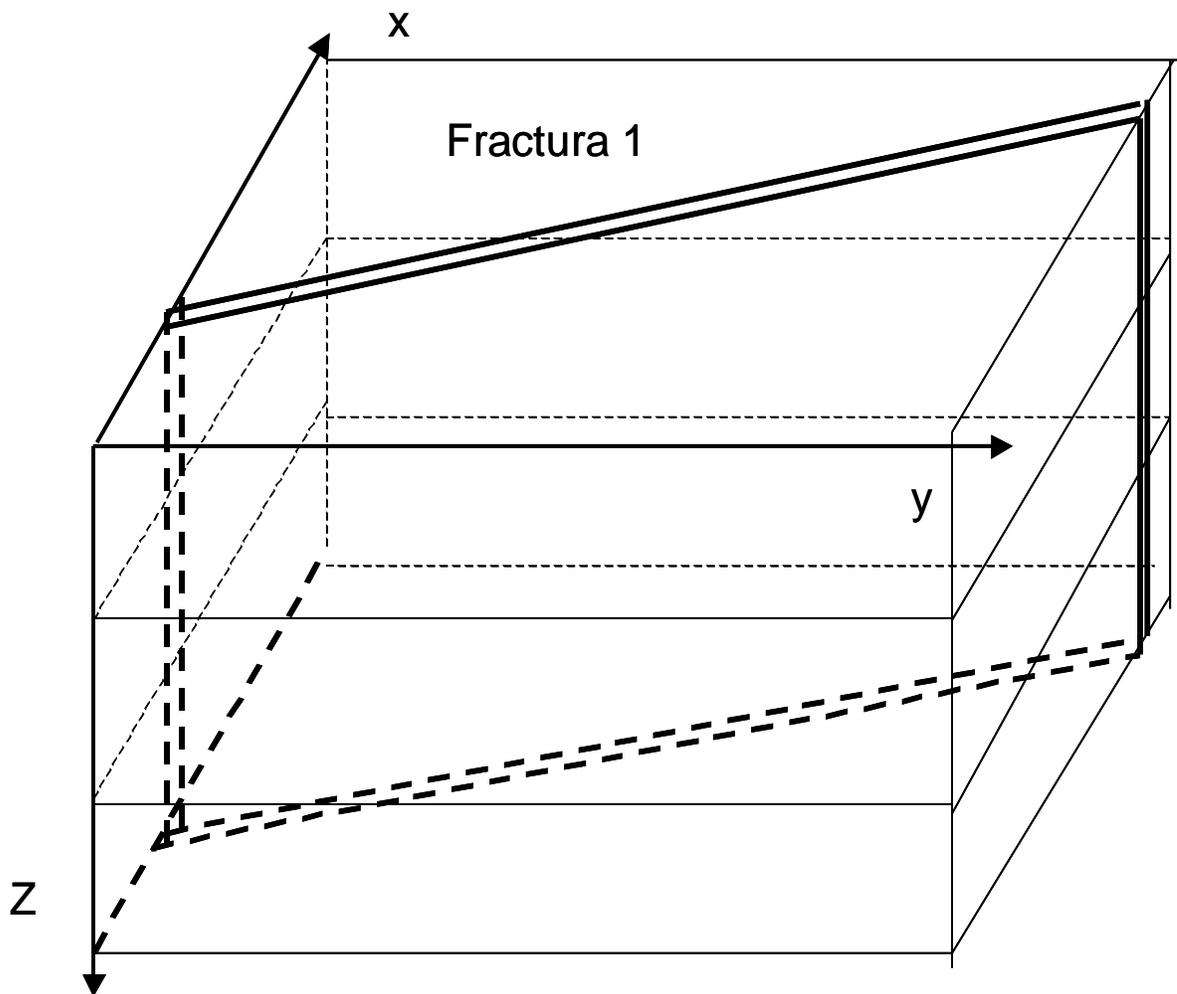
2.2.3.- FRACTURAS NO ALINEADAS CON LOS EJES COORDENADOS:

2.2.3.1.- FRACTURAS VERTICALES.

Sea $C = [C_{mn}]$, un tensor de rigidez con simetría elástica hexagonal, y el cual corresponde a un medio que es Transversalmente Anisotrópico. Este tensor representa un medio conformado por un sistema de fracturas verticales, donde el rumbo (ϕ) de las fracturas corresponde con la orientación del eje OX2 (i.e., $\phi=0^\circ$). El tensor de rigidez correspondiente al mismo sistema de fracturas pero que posee una orientación distinta ($C' = C' [C_{mn}], \phi$), es hallado mediante una transformación de Enlace, en la

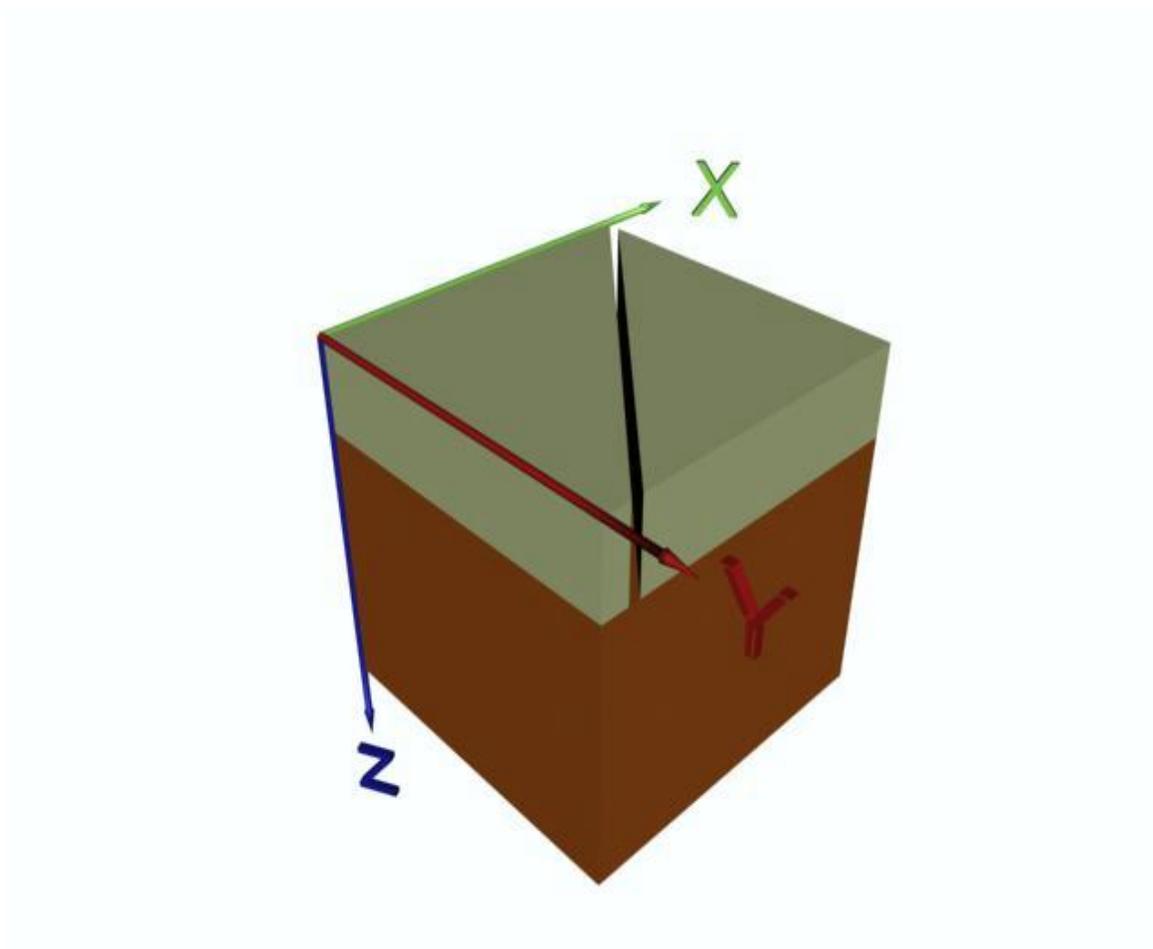
cual la matriz A corresponde a una rotación⁹ (horaria ó antihoraria) de ϕ grados alrededor del eje vertical (OX_3).

Figura 4.1: Fractura vertical cuyo orientación no coincide con algún eje coordenado.



⁹ En la sección II, se usa una rotación horaria.

Figura 4.2: Fractura vertical cuyo orientación no coincide con algún eje coordenado.
Modelo de una Capa.



Por lo tanto, se puede escribir:

$$\hat{e}'_1 = \cos \phi \hat{e}_1 + \text{sen} \phi \hat{e}_2 + 0 \hat{e}_3 ,$$

$$\hat{e}'_2 = -\text{sen} \phi \hat{e}_1 + \cos \phi \hat{e}_2 + 0 \hat{e}_3 ,$$

$$\hat{e}'_3 = 0 \hat{e}_1 + 0 \hat{e}_2 + 1 \hat{e}_3 ,$$

$$\exists \therefore \begin{pmatrix} \hat{e}'_1 \\ \hat{e}'_2 \\ \hat{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \text{sen} \phi & 0 \\ -\text{sen} \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{pmatrix} \rightarrow [\hat{e}'] = [A][\hat{e}]. \quad (2.48)$$

Los elementos de la matriz de rotación A son usados para definir los elementos de la matriz de transformación de enlace (Winterstein, 1990) M, para aplicar la rotación del Tensor C_{mn} . De tal manera $C' = M C M^T$.

$$M = \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & \text{sen}^2 \phi & 0 & 0 & 0 & 2\text{sen} \phi \cos \phi \\ \text{sen}^2 \phi & \cos^2 \phi & 0 & 0 & 0 & -2\text{sen} \phi \cos \phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \phi & -\text{sen} \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen} \phi & \cos \phi & 0 \\ -\text{sen} \phi \cos \phi & \text{sen} \phi \cos \phi & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \phi \cos^2 \phi \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Así pues, si a un Tensor ITH se le aplica una rotación horaria, alrededor del eje Z, entonces el nuevo arreglo tiene la forma de un Tensor Monoclínico, de la forma:

$$[C_{mn}]^M_{(ITH)} \equiv \begin{bmatrix} c^M_{11} & c^M_{12} & c^M_{13} & 0 & 0 & c^M_{16} \\ c^M_{12} & c^M_{22} & c^M_{23} & 0 & 0 & c^M_{26} \\ c^M_{13} & c^M_{23} & c^M_{33} & 0 & 0 & c^M_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c^M_{44} & c^M_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^M_{45} & c^M_{55} & 0 \\ c^M_{16} & c^M_{26} & c^M_{36} & 0 & 0 & c^M_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

donde los elementos de C^M serán, explícitamente:

$$c^M_{11} = c_{11} \cos^4 \phi + 2c_{12} \sin^2 \phi \cos^2 \phi + c_{22} \sin^4 \phi,$$

$$c^M_{12} = c_{12} + (c_{11} + c_{22} - 2c_{12} - 4c_{55}) \sin^2 \phi \cos^2 \phi,$$

$$c^M_{13} = c_{12} \cos^2 \phi + c_{23} \sin^2 \phi,$$

$$c^M_{14} = 0,$$

$$c^M_{15} = 0,$$

$$c^M_{16} = (c_{12} + 2c_{55} - c_{11}) \sin \phi \cos^3 \phi + (c_{22} - 2c_{55} - c_{12}) \cos \phi \sin^3 \phi.$$

$$\begin{aligned}
c_{21}^M &= c_{12}^M, \\
c_{22}^M &= c_{11} \text{sen}^4 \phi + 2c_{12} \text{sen}^2 \phi \cos^2 \phi + c_{22} \cos^4 \phi + 4c_{55} \cos^2 \phi \text{sen}^2 \phi, \\
c_{23}^M &= c_{12} \text{sen}^2 \phi + c_{23} \cos^2 \phi, \\
c_{24}^M &= 0, \\
c_{25}^M &= 0, \\
c_{26}^M &= (c_{22} - 2c_{55} - c_{12}) \text{sen} \phi \cos^3 \phi + (c_{12} + 2c_{55} - c_{11}) \cos \phi \text{sen}^3 \phi.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{31}^M &= c_{13}^M, \\
c_{32}^M &= c_{23}^M, \\
c_{33}^M &= c_{22}, \\
c_{34}^M &= 0, \\
c_{35}^M &= 0, \\
c_{36}^M &= (c_{23} - c_{12}) \text{sen} \phi \cos \phi.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

$$c_{41}^M = c_{14}^M,$$

$$c_{42}^M = c_{24}^M,$$

$$c_{43}^M = c_{34}^M,$$

$$c_{44}^M = c_{44} \cos^2 \phi + c_{55} \text{sen}^2 \phi,$$

$$c_{45}^M = (c_{44} - c_{55}) \text{sen} \phi \cos \phi,$$

$$c_{46}^M = 0.$$

$$c_{51}^M = c_{15}^M,$$

$$c_{52}^M = c_{25}^M,$$

$$c_{53}^M = c_{35}^M,$$

$$c_{54}^M = c_{45}^M,$$

$$c_{55}^M = c_{44} \text{sen}^2 \phi + c_{55} \cos^2 \phi,$$

$$c_{56}^M = 0.$$

$$c_{61}^M = c_{16}^M,$$

$$c_{62}^M = c_{26}^M,$$

$$c_{63}^M = c_{36}^M,$$

$$c_{64}^M = c_{46}^M,$$

$$c_{65}^M = c_{56}^M,$$

$$c_{66}^M = (c_{22} + c_{11} - 2c_{12})\text{sen}^2\phi \cos^2\phi + (\cos^2\phi - \text{sen}^2\phi)c_{55}$$

2.2.3.2.- FRACTURAS OBLICUAS.

El caso más general para un conjunto de fracturas es el de las fracturas oblicuas. Análogo al caso de fracturas verticales, este sistema de fracturas pueden ser descritas en términos de las constantes $C = [C_{mn}]$, además de una orientación azimutal de ϕ grados y una inclinación θ grados.

En este caso, el sistema de referencia es el no primado, y el sistema rotado es el primado. La orientación de la fractura vertical está dada por el ángulo de rotación azimutal ϕ y su inclinación está dada por el ángulo θ . Lo anterior es reflejado en la siguiente Figura:

Figura 5.1: Sistema de Fracturas Oblicuas con θ grados de inclinación y ϕ grados de azimut.

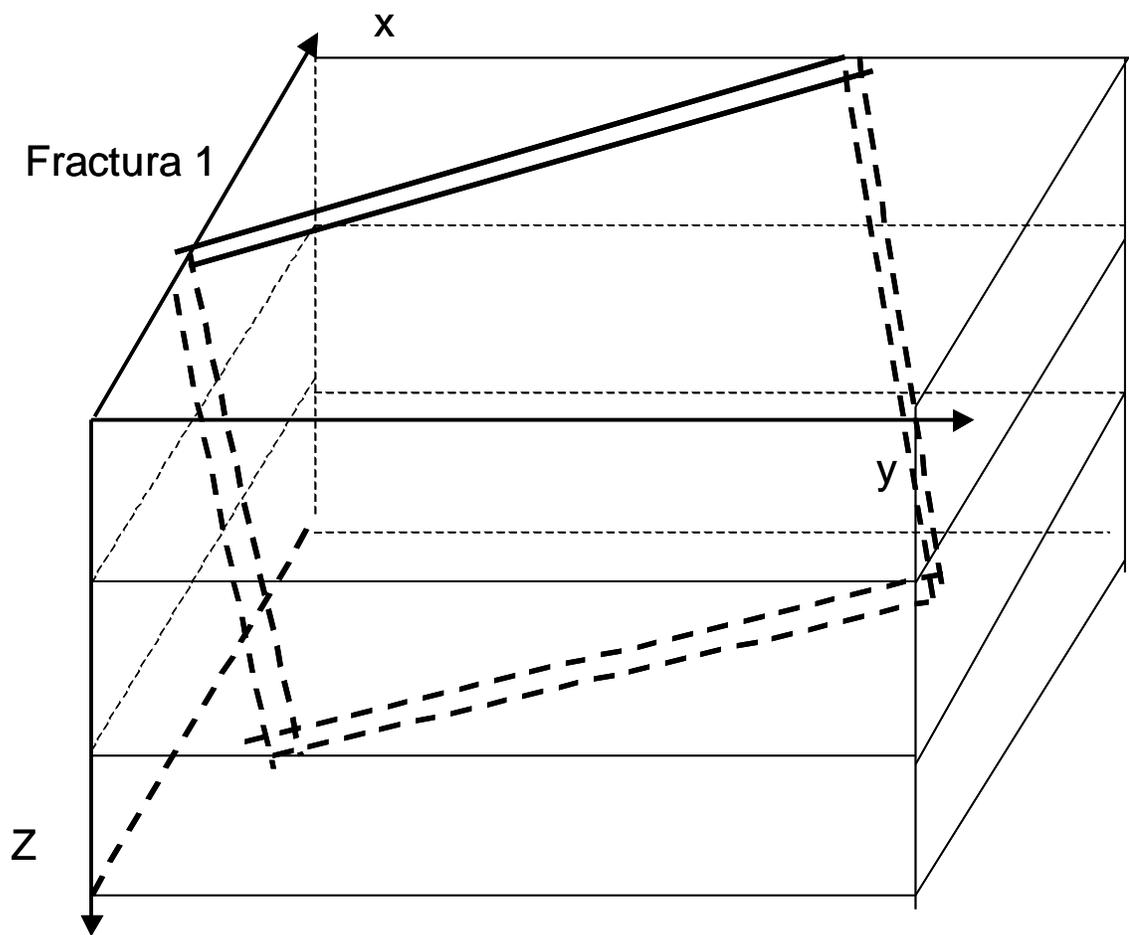
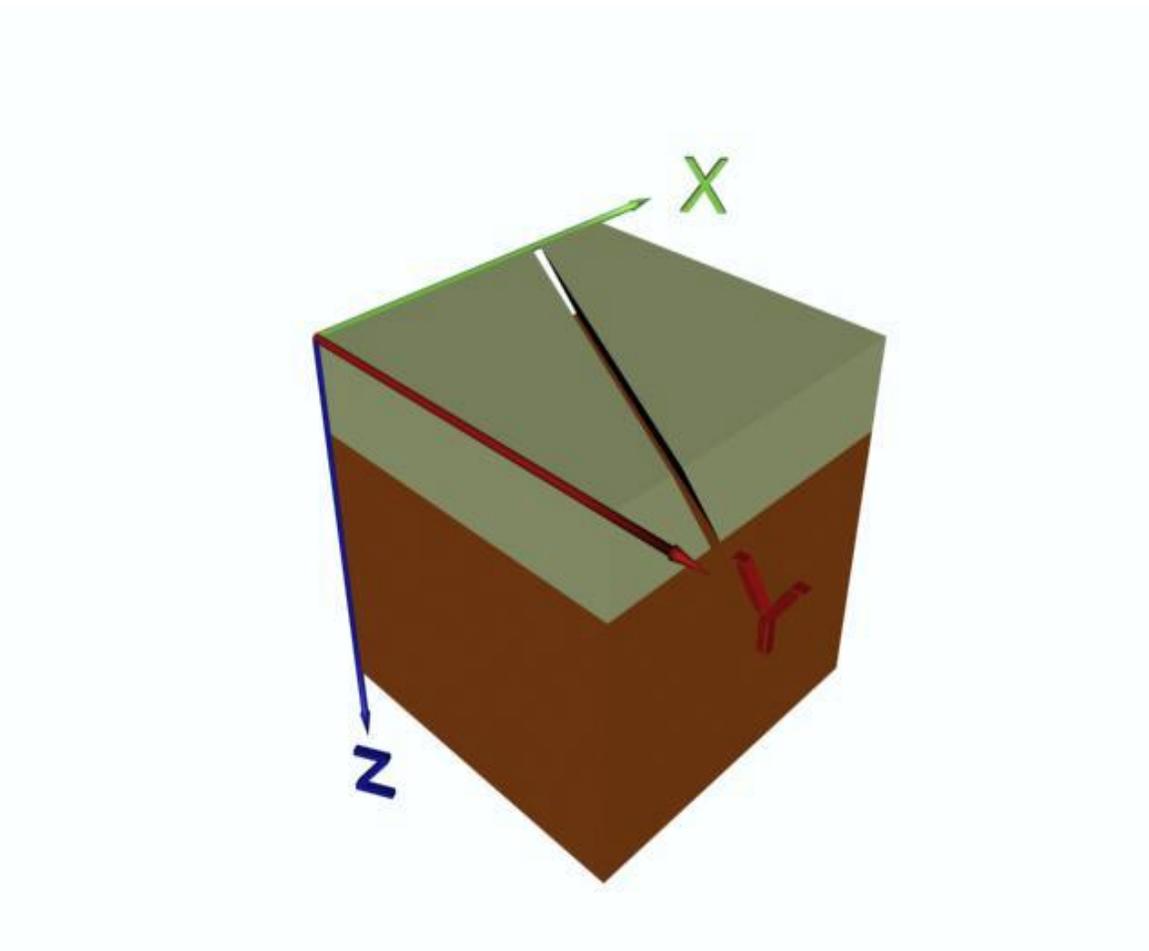


Figura 5.2: Rotación horaria del sistema de fracturas, primero θ grados alrededor de x_2 , y posteriormente ϕ grados alrededor del nuevo eje x_3' . Modelo de una capa fracturada por un Sistema de Fracturas Oblicuas con θ grados de inclinación y ϕ grados de azimut.



Por lo tanto, se puede escribir:

$$\hat{e}'_1 = \cos \theta \hat{e}_1 + 0 \hat{e}_2 - \text{sen} \theta \hat{e}_3 ,$$

$$\hat{e}'_2 = 0 \hat{e}_1 + 1 \hat{e}_2 + 0 \hat{e}_3 ,$$

$$\hat{e}'_3 = \text{sen} \theta \hat{e}_1 + 0 \hat{e}_2 + \cos \theta \hat{e}_3 ,$$

$$\exists \therefore \begin{pmatrix} \hat{e}'_1 \\ \hat{e}'_2 \\ \hat{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\text{sen} \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen} \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{pmatrix} \rightarrow [\hat{e}'] = [A][\hat{e}]. \quad (2.52)$$

Los elementos de la matriz de rotación A son usados para definir los elementos de la matriz de transformación de Bond, para aplicar la rotación del Tensor C_{mn} . De tal manera $C^B = M_\theta C M_\theta^T$.

$$M_\theta = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & 0 & \text{sen}^2 \theta & 0 & -2\text{sen} \theta \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen}^2 \theta & 0 & \cos^2 \theta & 0 & 2\text{sen} \theta \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & 0 & \text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta \cos \theta & 0 & -\text{sen} \theta \cos \theta & 0 & \cos^2 \theta \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen} \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

(2.53)

$$[C_{mn}]^B_{(ITH)} \equiv \begin{bmatrix} c^B_{11} & c^B_{12} & c^B_{13} & 0 & c^B_{15} & 0 \\ c^B_{12} & c^B_{22} & c^B_{23} & 0 & c^B_{25} & 0 \\ c^B_{13} & c^B_{23} & c^B_{33} & 0 & c^B_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^B_{44} & 0 & c^B_{46} \\ c^B_{15} & c^B_{25} & c^B_{35} & 0 & c^B_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^B_{46} & 0 & c^B_{66} \end{bmatrix}$$

(2.54)

Siendo dichos elementos, explícitamente:

$$c^B_{11} = c_{11} \cos^4 \theta + (2c_{12} + 4c_{55}) \text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta + c_{22} \text{sen}^4 \theta,$$

$$c^B_{12} = c_{12} \cos^2 \theta + c_{23} \text{sen}^2 \theta,$$

$$c^B_{13} = c_{12} + (c_{11} + c_{22} - 2c_{12} - 4c_{55}) \text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta,$$

$$c^B_{14} = 0,$$

$$c^B_{15} = (c_{11} - c_{12} - 2c_{55}) \text{sen} \theta \cos^3 \theta + (c_{12} + 2c_{55} - c_{22}) \cos \theta \text{sen}^3 \theta,$$

$$c^B_{16} = 0.$$

$$c_{21}^B = c_{12}^B,$$

$$c_{22}^B = c_{22},$$

$$c_{23}^B = c_{12} \text{sen}^2 \theta + c_{23} \cos^2 \theta,$$

$$c_{24}^B = 0,$$

$$c_{25}^B = (c_{12} - c_{23}) \text{sen} \theta \cos \theta,$$

$$c_{26}^B = 0.$$

$$c_{31}^B = c_{13}^B,$$

$$c_{32}^B = c_{23}^B,$$

$$c_{33}^B = c_{11} \text{sen}^4 \theta + (2c_{12} + 4c_{55}) \text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta + c_{22} \cos^4 \theta,$$

$$c_{34}^B = 0,$$

$$c_{35}^B = (c_{11} - c_{12} - 2c_{55}) \text{sen}^3 \theta \cos \theta + (c_{12} + 2c_{55} - c_{22}) \cos^3 \theta \text{sen} \theta$$

$$c_{36}^B = 0.$$

(2.55)

$$c_{41}^B = c_{14}^B,$$

$$c_{42}^B = c_{24}^B,$$

$$c_{43}^B = c_{34}^B,$$

$$c_{44}^B = c_{44} \cos^2 \theta + c_{55} \sin^2 \theta,$$

$$c_{45}^B = 0,$$

$$c_{46}^B = (c_{55} - c_{44}) \sin \theta \cos \theta.$$

$$c_{51}^B = c_{15}^B,$$

$$c_{52}^B = c_{25}^B,$$

$$c_{53}^B = c_{35}^B,$$

$$c_{54}^B = c_{45}^B,$$

$$c_{55}^B = (c_{11} + c_{22} - 2c_{12}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + c_{55} \cos^2 2\theta,$$

$$c_{56}^B = 0.$$

$$c_{61}^B = c_{16}^B,$$

$$c_{62}^B = c_{26}^B,$$

$$c_{63}^B = c_{36}^B,$$

$$c_{64}^B = c_{46}^B,$$

$$c_{65}^B = c_{56}^B,$$

$$c_{66}^B = c_{44} \sin^2 \theta + c_{55} \cos^2 \theta,$$

Posteriormente, se aplica la rotación alrededor de Z, tal que:

$$\hat{e}_1''' = \cos \phi \hat{e}'_1 + \text{sen} \phi \hat{e}'_2 + 0 \hat{e}'_3 ,$$

$$\hat{e}_2''' = -\text{sen} \phi \hat{e}'_1 + \cos \phi \hat{e}'_2 + 0 \hat{e}'_3 ,$$

$$\hat{e}_3''' = 0 \hat{e}'_1 + 0 \hat{e}'_2 + 1 \hat{e}'_3 ,$$

$$\exists \therefore \begin{pmatrix} \hat{e}_1'' \\ \hat{e}_2'' \\ \hat{e}_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \text{sen} \phi & 0 \\ -\text{sen} \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}'_1 \\ \hat{e}'_2 \\ \hat{e}'_3 \end{pmatrix} \rightarrow [\hat{e}''] = [A][\hat{e}'] .$$

(2.56)

Así pues, se tendrá:

$$\mathbf{C}_{(\theta, \phi)}^T = \mathbf{M}_\phi \mathbf{C}_{(\theta)}^B \mathbf{M}_\phi^T ,$$

(2.57)

Los términos de manera explícita son:

$$c_{11}^T = c_{11}^B \cos^4 \phi + (2c_{12}^B + 4c_{66}^B) \text{sen}^2 \phi \cos^2 \phi + c_{22}^B \text{sen}^4 \phi,$$

$$c_{12}^T = c_{12}^B + (c_{11}^B + c_{22}^B - 2c_{12}^B - 4c_{66}^B) \cos^2 \phi \text{sen}^2 \phi,$$

$$c_{13}^T = c_{23}^B \text{sen}^2 \phi + c_{13}^B \cos^2 \phi,$$

$$c_{14}^T = (2c_{46}^B - c_{15}^B) \text{sen} \phi \cos^2 \phi - c_{25}^B \text{sen}^3 \phi,$$

$$c_{15}^T = (2c_{46}^B + c_{25}^B) \text{sen}^2 \phi \cos \phi + c_{15}^B \cos^3 \phi,$$

$$c_{16}^T = (c_{12}^B + 2c_{66}^B - c_{11}^B) \text{sen} \phi \cos^3 \phi + (c_{22}^B - c_{12}^B - 2c_{66}^B) \cos \phi \text{sen}^3 \phi.$$

$$c_{21}^T = c_{12}^T,$$

$$c_{22}^T = c_{11}^B \text{sen}^4 \phi + (2c_{12}^B + 4c_{66}^B) \text{sen}^2 \phi \cos^2 \phi + c_{22}^B \cos^4 \phi,$$

$$c_{23}^T = c_{13}^B \text{sen}^2 \phi + c_{23}^B \cos^2 \phi,$$

$$c_{24}^T = -(2c_{46}^B + c_{25}^B) \text{sen} \phi \cos^2 \phi - c_{15}^B \text{sen}^3 \phi,$$

$$c_{25}^T = (c_{15}^B - 2c_{46}^B) \text{sen}^2 \phi \cos \phi + c_{25}^B \cos^3 \phi,$$

$$c_{26}^T = (c_{12}^B + 2c_{66}^B - c_{11}^B) \text{sen}^3 \phi \cos \phi + (c_{22}^B - c_{12}^B - 2c_{66}^B) \cos^3 \phi \text{sen} \phi.$$

$$c_{31}^T = c_{13}^T,$$

$$c_{32}^T = c_{23}^T,$$

$$c_{33}^T = c_{33}^B,$$

$$c_{34}^T = -c_{35}^B \text{sen} \phi,$$

$$c_{35}^T = c_{35}^B \cos \phi,$$

$$c_{36}^T = (c_{23}^B - c_{13}^B) \text{sen} \phi \cos \phi.$$

$$\begin{aligned}
c_{41}^T &= c_{14}^T, \\
c_{42}^T &= c_{24}^T, \\
c_{43}^T &= c_{34}^T, \\
c_{44}^T &= c_{44}^B \cos^2 \phi + c_{55}^B \sin^2 \phi, \\
c_{45}^T &= (c_{44}^B - c_{55}^B) \sin \phi \cos \phi \\
c_{46}^T &= (c_{15}^B - c_{25}^B - c_{46}^B) \sin^2 \phi \cos \phi + c_{46}^B \cos^3 \phi.
\end{aligned}
\tag{2.58}$$

$$\begin{aligned}
c_{51}^T &= c_{15}^T, \\
c_{52}^T &= c_{25}^T, \\
c_{53}^T &= c_{35}^T, \\
c_{54}^T &= c_{45}^T, \\
c_{55}^T &= c_{44}^B \sin^2 \phi + c_{55}^B \cos^2 \phi, \\
c_{56}^T &= (-c_{15}^B + c_{25}^B + c_{46}^B) \sin \phi \cos^2 \phi - c_{46}^B \sin^3 \phi.
\end{aligned}$$

$$c_{61}^T = c_{16}^T,$$

$$c_{62}^T = c_{26}^T,$$

$$c_{63}^T = c_{36}^T,$$

$$c_{64}^T = c_{46}^T,$$

$$c_{65}^T = c_{56}^T,$$

$$c_{66}^T = c_{66}^B + (c_{11}^B + c_{22}^B - 2c_{12}^B - 4c_{66}^B) \cos^2 \phi \operatorname{sen}^2 \phi$$

2.3.- CONSIDERACIONES MATEMÁTICAS.

2.3.1.- TRANSFORMACIÓN LINEAL EN ESPACIO 3-D EUCLIDEANO.

Junto con Sokolnikof (1951), referiremos nuestro espacio 3-D Euclídeo (E3) a un sistema de coordenadas con vectores base $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, y $a^{(3)}$, linealmente independientes pero no necesariamente ortogonales. Entonces, cualquier vector \underline{x} puede ser representado en dicha base, de la siguiente forma:

$$\underline{x} \equiv x_j a^{(j)}, (j = 1, 2, 3), \quad (2.59)$$

donde x_j son los números reales correspondientes a las proyección del vector \underline{X} sobre los distintos ejes, definidos por los vectores base $a^{(j)}$.

Ahora bien, introduzcamos una transformación lineal, real, de coordenadas:

$$x'_i = a_{ij} x_j, \quad (2.60)$$

o

$$\underline{x}' = A\underline{x}, \quad (2.61)$$

con el determinante de A distinto de cero (i.e., $|a_{ij}| \neq 0$).

Sokolnikoff (1951), interpreta el vector resultante \underline{x}' como un vector “deformado”, y el mismo es producido por “la deformación del espacio”, la cual a su vez está caracterizada por el operador A. Es decir, la longitud del vector \underline{x}' será diferente de la perteneciente al vector \underline{x} , y su orientación relativa a nuestro sistema fijo de referencia, diferirá de la orientación del vector \underline{x} . Obviamente, existen muchos marcos de referencia que pueden empotrarse en nuestro espacio E3, y en cada marco el vector \underline{x} está caracterizado de forma única por una terna de números. De donde la pregunta, matemáticamente relevante que se puede plantear es: ¿cuál es la forma de la transformación que genera la misma deformación del espacio como aquella caracterizada por la matriz A, cuando el vector \underline{x} está referido a un nuevo marco de referencia en el cual los vectores base $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, y $\alpha^{(3)}$, están relacionados a los vectores base antiguos $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, y $a^{(3)}$, mediante la siguiente formula:

$$\alpha^{(i)} = b_{ij} a^{(j)} ?, \quad (2.62)$$

Asumiendo que la matriz $(b_{ij}) \equiv B$ no es singular, y denotando las componentes de \underline{x} relacionadas al nuevo sistema por (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , entonces, por definición se tiene:

$$\underline{x} = \xi_i \alpha^{(i)}, \quad (2.63)$$

e insertando la ecuación (2.63) en (2.62), obtendremos:

$$\underline{x} = \xi_i b_{ij} a^{(j)}, \quad (2.64)$$

Luego, comparando (2.64) con (2.59) se obtiene la conexión entre las componentes ξ_i y X_i . En consecuencia, se puede escribir:

$$x_j = b_{ij} \xi_i, \quad (2.65)$$

esto es, la (2.59) da lugar a,

$$x_j a^{(j)} \equiv \xi_i b_{ij} a^{(j)},$$

$$\therefore x_j \equiv \xi_i b_{ij} \equiv b_{ij} \xi_i$$

Nótese que la matriz B, en la transformación (2.62) cuyos vectores base son $a^{(j)}$, difiere de la correspondiente (denominada por convención B^T) en la transformación (2.65). La diferencia radica en un intercambio entre filas y columnas. Así que la matriz B^T es la transpuesta de la matriz B. Así pues, rescribimos la ecuación (2.65) en forma matricial:

$$\underline{x} = \mathbf{B}^T \underline{\xi}, \quad (2.66)$$

con lo cual la solución de la ecuación (2.66) está dada por:

$$\underline{\xi} = (\mathbf{B}^T)^{-1} \underline{x}, \quad (2.67)$$

luego, para efectos de simplificar la notación, denotaremos a $(B^T)^{-1}$ por C, de tal manera que la ecuación (2.67) se convierte en:

$$\underline{\xi} = \mathbf{C} \underline{x}, \quad (2.68)$$

donde

$$\mathbf{C} \equiv (\mathbf{B}^T)^{-1}, \quad (2.69)$$

De acuerdo a lo anterior, la ecuación (2.68) nos capacita a calcular las componentes del vector \underline{x} , cuando éste se encuentra referido al nuevo sistema de vectores base $\{\alpha^{(i)}\}$, definidos por la ecuación (2.62). En consecuencia, las componentes $(\xi'_1, \xi'_2,$

ξ'_3) del vector \underline{x}' , referidas al marco de referencia con vectores base $\{\alpha^{(i)}\}$, estarán dadas por:

$$\underline{\xi}' = C \underline{x}' \quad (2.70).$$

Por lo tanto, retomando la pregunta de la expresión acerca de la deformación del espacio, en el nuevo marco de referencia, descrita por la ecuación (2.61), hemos encontrado la relación correcta entre las componentes (ξ_1, ξ_2, ξ_3) y (ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3) . Así pues, mediante la sustitución de (2.61) en (2.60), y haciendo uso conveniente de la ecuación (2.68), se genera:

$$\begin{aligned} \underline{\xi}' &= C A C^{-1} \underline{\xi}, \\ \text{esto es, } \underline{\xi}' &= S \underline{\xi}, \end{aligned} \quad (2.71.1)$$

$$\text{donde hemos definido} \quad S \equiv C A C^{-1}. \quad (2.71.2)$$

La transformación dada por la matriz S se denomina “de Similitud”, dado que la transformación producida por A, a través de las fórmulas (2.71) y (2.61), caracteriza la misma deformación del espacio original, relacionando dos marcos de referencia distintos.

Recordando la ecuación (2.69), finalmente podemos escribir la (2.71) en la forma:

$$\underline{\xi}' = (B^T)^{-1} A B^T \underline{\xi}, \quad (2.72)$$

donde la matriz A tiene que ver con la deformación del espacio, y B es la matriz de transformación de los vectores base. Finalmente, observe que si las bases $\{a^{(i)}\}$ y $\{\alpha^{(i)}\}$, $\forall i$, son ortonormales, entonces la ecuación (14) adquiere la forma:

$$\underline{\xi}' = B A B^T \underline{\xi}, \quad (2.73)$$

2.3.2.- TRANSFORMACIÓN DE ENLACE.

Se entiende por transformación de enlace a la técnica que permite realizar una transformación de similitud pasiva, sobre el tensor de rigidez o el de docilidad, mediante el uso de la multiplicación de matrices. Es decir, si $\underline{\mathbf{c}}$ es el tensor de rigidez original, entonces $\underline{\mathbf{c}}'$ se puede obtener mediante el uso de esta transformación Winterstein (1990), a través de la expresión:

$$\underline{\mathbf{c}}' = \mathbf{M} \underline{\mathbf{c}} \mathbf{M}^T, \quad (2.74)$$

donde la matriz de transformación \mathbf{M} está dada en términos de los coeficientes de la matriz \mathbf{A} , la cual representa la transformación de los vectores base como se explica en el apartado anterior, pero de manera tal que se puede escribir,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.75)$$

con Auld (1973)

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & 2a_{12}a_{13} & 2a_{13}a_{11} & 2a_{11}a_{12} \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 & a_{23}^2 & 2a_{22}a_{23} & 2a_{23}a_{21} & 2a_{21}a_{22} \\ a_{31}^2 & a_{32}^2 & a_{33}^2 & 2a_{32}a_{33} & 2a_{33}a_{31} & 2a_{31}a_{32} \\ a_{21}a_{31} & a_{22}a_{32} & a_{23}a_{33} & a_{22}a_{33} + a_{23}a_{32} & a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31} & a_{22}a_{31} + a_{21}a_{32} \\ a_{31}a_{11} & a_{32}a_{12} & a_{33}a_{13} & a_{12}a_{33} + a_{13}a_{32} & a_{13}a_{31} + a_{11}a_{33} & a_{11}a_{32} + a_{12}a_{31} \\ a_{11}a_{21} & a_{12}a_{22} & a_{13}a_{23} & a_{12}a_{23} + a_{13}a_{22} & a_{13}a_{21} + a_{11}a_{23} & a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

2.3.3.- TRANSFORMACIÓN DE JACOBI.

Para hallar los autovalores y autovectores de una matriz real y simétrica, se puede usar el Método de Rotación o Transformación de Jacobi.

En principio, consideramos una matriz A, real y simétrica, de dimensionalidad, 2x2. Explícitamente, sea A dada por,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \text{ con } a_{12} \equiv a_{21}, \quad (2.77)$$

y nos damos a U como una matriz de rotación, de la forma:

$$U = \begin{bmatrix} \cos \phi & \text{sen} \phi \\ -\text{sen} \phi & \cos \phi \end{bmatrix}, \text{ con } \text{tg} 2\phi = 2a_{12} / (a_{22} - a_{11}) \quad \forall \phi \in -\pi/4 \leq \phi \leq \pi/4.$$

Entonces, es fácilmente verificable que,

$$B = U^{-1} A U = D, \quad (2.78)$$

Donde D es diagonal y U es unitaria; igualmente, se puede mostrar que,

$$b_{11}^2 + b_{22}^2 = a_{11}^2 + 2a_{12}^2 + a_{22}^2, \quad (2.79)$$

Ahora bien, sea A redefinida como $A = (a_{ij})$ de nxn, real y simétrica. Así mismo, sea

$U = (u_{ij})$ de nxn, una matriz que implica una rotación (2x2) definida por:

$$U_{rr} = U_{ss} = \cos \phi, \quad U_{rs} = -U_{sr} = \text{sen} \phi, \quad (2.80)$$

pero con

$$\begin{aligned}
 U_{ii} &= 1, \forall i \neq r, s \\
 & \text{y} \\
 U_{ij} &= 0, \forall ij \neq rs, sr .
 \end{aligned} \tag{2.81}$$

entonces, de nuevo se puede verificar en forma inmediata, que si $B = U^{-1} A U$, se cumple que $b_{ij} = a_{ij}$, para $i \neq r, s$ y $j \neq r, s$; mientras que los elementos afectados se encontrarán tanto en las r -ésima y s -ésima filas así como en los respectivas columnas. De esta forma se tendrá:

$$\begin{aligned}
 b_{ri} &= b_{ir} = a_{ir} \cos \phi + a_{is} \operatorname{sen} \phi , \\
 b_{si} &= b_{is} = -a_{ir} \operatorname{sen} \phi + a_{is} \cos \phi , \text{ con } i \neq r, s .
 \end{aligned} \tag{2.82}$$

$$\begin{aligned}
 b_{rr} &= a_{rr} \cos^2 \phi + 2a_{rs} \cos \phi \operatorname{sen} \phi + a_{ss} \operatorname{sen}^2 \phi , \\
 b_{ss} &= a_{rr} \operatorname{sen}^2 \phi - 2a_{rs} \cos \phi \operatorname{sen} \phi + a_{ss} \cos^2 \phi , \\
 b_{sr} &= b_{rs} = (a_{ss} - a_{rr}) \operatorname{sen} \phi \cos \phi + a_{rs} (\cos^2 \phi - \operatorname{sen}^2 \phi) .
 \end{aligned} \tag{2.83}$$

con $0 \leq |\phi| \leq \pi/4$, lo cual induce que el elemento b_{rs} desaparezca ($b_{rs} = 0$).

De lo anterior, se puede mostrar que para $i \neq r, s$

$$\begin{aligned}
 \therefore b_{ir}^2 + b_{is}^2 &= a_{ir}^2 + a_{is}^2 , \\
 \therefore \sum_{i \neq r, s} (b_{ir}^2 + b_{is}^2) &= \sum_{i \neq r, s} (a_{ir}^2 + a_{is}^2) .
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} \therefore b_{ri}^2 + b_{si}^2 &= a_{ri}^2 + a_{si}^2, \\ \therefore \sum_{i \neq r,s} (b_{ri}^2 + b_{si}^2) &= \sum_{i \neq r,s} (a_{ri}^2 + a_{si}^2). \end{aligned} \quad (2.85)$$

y finalmente, si $b_{rs} \equiv b_{sr}$ (2.86)

$$\therefore \sum_{i \neq r,s} b_{ij}^2 = \sum_{i \neq r,s} a_{ij}^2 - 2a_{rs}^2. \quad (2.87)$$

Obsérvese de lo anterior, que se ha afectado a los elementos pertenecientes a una fila y columna específica, los elementos b_{ij} , tal que $i,j = r,s$ y $r \neq s$. Esto sugiere la posibilidad de aniquilar todos los elementos fuera de la diagonal de A , a través de una sucesión, $\{U_n\}$, de tales tipo de matriz rotacional. Dado que cada transformación de similitud, preserva los valores propios de A , entonces la matriz diagonal resultante tendrá los valores propios como elementos de su Diagonal. Por otro lado, es evidente que cuando se trata de una matriz simétrica (y real), siempre se puede reducir a la forma diagonal a través de una sola rotación; sin embargo, no conocemos tal rotación. El método de Jacobi, persigue aproximarla a través de una secuencia $\{U_n\}$ de rotaciones bidimensionales, donde se escoge U_n de manera tal que aniquilen el elemento fuera de la diagonal pero de módulo máximo, en el n -ésimo paso. Desafortunadamente, si se aniquila al elemento (r,s) con la rotación U_n , y la próxima rotación U_{n+1} es escogida para aniquilar el elemento (r',s') , entonces, el nuevo elemento (r,s) no será, en general, cero. En consecuencia, se intuye que se requiere una secuencia infinita de rotaciones bidimensionales. Desde el punto de vista computacional, el procedimiento que hemos descrito anteriormente se realiza a través de la secuencia :

$$A' = P_{tu}^{n)T} \cdot P_{rs}^{n-1)T} \cdots \cdot P_{pq}^{1)T} \cdot A \cdot P_{pq}^{1)} \cdot P_{rs}^{n-1)} \cdot P_{tu}^{n)} \equiv \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (2.88.2)$$

donde la matriz de autovectores está denotada como V' . Por lo tanto,

$V' = V \cdot P'_i$, inicialmente $i = 1 \rightarrow V \equiv I$. Así pues:

$$V' = I \cdot P_{12} \equiv P_{12} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \text{sen} \phi & 0 \\ -\text{sen} \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.88.1) \text{ y } (2.88.2)$$

De igual manera, se desea diagonalizar la matriz A ,

$$A' = P_{pq}^T A P_{pq},$$

$\exists p < q$, siendo pq los índices del elemento de A que se desea hacer cero, i.e., $a'_{pq} = 0$.

