UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO EN MATEMÁTICA

PRESERVACIÓN DE LA PROPIEDAD (W) PARA OPERADORES LINEALES ACOTADOS BAJO PERTURBACIONES DE RIESZ QUE CONMUTAN

Autor: MSc Orlando José García Mojica
Tutor: Dr. Pietro Aiena

Tesis Doctoral
Presentada ante la Ilustre
Universidad Central de Venezuela
Para optar al título de
Doctor en Ciencias
Mención Matemática

Caracas, 15 de Junio de 2011

DEDICATORIA

A mis hijos Anthony José y Orlando Alfonso

AGRADECIMIENTOS

Índice general

RESUMEN

En este trabajo se considera una versión local en un punto de la propiedad de la extensión univaluada introducida por J. Finch [27], y basándose en diversas caracterizaciones de esta propiedad para operadores cuasi-Fredholm, las cuales particularmente son válidas para operadores semi B-Fredholm, se obtienen caracterizaciones para los operadores semi B-Browder, B-Browder y B-Weyl a través de dicha propiedad. De las cuales se obtienen algunas relaciones espectrales entre los espectros de semi B-Browder, B-Browder, B-Weyl, y otros espectros originados de la teoría clásica de Fredholm y la teoría de los operadores de B-Fredholm.

Siguiendo a Coburn [26] y Rakočević [39], respectivamente, se introducen los Teoremas de Weyl, a-Weyl y la propiedad (w), así como también se consideran los Teoremas de Browder [30] y a-Browder [30], y se investigan relaciones entre las nociones antes mencionadas. Además se estudia el comportamiento de la propiedad (w) bajo perturbaciones por operadores de Riesz, considerando particularmente el caso de las perturbaciones por operadores que poseen alguna potencia de rango finito.

Finalmente se introducen y estudian los Teoremas generalizados de Weyl, a-Weyl, Browder y a-Browder, así como también la propiedad (w) genera lizada. Se estudian las relaciones existentes entre estas nociones para el caso de algunos operadores particulares, tales como los a-polariodes y polaroides a izquierda. Las cuales permiten describir el comportamiento de la propiedad (gw) bajo perturbaciones algebraicas.

INTRODUCCIÓN

En 1909 H. Weyl [43], estudió los espectros de todas las perturbaciones compactas $T+K$ para un operador hermitiano T que actúa sobre un espacio de Hilbert, y encontró que $\lambda \in \sigma(T+K)$ precisamente cuando λ es un punto aislado de multiplicidad finita del espectro $\sigma(T)$.

Este resultado modernamente es formulado por Coburn en forma abstracta y lo denominó el Teorema de Weyl. Posteriormente al trabajo de Coburn se introducen, utilizando los espectros derivados de la teoría clásica de Fredholm, variantes de este Teorema. Es así como en 1985 Rakočević [39], introduce el Teorema de a-Weyl y la propiedad (w).

Dado un operador $T \in L(X)$, X un espacio de Banach complejo infinito dimensional, se dice que:

(i) T satisface el Teorema de Weyl si $\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \pi_{00}(T)$

(ii) T satisface el Teorema de a-Weyl si $\sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{uw}(T) = \pi_{00}^a(T)$

(iii) T satisface la propiedad (w) si $\sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{uw}(T) = \pi_{00}(T)$

Donde $\sigma(T)$ representa el espectro usual, $\sigma_{ap}(T)$ el espectro aproximado puntual, $\sigma_w(T)$ el espectro de Weyl, $\sigma_{uw}(T)$ el espectro superiormente Weyl, $\pi_{00}(T)$ el conjunto de todos los puntos aislados de $\sigma(T)$ que son autovalores de multiplicidad finita y $\pi_{00}^a(T)$ el conjunto de todos los puntos aislados de $\sigma_{ap}(T)$ que son autovalores de multiplicidad finita.

En la última década el Teorema de a-Weyl ha sido ampliamente estudiado por varios autores, no así la propiedad (w). En el año 2006, aparece en la literatura un artículo de Aiena y Peña [14], donde la propiedad (w) es estudiada de manera sistemática, proporcionando así un marco teórico suficientemente claro para esta propiedad. Más recientemente, la preservación de la propiedad (w) bajo perturbaciones ha sido estudiada por Aiena, Biondi y Villafañe en [5], [4] y [7], en el caso que las perturbaciones sean por operadores cuasi-nilpotentes o de rango finito.

Para $n \in \mathbb{N}$, T_n denotará la restricción de T sobre el rango de T^n. Berkani [22] introduce la clase de los operadores B-Fredholm como aquellos operadores acotados $T \in L(X)$, tales que para algún $n \in \mathbb{N}$, el rango de T^n es cerrado y T_n es de Fredholm. Según Berkani [21], tenemos que si T_n es un operador de Fredholm, entonces T_m es de Fredholm e ind(T_m)=ind(T_n), para todo $m \geq n$. Así el índice de un operador B-Fredholm T, es definido como ind(T)=ind(T_n), donde T_n es la restricción de T sobre cualquier $R(T^n)$ cerrado que sea de Fredholm. Los operadores B-Weyl son introducidos de manera natural, como operadores $T \in L(X)$ que son B-Freholm e $ind(T) = 0$ (en el sentido anterior). De manera similar son introducidos los operadores semi B-Fredholm y semi B-Weyl.

Motivados por esta generalización de la teoría de Fredholm, Amouch y Berkani introducen en el 2008 [17], una generalización de la propiedad (w), llamada propiedad (gw), de la siguiente manera. Un operador $T \in L(X)$ se dice que satisface la propiedad (gw) si $\sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{ubw}(T) = E(T)$, donde $\sigma_{ubw}(T)$ representa el espectro superiormente B-Weyl y $E(T)$ el conjunto de todos los autovalores aislados del espectro de T.

En este trabajo se estudia y analiza la preservación de la propiedad (w) bajo perturbaciones por operadores de Riesz, considerando el caso particular en el que las perturbaciones tienen una potencia de rango finito. También se estudia el comportamiento de la propiedad (gw), bajo perturbaciones algebraicas y además se buscan relaciones existentes entre la propiedad (w) y la propiedad (gw), en el caso de algunos operadores particulares tales como los a-polaroides (esto es, operadores $T \in L(X)$ para los cuales iso $\sigma_{ap}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{bb}(T)$).

La estructura del trabajo es la siguiente: en el primer capítulo se describen en forma general los elementos básicos estrictamente necesarios para el desarrollo del trabajo, se presentan algunos hechos relevantes relativos a las distintas relaciones existentes entre estos, que serán empleados a lo largo de los capítulos venideros.

En el segundo capítulo se estudian relaciones entre el espectro B-Browder y otros espectros originados en la teoría de Fredholm.

En el tercer capítulo se introducen los llamados Teoremas de Weyl y Browder, y sus respectivas variantes; la propiedad (w), el Teorema de a-Weyl y el Teorema de a-Browder. Además se estudia la preservación de la propiedad (w) de un operador $T \in L(X)$, bajo perturbaciones por operadores compactos, o de Riesz que conmutan con el operador T, considerando el caso particular en el que las perturbaciones tienen una potencia de rango finito.

En el cuarto, y último capítulo, se introducen generalizaciones, en el contexto de los operadores semi-B-Fredholm, de los Teoremas de Weyl, a-Weyl, Browder, a-Browder y la propiedad (w). Se estudian las relaciones entre dichas generalizaciones y se muestra que la propiedad (w) generalizada, llamada propiedad (gw), es invariante bajo perturbaciones por operadores nilpotentes que conmutan, cuando el operador es a-polaroide.

Entre los resultados de mayor relevancia de este trabajo se pueden mencionar las relaciones que se obtienen entre los operadores semi B-Browder, los operadores cuasi Fredholm y la propiedad de la extensión univaluada, las cuales permiten establecer propiedades espectrales, que se utilizan para demostrar las relaciones existentes entre la propiedad (w), la propiedad (gw), el Teorema de a-Weyl, el Teorema de a-Weyl generalizado y el Teorema de a-Browder, en el caso particular que el operador sea a-polaroide o polaroide a izquierda. Dichas relaciones sirven, a su vez, para justificar algunos resultados sobre perturbaciones de la propiedad (gw) por operadores algebraicos, que son presentados al final del trabajo. Por otro lado, en lo que respecta a la propiedad (w), se generalizan resultados recientes sobre la preservación de esta propiedad bajo perturbaciones, como los obtenidos en [5], [4] y [7]. Para finalizar, cabe destacar que en líneas generales las caracterizaciones y resultados presentados en este trabajo se obtienen de una forma más sencilla, y con un considerable ahorro de trabajo, en relación al tratamiento dado en mucha de la literatura existente por otros autores a temas similares.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se describen en forma general los elementos básicos estrictamente necesarios para el desarrollo de este trabajo, se presentan además algunos hechos relevantes relativos a las distintas relaciones existentes entre estos, que serán empleados a lo largo de los capítulos venideros. En su debida oportunidad, se dan ciertas citas respecto a las referencias bibliográficas en donde se puede ahondar en mayores detalles sobre las nociones y resultados aqui tratados.

1.1. Preliminares sobre operadores lineales

En esta sección se estudian algunas relaciones importantes entre ciertos parámetros asociados a operadores lineales, operadores lineales acotados sobre espacios de Banach, y ciertas restricciones específicas de éstos. Estas relaciones jugarán un papel importante en las clases de operadores que se estudianrán en este trabajo.

Dados un espacio vectorial X y un operador lineal $T : X \to X$, es conocido que

$$\begin{aligned} N(T) &= \{x \in X : Tx = 0\}, \\ T(X) &= \{Tx : x \in X\}, \end{aligned}$$

son subespacios T-invariantes de X. Así como también lo son

$$\begin{aligned} N(T^n) &= \{x \in X : T^n x = 0\}, \\ T^n(X) &= \{T^n x : x \in X\}; \end{aligned}$$

cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$.

Denotaremos por $L(X)$ al álgebra de los operadores lineales y acotados sobre un espacio de Banach X. Supondremos a lo largo de todo el trabajo que X es un espacio de Banach complejo infinito dimensional.

Para cada entero $n \geq 0$, T_n denotará la restricción de $T \in L(X)$ sobre el subespacio $R(T^n) = T^n(X)$. Algunas relaciones útiles de estas restricciones se dan a continuación.

Lema 1.1.1. *Dado un operador $T \in L(X)$, entonces:*

1. $N(T_m) \subseteq N(T_n)$ *siempre que* $m \geq n$;
2. $R(T_n^m) = R(T^{m+n}) = R(T_m^n)$ *cualesquiera sean* m *y* n;
3. $(T^n)^{-1}(R(T^{n+m})) = R(T^m) + N(T^n)$ *cualesquiera sean* n *y* m;
4. $T^{-1}(N(T^m) \cap R(T^{n+1})) = N(T) + N(T^{m+1}) \cap R(T^n)$ *para todo* n, m;
5. $T^m(N(T^{m+n})) = N(T^n) \cap R(T^m)$ *cualesquiera sean* n *y* m;
6. $\frac{R(T^n)}{R(T^{n+1})} \simeq \frac{X}{R(T)+N(T^n)}$ *para todo* n;
7. $\frac{N(T)\cap R(T^n)}{N(T)\cap R(T^{n+1})} \simeq \frac{N(T^{n+1})+R(T)}{N(T^n)+R(T)}$ *para todo* n.

Demostración. (1) y (2) son consecuencias inmediatas de la definición de T_n.

(3) Si $x \in R(T^m) + N(T^n)$, existen $u \in R(T^m)$, $v \in N(T^n)$ y $x = u + v$. Luego, $T^n x = T^n u + T^n v = T^n u \in T^n(T^m(X)) = T^{n+m}(X) = R(T^{n+m})$. Así $x \in (T^n)^{-1}(R(T^{n+m}))$. Recíprocamente, $x \in (T^n)^{-1}(R(T^{n+m}))$ implica que $T^n x = T^{n+m} u$, para algún $u \in X$. Así $T^n(x - T^m u) = 0$, sigue $x - T^m u \in N(T^n)$ y entonces $x = T^m u + (x - T^m u) \in R(T^m) + N(T^n)$.

(4) Si $x \in T^{-1}(N(T^m) \cap R(T^{n+1}))$, $Tx \in N(T^m) \cap R(T^{n+1})$, resultando que $Tx \in N(T^m)$ y $Tx \in R(T^{n+1})$. Así $Tx = T^{n+1}u$, para algún $u \in X$, y entonces $T^{m+1}(T^n u) = T^m(T^{n+1}u) = T^m(Tx) = 0$. Luego, $T^n u \in N(T^{m+1})$ y además $T(x - T^n u) = 0$, lo que implica que

$$x = x - T^n u + T^n u \in N(T) + N(T^{m+1}) \cap R(T^n).$$

Recíprocamente, siendo $x \in N(T) + N(T^{m+1}) \cap R(T^n)$, existen $u \in N(T)$ y $v \in N(T^{m+1}) \cap R(T^n)$ tales que $x = u + v$. En consecuencia, tendremos que $Tx = Tv \in N(T^m) \cap R(T^{n+1})$, pues $T^{m+1}v = T^m(Tv) = 0$, de donde resulta que $x \in T^{-1}(N(T^m) \cap R(T^{n+1}))$.

(5) $x \in N(T^{m+n})$, implica que $T^n(T^m x) = T^{m+n}x = 0$. Así $T^m x \in N(T^n) \cap R(T^m)$. Recíprocamente, si $y \in N(T^n) \cap R(T^m)$, existe $x \in X$ tal que $y = T^m x$ y además $T^{m+n}x = T^n(T^m x) = T^n y = 0$. Es decir, $y = T^m x$ para algún $x \in N(T^{m+n})$, y se tiene que $y \in T^m(N(T^{m+n}))$.

(6) $T^n x + R(T^{n+1}) = T^n y + R(T^{n+1})$, implica

$$T^n(x - y) = T^n x - T^n y \in R(T^{n+1}).$$

y entonces $x - y \in (T^n)^{-1}(R(T^{n+1})) = R(T) + N(T^n)$, así

$$x + (R(T) + N(T^n)) = y + (R(T) + N(T^n)).$$

Por otra parte, si $x + (R(T) + N(T^n)) = y + (R(T) + N(T^n))$, tendremos que $x - y \in R(T) + N(T^n) = (T^n)^{-1}(R(T^{n+1}))$. En consecuencia,

$$T^n x - T^n y = T^n(x - y) \in R(T^{n+1}),$$

de donde sigue la igualdad $T^n x + R(T^{n+1}) = T^n y + R(T^{n+1})$. Concluyéndose de esta forma, que la aplicación $T^n x + R(T^{n+1}) \mapsto x + (R(T) + N(T^n))$ es un isomorfismo, cualquiera sea n.

(7) Según lo demostrado en (3), sigue que

$$\frac{(T^{n+1})^{-1}(R(T^{n+2}))}{(T^n)^{-1}(R(T^{n+1}))} = \frac{N(T^{n+1}) + R(T)}{N(T^n) + R(T)}.$$

Por otra parte, si $x \in (T^{n+1})^{-1}(R(T^{n+2}))$ tendremos que $T^{n+1}x = T^{n+2}u$, para algún $u \in X$. Esto implica que $T(T^n x - T^{n+1}u) = 0$ y como $T^{n+1}u \in R(T^{n+1}) \subseteq R(T^n)$, se tiene que $T^n x - T^{n+1}u \in N(T) \cap R(T^n)$. Así para cada $x \in (T^{n+1})^{-1}(R(T^{n+2}))$, existe $u \in X$ tal que $T^n x - T^{n+1}u \in N(T) \cap R(T^n)$. Ahora si $y \in (T^{n+1})^{-1}(R(T^{n+2}))$ y ocurre que $x - y \in (T^n)^{-1}(R(T^{n+1}))$, entonces

$$T^n x - T^n y = T^n(x-y) \in R(T^{n+1}),$$

luego, existen vectores u, v en X, tales que

$$T^n x - T^{n+1}u - (T^n y - T^{n+1}v) = T^n(x-y) + T^{n+1}(v-u) \in R(T^{n+1}).$$

Como además,

$$T(T^n x - T^{n+1}u - (T^n y - T^{n+1}v)) = T^{n+1}x - T^{n+2}u - T^{n+1}y + T^{n+2}v = 0.$$

Entonces, $(T^n x - T^{n+1}u) - (T^n y - T^{n+1}v) \in N(T) \cap R(T^{n+1})$. Recíprocamente, en caso que $(T^n x - T^{n+1}u) - (T^n y - T^{n+1}v) \in N(T) \cap R(T^{n+1})$. Resulta que

$$T^n x - T^n y = (T^n x - T^{n+1}u) - (T^n y - T^{n+1}v) + T^{n+1}(u-v) \in R(T^{n+1}),$$

así $x - y \in (T^n)^{-1}(R(T^{n+1}))$. De acuerdo con lo anterior sigue que

$$\varphi : \frac{N(T^{n+1}) + R(T)}{N(T^n) + R(T)} = \frac{(T^{n+1})^{-1}(R(T^{n+2}))}{(T^n)^{-1}(R(T^{n+1}))} \to \frac{N(T) \cap R(T^n)}{N(T) \cap R(T^{n+1})},$$
$$\varphi(x + (T^n)^{-1}(R(T^{n+1}))) = T^n x - T^{n+1}u + N(T) \cap R(T^{n+1}),$$

cualquiera sea $u \in X$ tal que $T^{n+1}x = T^{n+2}u$, es un isomorfismo. $\square$

En el próximo resultado presentamos otras relaciones de interés, entre los núcleos e imágenes de las potencias enteras no negativas correspondientes a un operador lineal.

Teorema 1.1.2. *Si X es un espacio vectorial y $T : X \to X$ es un operador lineal, entonces*

(i) $N(T) \subseteq T^m(X)$, *para todo* $m \in \mathbb{N}$;

(ii) $N(T^n) \subseteq T(X)$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$;

(iii) $N(T^n) \subseteq T^m(X)$, *cualquiera sean* $m, n \in \mathbb{N}$;

(iv) $N(T^n) = T^m(N(T^{m+n}))$, *cualquiera sean* $m, n \in \mathbb{N}$;

son equivalentes.

Demostración. (iv)⇒(iii)⇒(ii) Son inmediatas.

(ii)⇒(iii) Supongamos que $\mathrm{N}\ (T^n) \subseteq T(X)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$. Según esto $\mathrm{N}\ (T^{1+n}) \subseteq T(X)$, lo que implica que $T(\mathrm{N}\ (T^{1+n})) \subseteq T^2(X)$. Así, usando el Lema 1.1.1, obtenemos

$$\mathrm{N}\ (T^n) = T(X) \cap \mathrm{N}\ (T^n) = T(\mathrm{N}\ (T^{1+n})) \subseteq T^2(X).$$

Es decir, $\mathrm{N}\ (T^n) \subseteq T^2(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos ahora que la inclusión $\mathrm{N}\ (T^n) \subseteq T^m(X)$, es válida cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$, y para $m = 1, 2, ..., k$. En tal caso, $\mathrm{N}\ (T^{1+n}) \subseteq T^k(X)$, de donde resulta $T(\mathrm{N}\ (T^{1+n})) \subseteq T^{k+1}(X)$. Aplicando nuevamente el Lema 1.1.1, obtendremos

$$\mathrm{N}\ (T^n) = T(X) \cap \mathrm{N}\ (T^n) = T(\mathrm{N}\ (T^{1+n})) \subseteq T^{k+1}(X).$$

Así, $\mathrm{N}\ (T^n) \subseteq T^{k+1}(X)$ y en consecuencia $\mathrm{N}\ (T^n) \subseteq T^m(X)$ es válida cualesquiera sean $m, n \in \mathbb{N}$.

(iii)⇒(iv) De la inclusión $\mathrm{N}\ (T^n) \subseteq T^m(X)$, junto con el Lema 1.1.1 sigue que

$$\mathrm{N}\ (T^n) = T^m(X) \cap \mathrm{N}\ (T^n) = T^m(\mathrm{N}\ (T^{m+n})).$$

(iii)⇒(i) Es inmediata.

(i)⇒(iii) Asumamos válida la inclusión $\mathrm{N}\ (T) \subseteq T^m(X)$, cualquiera sea $m \in \mathbb{N}$. Observe que para $x \in \mathrm{N}\ (T^2)$, $Tx \in \mathrm{N}\ (T) \subseteq T^{m+1}$, por lo que existe un vector $y \in X$ tal que $Tx = T^{m+1}y$. Esto último nos dice que $T(x - T^m y) = 0$, de donde sigue que $x - T^m y \in \mathrm{N}\ (T) \subseteq T^m(X)$; implicando esto la existencia de un $z \in X$ para el cual $x - T^m y = T^m z$, concluyéndose entonces que $x = T^m(z + y)$ y así $x \in T^m(X)$.

Del razonamiento anterior se infiere que N $(T^2) \subseteq T^m(X)$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Supongamos ahora que N $(T^n) \subseteq T^m(X)$ vale para todo $m \in \mathbb{N}$, y para $n = 1, 2, ..., k$. Según esto; si tomamos un vector $x \in$ N (T^{k+1}), entonces $Tx \in$ N $(T^k) \subseteq T^{m+1}(X)$, existiendo así un vector $u \in X$ tal que $Tx = T^{m+1}u$, de donde se tiene que $x - T^m u \in$ N $(T) \subseteq T^m(X)$. Así $x - T^m u = T^m v$, para cierto $v \in X$, lo que implica que

$$x = T^m(v + u) \in T^m(X).$$

Es decir, N $(T^{k+1}) \subseteq T^m(X)$. Consecuentemente N $(T^n) \subseteq T^m(X)$, cualquiera sean $m, n \in \mathbb{N}$.

$\square$

El parámetro que a continuación describiremos permite entre otras cosas, caracterizar cuando el rango de un operador es cerrado; condición esta que se le exijirá a muchas clases importantes de operadores con los que trataremos.

Definición 1.1.3. *Sean X un espacio de Banach y $T \in L(X)$ un operador no nulo. El módulo minimal reducido de T, denotado $\gamma(T)$, viene dado por la expresión*

$$\gamma(T) = inf_{\, x \notin N(T)} \frac{\|Tx\|}{dist\ (x, N(T))}.$$

Lema 1.1.4. *Sea $T \in L(X)$, si $N(T^n) \subseteq R(T^m)$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $\gamma(T^n) \geq (\gamma(T))^n$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$*

Demostración. Trivialmente la igualdad $\gamma(T^n) \geq (\gamma(T))^n$, vale para $n = 1$. Supongamos que $\gamma(T^n) \geq (\gamma(T))^n$ se cumple para $n \geq 1$. Sea $x \notin N(T^{n+1})$, entonces

$T^n x \notin N(T)$ y tendremos que

$$\begin{aligned}
0 < \mathrm{dist}(T^n x, N(T)) &= \mathrm{dist}(T^n x, T^n(N(T^{n+1})) \\
&= \inf{}_{u \in N(T^{n+1})} \|T^n x - T^n u\| \\
&= \inf{}_{u \in N(T^{n+1})} \|T^n (x-u)\| \\
&= \inf{}_{u \in N(T^{n+1})} \frac{\|T^n(x-u)\| \mathrm{dist}\ (x-u, N(T^n))}{\mathrm{dist}\ (x-u, N(T^n))} \\
&\geq \gamma(T^n) \mathrm{dist}\ (x-u, N(T^n)) \\
&\geq (\gamma(T))^n \mathrm{dist}\ (x-u, N(T^{n+1})) \\
&\geq (\gamma(T))^n \mathrm{dist}\ (x, N(T^{n+1}))
\end{aligned}$$

Así, para todo $x \notin N(T^{n+1})$,

$$\mathrm{dist}(T^n x, N(T)) \geq (\gamma(T))^n \mathrm{dist}\ (x, N(T^{n+1})).$$

Sigue que,

$$\|T^{n+1} x\| \geq \gamma(T) \mathrm{dist}\ (T^n x, N(T)) \geq (\gamma(T))^{n+1} \mathrm{dist}\ (x, N(T^{n+1})),$$

para todo $x \notin N(T^{n+1})$. Lo que implica,

$$\gamma(T^{n+1}) = \inf{}_{x \notin N(T^{n+1})} \frac{\|T^{n+1} x\|}{\mathrm{dist}\ (x, N(T^{n+1}))} \geq (\gamma(T))^{n+1}.$$

□

En la siguiente proposición, veremos la relación existente entre el módulo minimal y el rango de un operador.

Teorema 1.1.5. *Sean X un espacio de Banach y $T \in L(X)$ un operador no nulo. Entonces,*

$$T(X) \text{ es cerrado } \Leftrightarrow \gamma(T) > 0.$$

Demostración. Veáse Proposición 36.1 de [31].

□

Es de interés observar que $\gamma(T) = \gamma(T^*)$, donde $T^* \in L(X^*)$ es el dual de T (véase Teorema 3. Müller [34]). Según esto, y del Teorema 1.1.5

$$T(X) \text{ es cerrado } \Leftrightarrow T^*(X^*) \text{ es cerrado.}$$

Sea M un subespacio de un espacio de Banach X. El anulador de M es el subespacio cerrado de X^* definido por

$$M^{\perp} = \{f \in X^* : f(x) = 0, \forall x \in M\},$$

mientras que el pre-anulador de un subespacio W de X^* es el subespacio cerrado de X definido por

$$^{\perp}W = \{x \in X : f(x) = 0, \forall f \in W\}.$$

Claramente $^{\perp}(M^{\perp}) = M$ si M es cerrado. Además, si M y N son subespacios lineales cerrados de X entonces $(M+N)^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp}$. La relación $M^{\perp} + N^{\perp} = (M \cap N)^{\perp}$ no es siempre cierta, dado que $(M \cap N)^{\perp}$ es siempre cerrado sin embargo $M^{\perp} + N^{\perp}$ no es necesariamente cerrado. No obstante, un teorema clásico establece que

$$M^{\perp} + N^{\perp} \text{ es cerrado en } X^* \Leftrightarrow M + N \text{ es cerrado en } X$$

(véase Teorema 4.8. Kato [32]).

Las demostraciones de las siguientes relaciones de dualidad, entre el núcleo y el rango de un operador acotado T en un espacio de Banach y su dual T^*, pueden verse en Heuser [31]

$$N(T) = ^{\perp}\overline{T^*(X^*)} \quad y \quad ^{\perp}N(T^*) = \overline{T(X)}$$

y

$$N(T^*) = \overline{T(X)}^{\perp} \quad y \quad N(T)^{\perp} \supseteq \overline{T^*(X^*)}$$

Note que la inclución es, en general, estricta. Sin embargo, un resultado clásico dice que la igualdad se satisface precisamente cuando T tiene rango cerrado (véase Teorema 5.13. Kato [32]).

Definición 1.1.6. *Sea X un espacio de Banach. Un subespacio M de X se dice paracompleto o paracerrado, si M es el rango de un operador acotado.*

Observemos que para $\lambda \neq 0$,

$$(\lambda I - T)(N(T)) = N(T).$$

Además, por el inciso (5) del Lema 1.1.1,

$$T^m(N(T^{m+n})) = N(T^n) \cap R(T^m).$$

Así, $N(T)$ y $N(T^n) \cap R(T^m)$ son subespacios paracompletos

La siguiente proposición, conocida en la literatura matemática como el Lema de Neubauer, proporciona condiciones suficientes bajo las cuales subespacios paracompletos son cerrados.

Lema 1.1.7. *Sean X un espacio de Banach y M, N subespacios de X. Si M y N son subespacios paracompletos tales que $N \cap M$ y $N + M$ son cerrados, entonces N y M son cerrados.*

Demostración. Veáse Proposición 2.1.1. Labrouse [36].