La matriz P de transformación es de la forma:

$$P_{pq} = \begin{array}{cccc} \left[\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \dots & \\ & & & 1 \\ & & \cos \phi_H & \dots & \text{sen} \phi_H \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & -\text{sen} \phi_H & \dots & \cos \phi_H \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & \dots \\ & & & & & & & 1 \end{array} \right] & \begin{array}{l} F1: \\ F2 \\ \\ Fp \\ Fq \\ \\ Fn \end{array} \\ \text{Col: } C1 & C_p & C_q & C_n & \end{array} \quad (2.89)$$

Los elementos fuera de la diagonal son ceros excepto los elementos a_{pq} y a_{qp} , siendo estos: $-\text{sen} \phi_H$ y $\text{sen} \phi_H$ respectivamente. La diagonal está formada solamente de unos

(1), excepto en los elementos a_{pp} y a_{qq} los cuales son iguales, ambos, a $\cos\phi_H$. Así pues, si la matriz A que se pretende diagonalizar es una matriz 3 x 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.90)$$

Los elementos que serán afectados por la transformación serán: (1) todos los elementos de la columna p; y (2) todos los elementos de la columna q. De manera explícita, estos elementos afectados pueden ser escritos en función de los elementos no rotados y el ángulo de rotación, y de acuerdo a lo expuesto en por Press et al. (1992) se pueden escribir así:

$$1) a'_{rp} = a_{rp} \cos \phi - a_{rq} \text{sen} \phi, \quad r \neq p \text{ y } r \neq q;$$

$$2) a'_{rq} = a_{rq} \cos \phi + a_{rp} \text{sen} \phi, \quad r \neq p \text{ y } r \neq q;$$

$$3) a'_{pp} = a_{pp} \cos^2 \phi + a_{qq} \text{sen}^2 \phi - 2a_{pq} \cos \phi \text{sen} \phi;$$

$$4) a'_{pp} = a_{qq} \cos^2 \phi + a_{pp} \text{sen}^2 \phi + 2a_{pq} \cos \phi \text{sen} \phi;$$

$$5) a'_{pq} = a_{pq} (\cos^2 \phi - \text{sen}^2 \phi) + (a_{pp} - a_{qq}) \cos \phi \text{sen} \phi.$$

en donde se pretende eliminar el elemento a'_{pq} , (i.e., $a'_{pq} \equiv 0$).

SECCIÓN III

PROPAGACIÓN DE ONDAS CORPÓREAS DE INCIDENCIA NORMAL EN MEDIOS AZIMUTALMENTE ANISOTRÓPICOS.

La anisotropía en la velocidad de la onda sísmica, comúnmente llamada anisotropía sísmica, es la variación que dicha velocidad experimenta con respecto al ángulo de propagación del frente de ondas. En este sentido, se dice que un medio es azimutalmente anisotrópico cuando éste experimenta variaciones de la velocidad de la onda sísmica a lo largo del plano horizontal (i.e., plano azimutal). Así mismo, cuando un medio es excitado y una cantidad de energía se propaga a través de él, ante el avance del frente de ondas, las partículas del medio experimentan desplazamientos relativos con respecto a su estado inicial no deformado. Las direcciones particulares, a lo largo de las cuales dichos desplazamientos se dan, están determinadas por la anisotropía del medio, y para el caso de las ondas S las denominaremos direcciones de polarización. Estas direcciones de polarización, con respecto a una velocidad de propagación dada (velocidad de fase y/o velocidad de grupo), determinan el plano de polarización en cuestión; estas se mantienen fijas en un determinado medio fracturado siempre y cuando la configuración de fracturas en el medio se mantenga. Desde el punto de vista matemático, las direcciones de polarización son las correspondientes a las de los vectores propios que diagonalizan un tensor

de orden 2 (Winterstain, 1990). En lo sucesivo, utilizaremos dicha acepción en el contexto que acabamos de explicar. Ahora bien, en una incidencia normal, la dirección del movimiento compresional preferencial es a lo largo del eje Z y por lo tanto, apelando al principio de ortogonalidad existente entre las ondas corpóreas, las ondas de cizalla están confinadas al plano horizontal. Dicho plano horizontal, es el plano sobre el cual se realiza comúnmente, el estudio de sismica de reflexión. En dicho estudio, se distribuyen sensores (fuentes y receptores) a lo largo de unas direcciones determinadas, y por medio de estos sensores se pueden medir las velocidades de fase anteriormente mencionadas. Sin embargo, generalmente estas direcciones no coinciden con las dichas direcciones de polarización. Es por eso que, para fracturas que se interceptan y que representan el caso anisotrópico más general presentado en este trabajo (Simetría Monoclínica), se definirá el ángulo de polarización horizontal, ϕ_H , como el ángulo que forma la polarización de la onda qS con el eje, fijo, de coordenadas Y. Por ende, en esta sección, sólo consideraremos el caso de ondas que inciden en forma normal (a lo largo del eje Z) al medio fracturado. Así mismo, en base a lo anteriormente descrito, la siguiente sección se estructurará de la siguiente manera:

3.1.- Se presentará la forma del tensor elástico para medios fracturados, azimutalmente anisotrópicos:

3.1.1.- Fracturas Verticales.

3.1.2.- Fracturas Oblicuas.

3.1.3.- Fracturas que se interceptan (oblicuas y/o verticales).

3.2.- Se resolverá la Ecuación de Christoffel, particularizada para incidencia normal, correspondiente a cada uno de los modelos mencionados anteriormente, con el fin de determinar las direcciones de polarización de las ondas qS y determinar el ángulo de polarización (ϕ_H).

3.3.- Se realizará un análisis de la variación del ángulo de polarización (ϕ_H) con la inclinación de uno de los sistemas de fracturas, y su relación con la orientación de dos sistemas de fracturas que se interceptan.

3.4.- Uso de la técnica de Alford para la rotación de Sismogramas, con el fin de desacoplar las ondas de cizalla en una traza sísmica de incidencia normal para una capa fracturada.

3.4.1.- Generación de trazas sísmicas sintéticas, de incidencia normal, para un modelo simple de capa fracturada.

3.4.2.- Técnica de rotación de Alford, para desacoplar trazas sísmicas grabadas con 2 fuentes de ondas S.

3.1.- Tensor elástico para modelos de fracturas azimutalmente anisotrópicos.

Como se ha descrito en la sección Marco Teórico, existen dos escuelas principales que plantean el tipo de modelo para medios fracturados y que están en concordancia con el modelo de cuerpos idealmente frágiles descritos por Kostrov (1974): Hudson, (1981 y 1986); y Schoenberg et al., (1989, 1993, 1995). En esta sección, sólo se hará referencia al modelo planteado por Hudson (1986), mientras que el modelo de Schoenberg et al. (1989) será usado en la tercera sección de este trabajo.

Así pues, la técnica de Hudson (1986) puede ser usada para calcular las constantes elásticas equivalentes para un conjunto de fracturas que se interceptan y que poseen diferentes orientaciones: $C = C^0 + C' + C''$. Donde C^0 es la matriz isotrópica de fondo; C' corresponde la matriz de las constantes elásticas, perteneciente a cada uno de los sistemas de fracturas presentes¹⁰; y C'' corresponde a la interacción entre las fracturas. El término de 2° orden C'' , se puede despreciar si se considera una débil anisotropía elástica. En este sentido, se tendrá que $C \cong C^0 + C' \equiv C^{ISO} + C^{(i)}$.

Por lo tanto, es necesario mostrar la forma que posee el tensor elástico de los medios azimutalmente anisotrópicos, mencionados al comienzo de la presente sección. Así mismo, determinar cuál es la relación que poseen los diferentes ángulos, correspondientes al rumbo e inclinación de las fracturas, al momento de la configuración canónica del tensor elástico de un determinado medio fracturado.

3.1.1.- Fracturas verticales: Un conjunto de fracturas verticales empotradas en un medio homogéneo, y en el contexto de un modelo de cuerpo idealmente frágil,

¹⁰ Fueron calculadas usando el programa Cracks, hecho por Andrey Ortega (1998).

producen en el medio una anisotropía del tipo hexagonal¹¹. Este tipo de anisotropía azimutal es comúnmente llamada Isotropía Transversal con un eje Horizontal de Simetría (ITH). La forma del tensor elástico, en notación de 2 subíndices y de acuerdo a lo presentado en la sección Marco Teórico, tiene la siguiente forma:

$$[C_{mn}]_{ITH} \equiv \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{23} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

En dicho tensor, el rumbo de las fracturas coincide con la dirección del Eje OY, mientras que el eje de simetría coincide con el Eje OX. En un caso canónico, el rumbo de las fracturas no coincide necesariamente con un eje coordenado. Así pues, en este caso general, el tensor elástico puede ser definido en términos del Tensor ITH (C_{ITH}), cuyo eje de simetría está alineado con un eje coordenado, más una dirección determinada correspondiente al rumbo de las fracturas. En este sentido, se hace necesario aplicar una transformación de similitud pasiva (Sokolnikoff, 1951), alrededor del eje Z, al Tensor ITH, particularizada al caso de bases ortonormales. En el contexto de Ingeniería Geofísica, esta transformación de similitud se denomina Transformación de Enlace (Winterstain, 1990).

Así pues, si a un Tensor ITH se le aplica una rotación horaria, alrededor del eje Z, entonces el nuevo arreglo tiene la forma de un Tensor Monoclínico (ver sección Marco Teórico), de la forma:

¹¹ Una buena referencia al respecto es Auld, 1990.

$$[C_{mn}]^M_{(ITH)} \equiv \begin{bmatrix} c^M_{11} & c^M_{12} & c^M_{13} & 0 & 0 & c^M_{16} \\ c^M_{12} & c^M_{22} & c^M_{23} & 0 & 0 & c^M_{26} \\ c^M_{13} & c^M_{23} & c^M_{33} & 0 & 0 & c^M_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c^M_{44} & c^M_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^M_{45} & c^M_{55} & 0 \\ c^M_{16} & c^M_{26} & c^M_{36} & 0 & 0 & c^M_{66} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

donde los elementos de C^M explícitamente son dados en la sección de Marco Teórico.

3.1.2.- Fracturas Oblicuas: Cuando el medio equivalente, homogéneo, fracturado posee un conjunto de fracturas inclinadas (i.e., no verticales), entonces dicho medio es transversalmente isotrópico con un eje inclinado de simetría. Dicho medio, también pertenece a la categoría de medio azimutalmente anisotrópico. Análogo al caso anterior de fracturas verticales, se puede definir al tensor elástico, correspondiente al sistema de fracturas oblicuas, como función del Tensor ITH cuyo eje de simetría está alineado con un eje coordenado así como de dos ángulos correspondientes al rumbo y la inclinación de las fracturas (ver sección Marco Teórico). Por lo tanto, si al tensor C_{ITH} se le aplica: (1) una rotación horaria de θ grados alrededor del eje Y (inclinación respecto a la vertical); y (2) posteriormente, una rotación horaria de ϕ grados alrededor de Z (modificando su rumbo), entonces la forma del tensor elástico será triclinica, cuya forma explícita es:

$$[C_{mn}]^T_{(ITH)} \equiv \begin{bmatrix} C^T_{11} & C^T_{12} & C^T_{13} & C^T_{14} & C^T_{15} & C^T_{16} \\ C^T_{12} & C^T_{22} & C^T_{23} & C^T_{24} & C^T_{25} & C^T_{26} \\ C^T_{13} & C^T_{23} & C^T_{33} & C^T_{34} & C^T_{35} & C^T_{36} \\ C^T_{14} & C^T_{24} & C^T_{34} & C^T_{44} & C^T_{45} & C^T_{46} \\ C^T_{15} & C^T_{25} & C^T_{35} & C^T_{45} & C^T_{55} & C^T_{56} \\ C^T_{16} & C^T_{26} & C^T_{36} & C^T_{46} & C^T_{56} & C^T_{66} \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Los elementos son dados de manera explícita la sección de Marco Teórico y son función tanto del ángulo de inclinación como el ángulo correspondiente al rumbo de las fracturas.

3.1.3.- Fracturas que se interceptan (Oblicuas y/o Verticales): Al considerar dos sistemas de fracturas verticales, cuyos rumbos son definidos por ϕ_1 y ϕ_2 , entonces el sistema equivalente, según Hudson (1986), para débil anisotropía elástica tiene la forma:

$$C_{EQUI} = [C(c^0) + C(\phi_1|c^{(1)}) + C(\phi_2|c^{(2)})].$$

Donde:

$C(c^0) \rightarrow$ Tensor elástico de la matriz isotrópica.

$C(\phi_1|c^{(1)}) \rightarrow$ Tensor elástico debido al sistema de fracturas #1 (S1).

$C(\phi_2|c^{(2)}) \rightarrow$ Tensor elástico debido al sistema de fracturas #2 (S2).

Además, debe acotarse que la forma de cada uno de los sistemas de fracturas, S1 y S2, estará definida según lo descrito en el apartado de Fracturas Verticales (si solo son fracturas verticales) y/o en el apartado correspondiente a Fracturas Oblicuas (si las fracturas poseen cierta inclinación e incluso si son horizontales).

3.2.- Ecuación de Christoffel: La ecuación de Christoffel pretende resolver la ecuación de onda para el caso de ondas planas que viajan en los medios elásticos, la misma tiene la siguiente forma:

$$\left(c_{ijkl} n_j n_l - \rho v^2 \delta_{ik} \right) p_k = 0.$$

Donde el vector de onda es paralelo a la lentitud de fase: $\hat{k} = \frac{\omega}{v} \hat{n}$. Así mismo,

la matriz de Christoffel, es definida como:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ik} &::\equiv c_{ijkl} n_j n_l \\ &\equiv c_{i1k1} n_1 n_1 + c_{i1k2} n_1 n_2 + c_{i1k3} n_1 n_3 \\ &\quad + c_{i2k1} n_2 n_1 + c_{i2k2} n_2 n_2 + c_{i2k3} n_2 n_3 \\ &\quad + c_{i3k1} n_3 n_1 + c_{i3k2} n_3 n_2 + c_{i3k3} n_3 n_3. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Para el caso de interés en esta sección, incidencia normal correspondiente a una propagación vertical a lo largo del eje z, el vector base \hat{n} tiene la forma:

$$\hat{n} = \mathbf{0} \hat{n}_1 + \mathbf{0} \hat{n}_2 + \hat{n}_3$$

Luego, la matriz de Christoffel particularizada para dicha propagación vertical queda:

$$\Gamma_{ik} \equiv c_{i3k3} n_3 n_3 \equiv c_{i3k3}, \exists \therefore$$

$$[\Gamma_{ik}] = \begin{bmatrix} c_{1313} & c_{1323} & c_{1333} \\ c_{2313} & c_{2323} & c_{2333} \\ c_{3313} & c_{3323} & c_{3333} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} c_{55} & c_{45} & c_{35} \\ c_{45} & c_{44} & c_{34} \\ c_{35} & c_{34} & c_{33} \end{bmatrix}.$$

(3.5)

Ahora pues, es necesario diagonalizar dicha matriz con el fin de hallar sus valores propios (velocidades de fase), y sus respectivos vectores propios (direcciones de polarización de la onda S y dirección del movimiento compresional de las partículas). En este sentido, se usará el método de Rotación de Jacobi, para matrices reales y simétricas, descritas en la sección de Marco Teórico.

3.2.1.- Fracturas verticales: Para el caso de fracturas verticales, y de acuerdo al apartado 1.1, se tiene:

$$\Gamma_{ik} \equiv c_{i3k3} n_3 n_3 \equiv c_{i3k3}, \exists \therefore$$

$$[\Gamma_{ik}] = \begin{bmatrix} c_{1313} & c_{1323} & c_{1333} \\ c_{2313} & c_{2323} & c_{2333} \\ c_{3313} & c_{3323} & c_{3333} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} c_{55} & c_{45} & c_{35} \\ c_{45} & c_{44} & c_{34} \\ c_{35} & c_{34} & c_{33} \end{bmatrix}.$$

$$[\Gamma_{ik}] = \begin{bmatrix} c_{44} \text{sen}^2 \phi + c_{55} \text{cos}^2 \phi & (c_{44} - c_{55}) \text{sen} \phi \text{cos} \phi & 0 \\ (c_{44} - c_{55}) \text{sen} \phi \text{cos} \phi & c_{44} \text{cos}^2 \phi + c_{55} \text{sen}^2 \phi & 0 \\ 0 & 0 & c_{22} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$A \equiv [\Gamma_{ik}] = \begin{bmatrix} c_{44} \text{sen}^2 \phi + c_{55} \cos^2 \phi & (c_{44} - c_{55}) \text{sen} \phi \cos \phi & 0 \\ (c_{44} - c_{55}) \text{sen} \phi \cos \phi & c_{44} \cos^2 \phi + c_{55} \text{sen}^2 \phi & 0 \\ 0 & 0 & c_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

$$A' = P_{pq}^T A P_{pq}. \text{ Donde en este caso } p=1 \text{ y } q=2. \quad (3.8)$$

$$Aux = P_{12}^T A = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\text{sen} \phi & 0 \\ \text{sen} \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{44} \text{sen}^2 \phi + c_{55} \cos^2 \phi & (c_{44} - c_{55}) \text{sen} \phi \cos \phi & 0 \\ (c_{44} - c_{55}) \text{sen} \phi \cos \phi & c_{44} \cos^2 \phi + c_{55} \text{sen}^2 \phi & 0 \\ 0 & 0 & c_{22} \end{bmatrix}$$

$\ni \therefore$

$$Aux \equiv \begin{bmatrix} c_{55} \cos \phi & -c_{55} \text{sen} \phi & 0 \\ c_{44} \text{sen} \phi & c_{44} \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & c_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Luego:

$$A' = Aux P_{12} \equiv \begin{bmatrix} c_{55} \cos \phi & -c_{55} \text{sen} \phi & 0 \\ c_{44} \text{sen} \phi & c_{44} \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & \text{sen} \phi & 0 \\ -\text{sen} \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$\ni \therefore$

$$A' \equiv \begin{bmatrix} c_{55} & 0 & 0 \\ 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & c_{22} \end{bmatrix}.$$

Donde, de acuerdo al método de Rotación de Jacobi se puede escribir:

$$A' = P_{tu}^{(n)T} \cdot P_{rs}^{(n-1)T} \dots \cdot P_{pq}^{(1)T} \cdot A \cdot P_{pq}^{(1)} \cdot P_{rs}^{(n-1)} \cdot P_{tu}^{(n)} \equiv \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

donde

$V' = V \cdot P'_i$, inicialmente $i = 1 \rightarrow V \equiv I$. Así pues:

$$V' = I \cdot P_{12} \equiv P_{12} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \text{sen} \phi & 0 \\ -\text{sen} \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} c_{55} & 0 & 0 \\ 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & c_{22} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

siendo A' la matriz diagonalizada (matriz de autovalores) y V' la matriz cuyas columnas son sus respectivos vectores propios. De lo anterior, se puede observar que el ángulo de polarización horizontal ϕ_H (definido anteriormente) coincide directamente con el ángulo que produjo la diagonalización de la Matriz de Christoffel. Esto reafirma de manera directa el hecho de que, para esta configuración de fracturas, la onda S se polariza en una dirección paralela (S_{\parallel}) y perpendicular (S_{\perp}) al rumbo del sistema de fracturas verticales presentes en el medio ITH. Además, hay que mencionar el hecho de las siguientes desigualdades (propias de los medios con anisotropía del tipo ITH) propias del medio fracturado en cuestión: $C_{22} > C_{44} > C_{55}$. Por lo tanto, haciendo uso de la geometría del problema y apelando al resultado anterior de los vectores propios, el vector de la onda S_{\parallel} es lo que se conoce como el vector polarización de la “Onda S rápida”, mientras que el vector de la onda S_{\perp} es el denominado vector polarización de la “Onda S lenta”. Esto puede explicarse por el hecho de que la perturbación colectiva de la onda tarda menos en viajar entre dos puntos dados del continuo (medio no fracturado), que entre dos puntos dados que se encuentran a ambos lados de las discontinuidades (fisuras en el medio fracturado). Esto se debe al contraste que existe entre los valores de rigidez de ambos sitios. En la sección Marco Teórico, en el apartado correspondiente al modelo de tierra fracturado

verticalmente (Teoría de Schoenberg), se puede observar el efecto de las fracturas sobre un medio no fracturado. Entonces, apelando a lo allí mostrado, se puede afirmar que, la rigidez efectiva del medio fracturado siempre es menor o aproximadamente igual (caso límite de pequeña anisotropía elástica) a aquella del medio no fracturado. Por lo tanto, sabiendo que la velocidad de las ondas corpóreas es directamente proporcional a la rigidez del medio, entonces se puede afirmar que la velocidad de la onda S que se polariza paralela al rumbo de las fracturas (S_{\parallel}) es mayor que la velocidad de la onda S que se polariza perpendicular a las fracturas (S_{\perp}).

3.2.2.- Fracturas Oblicuas: Análogo al caso anterior, se particulariza la ecuación de Christoffel una propagación vertical, para la matriz del tensor elástico correspondiente a un sistema de fracturas oblicuas (ver apartado 1.2), de manera tal que:

$$\Gamma_{ik} \equiv c_{i3k3} n_3 n_3 \equiv c_{i3k3}, \exists \therefore$$

$$[\Gamma_{ik}] = \begin{bmatrix} c_{1313} & c_{1323} & c_{1333} \\ c_{2313} & c_{2323} & c_{2333} \\ c_{3313} & c_{3323} & c_{3333} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} c_{55}^T(\theta, \phi) & c_{45}^T(\theta, \phi) & c_{35}^T(\theta, \phi) \\ c_{45}^T(\theta, \phi) & c_{44}^T(\theta, \phi) & c_{34}^T(\theta, \phi) \\ c_{35}^T(\theta, \phi) & c_{34}^T(\theta, \phi) & c_{33}^T(\theta, \phi) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$A = [\Gamma_{ik}] = \begin{bmatrix} c_{44}^B \text{sen}^2 \phi + c_{55}^B \text{cos}^2 \phi & (c_{44}^B - c_{55}^B) \text{sen} \phi \text{cos} \phi & c_{35}^B \text{cos} \phi \\ (c_{44}^B - c_{55}^B) \text{sen} \phi \text{cos} \phi & c_{44}^B \text{cos}^2 \phi + c_{55}^B \text{sen}^2 \phi & -c_{35}^B \text{sen} \phi \\ c_{35}^B \text{cos} \phi & -c_{35}^B \text{sen} \phi & c_{33}^B \end{bmatrix}.$$

De manera análoga, se realiza una rotación de Jacobi, alrededor de Z para eliminar los términos simétricos $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$. Sin embargo, queda un término remanente que es

función del ángulo de inclinación θ , el cual debe ser eliminado, como puede observarse a continuación:

$$Aux = P_{12}^T A = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\operatorname{sen} \phi & 0 \\ \operatorname{sen} \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{44}^B \operatorname{sen}^2 \phi + c_{55}^B \cos^2 \phi & (c_{44}^B - c_{55}^B) \operatorname{sen} \phi \cos \phi & c_{35}^B \cos \phi \\ (c_{44}^B - c_{55}^B) \operatorname{sen} \phi \cos \phi & c_{44}^B \cos^2 \phi + c_{55}^B \operatorname{sen}^2 \phi & -c_{35}^B \operatorname{sen} \phi \\ c_{35}^B \cos \phi & -c_{35}^B \operatorname{sen} \phi & c_{33}^B \end{bmatrix}$$

$\ni \therefore$

$$Aux \equiv \begin{bmatrix} c_{55}^B (\cos^3 \phi + \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi) & -c_{55}^B (\operatorname{sen} \phi \cos^2 \phi + \operatorname{sen}^3 \phi) & c_{35}^B \\ c_{44}^B (\operatorname{sen} \phi \cos^2 \phi + \operatorname{sen}^3 \phi) & c_{44}^B (\cos^3 \phi + \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi) & 0 \\ c_{35}^B \cos \phi & -c_{35}^B \operatorname{sen} \phi & c_{33}^B \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Luego:

\therefore

$$A' = Aux P_{12} \equiv \begin{bmatrix} c_{55}^B & 0 & c_{35}^B \\ 0 & c_{44}^B & 0 \\ c_{35}^B & 0 & c_{33}^B \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Así pues, se puede notar la permanencia de un término fuera de la diagonal, el cual debe ser eliminado para completar la diagonalización. Por lo tanto, asumiendo “a priori” que este término no afecta mucho la desviación de las ondas S del plano de polarización horizontal, el ángulo que se estima bajo esta suposición $\tilde{\phi}$ será un ángulo aproximado al valor real del verdadero ϕ (que toma en cuenta el efecto de la

inclinación de las fracturas). Así pues, se pretende estimar el error de desviación que existe entre ambos valores, lo cual es analizado en la próxima sección (III).

3.2.3.- Fracturas que se interceptan: Ahora bien, para el caso más general de los modelos azimutalmente anisotrópicos (Fracturas que se interceptan o Medio Fracturado con simetría Monoclínica), de acuerdo a lo planteado en el apartado 1.3, la forma matricial del tensor elástico equivalente será :

$$[C] = [F(c^0) + F(\phi_1|c^{(1)}) + F(\phi_2|c^{(2)})], \quad (3.15)$$

Ahora bien, las formas explícitas de las matrices de constantes elásticas $F(c^0)$, $F(\phi_1|c^{(1)})$, y $F(\phi_2|c^{(2)})$, que están presentes en la ecuación de Christoffel, ya han sido particularizadas para la propagación vertical. De esta manera, estas se pueden escribir como:

$$F(c^{ISO}) = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2\mu \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

$$F(\phi_1 | c^{(1)}) = \begin{bmatrix} c_{44}^{(1)} \text{sen}^2 \phi + c_{55}^{(1)} \cos^2 \phi & (c_{44}^{(1)} - c_{55}^{(1)}) \text{sen} \phi \cos \phi & 0 \\ (c_{44}^{(1)} - c_{55}^{(1)}) \text{sen} \phi \cos \phi & c_{44}^{(1)} \cos^2 \phi + c_{55}^{(1)} \text{sen}^2 \phi & 0 \\ 0 & 0 & c_{22}^{(1)} \end{bmatrix}$$

(3.17)

$$F(\phi_2 | c^{(2)}) = \begin{bmatrix} c_{44}^{(2)} \text{sen}^2 \phi + c_{55}^{(2)} \cos^2 \phi & (c_{44}^{(2)} - c_{55}^{(2)}) \text{sen} \phi \cos \phi & 0 \\ (c_{44}^{(2)} - c_{55}^{(2)}) \text{sen} \phi \cos \phi & c_{44}^{(2)} \cos^2 \phi + c_{55}^{(2)} \text{sen}^2 \phi & 0 \\ 0 & 0 & c_{22}^{(2)} \end{bmatrix}$$

(3.18)

En este sentido, a la gran matriz de Christoffel se le debe aplicar la Transformación de Jacobi (ver sección marco teórico), de tal manera de poder afectar y eliminar al elemento $A_{12} = A_{21}$. De esta manera, se puede verificar, según lo mostrado en la sección Marco Teórico, lo siguiente:

$$\begin{aligned}
a'_{pq} \equiv 0 &\Rightarrow a_{pq} (\cos^2 \phi_H - \sin^2 \phi_H) = (a_{qq} - a_{pp}) \cos \phi_H \sin \phi_H \\
\therefore \frac{(\cos^2 \phi_H - \sin^2 \phi_H)}{\cos \phi_H \sin \phi_H} &= \frac{a_{qq} - a_{pp}}{a_{pq}} \\
\Rightarrow \cot 2\phi_H &= \frac{(\cos^2 \phi_H - \sin^2 \phi_H)}{2 \cos \phi_H \sin \phi_H} = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}} \\
\Rightarrow \tan 2\phi_H &= \frac{2a_{pq}}{a_{qq} - a_{pp}}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Donde los elementos a_{pq} , a_{qq} y a_{pp} , son definidos como los componentes respectivos de la matriz Γ_{ik} , siendo $p=1$ y $q=2$. Así pues:

$$\begin{aligned}
a_{pq} &= a_{pq}(F(c^{ISO})) + a_{pq}(F(\phi_1|c^{(1)})) + a_{pq}(F(\phi_2|c^{(2)})). \\
a_{12} &= 0 + (c_{44}^{(1)} - c_{55}^{(1)}) \sin \phi_1 \cos \phi_1 + (c_{44}^{(2)} - c_{55}^{(2)}) \sin \phi_2 \cos \phi_2 \\
&\equiv e_1 \sin \phi_1 \cos \phi_1 + e_2 \sin \phi_2 \cos \phi_2. \\
\Rightarrow 2a_{12} &= e_1 2 \sin \phi_1 \cos \phi_1 + e_2 2 \sin \phi_2 \cos \phi_2 = e_1 \sin 2\phi_1 + e_2 \sin 2\phi_2.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Donde, de acuerdo a las formulaciones de Hudson (1986), se ha convenido en definir las siguientes cantidades, como una medida del porcentaje de anisotropía del medio:

$$\begin{aligned}
e_1 &:\equiv [c_{44}^{(1)} - c_{55}^{(1)}], \\
e_2 &:\equiv [c_{44}^{(2)} - c_{55}^{(2)}].
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \mu + [c_{44}^{(1)} \text{sen } \phi_1 + c_{55}^{(1)} \cos^2 \phi_1] + [c_{44}^{(2)} \text{sen}^2 \phi_2 + c_{55}^{(2)} \cos^2 \phi_2] \\
 a_{22} &= \mu + [c_{44}^{(1)} \cos^2 \phi_1 + c_{55}^{(1)} \text{sen}^2 \phi_1] + [c_{44}^{(2)} \cos^2 \phi_2 + c_{55}^{(2)} \text{sen}^2 \phi_2] \\
 a_{22} - a_{11} &= (\mu - \mu) + [c_{44}^{(1)} - c_{55}^{(1)}](\cos^2 \phi_1 - \text{sen}^2 \phi_1) \\
 &\quad + [c_{44}^{(2)} - c_{55}^{(2)}](\cos^2 \phi_2 - \text{sen}^2 \phi_2) \\
 &\equiv e_1 \cos 2\phi_1 + e_2 \cos 2\phi_2.
 \end{aligned}
 \tag{3.22}$$

Luego,

$$\tan 2\phi_H := \frac{2a_{12}}{a_{22} - a_{11}} \equiv \frac{e_1 \text{sen } 2\phi_1 + e_2 \text{sen } 2\phi_2}{e_1 \cos 2\phi_1 + e_2 \cos 2\phi_2}. \tag{3.23}$$

De lo anterior, se demuestra de primeros principios, que el ángulo de polarización ϕ_H (para fracturas verticales que se interceptan entre sí) es una contribución de los rumbos de cada uno de los sistemas de fracturas involucrados y de sus respectivas densidades de fracturas.

Ahora bien, se considerará el caso para un sistema S1 de fracturas verticales, con rumbo ϕ_1 y un sistema S2 con rumbo ϕ_2 e inclinación θ . La matriz $F(\phi_2, \theta | c^{(2)})$ particularizada para la propagación vertical será de la forma:

$$F(\phi_2, \theta | c^{(2)}) = \begin{bmatrix} c_{44}^{B(2)} \text{sen}^2 \phi + c_{55}^{B(2)} \cos^2 \phi & (c_{44}^{B(2)} - c_{55}^{B(2)}) \text{sen} \phi \cos \phi & c_{35}^{B(2)} \cos \phi \\ (c_{44}^{B(2)} - c_{55}^{B(2)}) \text{sen} \phi \cos \phi & c_{44}^{B(2)} \cos^2 \phi + c_{55}^{B(2)} \text{sen}^2 \phi & -c_{35}^{B(2)} \text{sen} \phi \\ c_{35}^{B(2)} \cos \phi & -c_{35}^{B(2)} \text{sen} \phi & c_{33}^{B(2)} \end{bmatrix}.$$

Análogamente:

(3.24)

$$2a_{pq} = 2 [a_{pq}(\mathbf{F}(\phi_1 | c^{(1)}) + a_{pq} \mathbf{F}(\phi_2, \theta | c^{(2)}))$$

$$\begin{aligned} 2a_{12} &= 2(c_{44}^{(1)} - c_{55}^{(1)}) \text{sen} \phi_1 \cos \phi_1 + 2(c_{44}^{B(2)} - c_{55}^{B(2)}) \text{sen} \phi_2 \cos \phi_2 \\ &\equiv e_1 2 \text{sen} \phi_1 \cos \phi_1 + e_2 2 \text{sen} \phi_2 \cos \phi_2 (\cos^2 \theta - 4 \text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta). \\ \Rightarrow 2a_{12} &= e_1 \text{sen} 2\phi_1 + e_2 \text{sen} 2\phi_2 G(\theta). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ya que:

$$\begin{aligned} [c_{44}^{B(2)} - c_{55}^{B(2)}] &= [c_{44}^{(2)} \cos^2 \theta + c_{55}^{(2)} \text{sen}^2 \theta] - [(c_{11}^{(2)} + c_{22}^{(2)} - 2c_{12}^{(2)}) \text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta + c_{55}^{(2)} \cos^2 2\theta] \\ &= -c_{55}^{(2)} (\cos^2 2\theta - \text{sen}^2 \theta) + c_{44}^{(2)} \cos^2 \theta - (c_{11}^{(2)} + c_{22}^{(2)} - 2c_{12}^{(2)}) \text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta \\ &= -c_{55}^{(2)} (\cos^2 2\theta - \text{sen}^2 \theta) + c_{44}^{(2)} \cos^2 \theta - (c_{11}^{(2)} + c_{23}^{(2)} + 2c_{44}^{(2)} - 2c_{12}^{(2)}) \text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta \\ &= -c_{55}^{(2)} (\cos^2 2\theta - \text{sen}^2 \theta) + c_{44}^{(2)} (\cos^2 \theta - 2 \text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta) - (c_{11}^{(2)} + c_{23}^{(2)} - 2c_{12}^{(2)}) \text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta \\ &= -c_{55}^{(2)} (\cos^2 2\theta - \text{sen}^2 \theta) + c_{44}^{(2)} (\cos^2 \theta - 2 \text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta) - (2c_{44}^{(2)}) \text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta \\ &= -c_{55}^{(2)} (\cos^2 2\theta - \text{sen}^2 \theta) + c_{44}^{(2)} (\cos^2 \theta - 4 \text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta). \end{aligned}$$

(3.26)

Donde, haciendo uso de las desigualdades, válidas para débil anisotropía elástica, sobre las constantes elásticas:

$$|c_{12} - c_{23}| < |c_{11} - c_{22}| < |c_{44} - c_{55}| < 0.30 c_{44} \quad , \quad (3.27)$$

se puede verificar que $(c_{11} + c_{22} - 2c_{12}) \cong 2c_{44}$. Además, se ha definido una cantidad que depende sólo de la inclinación del sistema de fracturas (en este caso el sistema S2):

$$G(\theta) := (\cos^2 2\theta - \text{sen}^2 \theta) \equiv (\cos^2 \theta - 4\text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta). \quad (3.28)$$

Así pues, se tendrá:

$$\tan 2\phi_H := \frac{2a_{12}}{a_{22} - a_{11}} \equiv \frac{e_1 \text{sen} 2\phi_1 + e_2 G(\theta) \text{sen} 2\phi_2}{e_1 \cos 2\phi_1 + e_2 G(\theta) \cos 2\phi_2}. \quad (3.29)$$

Finalmente, esta última relación puede ser generalizada para cuando ambos sistemas de fracturas, S1 y S2, están inclinados θ_1° y θ_2° , respectivamente. De tal manera que, análogo al caso de fracturas inclinadas del sistema S2, se puede escribir la matriz $F(\phi_1, \theta_1 | c^{(1)})$ de la siguiente forma:

$$F(\phi_1, \theta_1 | c^{(1)}) = \begin{bmatrix} c_{44}^{B1} \text{sen}^2 \phi + c_{55}^{B1} \cos^2 \phi & (c_{44}^{B1} - c_{55}^{B1}) \text{sen} \phi \cos \phi & c_{35}^{B1} \cos \phi \\ (c_{44}^{B1} - c_{55}^{B1}) \text{sen} \phi \cos \phi & c_{44}^{B1} \cos^2 \phi + c_{55}^{B1} \text{sen}^2 \phi & -c_{35}^{B1} \text{sen} \phi \\ c_{35}^{B1} \cos \phi & -c_{35}^{B1} \text{sen} \phi & c_{33}^{B1} \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

Entonces

$$\therefore \tan 2\phi_H \equiv \frac{2a_{12}}{a_{22} - a_{11}} \equiv \frac{e_1 G(\theta_1) \sin 2\phi_1 + e_2 G(\theta_2) \sin 2\phi_2}{e_1 G(\theta_1) \cos 2\phi_1 + e_2 G(\theta_2) \cos 2\phi_2}. \quad (3.31)$$

Ahora bien, los conjuntos de sistemas de fracturas, que existen en la naturaleza generalmente se interceptan entre sí, con un cierto grado α . Lo anterior se traduce en complicaciones para estimar sus correspondientes rumbos a partir de la anisotropía sísmica. La consecuencia directa es que las polarizaciones de la onda qS_1 , para propagaciones verticales, no pueden relacionarse directamente al rumbo de alguno de los sistemas de fracturas presentes (como lo demuestra la deducción del valor de ϕ_H). Para dos sistemas de fracturas que se interceptan, la polarización de la onda qS_1 puede ser simplemente expresada en términos de sus rumbos e inclinaciones verticales (buzamientos). Esta relación revela las direcciones donde el rumbo de un conjunto puede ser medido independientemente del otro. Además se muestra que los efectos de planos de fracturas o capas sub-horizontales puede ser considerables aun para pequeñas anisotropías.

3.3.- Análisis del ángulo de polarización (ϕ_H) con respecto al rumbo de las fracturas que se interceptan: un Sistema Fracturas Verticales (S1) interceptado con otro Sistema de Fracturas Inclinadas (S2).

3.3.1.- Descripción de los modelos de fracturas que se interceptan.

En el presente apartado, se hará uso de dos modelos de fracturas que se interceptan, con el fin de determinar la dependencia que posea el ángulo ϕ_H . El primer modelo

corresponde a dos sistemas de fracturas se interceptan a un ángulo oblicuo de 60° , mientras que en el segundo modelo, los sistemas de fracturas se interceptan a un ángulo recto, y en el cual las orientaciones de los sistemas de fracturas coinciden con los eje OX1 y OX2. En ambos sistemas, se usaron los siguientes parámetros del medio no fracturado: $\alpha = 3000$ m/seg, $\beta = 1764$ m/seg, y $\rho = 2100$ Kg/m³. En el primer modelo, un sistema de fracturas está orientado paralelo al eje OX2 y el otro se encuentra a 60° del anterior, siguiendo una rotación horaria según lo descrito en los apartados de fracturas verticales y oblicuas, en la sección I. Además, hay que señalar que participan como parámetros las respectivas densidades de fracturamiento que pueden poseer los dos sistemas de fracturas presentes, siendo estas variables desde 1 – 20 % de fracturamiento. Así mismo, los sistemas de fracturas pueden estar inclinados, de allí que estos ángulo también participan en la definición. Así pues,

1. Rumbo del Sistema de fracturas S1: $\phi_1=0^\circ$, i.e., paralelo al Eje OX2.
2. Buzamiento del Sistema de fracturas S1: $\theta_1 = 0^\circ$, i.e., fracturas verticales, eje de inclinación paralelo al eje z.
3. La densidad de fracturamiento del sistema de fracturas S1 (DF1) va del 1% al 20%, cada 1%.
4. Rumbo del Sistema de fracturas 2: $\phi_2=90^\circ$ ó 60° según el modelo predefinido.
5. Los datos calculados y gráficos correspondientes, tendrán como parámetros los datos 1- 4 mencionados anteriormente. La variable independiente será el ángulo de inclinación del sistema de fracturas 2: θ_2 . Así mismo, se presentaran variaciones de los valores de DF2, yendo desde 2% hasta el 20%, con el fin de mostrar el efecto simultáneo de inclinación y densidad de fracturamiento de un determinado sistema (S2) que se intercepta con un sistema vertical (S1).

3.3.2.- Datos ploteados: Siempre se deja fijo el eje de las abscisas correspondiente a una variación del ángulo de inclinación del sistema de fracturas 2: θ_2 . Este fue discretizado cada 10 grados, yendo desde 0° , para fracturas verticales, hasta los 90 grados de buzamiento, en el caso de fracturas horizontales.

1. Gráficos correspondientes a los valores teóricos esperados del ángulo de polarización horizontal ϕ_H , según la formula deducida en la parte teórica, ver borrador.
2. Gráficos correspondientes a los valores numéricos calculados del ángulo de polarización horizontal ϕ_H , mediante el algoritmo de la rotación de Jacobi, Numerical Recipes, Press et al, 1992.
3. Gráficos del valor de error de ϕ_H calculado como la diferencia del valor absoluto de $\phi_{H\text{teórico}} - \phi_{H\text{numérico}}$.

3.3.3.- Modelo #1, $\phi_2 = 60^\circ$ (Monoclínico –Ortorrómbico):

3.3.3.1.- Análisis Numérico de los modelos: La información aquí descrita, será planteada de acuerdo al análisis global de todos los gráficos, correspondientes a cada uno de los 20 sub-modelos previamente determinados. Por razones didácticas, no se presentarán los 20 modelos, ya que además del comportamiento numérico hay que hacer las descripciones de los datos teóricos y el correspondiente error existente entre ambos cálculos. En este sentido, es necesario descifrar las tendencias que los datos presenten y esquematizar la información.

Ahora bien, definiremos tres dominios de valores para ϕ_H , a lo largo de los cuales se dan las mayores tendencias para el ángulo de polarización horizontal :

Dominio D1: $50^\circ \leq \phi_H \leq 60^\circ$.

Dominio D2: $25^\circ \leq \phi_H \leq 35^\circ$.

Dominio D1: $10^\circ \leq \phi_H \leq 0^\circ$.

La relación existente entre estos dominios es evidente. El primer dominio, D1, corresponde a la zona predominantemente cercana al rumbo del sistema de fracturas S2. Así mismo, D2 corresponde al dominio de la zona de valores promedios de ϕ_H como función de los rumbos de ambos sistemas de fracturas (ϕ_1 y ϕ_2). Finalmente, D3 es el dominio de influencia del sistema de fracturas S1. A grandes rasgos, la secuencia de aparición de los dominios, según la densidad de los sistemas de fracturas (DF1 y DF2), y la inclinación que posee el sistema no vertical (θ_2), tendrá el siguiente patrón:

a.- El dominio D1 se presenta dominante cuando la densidad DF2 es mayor que DF1, y su área de influencia corresponde al dominio de las fracturas subverticales (i.e., $\theta_2 \leq 40^\circ$). Sin embargo, a medida que aumenta la densidad de fracturas del sistema vertical (S1), disminuye el valor de ϕ_H , de tal manera que este comienza una transición descendente hacia los dominios D2, posteriormente hacia D3. Lo dicho anteriormente puede verificarse en los siguientes gráficos:

**GRÁFICO 1: Variación de ϕ_H numérico, con la inclinación del Sistema S2.
DF1 = 1%.**

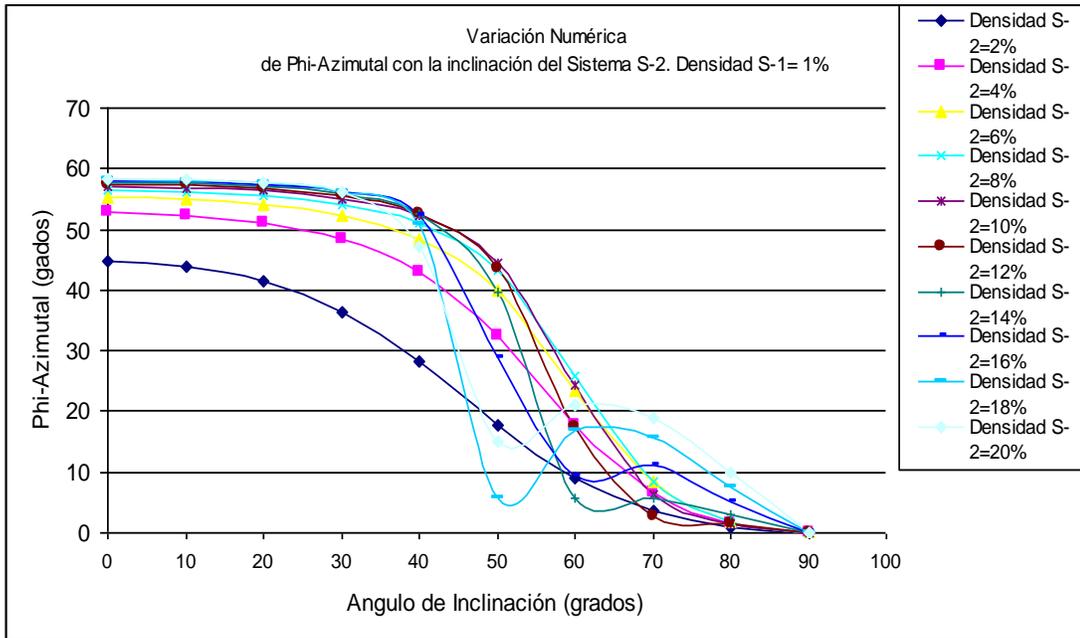


GRÁFICO 2: Variación de ϕ_H numérico, con la inclinación del Sistema S2. DF1 = 4%.