□

Lema 1.1.8. *Sean $T \in L(X)$ un operador y $d \in \mathbb{N}$ tales que*

$$R(T^d) \cap N(T) = R(T^n) \cap N(T),$$

para todo entero $n \geq d$, entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

1. *$N(T^d) + R(T)$, $N(T) \cap R(T^d)$ son cerrados en X;*

2. $R(T^{d+1})$ es cerrado;

3. $R(T^n)$ es cerrado, para todo $n \geq d$;

4. $R(T^i) + N(T^j)$ es cerrado, siempre que $i + j \geq d$

Demostración. (1)⇒(3). Observemos que $N(T) \cap R(T^{d+j+1}) = N(T) \cap R(T^d)$ es cerrado, para todo $j \in \mathbb{N}$, y por el inciso (4) del Lema 1.1.1,

$$T^{-1}(N(T) \cap R(T^{d+j+1})) = N(T) + N(T^2) \cap R(T^{d+j}),$$

por lo cual $N(T) + N(T^2) \cap R(T^{d+j})$ es cerrado para todo $j \in \mathbb{N}$, y como $N(T) \cap (N(T^2) \cap R(T^{d+j})) = N(T) \cap R(T^{d+j})$ es cerrado, por el Lema de Neubauer, $N(T^2) \cap R(T^{d+j})$ es cerrado, para todo $j \in \mathbb{N}$. Supongamos que $N(T^m) \cap R(T^{d+j})$ es cerrado, para $m \geq 1$. Según esta hipótesis y por la igualdad

$$T^{-1}(N(T^m) \cap R(T^{d+j+1})) = N(T) + N(T^{m+1}) \cap R(T^{d+j}),$$

concluimos que $N(T) + N(T^{m+1}) \cap R(T^{d+j})$ es cerrado. Así

$$N(T) + N(T^{m+1}) \cap R(T^{d+j}),$$

es cerrado cualesquiera sean $m, j \in \mathbb{N}$. Además, como

$$N(T) \cap (N(T^{m+1}) \cap R(T^{d+j})) = N(T) \cap R(T^{d+j}),$$

sigue que $N(T) \cap (N(T^{m+1}) \cap R(T^{d+j}))$ es cerrado. Por el Lema de Neubauer concluimos entonces que $N(T^{m+1}) \cap R(T^{d+j})$ es cerrado, para todo $m, j \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $N(T^m) \cap R(T^{d+j})$ es cerrado para todo $m, j \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, si $x \in N(T^{d+1})$, entonces $T(T^d x) = T^{d+1}x = 0$. Así $T^d x \in N(T) \cap R(T^d) = N(T) \cap R(T^{d+j})$, por lo que existe $u \in X$ tal que $T^d x = T^{d+j}u$, de donde sigue que $x - T^j u \in N(T^d)$. Según esto, tendremos que

$$x = x - T^j u + T^j u \in N(T^d) + R(T^j).$$

Concluyéndose de esta forma que $N(T^{d+1}) \subseteq N(T^d) + R(T^j)$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Considerando el operador lineal $\hat{T} : X \setminus N(T^d) \to X \setminus N(T^d)$, dado por $\hat{T}(x + N(T^d)) = Tx + N(T^d)$, tendremos entonces que $N(\hat{T}) \subseteq R(\hat{T}^j)$, para cualquier $j \in \mathbb{N}$, ya que

$$N(\hat{T}) = N(T^{d+1}) \subseteq R(T^j) + N(T^d) = R(\hat{T}^j).$$

Como además $R(\hat{T}) = R(T) + N(T^d)$ es cerrado concluimos, del Lema 1.1.4 y el Teorema 1.1.5, que $\gamma(\hat{T}^j) \geq (\gamma(\hat{T}))^j > 0$, por lo cual $R(T^j) + N(T^d) = R(\hat{T}^j)$ es cerrado, para cada $j \in \mathbb{N}$. Siendo que $N(T^d) + R(T^{d+j})$ y $N(T^d) \cap R(T^{d+j})$ son cerrados, concluimos nuevamente por el Lema de Neubauer que $R(T^{d+j})$ es cerrado cualquiera sea j, es decir $R(T^n)$ es cerrado para todo $n \geq d$.

(3)$\Rightarrow$(4). Supongamos que $R(T^n)$ es cerrado, para todo $n \geq d$. Según esto, $R(T^{i+j})$ es cerrado, siempre que $i + j \geq d$. Como T^j es continuo y además, por el inciso (3) del Lema 1.1.1,

$$R(T^i) + N(T^j) = (T^j)^{-1}(R(T^{i+j})),$$

concluimos que $R(T^i) + N(T^j)$ es cerrado siempre que $i + j \geq d$.

(4)$\Rightarrow$(1). Si $R(T^i) + N(T^j)$ es cerrado, siempre que $i + j \geq d$. Tendremos $R(T) + N(T^d)$ y $R(T^d) = R(T^d) + N(T^0)$ son cerrados, así $R(T) + N(T^d)$ y $N(T) \cap R(T^d)$ son cerrados.

(3)$\Rightarrow$(2). Es inmediata.

(2)$\Rightarrow$(1). Siendo $R(T^{d+1})$ cerrado, y como $T^{-1}(R(T^{d+1})) = R(T) + N(T^d)$, entonces $R(T) + N(T^d)$ es cerrado. Por otro lado, $N(T) \cap R(T^d) = N(T) \cap R(^{d+1})$ es cerrado.

$\square$

A partir de las sucesiones de subespacios formadas, respectivamente, con los núcleos e imágenes de las potencias de un operador lineal, se derivan también dos parámetros importantes asociados con el operador los cuales describiremos seguidamente.

Definición 1.1.9. *Sean X un espacio vectorial y $T : X \to X$ un operador lineal. El ascent de T, denotado $p(T)$, se define según*

$$p(T) = \begin{cases} min\ \{n : N(T^n) = N(T^{n+1})\} & , si\ \{n : N(T^n) = N(T^{n+1})\} \neq \emptyset \\ \\ \infty & , si\ \{n : N(T^n) = N(T^{n+1})\} = \emptyset \end{cases}$$

En forma similar, el descent de T, denotado $q(T)$, como

$$q(T) = \begin{cases} min\ \{n : T^n(X) = T^{n+1}(X)\} & , si\ \{n : T^n(X) = T^{n+1}(X)\} \neq \emptyset \\ \\ \infty & , si\ \{n : T^n(X) = T^{n+1}(X)\} = \emptyset \end{cases}$$

Observe que $p(T) = 0$ (resp. $q(T) = 0$) si y sólo si T es inyectivo (resp. sobreyectivo). Además, si $p(T)$ y $q(T)$ son finitos entonces son iguales (véase Proposición 38.3 de [31]).

Otros parámetros de utilidad asociados con un operador lineal, se introducen en las siguientes definiciones.

Definición 1.1.10. *Sean X un espacio vectorial y $T : X \to X$ un operador lineal. Las deficiencias de T con respecto su núcleo $N(T)$ y su imagen $T(X)$ denotadas, respectivamente, por $\alpha(T)$ y $\beta(T)$, se define como*

$$\alpha(T) = dim\ N(T) \quad y \quad \beta(T) = codim\ T(X)$$

Observación 1.1.11. *Supongamos que para un operador T se tiene que $\alpha(T) < \infty$, entonces $\alpha(T^n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto se puede verificar por inducción. Supongamos que $dim\ N(T^n) < \infty$. Dado que $T(N(T^{n+1})) \subseteq N(T^n)$ entonces la* *restricción* $T_0 := T|N(T^{n+1}) : N(T^{n+1}) \to N(T^n)$ *tiene núcleo igual a* $N(T)$ *así la función canónica* $\widehat{T} : N(T^{n+1})/N(T) \to N(T^n)$ *es inyectiva. Además se tiene dim* $N(T^{n+1})/N(T) \leq$ *dim* $N(T^n) < \infty$, *y dado que dim* $N(T) < \infty$ *se concluye que dim* $N(T^{n+1}) < \infty$.

Definición 1.1.12. *Sea* $T : X \to X$ *un operador lineal con deficiencias finitas. El índice de* T, *denotado ind* (T), *esta dado en la forma siguiente*

$$ind\ (T) = \alpha(T) - \beta(T).$$

Un resultado destacable respecto a la noción de índice de un operador, conocido usualmente como el Teorema del índice [31], se enuncia a continuación.

Teorema 1.1.13. *Si* $T, S : X \to X$, *son operadores lineales con deficiencias finitas, entonces*

$$ind\ (TS) = ind\ T + ind\ S.$$

Con respecto a las deficiencias de las restricciones T_n, se tienen los resultados siguientes.

Lema 1.1.14. *Para un operador* $T \in L(X)$, *se tienen:*

1. *Si* $\alpha(T_i) < \infty$ *para cierto* $i \in \mathbb{N}$, *entonces existe un entero* $j \geq i$ *tal que* $\alpha(T_n) = \alpha(T_j) < \infty$ *cualquiera sea* $n \geq j$.

2. *Si* $\beta(T_i) < \infty$ *para cierto* $i \in \mathbb{N}$, *entonces existe un entero* $j \geq i$ *tal que* $\beta(T_n) = \beta(T_j) < \infty$ *cualquiera sea* $n \geq j$.

Demostración. 1. Si $\alpha(T_i) = \dim N(T_i) < \infty$ para algún i, como $N(T_{i+1}) \subseteq N(T_i)$, resulta que $\alpha(T_{i+1}) \leq \alpha(T_i)$. Procediendo en forma inductiva, tendremos que $\alpha(T_{n+1}) \leq \alpha(T_n) < \infty$ para todo $n \geq i$. Así, $(\alpha(T_n))_{n\geq i}$ es una sucesión decreciente y acotada superiormente, por lo que existe un entero $j \geq i$ tal que $\alpha(T_n) = \alpha(T_j) < \infty$, cualquiera sea $n \geq j$.

2. En virtud del isomorfismo $\frac{R(T^n)}{R(T^{n+1})} \simeq \frac{X}{R(T)+N(T^n)}$, tendremos que

$$\beta(T_n) = \dim \frac{R(T^n)}{R(T^{n+1})} = \dim \frac{X}{R(T)+N(T^n)} = \text{codim } (R(T)+N(T^n)).$$

Siendo que $R(T)+N(T^i) \subseteq R(T)+N(T^{i+1})$, resulta que

$$\text{codim } (R(T)+N(T^{i+1})) \leq \text{codim } (R(T)+N(T^i)).$$

Según esto, y siendo que $\beta(T_i) < \infty$,

$$\beta(T_{i+1}) = \text{codim } (R(T)+N(T^{i+1})) \leq \text{codim } (R(T)+N(T^i)) = \beta(T_i) < \infty.$$

Procediendo en forma inductiva, $(\beta(T_n))_{n\geq i}$ es una sucesión decreciente de enteros no negativos acotada superiormente, por lo que existe un entero $j \geq i$ tal que $\beta(T_n) = \beta(T_j) < \infty$, para todo $n \geq j$.

□

1.2. Operadores Semi-Fredholm y Fredholm

En esta sección se introducen los operadores de semi-Fredholm, superior e inferiormente semi-Fredholm, y de Fredholm. Se dan algunas propiedades básicas de estos y en especial se hacen mención de dos importantes tipos de operadores de semi-Fredholm como lo son, los operadores bounded below y sobreyectivos. Se estudian además los operadores semi-regulares, que si bien no son, en general, operadores de semi-Fredhom, tienen una estrecha conexión con estos, así como también con los operadores de tipo Kato. De manera natural se introducen en esta sección, cada uno de los distintos espectros correspondientes a las clases de operadores acá mencionados.

Definición 1.2.1. *Sea X un espacio de Banach complejo. La clase de todos los operadores superiormente semi-Fredholm en $L(X)$, denotada $\Phi_+(X)$, se define como*

$$\Phi_+(X) = \{T \in L(X) : \alpha(T) < \infty \quad y \quad T(X) \quad es\ cerrado\},$$

y la clase de todos los operadores inferiormente semi-Fredholm en $L(X)$, $\Phi_-(X)$, *por*

$$\Phi_-(X) = \{T \in L(X) : \beta(T) < \infty\},$$

$\Phi_\pm(X) = \Phi_+(X) \cup \Phi_-(X)$ *y* $\Phi(X) = \Phi_+(X) \cap \Phi_-(X)$ *definen, respectivamente, las clases de los operadores semi-Fredholm y de Fredholm en* $L(X)$.

Para la clase de los operadores de semi-Fredholm, la noción de índice de un operador puede extenderse en la forma como a continuación se describe.

Definición 1.2.2. *Si* $T : X \to X$ *es un operador de semi-Fredholm, el índice de* T, *denotado ind* (T), *esta dado en la forma siguiente*

$$ind\ (T) = \begin{cases} \alpha(T) - \beta(T) & , si\ \alpha(T)\ y\ \beta(T)\ son\ finitos, \\ \\ +\infty & , si\ \alpha(T) = +\infty, \\ \\ -\infty & , si\ \beta(T) = +\infty. \end{cases}$$

Obviamente, el indice de un operador de semi-Fredholm es entonces un número entero o $\pm\infty$.

Observación 1.2.3. *A continuación destacaremos una serie de propiedades relativas a la naturaleza algebraica y topológica de las clases de los operadores de semi-Fredholm y Fredholm, así como también propiedades de perturbación, dualidad y algunas formas de representación de dichas clases de operadores las cuales juegan un papel importante en este trabajo. Para los detalles correspondientes a las afirmaciones que siguen, pueden consultarse a T. Kato [32].*

(a) $\Phi_+(X)$, $\Phi_-(X)$ y $\Phi(X)$ son semi-grupos multiplicativos de $L(X)$.

(b) Las nociones de operadores superiormente semi-Fredholm e inferiormente semi-Fredholm, son mutuamente duales. En el sentido siguiente:

$$T \in \Phi_+(X) \quad \Leftrightarrow \quad T^* \in \Phi_-(X^*),$$

$$T \in \Phi_-(X) \quad \Leftrightarrow \quad T^* \in \Phi_+(X^*)$$

Más aún,

$$\alpha(T) = \beta(T^*) \quad \text{y} \quad \beta(T) = \alpha(T^*),$$

y

$$p(T) = q(T^*) \quad \text{y} \quad q(T) = p(T^*).$$

(c) $\Phi_+(X)$, $\Phi_-(X)$ y $\Phi(X)$ son subconjuntos abiertos en $L(X)$. Esto es, para cada operador $T \in \Phi_+(X)$, existe un número $\epsilon > 0$ tal que si un operador $S \in L(X)$ satisface que $\|S\| < \epsilon$, entonces $T + S \in \Phi_+(X)$. Además,

$$\alpha(T + S) \leq \alpha(T) \quad \text{y} \quad \text{ind } (T + S) = \text{ind } (T).$$

De manera análoga dado $T \in \Phi_-(X)$, existe un número $\epsilon > 0$ para el cual si $S \in L(X)$ satisface que $\|S\| < \epsilon$, entonces $T + S \in \Phi_-(X)$, y también tendremos que

$$\beta(T + S) \leq \beta(T) \quad \text{y} \quad \text{ind } (T + S) = \text{ind } (T).$$

De lo anterior también se tiene que la función índice

$$\text{ind} : \Phi_\pm(X) \to \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\},$$

es constante sobre las componentes conexas del abierto $\Phi_+(X)$ (resp. $\Phi_-(X)$ y $\Phi(X)$).

(d) Un operador $T \in \Phi(X)$ tiene ind $(T) = 0$ si y sólo si T tiene la forma $T = S + K$, en donde S es un operador invertible y K es compacto (o de rango finito) en $L(X)$. Teoremas similares de representación también se tienen para las clases más amplias de los operadores de semi-Fredholm. Es decir, $T \in \Phi_+(X)$ e ind $(T) \leq 0$ si y sólo si $T = S + K$, donde S es un operador inyectivo con rango cerrado y K es compacto (o de rango finito) en $L(X)$. Análogamente, $T \in \Phi_-(X)$ e ind $(T) \geq 0$ equivale a la representación $T = S + K$, con S un operador sobreyectivo y K compacto (o de rango finito) en $L(X)$.

Seguidamente describiremos ciertas partes del espectro clásico $\sigma(T)$ de un operador $T \in L(X)$, con X un espacio de Banach complejo infinito dimensional, motivadas por los operadores definidos anteriormente, así como también algunas relaciones existentes entre ellas.

Definición 1.2.4. *Para un operador acotado $T \in L(X)$ sobre un espacio de Banach X. El espectro superiormente semi-Fredholm está definido como*

$$\sigma_{uf}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \Phi_+(X)\};$$

y el espectro inferiormente semi-Fredholm se define por

$$\sigma_{lf}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \Phi_-(X)\}.$$

Mientras que los espectros semi-Fredholm y de Fredholm están definidos, respectivamente, por

$$\sigma_{sf}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \Phi_\pm(X)\} \quad y \quad \sigma_f(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \Phi(X)\}.$$

Observemos que,

$$\sigma_{sf}(T) = \sigma_{uf}(T) \cap \sigma_{lf}(T), \quad \sigma_f(T) = \sigma_{uf}(T) \cup \sigma_{lf}(T)$$

En lo que resta de esta sección, introducimos dos clases particularmente importantes de operadores y sus respectivos espectros.

Definición 1.2.5. *Sea $T \in L(X)$ un operador acotado sobre un espacio de Banach complejo X. T se dice bounded below si T es inyectivo y $T(X)$ es cerrado.*

Note que si T es bounded below entonces $T \in \Phi_+(X)$, mientras que si T es sobreyectivo $T \in \Phi_-(X)$. Por otra parte, si $T \in \Phi_-(X)$ entonces $T(X)$ es cerrado, ya que todo subespacio de codimensión finita en un espacio de Banach es cerrado, así $T \in \Phi_{\pm}(X)$ implica $T(X)$ cerrado.

En el siguiente lema se dan algunas relaciones de interés entre las nociones de operadores sobreyectivo y bounded below.

Lema 1.2.6. *Sea $T \in L(X)$, X un espacio de Banach complejo. Entonces:*

(i) T es sobreyectivo (resp. bounded below) si y sólo si T^* es bounded below (resp. sobreyectivo) ;

(ii) Si T es bounded below (resp. sobreyectivo) entonces $\lambda I - T$ es bounded below (resp. sobreyectivo), para todo $|\lambda| < \gamma(T)$.

Demostración. (i) Supongamos que T es sobreyectivo, según esto T tiene trivialmente rango cerrado y en consecuencia T^* también tiene rango cerrado. De aquí, y por la igualdad $N(T^*) = \overline{T(X)}^{\perp}$, obtenemos que

$$N(T^*) = \overline{T(X)}^{\perp} = T(X)^{\perp} = X^{\perp} = \{0\}.$$

Así $N(T^*) = \{0\}$, lo que implica que T^* es bounded below.

Recíprocamente, si T^* es bounded below entonces $N(T^*) = \{0\}$ y $T^*(X^*)$ es cerrado. De esto último sigue, por lo observado en el Teorema 1.1.5, que $T(X)$ es cerrado. De acuerdo con lo anterior y en virtud de la igualdad

$$\overline{T(X)} = ^{\perp} N(T^*),$$

tendremos

$$T(X) = \overline{T(X)} = ^{\perp} N(T^*) = ^{\perp} \{0\} = X.$$

Es decir, $T(X) = X$ y por lo tanto T es sobreyectivo.

Para el caso T bounded below si y sólo si T^* es sobreyectivo, se procede en forma similar al caso demostrado anteriormente.

(ii) De la definición de módulo minimal de T,

$$\gamma(T) = \inf \left\{ \frac{\|Tx\|}{\text{dist }(x, N(T))} : x \notin N(T) \right\},$$

resulta la desigualdad

$$\gamma(T)\text{dist }(x, N(T)) \leq \|Tx\| \text{ , para todo } x \in X.$$

Siendo T bounded below, $N(T) = \{0\}$ y $T(X)$ es cerrado, y tendremos

$$\|Tx\| \geq \gamma(T)\|x\| \text{ para todo } x \in X,$$

con $\gamma(T) > 0$. Como

$$\|(\lambda I - T)x\| = \|Tx - \lambda x\| \geq \|Tx\| - |\lambda|\|x\| \quad (\forall x \in X).$$

Se deduce de lo anterior, la desigualdad

$$\|(\lambda I - T)x\| \geq (\gamma(T) - |\lambda|)\|x\| \text{ para todo } x \in X.$$

La cual implica que $\lambda I - T$ es inyectivo para todo $|\lambda| < \gamma(T)$. Así $\lambda I - T$ resulta bounded below, para todo $|\lambda| < \gamma(T)$.

Para el caso T sobreyectivo, observemos que según lo demostrado en la parte (i), T^* es bounded below; así $\lambda I^* - T^*$ es bounded below siempre que $|\lambda| < \gamma(T^*) = \gamma(T)$. Siguiendo de esto, nuevamente por lo demostrado en la parte (i), que $\lambda I - T$ es sobreyectivo para cada $|\lambda| < \gamma(T)$.

□

Definición 1.2.7. *Sea $T \in L(X)$ un operador acotado sobre un espacio de Banach X. El espectro de T, denotado $\sigma(T)$, es definido como el conjunto de todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales $\lambda I - T$ no es invertible.*

Recordemos que si $T \in L(X)$ es biyectivo, siendo X un espacio de Banach entonces $T^{-1} \in L(X)$ (véase Teorema 32.2 de [31]). Lo cual implica que

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es biyectivo}\}.$$

Además $\sigma(T) \neq \emptyset$ y compacto (véase Teorema 44.1 y Teorema 45.1 de [31]).
El radio espectral de un operador $T \in L(X)$ se define como

$$r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Teorema 1.2.8. *Para todo $T \in L(X)$, con X un espacio de Banach complejo, se tiene*

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Demostración. véase Proposición 45.1 de [31].

□

Note que $\sigma(T) = \sigma(T^*)$. El conjunto $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ es llamado conjunto resolvente de T, mientras que la función $R(\lambda, T) : \lambda \in \rho(T) \to (\lambda I - T)^{-1}$ es llamada el resolvente de T. Además, $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$ precisamente cuando λ es un polo del resolvente de T (véase Proposición 50.2 de [31]).

Teorema 1.2.9. *Si $T \in L(X)$ y $S \in L(X)$ conmutan entonces*

$$r(T + S) \leq r(T) + r(S) \quad y \quad r(TS) = r(T)r(S)$$

Demostración. véase Teorema 45.1 de [31].

□

Definición 1.2.10. *Sea $T \in L(X)$ un operador acotado sobre un espacio de Banach X. El espectro aproximado puntual de T, denotado $\sigma_{ap}(T)$, es definido como todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales $\lambda I - T$ no es bounded below.*

Definición 1.2.11. *Sea $T \in L(X)$ un operador acotado sobre un espacio de Banach X. El espectro sobreyectivo de T, $\sigma_{su}(T)$, se define como el conjunto de todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $\lambda I - T$ no es sobreyectivo.*

Note que en virtud de la parte (i) del Lema 1.2.6, el espectro aproximado puntual y el espectro sobreyectivo son duales cada uno del otro, en el sentido de las igualdades $\sigma_{ap}(T) = \sigma_{su}(T^*)$ y $\sigma_{ap}(T^*) = \sigma_{su}(T)$. Claramente, también por el Lema 1.2.6, parte (ii), se puede observar que $\sigma_{ap}(T)$ y $\sigma_{su}(T^*)$ son subconjuntos compactos no vacío de $\mathbb{C}$. Observe además que

$$\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_{su}(T).$$

El espectro aproximado puntual de un operador T en general no es estable bajo perturbaciones por operadores con rango de dimensión finita que conmuten con T. Esta afirmación la justificaremos con el ejemplo siguiente

Ejemplo 1.2.12. *Sea P una proyección no cero, con rango de dimensión finita, definida sobre un espacio de Banach complejo infinito dimensional X. Supongamos que $T = P$ y $K = 2P$, veremos a continuación que $\sigma_{ap}(T) \neq \sigma_{ap}(T+K)$. Observemos que $N(T) = (I-T)(X) \neq \{0\}$ (dado que X es infinito dimensional) y $N(I-T) = T(X) \neq \{0\}$ (pues hemos supuesto que $T \neq 0$) lo que nos dice que $\{0,1\} \subseteq \sigma_{ap}(T)$. Por otro lado si $\lambda \notin \{0,1\}$ y $x = T(x_1) + (I-T)(x_2) \in X$, entonces*

$$\begin{aligned}
(\lambda I - T)(x) = 0 \ &\Rightarrow \ T(x) = \lambda x \\
&\Rightarrow \ T(x_1) = \lambda T(x_1) + \lambda(I-T)(x_2) \\
&\Rightarrow \ T[T(x_1)] = T[\lambda T(x_1) + \lambda(I-T)(x_2)] \\
&\Rightarrow \ T(x_1) = \lambda T(x_1) \\
&\Rightarrow \ (1-\lambda)T(x_1) = 0 \\
&\Rightarrow \ T(x_1) = 0 \\
&\Rightarrow \ \lambda(I-T)(x_2) = (\lambda I - T)(x) = 0 \\
&\Rightarrow \ (I-T)(x_2) = 0 \\
&\Rightarrow \ x = 0
\end{aligned}$$

lo que nos dice que $\lambda I - T$ es inyectivo para todo $\lambda \notin \{0,1\}$. Supongamos ahora que

$y = T(y_1) + (I - T)(y_2) \in X,$ *y* $x = \frac{T(y_1)}{\lambda - 1} + \frac{(I-T)(x_2)}{\lambda} \in X,$ *entonces*

$$\begin{aligned}(\lambda I - T)(x) &= \lambda\frac{T(y_1)}{\lambda - 1} + (I - T)(x_2) - \frac{T(y_1)}{\lambda - 1} \\ &= T(y_1)(\frac{\lambda}{\lambda - 1} - \frac{1}{\lambda - 1}) + (I - T)(y_2) \\ &= T(y_1) + (I - T)(y_2) = y\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lambda I - T$ *es sobreyectivo para todo* $\lambda \notin \{0, 1\}$, *en consecuencia* $\sigma_{ap}(T) = \sigma(T) = \{0, 1\}$ *sin embargo* $\sigma_{ap}(T + K) = \sigma_{ap}(3P) = \{0, 3\}$.

Teorema 1.2.13. *Supongamos que* $T \in L(X)$ *y* $K \in L(X)$ *son operadores tales que* $TK = KT$. *Entonces*

(i) $\sigma_{ap}(T + K) \subseteq \sigma_{ap}(T) + \sigma_{ap}(K)$;

(ii) Si en particular K *tiene rango de dimensión finita, se tiene que* $acc\sigma_{ap}(T) = acc\sigma_{ap}(T + K)$, *donde* $acc\sigma_{ap}(T)$ *es el conjunto de los puntos de acunulacón de* $\sigma_{ap}(T)$.

Demostración. véase [35].

□

Teorema 1.2.14. *Si* $T \in L(X)$ *y* $Q \in L(X)$ *es un operador cuasi-nilpotente que conmuta con* T, *entonces*

(i) $\sigma(T) = \sigma(T + Q)$

(ii) $\sigma_{ap}(T) = \sigma_{ap}(T + Q)$

Demostración. (i) Supongamos que T es invertible, entonces $T + Q = T(I + T^{-1}Q)$ y dado que T^{-1} y Q conmutan se tiene por el Teorema 1.2.9 que

$$r(T^{-1}Q) \leq r(T^{-1})r(Q) = 0$$

luego $T^{-1}Q$ es cuasi-nilpotente y en consecuencia $I + T^{-1}Q$ es invertible. Dado que $T + Q$ es el producto de dos operadores invertibles entonces sigue que $T + Q$ es invertible. Recíprocamente, si $T + Q$ es invertible entonces $T = (T + Q) - Q$ es invertible. Con esto hemos demostrado que

$$T \text{ es invertible} \Leftrightarrow T + Q \text{ es invertible}$$

es decir; $\sigma(T) = \sigma(T + Q)$.

(ii) Hemos visto en el Teorema 1.2.13 que la inclusión $\sigma_{ap}(T+K) \subseteq \sigma_{ap}(T)+\sigma_{ap}(K)$ se satisface para cada par de operadores $T, K \in L(X)$ que conmuten, así $\sigma_{ap}(T+Q) \subseteq \sigma_{ap}(T)+\{0\} = \sigma_{ap}(T)$. La inclusión opuesta se obtiene por simetría, $\sigma_{ap}(T+Q-Q) \subseteq \sigma_{ap}(T + Q)$

□

Definición 1.2.15. *Sea $T \in L(X)$ un operador acotado sobre un espacio de Banach complejo X. T se dice un operador semi-regular si $T(X)$ es cerrado y $N(T) \subseteq R(T^n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Observe que, de acuerdo al Teorema 1.1.2, la condición $N(T) \subseteq R(T^n)$, en la definición anterior, es equivalente a cualquiera de las condiciones descritas en la Proposición anteriormente mencionada.

Seguidamente recogemos algunas propiedades relativas a los operadores semi-regulares.

Teorema 1.2.16. *Para cualquier operador semi-regular $T \in L(X)$, X un espacio de Banach complejo, se tienen:*

(i) $T^n(X)$ *es un subespacio cerrado de* X *para todo* $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\lambda I - T$ *es semi-regular, para cada* $\mid \lambda \mid < \gamma(T)$.

Demostración. (i) Sigue del Lema 1.1.4.

(ii) Véase Teorema 1.31 P. Aiena [1].

□

Teorema 1.2.17. *Para cualquier operador $T \in L(X)$, X un espacio de Banach complejo, se tiene que T es semi-regular si y sólo si T^n es semi-regular para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que $T \in L(X)$ es semi-regular y sea $n \in \mathbb{N}$, entonces según lo demostrado en el Teorema 1.1.2 se tiene que $N(T^n) \subseteq T^{n.m}(X) = (T^n)^m(X)$ para cada $m \in \mathbb{N}$. según esto, y lo visto en la parte (i) del el Teorema 1.2.16 podemos concluir que T^n es semi-regular.
($\Leftarrow$) Evidente.

□

Teorema 1.2.18. *Para cualquier operador $T \in L(X)$, X un espacio de Banach complejo, se tiene que T es semi-regular si y sólo si T^* es semi-regular.*

Demostración. Supongamos que T es semi-regular. Según la parte (i) del Teorema 1.2.16, $T^n(X)$ es cerrado para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, por lo observado en el Teorema 1.1.5, $T^*(X^*)$ es cerrado pues $T(X)$ lo es, teniéndose de esto las siguientes igualdades:

$$N(T)^\perp = T^*(X^*), \text{ y } N((T^*)^n) = T^n(X)^\perp \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Por otro lado, siendo T semi-regular vale la inclusión $N(T) \subseteq T^n(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que implica $T^n(X)^\perp \subseteq N(T)^\perp$ y concluimos entonces las relaciones

$$N((T^*)^n) = T^n(X)^\perp \subseteq N(T)^\perp = T^*(X^*).$$

Así $T^*(X^*)$ es cerrado y $N((T^*)^n) \subseteq T^*(X^*)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto T^* es semi-regular.

De manera análoga procede la demostración para el caso T^* semi-regular implica T semi-regular, empleando en esta las igualdades

$$^\perp N(T^*) = T(X), \text{ y } N(T^n) =^\perp (T^*)^n(X^*) \quad (\forall n \in \mathbb{N});$$

en lugar de

$$N(T)^\perp = T^*(X^*), \text{ y } N((T^*)^n) = T^n(X)^\perp \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

□

Definición 1.2.19. *Sea $T \in L(X)$ un operador acotado sobre un espacio de Banach X. El espectro semi-regular de T, denotado $\sigma_k(T)$, se define como el conjunto de todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $\lambda I - T$ no es semi-regular.*

El espectro semi-regular de T también es conocido en la literatura como el espectro de Kato, de allí la notación $\sigma_k(T)$. El espectro $\sigma_k(T)$ es un subconjunto cerrado no vacío de $\mathbb{C}$. Además, como

$$T \text{ semi-regular} \quad \Leftrightarrow \quad T^* \text{ semi-regular};$$

sigue que $\sigma_k(T) = \sigma_k(T^*)$, cualquiera sea el operador $T \in L(X)$.

Definición 1.2.20. *Un operador $T \in L(X)$ es de tipo Kato, o admite una descomposición de Kato, si existen subespacios M y N de X, cerrados, T-invariantes, tales que $X = M \oplus N$, $T \mid M$ semi-regular y $T \mid N$ nilpotente.*

La noción de operador de tipo Kato, determina la siguiente parte del espectro clásico.

Definición 1.2.21. *Sea $T \in L(X)$ un operador acotado sobre un espacio de Banach X. El espectro de tipo Kato del operador T, se define como:*

$$\sigma_{kt}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \textit{ no es de tipo Kato }\}.$$

De modo similar al espectro semi-regular, se tiene que $\sigma_{kt}(T)$ es un subconjunto cerrado no vacío de $\mathbb{C}$ y $\sigma_{kt}(T) = \sigma_{kt}(T^*)$ (véase Müller [34]).

A continuación describimos otra clase particularmente importante de operadores que admiten descomposiciones de Kato, más generalizadas.

Definición 1.2.22. *Sea $T \in L(X)$ un operador acotado sobre un espacio de Banach complejo X. T es un operador esencialmente semi-regular si existen subespacios M y*

N de X, cerrados, T-invariantes, tales que $X = M \oplus N$, $T \mid M$ semi-regular, $T \mid N$ cuasi-nilpotente y dim $N < \infty$.

Se puede observar claramente que todo operador semi-regular es esencialmente semi-regular. Además, si $T \mid N$ es cuasi-nilpotente y dim $N < \infty$, entonces $T \mid N$ es nilpotente. Así, todo operador esencialmente semi-regular es de tipo Kato.

El siguiente hecho, debido a Kato [32], juega un papel clave en el estudio de los operadores semi-Fredholm.

Teorema 1.2.23. *Sean X un espacio de Banach y $T \in L(X)$. Si T es un operador de semi-Fredholm, entonces T es esencialmente semi-regular.*

Demostración. Véase [1].

□

La noción de operador esencialmente semi-regular, determina el espectro siguiente.

Definición 1.2.24. *Sea $T \in L(X)$ un operador acotado sobre un espacio de Banach X. El espectro esencialmente semi-regular, denotado $\sigma_{ke}(T)$, se define como:*

$$\sigma_{ke}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es esencialmente semi-regular}\}.$$

Para los espectros espectros estudiados anteriormente, las relaciones de inclusión que siempre se cumplen son las siguientes:

$$\sigma_{kt}(T) \subseteq \sigma_{ke}(T) \subseteq \sigma_k(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$$

$$\sigma_{kt}(T) \subseteq \sigma_{ke}(T) \subseteq \sigma_{sf}(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$$

cualquiera sea el operador $T \in L(X)$, X un espacio de Banach complejo infinito dimensional.

Además, aunque menos evidente, también se tiene la inclusión (véase V.Rakočević [41])

$$\partial\sigma_{sf}(T) \subseteq \sigma_{ke}(T).$$

1.3. Operadores Semi-Browder, Browder y de Weyl

En esta sección se introducen los operadores semi-Browder, Browder y de Weyl, así como los espectros determinados por dichas clases de operadores.

Definición 1.3.1. *Sea X un espacio de Banach complejo. La clase de todos los operadores superiormente semi-Browder en $L(X)$, denotada $B_+(X)$, se define como*

$$B_+(X) = \{T \in \Phi_+(X) : p(T) < \infty\},$$

y la clase de los operadores inferiormente semi-Browder, $B_-(X)$, por

$$B_-(X) = \{T \in \Phi_-(X) : q(T) < \infty\}.$$

$B(X) = B_+(X) \cap B_-(X)$ define la clase los operadores de Browder en $L(X)$.

Las clases $B_+(X)$ y $B_-(X)$ fueron introducidas por Harte en [29]. La clase de todos los operadores de Browder también es conocida en la literatura como la clase de los operadores de Riesz-Schauder. Para $T \in B_+(X)$ se tiene que ind $(T) =$ dim $N(T) -$codim $T(X) \leq 0$, mientras que para $T \in B_-(X)$ tendremos que ind $(T) \geq 0$.

P. Aiena y C. Carpintero, estudiaron de manera extensa los operadores semi-Browder y Browder en [8], y dieron caracterizaciones espectrales para tales operadores. Seguidamente introducimos otra importante clase de operadores, conocidas como los operadores de Weyl.

Definición 1.3.2. *Sea X un espacio de Banach complejo. La clase de los operadores de Weyl en $L(X)$, denotada $W(X)$, es definida por*

$$W(X) = \{T \in \Phi(X) : ind(T) = 0\}$$

La clase $W(X)$ puede describirse también en la forma

$$W(X) = W_+(X) \cap W_(X),$$

donde

$$\begin{aligned} W_+(X) &= \{T \in \Phi_+(X) : \text{ind } (T) \leq 0\} \\ W_-(X) &= \{T \in \Phi_-(X) : \text{ind } (T) \geq 0\} \end{aligned}$$

Observemos que $B(X) \subseteq W(X)$, ya que cada operador $T \in L(X)$ de Fedholm en X, con $p(T)$ y $q(T)$ finitos, necesariamente tiene índice cero.

Las distintas clases de operadores definidas anteriormente motivan, de manera natural la definición de ciertos espectros asociados a cada uno estos, los cuales se introducen a continuación.

Definición 1.3.3. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$.*

$$\sigma_{ub}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin B_+(X)\},$$

$$\sigma_{lb}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin B_-(X)\},$$

$$\sigma_{b}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin B(X)\},$$

$$\sigma_{uw}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin W_+(X)\},$$

$$\sigma_{lw}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin W_-(X)\},$$

$$\sigma_{w}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin W(X)\},$$

definen, respectivamente, los espectros: superiormente semi-Browder, inferiormente semi-Browder, Browder superiormente semi-Weyl, inferiormente semi-Weyl y de Weyl de un operador $T \in L(X)$.

Claramente,

$$\sigma_b(T) = \sigma_{ub}(T) \cup \sigma_{lb}(T).$$

y de la Proposición 38.6 de [31], se tiene que

$$\sigma_b(T) = \sigma_{ub}(T) \cup \sigma_w(T).$$

Además también tenemos, de la Definición 1.3.3 y las propiedades de los operadores de semi-Fredholm, que

$$\sigma_{ub}(T) = \sigma_{lb}(T^*) \quad \sigma_{lb}(T) = \sigma_{ub}(T^*)$$

Por lo cual,

$$\sigma_b(T) = \sigma_b(T^*)$$

Más aún, también se tienen las inclusiones siguientes:

(1) $\sigma_f(T) \subseteq \sigma_w(T) \subseteq \sigma_b(T)$.

(2) $\sigma_{sf}(T) \subseteq \sigma_{uf}(T) \subseteq \sigma_{uw}(T) \subseteq \sigma_{ub}(T) \subseteq \sigma_b(T)$

(3) $\sigma_{sf}(T) \subseteq \sigma_{lf}(T) \subseteq \sigma_{lw}(T) \subseteq \sigma_{lb}(T) \subseteq \sigma_b(T)$

Similarmente a los espectros semi-Browder, $\sigma_w(T) = \sigma_w(T^*)$.

Un operador $R \in L(X)$ se dice que es de Riesz si $\lambda I - T$ es un operador de Ferdholm para todo $\lambda \neq 0$, o equivalentemente es un operador de Browder para todo $\lambda \neq 0$. El espectro superiormente Browder y el espectro de superiormente Weyl son invariantes bajo perturbaciones de operadores de Riesz que conmutan (véase [42] y [44]), es decir; si R es un operador de Riesz tal que $TR = RT$ entonces

$$\sigma_{ub}(T) = \sigma_{ub}(T+R) \text{ y } \sigma_{uw}(T) = \sigma_{uw}(T+R).$$

1.4. Propiedad de la Extensión Univaluada y Operadores tipo Kato

En esta sección se trata la propiedad de la extensión univaluada localizada en un punto, noción introducida por J. Finch [27], se presentan algunas situaciones bajo las cuales un operador, o su dual, posee dicha propiedad y se dan caracterizaciones de la propiedad de extensión univaluada para el caso de los operadores de tipo Kato.

Es conveniente introducir previamente la noción de funciones holomorfas $f : \mathcal{U} \to X$, donde $\mathcal{U}$ es un abierto del plano complejo y X un espacio de Banach, y algunos hechos concernientes a estas. Los detalles de lo aqui expuesto, pueden verse en Heuser [31].

Definición 1.4.1. *Sean X un espacio de Banach complejo y $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto en $\mathbb{C}$. Una función $f : \mathcal{U} \to X$ se dice holomorfa en $\mathcal{U}$ si,*

$$lim_{\mu \to \lambda} \frac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda}$$

existe, para todo $\lambda \in \mathcal{U}$. En tal caso, se denota

$$f'(\lambda) = lim_{\mu \to \lambda} \frac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda},$$

y $f'(\lambda)$ se llama la derivada de f en el punto λ. Si $x^* f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ es holomorfa, para cada $x^* \in X^*$, entonces $f : \mathcal{U} \to X$ se dice débilmente holomorfa en $\mathcal{U}$.

Observemos que conforme a la Definición 1.4.1, también pueden ser definidas las derivadas de orden superior $f^{(n)}(\lambda)$ para f en λ. Además, de existir

$$\lim_{\mu \to \lambda} \frac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda};$$

tendremos que

$$\begin{aligned}\lim_{\mu\to\lambda}\frac{x^*f(\mu)-x^*f(\lambda)}{\mu-\lambda} &= \lim_{\mu\to\lambda} x^*\left(\frac{f(\mu)-f(\lambda)}{\mu-\lambda}\right)\\ &= x^*\left(\lim_{\mu\to\lambda}\frac{f(\mu)-f(\lambda)}{\mu-\lambda}\right),\end{aligned}$$

cualquiera sea $x^* \in X^*$. Por lo cual, si $f : \mathcal{U} \to X$ es holomorfa entonces es débilmente holomorfa. Lo que resulta menos obvio, es que el recíproco de la afirmación anterior también es cierto, jugando papel clave en esta el hecho que X es un espacio de Banach complejo. Además si $f : \mathcal{U} \to X$ es holomorfa en $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$, entonces $x^*(f(\lambda))$ determina una función, de variable y valores complejos, que es holomorfa. Por lo cual mucha de la teoría del análisis complejo puede ser empleada en el estudio de funciones con valores en un espacio de Banach.

Como en el caso clásico, otra noción relacionada con lo descrito en la Definición 1.4.1 es la integral de una función con valores en un espacio de Banach. La cual se precisa a continuación.

Definición 1.4.2. *Sean X un espacio de Banach complejo, $\Gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un camino rectificable en $\mathbb{C}$ y $f : \Gamma \to X$ una función continua. La integral de f a lo largo del camino de integración Γ,*

$$\int_\Gamma f(\lambda)d\lambda.$$

Se define como el límite de las sumas de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi)(\Gamma(\lambda_k)-\Gamma(\lambda_{k-1})),$$

asociadas a las particiones $a=\lambda_0<\lambda_1<...<\lambda_n=b$ del dominio $[a,b]$ del camino Γ.

De esta Definición se tienen las siguientes propiedades.

Teorema 1.4.3. *Dados un espacio de Banach complejo X, un camino rectificable $\Gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ y funciones continuas $f, g : \Gamma \to X$, tendremos:*

(i) $\int_\Gamma \mu f(\lambda) d\lambda = \mu \int_\Gamma f(\lambda) d\lambda$;

(ii) $\int_\Gamma (f(\lambda) + g(\lambda)) d\lambda = \int_\Gamma f(\lambda) d\lambda + \int_\Gamma g(\lambda) d\lambda$;

(iii) $\| \int_\Gamma f(\lambda) d\lambda \| \leq (\text{máx}_{\lambda \in \Gamma} \|f(\lambda)\|) \mathcal{L}_\Gamma$ *, con* $\mathcal{L}_\Gamma$ *la longuitud de* Γ;

(iv) $x^*(\int_\Gamma f(\lambda) d\lambda) = \int_\Gamma x^* f(\lambda) d\lambda$;

(v) $T(\int_\Gamma f(\lambda) d\lambda) = \int_\Gamma T f(\lambda) d\lambda$;

cualesquiera sean $\mu \in \mathbb{C}$, $x^* \in X^*$ *y* $T \in L(X)$.

Seguidamente presentaremos algunos resultados, similares a los ya conocidos clásicamente en el analísis complejo para funciones holomorfas, concernientes a funciones holomorfas $f : \mathcal{U} \to X$, donde $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ y X es un espacio de Banach complejo.

El siguiente resultado ofrece condiciones para que una función holomorfa con valores en un espacio de Banach sea constante.

Teorema 1.4.4. *(de Liouville). Toda función* $f : \mathbb{C} \to X$ *holomorfas y acotada es una función constante.*

Demostración. Véase Proposición 46.6. Heuser [31], página 191.

□

La independencia de la integral con respecto al camino de integración para una función a valores en un espacio de Banach se da a continuación.

Teorema 1.4.5. *(integral de Cauchy). Si* $f : \mathcal{U} \to X$ *es holomorfa en una región* $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ *y* Γ, Γ' *son caminos de integración, como los descritos en la Definición*

1.4.2, contenidos en $\mathcal{U}$ tales que sean homotópicos en $\mathcal{U}$ y que sus puntos iniciales y finales, respectivamente, coincidan. Entonces

$$\int_{\Gamma} f(\lambda)d\lambda = \int_{\Gamma'} f(\lambda)d\lambda.$$

En particular,

$$\int_{C} f(\lambda)d\lambda = 0,$$

para cualquier camino de integración C que sea cerrado y encierre solamente puntos de la región $\mathcal{U}$.

Demostración. Ver Proposición 46.4. Heuser [31], página 190.

□

Los dos teoremas que siguen, versan sobre las derivadas y el desarrollo en serie de una función holomorfa con valores en un espacio de Banach complejo, en ciertas regiones del plano complejo.

Teorema 1.4.6. *(fórmula integral de Cauchy). Si $f : \mathcal{U} \to X$ es holomorfa y $\mathcal{U}$ es una región simplemente conexa en $\mathbb{C}$, entonces f tiene derivadas de cualquier orden en cada $\lambda \in \mathcal{U}$ y éstas vienen dadas por la fórmula*

$$f^{(n)}(\lambda) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\mu)}{(\mu - \lambda)^{n+1}} d\mu \text{ , para } n = 0, 1, 2, ...$$

siendo Γ un camino de integración contenido en $\mathcal{U}$ el cual es simple, cerrado y positivamente orientado alrededor del punto λ. Más aún, f admite un desarrollo en serie de potencias

$$f(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\mu - \lambda)^n;$$

sobre cada disco abierto centrado en λ, $\mathbb{D}_\lambda \subseteq \mathcal{U}$ y cuyos coeficientes son

$$a_n = \frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!} \text{ , para } n = 0, 1, 2, ...$$

Demostración. Véase Proposición 46.5. Heuser [31], página 191.

□

Teorema 1.4.7. *(expansión en serie de Laurent). Sea $f : A(\lambda_0, 0, r) \to X$ una función holomorfa en el anillo $A(\lambda_0, 0, r) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 <\mid \lambda - \lambda_0 \mid< r\}$. Entonces f admite un desarrollo en serie de Laurent*

$$f(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(\lambda - \lambda_0)^{n-1}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda - \lambda_0)^n,$$

sobre dicho anillo. Donde los coeficientes están determinados por,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}} d\lambda \quad y \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda - \lambda_0)^{n-1} d\lambda.$$

Siendo $\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mid \lambda - \lambda_0 \mid= \delta\}$, con $0 < \delta < r$.

Demostración. Ver Proposición 46.7. Heuser [31], página 192.

□

Del teorema anterior, se originan las siguientes expresiones:

- λ_0 es una singularidad de f, si cada $b_k = 0$.
- λ_0 es un polo de orden p de f, si $b_p \neq 0$ y $b_k = 0$ para todo $k > p$.
- λ_0 es una singularidad esencial de f, si $b_k \neq 0$ para infinitos k.

Por ejemplo, de las propiedades del resolvente de un elemento en un algebra de Banach se tiene que, el resolvente $R(.,T) : \rho(T) \to L(X)$ de un operador T, $R(\lambda, T)x = (\lambda I - T)^{-1}x$, es una función holomorfa. Además, si λ_0 es un punto aislado del espectro $\sigma(T)$ entonces, necesariamente, λ_0 o es un polo de $R(.,T)$ o es una singularidad esencial de $R(.,T)$.

Para un operador $T \in L(X)$, X un espacio de Banach complejo, denotaremos por $\mathcal{H}(\sigma(T))$ a la colección de todas las funciones f, a valores en $\mathbb{C}$, que tienen la propiedad de ser holomorfas sobre algún conjunto abierto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ tal que $\sigma(T) \subset \mathcal{U}$. Observe que el conjunto abierto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$, para el cual $\sigma(T) \subset \mathcal{U}$ y $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ es holomorfa, puede variar según sea $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.

Si $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ es holomorfa sobre un conjunto abierto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ tal que $\sigma(T) \subset \mathcal{U}$, la compacidad del espectro $\sigma(T)$ garantiza que $\sigma(T) \subset \bigcup_{k=1}^{n} \Omega_k$ y $\sigma(T) \cap \Omega_k \neq \emptyset$, para cada $k = 1, 2, ..., n$; donde los Ω_k son componentes conexas del abierto $\mathcal{U}$. Así, existen un número finito de curvas cerradas γ_k contenidas en $\mathcal{U} \setminus \sigma(T)$, de modo que el contorno o ciclo $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ encierra al espectro $\sigma(T)$, $\Gamma \subset \mathcal{U} \setminus \sigma(T)$ y el complemento $\mathbb{C} \setminus \mathcal{U}$ está fuera de Γ. Teniendo esto en cuenta, procede la definición siguiente.

Definición 1.4.8. *Sean X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. Si $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa sobre un conjunto abierto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ tal que $\sigma(T) \subset \mathcal{U}$, definimos el operador $f(T)$ inducido por f mediante el cálculo funcional de Riesz, según la fórmula*

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda I - T)^{-1} d\lambda\,;$$

donde $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ es un contorno o ciclo como el descrito anteriormente, orientado positivamente.

Notemos que en la Definición 1.4.8 se involucra la integral de una función compleja con valores en un espacio de Banach complejo, descrita en la Definición 1.4.2. Además, de la analiticidad del resolvente de $T \in L(X)$ y el Teorema integral de Cauchy, Teorema 1.4.5, sigue que la definición de $f(T)$ no depende del contorno o ciclo $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ elegido.

Mediante la Definición 1.4.8, es posible establecer una correspondencia $\mathcal{H}(\sigma(T)) \to L(X)$, dada por $f \mapsto f(T)$, cuyas propiedades centrales se dan a continuación. Juegan un importante papel en estas, las propiedades mencionadas en el Teorema 1.4.3.

Teorema 1.4.9. *La correspondencia $\mathcal{H}(\sigma(T)) \to L(X)$, dada por $f \mapsto f(T)$, satis-*

face:

(i) $(\lambda f)(T) = \lambda f(T)$;

(ii) $(f+g)(T) = f(T) + g(T)$;

(iii) $(fg)(T) = f(T)g(T)$;

(iv) *si* $f(\lambda) \neq 0$ *para todo* $\lambda \in \sigma(T)$*, entonces* $f(T)$ *es invertible en* $L(X)$*.*

Demostración. Véase Teorema 48.1. Heuser [31], página 201.

□

Seguidamente introducimos la noción de subconjunto espectral, la cual es muy útil en ciertas situaciones en conexión con el cálculo funcional de Riesz.

Definición 1.4.10. *Un subconjunto* $\sigma \subseteq \sigma(T)$ *se dice un subconjunto espectral de* $\sigma(T)$*, si* σ *y* $\sigma(T) \setminus \sigma$ *son subconjuntos cerrados.*

Observemos que siendo σ un subconjunto espectral de $\sigma(T)$, entonces dist $(\sigma, \sigma(T) \setminus \sigma) > 0$, lo que es equivalente a que existen subconjuntos abiertos y disjuntos $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ tales que $\sigma \subset \mathcal{U}$ y $\sigma(T) \setminus \sigma \subset \mathcal{V}$. Según esto, podemos definir $f : \mathcal{U} \cup \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ mediante la fórmula

$$f(\lambda) = \begin{cases} 1 & , \lambda \in \mathcal{U} \\ \\ 0 & , \lambda \in \mathcal{V} \end{cases}$$

De la Definición 1.4.8, se tiene

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda I - T)^{-1} d\lambda\,;$$

donde $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ es cualquier contorno o ciclo con las características descritas en la citada definición. Adicionalmente, por el inciso (iii) del Teorema 1.4.9, $f(T)^2 = f(T)$, ya que $f(\lambda)f(\lambda) = f(\lambda)$. Lo cual nos dice que $f(T)$ es un operador idempotente, y por tanto una proyección. Por otro lado,

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda I - T)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\sigma} (\lambda I - T)^{-1} d\lambda\,;$$

donde Γ_σ es ahora un contorno o ciclo alrededor del subconjunto espectral σ de $\sigma(T)$. Esta situación motiva la definición siguiente.

Definición 1.4.11. *Dados $T \in L(X)$, X un espacio de Banach, y σ un subconjunto espectral de $\sigma(T)$. La proyección,*

$$P_\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\sigma}(\lambda I - T)^{-1}d\lambda\,;$$

con Γ_σ un contorno o ciclo con las características citadas anteriormente, se denomina la proyección espectral asociada al subconjunto espectral σ.

De la definición anterior, sigue que

$$f(T)P_\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\sigma} f(\lambda)(\lambda I - T)^{-1}d\lambda\,,$$

cualquiera sea $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.

Toda proyección determina una descomposición en suma directa del espacio donde esta actúa, pero en el caso de las proyecciones espectrales se tienen algunas condiciones adicionales a dicha descomposición.

Teorema 1.4.12. *Sean $T \in L(X)$, X un espacio de Banach, y σ un subconjunto espectral de $\sigma(T)$. Si P_σ es la proyección espectral asociada a σ, entonces:*

(i) $X = N(P_\sigma) \oplus P_\sigma(X)$;

(ii) $N(P_\sigma)$ *y* $P_\sigma(X)$ *son subespacios invariantes por* T, *y por* $f(T)$ *cualquiera sea* $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$;

(iii) $\sigma(T \mid N(P_\sigma)) = \sigma(T) \setminus \sigma$ *y* $\sigma(T \mid P_\sigma(X)) = \sigma$.

Demostración. Ver Teorema 49.1. Heuser [31], página 205.

□

Dos subespacios importantes en la teoría espectral local son el core analítico y la parte cuasi-nilpotente de un operador T. El core analítico $K(T)$ es el conjunto de todos los $x \in X$ tales que existe una constante $c > 0$ y una sucesión de elementos $x_n \in X$ tal que $x_0 = x, Tx_n = x_{n-1}$, y $\|x_n\| \leq c^n\|x\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, véase [1] para mayor información de $K(T)$. La parte cuasi-nilpotente es definida por

$$H_0(T) := \{x \in X : \lim_{n\to\infty} \|T^n x\|^{\frac{1}{n}} = 0\}.$$

Se puede observar que (véase Capítulo 2 de [1]).

$$H_0(\lambda I - T) \text{ es cerrado} \Rightarrow T \text{ tiene la } SVEP \text{ en } \lambda.$$

Algunas propiedades inmediatas de la parte cuasi-nilpotente de un operador se recogen en la siguiente proposición.

Teorema 1.4.13. *para cada $T \in L(X)$, con X un espacio de Banach, se tiene:*

(i) $N(T^m) \subseteq H_o(T)$ *para cada* $m \in \mathbb{N}$*;*

(ii) $x \in H_o(T) \Leftrightarrow Tx \in H_o(T)$

Demostración. (i) Evidente.
(ii) Sea $x \in H_o(T)$ entonces

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty}\|T^n(Tx)\|^{\frac{1}{n}} &= lim_{n\to\infty}\|T(T^n x)\|^{\frac{1}{n}} \\ &\leq lim_{n\to\infty}\|T\|^{\frac{1}{n}}\|T^n x\|^{\frac{1}{n}} \\ &= (lim_{n\to\infty}\|T\|^{\frac{1}{n}})(lim_{n\to\infty}\|T^n x\|^{\frac{1}{n}}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

en consecuencia $Tx \in H_o(T)$. Recíprocamente si $Tx \in H_o(T)$, entonces

$$lim_{n\to\infty}\|T^n x\|^{\frac{1}{n}} = lim_{n\to\infty}(\|T^{n-1}(Tx)\|^{\frac{1}{n-1}})^{\frac{n-1}{n}} = 0$$

así $x \in H_o(T)$.

$\square$

El en siguiente teorema se presentan algunas relaciones elementales entre el core analítico y la parte cuasi nilpotente de un operador.

Teorema 1.4.14. *Sean X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. Entonces:*

$$K(T^*) \subseteq H_0(T)^\perp,\ H_0(T) \subseteq^\perp K(T^*) \text{ y } K(T) \subseteq^\perp H_0(T^*).$$

Demostración. Para las inclusiones $K(T^*) \subseteq H_0(T)^\perp$ y $H_0(T) \subseteq^\perp K(T^*)$, observemos que dados $x^* \in K(T^*)$ y $x \in H_0(T)$. Si $(x_n^*) \subseteq X^*$ y $\delta > 0$ son tales que $x^* = x_0^*$, $T^*x_{n+1}^* = x_n^*$ y $\|x_n^*\| \leq \delta^n\|x^*\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $x^* = (T^*)^n x_n^*$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y tendremos la igualdad

$$x^*(x) = (T^*)^n x_n^*(x) = x_n^*(T^n x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

De donde siguen las relaciones

$$\|x^*(x)\| = \|x_n^*(T^n x)\| \leq \|x_n^*\|\|T^n x\| \leq \delta^n\|x^*\|\|T^n x\|,$$

Así $\|x^*(x)\|^{1/n} \leq \delta\|x^*\|^{1/n}\|T^n x\|^{1/n}$, cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$, lo que implica que $\lim_{n\to\infty} \|x^*(x)\|^{1/n} = 0$, por lo que necesariamente $x^*(x) = 0$. El razo- namiento anterior demuestra que $x^*(x) = 0$, cualesquiera sean $x^* \in K(T^*)$ y $x \in H_0(T)$, de donde concluimos que $x^* \in H_0(T)^\perp$ para cada $x^* \in K(T^*)$, y que $x \in^\perp K(T^*)$ para cada $x \in H_0(T)$. En consecuencia, $K(T^*) \subseteq H_0(T)^\perp$ y $H_0(T) \subseteq^\perp K(T^*)$.

Para la inclusión $K(T) \subseteq^\perp H_0(T^*)$, similarmente al caso anterior, dados $x \in K(T)$ y $x^* \in H_0(T^*)$, existen una sucesión $(x_n) \subseteq X$ y un número $\delta > 0$ tales que $x = x_0$, $Tx_{n+1} = x_n$ y $\|x_n\| \leq \delta^n\|x\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y además se tiene

$$\|x^*(x)\| = \|x^*(T^n x_n)\| = \|(T^*)^n x^*(x_n)\| \leq \delta^n\|(T^*)^n x^*\|\|x\|,$$

así $\|x^*(x)\|^{1/n} \leq \delta\|(T^*)^n x^*\|^{1/n}\|x\|^{1/n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. De donde concluimos, como en el caso anterior, que $x^*(x) = 0$ cualquiera sean $x^* \in H_0(T^*)$, y así $x \in K(T)$.