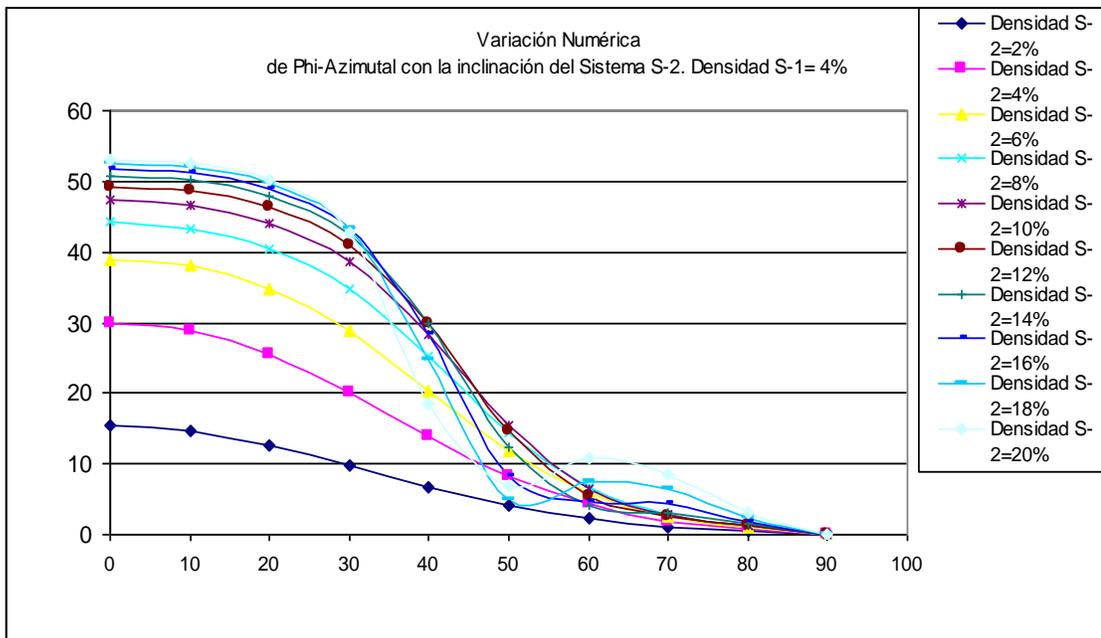
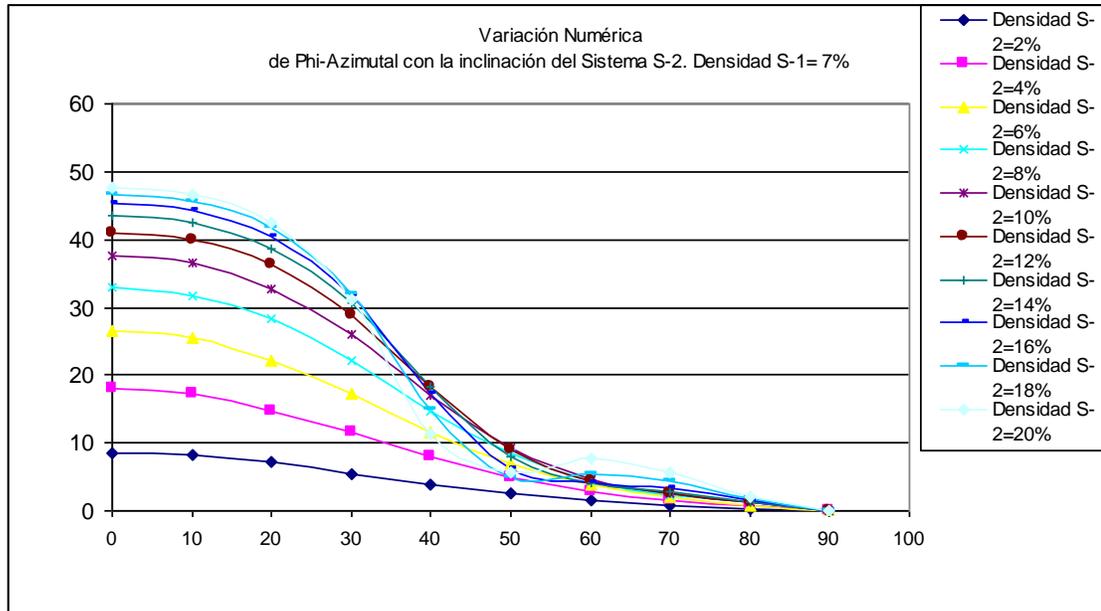


GRÁFICO 3: Variación de ϕ_H numérico, con la inclinación del Sistema S2. DF1= 7%.

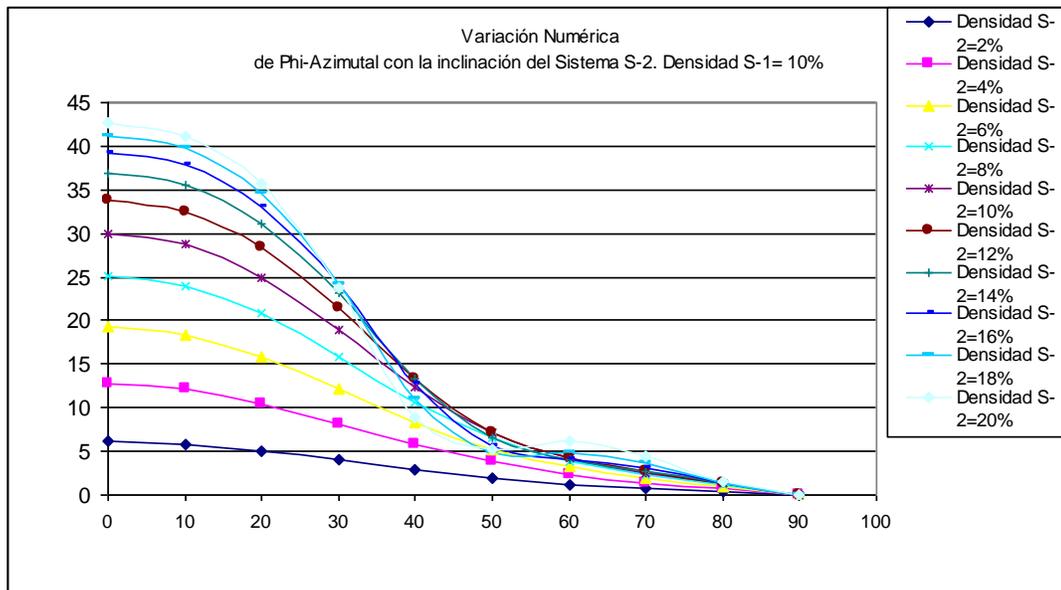


Como puede observarse en las figuras anteriores, y según lo expuesto anteriormente, a medida que aumenta la densidad del sistema vertical (DF1) este sistema (S1) se vuelve más dominante sobre el sistema (S2). En principio, para un valor de DF1= 1%, el sistema vertical es casi invisible en comparación con el sistema (S2), pasando luego por los valores de DF1 = 4%, en donde la presencia del sistema vertical comienza a notarse; hasta que en el valor de DF1 = 7%, el valor de ϕ_H pasa a estar en otro dominio menor de valores. Sin embargo, hay que notar que, para cuando el sistema de fracturas oblicuas (S2) se vuelve subhorizontal (i.e., $\theta_2 > 40^\circ$), la dependencia de ϕ_H es respecto a ϕ_I , por lo que el sistema vertical es quien lleva la pauta en este caso. En este sentido, se puede observar que ϕ_H tiene valores entre $0-10^\circ$ (dominio D1), dentro de rangos de inclinación del sistema S2 que van desde $\theta_2 > 70^\circ$; siendo los valores de densidad del sistema vertical: DF1 = 1-2%. Así mismo, $\theta_2 > 60^\circ$ y $\theta_2 > 50^\circ$ corresponde a valores de DF1 ubicados entre 3 – 7%.

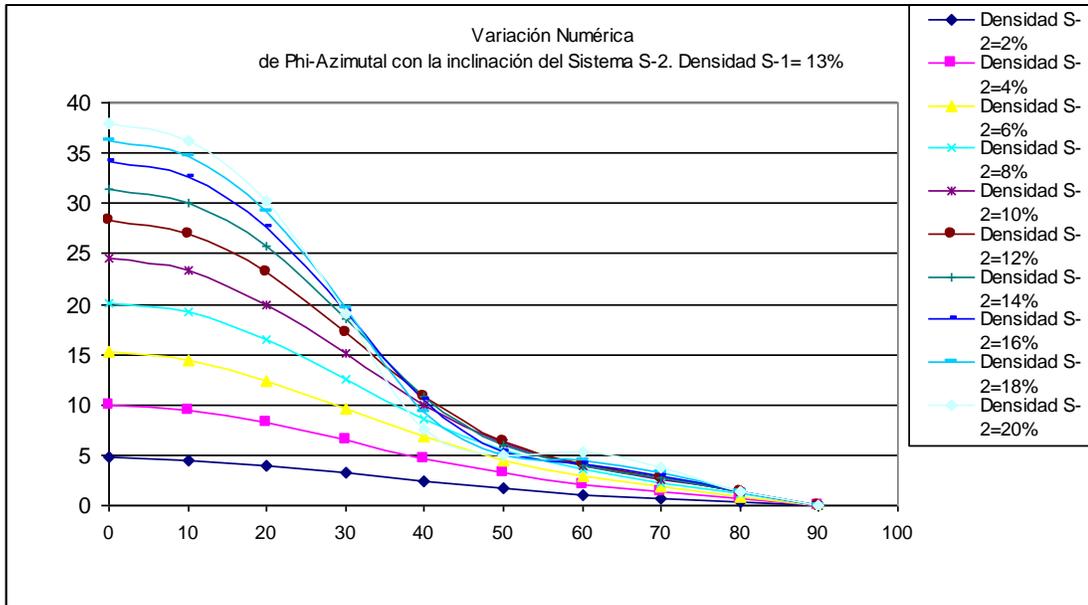
b.- Como se dijo anteriormente, el Dominio D2 está representado por valores cercanos al promedio de los rumbos que poseen los sistemas de fracturas que se

interceptan. En este caso, lo hemos definido como el valor de la media aritmética mas o menos 5°. En este caso, la transición de ϕ_H hacia valores menores continua. De tal manera que pronto estaremos en el dominio D3, completamente influenciado por el sistema de fracturas verticales (S1). Lo anterior puede observarse de acuerdo a los siguientes gráficos:

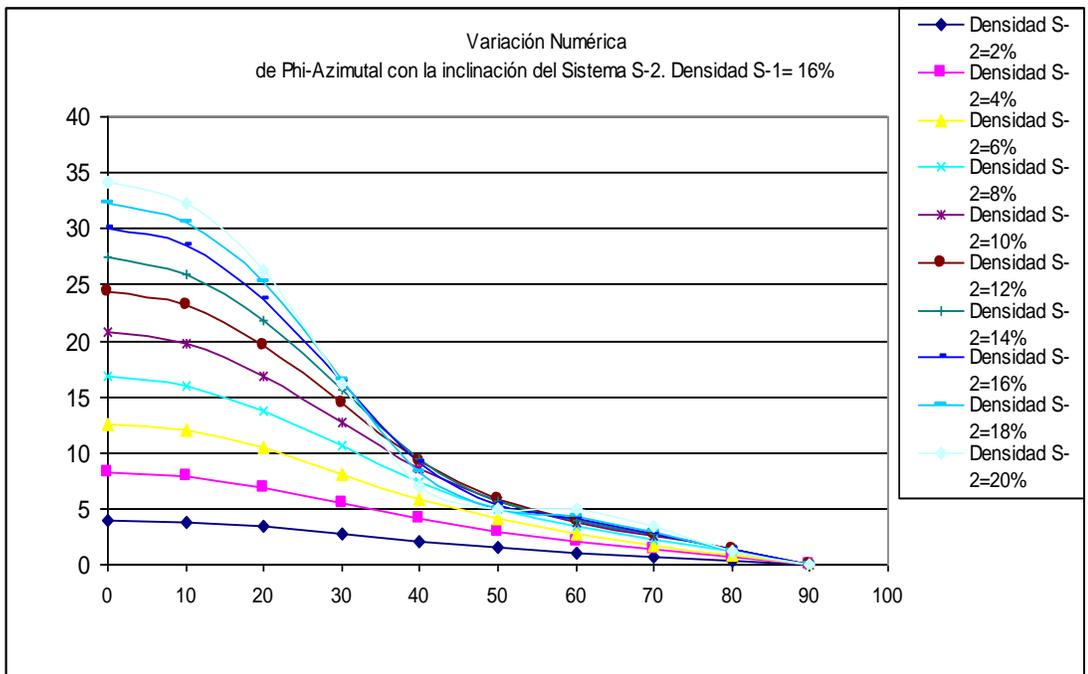
**GRÁFICO 4: Variación de ϕ_H numérico, con la inclinación del Sistema S2.
DF1= 10%.**



**GRÁFICO 5: Variación de ϕ_H numérico, con la inclinación del Sistema S2.
DF1= 13%.**

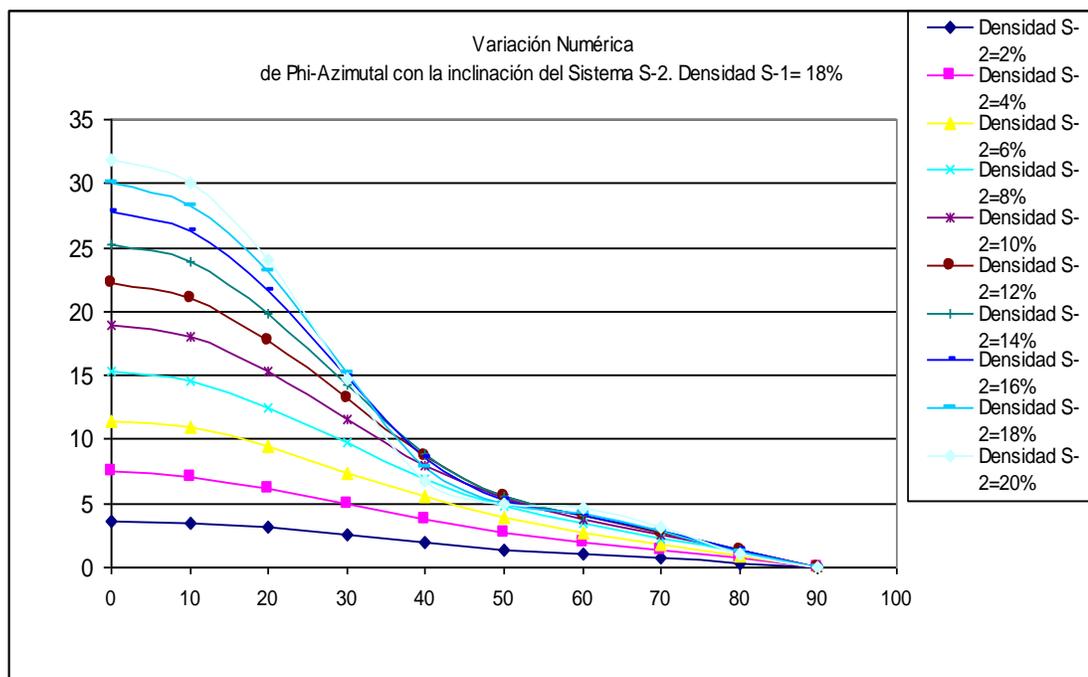


**GRÁFICO 6: Variación de ϕ_H numérico, con la inclinación del Sistema S2.
DF1= 16%.**

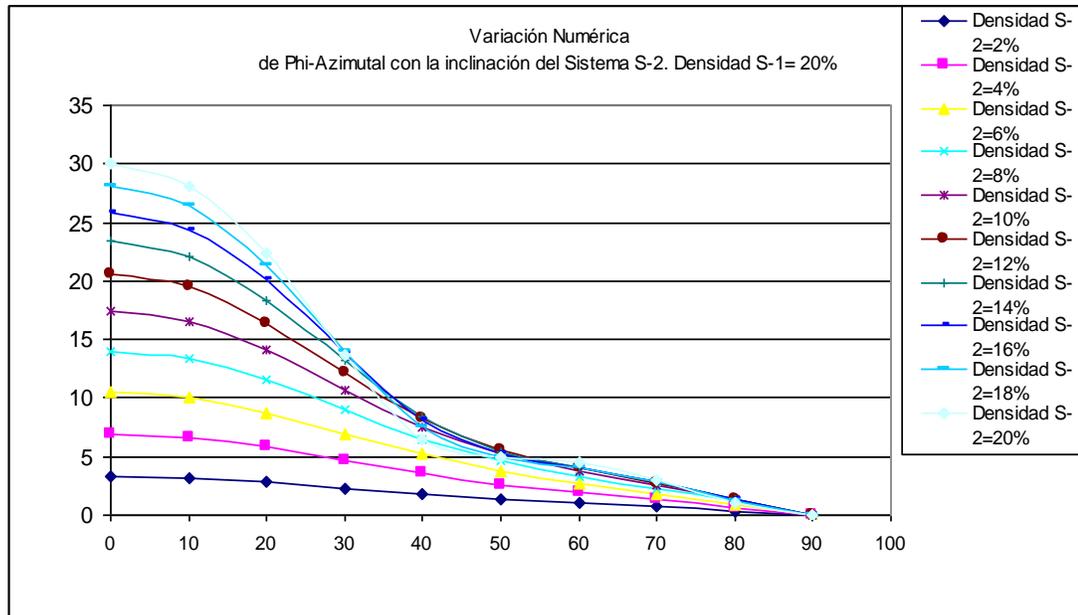


Como puede observarse, los valores correspondientes al dominio D2 se vuelve cada vez más exclusivo de las fracturas subverticales del sistema S2, a medida que el sistema vertical (S1) aumenta su densidad de fracturamiento (DF1). En este sentido, el rango cada vez se ve limitado incluso a valores de inclinación de $\theta_2 \leq 20$ y 30° . Mientras tanto, los valores de ϕ_H se encuentran cada vez más en el dominio D1, para una amplia gama de valores de θ_2 y DF2 y, como podrá ser visto en los gráficos posteriores, esta tendencia seguirá en aumento. Incluso, esto puede observarse en la ultima grafica presentada, correspondiente a una $DF1 = 16\%$. Allí se nota que para valores de θ_2 ubicados entre 40 y 50° , el valor de ϕ_H se encuentra entre 10 y 5° , mientras que para valores de θ_2 mayores que 50° , ϕ_H se ubicará entre 0 y 5° ; todo esto a pesar de que el sistema de fracturas oblicuo (S2) puede tener densidades de fracturamiento grandes.

**GRÁFICO 7: Variación de ϕ_H numérico, con la inclinación del Sistema S2.
DF1= 18%.**



**GRÁFICO 8: Variación de ϕ_H numérico, con la inclinación del Sistema S2.
DF1= 20%.**

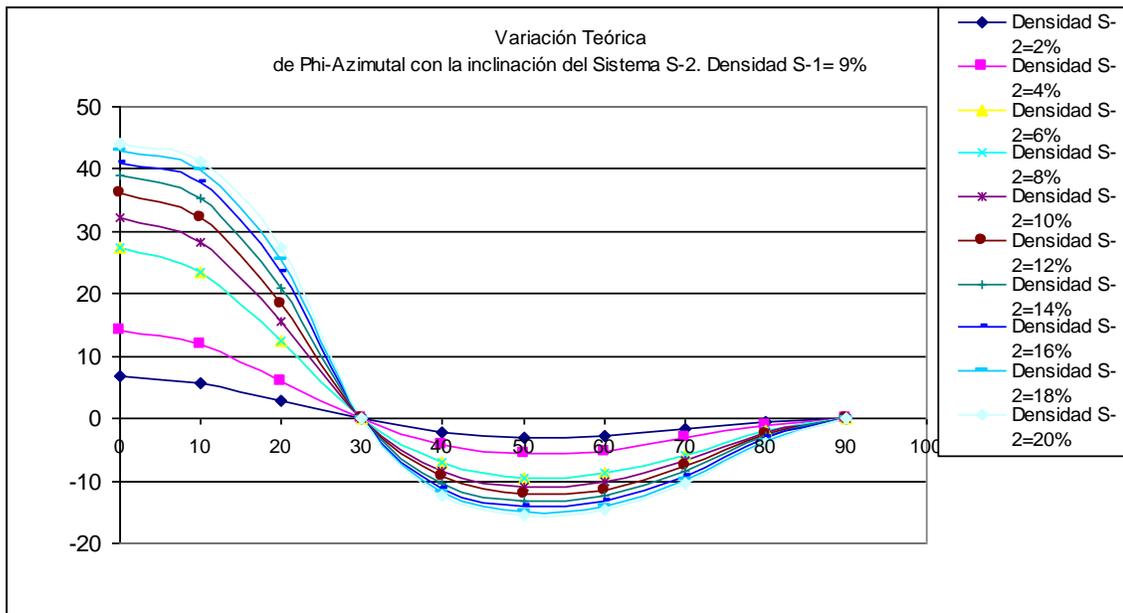


c.- Finalmente, hemos llegado al dominio D3. Aunque sólo para valores de $DF2 \leq 6\%$ el sistema S2 se hace invisible con respecto a su influencia sobre el valor de ϕ_H , todavía quedan valores de $DF2$ para los cuales existe todavía el dominio D2. Así pues, para valores de $DF2$ ubicados entre 16 – 20% de fracturamiento, las fracturas subverticales están aún en este dominio D2. No obstante, se repite el caso anterior para fracturas subhorizontales: i.e., se nota que para valores de θ_2 ubicados entre 40 y 50°, el valor de ϕ_H se encuentra entre 10 y 5°, mientras que para valores de θ_2 mayores que 50°, ϕ_H se ubicará entre 0 y 5°; todo esto a pesar de que el sistema de fracturas oblicuo (S2) tenga densidades de fracturamiento grandes.

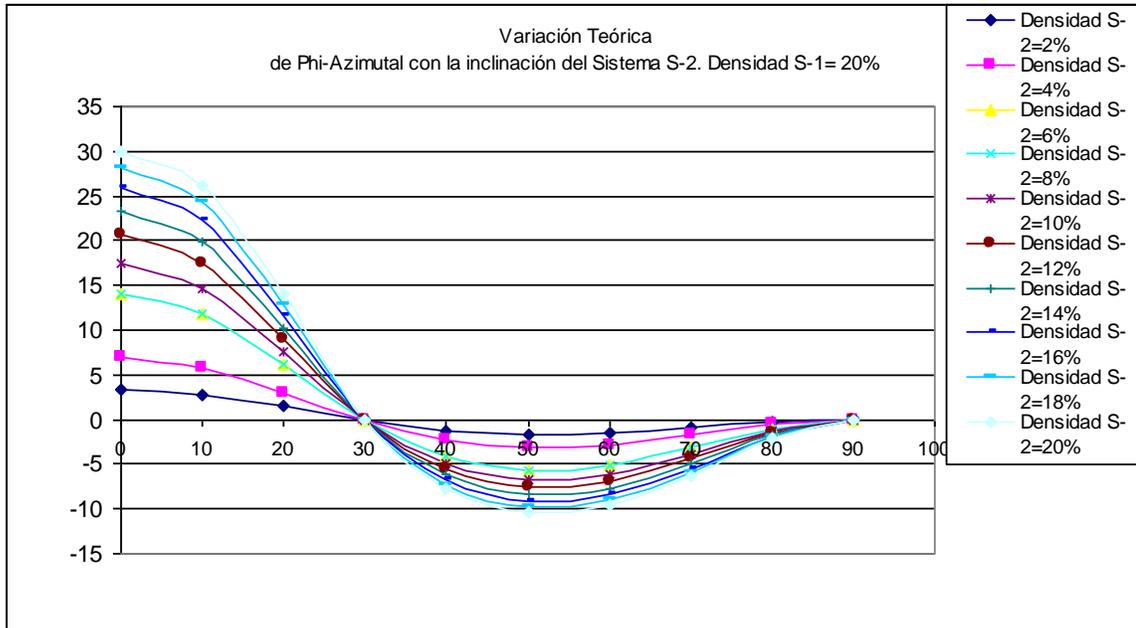
Análisis Teórico de los modelos: Junto con lo reportado por MacBeth (1996), nuestros valores teóricos que presentan la variación de ϕ_H con respecto a la

inclinación de las fracturas del sistema 2, θ_2 , viene dada por una forma que se aproxima a la de un polinomio de 4to. grado. Este consta de dos máximos relativos: para $\theta_2 = 0^\circ$ y 90° ; y un mínimo absoluto, en $\theta_2 = 50^\circ$, pasando por un punto de corte, i.e., $\phi_H = 0^\circ$, en $\theta_2 = 30^\circ$. No obstante, hay que recordar que esta gráfica es obtenida a partir de una aproximación para fracturas inclinadas, y a cuyo matriz de Christoffel se le aplicó sólo una rotación alrededor del eje z con el fin de diagonalizarlo. Por lo tanto, como fue descrito en las secciones previas, sólo fueron eliminados del todo los elementos $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$, quedando aún elementos fuera de la diagonal ($\Gamma_{13}^* = \Gamma_{31}^*$), los cuales no son necesariamente ceros (0). Así mismo, el * implica que estos términos son los nuevos elementos luego de la rotación alrededor de z y que, ahora, sólo son función del ángulo de inclinación del sistema de fracturas S_2 (θ_2). A continuación se presenta un par de gráficos de los valores de ϕ_H teórico, sólo con el fin de ilustrar lo dicho anteriormente.

**GRÁFICO 9: Variación de ϕ_H teórico, con la inclinación del Sistema S2.
DF1= 9%.**



**GRÁFICO 10: Variación de ϕ_H teórico, con la inclinación del Sistema S2.
DF1= 20%.**



Ahora, se hace necesario establecer el margen de error que existe entre la determinación de ϕ_H teórico Vs. ϕ_H numérico.

3.3.4.- Descripción acerca del error estimado $E \equiv \text{abs}(\phi_H \text{ teórico}) - \phi_H \text{ numérico}$:

Cada uno de las series pertenecientes a cada una de los gráficos presenta un comportamiento similar de tendencias generales en cuanto al error calculado, debido a que tanto en el planteamiento numérico como en el teórico, se mantenían tendencias generalizadas y muy similares entre sí. Ahora bien, podemos hablar de estas tendencias, en primer lugar, para los ángulos de inclinación $\theta_2 \leq 40^\circ$ se tiene un error negativo (i.e., $\text{abs}[\phi_H \text{ teórico}] \leq \phi_H \text{ numérico}$), con un máximo siempre en $\theta_2 = 30^\circ$, el cual se debe al cero que éste presenta en la gráfica teórica.

Luego, para los $\theta_2 \geq 50^\circ$ el error es positivo (i.e. $\text{abs}[\phi_H \text{ teórico}] \geq \phi_H \text{ numérico}$). Así pues, suponiendo que se desea usar la formula teórica, ha de estimarse un porcentaje X de compensación, para los distintos valores de θ_2 , dependiendo de la banda en que

este se estime. A continuación se presenta un resumen de dicho porcentaje de error, correspondiente a los rangos (E_{R1} , E_{R2} , E_{30} ¹²):

Rango 1 (R_1) $\theta_2 \ni [0,10,20,40^\circ]$.

Rango 2 (R_2) $\theta_2 \ni [50,60,70,80,90^\circ]$.

Así mismo, se ha convenido en definir los siguientes grupos, según los valores de densidad de fracturamiento del sistema S1:

Grupo 1 (G_1) $DF_1 \ni [1,2,3]\%$: $E_{R1} \leq -20^\circ$; $E_{R2} \leq 20^\circ$; $E_{30} = 40^\circ$

Grupo 2 (G_2) $DF_1 \ni [4,5,6]\%$. $E_{R1} \leq -15^\circ$; $E_{R2} \leq 15^\circ$; $E_{30} = 40^\circ$

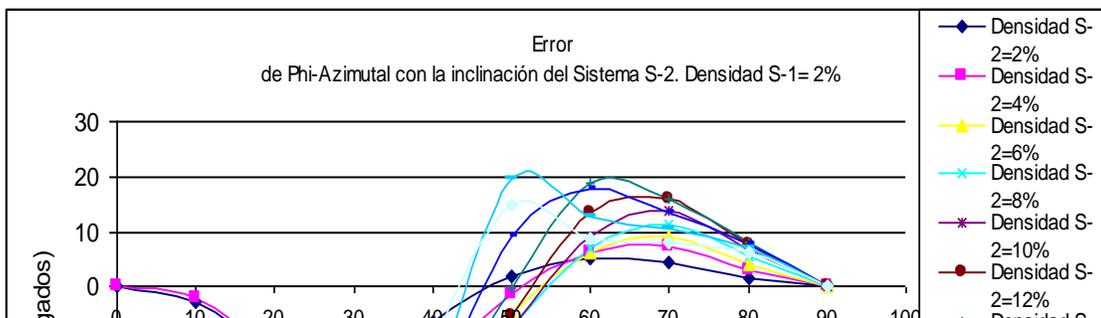
Grupo 3 (G_3) $DF_1 \ni [7,8,9,10,11,12,13]\%$. $E_{R1} \leq -10^\circ$; $E_{R2} \leq 10^\circ$;

$$E_{30} \quad 20 \leq E_{30} \leq 25^\circ$$

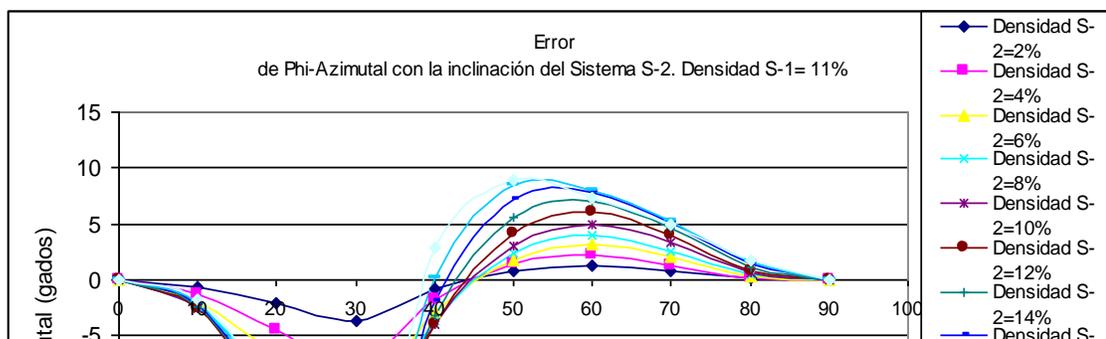
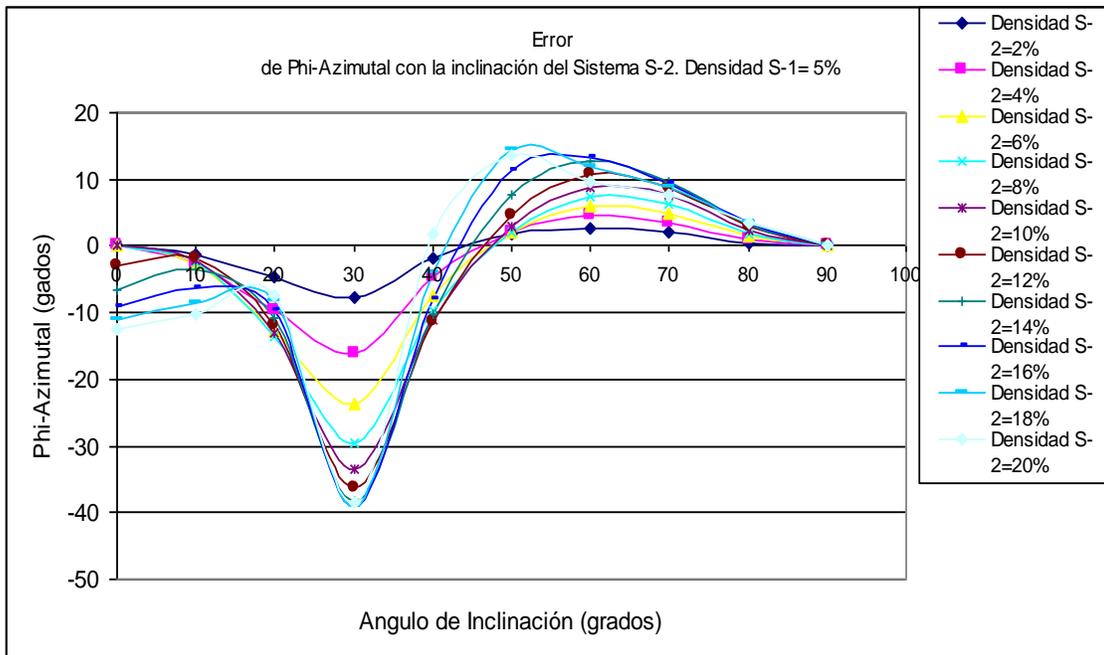
Grupo 4 (G_4) $DF_1 \ni [14,15,16,17,18,19,20]\%$. $E_{R1} \leq -10^\circ$; $E_{R2} \leq 5^\circ$; $E_{30} = 15^\circ$

Los valores máximos del error para los rangos corresponden a la mayor diferencia de densidad de fracturas del sistema S2 con respecto al sistema S1, donde la diferencia es dada como: $\Delta_{DF} \equiv DF_1 - DF_2$. En la medida que dicha diferencia sea negativa ($DF_2 > DF_1$), el error para la banda tenderá al valor máximo definido arriba y el cual corresponde al grupo G1. Mientras que para $\Delta_{DF} \geq 0$ los errores serán menores o iguales a $\pm 5^\circ$.

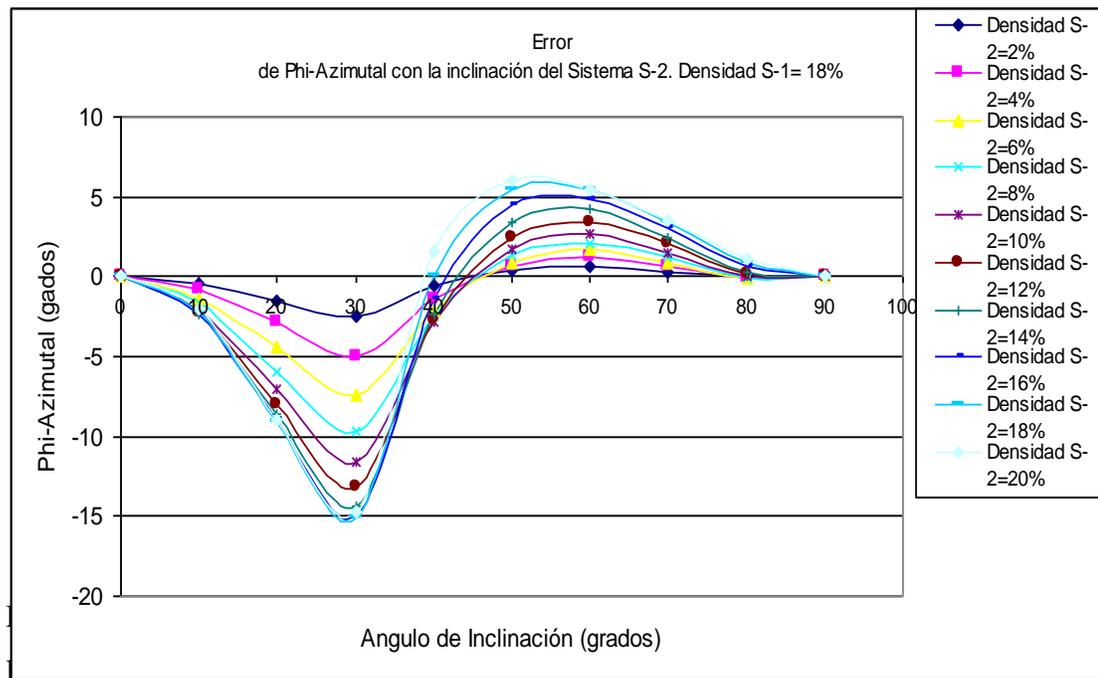
**GRÁFICO 11: Variación de Error ϕ_H , con la inclinación del Sistema S2.
DF1= 2%.**



**GRÁFICO 12: Variación del Error ϕ_H , con la inclinación del Sistema S2.
DF1= 9%.**



**GRÁFICO 14: Variación del Error ϕ_H , con la inclinación del Sistema S2.
DF1= 19%.**



igual que el sistema de fracturas #2, sobre todo si dicho valor se encuentra por encima del 10%, y el valor correspondiente al ángulo ϕ_H teórico vendrá dado por el valor absoluto del mismo.

3.3.5.- Modelo Monoclínico - Ortorrómico – Tetragonal: Este modelo es un caso particular de los sistemas de fracturas que se interceptan, ya que sus estas forman entre sí un ángulo recto. Por lo tanto, la cinemática del problema, representada por las polarizaciones de las ondas qS, garantiza que estas direcciones serán dadas a lo largo de las orientaciones de cada uno de los sistemas de fracturas, para el caso de fracturas verticales. No obstante, se pretende indagar el efecto que produce la inclinación de uno de los sistemas de fracturas, en relación al ángulo de polarización horizontal ϕ_H .

En principio, hay que señalar que la formula teórica falla aquí debido a los valores particulares de $\phi_1 = 0^\circ$ y $\phi_2 = 90^\circ$, los cuales son raíces de la ecuación $\phi_H = \phi_H(\phi_1, \phi_2)$. Por lo tanto no se puede hacer una descripción acerca del error que pudiera producirse entre la estimación teórica y numérica de ϕ_H . Sin embargo, describiremos el comportamiento general que estos modelos representan, en base a los resultados numéricos obtenidos.

Así pues, se tiene como tendencia general que la polarización de las ondas qS se dará a lo largo de las orientaciones de los sistemas de fracturas. Por lo cual, se establecen dos dominios que cambian bruscamente entre sí, sin que haya un estado intermedio (salvo para el caso tetragonal en donde $\phi_H = 45^\circ$, idénticamente igual a un promedio simple de ambos rumbos). Además, se puede verificar (en base a los resultados) que, cuando la densidad DF1 es mayor que la densidad DF2, el ángulo ϕ_H es independiente de los valores θ_2 y DF2, ubicándose en valores menores a los 10° . Además, cuando se da el caso particular de fracturas verticales y de igual densidad de fracturamiento, entonces se dice que el medio es tetragonal. Allí ninguno de los dos sistemas es dominante sobre el otro, de tal manera que ϕ_H es idénticamente igual a un promedio simple de las orientaciones de los dos sistemas de fracturas (i.e., $\phi_H = 45^\circ$). Finalmente, existe una tendencia general que está de acuerdo a lo expuesto en el modelo de facturas anterior ($\phi_2 = 60^\circ$). A medida que el sistema vertical (S1) se hace más fracturado, se comienza a eliminar la dependencia angular de la inclinación del

sistema de fracturas S2 y que se cumple para todo valor de DF2. En ese sentido se esquematizan los siguientes valores de DF1 y los respectivos valores de θ_2 a partir de los cuales no hay dependencia predominante del sistema S2, sino mas bien del sistema S1:

- a.- DF1 = 1-3%, $\theta_2 \geq 50^\circ$.
- b.- DF1 = 4-7%, $\theta_2 \geq 40^\circ$.
- c.- DF1 = 8-12%, $\theta_2 \geq 30^\circ$.
- d.- DF1 = 13-17%, $\theta_2 \geq 20^\circ$.
- e.- DF1 = 18, $\theta_2 \geq 10^\circ$.
- f.- DF1 = 19, todas excepto para DF2 = 20% y allí $\theta_2 \geq 10^\circ$.
- g.- DF1 = 20 %, todas.

A continuación se presentará un elemento de cada rango con el fin poder demostrar lo dicho anteriormente:

GRÁFICO 15: Variación de ϕ_H numérico, con la inclinación del Sistema S2. DF1= 2%.

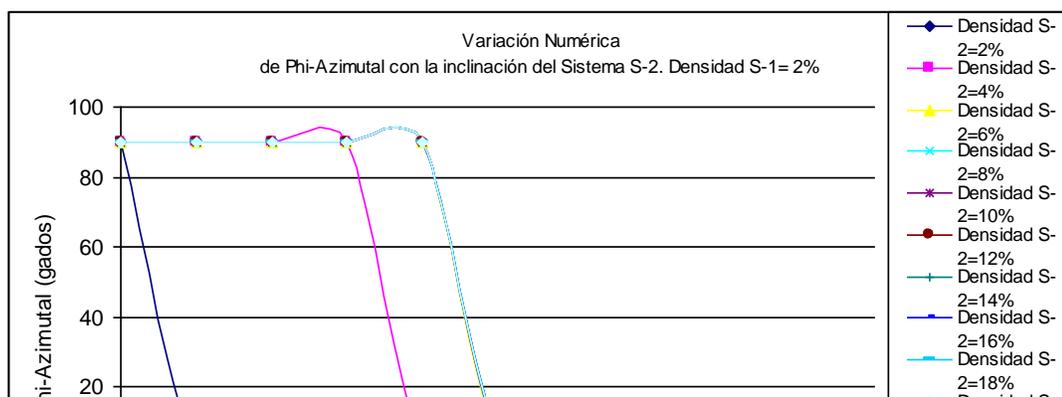


GRÁFICO 16: Variación de ϕ_H numérico, con la inclinación del Sistema S2. DF1= 5%.

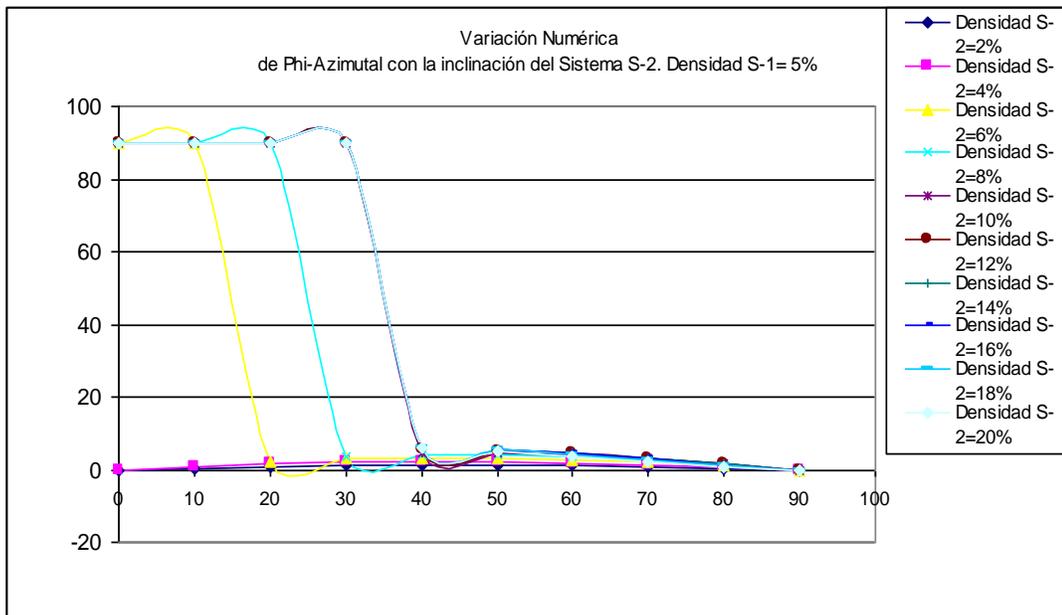


GRÁFICO 17: Variación de ϕ_H numérico, con la inclinación del Sistema S2. DF1= 11%.

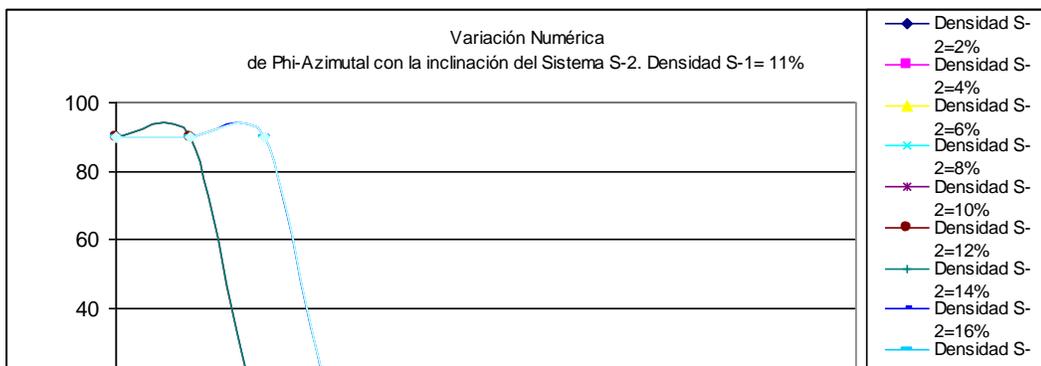
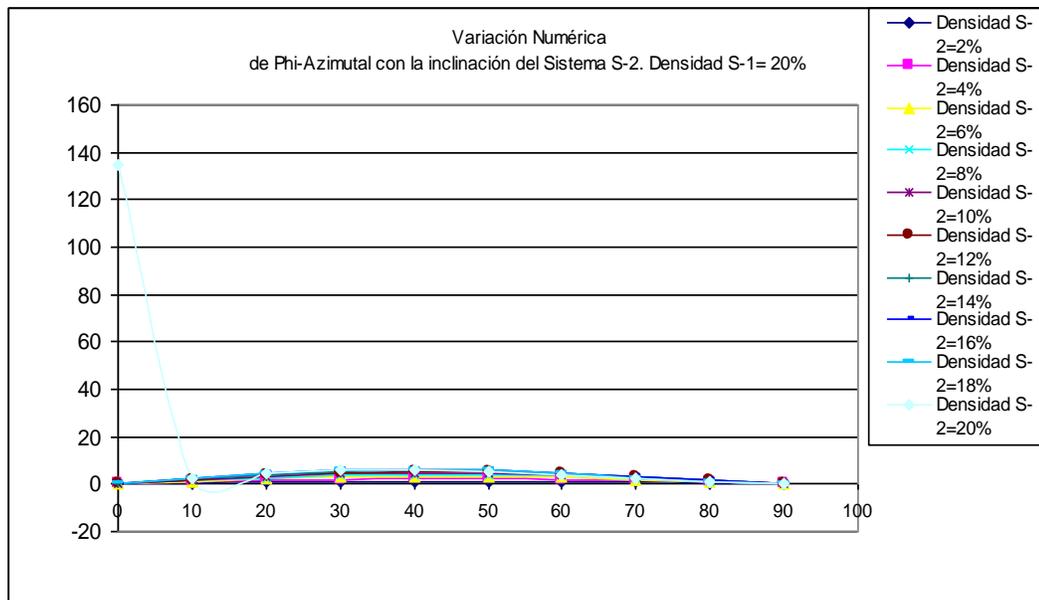


GRÁFICO 20: Variación de ϕ_H numérico, con la inclinación del Sistema S2. DF1= 20%.

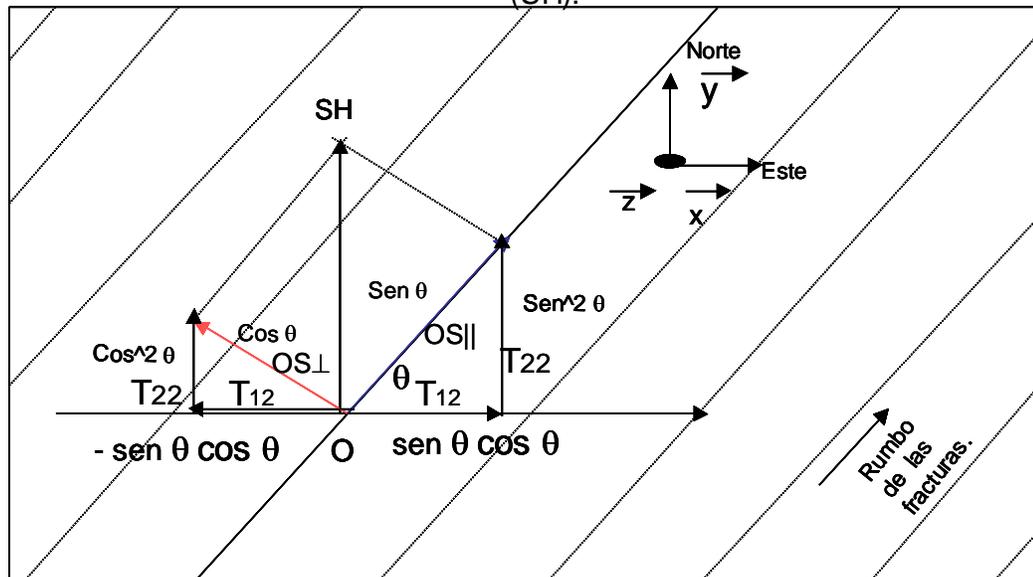


3.4.- Aplicación de la técnica de rotación de Sismogramas de Alford en la determinación el ángulo de polarización horizontal (ϕ_H).