$\square$

En el caso que λ_0 sea un punto aislado del espectro $\sigma(T)$ de un operador T, la proyección espectral asociada al subconjunto espectral $\{\lambda_0\}$ tiene la particularidad que su núcleo e imagen corresponden, respectivamente, al core analítico y la parte cuasi-nilpotente de un cierto operador, lo cual tiene importantes implicaciones.

Teorema 1.4.15. *Sea $T \in L(X)$, X un espacio de Banach, y λ_0 un punto aislado del espectro $\sigma(T)$. Si P_0 es la proyección espectral asociada al subconjunto espectral $\{\lambda_0\}$, entonces:*

$$\begin{array}{ll} (i) & P_0(X) = H_0(\lambda_0 I - T); \\ (ii) & N(P_0) = K(\lambda_0 I - T). \end{array}$$

En el caso particular que λ_0 sea un polo del resolvente de T;

$$P_0(X) = H_0(\lambda_0 I - T) = N(\lambda_0 I - T)^p,$$

$$N(P_0) = K(\lambda_0 I - T) = (\lambda_0 I - T)^p(X),$$

donde p, es el orden del polo λ_0.

Demostración. Previamente notemos que si λ_0 es un punto aislado de $\sigma(T)$, entonces existe un disco abierto $\mathbb{D}(\lambda_0, \epsilon)$ tal que $\mathbb{D}(\lambda_0, \epsilon) \setminus \{\lambda_0\} \subseteq \rho(T)$, pero

$$\mathbb{D}(\lambda_0, \epsilon) \setminus \{\lambda_0\} \subseteq \rho(T) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{D}(0, \epsilon) \setminus \{0\} \subseteq \rho(\lambda_0 I - T).$$

Por otro lado, si P_{λ_0} y P_0 son, respectivamente, las proyecciones espectrales asociadas a los subconjuntos espectrales $\{\lambda_0\}$ de $\sigma(T)$ y $\{0\}$ de $\sigma(\lambda_0 I - T)$, tendremos la relaciones

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} (\mu - (\lambda_0 I - T))^{-1} d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} ((\lambda_0 - \mu) I - T)^{-1} (-d\mu) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\lambda_0}} (\lambda I - T)^{-1} d\lambda = P_{\lambda_0}, \end{aligned}$$

donde $0 < \delta < \epsilon$ y además Γ_0, Γ_{λ_0} son los círculos

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \{\mu : |\mu| = \delta\} \\ \Gamma_{\lambda_0} &= \{\lambda : |\lambda - \lambda_0| = \delta\} \end{aligned}$$

orientados positivamente. En virtud de estas consideraciones, no hay pérdida de generalidad si hacemos la demostración para el caso $\lambda_0 = 0$.

Supongamos que 0 es un punto aislado del espectro $\sigma(T)$ de T. En tal caso existe un disco abierto $\mathbb{D}(0,\epsilon)$ para el cual $\mathbb{D}(0,\epsilon)\setminus\{0\} \subseteq \rho(T)$. De acuerdo con esto, si tomamos cualquier número δ arbitrario, pero fijo, tal que $0<\delta<\epsilon$ y consideramos el círculo $\Gamma_\delta = \{\lambda : |\lambda| = \delta\}$ orientado positivamente; tendremos que la proyección espectral P_0, asociada con el subconjunto espectral $\{0\}$ esta dada según

$$P_0 x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta} (\lambda I - T)^{-1} x d\lambda.$$

Como $T^n P_0 x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta} \lambda^n (\lambda I - T)^{-1} x d\lambda$, cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$, entonces para un vector $x \in P_0(X)$, $x = P_0 x$ y resulta la igualdad

$$T^n x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta} \lambda^n (\lambda I - T)^{-1} x d\lambda.$$

De donde obtenemos la desigualdad

$$\|T^n x\| = \|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta} \lambda^n (\lambda I - T)^{-1} x d\lambda\| \leq \delta^n (\delta \|x\| \max_{\lambda\in\Gamma_\delta} \|(\lambda I - T)^{-1}\|).$$

La cual implica, para $x \neq 0$, que $\|T^n x\|^{1/n} \leq \delta(\delta\|x\| \max_{\lambda\in\Gamma_\delta} \|(\lambda I - T)^{-1}\|)^{1/n}$, cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$, de donde se deduce que $\lim_{n\to\infty} \|T^n x\|^{1/n} \leq \delta$. Por ser $0 < \delta < \epsilon$, arbitrario, se concluye entonces que $\lim_{n\to\infty} \|T^n x\|^{1/n} = 0$, lo que nos dice que $x \in H_0(T)$. Hemos probado así la inclusión $P_0(X) \subseteq H_0(T)$. Para la inclusión $H_0(T) \subseteq P_0(X)$, observemos que siendo $x \in H_0(T)$ y denotando por $S = \frac{1}{\lambda}T$, para $\lambda \neq 0$, resulta que

$$S^n x = \frac{1}{\lambda^n} T^n x \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Como $\lim_{n\to\infty} \|T^n x\|^{1/n} = 0$, la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|T^n x\|}{|\lambda|^n}$ converge. Así tendremos que $\sum_{n=0}^{\infty} S^n x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n x}{\lambda^n}$ converge para cada $\lambda \neq 0$. Denotando entonces, por cada $\lambda \neq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} S^n x = y_\lambda$ sigue que

$$S y_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} S^{n+1} x = \sum_{n=1}^{\infty} S^n x = y_\lambda - x.$$

De donde obtenemos la igualdad $(I-S)y_\lambda = x$, siguiendo de esta que $\frac{(\lambda I - T)}{\lambda} y_\lambda = x$ para cada $\lambda \neq 0$. Así para cualquier $\lambda \in \Gamma_\delta$,

$$(\lambda I - T)^{-1}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n x}{\lambda^{n+1}}.$$

En virtud de esta igualdad,

$$P_0 x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta} (\lambda I - T)^{-1} x \, d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta} \frac{T^n x}{\lambda^{n+1}} \, d\lambda = x,$$

ya que

$$\int_{\Gamma_\delta} \frac{T^n x}{\lambda^{n+1}} \, d\lambda = \begin{cases} 2\pi i x & , \text{si } n = 0 \\ \\ 0 & , \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Al ser $x = P_0 x$, resulta que $x \in P_0(X)$, con lo que concluimos la inclusión $H_0(T) \subseteq P_0(X)$.

Para la segunda igualdad, observe que siendo $P_0(X) = H_0(T)$ la restricción $T \mid P_0(X) : P_0(X) \to P_0(X)$ resulta ser un operador cuasi-nilpotente, entonces $\sigma(T \mid P_0(X)) = \{0\}$ y por el Teorema 1.4.12, $\sigma(T \mid \mathrm{N}\ P_0) = \sigma(T)\backslash\{0\}$. Así $0 \notin \sigma(T \mid \mathrm{N}\ P_0)$, por lo cual $0 \in \rho(T \mid \mathrm{N}\ P_0)$ y tendremos que $T(\mathrm{N}\ P_0) = \mathrm{N}\ P_0$. De esto último y el Teorema 1.22 de [1], parte (iii), resulta la inclusión $\mathrm{N}\ P_0 \subseteq K(T)$. Por otra parte, si $x \in K(T)$ existen entonces una sucesión de vectores (x_n) en X y un número $c > 0$ tales que $x = x_0$, $Tx_{n+1} = x_n$ y $\|x_n\| \leq c^n \|x\|$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De las condiciones $x = x_0$ y $Tx_{n+1} = x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, obtenemos que $x = T^n x_n$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$. Como T y P_0 son operadores que conmutan, sigue que $P_0 T^n = T^n P_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De acuerdo a esto, resultan las igualdades

$$P_0 x = P_0 T^n x_n = T^n P_0 x_n = (T \mid P_0(X))^n P_0 x_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Según esto y de la idempotencia de P_0, tendremos

$$\begin{aligned} P_0 x &= P_0(P_0 x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta} (\lambda I - T)^{-1} P_0 x \, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta} (\lambda I - T)^{-1} (T \mid P_0(X))^n P_0 x_n \, d\lambda. \end{aligned}$$

De donde siguen las desigualdades

$$\begin{aligned}\|P_0x\| &\leq (\delta\|P_0\| \max_{\lambda\in\Gamma_\delta} \|(\lambda I - T)^{-1}\|)\|(T \mid P_0(X))^n\|\|x_n\| \\ &\leq (\delta\|P_0\|\|x\| \max_{\lambda\in\Gamma_\delta} \|(\lambda I - T)^{-1}\|)c^n\|(T \mid P_0(X))^n\|.\end{aligned}$$

Lo que implica

$$\|P_0x\|^{1/n} \leq (\delta\|P_0\|\|x\| \max_{\lambda\in\Gamma_\delta} \|(\lambda I - T)^{-1}\|)^{1/n}c\,\|(T \mid P_0(X))^n\|^{1/n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Siguiendo de esta última desigualdad y la cuasi-nilpotencia de $T \mid P_0(X)$, esto es $\lim_{n\to\infty} \|(T \mid P_0(X))^n\|^{1/n} = 0$, que $\lim_{n\to\infty} \|P_0x\|^{1/n} = 0$. Lo que, necesariamente, permite deducir que $P_0x = 0$ y así $x \in \mathrm{N}\ P_0$. Probándose de esta manera la inclusión $K(T) \subseteq \mathrm{N}\ P_0$.

Finalmente, siendo un punto aislado λ_0 del espectro $\sigma(T)$ un polo, di- gamos de orden p, del resolvente $R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$. Existe un disco $\mathbb{D}(\lambda_0, r)$ tal que $\mathbb{D}(\lambda_0, r) \setminus \{\lambda_0\} \subseteq \rho(T)$, además para cualquier número δ, $0 < \delta < r$, si $\Gamma_\delta = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| = \delta\}$, entonces el resolvente de T admite un desarrollo en serie de Laurent en la forma

$$(\lambda I - T)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(\lambda - \lambda_0)^{n-1}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda - \lambda_0)^n,$$

sobre el anillo $\{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < |\lambda - \lambda_0| < r\}$. Donde,

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta} (\lambda - \lambda_0)^{n-1}(\lambda I - T)^{-1}d\lambda = (T - \lambda_0 I)^{n-1}P_0,$$

y P_0 es la proyección espectral asociada al subconjunto $\{\lambda_0\}$. Por ser λ_0 un polo de orden p, tendremos que $b_p \neq 0$ y $b_n = 0$ para cada $n \geq p + 1$. Según esto, $(T - \lambda_0 I)^p P_0 = b_{p+1} = 0$, lo cual implica que

$$P_0(X) \subseteq \mathrm{N}\ (T - \lambda_0 T)^p = \mathrm{N}\ (\lambda_0 I - T)^p.$$

De donde, por las igualdades demostradas anteriormente, se obtienen

$$\mathrm{N}\ (\lambda_0 I - T)^p \subseteq H_0(\lambda_0 I - T) = P_0(X) \subseteq \mathrm{N}\ (\lambda_0 I - T)^p,$$

y así resulta la igualdad $H_0(\lambda_0 I - T) = \mathrm{N}\ (\lambda_0 I - T)^p$. Por otro lado, como T y P_0 son operadores que conmutan, entonces

$$P_0(T - \lambda_0 I)^p = (T - \lambda_0 I)^p P_0 = 0.$$

Lo cual implica que,

$$(\lambda_0 I - T)^p(X) = (T - \lambda_0 I)^p(X) \subseteq \mathrm{N}\ P_0.$$

Debido a esto y en virtud de las igualdades demostradas previamente, siguen

$$(\lambda_0 I - T)^p(X) \subseteq \mathrm{N}\ P_0 = K(\lambda_0 I - T) \subseteq (\lambda_0 I - T)^p(X).$$

En consecuencia, $K(\lambda_0 I - T) = (\lambda_0 I - T)^p(X)$.

□

Teorema 1.4.16. *Sea $T \in L(X)$ un operador acotado sobre un espacio de Banach X. Para cualquier escalar λ_0,*

(i) $0 < p(\lambda_0 I - T) = q(\lambda_0 I - T) < \infty$;

(ii) *es un polo del resolvente* $R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$;

son equivalentes.

Demostración. Véase Proposición 50.2. Heuser [31], página 209.

□

En la siguiente definición, debida a Finch ([27]), se introduce una propiedad muy útil modernamente en la teoría espectral local.

Definición 1.4.17. *Un operador acotado $T \in L(X)$ sobre un espacio de Banach complejo X, tiene la propiedad de la extensión univaluada en λ_0 (abreviada SVEP en λ_0), si para cada disco abierto $\mathbb{D}_{\lambda_0} \subseteq \mathbb{C}$ centrado en λ_0, la única función holomorfa $f : \mathbb{D}_{\lambda_0} \to X$ que satisface la ecuación*

$$(\lambda I - T)f(\lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{D}_{\lambda_0},$$

es la función $f \equiv 0$ *sobre* $\mathbb{D}_{\lambda_0}$. *Se dice que* T *tiene la propiedad de la extensión univaluada (abreviado* $SVEP$*) si tiene la propiedad de la extensión univaluada en cada punto* $\lambda \in \mathbb{C}$.

Para un operador $T \in L(X)$, denotaremos por

$$\Xi(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T \text{ no tiene la } SVEP\}.$$

Notemos que por el principio de identidad para funciones holomorfas y de la Definición 1.4.17, sigue que $\Xi(T)$ es un conjunto abierto contenido en el interior del espectro $\sigma(T)$.

Observación 1.4.18. *A continuación señalaremos una serie de propiedades básicas de la* $SVEP$ *para un operador* $T \in L(X)$*,* X *un espacio de Banach complejo, que siguen inmediatamente de la Definición 1.4.17.*

(i) Si T tiene la $SVEP$ en λ, entonces para cualquier subespacio cerrado Y de X que sea T-invariante, la restricción $T \mid Y$ también tiene la $SVEP$ en λ. Pues, si $\mathbb{D}_\lambda$ es un disco abierto centrado en λ y $f : \mathbb{D}_\lambda \to Y$ es una función holomorfa tal que

$$(\mu I - T \mid Y) f(\mu) = 0, \quad \forall \mu \in \mathbb{D}_\lambda.$$

Tendremos que $f : \mathbb{D}_\lambda \to Y \subseteq X$ es holomorfa y además satisface la condición,

$$(\mu I - T) f(\mu) = 0, \quad \forall \mu \in \mathbb{D}_\lambda.$$

Siendo que T tiene la $SVEP$ en λ, sigue que $f \equiv 0$ sobre $\mathbb{D}_\lambda$.

(ii) T tiene la $SVEP$ en λ si y sólo si $\lambda I - T$ tiene la $SVEP$ en 0.

(iii) T tiene la $SVEP$ en cada punto λ del resolvente $\rho(T)$ de T. Ya que si tomamos un $\lambda \in \rho(T)$ y $f : \mathbb{D}_\lambda \to X$ es una función holomorfa sobre un disco $\mathbb{D}_\lambda$

centrado λ, que satisface

$$(\mu I - T)f(\mu) = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{D}_\lambda.$$

Como $\lambda \in \rho(T)$, existe también un disco abierto $\mathbb{D}(\lambda, \epsilon)$, $\epsilon > 0$, para el cual $\mathbb{D}(\lambda, \epsilon) \subseteq \rho(T) \cap \mathbb{D}_\lambda$, además

$$(\mu I - T)f(\mu) = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{D}(\lambda, \epsilon).$$

Según esto último $f(\mu) = 0$ para cada $\mu \in \mathbb{D}(\lambda, \epsilon)$, ya que el resolvente es inyectivo en cualquier $\mu \in \mathbb{D}(\lambda, \epsilon) \subset \rho(T)$. Por el principio de identidad para funciones holomorfas concluimos que $f \equiv 0$ sobre $\mathbb{D}_\lambda$. Más aún, T también tiene la $SVEP$ en cada $\lambda \in \overline{\rho(T)}$. Ya que, dado un disco abierto $\mathbb{D}_\lambda$ centrado en λ y una función holomorfa $f : \mathbb{D}_\lambda \to X$ tal que

$$(\mu I - T)f(\mu) = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{D}_\lambda.$$

Siendo $\lambda \in \overline{\rho(T)}$, existe una sucesión $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \rho(T)$ para la cual $\lambda_n \to \lambda$ cuando $n \to \infty$. De acuerdo con esto, para algún $m \in \mathbb{Z}_+$ ocurre que

$$\lambda_n \in \mathbb{D}_\lambda \text{ siempre que } n \geq m.$$

Así, encontramos discos abiertos $\mathbb{D}_{\lambda_n} \subseteq \mathbb{D}_\lambda$, por cada $n \geq m$, y restricciones holomorfas $f : \mathbb{D}_{\lambda_n} \to X$ que satisfacen

$$(\mu I - T)f(\mu) = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{D}_{\lambda_n}.$$

Dado que T tiene la $SVEP$ en cada λ_n concluimos, por el principio de identidad para funciones holomorfas, que $f \equiv 0$ en $\mathbb{D}_\lambda$ y así T tiene la $SVEP$ en λ.

(iv) T tiene la $SVEP$ en cada $\lambda \in \partial\sigma(T)$, ya que $\partial\sigma(T) \subseteq \overline{\rho(T)}$.

(v) T tiene la $SVEP$ en cada λ que no sea punto límite del espectro puntual de T, $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ es un autovalor de } T\}$.

(vi) T tiene la $SVEP$ en cada λ que no sea punto límite del espectro aproximado puntual $\sigma_{ap}(T)$ de T. Como $\sigma_{su}(T) = \sigma_{ap}(T^*)$, también se tiene que T^* tiene la $SVEP$ en cada λ que no sea punto límite del espectro sobreyectivo $\sigma_{su}(T)$ de T.

(vii) Para cualquier operador $T \in L(X)$, T y T^* tienen la $SVEP$ en cada punto aislado λ del espectro $\sigma(T)$. Debido al principio de la identidad para funciones holomorfas, y la igualdad $\sigma(T) = \sigma(T^*)$.

(viii) Si T es cuasi-nilpotente, entonces T tiene la $SVEP$. Esta afirmación, sigue del hecho que para T cuasi-nilpotente, $\sigma(T) = \{0\}$. Así, cada $\lambda \neq 0$ es punto aislado de $\sigma(T)$, lo que implica según lo observado en (ix) que T tiene la $SVEP$ en cada $\lambda \neq 0$. El caso $\lambda = 0$ sigue del inciso (vi), pues $0 \in \partial\sigma(T)$.

Note que (véase Proposición 3.8 de [1])

$$p(\lambda I - T) < \infty \Rightarrow T \text{ tiene la } SVEP \text{ en } \lambda,$$

y dualmente

$$q(\lambda I - T) < \infty \Rightarrow T^* \text{ tiene la } SVEP \text{ en } \lambda.$$

Para los operadores de tipo Kato, P. Aiena y O. Monsalve ([13]), obtienen las siguientes caracterizaciones para la $SVEP$ en un punto.

Teorema 1.4.19. *Si $\lambda I - T \in L(X)$ es de tipo Kato, X un espacio de Banach, entonces las proposiciones siguientes son equivalentes:*

1. *T tiene la $SVEP$ en λ;*

2. *$p(\lambda I - T) < \infty$.*

En forma dual.

Teorema 1.4.20. *Si $\lambda I - T \in L(X)$ es de tipo Kato, X un espacio de Banach, entonces las proposiciones siguientes son equivalentes:*

1. T^* tiene la $SVEP$ en λ;

2. $q(\lambda I - T) < \infty$.

Además P. Aiena y E. Rosas ([15]), obtienen los siguientes resultados.

Teorema 1.4.21. *Si $\lambda I - T \in L(X)$ es de tipo Kato, X un espacio de Banach, entonces las condiciones dadas en el Teorema 1.4.19, son equivalentes a:*

$$\lambda \text{ no es punto de acumulación de } \sigma_{ap}(T).$$

Dualmente,

Teorema 1.4.22. *Si $\lambda I - T \in L(X)$ es de tipo Kato, X un espacio de Banach, entonces las condiciones dadas en el Teorema 1.4.20, son equivalentes a:*

$$\lambda \text{ no es punto de acumulación de } \sigma_{su}(T).$$

Teorema 1.4.23. *Si $\lambda I - T \in L(X)$ es de tipo Kato, X un espacio de Banach, entonces las condiciones dadas en el Teorema 1.4.19 y 1.4.21, son equivalentes a:*

$$N((\lambda I - T)^v) = H_0(\lambda I - T) \text{ para algún } v \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Sea $\lambda I - T$ un operador de tipo Kato y (M,N) una DGK para $\lambda I - T$, tal que $(\lambda I - T)|N$ es nilpotente. Supongamos que $p(\lambda I - T) < \infty$, entonces del Teorema 3.16 de [1] sigue que $H_0(\lambda I - T) = N$, siendo que $(\lambda I - T)|N$ es nilpotente existe un $v \in \mathbb{N}$ para el cual $((\lambda I - T)|N)^v = 0$ y entonces $(\lambda I - T)^v x = 0$ para todo $x \in N$; así, $N \subseteq N(\lambda I - T)^v$ en consecuencia

$$N(\lambda I - T)^v \subseteq H_0(\lambda I - T) = N \subseteq N(\lambda I - T)^v;$$

es decir,

$$N((\lambda I - T)^v) = H_0(\lambda I - T).$$

Por otro lado, se puede observar con facilidad que si

$$N((\lambda I - T)^v) = H_0(\lambda I - T) \text{ para algún } v \in \mathbb{N},$$

entonces $p(\lambda I - T) < \infty$ lo cual culmina la prueba.

$\square$

Dualmente,

Teorema 1.4.24. *Si* $\lambda I - T \in L(X)$ *es de tipo Kato,* X *un espacio de Banach, entonces las condiciones dadas en el Teorema 1.4.20 y 1.4.22, son equivalentes a:*

$$K(\lambda I - T) = R((\lambda I - T)^v) \text{ para algún } v \in \mathbb{N}$$

Siendo que todo operador semi Fredholm es de tipo Kato, tendremos que las equivalencias anteriores también son válidas en el caso que $\lambda_0 I - T$ es semi Fredholm, y en consecuencia se tiene los siguientes corolarios.

Corolario 1.4.25. *Si* $T \in L(X)$ *entonces se tiene que*

(i) $\sigma_{ub}(T) = \sigma_{sf}(T) \cup acc\sigma_{ap}(T)$;

(ii) $\sigma_{lb}(T) = \sigma_{sf}(T) \cup acc\sigma_{s}(T)$;

(iii) $\sigma_{b}(T) = \sigma_{sf}(T) \cup acc\sigma(T)$.

Corolario 1.4.26. *Si* $T \in L(X)$ *entonces se tiene que*

(i) Si T *tiene la SVEP entonces* $\sigma(T) = \sigma_s(T)$;

(ii) Si T^* *tiene la SVEP entonces* $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T)$.

Capítulo 2

Espectro Semi B-Browder y la propiedad de la extención univaluada

En este capítulo se estudian ciertas clases de operadores, introducidas por Berkani en [19] y [22], las cuales generalizan los operadores semi Fredholm, semi Browder y semi Weyl, tratados en la teoría clásica de Fredholm de los operadores acotados sobre espacios de Banach. Estas clases de operadores la constituyen los operadores de B-Fredholm, B-Browder y sus generalizaciones, los operadores semi B-Fredholm y semi B-Browder, así como también los operadores semi B-Weyl. Se estudian también los espectros correspondientes a cada una de estas clases generalizadas de operadores y se relacionan con el espectro originado por los operadores cuasi Fredholm introducidos por Labrousse en [33]. Es importante señalar que los resultados contenidos en este capítulo son resultados originales en los que se le da un nuevo enfoque a los operadores antes mencionados, los cuales ya fueron publicados por C. Carpintero, O. Garía, E. Rosas y J. Sanabria en el artículo titulado ″ B-Browder spectra and localized SVEP ″ en el año 2008 en la revista Rendiconti del circolo Matematico di Palermo.

2.1. Operadores Cuasi Fredholm

En esta sección se tratan los operadores cuasi Fredholm, introducidos por Labrousse en [36], y se estudian algunas características y propiedades de estos operadores las cuales serán de utilidad en las secciones que siguen.

Para $T \in L(X)$ y $n \in \mathbb{N}$, denotaremos

$$\kappa_n(T) = \dim\ ((R(T^n) \cap N(T))/(R(T^{n+1}) \cap N(T))).$$

En virtud del inciso 7, del Lema 1.1.1,

$$\kappa_n(T) = \dim\ ((R(T) + N(T^{n+1}))/(R(T) + N(T^n))).$$

En la siguiente definición, debida a Labrousse [36], describimos los operadores cuasi Fredholm.

Definición 2.1.1. *Un operador $T \in L(X)$ se dice cuasi Fredholm, si existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $\kappa_n(T) = 0$, para todo $n \geq d$, y ocurre alguna de las condiciones mencionadas en el Lema 1.1.8.*

$QF(X)$ denotará la colección de todos los operadores cuasi Fredholm en X.

Definición 2.1.2. *Un operador $T \in L(X)$ se dice que tiene descent uniforme para $n \geq d$ si $(R(T) + N(T^n)) = (R(T) + N(T^d))$ para todo $n \geq d$. Si, además, $(R(T) + N(T^d))$ es cerrado entonces se dice que T tiene descent topológico uniforme para $n \geq d$. Diremos que T tiene tiene descent uniforme (resp. descent topológico uniforme) si existe $d \in \mathbb{N}$ tal que T tiene tiene descent uniforme (resp. descent topológico uniforme) para todo $n \geq d$.*

Claramente se puede observar que todo operador cuasi Fredholm tiene descent topológico uniforme.

En [28] Grabiner, define y estudia la clase de los operadores lineales con descent topológico uniforme, que actúan sobre un espacio de Banach. El siguiente teorema ha sido demostrado por varios autores, entre ellos véase Grabiner [28] Teorema 4.7, y será una herramienta fundamental para la demostración de teoremas venideros

Teorema 2.1.3. *Supóngase que T es un operador acotado con descent topológico uniforme para $n \geq d$, definido sobre un espacio de Banach X, donde $n, d \in \mathbb{N}$, y V un operador acotado que conmuta con T. Si $V - T$ es suficientemente pequeño e invertible, entonces*

(i) *V tiene rango cerrado y descent topológico uniforme para $p \geq 0$*

(ii) $dim\frac{N(V^{p+1})}{N(V^p)} = dim\frac{N(T^{d+1})}{N(T^d)}$, *para cada entero $p \geq 0$*

(iii) $dim\frac{R(V^p)}{R(V^{p+1})} = dim\frac{R(T^d)}{R(T^{d+1})}$, *para cada entero $p \geq 0$*

Corolario 2.1.4. *Supóngase que T es un operador acotado con descent topológico uniforme para $n \geq d$, definido sobre un espacio de Banach X, donde $n, d \in \mathbb{N}$, y V un operador acotado que conmuta con T. Si $V - T$ es suficientemente pequeño e invertible, entonces*

(i) *Si $N(T) \cap R(T^d)$ es de dimensión finita, entonces V es un operador superiormente semi-Fredholm y $\alpha(V) = dim((N(T) \cap R(T^d)))$.*

(ii) *Si $N(T^d) + R(T)$ es de dimensión finita, entonces V es un operador inferiormente seme-Fredholm y $\beta(V) = dim(\frac{X}{N(T^d)+R(T)})$.*

Demostración. Como T es un operador con descent topológico uniforme, entonces $R(V)$ es cerrado por el Teorema 2.1.3. Dado que

$$dim\frac{N(T^{d+1})}{N(T^d)} = dim((N(T) \cap R(T^d))) \quad y \quad dim\frac{R(T^d)}{R(T^{d+1})} = dim(\frac{X}{N(T^d)+R(T)}),$$

entonces por el Teorema 2.1.3 se tiene que

$$\alpha(V) = dim((N(T) \cap R(T^d))) \quad y \quad \beta(V) = dim(\frac{X}{N(T^d)+R(T)}).$$

□

El resultado presentado a continuación, será de gran utilidad en el estudio de las propiedades de ciertas clases de operadores con los que trataremos.

Teorema 2.1.5. *Si $T \in L(X)$ es un operador cuasi Fredholm, entonces:*

(i) $p(T) < \infty$, si y sólo si $q(T^*) < \infty$,

(ii) $p(T^*) < \infty$, si y sólo si $q(T) < \infty$.

Demostración. Si $T \in QF(X)$ existe un entero positivo d tal que $T^j(X)$ es cerrado para todo $j \geq d$, o equivalentemente $T^{*j}(X^*)$ es cerrado para todo $j \geq d$.
(i) Supongamos que $p = p(T) < \infty$ y $j \geq max\{p, d\}$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} T^{*j}(X^*) &= \overline{T^{*j}(X^*)} \\ &= N(T^j)^{\perp} \text{(esta igualdad se satisface por ser } T^j(X) \text{ cerrado)} \\ &= N(T^{j+1})^{\perp} \\ &= \overline{T^{*j+1}(X^*)} \\ &= T^{*j+1}(X^*) \end{aligned}$$

lo cual implica que $q(T^*) < \infty$.