3.4.1.- Trazas sísmicas sintéticas, de incidencia normal, para un modelo simple de fracturas verticales, usando fuentes de ondas de cizalla. La Figura (6) ilustra la vista 2-D, desde una perspectiva del tope, de un sistema de fracturas cuyo

marco de referencia bidimensional X, Y, corresponde a un sistema de coordenadas rectangulares del tipo levógiro¹³.

Figura 6: Descomposición geométrica de los vectores polarización de un sistema de fracturas verticales, para un estudio sísmico con fuente de cizalla horizontal (SH).



Vector azul: vector polarización de la onda S rápida (OS|| o S1).

Vector rojo: vector polarización de la onda S lenta (OS⊥ o S2).

θ : ángulo de las fracturas verticales con respecto al Este ("rumbo" de las fracturas).

T12= Traza sísmica con bobina receptora paralela al eje X, fuente usada paralela a Y (SH).

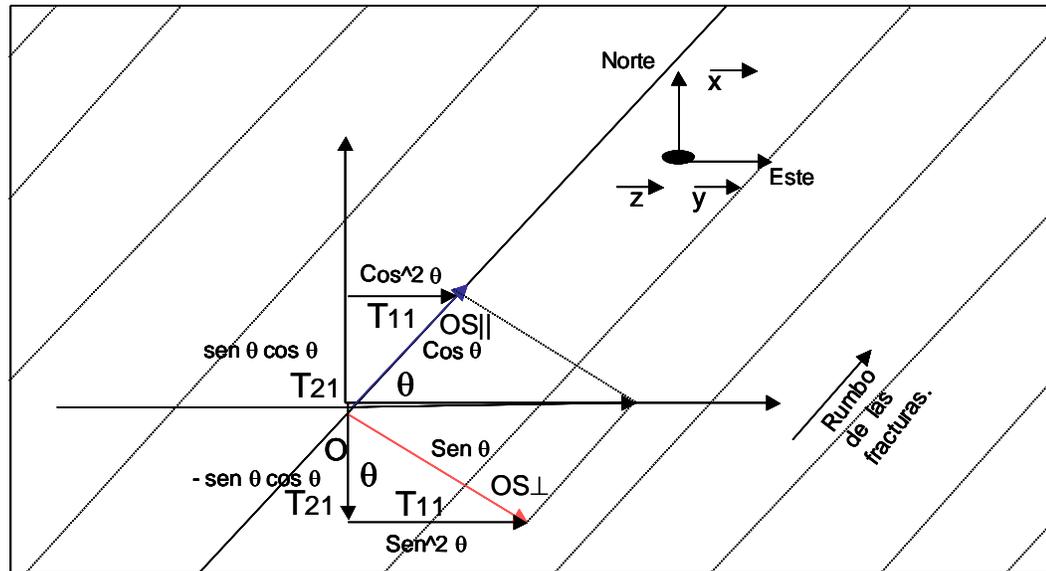
T22= Traza sísmica con bobina receptora paralela al eje Y, fuente usada paralela a Y (SH).

Como se ha demostrado en las secciones previas, si existe una propagación de ondas incidiendo normalmente en un medio fracturado verticalmente, el plano de

¹³ Contrario a la orientación negativa del espacio usado en el marco teórico y en las tres secciones anteriores de este capítulo.

polarización será el plano horizontal. Así mismo, cuando existe un cambio de impedancia acústica se dice que existe una interfase entre dos medios distintos. En dicha interfase, ocurre una partición de la energía que viaja a través de las ondas corpóreas, las cuales están incidiendo en ella con un cierto ángulo respecto a la dirección vertical (ángulo de incidencia). De allí pues, que una parte de la onda se Refleja y otra se Transmite; además, puede ocurrir un fenómeno denominado conversión de modo. Es decir, una onda de cizalla (por ejemplo) puede reflejarse y/o transmitirse como una onda de cizalla (igual a la incidente), como otro tipo de onda de cizalla, o en su defecto como una compresional. En este mismo orden de ideas, los estudios sísmicos de ondas de cizalla son aquellos que usan un dispositivo capaz de propagar (preferencialmente) un tipo específico de ondas S: vertical (SV) u horizontal (SH). Donde el adjetivo vertical u horizontal depende de la orientación preferencial en la que la fuente excita al medio, y está ligado al sistema de referencia global tal que SV corresponde a la dirección X y SH a la dirección Y (ver figuras <7> y <6>).

Figura 7: Descomposición geométrica de los vectores polarización, sistema de fracturas verticales, para un estudio sísmico con fuente de cizalla vertical (SV)



Vector azul: vector polarización de la onda S rápida ($OS_{||}$ o S_1).

Vector rojo: vector polarización de la onda S lenta (OS_{\perp} o S_2).

θ : ángulo de las fracturas verticales con respecto al Este ("rumbo" de las fracturas).

T_{11} = Traza sísmica con bobina receptora paralela al eje X, fuente usada paralela a X (SV).

T_{21} = Traza sísmica con bobina receptora paralela al eje Y, fuente usada paralela a X (SV).

Así mismo, los receptores tienen un dispositivo que permiten grabar un determinado movimiento de partículas (ya sea desplazamientos o velocidades de partículas), los cuales igualmente están ligados al marco de referencia global. De allí que, se conviene en adoptar la simbología convencional con respecto a la orientación de los sensores: 1, si están ubicados paralelos al Eje OX; y 2, si están paralelos al Eje OY, lo cual es válido tanto para las fuentes como para los receptores. Además, se asume que los receptores disponen de, al menos, las bobinas correspondientes para grabar las componentes horizontales (X e Y) de las velocidades de fase. Así pues, llamemos T a una traza de incidencia normal; entonces, T_{11} representa a una traza de incidencia normal, que grabó las velocidades de fase correspondientes a las componentes paralelas al Eje OX, y en donde la fuente del estudio sísmico es un generador de

ondas SV. Donde el primer subíndice corresponde a la componente paralela a la bobina del receptor, y el segundo corresponde al tipo de fuente utilizada. Así mismo, esta nomenclatura es válida para el resto de las Trazas: T_{21} , T_{12} y T_{22} .

Ahora bien, supongamos que se realiza un estudio sísmico convencional de ondas SH, en el cual la ubicación de los sensores es escogida al azar, tal que dicha orientación (eje OX del sistema global) forme un ángulo θ con respecto al rumbo de las fracturas (ver Figura <6>). Como se ha descrito en los primeros apartados de esta sección, para una incidencia normal, y el caso de fracturas verticales, las ondas S están confinadas a polarizarse en el plano horizontal. Así pues, sin pérdida de generalidad en el problema, consideremos el caso simple de una capa plana y una onda incidiendo normalmente en la base de la capa 1. El efecto de no orientar los receptores paralelos a las direcciones principales de polarización (ver apartado 1 y 2 de esta sección reflexión), se manifiesta en los receptores como dos reflexiones distintas (para este caso de una sola capa) producto de la birrefringencia que la Onda S experimenta en medios anisótropos. Las ondas S, rápida y lenta, se propagaran a velocidades distintas, y el movimiento preferencial de partículas (vectores polarización) son llamados $OS_{||}$ y OS_{\perp} , respectivamente. A su vez, estos vectores sufren una descomposición geométrica como resultado de la ubicación aleatoria de los receptores. Las mismas Figuras (6) y (7) ilustran dicha descomposición y coloca los factores geométricos que teóricamente deberían recibirse en cada una de las trazas respectivas.

Por otro lado, los factores físicos más relevantes que deben considerarse son: los distintos coeficientes de reflexión de las dos ondas S (denominados convenientemente como $R_{||}$ y R_{\perp}) y los filtros que incorporan los factores de atenuación que sufre la onda, así como los efectos de la geometría del tendido, entre otros (denominados $f_{||}$ y f_{\perp}). Sin embargo, lo que corresponde a los coeficientes de reflexión es tema de la sección #3, por lo cual no es considerado en la presente

sección. Así mismo, lo que corresponde a los filtros f_{\parallel} y f_{\perp} no son considerados al momento de generar los sismogramas sintéticos. Así pues, las trazas sísmicas que se mostraran, son el resultado de una reflexión de incidencia normal (para el modelo simple de una capa), libre de múltiples y con muy bajo contenido de ruido; de manera tal que cada una de éstas representa un apilado de Puntos Comunes en Profundidad (PCP).

En cuanto a la fuente, supongamos que la fuente usada es una fuente real impulsiva. Sí esta fuese un impulso perfecto, entonces cada modo puro (S_{\parallel} y S_{\perp}) también se propagaría como un impulso, linealmente polarizado en la dirección apropiada. En consecuencia, la señal aparecería como dos eventos impulsivos separados. Por lo tanto, y en concordancia con lo presentado por Thomsen (1988), se pueden escribir las trazas respectivas como:

$$T_{22} = \left[R_{\parallel} \cos^2 \theta f_{\parallel}(t) * \delta \left(t - \frac{2z}{v_{\parallel}} \right) + R_{\perp} \cos^2 \theta f_{\perp}(t) * \delta \left(t - \frac{2z}{v_{\perp}} \right) \right] \quad (2.32)$$

y

$$T_{22} = \left[R_{\parallel} \sin \theta \cos \theta f_{\parallel}(t) * \delta \left(t - \frac{2z}{v_{\parallel}} \right) - R_{\perp} \sin \theta \cos \theta f_{\perp}(t) * \delta \left(t - \frac{2z}{v_{\perp}} \right) \right] \quad (3.33)$$

donde el Delta de Dirac (δ) indica el impulso que arriva desde la profundidad $h=z$ con velocidades v_{\parallel} y v_{\perp} , para las ondas S_{\parallel} y S_{\perp} , respectivamente.

Además, pueden definirse los siguientes tiempos doble de viaje, como:

$$t_{\parallel} = \frac{2z}{v_{\parallel}} \text{ y } t_{\perp} = \frac{2z}{v_{\perp}}. \quad (3.34)$$

De allí pues, se define la separación en tiempo como:

$$\Delta_t \equiv t_{\perp} - t_{\parallel} = t_{\parallel} \left(\frac{t_{\perp}}{t_{\parallel}} - 1 \right) = t_{\parallel} \left(\frac{2z/v_{\perp}}{2z/v_{\parallel}} - 1 \right) = t_{\parallel} \left(\frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} - 1 \right) = \gamma t_{\parallel}, \quad (3.35)$$

donde γ es una medida de la anisotropía del medio, de acuerdo a lo definido por Thomsen (1986) para el caso especial de isotropía transversal horizontal, la misma es definido como:

$$\gamma \equiv \left(\frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} - 1 \right) \approx \left(1 - \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} \right). \quad (3.36)$$

Por el contrario, asumiendo la señal de la onda de cizalla fuese una senoide continua en el tiempo, en lugar de un impulso, la interferencia que ocurre entre estos dos modos conduciría a una señal sinusoidal sencilla con polarización elíptica. No obstante, en el caso real, es difícil lograr que una fuente de ondas sísmicas (para el caso geofísico ideal sería una ondícula sísmica) esté perfectamente localizada en el tiempo. Por lo tanto, sabiendo que la ondícula sísmica no es senoide continua sino que es una señal perfectamente localizada, se puede afirmar que las reflexiones se ubicaran entre estos dos casos extremos. Ahora bien, considerando a un modelo ideal del subsuelo como un sistema lineal, entonces una representación más real de las trazas es dada por la convolución de una ondícula $w(t)$, de duración finita, con la secuencia de los impulsos respectivos (definidos arriba):

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{12}(t) &= \left[R_{\parallel} \sin \theta \cos \theta \delta(t - t_{\parallel}) * f_{\parallel}(t) - R_{\perp} \sin \theta \cos \theta \delta(t - t_{\perp}) * f_{\perp}(t) \right] * w(t) \\ \tilde{T}_{22}(t) &= \left[R_{\parallel} \sin^2 \theta \delta(t - t_{\parallel}) * f_{\parallel}(t) + R_{\perp} \cos^2 \theta \delta(t - t_{\perp}) * f_{\perp}(t) \right] * w(t)\end{aligned}\quad (3.37)$$

Así pues, se pueden observar las distintas reflexiones para cada una de las trazas \tilde{T}_{12} y \tilde{T}_{22} , en las figuras (6) y (7). Allí se usó una ondícula Ricker de 45 Hz de frecuencia dominante (Ver Figura <8>). Si la duración de la ondícula es comparable al retardo Δt , habrá una interferencia complicada entre las dos llegadas, lo cual puede degradar sustancialmente la calidad de los datos. Esto sucederá aún si la anisotropía es pequeña, ya que el tiempo de retardo depende del tiempo de viaje. Por ejemplo, si $\gamma \approx 2\%$, entonces para tiempos largos ($t_{\parallel} > 2$ s) el tiempo de retardo será de $\Delta t > 40$ ms, i.e., será comparable a la duración del lóbulo principal de un ondícula típica. Alford (1986b) analizó este efecto y sugirió que el mismo era la causa principal de la calidad errática y poco predictiva de los datos de ondas S en muchos sitios del mundo.

Por otro lado, en un estudio sísmico de ondas SH sobre un medio isotrópico, las trazas correspondientes a los sensores con bobinas paralelas a la fuente (paralelas al eje OY) grabarán una traza nula. Esto puede observarse fácilmente al examinar la ecuación (3.35) y sabiendo el tiempo de retardo se hace cero (ya que en el límite isotrópico $\gamma = 0$). Además, los coeficientes de reflexión y los filtros correspondientes a la factores de atenuación son idénticos; por lo tanto, las dos llegadas ubicadas en la traza T_{12} se cancelan entre sí. En éste mismo límite isotrópico, la señal de la traza T_{22} también se reduce al resultado isotrópico (una llegada por reflexión en vez de dos). Haciendo una analogía del caso de los estudios sísmicos de ondas SH, y apelando a la geometría representada en la figura (7), se obtendrán las expresiones correspondientes para el caso de un estudio sísmico de ondas SV. En un estudio convencional de ondas SV, la fuente excita al medio en una dirección preferencialmente paralela al eje OX. De igual manera se obtienen resultados

similares para las distintas trazas T_{11} y T_{21} , tanto para la forma de los impulsos bien localizados como para aquellos convolucionados con la ondícula Ricker. Así pues, la forma de los pulsos convolucionados con la ondícula Ricker, y en acuerdo con los resultados de Thomsen:

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{11}(t) &= \left[R_{\parallel} \cos^2 \theta \delta(t - t_{\parallel}) * f_{\parallel}(t) + R_{\perp} \sin^2 \theta \delta(t - t_{\perp}) * f_{\perp}(t) \right] * w(t) \\ \tilde{T}_{21}(t) &= \left[R_{\parallel} \sin \theta \cos \theta \delta(t - t_{\parallel}) * f_{\parallel}(t) - R_{\perp} \sin \theta \cos \theta \delta(t - t_{\perp}) * f_{\perp}(t) \right] * w(t)\end{aligned}\tag{3.38}$$

Para ilustrar todo lo que se ha dicho, consideremos nuestro modelo simple de una capa plana, cuyos parámetros son: espesor ($h=1000\text{m}$), velocidad de onda S rápida ($v_{S1}= 3000 \text{ m/s}$) y velocidad de onda S lenta ($v_{S2} = 2700 \text{ m/s}$). A continuación, las figuras (4) y (5) representan la forma de los pulsos perfectos, correspondientes a las trazas T_{12} y T_{22} respectivamente, que resultarían de la propagación de una fuente impulsiva perfecta en un medio idealmente lineal. Los pulsos respectivos y los pulsos convolucionados con la ondícula Ricker pueden observarse en las Figuras: (8) y (9).

Figura (8): Forma de los pulsos respectivos para un estudio sísmico con 2 fuentes de ondas de cizalla.

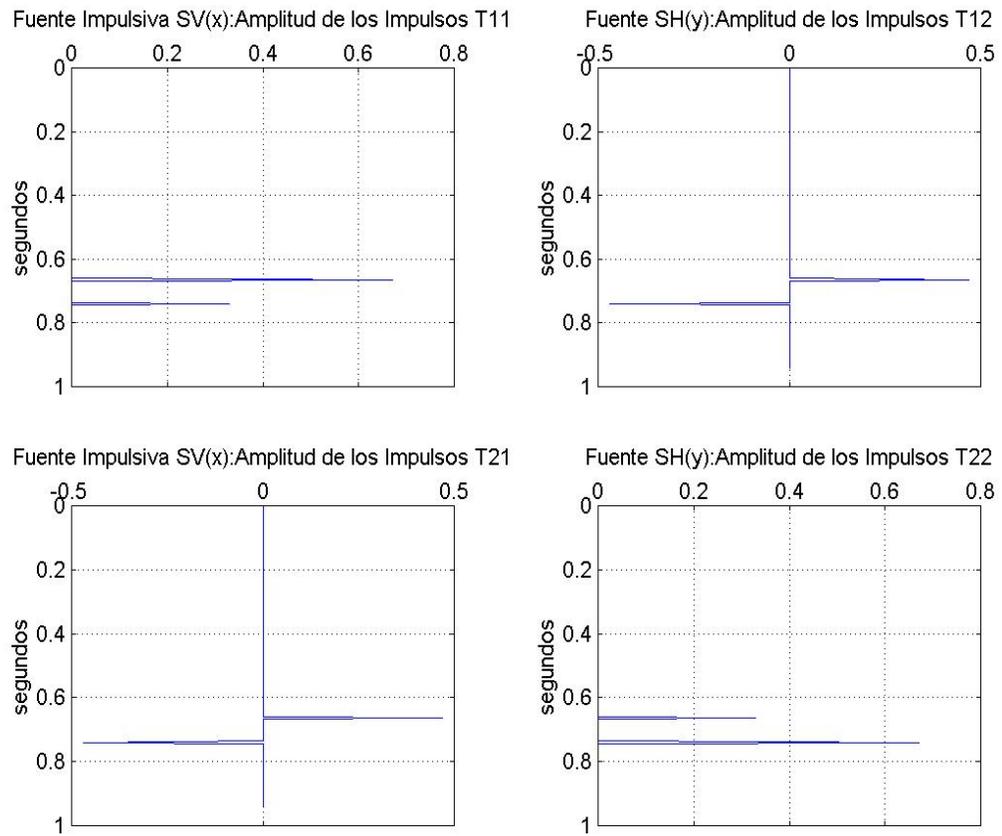


Figura (9): Forma de los trazas sintéticas correspondientes un estudio sísmico con 2 fuentes de ondas de cizalla.

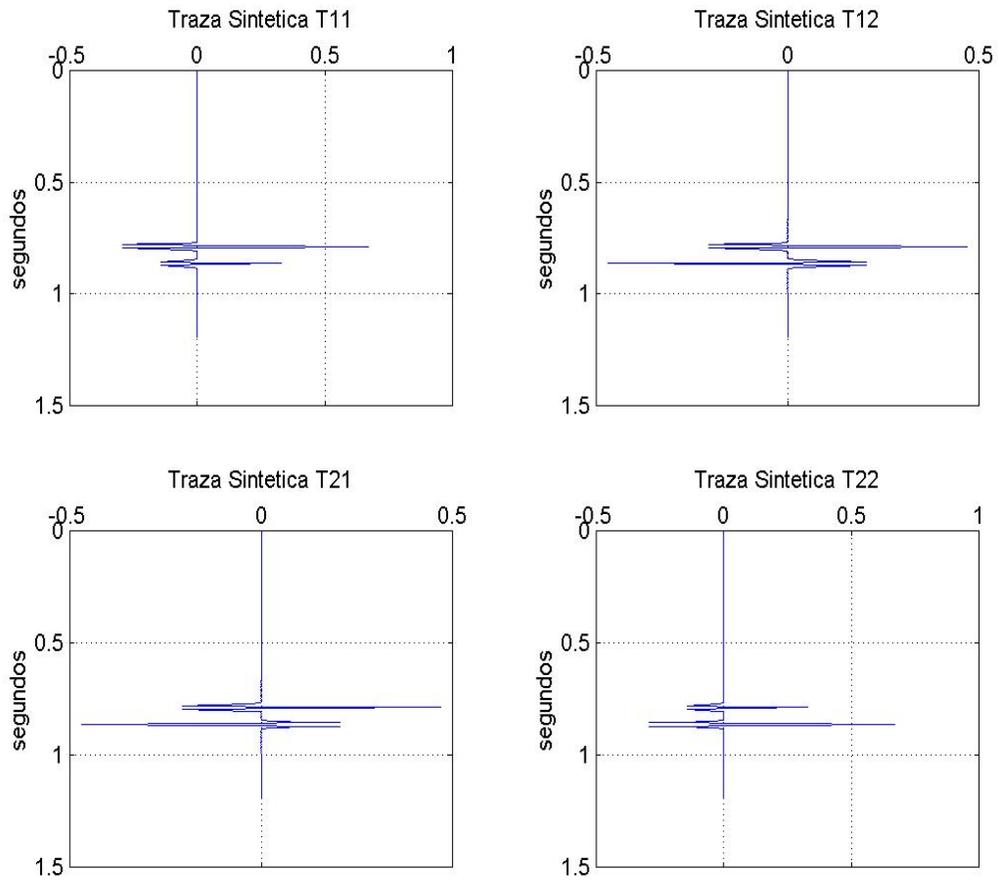
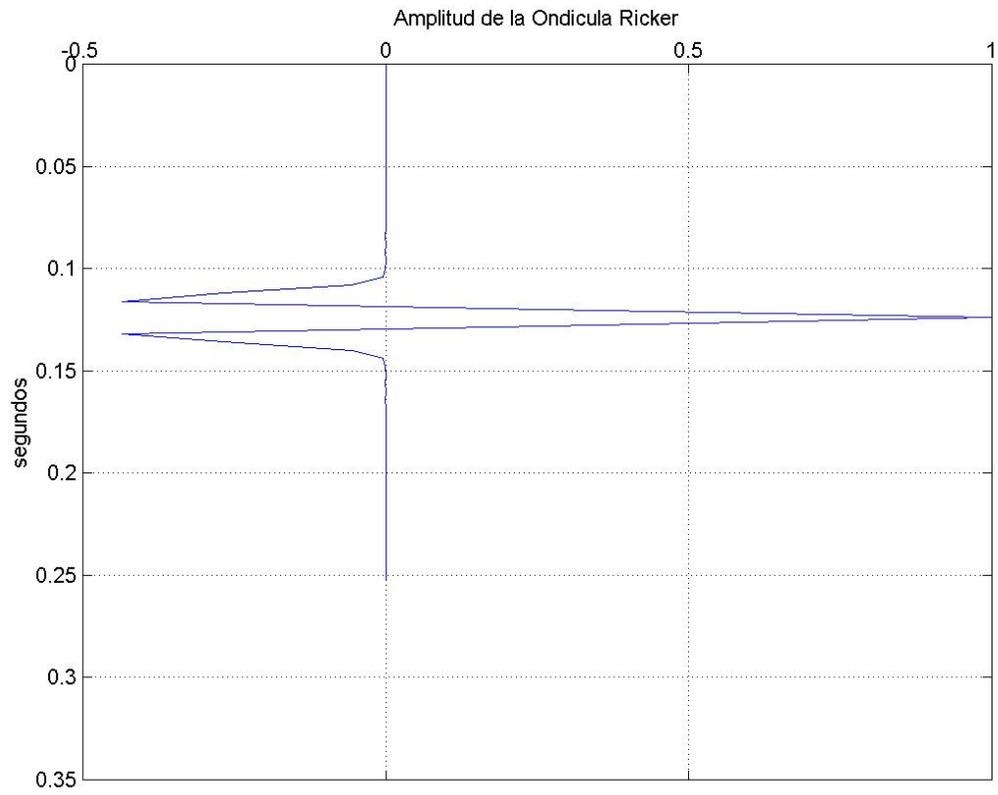


Figura (10): Ondicula Ricker de 45 Hz, de frecuencia central.



3.4.2.- Técnica rotación de Alford (1986): La siguiente explicación, corresponde a la técnica de rotación de sismogramas descrita inicialmente por Alford (1986). En el presente trabajo, se usará una generalización de la “Técnica de Alford” descrita por Tichelaar et al. (1997). Allí, los autores describen una técnica de superposición y rotación de fuentes y receptores; en la misma, se disponen de cuatro señales grabadas, correspondientes a dos tipos de fuente de Ondas S, y de receptores capaces de medir las componentes horizontales (T_{11} , T_{21} , y T_{21} Y T_{22}), para una gama diversa de distancias fuente – receptor, incluso el método allí descrito es aplicado en un marco de sísmica de pozo. No obstante, sin pérdida de la generalidad del caso allí presentado, en el presente trabajo se usará el modelo simple ya descrito en el apartado anterior.

El plano de polarización (plano horizontal) está representado por la base ortogonal horizontal $\hat{e} = \{ \hat{e}_1, \hat{e}_2 \}$ donde \hat{e}_1 es paralelo a la fuente dipolar de ondas SV y \hat{e}_2 es paralela a la fuente dipolar de ondas SH. Este plano también puede ser representado por la base ortogonal primada $\hat{e}' = \{ \hat{e}'_1, \hat{e}'_2 \}$; donde \hat{e}'_1 , \hat{e}'_2 son paralelas a las orientaciones de los modos rápido y lento, respectivamente (Ver Figura 11). La base primada se encuentra a través de una rotación antihoraria de la base no primada.

$$\begin{aligned} \exists \therefore \begin{pmatrix} \hat{e}'_1 \\ \hat{e}'_2 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \phi & \text{sen} \phi \\ -\text{sen} \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \end{pmatrix}. \\ \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \phi & -\text{sen} \phi \\ \text{sen} \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}'_1 \\ \hat{e}'_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

La fuentes dipolares están definidas como:

$F_x(t) = f_x s(t) \hat{e}_1$ y la inferior es $F_y(t) = f_y s(t) \hat{e}_2$, donde f_x y f_y son las potencias de las fuentes. En general, la fuente función del tiempo, $s(t)$, no pueden ser iguales tanto en fase como en amplitud. Sin embargo, para efectos de simplicidad, se

asume que ambas son idénticas para las dos fuentes. Así mismo, en la figura (12), el campo desplazamiento U descrito inicialmente por la base $\{\hat{e}\}$, puede ser hallado en términos de la base primada $\{\hat{e}'\}$ y escrito como sigue:

$$U(Fx, t) \equiv fx[g_1(t) \cos \phi \hat{e}'_1 - g_2(t) \text{sen} \phi \hat{e}'_2],$$

$$U(Fy, t) \equiv fy[g_1(t) \text{sen} \phi \hat{e}'_1 + g_2(t) \cos \phi \hat{e}'_2]. \quad (3.40)$$

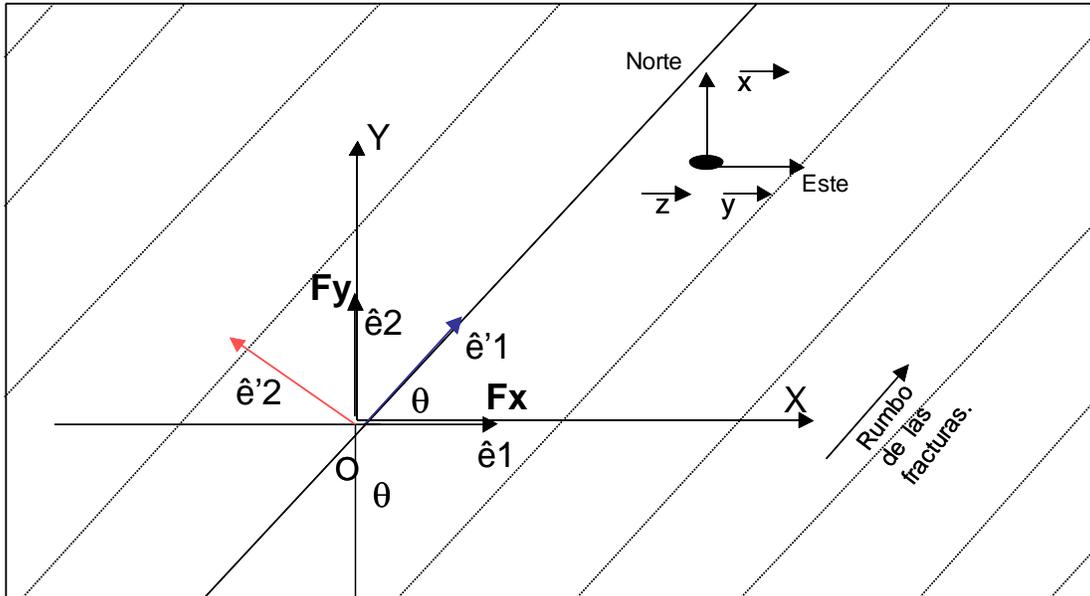
Donde las funciones canónicas g_1 y g_2 , de acuerdo a Tichelaar y Hatchell (1997) son las respuestas de los desplazamientos en las direcciones \hat{e}'_1 y \hat{e}'_2 respectivamente. Estas contienen todo lo relacionado con la fuente $\langle S(t) \rangle$, la propagación de las ondas S y la respuesta de los receptores. Para hallar, explícitamente, los campos desplazamiento debido a la fuente F_x (U_{xx} y U_{yx}), y los correspondientes a la fuente F_y (U_{yy} y U_{xy}), se sustituyen los valores de la base primada $\{\hat{e}'\}$, en los términos respectivos de la ecuación (3.40), lo cual puede reproducirse con la siguiente formulación matricial:

$$U = R G R^T F \quad \exists \quad \hat{G} = R^T U \hat{F}^{-1} R$$

$$U(t) = \begin{bmatrix} s_{XX} & s_{XY} \\ s_{YX} & s_{YY} \end{bmatrix}, \quad R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\text{sen} \phi \\ \text{sen} \phi & \cos \phi \end{bmatrix}, \quad R^T = \begin{bmatrix} \cos \phi & \text{sen} \phi \\ -\text{sen} \phi & \cos \phi \end{bmatrix},$$

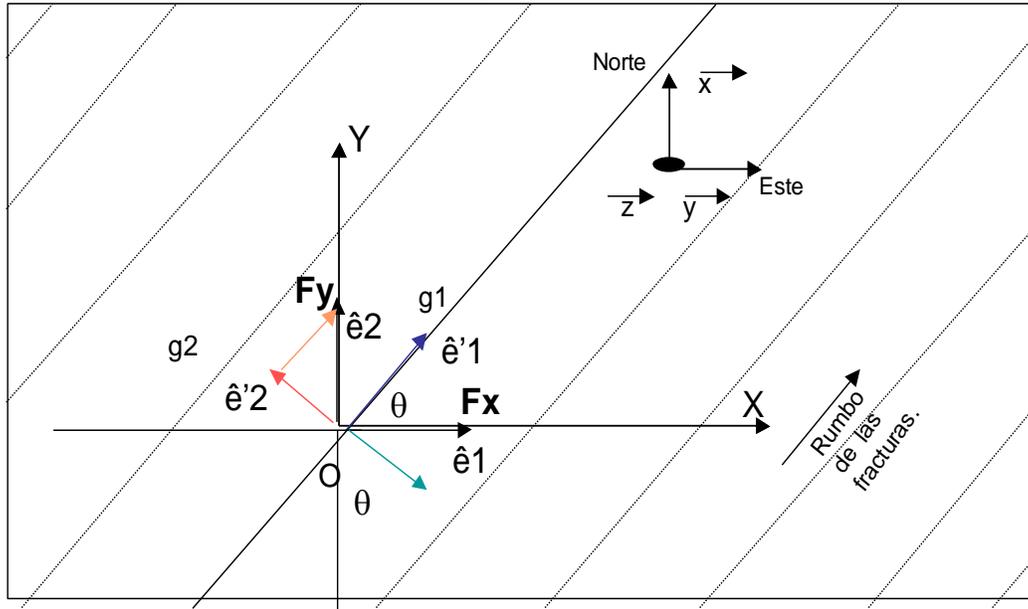
$$G(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) & 0 \\ 0 & g_2(t) \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_x & 0 \\ 0 & f_y \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Figura 11: Bases utilizadas para definir el plano horizontal (Técnica de Alford para arreglo de 4-Componentes en los receptores: Tichelaar y Hatchell, 1997).



Vector Base $\hat{e}'1$: dirección del vector polarización de la onda S rápida (OS_{\parallel} o $S1$).
 Vector Base $\hat{e}'2$: dirección del vector polarización de la onda S lenta (OS_{\perp} o $S2$).
 Vector Base $\hat{e}1$ = dirección de la Fuente paralela al eje X (SV o $F_X = f_x s(t) \hat{e}1$).
 Vector Base $\hat{e}2$ = dirección de la Fuente paralela al eje Y (SH o $F_Y = f_y s(t) \hat{e}2$).
 θ : ángulo de las fracturas verticales con respecto al Este ("rumbo" de las fracturas). El ángulo de rotación (antihoraria) de la base $[\hat{e}']$ para hallar la base $[\hat{e}]$.

Figura 12: Descomposición de las Fuentes de cizalla F_X y F_Y en la Base Primada (Técnica de Alford para arreglo de 4-Componentes en los receptores: Tichelaar y Hatchell, 1997).



- Componente de la Fuente F_X en la dirección del Vector Base \hat{e}'_1 .
 - Componente de la Fuente F_X en la dirección del Vector Base \hat{e}'_2 .
 - Componente de la Fuente F_Y en la dirección del Vector Base \hat{e}'_1 .
 - Componente de la Fuente F_Y en la dirección del Vector Base \hat{e}'_2 .
- θ : ángulo de las fracturas verticales con respecto al Este ("rumbo" de las fracturas). El ángulo de rotación (antihoraria) de la base $[\hat{e}]$ para hallar la base $[\hat{e}']$.

Para el caso donde las potencias de las dos fuentes son iguales (i.e., $f_x = f_y = 1$), se obtienen las expresiones de Alford (1986). Asumiendo que el medio es homogéneo,

se puede enunciar la siguiente relación de reciprocidad, con respecto a los campos desplazamiento ubicados perpendicular a la orientación de la fuente:

$$f_x U_{xy} \equiv f_y U_{yx} \Rightarrow \therefore f_x U_{xy} - f_y U_{yx} \cong 0.$$

Entonces, se puede obtener un aproximado de la potencia relativa de las fuentes, al comparar las formas de onda U_{xy} y U_{yx} . Así pues, siguiendo el método de Tichelaar y Hatchell, se deben proyectar las respuestas U_{yx} y U_{xy} , sobre su promedio $\langle U \rangle$. De tal manera que dichas potencias se pueden escribir como:

$$f_x = \frac{\sum_i \sum_{\text{dist.fuente-receptor}} \langle U(t_i) \rangle U_{YX}(t_i)}{\sum_i \sum_{\text{dist.fuente-receptor}} \langle U(t_i) \rangle^2}$$

$$f_y = \frac{\sum_i \sum_{\text{dist.fuente-receptor}} \langle U(t_i) \rangle U_{XY}(t_i)}{\sum_i \sum_{\text{dist.fuente-receptor}} \langle U(t_i) \rangle^2} \quad (3.42)$$

La suma es sobre todas las muestras en tiempo t_i , y sobre todas las distancias fuente-receptor de interés. Los efectos de propagación son eliminados al usar datos de igual distancia fuente-receptor. La potencia de las fuentes son normalizadas a la siguiente relación: $f_x + f_y = 2$.

Una vez conocidas las potencias f_x y f_y , se construye la matriz \hat{F} para cada par de disparos. Donde el símbolo $\hat{}$ indica que la matriz F es estimada de los datos. La sustitución de $F = \hat{F}$ en la ecuación () conduce a:

$$U \hat{F}^{-1} = RGR^T, \quad (3.43)$$

donde las incógnitas están en el lado derecho de la ecuación, y los datos ya han sido ajustados por el verdadero valor de la potencia de las fuentes. Ahora bien, deben estimarse las mejores funciones canónicas \hat{G} , para un determinado ángulo de rotación ϕ , tal que se diagonalice dicha matriz.

$$\hat{G}(t_i) = \mathbf{R}^T(\phi) \mathbf{U}(t_i) \hat{F}^{-1} \mathbf{R}(\phi). \quad (3.44)$$

El lado derecho de esta ecuación consta de dos operaciones: 1) una superposición de dos fuentes dipolares $\hat{F}^{-1} \mathbf{R}(\phi)$; y 2) una rotación de receptores $\mathbf{R}^T(\phi) \mathbf{U}(t_i)$. En el caso general de varios receptores y datos reales, como consecuencia de la dispersión de las ondas S, las funciones canónicas en \hat{G} , y los datos en U son diferentes para cada distancia fuente-receptor.

Finalmente, existe una medida que relaciona la energía presente en las trazas perteneciente a los elementos fuera de la diagonal de la Matriz U o G, como función del ángulo de rotación $\langle \epsilon(\phi) \rangle$. Esta tiene como fin, estimar el mejor ángulo de rotación que determine la orientación de los modos puros de las Ondas S. Por lo tanto, se busca el menor valor de minimice o elimine dichos elementos no diagonales, por lo tanto, esta medida de la energía es escrita como:

$$\epsilon(\phi) = \frac{\sum_i \sum_{\text{dist.fuente-receptor}} [\hat{G}_{12}^2(t_i) + \hat{G}_{21}^2(t_i)]}{\sum_i \sum_{\text{dist.fuente-receptor}} [\hat{G}_{11}^2(t_i) + \hat{G}_{12}^2(t_i) + \hat{G}_{21}^2(t_i) + \hat{G}_{22}^2(t_i)]}. \quad (3.45)$$

A las Trazas Sintéticas obtenidas para el modelo simple de una capa, T11, T21, T12, T22, se le aplicó un programa de rotación de Sismogramas (ver sección de Apéndices) de acuerdo a la técnica de Tichelar y Hatchell descrita anteriormente. A continuación se presentan las siguientes figuras:

Figura (13): Energía calculada para una rotación antihoraria de 360°.

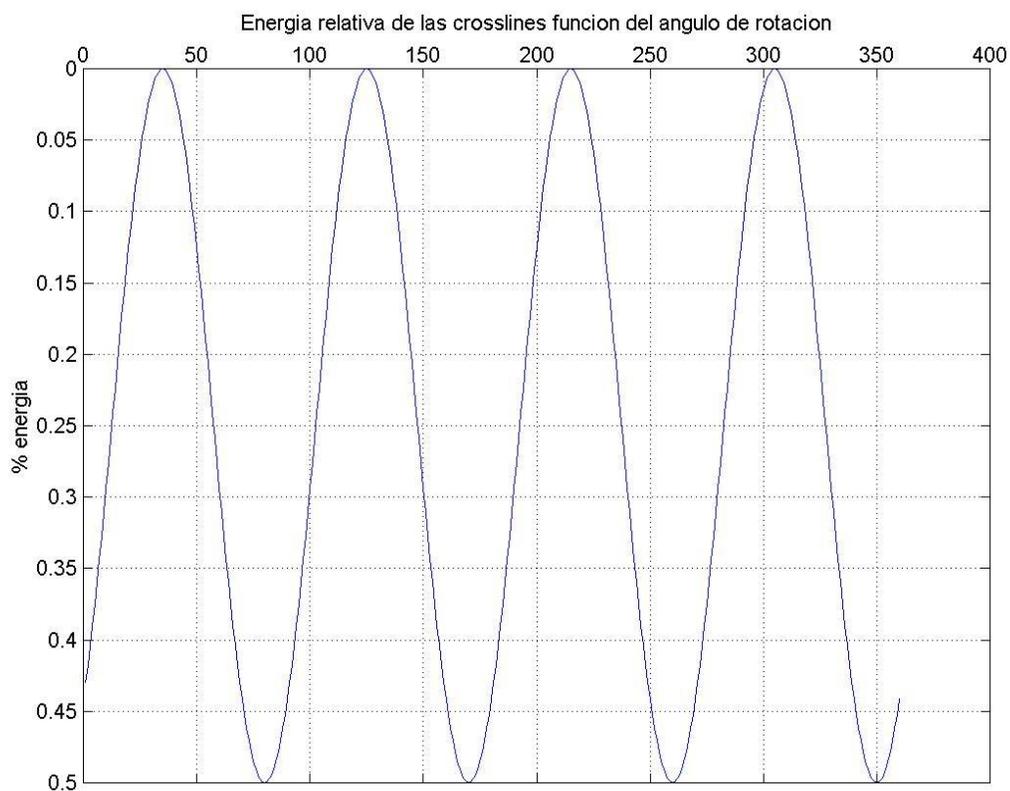


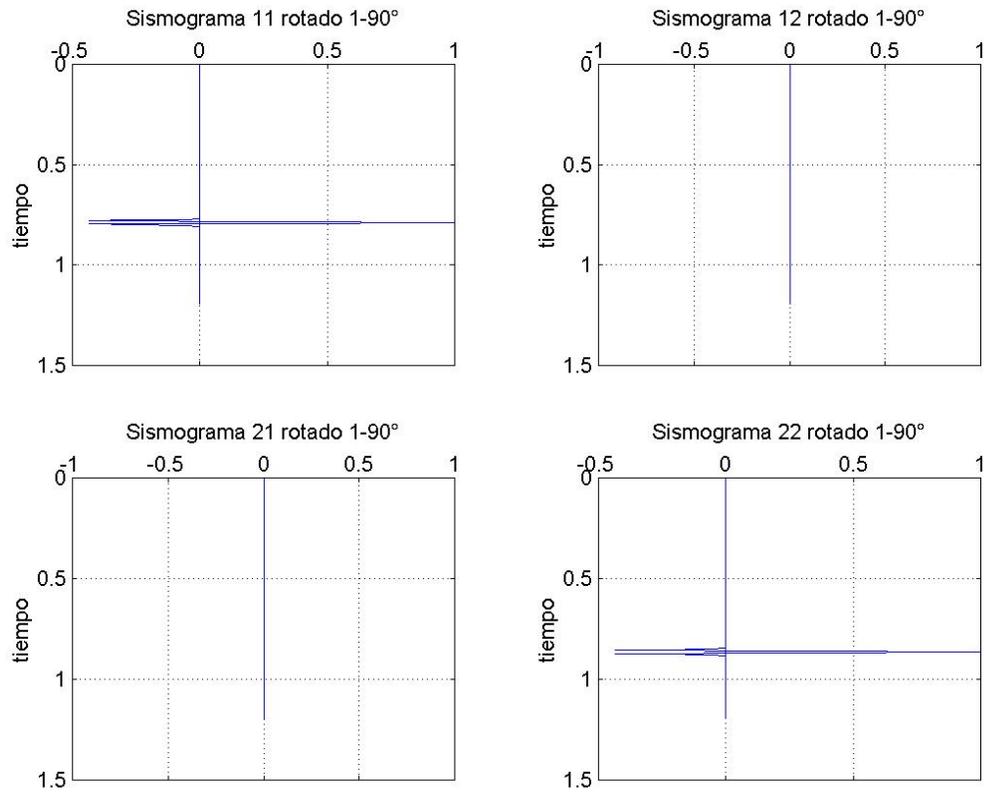
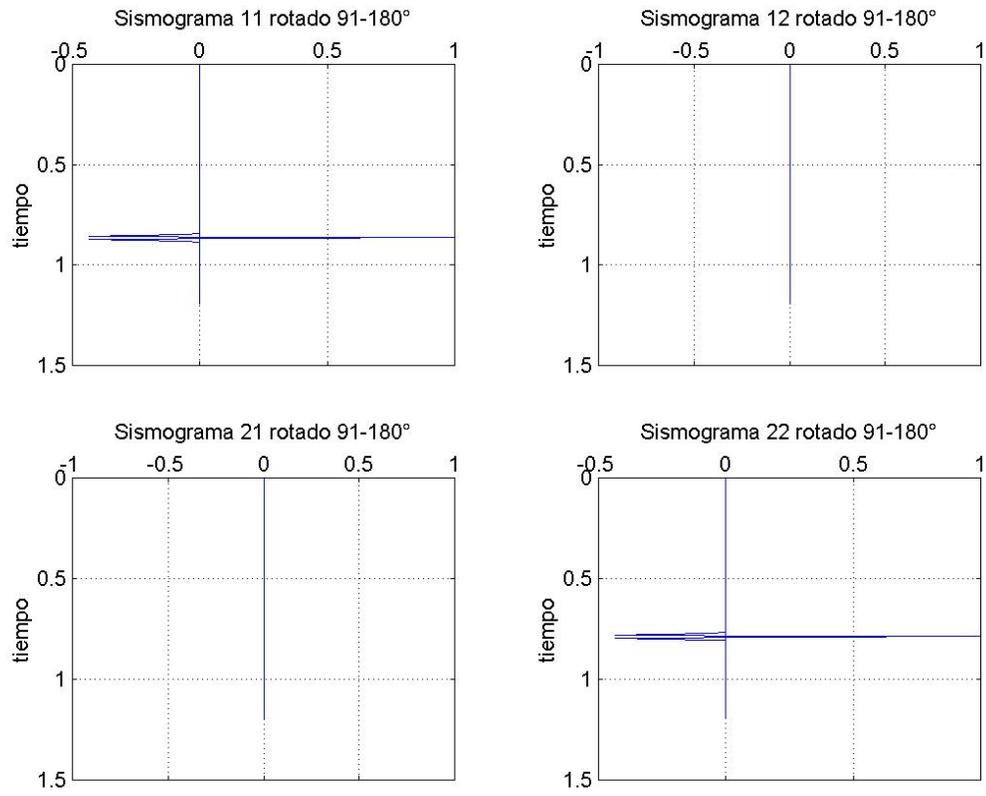
Figura (14): Las cuatro trazas rotadas para el ángulo $\phi < 90^\circ$.