Por otro lado, si $q = q(T^*) < \infty$ y $j \geq max\{q, d\}$ se tiene que

$$\begin{aligned} N(T^j) &= {}^{\perp}(N(T^j)^{\perp}) \\ &= {}^{\perp}(\overline{T^{*j}(X^*)}) \\ &= {}^{\perp}(T^{*j}(X^*)) \\ &= {}^{\perp}(T^{*j+1}(X^*)) \\ &= {}^{\perp}(\overline{T^{*j+1}(X^*)}) \\ &= {}^{\perp}(N(T^{j+1})^{\perp}) \\ &= N(T^{j+1}) \end{aligned}$$

así $p(T) < \infty$.

(ii). Supongamos que $p = p(T^*) < \infty$ y $j \geq max\{p, d\}$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} T^j(X) &= \overline{T^j(X)} \\ &= {}^{\perp}N(T^{*j}) \\ &= {}^{\perp}N(T^{*j+1}) \\ &= \overline{T^{j+1}(X)} \\ &= T^{j+1}(X) \end{aligned}$$

en consecuencia $q(T) < \infty$.

por otro lado, si $q = q(T) < \infty$ y $j \geq max\{q, d\}$ se tiene que

$$\begin{aligned} N(T^{*j}) &= ({}^{\perp}N(T^{*j}))^{\perp} \\ &= (\overline{T^j(X)})^{\perp} \\ &= (T^j(X))^{\perp} \\ &= (T^{j+1}(X))^{\perp} \\ &= (\overline{T^{j+1}(X)})^{\perp} \\ &= ({}^{\perp}N(T^{*j+1}))^{\perp} \\ &= N(T^{*j+1}) \end{aligned}$$

por lo tanto $p(T^*) < \infty$.

□

La siguiente caracterización de los operadores cuasi Fredholm es dada por Berkani [20]

Lema 2.1.6. *$T \in L(X)$ es cuasi Fredholm si y sólo si existe $d \in \mathbb{N}$ tal que T^d es cerrado y T_n es semi regular para todo $n \geq d$.*

Demostración. (Suficiencia). Siendo T cuasi Fredholm, existe $d \in \mathbb{N}$ tal que

$$N(T) \cap R(T^n) = N(T) \cap R(T^{n+m})$$

y $R(T_n) = R(T^{n+1})$ es cerrado, cualesquiera sean $n \geq d$ y $m \in \mathbb{N}$. Luego,

$$N(T_n) = N(T) \cap R(T^n) = N(T) \cap R(T^{n+m}) \subseteq R(T^{n+m}) = R(T_n^m).$$

Así $N(T_n) \subseteq R(T_n^m)$ y $R(T_n) = R(T^{n+1})$ es cerrado, cualesquiera sean $n \geq d$ y $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, T_n es semi regular, siempre que $n \geq d$.

(Necesidad). Si existe un $d \in \mathbb{N}$ tal que T_n es un operador semi regular para todo $n \geq d$, entonces $R(T_d^m) = R(T^{d+m})$ es cerrado para cualquier $m \in \mathbb{N}$. Además, $N(T_d) \subseteq R(T^{d+m})$ para todo $m \in \mathbb{N}$, de donde sigue que $N(T) \cap R(T^d) \subseteq R(T^{d+m})$, lo que implica la igualdad $N(T) \cap R(T^d) = N(T) \cap R(T^{d+m})$, para cualquier $m \in \mathbb{N}$. Así tendremos que $\kappa_n(T) = 0$, siempre que $n \geq d$, y $R(T^{d+1})$ es cerrado, de donde se concluye que T es cuasi Fredholm.

□

El lema que introducimos a continuación nos permitirá demostrar la dualidad de la noción cuasi Fredholm.

Lema 2.1.7. *$T \in L(X)$ es cuasi Fredholm si y sólo si existe $i \in \mathbb{N}$ tal que T^j es cuasi Fredholm para todo $j \geq i$.*

Demostración. (Suficiencia). Según lo demostrado en el Lema 2.1.6, existe un $d \in \mathbb{N}$ tal que T_n es semi regular para todo $n \geq d$, lo cual implica que $(T_n)^j$ es semi regular para cada $j \in \mathbb{N}$, y $n \geq d$, en particular $(T_{n.j})^j = (T^j)_n$ es semi regular para todo $n \geq d$, en consecuencia T^j es cuasi Fredholm para cada $j \in \mathbb{N}$.

(Necesidad). Supongamos que existe $i \in \mathbb{N}$ tal que T^j es cuasi Fredholm para cada $j \geq i$. Entonces para cada $j \geq i$, existe $d(j) \in \mathbb{N}$ tal que $(T^j)^n(X)$ es cerrado y

$$N(T^j) \cap R((T^j)^n) = N(^j) \cap R((T^j)^{n+1})$$

para cada $n \geq d(j)$. En particular $T^{i(d(i)+1)}(X)$ es cerrado y

$$N(T^i) \cap R(T^{i.d(i)}) = N(T^i) \cap R(T^{i(d(i)+1)})$$

luego

$$\begin{aligned} N(T^i) \cap R(T^{i(d(i)+1)}) &\subseteq N(T^i) \cap R(T^{i(d(i)+1)-1}) \\ &\subseteq N(T^i) \cap R(T^{id(i)}) \\ &= N(T^i) \cap R(T^{i(d(i)+1)}) \end{aligned}$$

en consecuencia

$$\begin{aligned} N(T^i) \cap R(T^{i(d(i)+1)-1}) &= N(T^i) \cap R(T^{i(d(i)+1)}) \\ &= N(T^i) \cap R(T^{i(d(i)+n)}) \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, así

$$\begin{aligned} N(T) \cap R(T^{i(d(i)+1)-1}) &= N(T) \cap N(T^i) \cap R(T^{i(d(i)+1)-1}) \\ &= N(T) \cap N(T^i) \cap R(T^{i(d(i)+n)}) \\ &= N(T) \cap R(T^{i(d(i)+n)}) \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $n \geq i(d(i)+1)-1$, entonces

$$\begin{aligned} N(T) \cap R(T^{i(d(i)+n)}) &\subseteq N(T) \cap R(T^{n+1}) \\ &\subseteq N(T) \cap R(T^{n}) \\ &\subseteq N(T) \cap R(T^{i(d(i)+1)-1}) \\ &= N(T) \cap R(T^{i(d(i)+n)}) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$N(T) \cap R(T^n) = N(T) \cap R(T^{n+1})$$

para todo $n \geq i(d(i)+1)-1$. En consecuencia T es cuasi Fredholm.

$\square$

Teorema 2.1.8. *Un operador $T \in L(X)$ es cuasi-Fredholm si y sólo T^* es cuasi Fredholm.*

Demostración. (Suficiencia). Supongamos que T es un operador cuasi Fredholm, entonces existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(X)$ es cerrado para cada $n \geq d$ y en consecuencia $T^{*n}(X)$ es cerrado para cada $n \geq d$. Seún lo visto en el Lema 2.1.7, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que T^j es cuasi Fredholm para cada $j \geq i$. Sea $m = i, d$ y $n \geq d$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} N(T^{*m}) \cap R(T^{*n}) &= \overline{R(T^m)}^{\perp} \cap N(T^n)^{\perp} \\ &= R(T^m)^{\perp} \cap N(T^n)^{\perp} \\ &= (R(T^m) + N(T^n))^{\perp} \\ &= (R(T^m) + N(T^{n+1}))^{\perp} \\ &= R(T^m)^{\perp} \cap N(T^{n+1})^{\perp} \\ &= N(T^{*m}) \cap R(T^{*n+1}) \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} N(T^*) \cap R(T^{*n}) &= N(T^*) \cap N(T^{*m}) \cap R(T^{*n}) \\ &= N(T^*) \cap N(T^{*m}) \cap R(T^{*(n+1)}) \\ &= N(T^*) \cap R(T^{*(n+1)}) \end{aligned}$$

lo que demuestra que T^* es cuasi Fredholm.

(Necesidad). Supongamos que T^* es un operador cuasi Fredholm, entonces existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $T^{*n}(X)$ es cerrado para cada $n \geq d$ y en consecuencia $T^n(X)$ es cerrado para cada $n \geq d$. Seún lo visto en el Lema 2.1.7, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que T^{j*} es cuasi Fredholm para cada $j \geq i$. Sea $m = i, d$ y $n \geq d$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
(R(T^m) + N(T^n))^{\perp} &= R(T^m)^{\perp} \cap N(T^n)^{\perp} \\
&= N(T^{*m}) \cap R(T^{*n}) \\
&= N(T^{*m}) \cap R(T^{*(n+1)}) \\
&= R(T^m)^{\perp} \cap N(T^{(n+1)})^{\perp} \\
&= (R(T^m) + N(T^{(n+1)}))^{\perp}
\end{aligned}$$

observemos que $R(T^m) + N(T^n)$ y $R(T^m) + N(T^{n+1})$, ya que

$$R(T^m)^{\perp} + N(T^n)^{\perp} = R(T^{*n}) + N(T^{*m})$$

y

$$R(T^m)^{\perp} + N(T^{n+1})^{\perp} = R(T^{*(n+1)}) + N(T^{*m})$$

son cerrados. En consecuencia

$$\begin{aligned}
R(T^m) + N(T^n) &= {}^{\perp}((R(T^m) + N(T^n))^{\perp}) \\
&= {}^{\perp}((R(T^m) + N(T^{n+1}))^{\perp}) \\
&= R(T^m) + N(T^{n+1})
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
R(T) + N(T^n) &= R(T) + R(T^m) + N(T^n) \\
&= R(T) + R(T^m) + N(T^{n+1}) \\
&= R(T) + N(T^{n+1})
\end{aligned}$$

para todo $n \geq d$, con esto podemos concluir que T es cuasi Fredholm.

$\square$

Si $T \in L(X)$ y M es un subespacio T-invariante (esto es, $T(M) \subseteq M$), tendremos que $N(T \mid M) = N(T) \cap M$. Más aún, $N((T \mid M)^n) = N(T^n) \cap M$ para todo n, pues $T(M) \subseteq M$. Así $p(T) < \infty$ implicará $p(T \mid M) < \infty$; ya que si $p = p(T) < \infty$, entonces $N(T^n) = N(T^p)$ cualquiera sea $n \geq p$. Luego $N((T \mid M)^n) = N(T^n) \cap M = N(T^p) \cap M = N((T \mid M)^p)$, en consecuencia $p(T \mid M) \leq p(T) < \infty$. Es de observar que si $p(T \mid M) < \infty$, entonces no necesariamente $p(T) < \infty$. No obstante, para el caso que $M = R(T^n)$, $n \in \mathbb{N}$; Carpintero, García, Rosas y Sanabria [24] obtienen los siguientes resultados.

Lema 2.1.9. *Para un operador $T \in L(X)$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $p(T) < \infty$;

(ii) *existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $p(T_j) < \infty$, para todo $j \geq i$;*

(iii) *existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha(T_j) = \{0\}$, para todo $j \geq k$.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$. Supongamos que $p = p(T) < \infty$, y sea $y \in N(T) \cap R(T^j)$, con $j \geq p$. Según esto $y = T^j x$, para algún $x \in X$, y además tendremos que $T^{j+1}x = T(T^j x) = 0$. Luego $x \in N(T^{j+1}) = N(T^j)$, pues $j \geq p$, en consecuencia $y = T^j x = 0$. Así $N(T) \cap R(T^j) = \{0\}$, implicando esto que $N(T_j) = N(T) \cap R(T^j) = \{0\}$, para todo $j \geq p$. Esto nos dice que T_j es inyectivo cuando $j \geq p$,esto equivale a decir que $p(T_j) = 0 < \infty$, para todo $j \geq p$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Supongamos que existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $p(T_j) < \infty$, para todo $j \geq i$. Sea $p = p(T_j)$, $j \geq i$, procediendo de manera análoga como en el caso anterior obtenemos que $N(T_j) \cap R(T_j^m) = \{0\}$, para todo $m \geq p$. Según esto, y de acuerdo con el inciso (2) del Lema 1.1.1,

$$\begin{aligned}
N(T_{m+j}) &= N(T) \cap R(T^{m+j}) \\
&= N(T) \cap (R(T^j) \cap R(T^{m+j})) \\
&= (N(T) \cap R(T^j)) \cap R(T_j^m) \\
&= N(T_j) \cap R(T_j^m) \\
&= \{0\}.
\end{aligned}$$

En consecuencia $N(T_j) = \{0\}$, siempre que $j \geq p + i$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Supongamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $N(T_j) = \{0\}$, para todo $j \geq k$. Entonces, $N(T) \cap R(T^j) = \{0\}$ para $j \geq k$. Si tomamos $x \in N(T^{j+1})$ tendremos que $T(T^j x) = T^{j+1}x = 0$. Luego $T^j x \in N(T) \cap R(T^j) = \{0\}$, así $x \in N(T^j)$ y resulta la igualdad $N(T^{j+1}) = N(T^j)$, de donde sigue que $p(T) < \infty$.

□

Lema 2.1.10. *Para un operador $T \in L(X)$, se tienen:*

(i) $p(T_i) < \infty$ para algún $i \in \mathbb{N}$ si y sólo si $p(T_j) < \infty$ para todo $j \geq i$;

(ii) $\alpha(T_i) = 0$ para algún $i \in \mathbb{N}$ si y sólo si $\alpha(T_j) = 0$ para todo $j \geq i$.

Demostración. (i) Si $p_i = p(T_i) < \infty$ para algún $i \in \mathbb{N}$, y $j \geq i$ tendremos que

$$\begin{aligned} N(T_j^{p_i}) &= N(T^{p_i}) \cap R(T^j) \\ &= N(T^{p_i}) \cap R(T^i) \cap R(T^j) \\ &= N(T^{p_i+1}) \cap R(T^i) \cap R(T^j) \\ &= N(T^{p_i+1}) \cap R(T^j) \\ &= N(T_j^{p_i+1}). \end{aligned}$$

lo cual implica que $p(T_j) \leq p(T_i) < \infty$ para todo $j \geq i$.

(ii) Si $\alpha(T_i) = 0$ para algún $i \in \mathbb{N}$, y $j \geq i$ tendremos que $\alpha(T_j) \leq \alpha(T_i) = 0$, lo cual implica que $\alpha(T_j) = 0$ para todo $j \geq i$.

□

De una manera similar, se tienen las siguientes propiedades para el descent de un operador T y de sus restricciones T_n.

Lema 2.1.11. *Para un operador $T \in L(X)$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $q(T) < \infty$*;*

(ii) existe $i \in \mathbb{N}$ *tal que* $q(T_j) < \infty$*, para todo* $j \geq i$*;*

(iii) existe $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $\beta(T_j) = \{0\}$*, para todo* $j \geq k$*.*

Demostración. $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Supongamos que $q = q(T) < \infty$, según esto y por el inciso (2) del Lema 1.1.1, tendremos que para $j \geq q$,

$$R(T_j^q) = R(T^{q+j}) = R(T^{q+j+1}) = R(T_j^{q+1}).$$

En virtud de lo cual $R(T_j^q) = R(T_j^{q+1})$. Lo que implica que $q(T_j) < \infty$, para $j \geq q$. Recíprocamente, si $q = q(T_j) < \infty$ para todo $j \geq i$, tendremos que

$$R(T^{j+q}) = R(T_j^q) = R(T_j^{q+1}) = R(T^{j+q+1}).$$

De donde se concluye que $q(T) < \infty$.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$. Supongamos que $q = q(T) < \infty$, entonces tendremos que para $j \geq q$,

$$R(T_j) = R(T^{1+j}) = R(T^j)$$

lo que nos dice que T_j es sobreyectiva y así $\beta(T_j) = \{0\}$. Recíprocamente, si $\beta(T_j) = \{0\}$ para todo $j \geq k$, tendremos que T_j es sobreyectiva y en consecuencia

$$R(T_j) = R(T^{1+j}) = R(T^j)$$

lo cual implica que $q(T) < \infty$.

$\square$

Lema 2.1.12. *Para un operador $T \in L(X)$, se tienen:*

(i) $q(T_i) < \infty$ *para algún* $i \in \mathbb{N}$ *si y sólo si* $q(T_j) < \infty$ *para todo* $j \geq i$*;*

(ii) $\beta(T_i) = 0$ *para algún* $i \in \mathbb{N}$ *si y sólo si* $\beta(T_j) = 0$ *para todo* $j \geq i$*.*

Demostración. (i) Si $q_i = q(T_i) < \infty$ para algún $i \in \mathbb{N}$, y $j \geq i$ tendremos que

$$\begin{aligned} R(T_j^{q_i}) &= R(T^{q_i+j}) \\ &= R(T_j^{q_i+j+1}) \\ &= R(T_j^{q_i+1}). \end{aligned}$$

lo cual implica que $q(T_j) \leq q(T_i) < \infty$ para todo $j \geq i$.

(ii) Si $\beta(T_i) = 0$ para algún $i \in \mathbb{N}$, y $j \geq i$ tendremos que $\beta(T_j) \leq \beta(T_i) = 0$, lo cual implica que $\beta(T_j) = 0$ para todo $j \geq i$.

$\square$

Los dos teoremas siguientes debidos a Aiena [3], extienden a los operadores cuasi Fredholm las caracterizaciones de la SVEP en un punto, dadas en el capítulo anterior para operadores de tipo Kato.

Teorema 2.1.13. *Si* $\lambda_0 I - T \in L(X)$ *es cuasi Fredholm y* X *un espacio de Banach, entonces las proposiciones siguientes son equivalentes:*

(i) T *tiene la* $SVEP$ *en* λ_0*;*

(ii) $p(\lambda_0 I - T) < \infty$*;*

(iii) λ_0 *no es punto de acumulación de* $\sigma_{ap}(T)$*;*

(iv) *existe* $i \in \mathbb{N}$ *tal que* $(\lambda_0 I - T)^i(X)$ *es cerrado y* $(\lambda_0 I - T)_j$ *es bounded below, para todo* $j \geq i$*;*

(v) $N((\lambda_0 I - T)^v) = H_0(\lambda_0 I - T)$ *para algún* $v \in \mathbb{N}$*.*

Demostración. Dado que $\lambda_0 I - T \in QF(X)$ entonces, según lo demostrado en el Lema 2.1.6 existe un entero positivo d tal que $(\lambda_0 I - T)_d$ es semi regular.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Supongamos que T tiene la $SVEP$ en λ_0 entonces por el inciso (i) de la Observación 1.4.18 se tiene que $T \mid (\lambda_0 I - T)^d(X)$ tiene la $SVEP$ en λ_0, esto implica por el Teorema 1.4.19 que $p((\lambda_0 I - T)_d) < \infty$ y esto, según lo demostrado en los Lemas 2.1.9 y 2.1.10, es equivalente a $p(\lambda_0 I - T) < \infty$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Supongamos que $p(\lambda_0 I - T) < \infty$, entonces por el Lema 2.1.9 existe un entero positivo n_0 tal que $(\lambda_0 I - T)_n$ es inyectivo para todo $n \geq n_0$. Sea m =máx $\{d, n_0\}$, entonces $\lambda_0 I - T$ tiene descent topológico uniforme para $n \geq m$ y $N(\lambda_0 I - T) \cap R((\lambda_0 I - T)^m) = 0$. Según Corolario 2.1.4 podemos encontrar un $\epsilon > 0$ tal que si $\beta \in \mathbb{D}(\lambda_0, \epsilon) \backslash \{\lambda_0\}$, entonces $\alpha(T - \beta I) = \alpha(\beta I - T) = dim(N(\lambda_0 I - T) \cap R((\lambda_0 I - T)^m)) = 0$ y $(T - \beta I)$ es superiormente semi-Fredholm, lo cual implica que $(T - \beta I)(X) = (\beta I - T)(X)$ es cerrado, en consecuencia β no es un elemento de $\sigma_{ap}(T)$ lo que demuestra, que λ_0 no es punto de acumulación de $\sigma_{ap}(T)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Sabemos del inciso (vi) de la Observación 1.4.18 que T tiene la $SVEP$ en cada λ_0 que no es punto de acumulación de $\sigma_{ap}(T)$.

$(ii) \Rightarrow (iv)$. Consecuencia inmediata del Lema 2.1.9.

$(iv) \Rightarrow (v)$. Supongamos, sin perdida de generalidad que $\lambda_0 = 0$. Si T_v es bounded below, entonces por el Teorema 1.4.23 se tiene que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $N(T_v^m) = H_0(T_v)$, pero $N(T_v^m) = 0$ por ser T_v inyectivo, así $H_0(T_v) = 0$. Sea $x \in H_0(T)$, por la parte (ii) del Teorema 1.4.13 se tiene que $T^v x \in H_0(T)$ y así $T^v x \in H_0(T_v) = 0$ lo cual implica que $x \in N(T^v)$ y en consecuencia $H_0(T) \subseteq N(T^v)$. Dado que $N(T^v) \subseteq H_0(T)$ es cierta para todo $v \in \mathbb{N}$ podemos concluir que $N(T^v) = H_0(T)$.

$(v) \Rightarrow (ii)$ Observe que $N((\lambda_0 I - T)^{v+1}) \subseteq H_0(\lambda_0 I - T) = N((\lambda_0 I - T)^v)$ con lo que podemos concluir que $p(\lambda_0 I - T) < \infty$.

$\square$

Dualmente, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.1.14. *Si* $\lambda_0 I - T \in L(X)$ *es cuasi Fredholm,* X *un espacio de Banach, entonces las proposiciones siguientes son equivalentes:*

(i) T^* *tiene la* $SVEP$ *en* λ_0*;*

(ii) $q(\lambda_0 I - T) < \infty$*;*

(iii) λ_0 *no es punto de acumulación de* $\sigma_{su}(T)$*;*

(iv) *existe* $i \in \mathbb{N}$ *tal que* $(\lambda_0 I - T)^i(X)$ *es cerrado y* $(\lambda_0 I - T)_j$ *es sobreyectivo, para todo* $j \geq i$*;*

(v) $K(\lambda_0 I - T) = R((\lambda_0 I - T)^v)$ *para algún* $v \in \mathbb{N}$*.*

Demostración. Hemos visto que $\lambda_0 I - T$ es cuasi Fredholm si y sólo si $(\lambda_0 I - T)^*$ es cuasi Fredholm, entonces utilizando el Teorema 2.1.13 obtenemos que:
$(i) \Leftrightarrow (ii)$

$$\begin{aligned} T^* \textit{ tiene la } SVEP \textit{ en } \lambda_0 &\Leftrightarrow p((\lambda_0 I - T)^*) < \infty \\ &\Leftrightarrow q(\lambda_0 I - T) < \infty \text{ (Véase Teorema 2.1.5)} \end{aligned}$$

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$

$$\begin{aligned} q(\lambda_0 I - T) < \infty &\Leftrightarrow p((\lambda_0 I - T)^*) < \infty \\ &\Leftrightarrow \lambda_0 \text{ no es punto de acumulación de } \sigma_{ap}(T^*) = \sigma_{su}(T) \end{aligned}$$

$(ii) \Leftrightarrow (iv)$ Consecuencia inmediata del Lema 2.1.10.

$(ii) \Rightarrow (iv)$

$$\begin{aligned}
q(\lambda_0 I - T) < \infty \ &\Rightarrow \ p((\lambda_0 I - T)^*) < \infty \\
&\Rightarrow \ N((\lambda_0 I - T)^{*v}) = H_0((\lambda_0 I - T)^*) \text{ para algún } v \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow \ N((\lambda_0 I - T)^{*n}) = H_0((\lambda_0 I - T)^*) \text{ para todo } n \geq v \\
&\Rightarrow \ N((\lambda_0 I - T)^{*n}) = H_0((\lambda_0 I - T)^*) \\
&\qquad \text{para todo } n \geq max\{d, v\} \\
&\Rightarrow \ K(\lambda_0 I - T) \subseteq^{\perp} H_0((\lambda_0 I - T)^*) =^{\perp} N((\lambda_0 I - T)^{*n}) \\
&\qquad =^{\perp} (\overline{R((\lambda_0 I - T)^n)}^{\perp}) = \overline{R((\lambda_0 I - T)^n)} \\
&\qquad = R((\lambda_0 I - T)^n) \text{ para todo } n \geq max\{d, v\} \\
&\Rightarrow \ K(\lambda_0 I - T) = R((\lambda_0 I - T)^n) \text{ para todo } n \geq max\{d, v\}
\end{aligned}$$

$(iv) \Rightarrow (ii)$ Supongamos que $K(\lambda_0 I - T) = R((\lambda_0 I - T)^v)$ para algún $v \in \mathbb{N}$, entonces $K(\lambda_0 I - T) = R((\lambda_0 I - T)^n)$ para todo $n \geq v$. Luego si $n \geq max\{d, v\}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
H_0((\lambda_0 I - T)^*) &\subseteq ({}^{\perp}H_0((\lambda_0 I - T)^*))^{\perp} \\
&\subseteq K(\lambda_0 I - T)^{\perp} \\
&= R((\lambda_0 I - T)^n)^{\perp} \\
&= N((\lambda_0 I - T)^{*n})
\end{aligned}$$

lo cual implica que $H_0((\lambda_0 I - T)^*) = N((\lambda_0 I - T)^{*n})$ para todo $n \geq max\{d, v\}$ así $p((\lambda_0 I - T)^*)$ y en consecuencia $q(\lambda_0 I - T)$.

□

El siguiente teorema ([33], Proposición 5) proporciona una propiedad de descomposición para los operadores cuasi Fredholm comparable, en cierta manera, con lo que es el Teorema de Kato para los operadores de semi Fredholm.

Teorema 2.1.15. *Sean $T \in L(X)$ un operador cuasi Fredholm y $m \in \mathbb{N}$ tal que $\kappa_n(T) = 0$, para todo $n \geq m$. Si para algún $d \geq m$, $N(T^d) + R(T)$ y $N(T) \cap R(T^d)$ son* *subespacios complementados, entonces existen subespacios M y N de X, cerrados, T-invariantes, $X = M \oplus N$, para los cuales $T \mid M$ es semi regular y $T \mid N$ es nilpotente.*

Demostración. Sean $T \in L(X)$ cuasi Fredholm y $m \in \mathbb{N}$ tal que $\kappa_n(T) = 0$, para todo $n \geq m$. Según lo demostrado en el Lema 2.1.6, tenemos que T_d es semi regular. Si $d = 0$, entonces $T = T_0$ es semi regular y el resultado es inmediato.
Para $d \geq 1$, siendo $R(T^d) \cap N(T)$ complementado, existe un subespacio cerrado L tal que $X = (R(T^d) \cap N(T)) \oplus L$. Definamos N_j como sigue

$$N_j = \begin{cases} \{0\} & , \text{si } j = 0 \\ \\ T^{-1}(N_{j-1}) \cap L & , \text{si } 1 \leq j \leq d \end{cases}$$

Observe que cada N_j es cerrado y además $T(N_{j+1}) \subset N_j \cap R(T)$. Recíprocamente, si $x \in N_j \cap R(T)$, entonces $x = Tu$ para algún $u \in X$. Como u puede expresarse en la forma $u = l + v$, con $l \in L$ y $v \in N(T) \cap R(T^d)$, entonces $u - v = l \in L$ y $T(u - v) = Tu = x$, así $u - v \in N_{j+1}$ y $x \in T(N_{j+1})$, concluyédose de esto que $T(N_{j+1}) = N_j \cap R(T)$. En consecuencia, $T(N_{j+1}) = N_j \cap R(T)$ para todo $0 \leq j \leq d - 1$. Supongamos ahora que $N_j \subset N_{j+1}$ para $j \geq 0$, y tomemos $x \in N_{j+1}$. Entonces $Tx \in N_j \subset N_{j+1}$, y así $x \in T^{-1}(N_{j+1})$. Dado que $x \in N_{j+1} \subset L$, sigue que $x \in N_{j+2}$, luego $N_j \subset N_{j+1}$ para todo $j = 0, 1, 2, ..., d - 1$.

Procediendo en forma inductiva, se tiene que $N_j \subset N(T^j)$ para todo $0 \leq j \leq d$. Veamos también inductivamente que

$$N(T^j) \subset N_j + N(T^j) \cap R(T^d),$$

para $0 \leq j \leq d$. Claramente, ésta inclusión es válida para $j = 0$ y para $j = 1$ se tiene

$$N(T) = N(T) \cap L + N(T) \cap R(T^d) = N_1 + N(T) \cap R(T^d).$$

Supongamos que $N(T^j) \subset N_j + N(T^j) \cap R(T^d)$, $j \geq 1$, y sea $x \in N(T^j)$. Según esto $Tx = v_1 + v_2$ para algún $v_1 \in N_j$ y $v_2 \in N(T^j) \cap R(T^d) = N(T^j) \cap R(T^{d+1}) = T(N(T^{j+1}) \cap R(T^d))$. Así $v_1 \in N_j \cap R(T) = TN_{j+1}$ y tendremos

$$
\begin{aligned}
x &\in N_{j+1} + N(T^{j+1}) \cap R(T^d) + N(T) \\
&= N_{j+1} + N(T^{j+1}) \cap R(T^d) + N(T) \cap L + N(T) \cap R(T^d) \\
&= N_{j+1} + N(T^{j+1}) \cap R(T^d)
\end{aligned}
$$

siguiendo de esta forma la inclusión $N(T^j) \subseteq N_j + N(T^j) \cap R(T^d)$.

Finalmente, notemos que $N_0 \cap R(T^d) = \{0\}$. Supóngase que $N_j \cap R(T^d) = 0$ vale para $0 \leq j \leq d-1$, y sea $x \in N_{j+1} \cap R(T^d)$, entonces $Tx \in N_j \cap R(T^d)$. Por la hipótesis inductiva, $Tx = 0$, así $x \in N(T) \cap R(T^d)$ y como $N_{j+1} \subset L$, tendremos que $x = 0$. En consecuencia $N_j \cap R(T^d) = 0$, para todo $0 \leq j \leq d$.

Definiendo $N = N_d$. Conforme a lo demostrado anteriormente tendremos

$$
\begin{aligned}
T(N) &\subseteq N, \\
N &\subseteq N(T^d), \\
N(T^d) &\subseteq N + R(T^d), \\
N \cap R(T^d) &= \{0\},
\end{aligned}
$$

y además $N + R(T^d) = N(T^d) + R(T^d)$ es cerrado.

Por otro lado, siendo $R(T) + N(T^d)$ complementado entonces

$$
N(T^*) \cap R(T^{*d}) = (R(T) + N(T^d)^{\perp},
$$

es complementado, y como T cuasi Fredholm, según lo visto en el Teorema 2.1.8, T^* es cuasi-Fredholm, por lo que empleando un razonamiento análogo al empleado en la construcción de la parte anterior obtenemos un subespacio $M^* \subseteq X^*$ tal que

$$\begin{aligned} T^*(M^*) &\subseteq M^*, \\ M^* &\subseteq N(T^{*d}), \\ N(T^{*d}) &\subseteq M^* + R(T^{*d}), \\ N(T^{*d}) \cap R(T^{*d}) &= \{0\}, \end{aligned}$$

además $M^* + R(T^{*d})$ es un subespacio cerrado. Definiendo $M =^{\perp} M^*$, tendremos que $T(M) \subseteq M$. Además

$$M \subseteq^{\perp} N(T^{*d}) = \overline{R(T^d)} = R(T^d)$$

$$M + N(T^d) =^{\perp} M^* +^{\perp} R(T^{*d}) =^{\perp} (M_* \cap R(T^{*d})) = X$$

$$R(T^d) =^{\perp} N(T^{*d}) \supseteq^{\perp} (M_* \cap R(T^{*d})) =^{\perp} M_* \cap^{\perp} R(T^{*d}) = M \cap N(T^d)$$

$({}^{\perp}M_* +^{\perp} R(T^{*d})) =^{\perp} (M_* \cap R(T^{*d}))$, ya que $M_* + R(T^{*d})$ es cerrado, véase [34], p.221). Observemos ahora,

$$M + N \supset M + R(T^d) + N \supset M + N(T^d) = X,$$

$$M \cap N \subset M \cap N(T^d) \cap N \subset R(T^d) \cap N = \{0\}.$$

De aqui se tiene que $X = N \oplus M$, $TN \subset N$, $TM \subset M$, $(T|_N)^d = 0$ y

$$N(T) \cap M \subseteq N(T^d) \cap M \subset N(T^d) \cap M \cap R(T^d) \subseteq R(T^d) = R(T\mid_M).$$

Como $R(T\mid_M) = R(T^d)$ es un subespacio cerrado, luego $T\mid_M$ es semiregular.

□

Del Teorema 2.1.15, y siendo que todo subespacio cerrado en un espacio de Hilbert es complementado ([31] Teorema 63.1), se tiene como consecuencia inmediata la siguiente propiedad de descomposición para operadores cuasi Fredholm en espacios de Hilbert.

Corolario 2.1.16. *Todo operador cuasi Fredholm $T \in QF(H)$, H un espacio de Hilbert, es de tipo Kato.*

Demostración. Si $T \in QF(H)$, entonces existe $d \in \mathbb{N}$ tal que tal que $\kappa_n(T) = 0$, para todo $n \geq d$ y $N(T^d) + R(T)$ y $N(T) \cap R(T^d)$ son subespacios cerrados en H. Siendo que todo subespacio cerrado en un espacio de Hilbert es complementado, tendremos que $N(T^d)+R(T)$ y $N(T)\cap R(T^d)$ son subespacios complementados en H. Aplicando el Teorema 2.1.15, se obtiene el resultado.

□

Asociados con los operadores cuasi-Fredholm, Berkani y Ouahab en [23], introducen el siguiente subconjunto del espectro clásico de un operador.

Definición 2.1.17. *El espectro escencialmente cuasi Fredholm de un operador $T \in L(X)$, denotado $\sigma_e(T)$, se define como*

$$\sigma_{qf}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \textit{ no es cuasi Fredholm } \}.$$

Observemos que del Teorema 2.1.8, sigue que $\sigma_{qf}(T) = \sigma_{qf}(T^*)$.

2.2. Operadores B-Fredholm y Semi B-Fredholm

A continuación se describen los operadores B-Fredholm y semi B-Fredholm, introducidos por Berkani en [19] y [22], los cuales constituyen, respectivamente, una generalización de los operadores de Fredholm y semi Fredholm.

Definición 2.2.1. *Un operador $T \in L(X)$, se dice superiormente (resp. inferiormente) semi B-Fredholm, si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado en X y T_n es superiormente (resp. inferiormente) semi-Fredholm. T es un operador B-Fredholm, si $R(T^n)$ es cerrado y T_n es de Fredholm, para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Las clases introducidas anteriormente se denotarán, respectivamente por: $SBF_+(X)$, $SBF_-(X)$ y $BF(X)$. La clase de los operadores semi B-Fredholm se define por $SBF_\pm(X) = SBF_+(X) \cup SBF_-(X)$. Notemos que $BF(X) = SBF_+(X) \cap SBF_-(X)$.

Observe que las proyecciones continuas y los operadores nilpotentes, son operadores semi B-Fredholm que no son semi-Fredholm, así $SBF_\pm(X)$ contiene propiamente a la clase $\Phi_\pm(X)$, de los operadores de semi-Fredholm en X.

Observación 2.2.2. *Notemos que, si T es un operador superiormente semi B-Fredholm y $\alpha(T) < \infty$, entonces T es un operador superiormente semi-Fredholm. En efecto, dado que T es un operador semi B-Fredholm, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado. Además como $\alpha(T) < \infty$, entonces de la Observación 1.1.11 sigue que $\alpha(T^n) < \infty$ lo cual implica que T^n es un operador semi-Fedholm. Así T^n es un operador semi-Fredholm y $\alpha(T) < \infty$, luego por lo demostrado en el Teorema 1.2.17 podemos concluir que T es un operador semi-Fredholm.*

El siguiente resultado ([22], Proposición 2.5) exhibe la relación existente entre los operadores semi B-Fredholm y los operadores cuasi Fredholm.

Teorema 2.2.3. *Sea $T \in L(X)$. T es un operador superiormente (resp. inferiormente) semi B-Fredholm si y sólo si $T \in QF(X)$ y $N(T) \cap R(T^d)$ (resp. $R(T) + N(T^d)$) es de dimensión (resp. codimensión) finita, para algún $d \in \mathbb{N}$.*

Demostración. (Suficiencia). Supongamos que T es un operador superiormente (resp. inferiormente)semi B-Fredholm, entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha(T_n) < \infty$ (resp. $\beta(T_n) < \infty$)y $R(T^n)$ es cerrado, por el inciso (1) (resp (2)) del Lema 1.1.14, se tiene que existe $d \in \mathbb{N}$, $d \geq n$, tal que $\alpha(T_m) = \alpha(T_d) < \infty$ (resp. $\beta(T_m) = \beta(T_d) < \infty$) para todo $m \geq d$, según esto $\kappa_m(T) = 0$ para todo $m \geq d$. Por otro lado, como T_n es superiormente (rep. inferiormente) semi Fredholm entonces $R(T^{n+j}) = R(T_n^j)$ es cerrado para todo $j \in \mathbb{N}$, ya que T_n^j es semi Fredholm, luego $R(T^{d+1})$ es cerrado.

Por lo cual $\kappa_m(T) = 0$, para $m \geq d$, y $R(T^{d+1})$ es cerado. Así T es cuasi Fredholm y $N(T) \cap R(T^d)$ (resp. $R(T) + N(T^d)$) es de dimensión (resp. codimensión) finita.

(Necesidad). Si $T \in QF(X)$ y $N(T) \cap R(T^d)$ (resp. $R(T) + N(T^d)$) es de dimensión (resp. codimensión) finita, para algún $d \in \mathbb{N}$. Entonces $\alpha(T_d) < \infty$ (resp. $\beta(T_d) < \infty$), por el Lema 1.1.14, existe un $k \geq d$ tal que $\alpha(T_n) = \alpha(T_k)$ (resp. $\beta(T_n) = \beta(T_k)$), para cada $n \geq k$. Por otra parte, como $T \in QF(X)$ existe un $k' \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado, siempre que $n \geq k'$. En consecuencia, T es un operador superiormente (resp. inferiormente) semi Fredholm.

$\square$

Corolario 2.2.4. *Sean X un espacio de Banach complejo infinito dimensional y $T \in L(X)$. Si T es un operador B-Fredholm, entonces T es un operador de tipo Kato.*

Demostración. Siendo T un operador B-Fredholm, entonces $T \in QF(X)$, $N(T) \cap R(T^d)$ es finito dimensional y $R(T) + N(T^d)$ es de codimensión finita, para algún $d \in \mathbb{N}$, siendo que los subespacios finito dimensionales y los de codimensión finita en un espacio de Banach son complementados ([31] Proposición 24.2), podemos entonces concluir, por el Teorema 2.2.3, que T es de tipo kato.

$\square$

Teorema 2.2.5. *Para un operador $T \in L(X)$, las siguientes proposiciones son equivalentes*

1. *T es B-Fredholm*

2. *existen subespacios M y N, cerrados, T-invariantes para los cuales $X = N \oplus M$ y $T|_N$ es nilpotente y $T|_M$ es de Fredholm.*

Demostración. (2) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que M y N son subespacios cerrados, T-invariantes, tales que $X = N \oplus M$, $T\mid_N$ es nilpotente y $T\mid_M$ es de Fredholm. Sea d el índice de nilpotencia de $T\mid_N$, entonces $R(T^n) = R((T\mid_M)^n)$ para todo $n \geq d$. Según esto, obtenemos lo siguiente

$$N(T_n) = N(T) \cap R(T^n) = N(T) \cap R((T\mid_M)^n) \subseteq N(T) \cap R(T\mid_M) \subseteq N(T\mid_M).$$

Así $\alpha(T_n) = \dim N(T_n) \leq \dim N(T\mid_M) < \infty$, pues $T\mid_M$ es Fredholm. Por otro lado, como $R(T^{n+1}) = R((T\mid_M)^{n+1})$ y $R(T^n) \subset X$, entonces $\beta(T_n) \leq \beta(R((T\mid_M)^{n+1})) < \infty$, ya que $(T\mid_M)^n$ es Fredholm, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, pues $T\mid_M$ lo es. De lo anterior T_n es de Fredholm, para $n \geq d$, y en consecuencia T es B-Fredholm.

(1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que T es B-Fredholm, entonces existe un $d \in \mathbb{N}$ tal que T es cuasi-Fredholm, y $N(T) \cap R(T^d)$, $R(T) + N(T^d)$ son subespacios complementados. Según esto, y por el Teorema 2.1.15, existen subespacios M y N, cerrados, T-invariantes tales que $X = N \oplus M$, $T\mid_N$ es nilpotente y $T\mid_M$ es semi regular. Además, existe un n (n cualquier entero mayor que d y el índice de nilpotencia de $T\mid_N$) para el cual

$$\alpha(T_n) = \alpha((T\mid_N)^n) + \alpha((T\mid_M)^n) = \alpha((T\mid_M)^n),$$

y

$$\beta(T_n) = \beta((T\mid_N)^n) + \beta((T\mid_M)^n) < \infty.$$

Siendo que $\kappa_j(T) = 0$ para todo $j \geq d$, concluimos que $\alpha(T\mid_M) < \infty$ y $\beta(T\mid_M) < \infty$, así $T\mid_M$ es de Fredholm.

$\square$

Seguidamente introducimos los espectros correspondiente a los operadores semi B-Fredholm.

Definición 2.2.6. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$.*

$$\sigma_{ubf}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin SBF_+(X)\},$$

$$\sigma_{lbf}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin SBF_-(X)\},$$

$$\sigma_{bf}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin BF(X)\},$$

definen, respectivamente, los espectros: superiormente semi B-Fredholm, inferiormente semi B-Fredholm y B-Fredholm de un operador $T \in L(X)$.

Claramente,

$$\sigma_{bf}(T) = \sigma_{ubf}(T) \cup \sigma_{lbf}(T).$$

2.3. Operadores semi B-Browder y B-Weyl

En esta sección se generaliza la clase de los operadores semi Browder, se dan caracterizaciones para esta clase generalizada de operadores y se obtienen nuevas relaciones espectrales, para los espectros correspondientes.

Definición 2.3.1. *Un operador $T \in L(X)$, X de Banach infinito dimensional, se dice left (res. right) Drazin invertible si $p = p(T) < \infty$ (res. $q = q(T) < \infty$) y $T^{p+1}(X)$ (res. $T^q(X)$) es cerrado . Un operador $T \in L(X)$ se dice Drazin invertible si $p(T) = q(T) < \infty$. Si $\lambda I - T$ es left (res. right) Drazin invertible y $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ (res.$\lambda \in \sigma_{su}(T)$), entonces se dice que λ es un left (res. right) polo.*

Observemos que $T \in L(X)$ es Drazin invertible si y sólo si T es right y left Drazin invertible. Esto se debe a que si $p = p(T) = q(T) < \infty$ entonces $T^p(X) = T^{p+1}(X)$ es el núcleo de la proyección espectral asociada al conjunto espectral $\{0\}$ (véase [31] Proposición 50.2).

Definición 2.3.2. *Un operador $T \in L(X)$, X de Banach infinito dimensional, se dice superiormente (resp. inferiormente) semi B-Browder, si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado en X y T_n es superiormente (resp. inferiormente) semi-Browder. T es un operador B-Browder (res. semi B-Browder), si $R(T^n)$ es cerrado y T_n es de Browder (resp. semi Browder), para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Denotaremos, respectivamente, por $SBB_+(X)$, $SBB_-(X)$ a las clases de los operadores superiormente semi B-Browder e inferiormente semi B-Browder. Además,

$$SBB(X) = SBB_+(X) \cap SBB_-(X),$$

$$SBB_\pm(X) = SBB_+(X) \cup SBB_-(X),$$

denotan, respectivamente, las clases de los operadores B-Browder y semi B-Browder. La siguiente equivalencia es debida a Carpintero, García, Rosas y Sanabria [24].

Lema 2.3.3. *Si $T \in L(X)$ y $p = p(T) < \infty$, entonces las siguientes son equivalentes:*

(i) Existe un número natural $n \geq p+1$ tal que $T^n(X)$ es cerrado.

(iv) $T^m(X)$ es cerrado para todo $m \geq p$.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Supongamos que existe un número natural $n \geq p+1$ tal que $T^n(X)$ es cerrado, y sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $p \leq m \leq n$, entonces

$$\begin{aligned} 0 < \gamma(T^n) &= inf_{x \notin N(T^n)} \frac{\|T^n x\|}{dist(x, N(T^n))} \\ &= inf_{x \notin N(T^m)} \frac{\|T^{n-m}(T^m x)\|}{dist(x, N(T^m))} \\ &\leq \|T^{n-m}\| inf_{x \notin N(T^m)} \frac{\|T^m x\|}{dist(x, N(T^m))} \\ &\leq \|T^{n-m}\| . \gamma(T^m) \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\|T^{n-m}\| . \gamma(T^m) > 0$$

y en consecuencia $\gamma(T^m) > 0$. Con un razonamiento similar se puede demostrar que $\gamma(T^m) > 0$ en el caso que $p \leq n \leq m$. Por lo tanto $T^m(X)$ es cerrado para todo $m \geq p$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Evidente.

□

En la siguiente proposición debida a Carpintero, Garcia, Rosas y Sanabria [24], describimos la clase de los operadores lef Drazin invertible y right Drazin invertible en términos de restricciones.

Teorema 2.3.4. *Sea $T \in L(X)$. Entonces se tiene:*

(i) T es left Drazin invertible si y sólo si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k(X)$ es cerrado y T_k es bounded below. En este caso $T^j(X)$ es cerrado y T_j es bounded below para todo número natural $j \geq k$;

(ii) T es right Drazin invertible si y sólo si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k(X)$ es cerrado y T_k es sobreyectivo. En este caso $T^j(X)$ es cerrado y T_j es sobreyectivo para todo número natural $j \geq k$

Demostración. (i) Supongamos que T es left Drazin invertible; es decir, $p = p(T) < \infty$ y $T^{p+1}(X)$ es cerrado, entonces tendremos por el Lema 2.3.3 que $T^n(X)$ es cerrado para todo $n \geq p$, y según lo demostrado en el Lema 2.1.9 existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha(T_j) = 0$ para todo $j \geq i$, esto implica que $T^j(X)$ es cerrado y T_j es bounded below para todo número natural $j \geq k = max\{p, i\}$. Recíprocamente, si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k(X)$ es cerrado y T_k es bounded below, entonces $\alpha(T_j) = 0$ para todo $j \geq k$ (ya que $\alpha(T_j) \leq \alpha(T_k) = 0$ para todo $j \geq k$), lo cual implica por el Lema 2.1.9 que $p(T) < \infty$. Además existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $T^j(X)$ es cerrado para todo $j \geq d$ por ser T cuasi Fredholm, luego si $p + 1 \geq d$ tendremos en forma directa que $T^{p+1}(X)$ es cerrado, si por el contrario $p+1 < d$ el Lema 2.3.3 garantiza que $T^{p+1}(X)$ es cerrado.
(ii) Supongamos que T es right Drazin invertible; es decir, $q = q(T) < \infty$ y $T^{q+1}(X)$

es cerrado, entonces tendremos que $T^n(X)$ es cerrado para todo $n \geq q$ (ya que $T^n(X) = T^q(X) = T^{q+1}(X)$ para todo $n \geq q$), y según lo demostrado en el Lema 2.1.11 existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\beta(T_j) = 0$ para todo $j \geq i$, esto implica que $T^j(X)$ es cerrado y T_j es sobreyectivo para todo número natural $j \geq k = max\{q, i\}$. Recíprocamente, si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k(X)$ es cerrado y T_k es sobreyectivo, entonces $\beta(T_j) = 0$ para todo $j \geq k$ (ya que $\beta(T_j) \leq \beta(T_k) = 0$ para todo $j \geq k$), lo cual implica por el Lema 2.1.11 que $q(T) < \infty$. Además existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $T^j(X)$ es cerrado para todo $j \geq d$ por ser T cuasi Fredholm, luego $T^{q+1}(X) = T^{max\{d,q\}}(X)$ es cerrado.

□

En los siguientes teoremas, debidos a Carpintero, García, Rosas y Sanabria [24], describimos la clase de los operadores semi B-Browder en términos de la $SVEP$.

Teorema 2.3.5. *Sea $T \in L(X)$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) $\lambda I - T$ *es left Drazin invertible;*

(ii) $\lambda I - T$ *es superiormente semi B-Browder;*

(iii) $\lambda I - T$ *es un operador cuasi Fredholm que tiene ascent finito;*

(iv) $\lambda I - T$ *es cuasi Fredholm y* λ *no es punto de acumulación de* $\sigma_{ap}(T)$

(v) $\lambda I - T$ *es cuasi Fredholm y* T *tiene la* $SVEP$ *en* λ.

Demostración. Dado que T tiene la $SVEP$ en λ si y sólo si $\lambda I - T$ tiene la $SVEP$ en 0. Supondremos, sin perdida de generalidad, que $\lambda = 0$.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Hemos visto en el Teorema 2.3.4 que si T es left Drazin invertible, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k(X)$ es cerrado y T_k es bounded below lo cual implica que T es superiormente semi B-Browder.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Si T es superiormente semi B-Browder entonces T es superiormente semi B-Fredholm y $p(T_n) < \infty$ para algún $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia T es cuasi Fredholm por el Teorema 2.2.3, y $p(T) < \infty$ por los Lemas 2.1.9 y 2.1.10.
$(iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v)$ Consecuencia inmediata del Teorema 2.1.13.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Supongamos que T es cuasi Fredholm y $p = p(T) < \infty$. Dado que T es cuasi Fredholm existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(X)$ es cerrado para todo $n \geq d$, esto implica que $T^{n_0}(X)$ es cerrado para algún $n_0 \geq p+1$, luego por el Lema 2.3.3 podemos concluir que $T^{p+1}(X)$ es cerrado y en consecuencia T es left Drazin invertible.

□

Cabe destacar que la equivalencia $(i) \Leftrightarrow (ii)$ del Teorema 2.3.5 ha sido probada en [6] (véase también [20]). Nuestra prueba es mucho más sencillas.

Teorema 2.3.6. *Sea $T \in L(X)$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) $\lambda I - T$ *es right Drazin invertible;*

(ii) $\lambda I - T$ *es inferiormente semi B-Browder;*

(iii) $\lambda I - T$ *es un operador cuasi Fredholm que tiene descent finito;*

(iv) $\lambda I - T$ *es cuasi Fredholm y* λ *no es punto de acumulación de* $\sigma_{su}(T)$

(v) $\lambda I - T$ *es cuasi Fredholm y* T^* *tiene la* $SVEP$ *en* λ.

Demostración. Dado que T^* tiene la $SVEP$ en λ si y sólo si $(\lambda I - T)^*$ tiene la $SVEP$ en 0. Supondremos, sin perdida de generalidad, que $\lambda = 0$.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Hemos visto en el Teorema 2.3.4 que si T es right Drazin invertible, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k(X)$ es cerrado y T_k es sobreyectivo lo cual implica que T es inferiormente semi B-Browder.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Si T es inferiormente semi B-Browder entonces T es inferiormente semi

B-Fredholm y $q(T_n) < \infty$ para algún $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia T es cuasi Fredholm por el Teorema 2.2.3, y $q(T) < \infty$ por los Lemas 2.1.11 y 2.1.12.

$(iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v)$ Consecuencia inmediata del Teorema 2.1.14.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Supongamos que T es cuasi Fredholm y $q = q(T) < \infty$. Dado que T es cuasi Fredholm existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(X)$ es cerrado para todo $n \geq d$, esto implica que $T^{q+1}(X) = T^{max\{d,q\}}(X)$ es cerrado, y en consecuencia T es right Drazin invertible.

$\square$

La equivalencia $(i) \Leftrightarrow (ii)$ del Teorema 2.3.6 puede observarse en [20] y es demostrada usando diferentes métodos en [6]. La prueba dada aquí es más sencilla.

Corolario 2.3.7. *Sea $T \in L(X)$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) $\lambda I - T$ es Drazin invertible;

(ii) $\lambda I - T$ es B-Browder;

(iii) $\lambda I - T$ tiene ascent y descent finito;

(iv) $\lambda I - T$ es cuasi Fredholm y λ no es punto de acumulación de $\sigma(T)$

(v) $\lambda I - T$ es cuasi Fredholm, T y T^* tiene la $SVEP$ en λ.

Las distintas clases de operadores definidas y estudiadas anteriormente motivan, de manera natural, la definición de ciertos espectros asociados respectivamente a cada uno estos, los cuales se introducen a continuación.

Definición 2.3.8. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$.*

$$\sigma_{ubb}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin SBB_+(X)\},$$

$$\sigma_{lbb}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin SBB_-(X)\},$$

$$\sigma_{bb}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin BB(X)\},$$

definen, respectivamente, los espectros: superiormente semi B-Browder, inferiormente semi B-Browder y B-Browder de un operador $T \in L(X)$.

Del siguiente resultado, debido a Berkani, se deriva la compacidad del espectro B-Browder de un operador.

Teorema 2.3.9. *Para cada operador* $T \in L(X)$, X *un espacio de Banach complejo,* $\sigma_{bb}(T)$ *es cerrado.*

Demostración. Veáse Berkani [22].

□

Claramente, se tiene que

$$\sigma_{bb}(T) = \sigma_{ubb}(T) \cup \sigma_{lbb}(T).$$

Además también, de los Teoremas 2.1.5, 2.3.5 y 2.3.6, sigue que

$$\sigma_{ubb}(T) = \sigma_{lbb}(T^*) \quad \sigma_{lbb}(T) = \sigma_{ubb}(T^*)$$

Por lo cual,

$$\sigma_{bb}(T) = \sigma_{bb}(T^*)$$

Definición 2.3.10. *Un operador* $T \in L(X)$, X *un espacio de Banach, se dice un operador B-Weyl (resp. superiormente semi B-Weyl, inferiormente semi B-Weyl) si* $R(T^n)$ *es cerrado y* T_n *es de Browder (resp. superiormente semi Weyl, inferiormente semi Weyl), para algún* $n \in \mathbb{N}$.

La clase de los operadores B-Weyl, se denotará por $BW(X)$. Como toda proyección continua es un operador B-Weyl y no es de Weyl, la clase $BW(X)$ contiene propiamente a la clase de los operadores de Weyl. Observemos que $BW(X)$ también puede describirse en la forma

$$BW(X) = BW_+(X) \cap BW_-(X),$$

donde

$$\begin{aligned} BW_+(X) &= \{T \in L(X) : \text{T es superiormente semi B-Weyl}\} \\ BW_-(X) &= \{T \in L(X) : \text{T es inferiormente semi B-Weyl}\} \end{aligned}$$

Definición 2.3.11. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$.*

$$\sigma_{ubw}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin BW_+(X)\},$$

$$\sigma_{lbw}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin BW_-(X)\},$$

$$\sigma_{bb}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin BW(X)\},$$

definen, respectivamente, los espectros: superiormente semi B-Weyl, inferiormente semi B-Weyl y B-Weyl de un operador $T \in L(X)$.

Note que

$$\sigma_{bw}(T) = \sigma_{bw_+}(T) \cup \sigma_{bw_-}(T).$$

Más aún, también se tienen las inclusiones siguientes:

(1) $\sigma_{qf}(T) \subseteq \sigma_{sbf}(T) \subseteq \sigma_{bf}(T) \subseteq \sigma_{bw}(T) \subseteq \sigma_{bb}(T)$.

(2) $\sigma_{qf}(T) \subseteq \sigma_{sbf}(T) \subseteq \sigma_{ubf}(T) \subseteq \sigma_{ubw}(T) \subseteq \sigma_{ubb}(T) \subseteq \sigma_{bb}(T)$

(3) $\sigma_{qf}(T) \subseteq \sigma_{sbf}(T) \subseteq \sigma_{lbf}(T) \subseteq \sigma_{lbw}(T) \subseteq \sigma_{lbb}(T) \subseteq \sigma_{bb}(T)$

Donde $\sigma_{ubf}(T)$, $\sigma_{lbf}(T)$,$\sigma_{bf}(T)$, $\sigma_{sbf}(T)$ son, respectivamente, los espectros correspondientes a las generalizaciones en el sentido de Berkani de los operadores de Fredholm y semi Fredholm clásicos.

Del Corolario 2.1.4, sigue que

Corolario 2.3.12. *Si* $T \in L(X)$ *y* $\lambda \notin \sigma_{bw}(T)$, *entonces* λ *no es punto de acumulación de* $\sigma_w(T)$

en forma análoga se tiene

Corolario 2.3.13. *Si* $T \in L(X)$ *y* $\lambda \notin \sigma_{ubw}(T)$, *entonces* λ *no es punto de acumulación de* $\sigma_{uw}(T)$

Como una consecuencia inmediata de los Teoremas 2.1.13 y 2.1.14 se obtienen las siguientes relaciones espectrales.

Corolario 2.3.14. *Para un operador* $T \in L(X)$ *las siguientes se satisfacen:*

(i) $\sigma_{ubb}(T) = \sigma_{qf}(T) \cup acc\sigma_{ap}(T) = \sigma_{qf}(T) \cup \Xi(T)$

(ii) $\sigma_{lbb}(T) = \sigma_{qf}(T) \cup acc\sigma_{su}(T) = \sigma_{qf}(T) \cup \Xi(T^*)$

(iii) $\sigma_{bb}(T) = \sigma_{qf}(T) \cup acc\sigma(T) = \sigma_{qf}(T) \cup \Xi(T) \cup \Xi(T^*)$

Capítulo 3

Propiedad (w) bajo perturbaciones compactas o de Riesz que conmutan

En este capítulo se introducen los llamados Teoremas de Weyl y Browder, y sus respectivas variantes, la propiedad (w), el Teorema de a-Weyl y el Teorema de a-Browder. Se estudia la preservación de la propiedad (w) de un operador $T \in L(X)$, bajo perturbaciones por operadores compactos, o de Riesz que conmutan con el operador T, considerando el caso particular en el que las perturbaciones tienen una potencia de rango finito. Los resultados contenidos en este capítulo, son resultados nuevos respecto al tema tratado. Parte de los cuales aparecen publicados en el artículo titulado ″ Property (w) under compact or Riesz commuting perturbations ″ (2010) de la revista Acta Sci. Math., y cuyos autores son P. Aiena y O. García.