Figura (15): Las cuatro trazas rotadas para el ángulo $90 < \phi < 180$.

SECCIÓN IV

USO DE LOS COEFICIENTES DE REFLEXIÓN EN LA DETERMINACIÓN DE PROPIEDADES DE LA FRACTURA.

En el transcurso de la presente sección, presentaremos resultados que han sido producto de años de investigación de Schoenberg et al (1992, 1995, 1997, 2000). Dichos autores han desarrollado un técnica de modelado de medios fracturados (equivalente) que es una de las más usadas a nivel mundial, según lo presentado en las Sección II. Además, los mismos han hecho aportes importantes en la simplificación del álgebra correspondiente al cálculo involucrado en los coeficientes de Transmisión y Reflexión de medios anisótropos, con simetrías incluso monoclinicas. El autor del presente trabajo de grado, reconoce la autoría intelectual de los mismos y por ende este preámbulo de la sección.

4.1.- Matrices de Impedancia Acústica en medios anisótropos.

Para la conveniencia de los lectores, las matrices X e Y son dadas para un medio anisótropo, con simetría especular, como las dadas por Schoenberg & Protazio (1992) para ondas 2-D y 3-D. El procedimiento para encontrarlas es en sentido recto y consta de los siguientes pasos para tipos de ondas P, S o T.

Primero, para una lentitud horizontal dada (o lentitud a lo largo de la interfase), se encuentra la lentitud vertical de la relación de dispersión. Entonces, el autovector es calculado de la ecuación de Christoffel para este vector de lentitud, y los correspondientes valores de deformación son calculados finalmente. Para un tipo de onda dado de amplitud unitaria, la columna correspondiente de X es $b_X = [v_1, v_2, \sigma_3]^T$ y la columna correspondiente de Y es $b_Y = [\sigma_5, \sigma_4, v_3]^T$.

Para ondas 3-D en medios anisótropos con simetría especular, este procedimiento junto a una elección consistente de la dirección del autovector y la normalización de la amplitud, conduce a las siguientes submatrices de impedancia donde p_1 y p_2 son las componentes de la lentitud horizontal. Los valores de los subíndices P, S y T usados con p_3 son los tres valores de la componente normal de la lentitud, y $e_v = [e_{v1}, e_{v2}, e_{v3}]^T$, $v = P, S, T$; es el correspondiente vector polarización para cada tipo de onda.

$$\begin{aligned}
 X &= \begin{bmatrix} e_{1P} & e_{1S} & e_{1T} \\ e_{2P} & e_{2S} & e_{2T} \\ -\{(c_{13}e_{1p} + c_{36}e_{2p})p_1 \\ + (c_{23}e_{2p} + c_{36}e_{1p})p_2 \\ + c_{33}e_{3p}p_{3P}\} & -\{(c_{13}e_{1s} + c_{36}e_{2s})p_1 \\ + (c_{23}e_{2s} + c_{36}e_{1s})p_2 \\ + c_{33}e_{3s}p_{3S}\} & -\{(c_{13}e_{1T} + c_{36}e_{2T})p_1 \\ + (c_{23}e_{2T} + c_{36}e_{1T})p_2 \\ + c_{33}e_{3T}p_{3T}\} \end{bmatrix} \\
 Y &= \begin{bmatrix} -\{(c_{55}p_1 + c_{45}p_2)e_{3P} \\ + (c_{55}e_{1p} + c_{45}e_{2p})p_{3P}\} & -\{(c_{55}p_1 + c_{45}p_2)e_{3S} \\ + (c_{55}e_{1s} + c_{45}e_{2s})p_{3S}\} & -\{(c_{55}p_1 + c_{45}p_2)e_{3T} \\ + (c_{55}e_{1T} + c_{45}e_{2T})p_{3T}\} \\ -\{(c_{45}p_1 + c_{44}p_2)e_{3P} \\ + (c_{45}e_{1p} + c_{44}e_{2p})p_{3P}\} & -\{(c_{45}p_1 + c_{44}p_2)e_{3S} \\ + (c_{45}e_{1s} + c_{44}e_{2s})p_{3S}\} & -\{(c_{45}p_1 + c_{44}p_2)e_{3T} \\ + (c_{45}e_{1T} + c_{44}e_{2T})p_{3T}\} \\ e_{3P} & e_{3S} & e_{3T} \end{bmatrix} \\
 & \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

Las expresiones para un medio isotrópico pueden entonces ser encontradas usando la simplificaciones implicadas por la simetría. La razón para incluir medios isotrópicos

3-D es porque una fractura para la cual Z_T no es diagonal acoplará todos los tres modos, aún en medios isotrópicos. Para este caso las lentitudes verticales son dadas por:

$$q_{3P} = \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - p^2}, \quad q_{3S} = \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - p^2}, \quad (4.2)$$

donde $p^2 = p_1^2 + p_2^2$, es la lentitud horizontal, o lentitud a lo largo de la interfase. Los correspondientes vectores polarización normalizados por amplitud son dados de ahora en adelante por:

$$e_P = \alpha \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_{3P} \end{bmatrix}, \quad e_S = \beta \begin{bmatrix} \frac{p_1 p_{3S}}{p} \\ \frac{p_2 p_{3S}}{p} \\ p \\ -p \end{bmatrix}, \quad e_T = \frac{1}{p} \begin{bmatrix} -p_2 \\ p_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.3).$$

Usando esto en la ecuación (4.1), se encuentran las matrices de impedancia de manera explícitas, para un medio isotrópico:

$$X = \begin{bmatrix} \alpha p_1 & \frac{\beta p_1 p_{3S}}{p} & \frac{-p_2}{p} \\ \alpha p_2 & \frac{\beta p_2 p_{3S}}{p} & \frac{p_1}{p} \\ -\rho \alpha \Gamma & 2\rho \beta^3 p p_{3S} & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} -2\rho\alpha\beta^2 p_1 p_{3P} & \frac{-\rho\beta\Gamma p_1}{p} & \frac{\rho\beta^2 p_2 p_{3S}}{p} \\ -2\rho\alpha\beta^2 p_2 p_{3P} & \frac{-\rho\beta\Gamma p_2}{p} & -\frac{\rho\beta^2 p_1 p_{3S}}{p} \\ \alpha p_{3P} & -\beta p & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

donde $\Gamma = 1 - 2\beta^2 p^2$.

Cuando la anisotropía es tal que las ondas son polarizadas en el plano de propagación, ondas del plano tangencial denotadas como qP o qS, o están perpendiculares dicho plano, ondas del plano cruzado y las cuales son ondas de cizalla pura; todas las submatrices relacionadas a las ondas polarizadas al plano tangencial son 2x2 (para las ondas del plano cruzado, ellas son 1x1, el cual es el caso mucho menos interesante de la propagación escalar de la onda.). Para las ondas del plano tangencial, asumiendo que el plano de propagación es el X_1X_3 , v_2 y σ_4 pueden ser eliminados de X e Y, dando:

$$X = \begin{bmatrix} e_{1P} & e_{1S} \\ -(c_{13}e_{1P}p_1 + c_{33}e_{3P}p_{3P}) & -(c_{13}e_{1S}p_1 + c_{33}e_{3S}p_{3S}) \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} -c_{55}(e_{3P}p_1 + e_{1P}p_{3P}) & -c_{55}(e_{3S}p_1 + e_{1S}p_{3S}) \\ e_{3P} & e_{3S} \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

Cuando el medio es isotrópico, con $p = p_1$, las submatrices de impedancia se reducen a aquellas deducidas en el capítulo.

4.2.- Coeficientes de Transmisión y Reflexión en medios anisótropos.

Shoenberg & Protazio (1992), describen un esquema para el calculo de los coeficientes de transmisión y reflexión de una onda plana que incide sobre una interfase plana entre dos semiespacios anisótropos, a lo sumo monoclinicos. El problema anisotrópico general requiere resolver seis ecuaciones con seis incógnitas, con el fin de determinar las velocidades ó lentitudes de fase y los correspondientes vectores propios (direcciones principales), los cuales serán usados en el calculo de las matrices de impedancia.

Schoenberg & Protazio (op cit.) muestran que este problema es simplificado grandemente cuando ambos medios son al menos monoclinicos¹⁴, cada uno con su plano de simetría paralelo a la interfase. Para el caso de una interfase horizontal, esta propiedad puede ser llamada simetría especular (“especular”). Entonces, para una lentitud dada a lo largo de la interfase, los coeficientes de transmisión y reflexión podrían ser escritos en términos de un par de matrices de impedancia (ambas 3x3) X e Y para cada medio. Estas son evaluadas al resolver la ecuación vi-cúbica, proveniente de la ecuación de Christoffel, para tres valores autovalores independientes (los cuadrados de las componentes normales de la lentitud) en vez de seis, con sus respectivos vectores polarización, para cada medio.

Entonces, para un medio dado, las matrices X e Y (dadas por la ecuación (4.1) para la anisotropía 3-D, la ecuación (4.4) para Isotropía 3-D, la ecuación (4.5) para anisotropía 2-D, y la ecuación (4.40) para Isotropía 2-D, son matrices funciones de la lentitud horizontal, los módulos elásticos, y la densidad. Estas matrices relacionan las variables físicas velocidad y esfuerzo, las cuales están involucradas en la formulación

¹⁴ En elasticidad, esto es equivalente a tener un plano espejo de simetría elástica.

de las condiciones de la interfase, con las amplitudes de las ondas planas que viajan hacia abajo en el medio, i.e., ellas son definidas como:

$$\mathbf{b}_X(x_3) = \mathbf{X} \Lambda(x_3) \mathbf{d},$$

$$\mathbf{b}_Y(x_3) = \mathbf{Y} \Lambda(x_3) \mathbf{d}, \quad (4.6)$$

donde, para la anisotropía 3-D:

$\mathbf{b}_X = [v_1, v_2, \sigma_3]^T$, $\mathbf{b}_Y = [\sigma_5, \sigma_4, v_3]^T$, y donde \mathbf{d} es el vector de las amplitudes de la velocidad de partícula de las posibles ondas que viajan hacia abajo (propagándose en la dirección $+X_3$).

$$\text{Además, } \Lambda(x_3) = \begin{bmatrix} \exp(i\omega p_{3P} x_3) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(i\omega p_{3S} x_3) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(i\omega p_{3T} x_3) \end{bmatrix},$$

con p_{3p} , p_{3s} , p_{3t} siendo las componentes normales de la lentitud para las posibles ondas que viajan hacia abajo una vez dada la lentitud horizontal. La potencia de este enfoque viene del hecho que, para medios monoclinicos, si \mathbf{u} es el vector de las amplitudes de las posibles ondas que viajan hacia arriba, entonces \mathbf{X} e \mathbf{Y} relacionan a \mathbf{u} con sus esfuerzos y velocidades como sigue:

$$\mathbf{b}_X(x_3) = \mathbf{X} \Lambda(x_3) \mathbf{u},$$

$$\mathbf{b}_Y(x_3) = -\mathbf{Y} \Lambda(x_3) \mathbf{u}. \quad (4.7)$$

Las condiciones de interfase unida en un límite planar perpendicular al eje x_3 son dadas por el hecho de que b_x y b_y sean continuas. En el medio superior (no primado) ocupado por $x_3 > 0$, existen ondas incidentes hacia abajo con el vector de amplitud I_n y las ondas reflejadas que viajan hacia arriba con el vector amplitud $r=R_0 I_n$. En el medio de abajo (primado) ocupando los $x_3 < 0$, existen ondas transmitidas que viajan hacia abajo con amplitud $t=T_0 I_n$; donde el subíndice 0 indica que el deslizamiento es no lineal.

Entonces, para los dos semiespacios elásticos en contacto soldado, las ecuaciones (4.6) y (4.7), y la continuidad de b_X y b_Y en $x_3=0$ (en la cual $\Lambda = I$, la matriz identidad) da:

$$\begin{bmatrix} X & X \\ Y & -Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ R_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X' & X' \\ Y' & -Y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.8).$$

Resultando esto del hecho que I_n puede ser factorizado afuera de ambos lados y que la ecuación permanecerá para todo I_n . Las matrices de los coeficientes de Transmisión y Reflexión son matrices cuadradas de 3×3 , con los dobles subíndices P,S y T denotando las posibles ondas P y los dos tipos de ondas S en medios elásticos monoclinicos (simétricos con simetría especular). El primer índice denota el tipo de onda transmitida o reflejada, y el segundo denota el tipo de onda incidente – esta notación mantiene la convención de índices para matrices y es opuesta a la convención de Aki y Richards (1980).

La ecuación (4.8) puede fácilmente ser resuelta para T y R como sigue. Primero, multiplique por la izquierda por $[X^{-1}, Y^{-1}]$ para obtener T_0 ; entonces, multiplique por la izquierda a (4.8) en este caso por $[X^{-1}, -Y^{-1}]$, para obtener a R_0 . Este procedimiento conduce a:

$$T_0 = 2 [X^{-1}X' + Y^{-1}Y']^{-1},$$

$$R_0 = [X^{-1}X' - Y^{-1}Y'] [X^{-1}X' + Y^{-1}Y']^{-1}, \quad (4.9)$$

Una solución válida para todas las lentitudes horizontales no críticas (en el medio incidente). El hecho de que las lentitudes sean no críticas asegura que X e Y sean no singulares. Note que la singularidad de $[X^{-1}X' + Y^{-1}Y']$ es la condición para una propagación de ondas hacia debajo de la interfase entre los dos medios. Cuando esta lentitud, que causa que el determinante de $[X^{-1}X' + Y^{-1}Y']$ sea cero, es real (la cual puede ocurrir solamente para una lentitud que es posterior a la crítica para todas las ondas en el problema, la onda resultante es una onda Stoneley generalizada para medios anisótropos.

Ahora, siguiendo en conjunto el procedimiento descrito por Coates & Schoenberg (1995) en su Apéndice A, la condición de interfase de deslizamiento lineal (i.e., donde la discontinuidad del desplazamiento está linealmente relacionada a la tracción del esfuerzo) es dada por:

$$U_1|_{0+} = U_1|_{0-} + Z_{T1} \sigma_5 + Z_{12} \sigma_4,$$

$$U_2|_{0+} = U_2|_{0-} + Z_{12} \sigma_5 + Z_{T2} \sigma_4,$$

$$\sigma_3|_{0+} = \sigma_3|_{0-},$$

$$\sigma_5|_{0+} = \sigma_5|_{0-}, \quad (4.10)$$

$$\sigma_4|_{0+} = \sigma_4|_{0-},$$

$$U_3|_{0+} = U_3|_{0-} + Z_N \sigma_3,$$

para una interfase de deslizamiento lineal simétrica de arriba hacia abajo, el caso especial 1 es un sistema de coordenadas en el cual Z_T no es necesariamente diagonal.)

Ahora, derivando estas condiciones de la interfase parcialmente con respecto al tiempo, para obtener las condiciones sobre la velocidad de partícula, en el dominio de la frecuencia se tiene:

$$\begin{aligned}
 v_1|_{0+} &= v_1|_{0-} - i\omega (Z_{T1} \sigma_5 + Z_{12} \sigma_4), \\
 v_2|_{0+} &= v_2|_{0-} - i\omega (Z_{12} \sigma_5 + Z_{T2} \sigma_4), \\
 \sigma_3|_{0+} &= \sigma_3|_{0-}, \\
 \sigma_5|_{0+} &= \sigma_5|_{0-}, \\
 \sigma_4|_{0+} &= \sigma_4|_{0-}, \\
 v_3|_{0+} &= v_3|_{0-} - i\omega Z_N \sigma_3,
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

donde se ha definido la transformada de Fourier tal que $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$. Así pues,

tomando la derivada parcial con respecto al tiempo $U_j \rightarrow -i\omega U_j \equiv v_j$ y $\sigma_j \rightarrow -i\omega \sigma_j$. En forma de submatrices, las condiciones de la interfase (4.11) pueden ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}_{0+} = \begin{bmatrix} I & -i\omega Z_T \\ -i\omega Z_N & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}_{0-} \tag{4.12}$$

Además, notando que:

$$\begin{bmatrix} I & -i\omega Z_T \\ -i\omega Z_N & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & i\omega Z_T \\ i\omega Z_N & I \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

ya que $Z_T Z_N = Z_N Z_T = 0$, y que b_x y b_y ambos arriba y debajo de la interfase en términos de R y T (ahora sin subíndice 0, significando que el deslizamiento lineal está presente), las condiciones de la interfase de deslizamiento lineal entre dos (2) semiespacios diferentes pueden ser escritas:

$$\begin{bmatrix} X & X \\ Y & -Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & i\omega Z_T \\ i\omega Z_N & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' & X' \\ Y' & -Y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

Resolviendo este sistema de la misma manera que la ecuación (4.8), una vez resuelta esta conduce a las siguientes soluciones:

$$T \equiv T_0 [I + (i\omega/2) (X^{-1} Z_T Y' + Y^{-1} Z_N X')] T_0^{-1},$$

$$R \equiv [R_0 + (i\omega/2) (X^{-1} Z_T Y' - Y^{-1} Z_N X')] T_0$$

$$\times [I + (i\omega/2) (X^{-1} Z_T Y' + Y^{-1} Z_N X')] T_0^{-1}. \quad (4.15)$$

Cuando los medios primado y no primado son el mismo ($X=X'$), entonces $T_0 \equiv I$ y $R_0 \equiv 0$. El elimina las primas, genera T y R para una fractura empotrada en otro medio homogéneo; así de (4.15):

$$T \equiv [I + (i\omega/2) (X^{-1} Z_T Y + Y^{-1} Z_N X)]^{-1},$$

$$R \equiv (i\omega/2) (X^{-1} Z_T Y - Y^{-1} Z_N X)$$

$$\times [I + (i\omega/2) (X^{-1} Z_T Y + Y^{-1} Z_N X)]^{-1}. \quad (4.16)$$

Para bajas frecuencias, i.e., frecuencias para las cuales $\|(i\omega/2) (X^{-1} Z_T Y' + Y^{-1} Z_N X')\| \ll 1$; las aproximaciones para T y R son dadas por:

$$T \approx I - (i\omega/2) (X^{-1} Z_T Y + Y^{-1} Z_N X),$$

$$R \approx (i\omega/2) (X^{-1} Z_T Y - Y^{-1} Z_N X), \quad (4.17)$$

Note que debido a que $Z_T Z_N = Z_N Z_T = 0$; los productos de los términos que aparecen en la ecuación (4.16) y (4.17) satisfacen:

$$(X^{-1} Z_T Y) (Y^{-1} Z_N X) = (Y^{-1} Z_N X) (X^{-1} Z_T Y) \equiv 0, \quad (4.18).$$

Como un aparte, se debe puntualizar aquí que, de la ecuación (4.16), la condición del $\det [I + (i\omega/2) (X^{-1} Z_T Y + Y^{-1} Z_N X)] = 0$ (4.19),

es la relación de dispersión sobre ω y la lentitud horizontal (especificada por p_1 y p_2) para ondas de la interfase que se propagan a lo largo de la fractura.

4.3.- Interfases de deslizamiento lineal.

Como fue discutido anteriormente, una fractura o falla puede ser modelada como una interfase de deslizamiento, la cual es una superficie a través de la cual se permite que el deslizamiento sea continuo, i.e., el se permite el deslizamiento sobre la superficie. Una interfase de deslizamiento lineal tiene el requerimiento adicional de que la discontinuidad del desplazamiento a través de la interfase, Δu , es linealmente relacionada a la tracción del esfuerzo que actúa sobre la superficie, $t_n = \sigma n$ (donde σ es el tensor de esfuerzos y n es el vector local de la normal a la interfase), así que se puede escribir:

$$\Delta u = Z t_n, \quad (4.20)$$

donde Z es la matriz de docilidad de la fractura. Para una interfase sin pérdida, las consideraciones de la energía implican que Z es real, simétrica y definitiva no negativa; las dimensiones de sus componentes son de longitud / esfuerzo. Asumiendo que el eje X_3 es la normal a la fractura, se tiene que:

$$t_n = \begin{bmatrix} \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_5 \\ \sigma_4 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

esta forma es escrita en los subíndices convencionales abreviados (e.g., Auld, 1990). Respecto a la forma de las componentes de Z , estas pueden ser escritas:

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{T1} & Z_{12} & Z_{N1} \\ Z_{12} & Z_{T2} & Z_{N2} \\ Z_{N1} & Z_{N2} & Z_N \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Hay dos casos especiales de interés particular:

El primer caso, es de fracturas simétricas de arriba hacia abajo, i.e., fracturas cuyo movimiento normal (de adentro hacia fuera) está desacoplado de su movimiento tangencial. Estas fracturas satisfacen que $Z_{N1} = Z_{N2} = 0$. Consecuentemente, Z puede ser expresada en una forma para la cual estos dos modos estan separados:

$$Z = Z_T + Z_N = \begin{bmatrix} Z_{T1} & Z_{12} & 0 \\ Z_{12} & Z_{T2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_N \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Para este caso y aquellos casos de más alta simetría, se cumple que $Z_T Z_N = Z_N Z_T = 0$. Además, note que siempre existe 2 ángulos, aparte de $\pi/2$, donde los elementos

fuera de la diagonal se desvanecen cuando las coordenadas son rotadas por alguno de estos dos ángulos alrededor de la normal de la fractura, aquí el eje X_3 . Así pues, sin pérdida de generalidad, la condición para una simetría especular es que Z pueda ser diagonalizada y que una fractura simétrica de arriba hacia abajo puede ser especificada por tres docilidades positivas y una orientación esta condición es probablemente el caso más general que necesita ser considerado para fracturas en la naturaleza. El empotrar una fractura simétrica de arriba hacia abajo en un medio monoclinico y el que dicha fractura sea perpendicular al eje espejo de simetría de dicho medio no distorsiona la simetría de arriba hacia abajo perteneciente al medio. Esta monoclicidad del medio de fondo es la clase de anisotropía elástica más general considerada en este artículo.

El segundo caso, es el de fracturas simétricas rotacionalmente, i.e., fracturas simétricas de arriba hacia abajo y cuyo comportamiento de deslizamiento tangencial es independiente de la dirección de la tracción tangencial aplicada. Este caso es, aparentemente, una suposición razonable para una fractura en un medio isótropo o para una fractura perpendicular al eje de simetría en un medio transversalmente isotrópico. En este caso, Z es diagonal, con $Z_{T1} = Z_{T2} = Z_T$. El comportamiento de la fractura es especificada por dos (2) docilidades positivas de la fractura, permitiendo escribir a Z como:

$$Z = Z_T + Z_N = \begin{bmatrix} Z_T & 0 & 0 \\ 0 & Z_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_N \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Una pregunta importante es cómo cuantificar una fractura para dar una apreciación intuitiva de la docilidad de la misma. Para simplificar las cosas, se considera una fractura simétrica rotacionalmente (caso 2) con docilidad tangencial Z_T y docilidad normal Z_N , empotrada en un medio isotrópico con una velocidad de onda P (α),

velocidad de onda S (β) y densidad (ρ). Físicamente, ya que la docilidad tiene dimensión de longitud / esfuerzo, un número particular dice poco. Para ayudar a clarificar su significado, se compara la fractura con una capa hipotética del medio isotrópico de fondo.

Para la fractura, un salto de Δu_1 a través de la fractura está relacionado al esfuerzo de cizalla σ_5 (σ_{13} en notación de dos subíndices), de la siguiente manera:

$$\Delta u_1 = Z_T \sigma_5 . \quad (4.25)$$

Mientras que para la capa, un salto de desplazamiento, desde el tope de la capa a la base de la misma, que sea de la misma magnitud y esté relacionado al mismo esfuerzo de cizalla requiere un espesor de la capa l_T que satisfaga:

$$\Delta u_1 = \frac{l_T}{\rho \beta^2} \sigma_5 . \quad (4.26)$$

donde $\sigma_5 = \mu \epsilon_1$ y $\mu = \rho \beta^2$.

Colocando que estas dos expresiones para Δu_1 sean iguales, da:

$$l_T = Z_T \rho \beta^2 . \quad (4.27)$$

el cual puede ser llamado el espesor tangencial equivalente del fondo de la fractura.

Similarmente, el salto de desplazamiento normal a través de la fractura es:

$$\Delta u_3 = Z_N \sigma_3 . \quad (4.28)$$

mientras que la diferencia del desplazamiento a través de una capa, asumiendo que la capa no está libre para expandirse o contraerse lateralmente, es:

$$\Delta u_3 = \frac{l_N}{\rho \alpha^2} \sigma_3. \quad (4.29)$$

Nuevamente, colocando que estas expresiones sean iguales, conduce a:

$$l_N = Z_N \rho \alpha^2. \quad (4.30)$$

el cual puede ser llamado el espesor normal equivalente del fondo de la fractura. Esto puede ser fácilmente generalizado a una fractura simétrica de arriba hacia abajo, en cuyo caso se asocian con Z_{Ti} dos espesores tangenciales equivalentes l_{Ti} , $i=1,2$.

Así pues, una interfase de deslizamiento lineal puede ser reemplazada por tres espesores dados del material en el que se empotra la fractura, dos tangenciales y uno normal, tomando en cuenta las respectivas docilidades. Estos espesores equivalentes son independientes de la frecuencia, así mismo, sus dimensiones son de longitud y esencialmente son propiedades estáticas de la fractura para saltos de deslizamientos muy pequeños. Estas longitudes son tales que un modelador puede relacionarlas y las dimensiones podrían estar en el rango de centímetros a cientos de metros. Por cierto, una fractura real tiene un ancho principal, medido en micrones para fracturas finísimas, y en decenas de metros para fallas gigantescas en la tierra. Por ello, para darle sentido al modelado de una fractura real o falla mediante una interfase de deslizamiento lineal, el espesor equivalente de la fractura o la falla debe ser de al menos un orden de magnitud más grande que su ancho principal real.

El efecto de una fractura o falla sobre las ondas sísmicas entra del producto de los espesores medios equivalentes con los correspondientes números de onda de la energía sísmica en el fondo, .i.e., $k_S = \frac{2\pi}{\lambda_S} = \frac{\omega}{\beta}$ para ondas S, y

$k_P = \frac{2\pi}{\lambda_P} = \frac{\omega}{\alpha}$ para ondas P. Así pues, asociados con una fractura simétrica

rotacionalmente en un medio isotrópico están dos números adimensionales análogos a Ka (número de onda por radio) para un dispersor esférico, el cual viene dado por el número de onda \times el espesor medio equivalente del fondo, o:

$$\Omega_T \equiv \frac{2\pi l_T}{\lambda_S} = \frac{\pi}{\lambda_S} l_T = \frac{\omega}{2\beta} Z_T \rho \beta^2 \equiv \frac{\omega Z_T \rho \beta}{2},$$

$$\Omega_N \equiv \frac{2\pi l_N}{\lambda_N} = \frac{\pi}{\lambda_N} l_N = \frac{\omega}{2\alpha} Z_N \rho \alpha^2 \equiv \frac{\omega Z_N \rho \alpha}{2}. \quad (4.31)$$

los cuales caracterizan la influencia de la fractura en su fondo para una frecuencia dada. La fractura será difícilmente visible para longitudes de ondas consideradas grandes comparadas al espesor equivalente de la fractura (pequeños valores de Ω), mientras que la fractura será altamente visible para cortas longitudes de ondas (grandes valores de Ω).

4.4.- Reflexión / transmisión en una interfase de deslizamiento lineal.

Shoenberg y Protazio (1992) describen un esquema para el cálculo de los coeficientes de reflexión y transmisión de la onda plana, en una interfase plana que se encuentra entre dos semiespacios anisótropos, a lo sumo monoclinicos. Con esa formulación, los coeficientes de reflexión y transmisión para una interfase soldada (a través de la cual la tracción del esfuerzo y la velocidad de partícula son continuas) fueron hallados [ecuación (4.9)] en términos de las submatrices 3x3 de impedancia: X e Y para el medio superior, X' e Y' para el medio inferior.

Aquí el interés es encontrar los coeficientes de reflexión y transmisión en una fractura de gran extensión planar, la cual es simulada por una interfase de deslizamiento

lineal. La condición de borde para tal interfase es dada en forma matricial por [ecuación (4.12)]:

$$\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}_{0+} = \begin{bmatrix} I & -i\omega Z_T \\ -i\omega Z_N & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}_{0-} \quad (4.32)$$

donde b_x y b_y son vectores de velocidad de partícula y tracción del esfuerzo. Además de la diagonal unitaria, la cual sucede en el caso soldado, las componentes de la velocidad están ahora acopladas a las componentes del esfuerzo, y viceversa, en términos proporcionales a la frecuencia a través de las matrices fuera de la diagonal, las matrices de rigidez Z_T y Z_N . Usando la condición de borde dada por la ecuación (4.32) y asumiendo que la fractura está empotrada en otro medio homogéneo (por lo que desaparecen las primas de X' e Y') con anisotropía monoclinica, a lo sumo, se obtiene la solución para todos los coeficientes de reflexión y transmisión [ecuación (4.16)], rescrita aquí como:

$$\begin{aligned} T &\equiv [I + (i\omega/2) (X^{-1} Z_T Y + Y^{-1} Z_N X)]^{-1}, \\ R &\equiv (i\omega/2) (X^{-1} Z_T Y - Y^{-1} Z_N X) \\ &\quad \times [I + (i\omega/2) (X^{-1} Z_T Y + Y^{-1} Z_N X)]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

La solución para una fractura que separa dos medios anisótropos diferentes es dada por (4.15). Como es mostrado debajo, la solución matricial dada por (4.33) puede ser resuelta explícitamente y analizada más completamente en el caso 2-D de propagación en un plano para el cual el campo de onda del plano cruzado está

desacoplado de aquellas ondas cuyos vectores polarización yacen en el plano de propagación.

4.4.1.- Anisotropía 2-D.

En la anisotropía 2-D, las ondas que se propagan en un plano dado son polarizadas en el plano de propagación, plano tangencial, o perpendicular al plano de propagación, plano cruzado. Las ondas polarizadas en el plano tangencial, qP y qS, están entonces totalmente desacopladas de la onda polarizada en el plano perpendicular, pura cizalla qT. En tal plano, Z es diagonal; cada una de las matrices de impedancia X e Y se desacoplan en matrices 2x2 y 1x1 respectivamente.

Sin pérdida de generalidad, se asume que el plano de propagación es el plano X_1X_3 , que $Z_{12} = 0$ en Z_T , v_2 y σ_4 pueden ser eliminados de X e Y, entonces el análisis del problema es del tipo 2-D. Así mismo, se coloca Z_T escalar en vez de Z_{T1} en la ecuación (4.23), el cual no es necesariamente igual a Z_{T2} . en este caso 2-D, con

$$Z_T = Z_T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z_N = Z_N \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

es instructivo operar más allá sobre las expresiones de la ecuación (4.33) para dar la solución explícitamente en términos de los elementos de X e Y (solamente se necesitan 4). Estas manipulaciones posteriores dependen de las siguientes expresiones, para los términos que aparecen en la ecuación (4.33):

$$X^{-1}Z_T Y \equiv Z_T \begin{bmatrix} X_{11}^{-1} \\ X_{21}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \end{bmatrix} = \frac{Z_T}{|X|} \begin{bmatrix} X_{22} \\ -X_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \end{bmatrix} \equiv \frac{Z_T}{|X|} E_T,$$

$$Y^{-1}Z_N X \equiv Z_N \begin{bmatrix} Y_{12}^{-1} \\ Y_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} = \frac{Z_N}{|Y|} \begin{bmatrix} -Y_{12} \\ Y_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \equiv \frac{Z_N}{|Y|} E_N, \quad (4.35)$$

donde X_{ij}^{-1} o Y_{ij}^{-1} se refiere al ij ésimo elemento de X^{-1} o Y^{-1} respectivamente.

De estas expresiones, se puede verificar que:

$$\begin{aligned} E_T E_N &= E_N E_T = 0, & E_T^2 &= R E_T, \\ E_N^2 &= R E_N, & E_N + E_T &= R I, \end{aligned} \quad (4.36)$$

Donde $r \equiv Y_{11}X_{22} - Y_{12}X_{21}$.

Note, también, que:

$$E_T = \begin{bmatrix} E_{N22} & -E_{N12} \\ -E_{N11} & E_{N11} \end{bmatrix}, \quad E_N = \begin{bmatrix} E_{T22} & -E_{T12} \\ -E_{T11} & E_{T11} \end{bmatrix}, \quad (4.37)$$

lo cual es típico de que las dos matrices que son la inversa una de la otra y viceversa, a pesar de que ambas sean singulares. Las ecuaciones (4.36) y (4.37) son necesarias en la derivación de las expresiones explícitas para hallar T y R.

En el caso 2-D, una representación explícita de T y subsecuentemente de R, puede ser obtenida. De las definiciones de E_T y E_N de la ecuación (4.35) y las relaciones entre E_T y E_N de la ecuación (4.36), se puede escribir:

$$\left| I + \frac{i\omega}{2} (X^{-1}Z_T Y + Y^{-1}Z_N X) \right| = \left(1 + \frac{i\omega}{2} \frac{Z_T}{|X|} r \right) \left(1 + \frac{i\omega}{2} \frac{Z_N}{|Y|} r \right) \equiv D_T D_N \quad (4.38)$$

Se expresa este determinante como un producto de factores – uno dependiente de la docilidad tangencial, el otro de la docilidad normal. Siguiendo la ecuación (4.33) y

realizando la inversión 2x2 de T, haciendo uso de las ecuaciones (4.36) y (4.37), y entonces usando este resultado para hallar R, se obtienen:

$$\begin{aligned}
 T &= \left[\mathbf{I} + \frac{i\omega}{2} \left(X^{-1} Z_T Y + Y^{-1} Z_N X \right) \right]^{-1} \\
 &= \frac{1}{D_T D_N} \left[\mathbf{I} + \frac{i\omega}{2} \left(\frac{Z_T}{|X|} E_N + \frac{Z_N}{|Y|} E_T \right) \right] \\
 &\equiv \frac{1}{D_T D_N} \left[\left(\frac{1}{r} + \frac{i\omega}{2} \frac{Z_T}{|X|} \right) E_N + \left(\frac{1}{r} + \frac{i\omega}{2} \frac{Z_N}{|Y|} \right) E_T \right] \quad (4.39.1) \\
 \therefore T &= \frac{1}{r} \left[\frac{1}{D_T} E_T + \frac{1}{D_N} E_N \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{i\omega}{2} \left[\frac{Z_T}{|X|} E_T - \frac{Z_N}{|Y|} E_N \right] T \\
 &= \frac{i\omega}{2} \left[\frac{Z_T}{|X|} E_T - \frac{Z_N}{|Y|} E_N \right] \frac{1}{r} \left[\frac{1}{D_T} E_T + \frac{1}{D_N} E_N \right] \\
 &= \frac{i\omega}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{Z_T}{|X|} \frac{1}{D_T} E_T^2 - \frac{1}{r} \frac{Z_N}{|Y|} \frac{1}{D_N} E_N^2 \right] \quad (4.39.2) \\
 &\equiv \frac{i\omega}{2} \left[\frac{Z_T}{D_T |X|} E_T - \frac{Z_N}{D_N |Y|} E_N \right]
 \end{aligned}$$

donde E_T y E_N son dadas en la ecuación (4.35). Nuevamente, como un apartado, note de la ecuación (4.38) que existen ahora 2 relaciones de dispersión para los 2 tipos de ondas de la interfase que pueden propagarse a lo largo de la fractura (en la dirección X_1) y que están empotradas en un medio anisótropo; estas son: $D_T=0$ y $D_N=0$. La relación de dispersión $D_T=0$ es para la onda de deslizamiento tangencial (y no de deslizamiento normal) a través de la fractura. Esta está desacoplada de la onda controlada por $D_N=0$ y que tiene un deslizamiento normal (y no tangencial) a través de la fractura. Las expresiones para T y R arriba muestran que todos los coeficientes de transmisión y reflexión son combinaciones lineales de dos términos, uno dependiente de $i\omega Z_T$ y el otro dependiente de $i\omega Z_N$ (para los coeficientes de transmisión, los términos son $1/D_T$ y $1/D_N$; para los coeficientes de reflexión, los términos son $i\omega Z_T/2|X|D_T$ e $i\omega Z_N/2|X|D_N$). Los coeficientes que multiplican a estos dependen solamente de las propiedades de fondo y de la lentitud a lo largo de la fractura. Ya que D_N y $D_T \rightarrow 1$ cuando $\omega \rightarrow 0$, la aproximación para bajas frecuencias de R, válida cuando $i\omega Z_T/2|X|D_T$ e $i\omega Z_N/2|X|D_N \ll 1$, es encontrada reemplazando D_N y D_T por 1, dando un resultado en concordancia con el segundo de la ecuación (4.17). Cerca del ángulo crítico de qP, cuando $|Y|$ es pequeño, o cerca del ángulo crítico de qS, cuando $|X|$ es pequeño, la condición de la pequeñez de ω es aún más restrictiva para que la aproximación sea válida. Así pues, para bajas frecuencias, la forma del pulso de una onda reflejada está cercana a la derivada del pulso incidente, ya que $i\omega$ viene a ser $\partial/\partial t$ en el dominio del tiempo. Para los coeficientes de transmisión, el límite de la baja frecuencia se obtiene además incluyendo sólo términos lineales. Expandiendo $1/D_Q$ en el dominio de la frecuencia y usando la última relación de la ecuación (4.36) da un resultado en concordancia con el primero de la ecuación (4.17). Así pues, para frecuencias bajas, la forma de la onda convertida transmitida está también cercana a la derivada del pulso incidente, mientras que la forma del pulso de la directa transmitida, i.e., no convertida, la onda es dada aproximadamente por la forma del pulso incidente más una pequeña contribución adicional con la forma

de la derivada del pulso incidente. Para altas frecuencias, R se aproxima a un valor constante, encontrado al notar que $i\omega Z_T/2|X|D_T$ e $i\omega Z_N/2|X|D_N$ ambas $\rightarrow 1/r$ cuando $\omega \rightarrow \infty$; mientras que $T \rightarrow 0$ en tanto que ambas cantidades Z_T y Z_N no sean ceros. Si una de las docilidades de la fractura es cero, entonces todos los coeficientes de transmisión se aproximan a un valor constante cuando $\omega \rightarrow \infty$.

Se puede, además, considerar fracturas para las cuales la tracción tangencial es idénticamente igual a cero, lo cual ocurre para fracturas completamente abiertas y rellenas de fluido. Esta situación se arregla colocando $Z_T \rightarrow \infty$, en cuyo caso $i\omega Z_T/2|X|D_T \rightarrow 1/r$ y $1/D_T \rightarrow 0$. Así pues, $T = E_N/(r D_N)$ y R tiene la misma forma como en la ecuación (4.39) pero con $i\omega Z_T/2|X|D_T$ reemplazada por $1/r$.

4.4.2.- Formulación isotrópica.

Considere un medio Isotrópico con velocidad compresional α , velocidad de cizalla β , y la densidad ρ , en la cual es empotrada una fractura plana y simétrica axialmente, la cual es perpendicular a la dirección X_3 . para ondas planas con lentitud p_1 a lo largo de la fractura, de aquí en adelante llamada lentitud horizontal (aunque no se está restringiendo que las fracturas sean horizontales), las expresiones 2-D explícitas para X e Y dadas se reducen a:

$$X = \begin{bmatrix} \alpha p_1 & \beta p_{3S} \\ -\rho \alpha \Gamma & \rho \alpha \Psi_S \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -\rho \beta \Psi_P & -\rho \beta \Gamma \\ \alpha p_{3P} & -\beta p_1 \end{bmatrix},$$

(4.40)

$$\Gamma \equiv 1 - 2\beta^2 p_1^2, \quad p_{3S} = \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - p_1^2},$$

$$p_{3P} = \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - p_1^2}, \quad \Psi_S \equiv 2\frac{\beta^3}{\alpha} p_1 p_{3S}, \quad \Psi_P \equiv 2\alpha\beta p_1 p_{3P}.$$

Donde p_{3S} es la lentitud vertical de la onda S, p_{3P} es la lentitud vertical de la onda P, y Ψ_S e Ψ_P clarifican las expresiones para los coeficientes de reflexión y transmisión, cuando se clasifiquen debajo.

Estas cantidades adimensionales son, para ángulos de incidencia pre-críticos, relacionados a los ángulos θ_S y θ_P , que son los ángulos que forman las ondas S y P

con el eje OX₃. Así pues, de la Ley de Snell se tiene: $p_1 = \frac{\text{Sen}\theta_S}{\beta} = \frac{\text{Sen}\theta_P}{\alpha}$ y

$$p_{3S} = \frac{\text{Cos}\theta_S}{\beta}, \quad p_{3P} = \frac{\text{Cos}\theta_P}{\alpha}, \quad \Gamma = \text{Cos}2\theta_S,$$

$$\Psi_S = \frac{\beta}{\alpha} \text{Sen}2\theta_S, \quad \Psi_P = \frac{\beta}{\alpha} \text{Sen}2\theta_P.$$

Además, note que:

$$|X| = \rho\alpha\beta p_{3S}, \quad |Y| = \rho\alpha\beta p_{3P}. \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned}
r &\equiv Y_{11}X_{22} - Y_{12}X_{21} = -4\rho^2\alpha\beta^5 p_1^2 p_{3S} p_{3P} - \rho^2\alpha\beta\Gamma^2 \\
&\equiv -\rho\beta\Psi_P(\rho\alpha\Psi_S) - (-\rho\beta\Gamma)(-\rho\alpha\Gamma) \\
&\equiv -\rho^2\alpha\beta[\Gamma^2 + \Psi_S\Psi_P]
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Substituyendo estos resultados en la ecuación (4.38) conduce a:

$$D_T = \left(1 + \frac{i\omega Z_T}{2|X|}r\right) \equiv 1 - \frac{i\omega Z_T}{2|X|}\rho^2\alpha\beta[\Gamma^2 + \Psi_S\Psi_P] \equiv 1 - iW_T[\Gamma^2 + \Psi_S\Psi_P],$$

$$\text{donde } W_T = \frac{i\omega Z_T}{2|X|}\rho^2\alpha\beta$$

$$\therefore W_T = \frac{\omega Z_T \rho^2 \alpha \beta}{2 \rho \alpha \beta p_{3S}} \equiv \frac{\omega \rho \beta Z_T}{2 \beta p_{3S}} = \frac{\omega \rho \beta}{2 \beta p_{3S}} \left(\frac{2 \Omega_T}{\omega \rho \beta} \right) = \frac{\Omega_T}{\beta p_{3S}} = \frac{\pi d_T}{\lambda_s \beta \frac{\cos \theta_s}{\beta}}$$

$$\therefore W_T = \frac{\pi d_T}{\lambda_s \cos \theta_s}. \tag{4.43}$$

Análogamente, se puede verificar que

$$D_N = 1 - \frac{i\omega Z_N}{2|Y|}r = 1 - iW_N(\Gamma^2 + \Psi_S\Psi_P),$$

$$\text{con } W_N = -\frac{i\omega Z_N}{2|Y|}\rho^2\alpha\beta \equiv \frac{\omega Z_N \rho \alpha}{2 \alpha p_{3P}} = \frac{\Omega_N}{\alpha p_{3P}} \equiv \frac{\pi d_N}{\lambda_p \cos \theta_p}. \tag{4.44}$$

Note que Ω_Q (Q=N,T) son las razones de πl_Q de la fractura a su correspondiente longitud de onda. Los valores de W_Q son las razones de πl_Q a la proyección de la correspondiente longitud de onda sobre el eje X3 –

Las matrices ET y EN, las cuales dependen solamente de la lentitud horizontal y las propiedades del material de fondo, son encontradas sustituyendo los valores de la ecuación (4.40) en la ecuación (4.35):

$$E_T = -\rho^2 \alpha \beta \begin{bmatrix} \Psi_S \Psi_P & \Psi_S \Gamma \\ \Psi_P \Gamma & \Gamma^2 \end{bmatrix}, \quad E_N = -\rho^2 \alpha \beta \begin{bmatrix} \Gamma^2 & -\Psi_S \Gamma \\ -\Psi_P \Gamma & \Psi_S \Psi_P \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Así pues, para una fractura de deslizamiento lineal, simétrica alrededor de un eje y empotrada en un medio isotrópico, al substituir estos resultados dentro de la ecuación (4.39) conduce a:

$$T = \frac{1}{\Gamma^2 + \Psi_P \Psi_S} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{D_T} \Psi_S \Psi_P + \frac{1}{D_N} \Gamma^2 \right) & \left(\frac{1}{D_T} - \frac{1}{D_N} \right) \Psi_S \Gamma \\ \left(\frac{1}{D_T} - \frac{1}{D_N} \right) \Psi_P \Gamma & \left(\frac{1}{D_T} \Gamma^2 + \frac{1}{D_N} \Psi_S \Psi_P \right) \end{bmatrix},$$

$$R = -i \begin{bmatrix} \left(\frac{W_T}{D_T} \Psi_S \Psi_P - \frac{W_N}{D_N} \Gamma^2 \right) & \left(\frac{W_T}{D_T} + \frac{W_N}{D_N} \right) \Psi_S \Gamma \\ \left(\frac{W_T}{D_T} + \frac{W_N}{D_N} \right) \Psi_P \Gamma & \left(\frac{W_T}{D_T} \Gamma^2 - \frac{W_N}{D_N} \Psi_S \Psi_P \right) \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Las relaciones de dispersión para ondas de la interfase a lo largo de una fractura, en un medio isotrópico, $D_T=0$ y $D_N=0$, ahora tienen una forma simple. Cuando la lentitud horizontal es más grande que la lentitud de cizalla, i.e., para $p_1 > 1/\beta > 1/\alpha$, las relaciones de dispersión pueden ser escritas:

$$D_T = 1 - \Omega_T \frac{\Gamma^2 + \Psi_S \Psi_P}{\sqrt{\beta^2 p_1^2 - 1}} = 0,$$

$$D_N = 1 - \Omega_N \frac{\Gamma^2 + \Psi_S \Psi_P}{\sqrt{\alpha^2 p_1^2 - 1}} = 0. \quad (4.47)$$

donde se puede verificar que $\Gamma^2 + \Psi_S \Psi_P$ como función de la lentitud horizontal es:

$$\Gamma^2 + \Psi_S \Psi_P = \left(1 - 2\beta^2 p_1^2\right)^2 - 4\beta^2 p_1^2 \sqrt{\beta^2 p_1^2 - 1} \sqrt{\beta^2 p_1^2 - \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)}.$$

La raíz de $\Gamma^2 + \Psi_S \Psi_P = 0$, llamada p_{1R} , es la lentitud de la onda Rayleigh del medio isotrópico. Claramente, ésta es la asíntota para las raíces de $D_T=0$ y $D_N=0$. La asíntota de bajas frecuencias para la raíz de $D_T=0$ es $p_1=1/\beta$ y esta raíz se incrementa monótonamente con la frecuencia desde $1/\beta$ hasta p_{1R} . La raíz de $D_N=0$ tiene un valor de corte para frecuencias bajas en $\Omega_N = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2} - 1}$. En esta frecuencia, la raíz de

$D_N=0$ es $p_1=1/\beta$, la cual es la lentitud real más pequeña (la velocidad de fase más alta) de una guía de onda plana empotrada que un medio isotrópico puede soportar. Esta raíz también se incrementa monótonamente con la frecuencia desde su valor de corte $1/\beta$ hasta p_{1R} . Como se ha visto para el caso anisotrópico 2-D, todos los coeficientes de transmisión y reflexión son la suma de 2 términos – uno dependiente de W_T , el otro de W_N . Su comportamiento cuando $\omega \rightarrow 0$ ó ∞ fue discutido en conexión con el caso anisotrópico 2-D. Diversos valores especiales de lentitud horizontal son de interés.