3.1. Teorema de Weyl, a-Weyl y propiedad (w)

En esta sección, se introducen ciertas propiedades, conocidas en la literatura como el Teorema de Browder, el Teorema de a-Browder, el Teorema de Weyl, el Teorema de a-Weyl y la propiedad (w). Además se estudian las relaciones entre estas nociones.

Definición 3.1.1. *Sea X un espacio de Banach complejo e infinito dimensional y $T \in L(X)$. Se denotan*

$$\begin{aligned}
\pi_{00}(T) &= \{\lambda \in iso\ \sigma(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty\}, \\
\pi_{00}^{a}(T) &= \{\lambda \in iso\ \sigma_{ap}(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty\}, \\
p_{00}(T) &= \sigma(T) \setminus \sigma_b(T), \\
p_{00}^{a}(T) &= \sigma(T) \setminus \sigma_{ub}(T);
\end{aligned}$$

donde $iso\ \sigma(T)$ representa el conjunto de los puntos aislados del espectro $\sigma(T)$ e $iso\ \sigma_{ap}(T)$ el conjunto de los puntos aislados del espectro aproximado puntual $\sigma_{ap}(T)$.

Obviamente,

$$\pi_{00}(T) \subseteq \pi_{00}^{a}(T)$$

Otras relaciones, no tan obvias, entre los subconjuntos de $\mathbb{C}$ definidos anteriormente, se presentan en el siguiente lema.

Lema 3.1.2. *Para cada $T \in L(X)$, se tiene:*

(i) $p_{00}(T) \subseteq p_{00}^{a}(T)$

(ii) $p_{00}^{a}(T) \subseteq \pi_{00}^{a}(T)$

(iii) $p_{00}(T) \subseteq \pi_{00}(T)$

(iv) $\pi_{00}(T) \cap p_{00}^{a}(T) = p_{00}(T)$

Demostración. (*i*) Sea $\lambda \in p_{00}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_b(T)$, entonces $\lambda \in \sigma(T)$ y $\lambda \notin \sigma_b(T)$, esto implica que $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$, pues de lo contrario $\alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T) = 0$ y en consecuencia $\lambda \notin \sigma(T)$. Además $\lambda \notin \sigma_{ub}(T)$ ya que $\sigma_{ub}(T) \subseteq \sigma_b(T)$, con esto se tiene que $\lambda \in \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{ub}(T) = p_{00}^{a}(T)$ y por lo tanto

$$p_{00}(T) \subseteq p_{00}^{a}(T).$$

(ii) Sea $\lambda \in p_{00}^a(T) = \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{ub}(T)$, entonces $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ y $\lambda \notin \sigma_{ub}(T) = \sigma_{sf}(T) \cup \text{acc } \sigma_{ap}(T)$, esto implica que $\lambda \in \text{iso } \sigma_{ap}(T)$ (ya que $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ y $\lambda \notin \text{acc } \sigma_{ap}(T)$) y $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$ (pues $\lambda \notin \sigma_{ub}(T) \supseteq \sigma_{usf}(T)$ y $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$), en consecuencia $\lambda \in \pi_{00}^a(T)$ y por lo tanto

$$p_{00}^a(T) \subseteq \pi_{00}^a(T).$$

(iii) Sea $\lambda \in p_{00}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_b(T)$, entonces $\lambda \in \sigma(T)$ y $\lambda \notin \sigma_b(T) = \sigma_{sf}(T) \cup \text{acc } \sigma(T)$, además de (i) y (ii) se tiene que $\lambda \in \pi_{00}^a(T)$, luego $\lambda \in \text{iso } \sigma(T)$ (ya que $\lambda \in \sigma(T)$ y $\lambda \notin \text{acc } \sigma(T)$) y $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$ (ya que $\lambda \in \pi_{00}^a(T)$), en consecuencia $\lambda \in \pi_{00}(T)$ y por lo tanto

$$p_{00}(T) \subseteq \pi_{00}(T).$$

(iv) Según lo visto en (i) y (iii) se tiene que $p_{00}(T) \subseteq \pi_{00}(T) \cap p_{00}^a(T)$. Sea $\lambda \in \pi_{00}(T) \cap p_{00}^a(T)$, entonces $\lambda \in \text{iso } \sigma(T)$ y $\lambda \notin \sigma_{ub}(T) \supseteq \sigma_{sf}(T)$ esto implica que $\lambda \notin \sigma_{sf}(T) \cup \text{acc } \sigma(T) = \sigma_b(T)$ y $\lambda \in \sigma(T)$, así $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_b(T) = p_{00}(T)$, con lo que se puede concluir que

$$\pi_{00}(T) \cap p_{00}^a(T) = p_{00}(T).$$

$\square$

Definición 3.1.3. *Un operador T se dice que satisface el Teorema de Browder si*

$$\sigma_w(T) = \sigma_b(T),$$

o equivalentemente, si

$$\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_b(T),$$

de la misma manera, se dice que T satisface el Teorema de a-Browder si

$$\sigma_{uw}(T) = \sigma_{ub}(T),$$

o equivalentemente, si

$$\sigma(T)_{ap} \setminus \sigma_{uw}(T) = \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{ub}(T).$$

Teorema 3.1.4. *Si $T \in L(X)$ satisface el Teorema de a-Browder, entonces T satisface el Teorema de Browder.*

Demostración. Será suficiente demostrar que $\sigma_b(T) \subseteq \sigma_w(T)$, pues hemos visto en el capítulo I, que $\sigma_w(T) \subseteq \sigma_b(T)$ siempre se satisface. Sea $\lambda \notin \sigma_w(T) \supseteq \sigma_{uw}(T)$, entonces $\lambda \notin \sigma_{uw}(T) = \sigma_{ub}(T)$ en consecuencia $\lambda \notin \sigma_{ub}(T) \cup \sigma_w(T) = \sigma_b(T)$, así $\lambda \notin \sigma_b(T)$

$\square$

La siguiente definición fue introducida por Coburn [26].

Definición 3.1.5. *Un operador $T \in L(X)$ se dice que satisface el Teorema de Weyl si*

$$\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \pi_{00}(T).$$

El siguiente resultado, debido a Aiena [2], muestra la relación entre el Teorema de Browder y el Teorema de Weyl. Es de destacar que la prueba aquí presentada es mucho mas sencilla que la original.

Teorema 3.1.6. *Si $T \in L(X)$. Entonces las siguientes son equivalentes*

(i) T satisface el Teorema de Weyl

(ii) T satisface el Teorema de Browder y $p_{00}(T) = \pi_{00}(T)$

Demostración. ($\Rightarrow$) Bastará demostrar que el Teorema de Browder se satisface, pues de ser así,

$$\begin{aligned} \pi_{00}(T) &= \sigma(T) \setminus \sigma_w(T), \\ &= \sigma(T) \setminus \sigma_b(T). \\ &= p_{00}(T); \end{aligned}$$

Sea $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \pi_{00}(T)$, entonces $\lambda \notin \sigma_{sf}(T) \cup \operatorname{acc} \sigma(T) = \sigma_b(T)$, así $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_b(T)$ lo cual muestra que $\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_b(T)$ y esto es equivalente a $\sigma_w(T) = \sigma_b(T)$.

($\Leftarrow$) Evidente.

$\square$

Definiremos a continuación una noción más fuerte que el Teorema de Weyl, conocida como el Teorema de a-Weyl, la cual fue introducida por Rakočević [40].

Definición 3.1.7. *Un operador $T \in L(X)$ se dice que satisface el Teorema de a-Weyl si*

$$\sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{uw}(T) = \pi_{00}^{a}(T).$$

El siguiente resultado, debido a Aiena [2], muestra la relación entre el Teorema de a-Browder y el Teorema de a-Weyl.

Teorema 3.1.8. *Si $T \in L(X)$. Entonces las siguientes son equivalentes*

(i) T satisface el Teorema de a-Weyl

(ii) T satisface el Teorema de a-Browder y $p_{00}^{a}(T) = \pi_{00}^{a}(T)$

Demostración. ($\Rightarrow$) Bastará demostrar que el Teorema de a-Browder se satisface, pues de ser así,

$$\begin{aligned} \pi_{00}^{a}(T) &= \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{uw}(T), \\ &= \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{ub}(T), \\ &= p_{00}^{a}(T). \end{aligned}$$

Sea $\lambda \in \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{uw}(T) = \pi_{00}^{a}(T)$, entonces $\lambda \notin \sigma_{sf}(T) \cup \operatorname{acc} \sigma_{ap}(T) = \sigma_{ub}(T)$, así $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_{ub}(T)$ esto implica que $\sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{uw}(T) = \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{ub}(T)$ y esto es equivalente a $\sigma_{uw}(T) = \sigma_{ub}(T)$.
($\Leftarrow$) Evidente.

$\square$

Teorema 3.1.9. *Si $T \in L(X)$ satisface el Teorema de a-Weyl, entonces T satisface el Teorema de Weyl.*

Demostración. Según lo visto en los Teoremas 3.1.4, 3.1.6 y 3.1.8, y dado que $p_{00}(T) \subseteq \pi_{00}(T)$ (véase Lema 3.1.2) siempre se satisface, será suficiente demostrar que $\pi_{00}(T) \subseteq p_{00}(T)$. Sea $\lambda \in \pi_{00}(T) \subseteq \pi_{00}^a(T)$, entonces $\lambda \in \pi_{00}^a(T) = p_{00}^a(T)$ lo cual implica que $\lambda \in \pi_{00}(T) \cap p_{00}^a(T) = p_{00}(T)$ (esta igualdad sigue del Lema 3.1.2).

□

Otra variante del Teorema de Weyl también introducida por Rakočević [40], y más recientemente estudiada en [14], es la llamada propiedad (w), la cual definiremos a continuación.

Definición 3.1.10. *Un operador $T \in L(X)$ se dice que satisface la propiedad (w) si*

$$\sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{uw}(T) = \pi_{00}(T).$$

El siguiente resultado, debido a Aiena [14], muestra la relación entre el Teorema de a-Browder y la propiedad (w).

Teorema 3.1.11. *Si $T \in L(X)$. Entonces las siguientes son equivalentes*

(i) T satisface la propiedad (w)

(ii) T satisface el Teorema de a-Browder y $p_{00}^a(T) = \pi_{00}(T)$

Demostración. $(\Rightarrow)$ Bastará demostrar que el Teorema de a-Browder se satisface, pues de ser así,

$$\begin{aligned} \pi_{00}(T) &= \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{uw}(T), \\ &= \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{ub}(T), \\ &= p_{00}^a(T) \end{aligned}$$

Sea $\lambda \in \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{uw}(T) = \pi_{00}(T)$, entonces $\lambda \notin \sigma_{sf}(T) \cup \operatorname{acc} \sigma(T) = \sigma_b(T)$, así $\lambda \notin \sigma_b(T) \supseteq \sigma_{ub}(T)$ en consecuencia $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_{ub}(T)$, esto implica que

$\sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{uw}(T) = \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{ub}(T)$ y esto es equivalente a $\sigma_{uw}(T) = \sigma_{ub}(T)$.
($\Leftarrow$) Evidente.

$\square$

Teorema 3.1.12. *Si $T \in L(X)$ satisface la propiedad (w), entonces T satisface el Teorema de Weyl.*

Demostración. Según lo visto en los Teoremas 3.1.4, 3.1.6 y 3.1.9, y dado que $p_{00}(T) \subseteq \pi_{00}(T)$ siempre se satisface, será suficiente demostrar que $p_{00}(T) \supseteq \pi_{00}(T)$. Sea $\lambda \in \pi_{00}(T) = p_{00}^a(T)$, entonces $\lambda \in \pi_{00}(T) \cap p_{00}^a(T) = p_{00}(T)$ (esta igualdad sigue del Lema 3.1.2).

$\square$

3.2. Propiedad (w) bajo perturbaciones

En esta sección se estudia el comportamiento de la propiedad (w) para un operador acotado T, actuando sobre un espacio de Banach X, bajo perturbaciones por operadores compactos o de Riesz que conmuten con el operador T.

Definición 3.2.1. *Sea X un espacio de Banach complejo e infinito dimensional y $T \in L(X)$. Se denota*

$$\pi_{0f}(T) = \{\lambda \in iso\ \sigma(T) : \alpha(\lambda I - T) < \infty\},$$

Obviamente, $\pi_{00}(T) \subseteq \pi_{0f}(T)$

Lema 3.2.2. *Sea $T \in L(X)$, X un espacio de Banach. Si R es un operador de Riesz que conmuta con T entonces*

$$\pi_{00}(T + R) \cap \sigma_{ap}(T) \subseteq iso\ \sigma(T),$$

Demostración. Por [38] se tiene que

$$\pi_{00}(T+R) \cap \sigma_{ap}(T) \subseteq \pi_{0f}(T+R) \cap \sigma(T) \subseteq \text{iso } \sigma(T).$$

$\square$

Definición 3.2.3. *Un operador $T \in L(X)$ se dice que es $a-isoloid$ si $\sigma_{ap}(T)$ no posee puntos aislados, o cada punto aislado de $\sigma_{ap}(T)$ es un autovalor de T, de la misma manera, un operador $T \in L(X)$ se dice que es finito $a-isoloid$ si cada punto aislado λ de $\sigma_{ap}(T)$ es un autovalor de T con multiplicidad finita; es decir; $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$.*

Teorema 3.2.4. *Si $T \in L(X)$ es $a-isoloid$, R un operador de Riesz tal que $TR = RT$ y $\sigma_{ap}(T) = \sigma_{ap}(T+R)$. Si T satisface la propiedad (w) entonces $\pi_{00}(T) \subseteq \pi_{00}(T+R)$.*

Demostración. Sea $\lambda \in \pi_{00}(T)$, entonces dado que T satisface la propiedad (w) se tiene que $\pi_{00}(T) = \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{ub}(T) = \sigma_{ap}(T+R) \setminus \sigma_{ub}(T+R)$ luego $\lambda \in \sigma_{ap}(T+R)$ y $\lambda \notin \sigma_{ub}(T+R)$. Dado que

$$\sigma_{ub}(T+R) = \sigma_{sf}(T+R) \cup \text{acc } \sigma_{ap}(T+R),$$

entonces $\lambda \in \text{iso } \sigma_{ap}(T+R)$ así $\lambda \in \pi_{00}(T) \cap \sigma_{ap}(T+R) \subseteq \text{iso } \sigma(T+R)$. Además $0 < \alpha(\lambda I - (T+R)) < \infty$ ya que $\lambda \notin \sigma_{ub}(T+R)$ y $\lambda \in \sigma_{ap}(T+R)$. Lo que demuestra que $\lambda \in \pi_{00}(T+R)$, y en consecuencia $\pi_{00}(T) \subseteq \pi_{00}(T+R)$.

$\square$

Teorema 3.2.5. *Si $T \in L(X)$ es $a-isoloid$, $K \in L(X)$ un operador que conmuta con T tal que K^n tiene rango de dimensión finita para algún $n \in \mathbb{C}$, y $\sigma_{ap}(T) = \sigma_{ap}(T+K)$. Si T satisface la propiedad (w) entonces $\pi_{00}(T) = \pi_{00}(T+K)$.*

Demostración. Del Teorema 3.2.4 sabemos que $\pi_{00}(T) \subseteq \pi_{00}(T+K)$ (K es un operador compacto, y en consecuencia de Riesz). Sea $\lambda \in \pi_{00}(T+K)$, entonces $\lambda \in iso\sigma(T+K)$ y $\lambda \in \sigma_{ap}(T+K) = \sigma_{ap}(T)$ lo cual implica que $\lambda \in \pi_{00}(T+K) \cap \sigma_{ap}(T) \subseteq \text{iso}\sigma(T)$, en particular $\lambda \in iso\sigma_{ap}(T)$ y dado que T es $a-isoloid$ se tiene que $0 < \alpha(\lambda I - T)$.

Mostraremos ahora que $\alpha(\lambda I - T) < \infty$. Denotemos por U la restricción de $[\lambda I - (T+K)]^n$ a $Y = N(\lambda I - T)$. Dado que $\alpha(\lambda I - (T+K)) < \infty$, y según lo visto en la Observación 1.1.11 se tiene que $\alpha([\lambda I - (T+K)]^n) < \infty$. Por otro lado observemos que si $x \in N(\lambda I - T)$ entonces

$$[\lambda I - (T+K)]^n x = (-1)^n K^n x \in K^n(X)$$

así el rango de U es de dimensión finita y en consecuencia $q(U) < \infty$ y dado que $\alpha(U) < \infty$ podemos concluir que $\alpha(\lambda I - T) < \infty$ (veáse Proposición 38.2 de [31]). Lo cual muestra que $\lambda \in \pi_{00}(T)$, por lo tanto $\pi_{00}(T) = \pi_{00}(T+K)$.

□

De los Teoremas 3.2.4 y 3.2.5 concluimos inmediatamente el resultado que sigue, el cual también fue probado por Aiena y García en [10].

Corolario 3.2.6. *Si $T \in L(X)$ es $a-isoloid$, $K \in L(X)$ un operador que conmuta con T tal que K^n tiene rango de dimensión finita para algún $n \in \mathbb{C}$, y $\sigma_{ap}(T) = \sigma_{ap}(T+K)$. Si T satisface la propiedad (w) entonces $T+K$ también satisface la propiedad (w).*

Demostración. Por el Teorema 3.2.5, y dado que T satisface la propiedad (w) se tiene que

$$\pi_{00}(T+K) = \pi_{00}(T) = \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{uw}(T) = \sigma_{ap}(T+K) \setminus \sigma_{uw}(T+K).$$

con lo que podemos concluir que $T+K$ satisface la propiedad (w).

□

Teorema 3.2.7. *Si $T \in L(X)$ es finito $a-isoloid$, $R \in L(X)$ un operador de Riesz que conmuta con T y $\sigma_{ap}(T) = \sigma_{ap}(T+R)$. Si T satisface la propiedad (w) entonces $\pi_{00}(T) = \pi_{00}(T+R)$.*

Demostración. Dado que todo operador finito $a-isoloid$ es $a-isoloid$ se tiene del Teorema 3.2.4 que $\pi_{00}(T) \subseteq \pi_{00}(T+R)$. Sea $\lambda \in \pi_{00}(T+R)$, entonces $\lambda \in iso\sigma(T+R)$ y $\lambda \in \sigma_{ap}(T+R) = \sigma_{ap}(T)$ lo cual implica que $\lambda \in \pi_{00}(T+R) \cap \sigma_{ap}(T) \subseteq \text{iso}\sigma(T)$, así $\lambda \in iso\sigma_{ap}(T)$, y dado que T es finito $a-isoloid$ se tiene que $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$, lo cual implica que $\lambda \in \pi_{00}(T)$ por lo tanto $\pi_{00}(T) = \pi_{00}(T+R)$.

□

Corolario 3.2.8. *Si $T \in L(X)$ es finito $a-isoloid$, $R \in L(X)$ un operador de Riesz que conmuta con T y $\sigma_{ap}(T) = \sigma_{ap}(T+R)$. Si T satisface la propiedad (w) entonces $T+R$ satisface la propiedad (w).*

Demostración. Similar a la del Corolario 3.2.6.

□

Corolario 3.2.9. *Supongamos que $T \in L(X)$ es finito $a-isoloid$, $Q \in L(X)$ un operador cuasi-nilpotente que conmuta con T. Si T satisface la propiedad (w) entonces $T+Q$ satisface la propiedad (w).*

Demostración. Todo operador cuasi-nilpotente es de Riesz, además vimos en el capítulo I que la igualdad $\sigma_{ap}(T) = \sigma_{ap}(T+Q)$ se satisface para cualquier operador cuasi-nilpotente Q.

□

Ejemplo 3.2.10. *El siguiente ejemplo muestra que el resultado del Corolario 3.2.9 no es cierto si suponemos que T es $a-isoloid$.*

Si $Q \in L(l^2(\mathbb{N}))$ es definido por

$$Q(x_1, x_2, ...) \text{ para todo } (x_n) \in L(l^2(\mathbb{N}))$$

entonces Q es un operador cuasi-nilpotente, además

$$\{0\} = \pi_{00}(T) \neq \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{uw}(T) = \emptyset.$$

Tomemos $T = 0$, claramente T es $a-$isoloid y satisface la propiedad (w), sin embargo $T+Q = Q$ no satisface esta propiedad. Obviamente, $T = 0$ no es finito $a-$isoloid.

Seguidamente enunciamos y demostramos un resultado que generaliza el obtenido por Aiena y García en el Teorema 2.11 de [10].

Teorema 3.2.11. *Supongamos que todo autovalor de un operador $T \in L(X)$ tiene multiplicidad finita (es decir, $\pi_{00}(T) = \{\lambda \in iso\sigma(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T)\}$). Si T satisface la propiedad (w) entonces $T+Q$ satisface la propiedad (w), para todo operador cuasi-nilpotente que conmute con T.*

Demostración. Sea $Q \in L(X)$ un operador cuasi-nilpotente que conmuta con T. Dado que $T+Q$ satisface el Teorema de a-Browder (recordemos que el Teorema de a-Browder es invariante bajo perturbaciones por operadores de Riesz que conmuten con el operador), y según lo visto en el Teorema 3.1.9, será suficiente demostrar que $p^a_{00}(T+Q) = \pi_{00}(T+Q)$. Además, dado que T satisface la propiedad (w), se tiene que

$$\begin{aligned} \pi_{00}(T) &= p^a_{00}(T) \\ &= \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{ub}(T) \\ &= \sigma_{ap}(T+Q) \setminus \sigma_{ub}(T+Q) \\ &= p^a_{00}(T+Q) \end{aligned}$$

Sea $\lambda \in \pi_{00}(T+Q)$, entonces

$$\lambda \in iso\sigma(T+Q) = iso\sigma(T) \text{ y } \alpha(\lambda I - (T+Q)) < \infty.$$

Si consideramos la restricción de $\lambda I - T$ en el subespacio de dimension finita $Y = N(\lambda I - (T+Q))$, entonces $\lambda I - T \mid Y = Q \mid Y$ lo cual implica que $\lambda I - T \mid Y$ es cuasi-nilpotente y en consecuencia $0 \in \sigma(\lambda I - T \mid Y)$. Dado que Y es de dimension finita, entonces $\lambda I - T \mid Y$ no es inyectivo y de aquí se tiene que

$$\{0\} \neq N(\lambda I - T \mid Y) \subseteq N(\lambda I - T)$$

lo cual implica que λ es un autovalor de T y en consecuencia $\lambda \in \pi_{00}(T)$.

Por otro lado, si $\lambda \in p_{00}^{a}(T+Q) = \pi_{00}(T)$, entonces $\lambda \in iso\sigma(T) = iso\sigma(T+Q)$, $\alpha(\lambda I - (T+Q)) < \infty$ (dado que $\lambda \notin \sigma_{ub}(T+Q)$) y $0 < \alpha(\lambda I - (T+Q))$ (ya que $\lambda \in \sigma_{ap}(T+Q)$ y $\lambda \notin \sigma_{ub}(T+Q)$) lo cual implica que $\lambda \in \pi_{00}(T+Q)$. Con lo que podemos concluir que $\pi_{00}(T+Q) = p_{00}^{a}(T+Q)$.

$\square$

Capítulo 4

Propiedad (gw) bajo perturbaciones por operadores nilpotentes que conmutan

En este capítulo se introducen generalizaciones, en el contexto de los operadores semi-B-Fredholm, de los Teoremas de Weyl, a-Weyl, Browder, a-Browder y la propiedad (w). Se estudian las relaciones entre dichas generalizaciones y se muestra que la propiedad (w) generalizada, llamada propiedad (gw), es invariante bajo perturbaciones por operadores nilpotentes que conmutan, cuando el operador es a-polaroide. Los resultados contenidos en este capítulo, son resultados nuevos e inéditos respecto al tema tratado. Los cuales aparecen publicados en los artículos titulados ″ Generalized Browder's Theorem and SVEP ″ (2007) y ″ Property (w) under compact or Riesz commuting perturbations ″(2010) en las revistas Mediterranean J. Math. y Acta Sci. Math. respectivamente, y cuyos autores son P. Aiena y O. García.

4.1. Teorema generalizado de Weyl, a-Weyl y propiedad (gw)

En esta sección se introducen la propiedad (w) generalizada, llamada propiedad (gw), y los Teoremas generalizados de Weyl, a-Weyl, Browder y a-Browder. Así como también se establecen relaciones entre dichas nociones y las nociones no generalizadas.

Definición 4.1.1. *Sea X un espacio de Banach complejo e infinito dimensional y $T \in L(X)$. Denotaremos*

$$\begin{aligned} E(T) &= \{\lambda \in iso\ \sigma(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T)\}, \\ E^a(T) &= \{\lambda \in iso\ \sigma_{ap}(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T)\}, \\ \Pi_{00}(T) &= \sigma(T) \setminus \sigma_{bb}(T), \\ \Pi_{00}^a(T) &= \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{ubb}(T); \end{aligned}$$

Obviamente,

$$\pi_{00}(T) \subseteq E(T) \subseteq E^a(T) \text{ y } \pi_{00}^a(T) \subseteq E^a(T)$$

Otras relaciones entre los subconjuntos de $\mathbb{C}$ definidos anteriormente, se presentan en el siguiente lema.

Lema 4.1.2. *Para cada $T \in L(X)$, se tiene:*

(i) $\Pi_{00}(T) \subseteq \Pi_{00}^a(T)$

(ii) $\Pi_{00}^a(T) \subseteq E^a(T)$

(iii) $\Pi_{00}(T) \subseteq E(T)$

(iv) $E(T) \cap \Pi_{00}^a(T) = \Pi_{00}(T)$

Demostración. (i) Sea $\lambda \in \Pi_{00}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{bb}(T)$, entonces $\lambda \in \sigma(T)$ y $\lambda \notin \sigma_{bb}(T)$, esto implica que $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$, pues de lo contrario $\alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T) = 0$ y en consecuencia $\lambda \notin \sigma(T)$. Además $\lambda \notin \sigma_{ubb}(T)$ ya que $\sigma_{ubb}(T) \subseteq \sigma_{bb}(T)$, con esto se tiene que $\lambda \in \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{ubb}(T) = \Pi_{00}^a(T)$ y por lo tanto

$$\Pi_{00}(T) \subseteq \Pi_{00}^a(T).$$

(ii) Sea $\lambda \in \Pi_{00}^a(T) = \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{ubb}(T)$, entonces $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ y $\lambda \notin \sigma_{ubb}(T) = \sigma_{qf}(T) \cup$ acc $\sigma_{ap}(T)$, esto implica que $\lambda \in$ iso $\sigma_{ap}(T)$ (ya que $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ y $\lambda \notin$ acc $\sigma_{ap}(T)$) y $0 < \alpha(\lambda I - T)$ (pues $\lambda \notin \sigma_{ubb}(T)$ y $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$), en consecuencia $\lambda \in E^a(T)$ y por lo tanto

$$\Pi_{00}^a(T) \subseteq E^a(T).$$

(iii) Sea $\lambda \in \Pi_{00}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{bb}(T)$, entonces $\lambda \in \sigma(T)$ y $\lambda \notin \sigma_{bb}(T) = \sigma_{qf}(T) \cup$ acc $\sigma(T)$, además de (i) y (ii) se tiene que $\lambda \in E^a(T)$, luego $\lambda \in$ iso $\sigma(T)$ (ya que $\lambda \in \sigma(T)$ y $\lambda \notin$ acc $\sigma(T)$) y $0 < \alpha(\lambda I - T)$ (ya que $\lambda \in E^a(T)$), en consecuencia $\lambda \in E(T)$ y por lo tanto

$$\Pi_{00}(T) \subseteq E(T).$$

(iv) Según lo visto en (i) y (iii) se tiene que $\Pi_{00}(T) \subseteq E(T) \cap \Pi_{00}^a(T)$. Sea $\lambda \in E(T) \cap \Pi_{00}^a(T)$, entonces $\lambda \in$ iso $\sigma(T)$ y $\lambda \notin \sigma_{ubb}(T) \supseteq \sigma_{qf}(T)$ esto implica que $\lambda \notin \sigma_{qf}(T) \cup$ acc $\sigma(T) = \sigma_{bb}(T)$ y $\lambda \in \sigma(T)$, así $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_{bb}(T) = \Pi_{00}(T)$, con lo que se puede concluir que

$$E(T) \cap \Pi_{00}^a(T) = \Pi_{00}(T).$$

$\square$

Definición 4.1.3. *Un operador T se dice que satisface el Teorema generalizado de Browder si*

$$\sigma_{bw}(T) = \sigma_{bb}(T),$$

o equivalentemente, si

$$\sigma(T) \setminus \sigma_{bw}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{bb}(T),$$

de la misma manera, se dice que T satisface el Teorema generalizado de a-Browder si

$$\sigma_{ubw}(T) = \sigma_{ubb}(T),$$

o equivalentemente, si

$$\sigma(T)_{ap} \setminus \sigma_{ubw}(T) = \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{ubb}(T).$$

Las dos siguientes proposiciones son debidas a Amouch y Zguitti [18]. Acá presentamos demostraciones más cortas que las dadas por los autores anteriormente mencionados.