4.4.2.1.- Incidencia normal.

En este punto, $\Gamma = 1$, $\Psi_S = \Psi_P = 0$ (lo que implica que no hay ondas convertidas), $W_T = \Omega_T$, y $W_N = \Omega_N$. Entonces:

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{D_N} & 0 \\ 0 & \frac{1}{D_T} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} -\left(1 - \frac{1}{D_N}\right) & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{D_T} \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

donde $D_T = 1 - i\Omega_T$, $D_N = 1 - i\Omega_N$.

Pensando que la fractura actúa como un filtro, se puede observar que, a incidencia normal, la parametrización en términos de W_T y W_N es tal que la magnitud de cada uno de los coeficientes de transmisión y reflexión está dada por:

$$|T| = \frac{1}{\sqrt{1 + W^2}}, \quad |R| = \frac{W}{\sqrt{1 + W^2}}. \quad (4.49)$$

Al calcular el valor W para el cual se alcanza -3dB , correspondiente a la frecuencia en la cual la amplitud de la onda reflejada o transmitida alcanza $1/\sqrt{2}$ de su máximo valor, resolviendo $|T| = 1/\sqrt{2}$ o $|R| = 1/\sqrt{2}$, da un valor de $W = 1$ para ambas ondas.

4.4.2.2.- Angulo de cizalla de 45° en el cual $p_1^2 = 1/(2\beta^2)$.

Aquí $\Gamma = 0$, lo cual indica, nuevamente, que no hay ondas convertidas, y $\Psi_S \Psi_P = \sqrt{2(\beta^2 / \alpha^2) - 1}$. Entonces:

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{D_T} & 0 \\ 0 & \frac{1}{D_N} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{D_T} & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{1}{D_N}\right) \end{bmatrix}. \quad (4.50)$$

$$\text{Donde, } D_T = 1 - i \sqrt{4 \frac{\beta^2}{\alpha^2} - 2 \Omega_T}, \quad D_N = 1 - i \sqrt{2 \frac{\beta}{\alpha} \Omega_N}.$$

Para este caso, los coeficientes PP dependen solamente de la docilidad tangencial y los coeficientes SS dependen solamente de la docilidad normal. Para el caso usual de una razón (promedio) de Poisson positiva, $\beta^2/\alpha^2 < 1/2$ y éste valor de lentitud horizontal, $1/\sqrt{2}\beta$, es más grande que la lentitud crítica de la onda P, $1/\alpha$, así que cualquiera de las ondas P son desvanecientes y DT es real. Asumiendo una onda incidente homogénea, la única onda incidente posible es una onda S que genera ondas S reflejadas y transmitidas con amplitudes complejas.

4.4.2.3.- Lentitud Crítica de la onda P, en la que $p_1=1/\alpha$.

Aquí $p_{3P}=0$ y entonces $\Psi_P = 0$. En esta lentitud crítica, Y es singular y las formulas generales anisótropas para los coeficientes de reflexión y transmisión, derivados arriba, son inaplicables. Sin embargo, en las expresiones explícitas de la ecuación (4.46) se puede tomar el límite cuando $p_{3P} \rightarrow 0$. Físicamente, la lentitud es realizada cuando una onda S incide a un ángulo $\theta_s = \arcsen(\beta/\alpha)$. En este caso $-i \Omega_N$ y D_N ambas se aproximan a $-i \infty$, de tal manera que $-i \Omega_N / D_N \rightarrow 1$ y $\Gamma = 1 - 2\beta^2/\alpha^2$. Entonces

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\Psi_s}{\Gamma D_T} \\ 0 & \frac{1}{D_T} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} -1 & \left(2 - \frac{1}{D_T}\right) \frac{\Psi_s}{\Gamma} \\ 0 & 1 - \frac{1}{D_T} \end{bmatrix}, \quad (4.51)$$

donde $D_T = 1 - i W_T \Gamma^2$.

Se puede ver que para fracturas abiertas y llenas de fluido (para las cuales la tracción tangencial es idénticamente igual a cero), $\Omega_T \rightarrow \infty$. Análogo al caso anisótropo general 2-D, $-iW_T / D_T \rightarrow 1/(\Gamma^2 + \Psi_s \Psi_p)$. Así pues:

$$T = \frac{1}{(\Gamma^2 + \Psi_s \Psi_p)} \begin{bmatrix} \Gamma^2 & -\Psi_s \Gamma \\ -\Psi_p \Gamma & \Psi_s \Psi_p \end{bmatrix}, \quad (4.52)$$

y R tiene la misma forma que en la ecuación (4.46) pero con $-iW_T / D_T$ reemplazada o por $1/(\Gamma^2 + \Psi_s \Psi_p)$.

4.4.2.4.- Ejemplo de interfase fracturada, casos de baja y alta frecuencia.

Las figuras 16 y 17 muestran la amplitud y la fase de los coeficientes de reflexión como función de la lentitud horizontal para una fractura con $Z_N / Z_T = 0.75$ empotrada en un medio isotrópico que posee una razón de Poisson de 0.219, i.e., $\beta^2/\alpha^2 = 0.36$. por ende, note que

$$\frac{\Omega_T}{\Omega_N} = \frac{Z_T}{Z_N} \frac{\beta}{\alpha} = 0.8.$$

Figura (16.1): Coeficiente de reflexión PP para una fractura que posee un valor de $Z_N/Z_T = 0.75$, la cual está empotrada en un medio que posee razón de Poisson de 0.219, esto quiere decir, $\beta^2/\alpha^2 = 0.36$. Se escogió la frecuencia de manera tal que se diesen los siguientes valores $\Omega T = 0.06$ y $\Omega N = 0.075$. El eje de las abscisas es $\alpha p_1 = \sin\theta_p$. La línea azul es el coeficiente de reflexión y la verde es la fase normalizada sobre 10π .

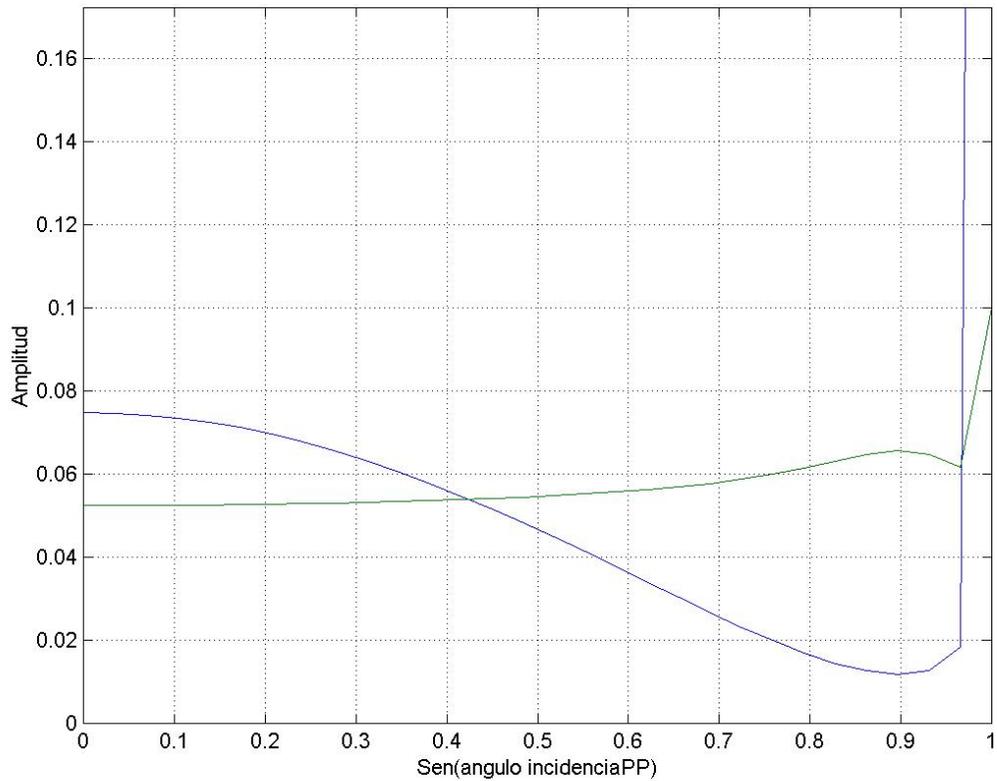


Figura (16.2): Coeficiente de reflexión SP para una fractura que posee un valor de $Z_N/Z_T = 0.75$, la cual está empotrada en un medio que posee razón de Poisson de 0.219, esto quiere decir, $\beta^2/\alpha^2 = 0.36$. Se escogió la frecuencia de manera tal que se diesen los siguientes valores $\Omega T = 0.06$ y $\Omega N = 0.075$. El eje de las abscisas es $\alpha p_1 = \text{sen}\theta_p$. La línea azul es el coeficiente de reflexión y la verde es la fase normalizada sobre 10π .

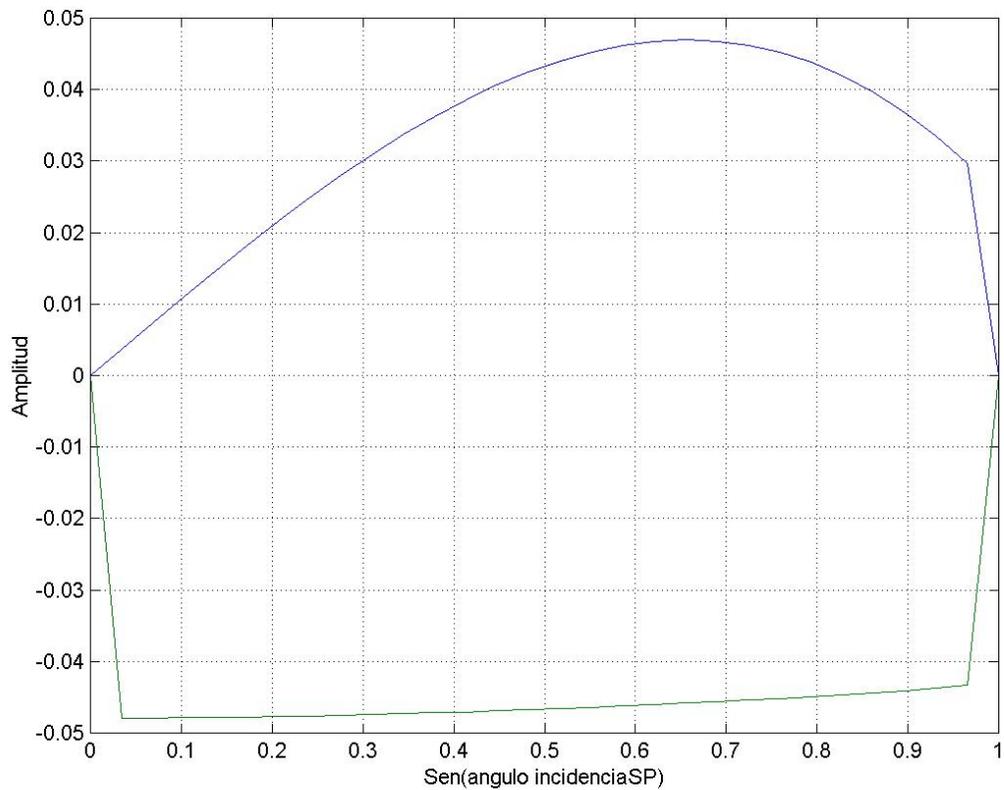


Figura (16.3): Coeficiente de reflexión PS para una fractura que posee un valor de $Z_N/Z_T = 0.75$, la cual está empotrada en un medio que posee razón de Poisson de 0.219, esto quiere decir, $\beta^2/\alpha^2 = 0.36$. Se escogió la frecuencia de manera tal que se diesen los siguientes valores $\Omega T = 0.06$ y $\Omega N = 0.075$. El eje de las abscisas es $\beta p_1 = \text{sen}\theta_s$. La línea azul es el coeficiente de reflexión y la verde es la fase normalizada sobre 10π .

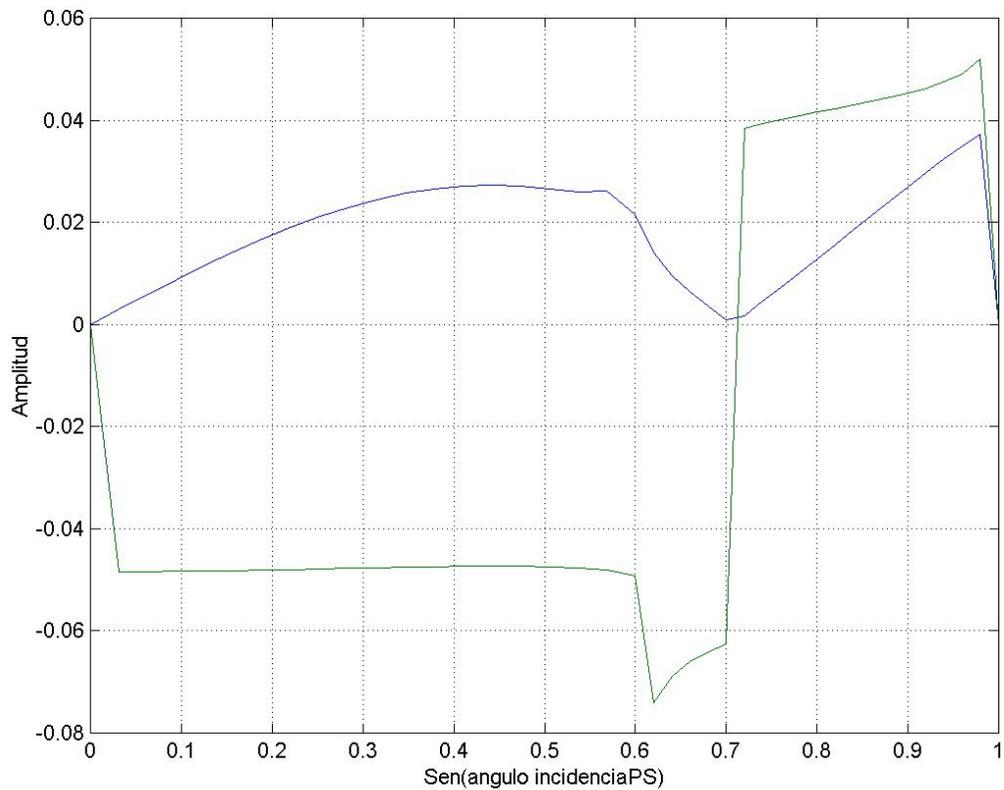


Figura (16.4): Coeficiente de reflexión SS para una fractura que posee un valor de $Z_N/Z_T = 0.75$, la cual está empotrada en un medio que posee razón de Poisson de 0.219, esto quiere decir, $\beta^2/\alpha^2 = 0.36$. Se escogió la frecuencia de manera tal que se diesen los siguientes valores $\Omega T = 0.06$ y $\Omega N = 0.075$. El eje de las abscisas es $\beta p_1 = \text{sen}\theta_s$. La línea azul es el coeficiente de reflexión y la verde es la fase normalizada sobre 10π .

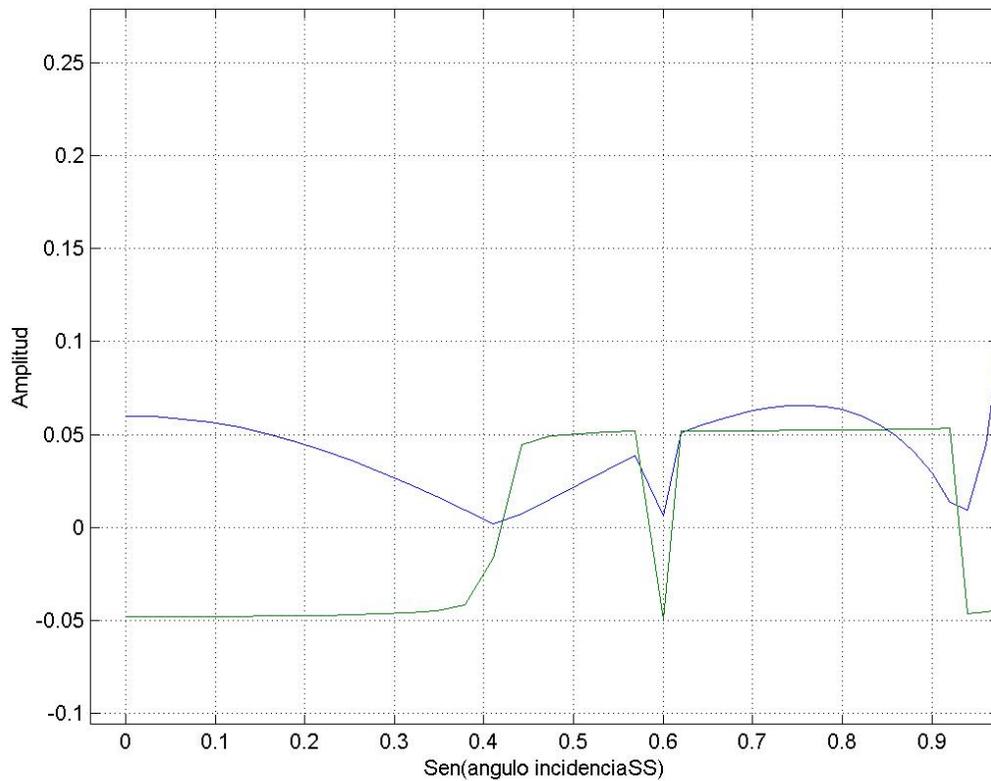


Figura (17.1): Coeficiente de reflexión PP para una fractura que posee un valor de $Z_N/Z_T = 0.75$, la cual está empotrada en un medio que posee razón de Poisson de 0.219, esto quiere decir, $\beta^2/\alpha^2 = 0.36$. Se escogió la frecuencia de manera tal que se diesen los siguientes valores $\Omega T = 0.6$ y $\Omega N = 0.75$. El eje de las abscisas es $\alpha p_1 = \text{sen}\theta_p$. La línea azul es el coeficiente de reflexión y la verde es la fase normalizada sobre 10π .

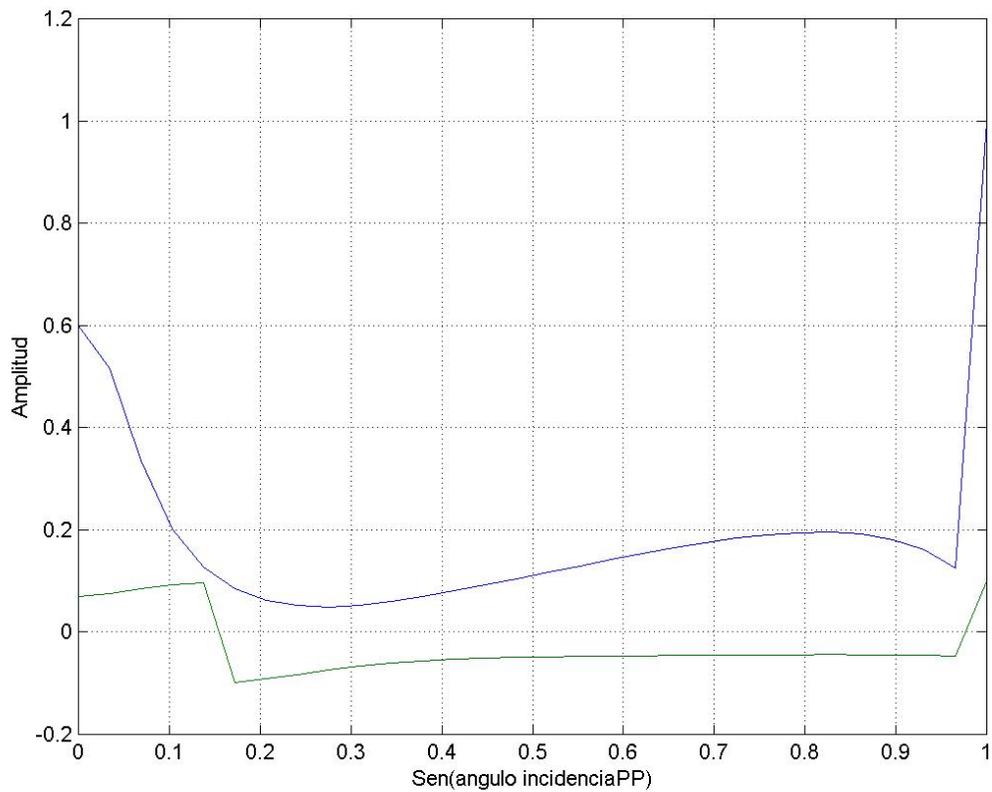


Figura (17.2): Coeficiente de reflexión SP para una fractura que posee un valor de $Z_N/Z_T = 0.75$, la cual está empotrada en un medio que posee razón de Poisson de 0.219, esto quiere decir, $\beta^2/\alpha^2 = 0.36$. Se escogió la frecuencia de manera tal que se diesen los siguientes valores $\Omega T = 0.6$ y $\Omega N = 0.75$. El eje de las abscisas es $\alpha p_1 = \text{sen}\theta_p$. La línea azul es el coeficiente de reflexión y la verde es la fase normalizada sobre 10π .

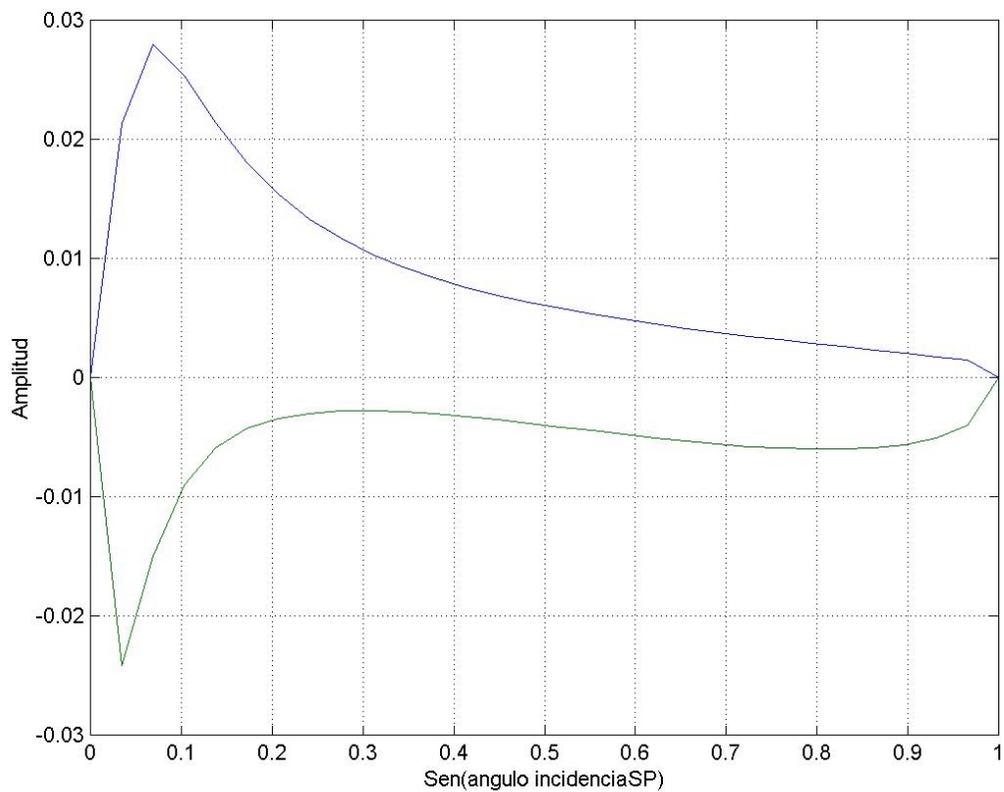


Figura (17.3): Coeficiente de reflexión PS para una fractura que posee un valor de $Z_N/Z_T = 0.75$, la cual está empotrada en un medio que posee razón de Poisson de 0.219, esto quiere decir, $\beta^2/\alpha^2 = 0.36$. Se escogió la frecuencia de manera tal que se diesen los siguientes valores $\Omega T = 0.6$ y $\Omega N = 0.75$. El eje de las abscisas es $\beta p_1 = \text{sen}\theta_s$. La línea azul es el coeficiente de reflexión y la verde es la fase normalizada sobre 10π .

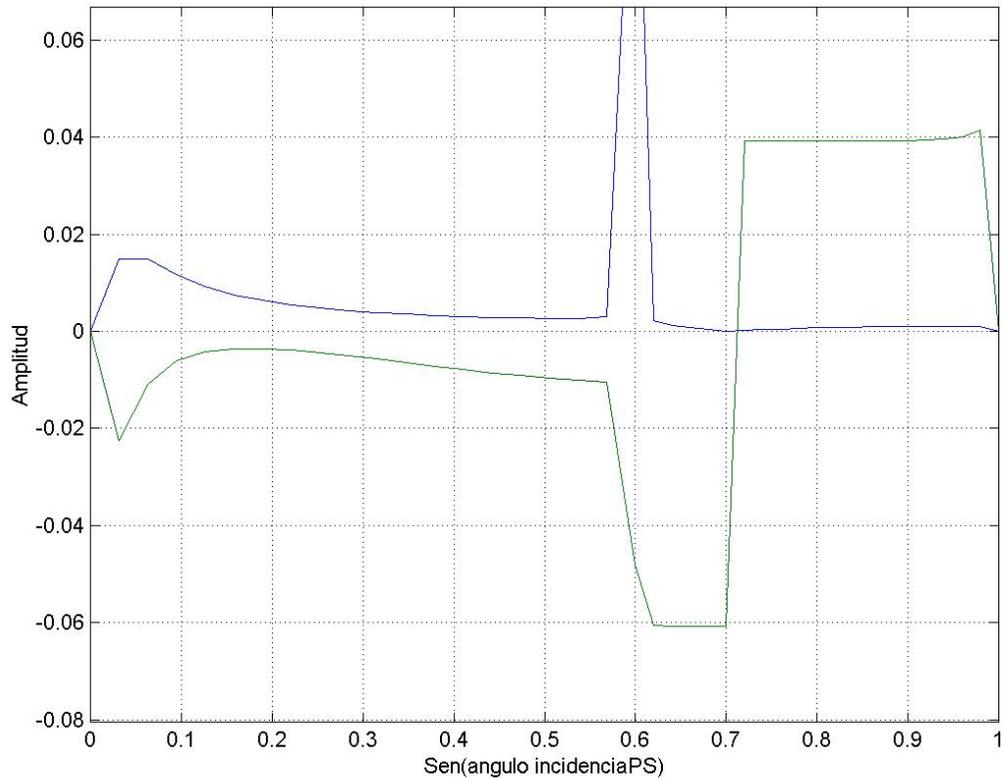
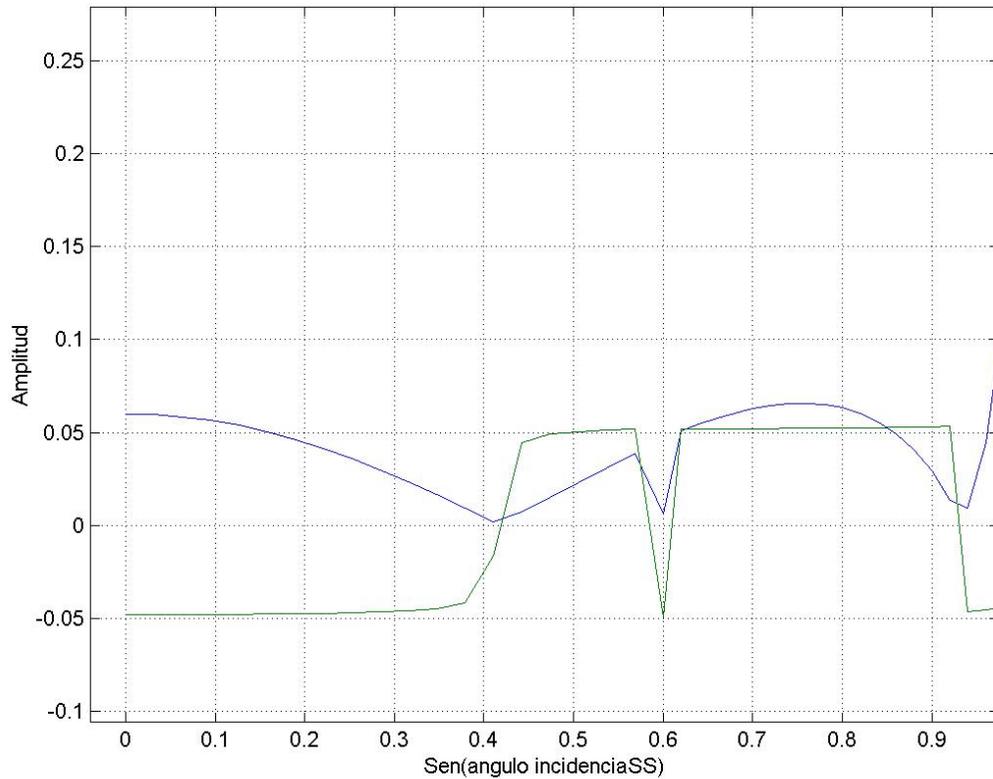


Figura (17.4): Coeficiente de reflexión SS para una fractura que posee un valor de $Z_N/Z_T = 0.75$, la cual está empotrada en un medio que posee razón de Poisson de 0.219, esto quiere decir, $\beta^2/\alpha^2 = 0.36$. Se escogió la frecuencia de manera tal que se diesen los siguientes valores $\Omega T = 0.6$ y $\Omega N = 0.75$. El eje de las abscisas es $\beta p_1 = \text{sen}\theta_s$. La línea azul es el coeficiente de reflexión y la verde es la fase normalizada sobre 10π .



En ambas figuras los valores de los coeficientes R_{QP} desde una lentitud cero hasta la lentitud crítica de la onda P, y los coeficientes R_{QS} van hasta la lentitud crítica de la onda S. En la figura 16, la frecuencia es escogida tan pequeña tal que $\Omega_T = 0.06$ y $\Omega_N = 0.075$, es quiere decir que el espesor equivalente tangencial de la fractura es 0.06 veces la longitud de la onda de cizalla dividido por π o 0.019 veces la longitud de la onda de cizalla. Similarmente, su espesor equivalente es cerca 0.024 veces la longitud de la onda compresional. Para tales valores de baja frecuencia, $W_Q / D_Q \approx WQ$; todos los coeficientes de reflexión estarán cercanos a ser imaginarios por debajo de la lentitud crítica de la onda P, donde Ψ_P es real. Por encima de la lentitud crítica de la onda P, este no es el caso. Aún para bajas frecuencias, cuando la lentitud de la onda S pasa el valor crítico de la lentitud de la onda P, R_{PS} viene a ser complejo, mientras que R_{SS} permanece imaginario. En la figura 17 la frecuencia es escogida tal $\Omega_T = 0.6$ y $\Omega_N = 0.75$, y la respuesta de la fractura es en general compleja para todos los valores de lentitud horizontal.

4.4.2.5.- Lentitudes de extinción y estimaciones de la docilidad de las fracturas.

La magnitud de las reflexiones de una fractura o falla en un medio homogéneo isotrópico no es cero para incidencia normal y, frecuentemente, viene a ser muy pequeño para valores específicos de lentitud horizontal. Esto puede ser visto en las figuras 16 y 17, donde la amplitud de la reflexión PP alcanza un mínimo en $\alpha p_1 \approx 0.9$ y la amplitud de la reflexión SS alcanza un mínimo en $\beta p_1 \approx 0.42$. Se mostrará que tales mínimos ocurren frecuentemente; y se referirá a las lentitudes correspondientes como lentitudes de extinción. Debido a los mínimos, las reflexiones de una fractura o

una falla son frecuentemente dominadas por ondas convertidas para un amplio rango de distancias fuente-receptor. Las lentitudes horizontales en las cuales ocurren los mínimos, como función de la frecuencia, dependen fuertemente de la razón $k \equiv Z_N/Z_T$, la razón de las docilidades normal a tangencial de la fractura. Esto es indicativo de la saturación de la fractura y a veces extendido a su textura. Las lentitudes de extinción dependen débilmente $\gamma \equiv \beta^2/\alpha^2$ del medio de fondo.

Para analizar el comportamiento extintivo de los coeficientes de reflexión de las ondas no convertidas, RPP y RSS, se puede ver de la ecuación (4.46) que ellas son cantidades complejas sobre el espectro de frecuencia completo. Por consiguiente, ellas usualmente no se desvanecen en cualquier lugar del dominio de la frecuencia-lentitud, a lo largo de la fractura. Es posible minimizar $|RPP|^2$ y $|RSS|^2$ con respecto a la lentitud, pero al hacer esto se genera ecuaciones polinómicas dependientes de frecuencias de alto orden en la variable p_1^2 , las cuales pueden ser resueltas solo numéricamente. Sin embargo, para reflexiones precríticas, i.e., $p_1 < 1/\alpha$, los términos dominantes de ω en los coeficientes de reflexión son imaginarios puros. A bajas frecuencias, se puede encontrar los mínimos aproximados de los términos de más bajo orden en la frecuencia.

4.4.2.5.1.- Lentitud de extinción aproximada para la reflexión SS.

La expresión aproximada de baja frecuencia para RSS, el elemento inferior derecho en la ecuación (4.46), se encuentra reemplazando DT y DN por la unidad. Este reemplazo, valido para lentitudes no muy cercanas a la lentitud crítica de la onda P, da:

$$R_{SS} \approx -i(W_T \Gamma^2 - W_N \Psi_S \Psi_P) \quad (4.53)$$

una cantidad imaginaria pura para todas las lentitudes fuera de la lentitud crítica de la onda S, la lentitud vertical de la onda P, p_3P , la cual viene a ser imaginaria para lentitudes más grandes que la lentitud crítica de la onda P se cancela en el producto $WN\Psi_p$. La magnitud del coeficiente de reflexión $|RSS|$ es mínima para la lentitud a la cual RSS desaparece. Para encontrar estas lentitudes de extinción, aproximada, de la reflexión SS se sustituyen las definiciones para WN y WT de la ecuación (4.44) y para Γ , Ψ_N y Ψ_T de la ecuación (4.40) dentro de la ecuación (4.53). Posteriormente se multiplica las expresiones resultantes por $2i p_3S / \rho\omega ZT$, y el resultado se iguala a cero. Renombrando $k = ZN / ZT$, se encuentra que:

$$1 - 4\beta^2 p_1^2 (1 - \beta^2 p_1^2)(1 + k) = 0, \quad (4.54);$$

una ecuación cuadrática en $\beta^2 p_1^2$ (con coeficientes independientes de γ) para los ceros aproximados de RSS para baja frecuencia. Si, de los datos, un valor de $\beta p_1 \equiv \sin\theta_S$ que satisfaga la ecuación (4.54) se conoce, éste inmediatamente da un estimado para k . Alternativamente, conociendo k , la ecuación (4.54) tiene 2 raíces positivas de las cuales ambas son menores que 1, dadas por:

$$\beta^2 p_1^2 = \frac{1}{2} \left[1 \mp \sqrt{\frac{k}{1+k}} \right]. \quad (4.55)$$

Estas raíces para $\beta^2 p_1^2$ equiespaciadas a ambos lados de $1/2$. Esta lentitud, $p_1 = 1/(\sqrt{2}\beta)$, corresponde a $\theta_s = 45^\circ$, en cuyo punto $\Gamma=0$ y los coeficientes de reflexión de las ondas convertidas desaparecen [ver ecuación (4.50) arriba].

Para $k \gg 1$, estas raíces están cercanas a 0 y 1; para $k \ll 1$, estas están cercanas a $1/2$. Así que, para todos los casos, con el incremento de la lentitud horizontal (i.e., con el incremento de la distancia fuente-receptor) desde la incidencia normal, la amplitud de la señal reflejada SS, para baja frecuencia, decrece hasta 0 en cuyo punto hay un

cambio de fase de 180° , incrementándose de la amplitud a un máximo, entonces decrece a 0, en cuyo punto hay un nuevo cambio de fase, y se incrementa hasta que p_1 se aproxima a la lentitud crítica de la onda S, donde la aproximación para baja frecuencia se rompe. Así que, para raíces cercanas a $1/2$, pequeños valores de k , la reflexión SS desaparecerá en la misma región donde los eventos convertidos desaparecen (ya que $\Gamma=0$ en $\beta^2 p_1^2=1/2$). Para raíces significativamente diferentes de $1/2$ (valores más grandes de k), la raíz más pequeña harán que la reflexión SS desaparezca para valores de lentitud horizontal más pequeña (pequeñas distancias fuente-receptor), dando un rango de distancias fuente-receptor sobre la cual los eventos reflejados convertidos dominarán sobre los eventos reflejados SS.

4.4.2.5.2.- Lentitud de extinción aproximada de la reflexión PP.

Las expresiones aproximadas para bajas frecuencias para RPP, el elemento superior izquierdo de R en la ecuación (4.46), también se encuentra reemplazando DT y DN por la unidad. Esto da: $R_{PP} \approx -i(W_T \Psi_S \Psi_P - W_N \Gamma^2)$, (4.56),

una cantidad imaginaria pura para todos los valores de lentitud horizontal fuera de la lentitud crítica de la onda P. Sustituyendo las definiciones para W_N , W_T , Γ , Ψ_S y Ψ_P ; la multiplicación por $-2i p_3 P / \rho \omega Z_N$; y colocando el resultado igual a cero conduce a

$$1 - 4\gamma\alpha^2 p_1^2 \left[1 + \frac{\gamma}{k} - \gamma \left(1 + \frac{1}{k} \right) \alpha^2 p_1^2 \right] = 0, \quad (4.57)$$

una ecuación cuadrática en $\alpha^2 p_1^2$, para los ceros de la ecuación (4.56). Pero a pesar, de que, para RSS la ecuación correspondiente siempre tenía dos raíces reales, correspondientes a dos lentitudes críticas, para las cuales la aproximación a cero de RSS se cumplía, esto no sucede así en la ecuación (4.57). Además, note la

dependencia no solo de k sino también de γ . Sin embargo, existen dos casos a considerar, dependiendo del signo del discriminante de la ecuación (4.57):

$$f(\gamma, k) \equiv \gamma^2 - (1-2\gamma)k, \quad (4.58).$$

Caso 1: Si $f(\gamma, k) \geq 0$. Aquí hay dos raíces reales para $\alpha^2 p^2$, entre 0 y 1, y el proceso es similar a aquel de encontrar los ceros de la aproximación de RSS para baja frecuencia. Esto ocurre si $\gamma \geq 1/2$ (el cual no es de mucho interés, debido a que este corresponde a una razón dinámica de Poisson que es menor que o igual que cero), o cuando $\gamma < 1/2$ y $k \leq \gamma^2 / (1-2\gamma)$. Si se conocen dos valores de $\sin^2 \theta P \equiv \alpha^2 p^2$ para el cual $RPP = 0$, entonces, la suma de éstas raíces es Σ y el producto de las mismas es Π . Estas cantidades son relacionadas con los coeficientes de la ecuación cuadrática (4.57); de esas relaciones γ y k pueden ser estimadas. En particular:

$$\Sigma - 1 = \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{k}{1+k}, \quad \Pi = \frac{1}{4\gamma^2} \frac{k}{1+k}. \quad (4.59)$$

La primera de estas ecuaciones dividida por la segunda, conduce a una ecuación cuadrática en γ , i.e., $4\gamma(1-\gamma) = (\Sigma - 1)/\Pi$, cuya raíz entre 0 y $1/2$ es:

$$\gamma = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{\Sigma - 1}{\Pi}} \right]. \quad (4.60)$$

El estimado de k puede ser encontrado de la primera ó la segunda de las ecuaciones (4.59). Alternativamente, si γ y k se conocen, las raíces de la ecuación (4.57), las cuales causan que desaparezca la aproximación para baja frecuencia de RPP, son:

$$\alpha^2 p_1^2 = \frac{1}{2\gamma(1+k)} \left[\gamma + k \mp \sqrt{f(\gamma, k)} \right]. \quad (4.61)$$

Si $f(\gamma, k) = 0$, estas vienen a ser raíces repetidas en $\alpha^2 p_1^2 = \frac{1}{2}(1-\gamma) < 1$. En contraste al coeficiente de reflexión SS, para pequeños valores de k estas raíces de RPP están cercanas a 0 y 1; para k más grandes, .i.e., k cercanos pero menores que $\gamma^2 / (1-2\gamma)$, estas raíces están, ambas, cercanas a $(1-\gamma)/2$.

Caso 2. Si $f(\gamma, k) < 0$, no hay raíces reales y no hay cambio de fase para la señal PP reflejada sobre todo el rango precrítico. Esto ocurre cuando $\gamma < 1/2$ y $k > \gamma^2 / (1-2\gamma)$. Cuando γ está cercano a $1/2$ este caso requiere valores de k bastante grandes. Se puede buscar el mínimo valor de $|RPP|$ dividiendo la ecuación (4.57) por αp_{3P} , diferenciando con respecto a $\alpha^2 p_1^2$, y colocando el resultado igual a cero. Esto da una ecuación cuadrática en $\alpha^2 p_1^2$,

$$12\gamma^2(1+k)(\alpha^2 p_1^2)^2 - 4\gamma[5\gamma + k(1+4\gamma)](\alpha^2 p_1^2) + k(8\gamma - 1) + 8\gamma^2 = 0, \quad (4.62)$$

la cual tiene siempre dos raíces reales para $\alpha^2 p_1^2$, con la raíz + mayor que 1 y la raíz - menor que 1. Así 1, el lugar deseado del mínimo está dado por la raíz -, siendo ésta raíz positiva. Esto ocurre solamente cuando $k(8\gamma-1) + 8\gamma > 0$, .i.e., cuando $\gamma \geq 1/8$ o cuando $\gamma < 1/8$ y $8\gamma^2/(1-8\gamma) > k > \gamma^2/(1-2\gamma)$, en cuyo caso el lugar del mínimo esta dado por:

$$\alpha^2 p_1^2 = \frac{5\gamma + k(1+4\gamma) - \sqrt{\gamma^2 + (3-8\gamma)(1-2\gamma)k + 4(1-2\gamma)^2 k^2}}{6\gamma(1+k)}. \quad (4.63)$$

En este caso, la aproximación para baja frecuencia de RPP en el rango precrítico decrece desde la incidencia normal hasta que se consigue este valor, después del cual $|RPP|$ comienza a incrementarse nuevamente hasta que se alcanza el ángulo crítico de la onda P, donde la aproximación para bajas frecuencia se rompe.

Para $\gamma < 1/8$ y $k \geq 8\gamma^2/(1 - 8\gamma)$, el valor aproximado de $|RPP|$ se incrementa monótonamente desde incidencia normal hasta el ángulo crítico de la onda P de manera tal que el mínimo valor es realmente el de incidencia normal.

4.4.2.6.- Ejemplo numérico.

Las figuras 18 muestra las formas de onda para una ondícula Ricker incidente con una frecuencia central de 40 Hz. a diversas lentitudes horizontales (que debería ser visto como un amplio rango de distancias fuente-receptor). Los respectivos coeficientes de reflexión son mostrados inicialmente. Los parámetros del medio isotrópico son: $\alpha=3$ Km/s, $\beta=2$ Km/s, y $\rho = 2.5$ Kg/m³, $\rho\alpha^2 = 22.5$ GPa y $\rho\beta^2 = 10$ Gpa. Las docilidades de la fractura son $Z_T = 0.6$ y $Z_N = 0.2$ m/GPa. Los respectivos espesores equivalentes de la fractura son $L_T = 6$ m y $L_N = 4.5$ m. Estas formas de onda fueron calculadas exactamente para una lentitud dada en el dominio de la frecuencia. Para cada frecuencia la ondícula fuente es multiplicada con el correspondiente coeficiente de reflexión y el resultado es la transformada inversa para obtener el pulso de la fuente modificado. En la frecuencia central de la fuente, $\Omega_N = 0.19$ y $\Omega_T = 0.375$. Aunque estas frecuencia adimensionales no son tan bajas, el pulso reflejado se asemeja a la derivada de una ondícula Ricker debido a que el término dominante en la expansión de la frecuencia está aún dominando el término $i\omega$. El término de segundo orden en ω contribuye a la segunda derivada del pulso incidente componente de la forma total del pulso, el término de tercer orden en ω a la tercera derivada componente, y así sucesivamente.

Figura (18.1): Coeficiente de reflexión PP para una fractura que posee un valor de $\alpha=3$ Km/s, $\beta=2$ Km/s, y $\rho = 2.5$ Kg/m³, $\rho\alpha^2 = 22.5$ GPa y $\rho\beta^2 = 10$ GPa. Las docilidades de la fractura son $Z_T = 0.6$ y $Z_N = 0.2$ m/GPa. Los respectivos espesores equivalentes de la fractura son $L_T = 6$ m y $L_N = 4.5$ m. La frecuencia máxima es tal que $\Omega_{N \text{ Max}} = 0.19$ y $\Omega_{T \text{ Max}} = 0.375$. El eje de las abscisas es $\alpha p_1 = \text{sen}\theta p$. La línea azul es el coeficiente de reflexión y la verde es la fase normalizada sobre 10π .

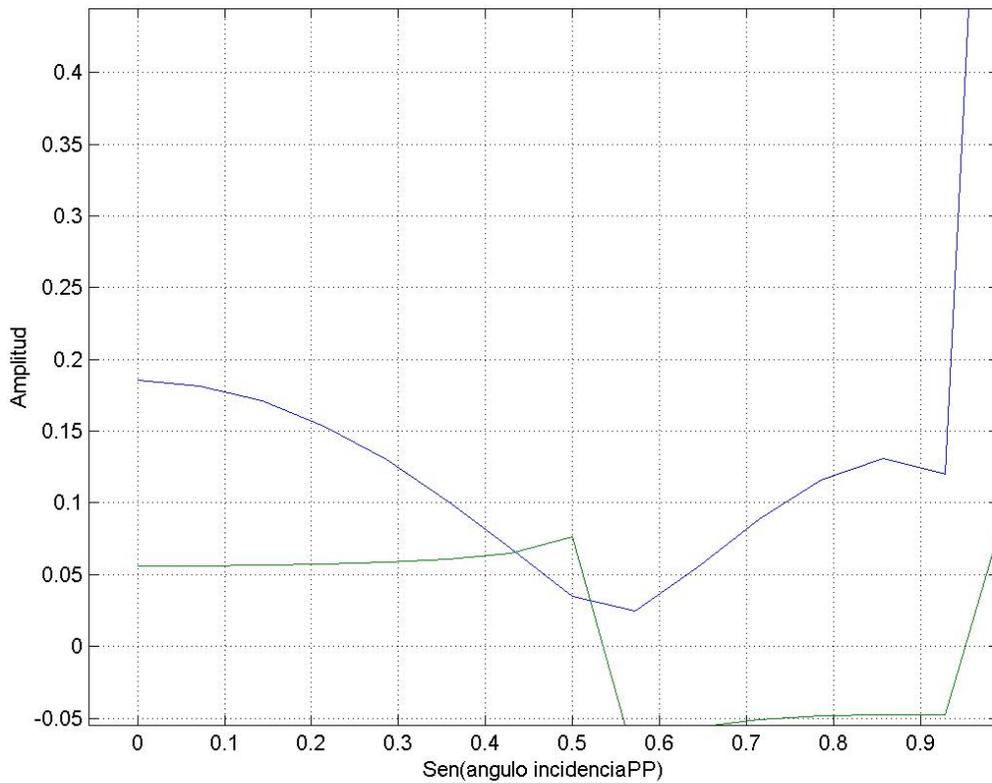


Figura (18.2): Coeficiente de reflexión SP para una fractura que posee un valor de $\alpha=3$ Km/s, $\beta=2$ Km/s, y $\rho = 2.5$ Kg/m³, $\rho\alpha^2 = 22.5$ GPa y $\rho\beta^2 = 10$ GPa. Las docilidades de la fractura son $Z_T = 0.6$ y $Z_N = 0.2$ m/GPa. Los respectivos espesores equivalentes de la fractura son $L_T = 6$ m y $L_N = 4.5$ m. La frecuencia máxima es tal que $\Omega_{N \text{ Max}} = 0.19$ y $\Omega_{T \text{ Max}} = 0.375$. El eje de las abscisas es $\alpha p_1 = \text{sen}\theta p$. La línea azul es el coeficiente de reflexión y la verde es la fase normalizada sobre 10π .

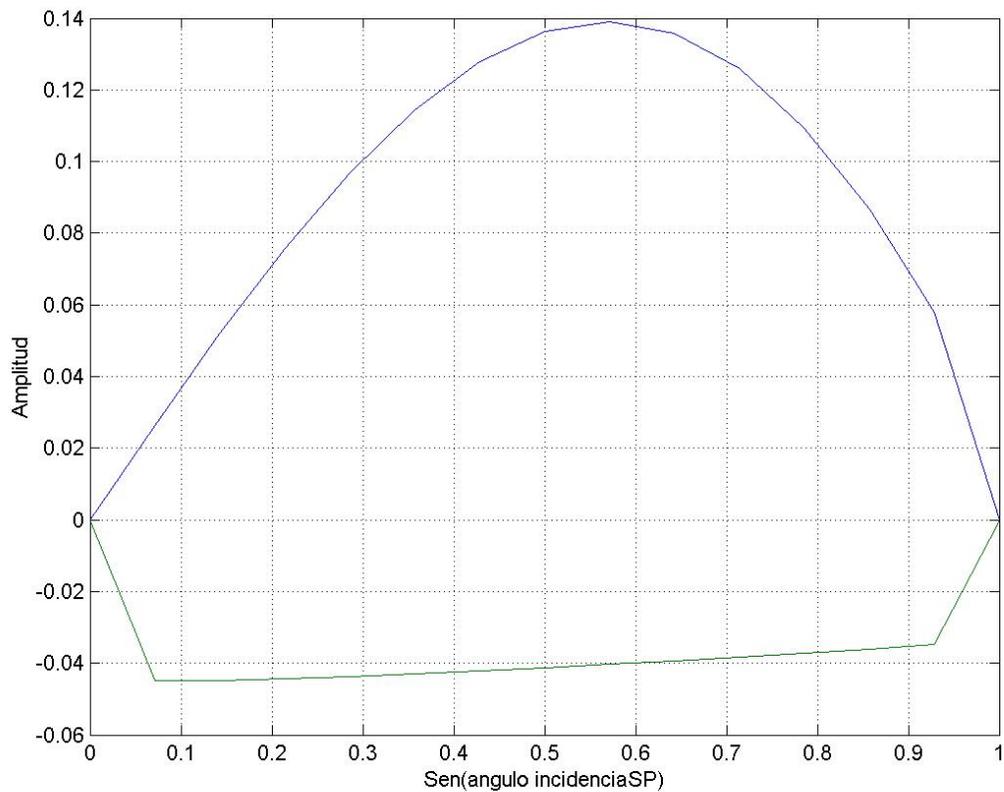


Figura (18.3): Coeficiente de reflexión PS para una fractura que posee un valor de $\alpha=3$ Km/s, $\beta=2$ Km/s, y $\rho = 2.5$ Kg/m³, $\rho\alpha^2 = 22.5$ GPa y $\rho\beta^2 = 10$ GPa. Las docilidades de la fractura son $Z_T = 0.6$ y $Z_N = 0.2$ m/GPa. Los respectivos espesores equivalentes de la fractura son $L_T = 6$ m y $L_N = 4.5$ m. La frecuencia máxima es tal que $\Omega_{N \text{ Max}} = 0.19$ y $\Omega_{T \text{ Max}} = 0.375$. El eje de las abscisas es $\beta p_1 = \text{sen}\theta_s$. La línea azul es el coeficiente de reflexión y la verde es la fase normalizada sobre 10π .

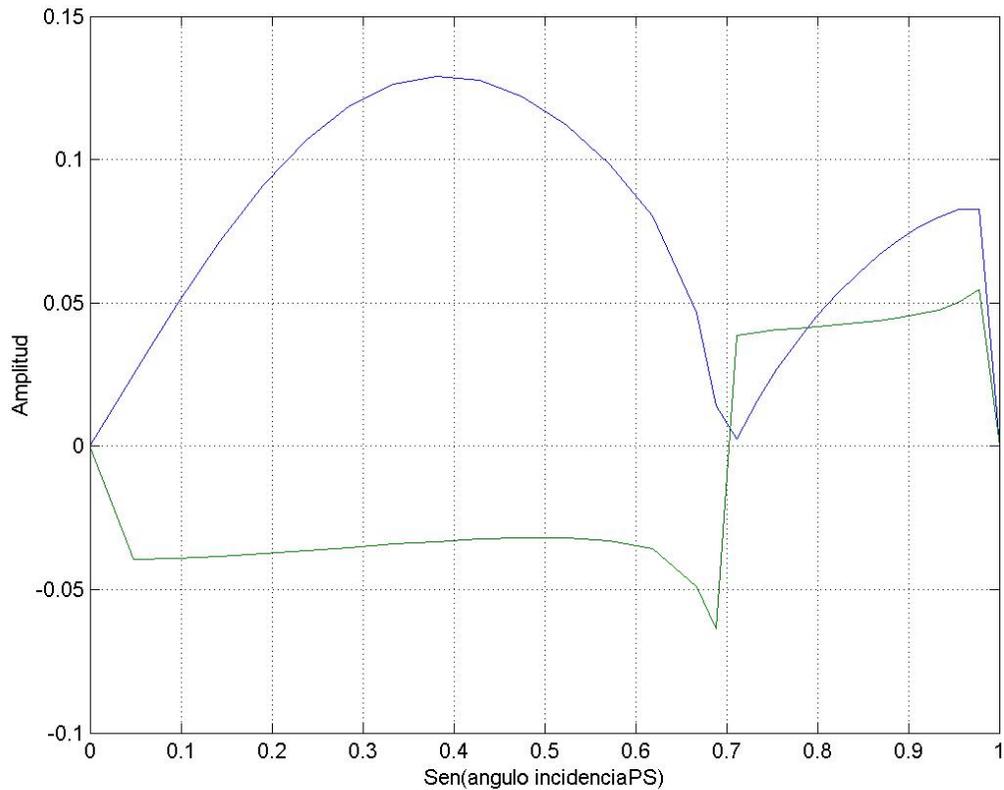


Figura (18.4): Coeficiente de reflexión SS para una fractura que posee un valor de $\alpha=3$ Km/s, $\beta=2$ Km/s, y $\rho = 2.5$ Kg/m³, $\rho\alpha^2 = 22.5$ GPa y $\rho\beta^2 = 10$ GPa. Las docilidades de la fractura son $Z_T = 0.6$ y $Z_N = 0.2$ m/GPa. Los respectivos espesores equivalentes de la fractura son $L_T = 6$ m y $L_N = 4.5$ m. La frecuencia máxima es tal que $\Omega_{N \text{ Max}} = 0.19$ y $\Omega_{T \text{ Max}} = 0.375$. El eje de las abscisas es $\beta p_1 = \text{sen}\theta_s$. La línea azul es el coeficiente de reflexión y la verde es la fase normalizada sobre 10π .

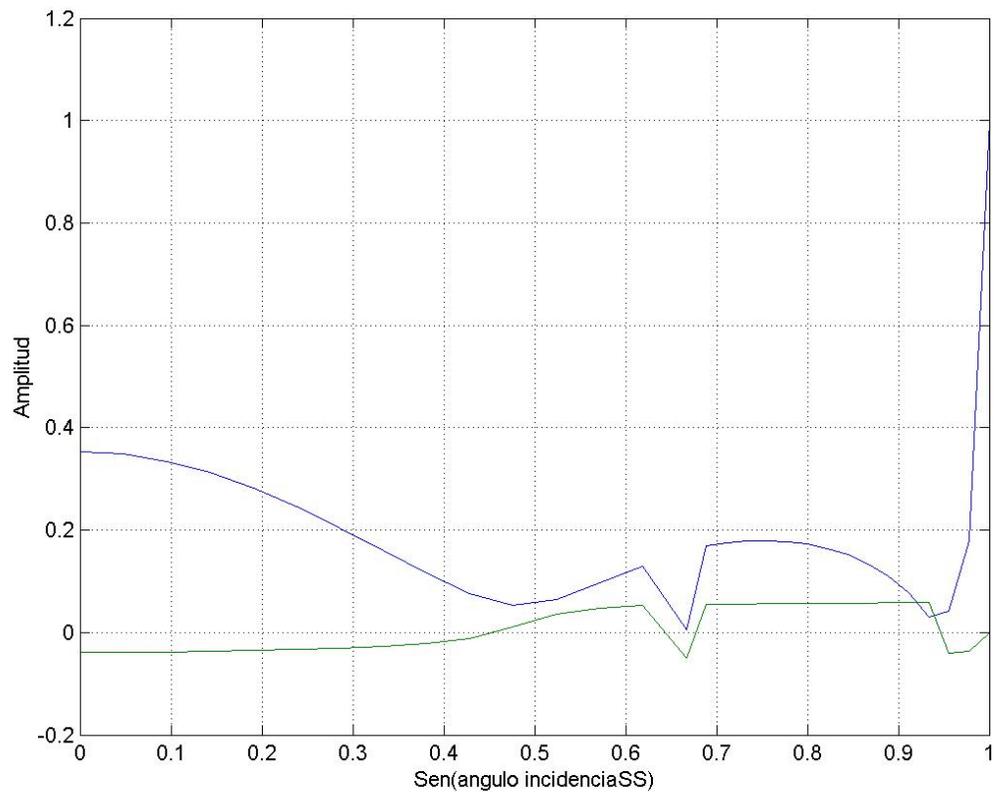


Figura (18.5). Formas de Ondas para las Reflexiones PP y SP.

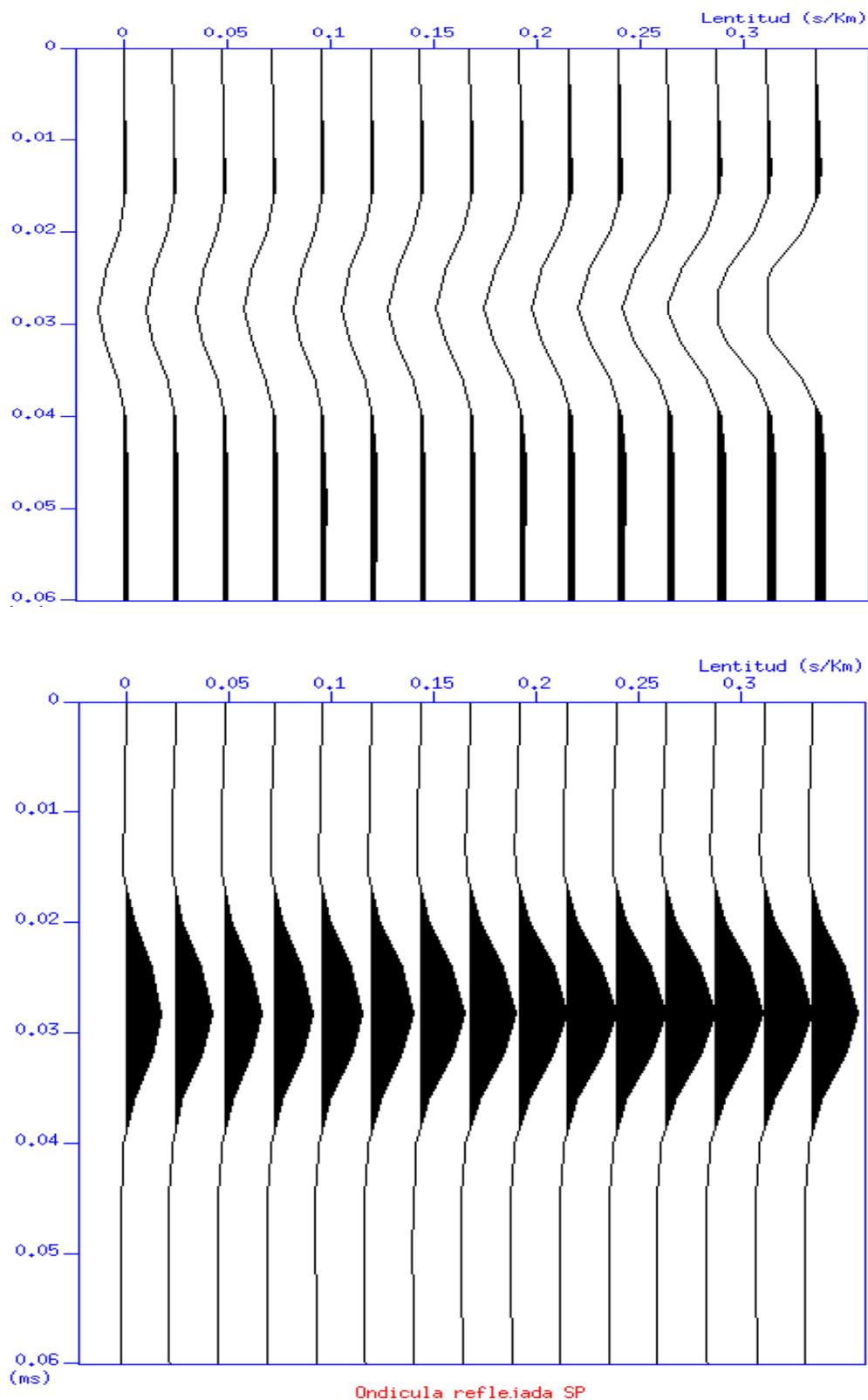
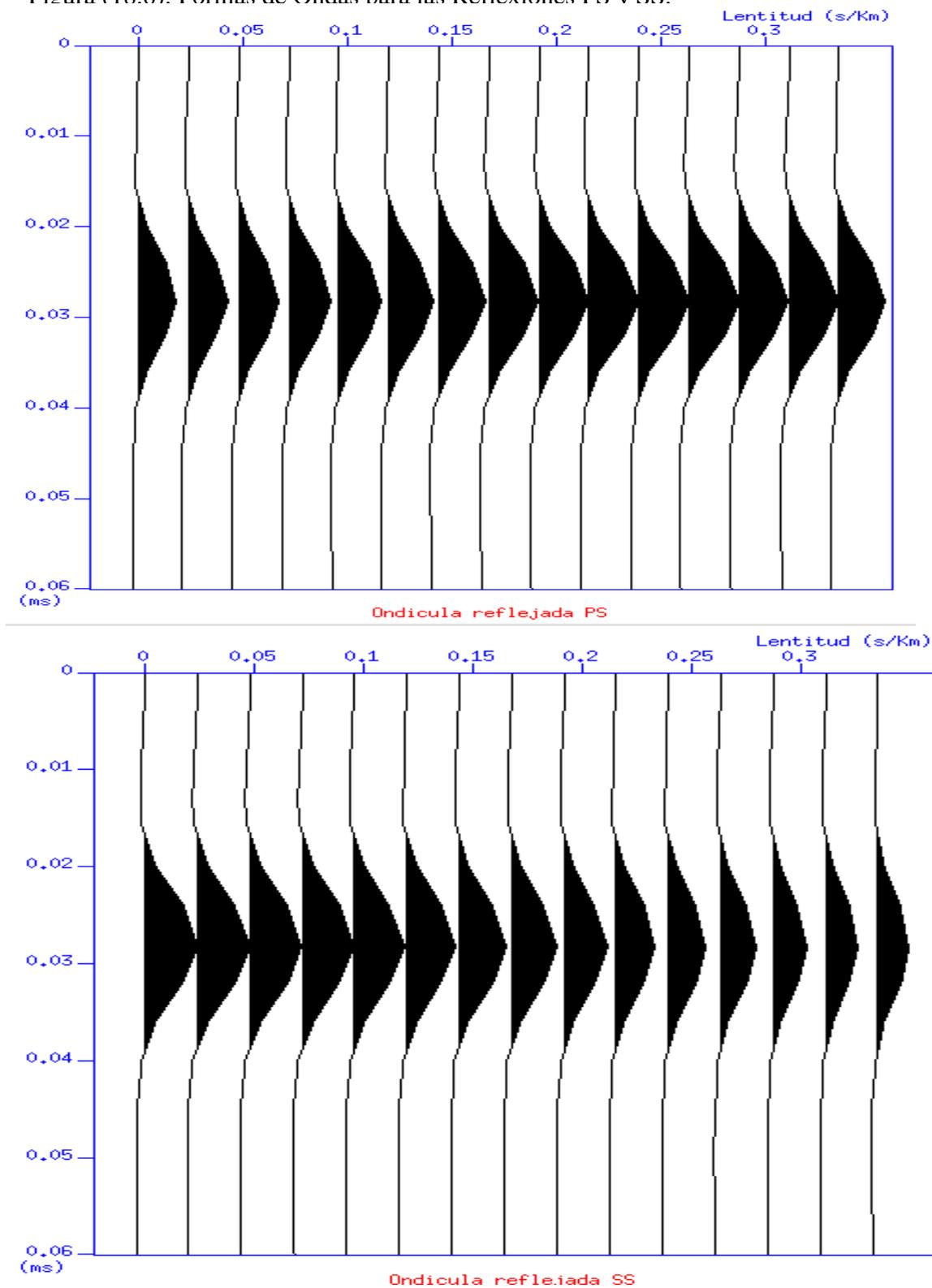


Figura (18.6): Formas de Ondas para las Reflexiones PS v SS.



Aquí, $\gamma = 4/9$ (un medio de baja razón de Poisson), mientras $k=1/3$. esto da ángulos de extinción para el pulso reflejado SS θ_{SS} de 30° y 60° . Las lentitudes horizontales asociadas con la más pequeña de estas es $p_1=0.25$, la cual concuerda muy bien con aquel mostrado en las formas de onda SS. Note que $\beta p_1 = \sin 30 = 1/2$ conduce a, de la ecuación (4.54), un estimado para k de $1/3$, el valor correcto. Para la frecuencia central de 40 Hz. Este es equivalente a $W_N(\Gamma^2 + \Psi_S \Psi_P) = 0.18$ y $W_T(\Gamma^2 + \Psi_S \Psi_P) = 0.27$, consistente con la suposición de que ellas son ambas $\ll 1$ y que D_N y D_T pueden ser aproximadas por la unidad.

Para el pulso reflejado PP, k es mucho más pequeño que $\gamma^2/(1-2\gamma)$, y las raíces PP están, aproximadamente, dadas por (para el primer orden en k):

$$\alpha^2 p_1^2 = \frac{k}{4\gamma^2(1+k)}, \quad 1 - \frac{k}{4\gamma^2}(1-2\gamma)^2. \quad (4.64)$$

En particular los ángulos de extinción, calculados de los valores de k y γ , son 34.34° y 85.66° . el más pequeño de éstos está asociado con $p_1=0.188$, el cual concuerda bien con el ángulo de extinción mostrado en las formas de onda PP y el cual parece estar en $p_1 \approx 0.19$, correspondiente a un valor de θ_{PP} de 34.75° y $\alpha^2 p_1^2 \equiv \text{Sen}^2 \theta_{PP} = 0.325$. Usando este valor y el valor de $k=1/3$ encontrado de la señal SS, la ecuación (4.57), conduce a un estimado para γ de 0.44, esencialmente el valor correcto. Ya que los datos para reflexiones cercanas al pasto serían, en general, difícil de obtener de manera confiable, ésta aproximación para el estimado de k de la señal reflejada SS para entonces usar los pulsos reflejados PP para estimar γ , parece posible. Aquí, en el valor de extinción para la onda PP, $W_N(\Gamma^2 + \Psi_S \Psi_P) = 0.18$ y $W_T(\Gamma^2 + \Psi_S \Psi_P) = 0.32$ – pequeños valores razonables.

Un buen estimado de las magnitudes de las docilidades de la fractura es difícil de hacer sin estimados reales de las amplitudes de los coeficientes de reflexión ya que

las formas de la respuesta de las distancias fuente-receptor dependen principalmente de la razón de docilidad mientras que la fuerza de las reflexiones dependen de las magnitudes de las docilidades. Asumiendo que datos ciertos de amplitud están disponible, el estimado más simple puede ser encontrado de la respuesta de una reflexión de distancia fuente-receptor cero, o incidencia normal, usando RPP y RSS de la ecuación (4.48). Si no se disponen de datos de distancia fuente-receptor cero, aún se puede encontrar la magnitud de docilidad. Para una lentitud horizontal (distinta de cero) dada, $|RPP|^2$ o $|RSS|^2$ puede ser escrita en términos de una razón de la función cuadrática de WT^2 . Por ejemplo, del coeficiente R_{PP} dado en la ecuación (4.46), $|RPP|^2$ se puede escribir:

$$|R_{PP}|^2 = \frac{(W_T \Psi_S \Psi_P - W_N \Gamma^2)^2 + W_T^2 W_N^2 (\Gamma^4 - \Psi_S^2 \Psi_P^2)}{1 + (W_T^2 + W_N^2) (\Gamma^2 + \Psi_S \Psi_P)^2 + W_T^2 W_N^2 (\Gamma^2 + \Psi_S \Psi_P)^4} \cdot (4.65)$$

El conocer k , el cual relaciona W_N a W_T , significa que se puede escribir una ecuación cuadrática en W_T^2 teniendo coeficientes dependiente de k , los parámetros del medio, y $|RPP|^2$. Tal método parece perfectamente robusto ya que un pequeño error en las amplitudes dará un pequeño error en docilidad, aunque su desventaja es su confianza en la certeza de los datos.

4.5.- Alcance de la sección.

Se ha analizado la respuesta sísmica de una falla simple, una junta, o fractura, las cuales son consideradas como una interfase de deslizamiento lineal. Así mismo, una fractura que posea una simetría especular paralela a la interfase, posee un conjunto de tres espesores del medio de fondo equivalente (dos si la fractura es simétrica rotacionalmente), los cuales dependen de las docilidades de las fracturas y de las propiedades materiales del medio de fondo. Además, estos espesores proporcionan

una escala contra la cual se mide la longitud de la onda incidente, conduciendo así a una medida adimensional de frecuencias. El régimen de bajas frecuencias se da cuando estas son mucho menos que la unidad; mientras que el régimen de altas frecuencias ocurre para frecuencias mucho más grandes que la unidad. Además, uno de los alcances más notables es la derivación de los coeficientes de transmisión y reflexión, para medios anisótropos (que sean a lo sumo monoclinicos, con el plano espejo paralelo a la interfase), mediante el uso de una formulación matricial fácil y concisa.

Lo novedoso del método es el hecho de formular las matrices de impedancia de una manera independiente de la frecuencia, sólo dependerá de la lentitud considerada viajando a través de la interfase, facilitando así el calculo de la respuesta de dispersión. Además, se analizó la respuesta que daría una falla o fractura horizontal que es paralela a la interfase, y que fue empotrada en un medio isotrópico y homogéneo posee las mismas propiedades el medio suprayacente como el infrayacente. Aún más, se procedió a considerar el caso bidimensional y se derivaron las formas explícitas de los coeficientes de transmisión y reflexión. Dichos coeficientes fueron escritos como la suma de dos términos, uno dependiente de la docilidad tangencial, y el otro dependiente de la docilidad normal. Para este tipo de caso isotrópico se han relacionado algunas de las características de la respuesta de dispersión con las propiedades de las fracturas, a saber, ciertas lentitudes de extinción y /o lentitudes asociadas a los mínimos que ocurren en los coeficientes de reflexión, así como los cambios que experimenta la forma del pulso reflejado como función de la frecuencia. Los valores de las lentitudes de extinción son distintos para las reflexiones PP y SS y se muestra cuando ocurren estos. Además, la lentitud de extinción SS a bajas frecuencias, dependerán solamente de la razón de la docilidad normal a la docilidad tangencial (k), mientras que la correspondiente lentitud de extinción (o en su defecto el valor mínimo) de la reflexión PP, dependerá tanto de k como de la razón de la velocidad de cizalla a la velocidad de onda compresional. La

razón k es un indicador de la presencia de gas en la fractura. Los valores de k que se aproximan a la unidad implican que la fractura es muy dócil en la dirección normal, lo cual puede estar asociado con la presencia de cantidades significativas de gas en la fractura. Mientras valores de k más pequeños que la unidad implican que la fractura es poco dócil en la dirección normal, por lo tanto, estos valores son indicadores de una fractura saturada de líquidos y que se encuentra en un medio relativamente impermeable.

SECCIÓN V

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

1. Las fracturas inducen sobre una roca no fracturada una docilidad excedente, la cual será la causante de la falta de rigidez efectiva a lo largo de las direcciones perpendiculares a las fracturas. Por lo tanto, la velocidad de la onda S que se polarice a lo largo de la orientación de las fracturas, será mayor que aquella polarizada de manera perpendicular a las mismas.
2. Las fracturas están perfectamente definidas, en el caso más general, por seis parámetros físicos denominados docilidades. Comúnmente son modeladas como superficies de deslizamiento lineal.
3. El ángulo de polarización horizontal, ϕ_H , es función de los ángulos azimutales y polares de los sistemas de fracturas que se interceptan, y está perfectamente definido por una deducción teórica para el caso particular de fracturas verticales. Por lo que el uso de la fórmula teórica propuesta por MacBeth (1997) tiene sus restricciones.
4. Cuando ambos sistemas son verticales y de igual densidad de fracturamiento, el ángulo de polarización horizontal es un promedio simple de los rumbos de los sistemas.
5. El estudio de las polarizaciones, y la determinación del ángulo de polarización horizontal (ϕ_H), no son suficientes para determinar con certeza la orientación espacial de fracturas que se interceptan a un ángulo no recto y que no son verticales.
6. Un sistema de fracturas vertical se hace dominante sobre otro sistema inclinado, a pesar de que posea menor densidad de fracturamiento. A pesar de esto, cuando la densidad de fracturamiento del sistema vertical es mayor o

igual a aquella del sistema inclinado, la variación del ángulo ϕ_H dependerá más del contraste de densidades de fracturas que de la inclinación relativa entre ellas.

7. El uso de los coeficientes de reflexión y las variaciones que éste pueda presentar, es importante al momento de determinar propiedades de las fracturas, entre las que destaca la docilidades relativas de las fracturas y la determinación del contenido de fluidos.
8. Para el caso de una fractura empotrada en un medio homogéneo, existen valores de lentitudes en los cuales los coeficientes de reflexión se extinguen o se vuelven muy pequeños. En el régimen de bajas frecuencias, estos son indicadores del cociente de docilidades (k) y por consiguiente del contenido de fluido, para el caso de reflexiones SS. Mientras que para las reflexiones PP son función del valor de k y de la razón de la velocidad de onda S a la velocidad de onda P, del medio isotrópico de la roca no fracturada.

Se recomienda hacer un estudio de las polarizaciones de las ondas S, para el caso de una incidencia oblicua y realizar un tratamiento estadístico de los datos, con el fin de determinar relaciones más sólidas entre el ángulo de polarización horizontal (ϕ_H) y los rumbos de las fracturas junto con sus intensidades de fracturamiento. Así mismo, se recomienda hacer un estudio de las variaciones de los coeficientes de reflexión para casos complejos de medios monoclinicos.

SECCIÓN VI

BIBLIOGRAFÍA

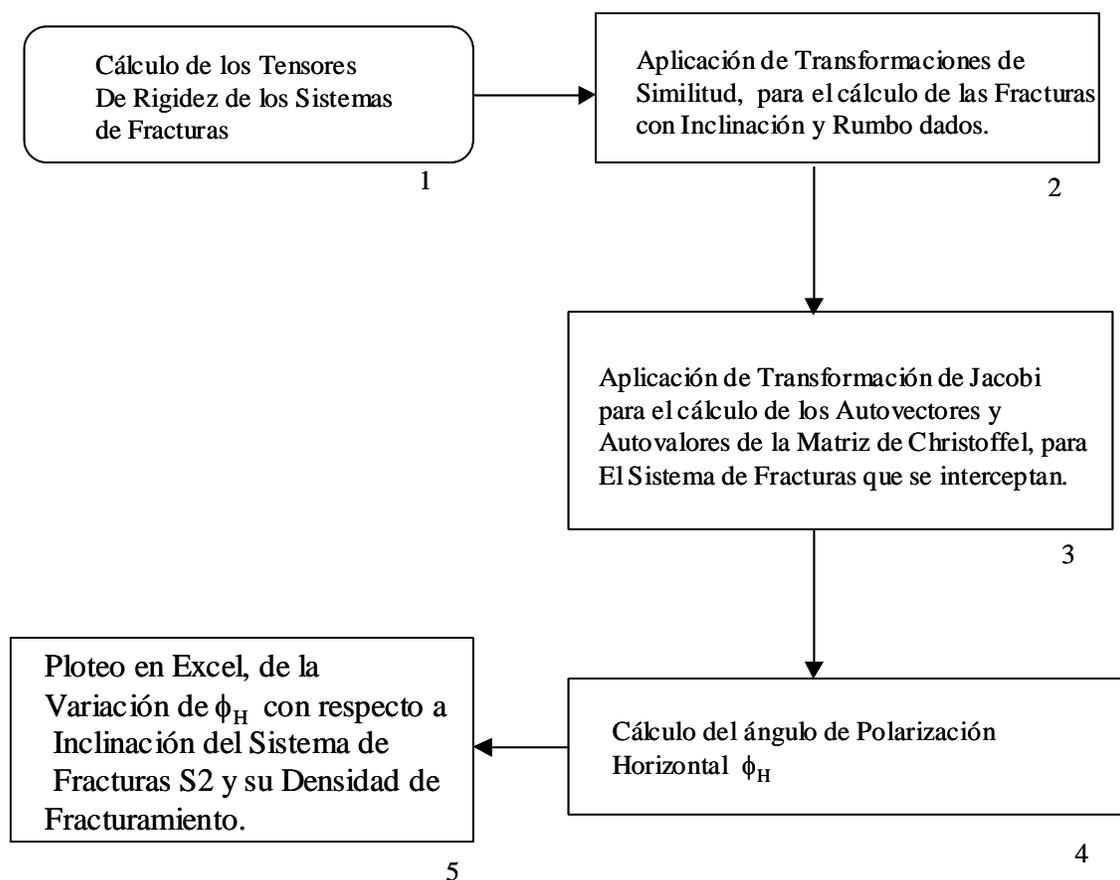
- Coates. R., y Schoenberg. M., (1995). **Finite-difference Modeling of Faults and Fractures**. Geophysics. Vol. 60, No. 5; p. 1514 – 1526.
- Haugen. G., y Schoenberg. M., (2000). **The echo of a Fault o Fracture**. Geophysics. Vol. 65, No. 1; p. 176 – 189.
- Hudson. J. A., (1981). **Wave speeds and attenuation of elastic waves in material containing cracks**. Geophys. J. R. Vol. 64, p. 133 – 150.
- Kostrov. B. V., y Das. S., (1988). **Principles of earthquake source mechanics**. Cambridge University Press. New York.
- Landau y Lifshitz., (1969). Teoría de la Elasticidad. Editorial Reverté, S.A. Barcelona.
- MacBeth. C., (1997). Interpreting qS1 Polarizations due to Intersecting Fractures. Geophysical Prospecting. Vol. 45; p 758 – 761.
- Noguera. C. O., (1995). **Un Enfoque birrefringente para la onda S**. Dpto. de Geofísica, Escuela de Geología, Minas y Geofísica. Falcultad de Ingeniería, U.C.V.
- Pávlov. P. V., y Jojlov. A. F., (1987). **Física del estado sólido**. Editorial Mir. Moscú.
- Poblete. W., (1991). **Elementos de la Teoría Físico - Matemática de los mecanismos focales y sismos de foco profundo**. Dpto. de Geofísica, Escuela de Geología, Minas y Geofísica. Falcultad de Ingeniería, U.C.V.
- Schoenberg. M., Dean. S., y Sayers. C., (1999). **Azimuth-dependent tuning of seismic waves reflected from fractured reservoirs**. Geophysics. Vol. 64, No. 4; p. 1160 – 1171.

- Schoenberg. M., y Muir. N., (1989). **A calculus for finely layered anisotropic media.** Geophysics. Vol. 54, No. 4; p. 581 – 589.
- Sokolnikoff. I. S., (1951). **Tensor Analysis – Theory and Applications.** Wiley Press.
- Sommerfeld. A., (1964). **Mechanics of deformable bodies.** Academic Press. New York.
- Thomsen. L., (1988). **Reflection seismology over azimuthally anisotropic media.** Geophysics. Vol. 53, No. 3; p. 304 – 313.
- Tichelaar. B., y Hatchell. P., (1997). **Inversion of S-C borehole flexural waves to determine anisotropy in a fractured carbonate reservoir.** Geophysics. Vol. 62, No. 5; p. 1432 – 1441.
- Winterstein. D., (1990). **Velocity anisotropy terminology for geophysicists.** Geophysics. Vol. 55, No. 8; p. 1070 – 1088.

SECCIÓN VII

APÉNDICES

(A-1) Diagrama de flujo que indica el manejo de datos usados en la Sección III, para el cálculo del ángulo de polarización horizontal (ϕ_H), correspondiente a un sistema de Fracturas que se interceptan:



1: Uso del Programa Cracks.for (Dr. Andrey Ortega, PDVSA INTEVEP).

2: Uso del Programa Stiffnessrotation_3_1_gral_matlab.for

c*****

Archivo Principal:

c This program applies a general clockwise rotation to a Cmn
 c stiffness tensor: 1 about y axis (fractures dipping) and after
 c about z axis.

```

c   Coded by Roberto Falcon. Los Teques 27/11/2001.
c   which will be particularized to a general propagation,
c   Christoffel equation...
c   Last modification 12/4th/2001,12/6th/2001,12/11st/2001
c   01/7th/2002
c   01/9th/2002
c   01/24th/2002
c*****
**
c
  parameter(nmax=190,nin=30,ndim=3,nsto=3)
  real matrixc1(6,6),matrixc2(6,6),stiffness1(6,6),stiffness(6,6)
  real stiffnessx(6,6),azimut,polar,ay(3,3),az(3,3)
  real azim(10),pol(6),kvector(3),ct(6,6),kx,ky,kz
  real angle(10,9,2),angle11,angle12,phi11,phi12
  real tensor(3,3),suma(3,3),e1,e2,phiangle,tanphiangle
  real angle21,angle22,phi21,phi22,gtheta1,gtheta2,phianglenum
  real matrixv(ndim,ndim),vectord(ndim)
  real duplid(3),modid(3),duplisum(3,3),modisum(3,3)
  character*30 inputfile(nin),tensorfile(nmax)
  character*5 vectors(ndim)
  integer nini,ninput,nl,nm,nll,nmm,a,aa,ap,xx,t1,t2,nrota,nmaux
  pi=4.0*atan(1.0)
c*****
**
c
  open(30,file='parameters.dat')
  read(30,*)ninput
  write(*,*)ninput
  DO m=1,ninput
  read(30,'(a30)')inputfile(m)
  write(*,*)inputfile(m)
  ENDDO
  close(30)
c
c
do i=1,10
  do j=1,9
    angle(i,j,1)=float(i-1)*10.0
    if (j.ge.i)then
      angle(i,j,2)=float(j)*10.0
    else
      angle(i,j,2)=float(j-1)*10.0
    end if
  end do
end do

```

```

        endif
    enddo
enddo
c
do i=1,10
    azim(i)=float(i-1)*10.0
enddo
c
pol(1)=0.0
pol(2)=15.0
pol(3)=30.0
pol(4)=45.0
pol(5)=60.0
pol(6)=90.0
c
vectors(1)='qs2'
vectors(2)='qs1'
vectors(3)='qp'
c
c*****
**
c*****
**
    open(10,file='datosmatlab1gral_matlab.dat')
    open(12,file='datos3dgral_soporte_malab.dat')
    do l=1,20,1
c
c    We are applying all the combinatory 0-90 degrees
c    to all the Cracks densities: 0.01-0.20
c
        do i=1,6
            do j=1,6
                stiffness1(i,j)=0.0
                matrixc1(i,j)=0.0
            enddo
        enddo
c
    open(20,file=inputfile(1))
    do i=1,6
        do j=1,6
            read(20,*)data
            matrixc1(i,j)=data
        enddo
    enddo

```

```

        enddo
        close(20)
        e1=matrixc1(4,4)-matrixc1(5,5)
c*****
**
c*****
**
        do m=2,20,2
c         write(10,*)l
c         write(10,*)m
c         write(12,*)'tensores involucrados',l,m
        do i=1,6
        do j=1,6
            matrixc2(i,j)=0.0
        enddo
        enddo
c
        open(40,file=inputfile(m))
        do i=1,6
        do j=1,6
            read(40,*)data
            matrixc2(i,j)=data
        enddo
        enddo
        close(40)
        e2=matrixc2(4,4)-matrixc2(5,5)
c         write(10,*)e1,e2
c
c*****
**
c         Phi azimuthal-angle Calculus,Rotation and PRINTING OUT...
c*****
**
c
        nl=1
        do nm=6,6
            phi11=angle(nl,nm,1)
            phi12=angle(nl,nm,2)
c         write(10,*)phi11
c         write(10,*)phi12
c         write(12,*)'azimut de las fracturas (grados)',phi11,phi12
            angle11=phi11*pi/180.0
            angle12=phi12*pi/180.0

```

```

c
    nll=1
    do nmm=1,10,1
        phi21=angle(nll,nll,1)
        phi22=angle(nmm,nll,1)
        angle21=phi21*pi/180.0
    angle22=phi22*pi/180.0
        gtheta1=(cos(2.0*angle21))**2-(sin(angle21))**2
        gtheta2=(cos(2.0*angle22))**2-(sin(angle22))**2
        tanphiangle=(e1*gtheta1*sin(2.0*angle11)
.+e2*gtheta2*sin(2.0*angle12))
./(e1*gtheta1*cos(2.0*angle11)
.+e2*gtheta2*cos(2.0*angle12))
        phiangle=float(90)*atan(tanphiangle)/pi
c
c*****
**
c        write(10,*)phi21
c        write(10,*)phi22

        write(12,*)'Fract2:',m,phi12,phi22
c    Rotating Tensor T1...
c    for this special case, we let the commands like
c    comments...
c
c        do i=1,6
c            do j=1,6
c                stiffness1(i,j)=0.0
c                stiffness(i,j)=0.0
c            enddo
c        enddo
c
c        ay(1,1)=cos(angle21)
c        ay(1,2)=0.0
c        ay(1,3)=-sin(angle21)
c        ay(2,1)=0.0
c        ay(2,2)=1.0
c        ay(2,3)=0.0
c        ay(3,1)=sin(angle21)
c        ay(3,2)=0.0
c        ay(3,3)=cos(angle21)
c        az(1,1)=cos(angle11)
c        az(1,2)=-sin(angle11)

```

```

c          az(1,3)=0.0
c          az(2,1)=sin(angle11)
c          az(2,2)=cos(angle11)
c          az(2,3)=0.0
c          az(3,1)=0.0
c          az(3,2)=0.0
c          az(3,3)=1.0
c      call bondt(ay,matrixc1,stiffness)
c      call bondt(az,stiffness,stiffness1)
c          do i=1,6
c              do j=1,6
c                  stiffnessx(i,j)=stiffness1(i,j)
c                      stiffnessx(i,j)=matrixc1(i,j)
c              enddo
c          enddo
c
c
c*****
**
c          do i=1,6
c              do j=1,6
c                  stiffness1(i,j)=0.0
c                  stiffness(i,j)=0.0
c              enddo
c          enddo
c
c          ay(1,1)=cos(angle22)
c          ay(1,2)=0.0
c          ay(1,3)=-sin(angle22)
c          ay(2,1)=0.0
c          ay(2,2)=1.0
c          ay(2,3)=0.0
c          ay(3,1)=+sin(angle22)
c          ay(3,2)=0.0
c          ay(3,3)=cos(angle22)
c
c          az(1,1)=cos(angle12)
c          az(1,2)=sin(angle12)
c          az(1,3)=0.0
c          az(2,1)=-sin(angle12)
c          az(2,2)=cos(angle12)
c          az(2,3)=0.0

```

```

        az(3,1)=0.0
        az(3,2)=0.0
        az(3,3)=1.0
        call bondt(ay,matrixc2,stiffness)
        call bondt(az,stiffness,stiffness1)
c
c
        do i=1,6
        do j=1,6
            stiffnessx(i,j)=stiffnessx(i,j)+stiffness1(i,j)
        enddo
    enddo
c
    do i=1,6
        do j=1,6
            stiffness1(i,j)=0.0
            ct(i,j)=stiffnessx(i,j)
        enddo
    enddo
c
c*****
**
c
c   Writing the Total Christoffel matrix for
c   vertical propagation along z-axis direction...

        do a=1,1
            do i=1,3
                vectord(i)=0.0
            do j=1,3
                matrixv(i,j)=0.0
            enddo
        enddo
        azimut=azim(a)*pi/180.0
c
        do ap=6,6
            polar=pol(ap)*pi/180.0
            write(12,*)'azim-pol:rad,grad',azimut,azim(aa),
.polar,pol(ap)
            kx=cos(polar)*cos(azimut)
            ky=cos(polar)*sin(azimut)
            kz=sin(polar)

```

```

do i=1,3
do j=1,3
suma(i,j)=0.0
enddo
enddo
suma(1,1)=ct(1,1)*kx*kx+ct(6,6)*ky*ky+ct(5,5)*kz*kz
.+2*ct(5,6)*ky*kz+2*ct(1,5)*kz*kx+2*ct(1,6)*kx*ky
suma(1,2)=ct(1,6)*kx*kx+ct(2,6)*ky*ky+ct(4,5)*kz*kz
.+(ct(4,6)+ct(2,5))*ky*kz+(ct(1,4)+ct(5,6))*kz*kx
.+(ct(1,2)+ct(6,6))*kx*ky
suma(1,3)=ct(1,5)*kx*kx+ct(4,6)*ky*ky+ct(3,5)*kz*kz
.+(ct(4,5)+ct(3,6))*ky*kz+(ct(1,3)+ct(5,5))*kz*kx
.+(ct(1,4)+ct(5,6))*kx*ky
c
suma(2,1)=suma(1,2)
suma(2,2)=ct(6,6)*kx*kx+ct(2,2)*ky*ky+ct(4,4)*kz*kz
.+2*ct(2,4)*ky*kz+2*ct(4,6)*kz*kx+2*ct(2,6)*kx*ky
suma(2,3)=ct(5,6)*kx*kx+ct(2,4)*ky*ky+ct(3,4)*kz*kz
.+(ct(4,4)+ct(2,3))*ky*kz+(ct(3,6)+ct(4,5))*kz*kx
.+(ct(2,5)+ct(4,6))*kx*ky
c
suma(3,1)=suma(1,3)
suma(3,2)=suma(2,3)
suma(3,3)=ct(5,5)*kx*kx+ct(4,4)*ky*ky+ct(3,3)*kz*kz
.+2*ct(3,4)*ky*kz+2*ct(3,5)*kz*kx+2*ct(4,5)*kx*ky
c
call jacobi(suma,ndim,nsto,vectord,matrixv,nrota)
c*****
**
c ORDERING THE EIGENVALUES AND ITS EIGENVECTORS...
do i=1,3
duplid(i)=vectord(i)
modid(i)=vectord(i)
do j=1,3
duplisum(i,j)=matrixv(i,j)
modisum(i,j)=matrixv(i,j)
enddo
enddo
c
do i=3,2,-1
do j=1,i-1,1
if(vectord(j).gt.duplid(i))then
modid(i)=vectord(j)

```

```

modid(j)=vectord(i)
vectord(j)=duplid(i)
vectord(i)=duplid(j)
duplid(i)=vectord(i)
duplid(j)=vectord(j)
c
modisum(1,i)=matrixv(1,j)
modisum(2,i)=matrixv(2,j)
modisum(3,i)=matrixv(3,j)
modisum(1,j)=matrixv(1,i)
modisum(2,j)=matrixv(2,i)
modisum(3,j)=matrixv(3,i)
c
matrixv(1,j)=duplisum(1,i)
matrixv(2,j)=duplisum(2,i)
matrixv(3,j)=duplisum(3,i)
matrixv(1,i)=duplisum(1,j)
matrixv(2,i)=duplisum(2,j)
matrixv(3,i)=duplisum(3,j)
c
duplisum(1,i)=matrixv(1,i)
duplisum(2,i)=matrixv(2,i)
duplisum(3,i)=matrixv(3,i)
duplisum(1,j)=matrixv(1,j)
duplisum(2,j)=matrixv(2,j)
duplisum(3,j)=matrixv(3,j)
c
endif
enddo
enddo
c
*****
**
c
          phianglenum=0.0
do i=1,ndim
  write(12,*)vectors(i),vectord(i)
  write(12,*)vectors(i),
.matrixv(1,i),matrixv(2,i),matrixv(3,i)
  if(i.eq.1)then
    est1=float(180)*acos(matrixv(1,1))/pi
    est2=float(180)*acos(matrixv(2,1))/pi
    est3=float(180)*acos(matrixv(3,1))/pi

```

```

                write(12,*)'dir cos:rad,grades',
.acos(matrixv(1,1)),est1,acos(matrixv(2,1)),est2,
.acos(matrixv(3,1)),est3
            else
            if (i.eq.2)then
                est1=float(180)*acos(matrixv(1,2))/pi
                est2=float(180)*acos(matrixv(2,2))/pi
                est3=float(180)*acos(matrixv(3,2))/pi
                write(12,*)'dir cos:rad,grades',
.acos(matrixv(1,2)),est1,acos(matrixv(2,2)),est2,
.acos(matrixv(3,2)),est3
                    phianglenum=est2
            else
                est1=float(180)*acos(matrixv(1,3))/pi
                est2=float(180)*acos(matrixv(2,3))/pi
                est3=float(180)*acos(matrixv(3,3))/pi
                write(12,*)'dir cos:rad,grades',
.acos(matrixv(1,3)),est1,acos(matrixv(2,3)),est2,
.acos(matrixv(3,3)),est3
            endif
            endif
            enddo

                write(10,27)phi22,phiangle,phianglenum
                write(12,*)'Phi calculated & numerici, # of rotat',
. phiangle,phianglenum,nrota
c
c*****
**
c
c*****
**

                enddo
                enddo
c
                enddo
                enddo
                enddo
            enddo
c
                close(10)
                close(12)
27    format(f4.1,2x,f6.1,2x,f6.1)
                stop

```

end

Subrutina que aplica Transformación Similitud a un Tensor dado:

```

C*****
**
c
c   This subroutine applies a Bond's Trasformation for a matrix-
c   rotation giving...
c   Coded by Roberto Falcòn, Cs 2002/28th/01...
c
c   subroutine bondt(a,c,stiffrot)
c
c   real a(3,3),c(6,6),stiffrot(6,6),m(6,6),mt(6,6),aux(6,6)
C*****
**
c   defining the Bond's transformation matrixes...
C*****
**
      m(1,1)=a(1,1)**2
      m(1,2)=a(1,2)**2
      m(1,3)=a(1,3)**2
      m(1,4)=2*a(1,2)*a(1,3)
      m(1,5)=2*a(1,3)*a(1,1)
      m(1,6)=2*a(1,1)*a(1,2)
c
      m(2,1)=a(2,1)**2
      m(2,2)=a(2,2)**2
      m(2,3)=a(2,3)**2
      m(2,4)=2*a(2,2)*a(2,3)
      m(2,5)=2*a(2,3)*a(2,1)
      m(2,6)=2*a(2,1)*a(2,2)
c
      m(3,1)=a(3,1)**2
      m(3,2)=a(3,2)**2
      m(3,3)=a(3,3)**2
      m(3,4)=2*a(3,2)*a(3,3)
      m(3,5)=2*a(3,3)*a(3,1)
      m(3,6)=2*a(3,1)*a(3,2)
c
      m(4,1)=a(2,1)*a(3,1)
      m(4,2)=a(2,2)*a(3,2)
      m(4,3)=a(2,3)*a(3,3)
      m(4,4)=a(2,2)*a(3,3)+a(2,3)*a(3,2)
      m(4,5)=a(2,1)*a(3,3)+a(2,3)*a(3,1)

```

```

m(4,6)=a(2,2)*a(3,1)+a(2,1)*a(3,2)
c
m(5,1)=a(3,1)*a(1,1)
m(5,2)=a(3,2)*a(1,2)
m(5,3)=a(3,3)*a(1,3)
m(5,4)=a(1,2)*a(3,3)+a(1,3)*a(3,2)
m(5,5)=a(1,3)*a(3,1)+a(1,1)*a(3,3)
m(5,6)=a(1,1)*a(3,2)+a(1,2)*a(3,1)
c
m(6,1)=a(1,1)*a(2,1)
m(6,2)=a(1,2)*a(2,2)
m(6,3)=a(1,3)*a(2,3)
m(6,4)=a(1,2)*a(2,3)+a(1,3)*a(2,2)
m(6,5)=a(1,3)*a(2,1)+a(1,1)*a(2,3)
m(6,6)=a(1,1)*a(2,2)+a(1,2)*a(2,1)
c
do i=1,6
  do j=1,6
    mt(i,j)=m(j,i)
  enddo
enddo
c
c*****
**
c
c          C'=m C mt
c*****
**
c
c      aux=m C
c          C'=aux mt
c*****
**
c
do i=1,6
  do j=1,6
    aux(i,j)=m(i,1)*c(1,j)+m(i,2)*c(2,j)+m(i,3)*c(3,j)
    .+m(i,4)*c(4,j)+m(i,5)*c(5,j)+m(i,6)*c(6,j)
  enddo
enddo
c
do i=1,6
  do j=1,6
    stiffrot(i,j)=aux(i,1)*mt(1,j)+aux(i,2)*mt(2,j)
    .+aux(i,3)*mt(3,j)+aux(i,4)*mt(4,j)+aux(i,5)*mt(5,j)
  enddo
enddo

```

```

.+aux(i,6)*mt(6,j)
      enddo
    enddo
  return
end

```

Archivo de Parámetros usados en el Programa Principal (2): Transmite al programa principal el numero de tensores a participar, según la densidad de fracturamiento, y el nombre de los archivos donde se encuentran las constantes de rigidez calculadas en (1).

```

20
ucracks.dat.cd1hti
ucracks.dat.cd2hti
ucracks.dat.cd3hti
ucracks.dat.cd4hti
ucracks.dat.cd5hti
ucracks.dat.cd6hti
ucracks.dat.cd7hti
ucracks.dat.cd8hti
ucracks.dat.cd9hti
ucracks.dat.cd10hti
ucracks.dat.cd11hti
ucracks.dat.cd12hti
ucracks.dat.cd13hti
ucracks.dat.cd14hti
ucracks.dat.cd15hti
ucracks.dat.cd16hti
ucracks.dat.cd17hti
ucracks.dat.cd18hti
ucracks.dat.cd19hti
ucracks.dat.cd20hti

```

3: Subrutina que aplica la diagonalización de una matriz 3x3, y determina tanto valores como vectores propios de la misma:

```

c*****
**
c*****
**
c
  subroutine jacobi(a,n,np,d,v,nrot)
  parameter (nmax=100)
  dimension a(np,np),d(np),v(np,np),b(nmax),z(nmax)
  do 12 ip=1,n
    do 11 iq=1,n
      v(ip,iq)=0.

```

```

11  continue
    v(ip,ip)=1.
12  continue
    do 13 ip=1,n
        b(ip)=a(ip,ip)
        d(ip)=b(ip)
        z(ip)=0.
13  continue
    nrot=0
    do 24 i=1,50
        sm=0.
        do 15 ip=1,n-1
            do 14 iq=ip+1,n
                sm=sm+abs(a(ip,iq))
14  continue
15  continue
        if(sm.eq.0.)return
        if(i.lt.4)then
            tresh=0.2*sm/n**2
        else
            tresh=0.
        endif
        do 22 ip=1,n-1
            do 21 iq=ip+1,n
                g=100.*abs(a(ip,iq))
                if((i.gt.4).and.(abs(d(ip))+g.eq.abs(d(ip)))
*          .and.(abs(d(iq))+g.eq.abs(d(iq))))then
                    a(ip,iq)=0.
                else if(abs(a(ip,iq)).gt.tresh)then
                    h=d(iq)-d(ip)
                    if(abs(h)+g.eq.abs(h))then
                        t=a(ip,iq)/h
                    else
                        theta=0.5*h/a(ip,iq)
                        t=1./(abs(theta)+sqrt(1.+theta**2))
                        if(theta.lt.0.)t=-t
                    endif
                    c=1./sqrt(1+t**2)
                    s=t*c
                    tau=s/(1.+c)
                    h=t*a(ip,iq)
                    z(ip)=z(ip)-h
                    z(iq)=z(iq)+h

```

```

d(ip)=d(ip)-h
d(iq)=d(iq)+h
a(ip,iq)=0.
do 16 j=1,ip-1
  g=a(j,ip)
  h=a(j,iq)
  a(j,ip)=g-s*(h+g*tau)
  a(j,iq)=h+s*(g-h*tau)
16  continue
do 17 j=ip+1,iq-1
  g=a(ip,j)
  h=a(j,iq)
  a(ip,j)=g-s*(h+g*tau)
  a(j,iq)=h+s*(g-h*tau)
17  continue
do 18 j=iq+1,n
  g=a(ip,j)
  h=a(iq,j)
  a(ip,j)=g-s*(h+g*tau)
  a(iq,j)=h+s*(g-h*tau)
18  continue
do 19 j=1,n
  g=v(j,ip)
  h=v(j,iq)
  v(j,ip)=g-s*(h+g*tau)
  v(j,iq)=h+s*(g-h*tau)
19  continue
  nrot=nrot+1
endif
21  continue
22  continue
do 23 ip=1,n
  b(ip)=b(ip)+z(ip)
  d(ip)=b(ip)
  z(ip)=0.
23  continue
24  continue
  pause '50 iterations should never happen'
  return
end

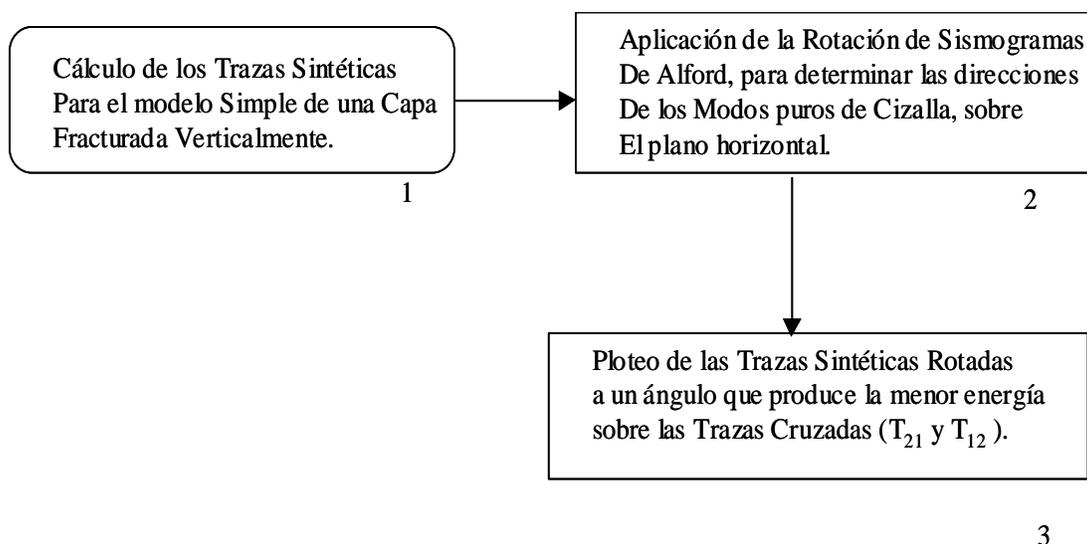
```

c

4: ϕ_H es calculado en la parte final del Programa Principal.

5: Uso de Excel, se generaron los archivos Datosmat60.xls y Datosmat90.xls.

(A-2) Diagrama de flujo que indica el manejo de datos usados en la Sección III Técnica de Alford para determinar el ángulo de polarización horizontal (ϕ_H).



1: Uso del Programa Reflexiones1.m:

```

% calculando un sismograma sintético, y la
% serie de reflectividades... Coded by Roberto
% 2002
%
%
clear all;
% definiendo parametros y variables...
%
z=input('Ingrese la profundidad de la primera capa. ');
vel1=input('Ingrese la velocidad S1 de la capa ');
vel2=input('Ingrese la velocidad S2 de la capa ');
fileout11='s11.dat';
fileout21='s21.dat';
fileout12='s12.dat';
fileout22='s22.dat';
%
teta1=input('Ingrese el ángulo entre las fracturas con la horizontal(inline)');
teta=(teta1*pi)/180;
dt=0.004;
  
```

```

t1=2*z/vel1;
t2=2*z/vel2;
aniso=abs((vel1/vel2)-1)*100;
dift=t2-t1;
%n1=ceil((2/3)*(dift/dt));
n1=64;
wo=45.0;
ao=1;
for j=1:n1
    times(j)=(j-1)*dt;
    s(j)=0.0;
end
[s]=ricker(dt,n1,wo,ao);

figure,
plot(s,times),xlabel('Amplitud de la Ondicula Ricker'),ylabel('segundos'),grid
set(gca,'xaxislocation','top')
set(gca,'ydir','reverse')
%
ns1=ceil(t1/dt);
ns2=ceil(t2/dt);
n2=ns2+50;
ymin=0.0;
ymax=n2*dt;
%
% Reflectividades sub(Receptor,FUENTE).
% FUENTE X...
for i=1:n2
    reflec11(i)=0.0;
    reflec21(i)=0.0;
    reflec12(i)=0.0;
    reflec22(i)=0.0;
end
%
for j=1:n2
    tiempos1(j)=(j-1)*dt;
end
%
reflec11(ns1)=(cos(teta))^2;
reflec11(ns2)=(sin(teta))^2;
reflec21(ns1)=sin(teta)*cos(teta);
reflec21(ns2)=-sin(teta)*cos(teta);
%
```

```

% FUENTE Y...

reflec22(ns1)=(sin(teta))^2;
reflec22(ns2)=(cos(teta))^2;
reflec12(ns1)=sin(teta)*cos(teta);
reflec12(ns2)=-sin(teta)*cos(teta);
%
%     PLOTTING
%
%
figure;
subplot(2,2,1)
plot(reflec11,tiempos1),xlabel('Fuente Impulsiva SV(x):Amplitud de los Impulsos
T11'),ylabel('segundos'),grid
set(gca,'xaxislocation','top')
set(gca,'ydir','reverse')
%
subplot(2,2,3)
plot(reflec21,tiempos1),xlabel('Fuente Impulsiva SV(x):Amplitud de los Impulsos
T21'),ylabel('segundos'),grid
set(gca,'xaxislocation','top')
set(gca,'ydir','reverse')
%
%
%figure;
subplot(2,2,2)
plot(reflec12,tiempos1),xlabel('Fuente SH(y):Amplitud de los Impulsos
T12'),ylabel('segundos'),grid
set(gca,'xaxislocation','top')
set(gca,'ydir','reverse')
%
subplot(2,2,4)
plot(reflec22,tiempos1),xlabel('Fuente SH(y):Amplitud de los Impulsos
T22'),ylabel('segundos'),grid
set(gca,'xaxislocation','top')
set(gca,'ydir','reverse')
%
[resu11]=xconv(s,n1,reflec11,n2);
[resu21]=xconv(s,n1,reflec21,n2);
[resu12]=xconv(s,n1,reflec12,n2);
[resu22]=xconv(s,n1,reflec22,n2);
%
este11=fopen(fileout11,'w');

```

```

este21=fopen(fileout21,'w');
este22=fopen(fileout22,'w');
este12=fopen(fileout12,'w');
%
n3=n1+n2-1
for j=1:n3
    tiempos(j)=(j-1)*dt;
% IMPRIMIENDO MIS RESULTADOS PARA EL USO DE MI RUTINA(Fortran)
DE DESACOPLE...
    fprintf(este11,'%f\n',resu11(j));
    fprintf(este21,'%f\n',resu21(j));
    fprintf(este12,'%f\n',resu12(j));
    fprintf(este22,'%f\n',resu22(j));
end
%
figure;
subplot(2,2,1)
plot(resu11,tiempos),xlabel('Traza Sintetica T11'),ylabel('segundos'),grid
set(gca,'xaxislocation','top')
set(gca,'ydir','reverse')
%
% figure;
subplot(2,2,3)
plot(resu21,tiempos),xlabel('Traza Sintetica T21'),ylabel('segundos'),grid
set(gca,'xaxislocation','top')
set(gca,'ydir','reverse')
%
% figure;
subplot(2,2,2)
plot(resu12,tiempos),xlabel('Traza Sintetica T12'),ylabel('segundos'),grid
set(gca,'xaxislocation','top')
set(gca,'ydir','reverse')
%
% figure;
subplot(2,2,4)
plot(resu22,tiempos),xlabel('Traza Sintetica T22'),ylabel('segundos'),grid
set(gca,'xaxislocation','top')
set(gca,'ydir','reverse')
%
fclose(este11);
fclose(este21);
fclose(este12);
fclose(este22);

```

```
fprintf(1,'%s %f\n','El porcentaje de anisotropia es: ',aniso);
*****
```

2: Uso del Programa rotar_trazas.for:

```
C 4C matrix rotation program....
c coded by Roberto.
c 2002.
c *****
c
c
c real u11(10,1000),u21(10,1000),u12(10,1000),u22(10,1000)
c real r(2,2),rinv(2,2),f(2,2),aux2(2,2),aux1(2,2),energia(360)
c real uro11(10,1000,360),uro21(10,1000,360)
c real uro12(10,1000,360),uro22(10,1000,360)
c real ejet(1000),dt
c real dupliener(360),modiener(360)
c real tpi,numera1,numera2,denomi1,parcial1,parcial2,campo,cuadra
c real fx,fy,ni,nf,dn
c integer nrecep,ntimes,grados(360),dupligrad(360),modigrad(360)
c integer low1,low2
c character*20 fileout1,fileout2,fileout3
c character*20 fileina,fileinb,fileinc,fileind
c character*20 fileout4,fileout5
c tpi=8.0*atan(float(1))
c
c
c Parameters file input.
c open(10,file='parametros.txt')
c
c read (10,'(a20)')fileina
c read (10,'(a20)')fileinb
c read (10,'(a20)')fileinc
c read (10,'(a20)')fileind
c read (10,'(a20)')fileout1
c read (10,'(a20)')fileout2
c read (10,'(a20)')fileout3
c read (10,'(a20)')fileout4
c read (10,'(a20)')fileout5
c read(10,*)nrecep,ntimes,dt,ni,nf,dn
c
c close(10)
c *****
c do i=1,ntimes
```

```

                ejet(i)=float(i-1)*dt
            enddo
c
    open(10,file=fileina)
    open(20,file=fileinb)
    open(30,file=fileinc)
    open(40,file=fileind)
    do i=1,nrecep
        do j=1,ntimes
            read(10,*)u11(j,i)
            read(20,*)u21(j,i)
            read(30,*)u12(j,i)
            read(40,*)u22(j,i)
        enddo
    enddo
    close(10)
    close(20)
    close(30)
    close(40)
c
c *****
c Making the calcules
c *****
c *** Computing the strength of fx and fx... *****
c
numera1=0.0
numera2=0.0
denomi1=0.0
do i=1,nrecep
    do j=1,ntimes
        campo=(u12(j,i)+u21(j,i))/2
c        write(*,*)campo
        parcial1=campo*u21(j,i)
        numera1=numera1+parcial1
        parcial2=campo*u12(j,i)
        numera2=numera2+parcial2
        cuadra=campo**2
        denomi1=denomi1+cuadra
    enddo
enddo
fx=numera1/denomi1
fy=numera2/denomi1
c *****

```

```

c      ***** U can be written as U=R G Rinv finv
c      ***** after, G=Rinv U f R *****
c      g==uro
c      this is the inversion...
c
do i=ni,nf,dn
  r(1,1)=cos((float(i)*tpi)/float(360))
  r(1,2)=-sin((float(i)*tpi)/float(360))
  r(2,1)=sin((float(i)*tpi)/float(360))
  r(2,2)=cos((float(i)*tpi)/float(360))
c
  rinv(1,1)=cos((float(i)*tpi)/float(360))
  rinv(1,2)=sin((float(i)*tpi)/float(360))
  rinv(2,1)=-sin((float(i)*tpi)/float(360))
  rinv(2,2)=cos((float(i)*tpi)/float(360))
  f(1,1)=1/fx
  f(1,2)=0
  f(2,1)=0
  f(2,2)=1/fy
  do j=1,nrecep
    do k=1,ntimes
      aux1(1,1)=rinv(1,1)*u11(k,j)+rinv(1,2)*u21(k,j)
      aux1(1,2)=rinv(1,1)*u12(k,j)+rinv(1,2)*u22(k,j)
      aux1(2,1)=rinv(2,1)*u11(k,j)+rinv(2,2)*u21(k,j)
      aux1(2,2)=rinv(2,1)*u12(k,j)+rinv(2,2)*u22(k,j)
c
      aux2(1,1)=aux1(1,1)*f(1,1)
      aux2(1,2)=aux1(1,2)*f(2,2)
      aux2(2,1)=aux1(2,1)*f(1,1)
      aux2(2,2)=aux1(2,2)*f(2,2)
c
      uro11(k,j,i)=aux2(1,1)*r(1,1)+aux2(1,2)*r(2,1)
      uro12(k,j,i)=aux2(1,1)*r(1,2)+aux2(1,2)*r(2,2)
      uro21(k,j,i)=aux2(2,1)*r(1,1)+aux2(2,2)*r(2,1)
      uro22(k,j,i)=aux2(2,1)*r(1,2)+aux2(2,2)*r(2,2)
c
c      *****
c
      enddo
      enddo
    enddo
c      *****
c      computing the lowest rotation angle...
c

```

```

do i=ni,nf,dn
  parcial1=0.0
  numer1=0.0
  parcial2=0.0
  denomi1=0.0
  do j=1,nrecep
    do k=1,ntimes
      parcial1=(uro12(k,j,i)**2)+(uro21(k,j,i)**2)
      numer1=numer1+parcial1
      parcial2=(uro11(k,j,i)**2)+(uro22(k,j,i)**2)
      denomi1=denomi1+parcial1+parcial2
    enddo
  enddo
  energia(i)=numer1/denomi1
  grados(i)=i
enddo
c
c   Writing the values of relative energy.
c
open(50,file=fileout5)
do i=ni,nf,dn
  write(50,99)grados(i),energia(i)
enddo
close(50)
c
c   Output...
c
c*****
**
c*****
**

do i=ni,nf,dn
  dupligrad(i)=grados(i)
  modigrad(i)=grados(i)
  dupliener(i)=energia(i)
  modiener(i)=energia(i)
enddo

c           ORDERING THE RELATIVE ENERGY VALUES...FOR OUTPUT
c           FROM HIGHER TO LOWER...
if(nf.ge.90)then
  do i=90,2,-1
    do j=1,i-1,1

```

```

                                if(energia(j).lt.dupliener(i))then
                                    grados(j)=dupligrad(i)
                                    grados(i)=dupligrad(j)
                                    dupligrad(i)=grados(i)
                                    dupligrad(j)=grados(j)
c
                                energia(j)=dupliener(i)
                                energia(i)=dupliener(j)
                                dupliener(i)=energia(i)
                                dupliener(j)=energia(j)
                                endif
                                enddo
                                enddo
                                low1=grados(90)
                                write(*,*)'el menor valor de energia para un angulo (<=90)
.es de ',low1,'grados'
                                endif
c
                                if(nf.ge.180)then
                                    do i=180,91,-1
                                        do j=91,i-1,1
                                            if(energia(j).lt.dupliener(i))then
                                                grados(j)=dupligrad(i)
                                                grados(i)=dupligrad(j)
                                                dupligrad(i)=grados(i)
                                                dupligrad(j)=grados(j)
c
                                            energia(j)=dupliener(i)
                                            energia(i)=dupliener(j)
                                            dupliener(i)=energia(i)
                                            dupliener(j)=energia(j)
c
                                            endif
                                        enddo
                                    enddo
                                enddo
                                low2=grados(180)
                                write(*,*)'el menor valor de energia para un angulo (90<x
.<=180) es de ',low2,'grados'
                                endif
c
c*****
**

```

```

c*****
**
c
c
c   Writing the U and lowest rotated values...
c
open(11,file=fileout1)
open(21,file=fileout2)
open(12,file=fileout3)
open(22,file=fileout4)
  open(30,file='param.dat')
  if(nf.ge.180)then
    write(30,88)2
    do i=ni,nf,dn
      do j=1,nrecep
        do k=1,ntimes
          write(11,*)ejet(k),uro11(k,j,low1),uro11(k,j,low2)
          write(21,101)ejet(k),uro21(k,j,low1),uro21(k,j,low2)
          write(12,101)ejet(k),uro12(k,j,low1),uro12(k,j,low2)
          write(22,*)ejet(k),uro22(k,j,low1),uro22(k,j,low2)
        enddo
      enddo
    enddo
  else
    write(30,88)1
    do i=ni,nf,dn
      do j=1,nrecep
        do k=1,ntimes
          write(11,*)ejet(k),uro11(k,j,low1)
          write(21,101)ejet(k),uro21(k,j,low1)
          write(12,101)ejet(k),uro12(k,j,low1)
          write(22,*)ejet(k),uro22(k,j,low1)
        enddo
      enddo
    enddo
  endif
close(11)
close(21)
close(12)
close(22)
  close(30)

80   format('iteracion No. :',i3)

```

```

82  format('iteracion No. :',i3,'Grados')
85  format('paso del tiempo',i4)
87  format('numero del receptor: ',i3,/)
88  format(i3)
90  format(' El nombre del archivo es :',(a80))
99  format(i3,2x,f10.7)
101 format(f10.5,2x,f10.5,2x,f10.5)
    stop
    end
*****

```

3: Uso del Programa Angulo4c1.m:

```

% Graficando la energia de los angulos de los sismogramas sinteticos,
% una vez desacoplados...arreglo 4C...
% Coded by Roberto
% 2002
%
%clf;
clear all;
% definiendos parametros y variables...
%
load param.dat

load energia.dat;

load rot11.dat;

load rot21.dat;

load rot12.dat;

load rot22.dat;
%

nop=param(1);
xx=energia(:,1);

yy=energia(:,2);

```

```
figure
```

```
plot(xx,yy),xlabel('Energia relativa de las crosslines funcion del angulo de
rotacion'),ylabel('% energia'),grid
set(gca,'xaxislocation','top')
set(gca,'ydir','reverse')
%
```

```
%
if nop==2
%
```

```
figure
```

```
subplot(2,2,1)
```

```
plot(rot11(:,2),rot11(:,1)),xlabel('Sismograma 11 rotado 1-90°'),ylabel('tiempo'),grid
set(gca,'xaxislocation','top')
set(gca,'ydir','reverse')
%
```

```
%
```

```
subplot(2,2,3)
```

```
plot(rot21(:,2),rot21(:,1)),xlabel('Sismograma 21 rotado 1-90°'),ylabel('tiempo'),grid
set(gca,'xaxislocation','top')
set(gca,'ydir','reverse')
%
```

```
%
```

```
subplot(2,2,2)
```

```
plot(rot12(:,2),rot12(:,1)),xlabel('Sismograma 12 rotado 1-90°'),ylabel('tiempo'),grid
set(gca,'xaxislocation','top')
set(gca,'ydir','reverse')
%
```

```
%
```

```
subplot(2,2,4)
```

```

plot(rot22(:,2),rot22(:,1)),xlabel('Sismograma 22 rotado 1-90°),ylabel('tiempo'),grid
set(gca,'xaxislocation','top')
set(gca,'ydir','reverse')
%

%

figure

subplot(2,2,1)

plot(rot11(:,3),rot11(:,1)),xlabel('Sismograma          11          rotado          91-
180°),ylabel('tiempo'),grid
set(gca,'xaxislocation','top')
set(gca,'ydir','reverse')
%

%

subplot(2,2,3)

plot(rot21(:,3),rot21(:,1)),xlabel('Sismograma          21          rotado          91-
180°),ylabel('tiempo'),grid
set(gca,'xaxislocation','top')
set(gca,'ydir','reverse')
%

%

subplot(2,2,2)

plot(rot12(:,3),rot12(:,1)),xlabel('Sismograma          12          rotado          91-
180°),ylabel('tiempo'),grid
set(gca,'xaxislocation','top')
set(gca,'ydir','reverse')
%

%

subplot(2,2,4)

plot(rot22(:,3),rot22(:,1)),xlabel('Sismograma          22          rotado          91-
180°),ylabel('tiempo'),grid

```

```
set(gca,'xaxislocation','top')
set(gca,'ydir','reverse')
%

else

%

figure

plot(rot11(:,2),rot11(:,1)),xlabel('Sismograma 11 rotado 1-90°'),ylabel('tiempo'),grid
set(gca,'xaxislocation','top')
set(gca,'ydir','reverse')
%

%

figure

plot(rot21(:,2),rot21(:,1)),xlabel('Sismograma 21 rotado 1-90°'),ylabel('tiempo'),grid
set(gca,'xaxislocation','top')
set(gca,'ydir','reverse')
%

%

figure

plot(rot12(:,2),rot12(:,1)),xlabel('Sismograma 12 rotado 1-90°'),ylabel('tiempo'),grid
set(gca,'xaxislocation','top')
set(gca,'ydir','reverse')
%

%

figure

plot(rot22(:,2),rot22(:,1)),xlabel('Sismograma 22 rotado 1-90°'),ylabel('tiempo'),grid
set(gca,'xaxislocation','top')
set(gca,'ydir','reverse')
%

end
```

(A-3) Diagrama de flujo que indica el manejo de datos usados en la Sección IV

1: Uso del Programa Haugen.m, para calcular de los Coeficientes de Reflexión en el caso de la formulación Isotrópica (Figuras 17 y 18):

```
% HAUGEN & SCHOENBERG, 2000
% Coded by Roberto, 02-22-2022
% 16-4-2002
% HAUGEN & SCHOENBERG...
% CODED BY ROBERTO... 21-02-2002
% Last modification 24-02-2002
% MATLAB ... 3-3-2002
% parameter(ns=50,ns1=25,ns2=50)
% real vp, rat2, vs, ohmt, ohmn, c, stheta, eje1(ns)
% real p3s, p3p, tau, sis, sip, wt, wn, dphi, eje2(ns2)
% real thetas, thetap, arg, vfix
% integer s, ds, nop
% complex(4) ni, dn, dt, tpp, repp, resp, p3p1
% complex(4) sip1, wn1, ress, reps
%
%% % Constants...For a given Zn/ZT, and Poisson ratio.***
% Here Zn/Zt=0.75 and PR=0.219, i.e., vs**2/vp**2=0.36
nop=2;
k=0.75;
zt=0.6;
zn=k*zt
if nop==1
    ohmt=0.06;
else
    ohmt=0.6;
end
rhob=2.5;
rat2=0.36;
%
vs=2.0
srat2=sqrt(rat2);
vp=vs/srat2
wo=2*ohmt/(zt*vs*rhob)
sohm=srat2/k
```

```

ohmn=ohmt/sohm
%
%
ns=30;
ns1=20;
ns2=40;
%*****
%
%
for s=1:ns
    dphi=1.0/((ns-1)*vp);
    stheta=vp*(s-1)*dphi;
    ejep(s)=stheta;
    p3s=(1/vp*vs)*sqrt(vp^2-(vs^2)*stheta^2);
    p3p=(1/vp)*sqrt(1-stheta^2);
    tau=1-2*rat2*stheta^2;
    sis=2*rat2*stheta*vs*p3s;
    sip=2*stheta*vs*p3p;
    if s==ns
        wt=ohmt/(vs*p3s);
        dt=1-i*wt*tau^2;
    else
        wt=ohmt/(vs*p3s);
        wn=ohmn/(vp*p3p);
        dt=1-i*wt*(sis*sip+tau^2);
        dn=1-i*wn*(sis*sip+tau^2);
    end
%
%
%    CALCULATING THE repp & resp COEFFICIENTS    .....
%
    if s < ns
        repp(s)=-i*(wt*sip/dt-wn*tau^2/dn);
%
        resp(s)=-i*(wt/dt+wn/dn)*sip*tau;
    else
        repp(s)=-1.0;
%
        resp(s)=0.0;
    end
%
end
%

```

```

%
ds=ns2-ns1;
for s=1:ns2
    if s <= ns1
        dphi=1.0/((ns1-1)*vp);
        stheta=vs*(s-1)*dphi;
        vfix=stheta;
    else
        dphi=(1.0-vfix)/((ds)*vs);
        stheta=vfix+vs*(s-ns1)*dphi;
    end
    ejes(s)=stheta;
    p3s=(1/vs)*sqrt(1-stheta^2);
    arg=vs^2-(vp^2)*stheta^2;
    p3p1=(1/vp*vs)*sqrt(arg);
%
    tau=1-2*stheta^2;
    sis=2*rat2*stheta*vp*p3s;
    sip1=2*stheta*vp*p3p1;
    if s==ns1
        wt=ohmt/(vs*p3s);
        dt=1-i*wt*tau^2;
    else
        if s<ns2
            wt=ohmt/(vs*p3s);
            wn1=ohmn/(vp*p3p1);
            dt=1-i*wt*(sis*sip1+tau^2);
            dn=1-i*wn1*(sis*sip1+tau^2);
        end
    end
end
%
%     CALCULATING THE reps & ress COEFFICIENTS      .....
%
    if s==ns1
        reps(s)=(2-1/dt)*sis/tau;
%
        ress(s)=1-1/dt;
    end
    if s==ns2
        reps(s)=0;
        ress(s)=1.0;
    else
        reps(s)=-i*(wt/dt+wn1/dn)*sis*tau;

```

```

    res(s)=-i*(-wn1*sis*sip1/dn+wt*tau^2/dt);
  end
end
%
%
%
tenp=10*pi;
figure
for m=1:ns
    amplitud1(m)=abs(repp(m));
    fase1(m)=(angle(repp(m)))/tenp;
end
plot(ejep,amplitud1,ejep,fase1)
xlabel('Sen(angulo incidenciaPP)'),ylabel('Amplitud'),grid
%
figure
for m=1:ns
    amplitud2(m)=abs(resp(m));
    fase2(m)=(angle(resp(m)))/tenp;
end
plot(ejep,amplitud2,ejep,fase2)
xlabel('Sen(angulo incidenciaSP)'),ylabel('Amplitud'),grid
%
figure
for m=1:ns2
    amplitud3(m)=abs(reps(m));
    fase3(m)=(angle(reps(m)))/tenp;
end
plot(ejes,amplitud3,ejes,fase3)
xlabel('Sen(angulo incidenciaPS)'),ylabel('Amplitud'),grid
%
figure
for m=1:ns2
    amplitud4(m)=abs(ress(m));
    fase4(m)=(angle(ress(m)))/tenp;
end
plot(ejes,amplitud4,ejes,fase4)
xlabel('Sen(angulo incidenciaSS)'),ylabel('Amplitud'),grid
%
*****

```

2: Uso del Programa Haugen Numerical.m, para calcular de los Coeficientes de Reflexión en el caso de la formulación Isotrópica y los Sismogramas Sintéticos (Figuras 18):

```
% HAUGEN & SCHOENBERG, 2000
% Coded by Roberto, 02-22-2022
% 16-4-2002
% HAUGEN & SCHOENBERG...
% CODED BY ROBERTO... 21-02-2002
% Last modification 24-02-2002
% MATLAB ... 3-3-2002
%
tpi=2*pi;
ns=15;
ns1=15;
ns2=30;
nt=16;
nhalf=1+nt/2;
dtt=0.004
dw=tpi/(nt*dtt)
% *****
%
zt=0.6
zn=0.2
k=zn/zt
rhob=2.5
vs=2.0
vp=3.0
rat2=vs^2/vp^2
%
lt=zt*rhob*vs^2
ln=zn*rhob*vp^2
wo=40*tpi;
ks=wo/vs
kp=wo/vp
landas=(tpi/ks)*1000
landap=(tpi/kp)*1000
ohmt=pi*lt/landas
ohmn=pi*ln/landap
%
%
srat2=sqrt(rat2);
```

```

%
%
% *****
%
%
for s=1:ns
    dphi=1.0/((ns-1)*vp);
    stheta=vp*(s-1)*dphi;
    ejep(s)=stheta;
    p3s=(1/vp*vs)*sqrt(vp^2-(vs^2)*stheta^2);
    p3p=(1/vp)*sqrt(1-stheta^2);
    tau=1-2*rat2*stheta^2;
    sis=2*rat2*stheta*vs*p3s;
    sip=2*stheta*vs*p3p;
    if s==ns
        wt=ohmt/(vs*p3s);
        dt=1-i*wt*tau^2;
    else
        wt=ohmt/(vs*p3s);
        wn=ohmn/(vp*p3p);
        dt=1-i*wt*(sis*sip+tau^2);
        dn=1-i*wn*(sis*sip+tau^2);
    end
%
%
%   CALCULATING THE repp & resp COEFFICIENTS   .....
%
%       if s < ns
%           repp(s)=-i*(wt*sip/dt-wn*tau^2/dn);
%
%           resp(s)=-i*(wt/dt+wn/dn)*sip*tau;
%       else
%           repp(s)=-1.0;
%
%           resp(s)=0.0;
%       end
%
%
%   Computing Ricker wavelet in the frequency domain
%
%       for j=1:nt
%           if j<= nhalf
%               w(j)=(j-1)*dw;
%           else

```

```

                w(j)=(j-nt-1)*dw;
            end
                rw=(w(j)/wo)^2;
                se(j)=rw*exp(-rw);
            onpp(j)=se(j)*repp(s);
            onsp(j)=se(j)*resp(s);
        end
        tpp=real(iff(onpp,nt));
        tsp=real(iff(onsp,nt));
        for ci=1:nt
            topp(ci,s)=tpp(ci);
            tosp(ci,s)=tsp(ci);
        end
%
%   Reorganizing GPP & GSP Reflection
%   Coefficients... in time domain...
%
        for j=1:nhalf
            gpp(j+nhalf-2,s)=topp(j,s);
            gsp(j+nhalf-2,s)=tosp(j,s);
        end
%
        for j=nhalf+1:nt
            gpp(j-nhalf,s)=topp(j,s);
            gsp(j-nhalf,s)=tosp(j,s);
        end
%
end
%
%
ds=ns2-ns1;
for s=1:ns2
    if s <= ns1
        dphi1s=1.0/((ns1-1)*vp);
        stheta=vs*(s-1)*dphi1s;
        vfix=stheta;
    else
        dphi2s=(1.0-vfix)/((ds)*vs);
        stheta=vfix+vs*(s-ns1)*dphi2s;
    end
    ejes(s)=stheta;
    p3s=(1/vs)*sqrt(1-stheta^2);
    arg=vs^2-(vp^2)*stheta^2;

```

```

        p3p1=(1/vp*vs)*sqrt(arg);
%
        tau=1-2*stheta^2;
        sis=2*rat2*stheta*vp*p3s;
        sip1=2*stheta*vp*p3p1;
    if s==ns1
        wt=ohmt/(vs*p3s);
        dt=1-i*wt*tau^2;
    else
        if s<ns2
            wt=ohmt/(vs*p3s);
            wn1=ohmn/(vp*p3p1);
            dt=1-i*wt*(sis*sip1+tau^2);
            dn=1-i*wn1*(sis*sip1+tau^2);
        end
    end
%
%     CALCULATING THE reps & ress COEFFICIENTS      .....
%
    if s==ns1
        reps(s)=(2-1/dt)*sis/tau;
%
        ress(s)=1-1/dt;
    end
    if s==ns2
        reps(s)=0;
        ress(s)=1.0;
    else
        reps(s)=-i*(wt/dt+wn1/dn)*sis*tau;
        ress(s)=-i*(-wn1*sip1/dn+wt*tau^2/dt);
    end
%
    for j=1:nt
        onps(j)=se(j)*reps(s);
        onss(j)=se(j)*ress(s);
    end
    tps=real(iff(onps,nt));
    tss=real(iff(onss,nt));
    for ci=1:nt
        tops(ci,s)=tps(ci);
        toss(ci,s)=tss(ci);
    end
%

```

```

%   Reorganizing GPS & GSS Reflection
%   coefficients... in time domain...
%
%       for j=1:nhalf
%           gps(j+nhalf-2,s)=tops(j,s);
%           gss(j+nhalf-2,s)=toss(j,s);
%       end
%
%       for j=nhalf+1:nt
%           gps(j-nhalf,s)=tops(j,s);
%           gss(j-nhalf,s)=toss(j,s);
%       end
%
%   end
%
%   *****
%   ***** PRINTING OUT *****
%   *****
%
%   tenp=10*pi;
%   figure
%   for m=1:ns
%       amplitud1(m)=abs(repp(m));
%       fase1(m)=(angle(repp(m)))/tenp;
%   end
%   plot(ejep,amplitud1,ejep,fase1)
%   xlabel('Sen(angulo incidenciaPP)'),ylabel('Amplitud'),grid
%
%   figure
%   for m=1:ns
%       amplitud2(m)=abs(resp(m));
%       fase2(m)=(angle(resp(m)))/tenp;
%   end
%   plot(ejep,amplitud2,ejep,fase2)
%   xlabel('Sen(angulo incidenciaSP)'),ylabel('Amplitud'),grid
%
%   figure
%   for m=1:ns2
%       amplitud3(m)=abs(reps(m));
%       fase3(m)=(angle(reps(m)))/tenp;

```

```

end
plot(ejes,amplitud3,ejes,fase3)
xlabel('Sen(angulo incidenciaPS)'),ylabel('Amplitud'),grid
%
figure
for m=1:ns2
    amplitud4(m)=abs(ress(m));
    fase4(m)=(angle(ress(m)))/tenp;
end
plot(ejes,amplitud4,ejes,fase4)
xlabel('Sen(angulo incidenciaSS)'),ylabel('Amplitud'),grid
%
%
%
% *****
% ***** OUTPUT *****
%
% *****
%
%
fileoutpp='correpp.dat';
fileoutsp='corresp.dat';
fileoutps='correps.dat';
fileoutss='corress.dat';
file1='leeme.dat';
%
%
%
esteppp=fopen(fileoutpp,'w');
estesp=fopen(fileoutsp,'w');
esteps=fopen(fileoutps,'w');
estess=fopen(fileoutss,'w');
este1=fopen(file1,'w');
%
%
%
fprintf(este1,'%s %s\n\n','Archivo de Datos de los Coeficientes de Reflexión
PP:',fileoutpp);
fprintf(este1,'%s %s\n\n','Archivo de Datos de los Coeficientes de Reflexión
SP:',fileoutsp);
fprintf(este1,'%s %s\n\n','Archivo de Datos de los Coeficientes de Reflexión
PS:',fileoutps);

```

```

fprintf(este1,'%s %s\n\n','Archivo de Datos de los Coeficientes de Reflexión
SS:',fileoutss);
%
fprintf(este1,'%s %s\n','Etiqueta del eje X para todos los graficos:','Lentitud (s/Km)');
fprintf(este1,'%s %5.3f %s\n','Intervalo de muestreo del Eje X para todos los graficos
PP y SP:',dphi,'(s/Km)');
fprintf(este1,'%s %d\n','Numero de muestras del Eje X de los Coeficientes de
Reflexión PP y SP:',ns);
fprintf(este1,'%s %s %s\n\n','Titulo de los graficos correspondientes:','Ondicula
reflejada PP y ','Ondicula reflejada SP');
%
%fprintf(este1,'%s %d\n','Numero de muestras del Eje X de los Coeficientes de
Reflexión PS y SS:',ns2);
fprintf(este1,'%s %d\n','Numero de muestras del Eje X de los Coeficientes de
Reflexión PS y SS:',ns1);
fprintf(este1,'%s %5.3f %s\n','Intervalo de muestreo del Eje X para todos los graficos
PS y SS, antes del angulo critico de la onda P:',dphi1s,'(s/Km)');
%fprintf(este1,'%s %d\n\n','El respectivo Numero de muestras del Eje X de los
Coeficientes de Reflexión PS y SS:',ns1);
%fprintf(este1,'%s %5.3f %s\n','Intervalo de muestreo del Eje X para todos los
graficos PS y SS, antes del angulo critico de la onda S:',dphi2s,'(s/Km)');
%fprintf(este1,'%s %d\n','El respectivo Numero de muestras,restantes, del Eje X de
los Coeficientes de Reflexión PS y SS:',ds);
fprintf(este1,'%s %s %s\n\n','Titulo de los graficos correspondientes:','Ondicula
reflejada PS y SS','Ondicula reflejada SS');
%
fprintf(este1,'%s %d\n','Numero de muestras del Eje t para todos los Coeficientes de
Reflexión:',nt);
fprintf(este1,'%s %5.3f %s\n','Intervalo de muestreo del Eje t para todos los
graficos:',dt,'segundos');
fprintf(este1,'%s %s\n\n','Etiqueta del Eje t para todos los graficos:','Tiempo (ms)');
%
%
for m=1:ns
    for n=1:nt
        fprintf(estepp,'%f\n',gpp(n,m));
        fprintf(estesp,'%f\n',gsp(n,m));
    end
end
%
%
for m=1:ns1
    for n=1:nt

```

```
        fprintf(esteps,'%f\n',gps(n,m));
        fprintf(estess,'%f\n',gss(n,m));
    end
end
%
%
fclose(estep);
fclose(estesp);
fclose(esteps);
fclose(estess);
fclose(este1);
%
```