Teorema 4.1.4. *$T \in L(X)$ satisface el Teorema generalizado de Browder si, y sólo si T satisface el Teorema de Browder.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $\lambda \notin \sigma_w(T)$, entonces $\lambda \notin \sigma_{bw}(T) = \sigma_{bb}(T)$ en consecuencia, $\lambda \notin \sigma_w(T) \cup \sigma_{bb}(T) = \sigma_b(T)$, por lo tanto $\sigma_b(T) \subseteq \sigma_w(T)$. Dado que $\sigma_{bw}(T) \subseteq \sigma_{bb}(T)$ siempre se satisface, podemos concluir que $\sigma_b(T) = \sigma_w(T)$.
($\Leftarrow$) Sea $\lambda \notin \sigma_{bw}(T)$, entonces del Corolario 2.3.12 sigue que λ no es punto de acumulación de $\sigma_w(T) = \sigma_b(T) = \sigma_{sf}(T) \cup \Xi(T) \cup \Xi(T^*)$ lo cual implica que λ no es punto de acumulación de $\Xi(T)$ y λ no es punto de acumulación de $\Xi(T^*)$, dado que los conjuntos $\Xi(T)$ y $\Xi(T^*)$ son abiertos, se tiene que $\lambda \in \Xi(T)$ y $\lambda \in \Xi(T^*)$ en consecuencia $\lambda \notin \sigma_{qf}(T) \cup \Xi(T) \cup \Xi(T^*) = \sigma_{bb}(T)$, por lo tanto $\sigma_{bb}(T) \subseteq \sigma_{bw}(T)$. Dado que $\sigma_{bw}(T) \subseteq \sigma_{bb}(T)$ siempre se satisface, podemos concluir que $\sigma_{bb}(T) = \sigma_{bw}(T)$.

$\square$

Teorema 4.1.5. *$T \in L(X)$ satisface el Teorema generalizado de a-Browder si, y solo si T satisface el Teorema de a-Browder.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $\lambda \notin \sigma_{uw}(T)$, entonces $\lambda \notin \sigma_{ubw}(T) = \sigma_{ubb}(T)$ en consecuencia $\lambda \notin \sigma_{uw}(T) \cup \sigma_{ubb}(T) = \sigma_{ub}(T)$, por lo tanto $\sigma_{ub}(T) \subseteq \sigma_{uw}(T)$. Dado que $\sigma_{ubw}(T) \subseteq \sigma_{ubb}(T)$ siempre se satisface, podemos concluir que $\sigma_{ub}(T) = \sigma_{uw}(T)$.
($\Leftarrow$) Sea $\lambda \notin \sigma_{ubw}(T)$, entonces del Corolario 2.3.13 sigue que λ no es punto de acumulación de $\sigma_{uw}(T) = \sigma_{ub}(T) = \sigma_{sf}(T) \cup \Xi(T)$ lo cual implica que λ no es punto de acumulación de $\Xi(T)$, dado que el conjuntos $\Xi(T)$ es abiertos, se tiene que $\lambda \in \Xi(T)$ en consecuencia $\lambda \notin \sigma_{qf}(T) \cup \Xi(T) = \sigma_{ubb}(T)$, por lo tanto $\sigma_{ubb}(T) \subseteq \sigma_{ubw}(T)$. Dado

que $\sigma_{ubw}(T) \subseteq \sigma_{ubb}(T)$ siempre se satisface, podemos concluir que $\sigma_{ubb}(T) = \sigma_{ubw}(T)$.

$\square$

Definición 4.1.6. *Un operador $T \in L(X)$ se dice que satisface el Teorema generalizado de Weyl si*

$$\sigma(T) \setminus \sigma_{bw}(T) = E(T).$$

La siguiente equivalencia es debida a Aiena y García [9], y muestra la relación entre el Teorema de Browder y el Teorema generalizado de Weyl.

Teorema 4.1.7. *Si $T \in L(X)$. Entonces las siguientes son equivalentes*

(i) T satisface el Teorema generalizado de Weyl

(ii) T satisface el Teorema de Browder y $\Pi_{00}(T) = E(T)$

Demostración. ($\Rightarrow$) Bastará demostrar que el Teorema de Browder se satisface, pues de ser así, entonces el Teorema generalizado de Browder se satisface, y en consecuencia

$$\begin{aligned} E(T) &= \sigma(T) \setminus \sigma_{bw}(T), \\ &= \sigma(T) \setminus \sigma_{bb}(T). \\ &= \Pi_{00}(T); \end{aligned}$$

Sea $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_{bw}(T) = E(T)$, entonces $\lambda \notin \sigma_{qf}(T) \cup \operatorname{acc} \sigma(T) = \sigma_{bb}(T)$, así $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_{bb}(T)$ lo cual muestra que $\sigma(T) \setminus \sigma_{bw}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{bb}(T)$ y esto es equivalente a $\sigma_{bw}(T) = \sigma_{bb}(T)$.

($\Leftarrow$) Evidente.

$\square$

Teorema 4.1.8. *Si $T \in L(X)$ satisface el Teorema generalizado de Weyl, entonces T satisface el Teorema de Weyl.*

Demostración. Según lo visto en los Teoremas 3.1.6 y 4.1.7, será suficiente demostrar que $\Pi_{00}(T) = E(T)$ implica $p_{00}(T) = \pi_{00}(T)$. Supongamos que $\Pi_{00}(T) = E(T)$ y sea $\lambda \in \pi_{00}(T)$, entonces $\lambda \in E(T) = \Pi_{00}(T)$, con lo que se tiene que $\lambda I - T$ es superiormente semi B-Fredholm y $\alpha(\lambda I - T) < \infty$, luego de la Observación 2.2.2 sigue que $\lambda I - T$ es superiormente semi-Fredholm. Así $\lambda I - T$ es superiormente semi-Fredholm y $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$ lo cual implica que $\lambda \in p_{00}(T)$ y en consecuencia $\pi_{00}(T) \subseteq p_{00}(T)$. Dado que $p_{00}(T) \subseteq \pi_{00}(T)$ siempre se satisface (véase Lema 3.1.2), podemos concluir que $p_{00}(T) = \pi_{00}(T)$.

□

Definición 4.1.9. *Un operador $T \in L(X)$ se dice que satisface el Teorema generalizado de a-Weyl si*

$$\sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{ubw}(T) = E^a(T).$$

El siguiente resultado, debido a Aiena y Miller [12] muestra la relación entre el Teorema de a-Browder y el Teorema generalizado de a-Weyl.

Teorema 4.1.10. *Si $T \in L(X)$. Entonces las siguientes son equivalentes*

(i) T satisface el Teorema generalizado de a-Weyl

(ii) T satisface el Teorema de a-Browder y $\Pi^a_{00}(T) = E^a(T)$

Demostración. ($\Rightarrow$) Bastará demostrar que el Teorema de a-Browder se satisface, pues de ser así, entonces el Teorema generalizado de a-Browder se satisface, y en consecuencia

$$\begin{aligned} E^a(T) &= \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{ubw}(T), \\ &= \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{ubb}(T), \\ &= \Pi^a_{00}(T). \end{aligned}$$

Sea $\lambda \in \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{ubw}(T) = E^a(T)$, entonces $\lambda \notin \sigma_{qf}(T) \cup \mathrm{acc}\, \sigma_{ap}(T) = \sigma_{ubb}(T)$, así $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_{ubb}(T)$ esto implica que $\sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{ubw}(T) = \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{ubb}(T)$ y esto es equivalente a $\sigma_{ubw}(T) = \sigma_{ub}(T)$.

($\Leftarrow$) Evidente.

$\square$

Teorema 4.1.11. *Si $T \in L(X)$ satisface el Teorema generalizado de a-Weyl, entonces T satisface el Teorema de a-Weyl.*

Demostración. Según lo visto en los Teoremas 3.1.8 y 4.1.10, será suficiente demostrar que $\Pi^a_{00}(T) = E^a(T)$ implica $p^a_{00}(T) = \pi^a_{00}(T)$. Supongamos que $\Pi^a_{00}(T) = E^a(T)$ y sea $\lambda \in \pi^a_{00}(T)$, entonces $\lambda \in E^a(T) = \Pi^a_{00}(T)$, con lo que se tiene que $\lambda I - T$ es superiormente semi B-Browder y $\alpha(\lambda I - T) < \infty$, luego de la Observación 2.2.2 sigue que $\lambda I - T$ es superiormente semi-Browder, lo cual implica que $\lambda \in p^a_{00}(T)$ y en consecuencia $\pi^a_{00}(T) \subseteq p^a_{00}(T)$. Dado que $p^a_{00}(T) \subseteq \pi^a_{00}(T)$ siempre se satisface (véase Lema 3.1.2), podemos concluir que $p^a_{00}(T) = \pi^a_{00}(T)$.

$\square$

Definición 4.1.12. *Un operador $T \in L(X)$ se dice que satisface la propiedad (gw) si*

$$\sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{ubw}(T) = E(T).$$

Teorema 4.1.13. *Si $T \in L(X)$. Entonces las siguientes son equivalentes*

(i) T satisface la propiedad (gw)

(ii) T satisface el Teorema de a-Browder y $\Pi^a_{00}(T) = E(T)$

Demostración. ($\Rightarrow$) Bastará demostrar que el Teorema de a-Browder se satisface, pues de ser así, entonces el Teorema generalizado de a-Browder se satisface, y en consecuencia

$$\begin{aligned} E(T) &= \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{ubw}(T), \\ &= \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{ubb}(T), \\ &= \Pi^a_{00}(T) \end{aligned}$$

Sea $\lambda \in \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{ubw}(T) = E(T)$, entonces $\lambda \notin \sigma_{qf}(T) \cup \operatorname{acc} \sigma(T) = \sigma_{bb}(T)$, así $\lambda \notin \sigma_{bb}(T) \supseteq \sigma_{ubb}(T)$ en consecuencia $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_{ubb}(T)$, esto implica que $\sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{ubw}(T) = \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{ubb}(T)$ y esto es equivalente a $\sigma_{ubw}(T) = \sigma_{ubb}(T)$.
($\Leftarrow$) Evidente.

$\square$

Teorema 4.1.14. *Si $T \in L(X)$ satisface la propiedad (gw), entonces T satisface la propiedad (w).*

Demostración. Según lo visto en los Teoremas 3.1.11 y 4.1.13, será suficiente demostrar que $\Pi^a_{00}(T) = E(T)$ implica $p^a_{00}(T) = \pi_{00}(T)$. Supongamos que $\Pi^a_{00}(T) = E(T)$ y sea $\lambda \in \pi_{00}(T)$, entonces $\lambda \in E(T) = \Pi^a_{00}(T)$, con lo que se tiene que $\lambda I - T$ es superiormente semi B-Browder y $\alpha(\lambda I - T) < \infty$, luego de la Observación 2.2.2 sigue que $\lambda I - T$ es superiormente semi-Browder, lo cual implica que $\lambda \in p^a_{00}(T)$ y en consecuencia, $\pi_{00}(T) \subseteq p^a_{00}(T)$. Dado que $p^a_{00}(T) \subseteq \pi^a_{00}(T)$ siempre se satisface (véase Lema 4.1.2), y $p^a_{00}(T) \subseteq \Pi^a_{00}(T) = E(T)$ se obtiene que $p^a_{00}(T) \subseteq \pi_{00}(T)$, por lo tanto $p^a_{00}(T) = \pi_{00}(T)$.

$\square$

Teorema 4.1.15. *Si $T \in L(X)$ satisface la propiedad (gw), entonces T satisface el Teorema generalizado de Weyl.*

Demostración. Según lo visto en los Teoremas 3.1.4, 4.1.7 y 4.1.13, y dado que $\Pi_{00}(T) \subseteq E(T)$ siempre se satisface, será suficiente demostrar que $\Pi_{00}(T) \supseteq E(T)$. Sea $\lambda \in E(T) = \Pi^a_{00}(T)$, entonces $\lambda \in E(T) \cap \Pi^a_{00}(T) = \Pi_{00}(T)$ (esta igualdad sigue del Lema 4.1.2).

□

Definición 4.1.16. *un operador $T \in L(X)$ se dice que es*

(i) *polaroide si iso $\sigma(T) = \Pi_{00}(T)$*

(ii) *a-polaroide si iso $\sigma_{ap}(T) = \Pi_{00}(T)$*

(iii) *polaroide a izquierda si iso $\sigma_{ap}(T) = \Pi^a_{00}(T)$.*

Claramente,

a-polaroide $\Rightarrow$ polaroide a izquierda $\Rightarrow$ polaroide.

Teorema 4.1.17. *Si $T \in L(X)$ es polaroide a izquierda, entonces $E^a(T) = \Pi^a_{00}(T)$*

Demostración. Es claro que $E^a(T) \subseteq$ iso $\sigma_{ap}(T)$, luego como iso $\sigma_{ap}(T) = \Pi^a_{00}(T)$ por ser T un operador polaroide a izquierda, se tiene que $E^a(T) \subseteq \Pi^a_{00}(T)$. Además, hemos visto en el Lema 4.1.2 que $\Pi^a_{00}(T) \subseteq E^a(T)$, por lo tanto $E^a(T) = \Pi^a_{00}(T)$.

□

Corolario 4.1.18. *Si $T \in L(X)$ es polaroide a izquierda, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) *T satisface el Teorema generalizado de a-Weyl*

(ii) *T satisface el Teorema de a-Weyl*

(iii) *T satisface el Teorema de a-Browder.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ sigue del Teorema 4.1.11.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ sigue del Teorema 3.1.8.
$(iii) \Rightarrow (i)$ sigue de los Teoremas 4.1.17 y 4.1.10.

□

Teorema 4.1.19. *Si $T \in L(X)$ es a-polaroide, entonces $E(T) = \Pi^a_{00}(T)$*

Demostración. Claramente se puede observar que $E(T) \subseteq \text{iso}\, \sigma_{ap}(T)$, pero $\text{iso}\, \sigma_{ap}(T) = \Pi_{00}(T)$ por ser T un operador a-polaroide y del Lema 4.1.2 sabemos que $\Pi_{00}(T) \subseteq \Pi^a_{00}(T)$ en consecuencia $E(T) \subseteq \Pi^a_{00}(T)$. Por otro lado, si $\lambda \in \Pi^a_{00}(T)$ entonces $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ $\lambda \notin \sigma_{ubb}(T)$. Dado que $\sigma_{ubb}(T) = \sigma_{qf}(T) \cup \text{acc}\, \sigma_{ap}(T)$ sigue que $\lambda \in \sigma_{ap}(T) = \Pi_{00}(T) \subseteq E(T)$ así $E(T) \subseteq \Pi^a_{00}(T)$ con lo que podemos concluir que $E(T) = \Pi^a_{00}(T)$.

□

Corolario 4.1.20. *Si $T \in L(X)$ es a-polaroide, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) T satisface la propiedad (gw)

(ii) T satisface la propiedad (w)

(iii) T satisface el Teorema generalizado de a-Weyl

(iv) T satisface el Teorema de a-Weyl

(v) T satisface el Teorema de a-Browder.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ sigue del Teorema 4.1.14.
$(ii) \Rightarrow (v)$ sigue del Teorema 3.1.11.
$(v) \Rightarrow (i)$ sigue de los Teoremas 4.1.19 y 4.1.13.
$(iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v)$ sigue del Corolario 4.1.18, recordemos que todo operador a-polaroide es polaroide a izquierda.

□

4.2. Propiedad (gw) bajo perturbaciones por operadores nilpotentes

En esta sección se estudia el comportamiento de los operadores a-polaroide y los operadores que satisfacen la propiedad (gw), bajo perturbaciones por operadores nilpotentes.

Lema 4.2.1. *Si $T \in L(X)$ y N es un operador nilpotente que conmuta con T entonces $H_0(T+N) = H_0(T)$.*

Demostración. Es suficiente demostrar que $H_0(T) \subseteq H_0(T+N)$, pues la inclusión contraria se obtendrá por simetría. Sea $x \in H_0(T)$ y supongamos que $N^v = 0$, entonces se tiene que $(T+N)^v = TS$, donde $S = \sum_{j=0}^{v-1} c_{v,j} T^{v-1-j} N^j$. Con esto se tiene que

$$\begin{aligned}
\|(T+N)^{vn}(x)\|^{\frac{1}{n}} &= \|(TS)^n(x)\|^{\frac{1}{n}} \\
&= \|S^n(T^n x)\|^{\frac{1}{n}} \\
&\leq \|S^n\|^{\frac{1}{n}} \|T^n x\|^{\frac{1}{n}}, \\
&\leq [\|S\|^n]^{\frac{1}{n}} \|T^n x\|^{\frac{1}{n}}, \\
&= \|S\| \|T^n x\|^{\frac{1}{n}},
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|(T+N)^{vn}(x)\| &\leq \lim_{n\to\infty} \|S\| \|T^n x\|^{\frac{1}{n}}, \\
&= 0,
\end{aligned}$$

en consecuencia, $x \in H_0[(T+N)^v]$, lo cual implica que $x \in H_0(T+N)$ (véase Lema 1.67 de [1]).

□

Teorema 4.2.2. *Si $T \in L(X)$ es a-polaroide y N nilpotente el cual conmuta con T. Entonces $T+N$ es a-polaroide*

Demostración. Hemos visto que $\sigma_a(T) = \sigma_a(T+N)$ y $\sigma(T) = \sigma(T+N)$. Si $\lambda \in iso\sigma_a(T) = iso\sigma_a(T+N)$, entonces λ es un polo del resolvente de T, de aquí $\lambda \in iso\sigma(T) = iso\sigma(T+N)$. Sea $p = p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$ y supongamos que $N^v = 0$. Dado que λ es un polo de orden p del resolvente de T, se tiene que $H_0(\lambda I - T) = Ker(\lambda I - T)^p$ (véase Teorema 3.74 de [1]). Observemos que $Ker(\lambda I - (T+N))^m \subseteq H_0(\lambda I - (T+N))$ para cada m. Mostraremos que en caso particular $m = p+v$ se satisface la igualdad. Sea $x \in H_0(\lambda I - (T+N))$, entonces por el Lema 4.2.1 $x \in H_0(\lambda I - T) = N(\lambda I - T)^p$ luego

$$\begin{aligned}(\lambda I - (T+N))^m &= (\sum_{j=0}^{m} c_{m,j}(\lambda I - T)^{m-j}N^j)(x) \\ &= \sum_{j=0}^{v-1} c_{m,j}N^j((\lambda I - T)^{p+v-j}(x)) \\ &= 0\end{aligned}$$

donde $c_{m,j}$ son los coeficientes binomiales. De aquí se tiene que

$$N(\lambda I - (T+N))^m = H_0(\lambda I - (T+N))$$

dado que, $\lambda \in iso\sigma(T+N)$ se tiene que (véase Teorema 3.76 de [1])

$$\begin{aligned}X &= H_0(\lambda I - (T+N)) \oplus K(\lambda I - (T+N)) \\ &= N(\lambda I - (T+N))^m \oplus K(\lambda I - (T+N))\end{aligned}$$

Así $(\lambda I - (T+N))^m(X)$

$$= (\lambda I - (T+N))^m(N(\lambda I - (T+N))^m) \oplus (\lambda I - (T+N))^m(K(\lambda I - (T+N)))$$

$= K(\lambda I - (T+N))$

en consecuencia, $X = Ker(\lambda I - (T+N))^m \oplus (\lambda I - (T+N))^m(X)$ lo cual implica que $p(\lambda I - (T+N)) = q(\lambda I - (T+N)) \leq m < \infty$. Así concluimos que λ es un polo del resolvente de $T+N$.

$\square$

Corolario 4.2.3. *Si $T \in L(X)$ es a-polaroide y N un operador nilpotente tal que $TN = NT$, entonces si T satisface la propiedad (w) generalizada entonces $T + N$ también la satisface.*

Un operador $T \in L(X)$, donde X es un espacio de Banach, se dice que es paranormal si

$$\|Tx\|^2 \leq \|T^2x\|\|x\| \text{se satisface para todo } x \in X.$$

Un operador $T \in L(X)$ para el cual existe un polinomio complejo no constante h tal que $h(T)$ es paranormal, se dice que es algebraicamente paranormal. Cada operador paranormal definido sobre un espacio de Hilbert satisface la $SVEP$ [25]. En consecuencia, por Teorema 2.40 de [1], cada operador algebraicamente paranormal definido sobre un espacio de Hilbert satisface la $SVEP$.
Si $H(p)$ denota la clase de todos los operadores $T \in L(X)$ tal que

$$H_0(\lambda I - T) = N(\lambda I - T)^p \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{C}.$$

La clase $H(p)$ fue introducida en [37], y en [16] se estudió esta clase de operadores en el caso particular en que $p = p(\lambda) = 1$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Cada operador escalar generalizado satisface la propiedad $H(p)$, en particular los operadores p-hyponormal, log-hyponormal y M-hyponormal definidos sobre un espacio de Hilbert, (véase [37]). La propiedad $H(p)$ es satisfecha por los multiplicadores de un algebra de Banach conmutativa semi-simple, en particular, por los operadores de convolución en algebras de grupos [16]. Cada operador $T \in H(p)$ satisface la SVEP, dado que la condición $H_0(\lambda I - T)$ cerrado implica la SVEP en λ.

Un operador $K \in L(X)$ se dice algebraico, si existe un polinomio no trivial h tal que $h(T) = 0$. Se puede observar que los operadores $K \in L(X)$ tales que K^n es de rango finito, y los operadores nilpotentes son algebraicos. Si $T \in L(H)$, con H un espacio de Hilbert, denotaremos por T' el adjunto de T.

Observación 4.2.4. *Puede verificarse con facilidad lo siguiente*

$$\sigma(T') = \overline{\sigma(T)} = \overline{\sigma(T^*)}, \qquad \sigma_{ap}(T') = \overline{\sigma_{ap}(T^*)}, \qquad \sigma_s(T') = \overline{\sigma_s(T^*)}.$$

Hemos visto (Corolario 1.4.26) que si T tiene la SVEP, entonces $\sigma(T) = \sigma_s(T)$. en consecuencia si suponemos que T tiene la SVEP obtendremos que

$$\sigma(T') = \overline{\sigma(T)} = \overline{\sigma_s(T)} = \overline{\sigma_{ap}(T^*)} = \sigma_{ap}(T')$$

En el caso en el que el operador este definido sobre un espacio de Hilbert, la condición T^* tiene la SVEP es equivalente a la condición T' tiene la SVEP, véase [2]. Si T' tiene la SVEP, también por Corolario 1.4.26 se tiene que $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T)$.

Es de interés estudiar cuando la propiedad (gw) se preserva bajo perturbaciones por operadores algebraicos que conmuten. Los siguientes teoremas mejoran los resultados del Teorema 2.15 y del Teorema 2.16 de [11].

Teorema 4.2.5. *Supongamos que $T \in L(H)$, H un espacio de Hilbert y K un operador algebraico tal que $TK = KT$.*

(i) Si T es algebraicamente paranormal, entonces la propiedad (gw) se satisface para $T' + K'$

(ii) Si T' es algebraicamente paranormal, entonces la propiedad (gw) se satisface para $T + K$.

Demostración. (i) Si T es algebraicamente paranormal, entonces por la parte (ii) del Teorema 2.14 de [11] se tiene que $T + K$ es polaroide, y en consecuencia, véase Teorema 2.5 de [11], $T' + K'$ es también polaroide. Dado que T tiene la SVEP, por ser un operador algebraicamente paranormal definido sobre un espacio de Hilbert, entonces de la parte (i) del Teorema 2.14 de [11] se tiene que $T + K$ tiene la SVEP.

Luego de la Observación 4.2.4 sigue que $\sigma(T' + K') = \sigma_{ap}(T' + K')$, lo cual implica que $T' + K'$ es a-polaroide. El Teorema 2.15 de [11] garantiza que $T' + K'$ satisface la propiedad (w) y, dado que $T' + K'$ es a-polaroide, por Corolario 4.1.20 esto es equivalente a decir que $T' + K'$ satisface la propiedad (gw).

(ii) El argumento es similar. Si T' es algebraicamente paranormal, entonces por la parte (ii) del Teorema 2.14 de [11] $T' + K'$ es polaroide, en consecuencia del Teorema 2.5 de [11] se tiene que $T + K$ es polaroide. Dado que T' tiene la SVEP, entonces $T' + K'$ también tiene la SVEP, luego de la Observación 4.2.4 sigue que $\sigma(T + K) = \sigma_{ap}(T + K)$, esto implica que $T + K$ es a-polaroide. El Teorema 2.15 de [11] garantiza que $T + K$ satisface la propiedad (w) y, dado que $T + K$ es a-polaroide, por Corolario 4.1.20 esto es equivalente a decir que $T + K$ satisface la propiedad (gw).

□

Teorema 4.2.6. *Supongamos que $T \in L(X)$ y K un operador algebraico tal que $TK = KT$.*

(i) Si $T \in H(p)$ entonces la propiedad (gw) se satisface para $T' + K'$.

Demostración. (i) Si $T \in H(p)$ entonces de la parte (ii) del Teorema 2.14 de [11] sigue que $T + K$ es polaroide, y en consecuencia, véase Teorema 2.5 de [11], $T' + K'$ es también polaroide. Dado que T tiene la SVEP, sigue de la parte (i) del Teorema 2.14 de [11] que $T + K$ tiene la SVEP. Esto implica, por Corolario 1.4.26, que

$$\sigma(T + K) = \sigma_{ap}(T + K) = \sigma_{ap}(T' + K').$$

lo cual implica que $T' + K'$ es a-polaroide. El Teorema 2.16 de [11], garantiza que $T' + K'$ satisface la propiedad (w) y, dado que $T' + K'$ es a-polaroide, por Corolario 4.1.20 esto es equivalente a decir que $T' + K'$ satisface la propiedad (gw).

□

Bibliografía

[1] P. Aiena *Fredholm and Local Spectral Theory, with Application to Multipliers.* Kluwer Acad. Publishers (2004).

[2] P. Aiena *Classes of Opertor Satisfying a-Weyl's theorem,* Studia Math., 169 (2005), 105-122.

[3] P. Aiena *Quasi-Fredholm operators and localized SVEP,* Acta Sci. Math. (Szeged), 73 (2007), 251-263.

[4] P. Aiena *Property (w) and perturbations II,* J. Math. Anal. Appl, 342 (2008), 830-837.

[5] P. Aiena y M. T. Biondi *Property (w) and perturbations,* J. Math. Anal. Appl, 336 (2007), 683-692.

[6] P. Aiena, M. T. Biondi y C. Carpintero *On Drazin invertibility,* Proc. Amer. Math. Soc., 136 (2008), 2839-2848.

[7] P. Aiena, M. T. Biondi y F. Villafañe *Property (w) and perturbations III,* J. Math. Anal. Appl, 353 (2009), 205-214.

[8] P. Aiena y C. Carpintero *Single valued extension property and semi-Browder spectra,* Acta Sci. Math. (Szeged), 20 (2003), 1027-1040.

[9] P. Aiena y O. García *Generalized Browder's theorem and SVEP,* Mediterranean J. Math., 4 (2007), 215-228.

[10] P. Aiena y O. García *Property (w) under compact or Riesz commuting perturbations,* Acta Sci. Math. (Szeged), 76 (2010), 135-153.

[11] P. Aiena, J. Guillen y P. Peña *Property (w) for perturbations of polaroid operators,* Linear Algebra and ist Appl., 428 (2008), 1791-1802.

[12] P. Aiena y T. L. Miller *On generalized a-Browder's theorem,* Studia Math., 180 (2007), 285-300.

[13] P. Aiena y O. Monsalve *The single valued extension property and the generalized Kato decomposition property,* Acta Sci. Math. (Szeged), 67 (2001), 461-477.

[14] P. Aiena y P. Peña *A variation on Weyl's theorem,* J. Math. Anal. Appl, 324 (2006), 566-579.

[15] P. Aiena y E. Rosas *The single valued extension property at the points of the approximate point spectrum,* J. Math. Anal. Appl, 279 (2003), 180-188.

[16] P. Aiena y F. Villafeñe *Weyl's theorem for some classes of operators,* Int. Equa. Oper. Theory, 53 (2005), 453-466.

[17] M. Amouch y M. Berkani *On the property (gw),* Mediterranean J. Math., 5 (2008), 371-378.

[18] M. Amouch y H. Zuguitti *On the equivalence of Browder's and generalized Browder's theorem,* Glasgow Math. J., 48 (2006), 179-185.

[19] M. Berkani *On class quasi-Fredholm operators,* Int. Equa. Oper. Theory, 34 (1999), 244-249.

[20] M. Berkani *Restriction of an operator to the range of its powers,* Studia Math., 140 (2000), 163-175.

[21] M. Berkani *Index of B-Fredholm operators and generalization of a-Weyl's theorem,* Proc. Amer. Math. Soc., 130 (2001), 1717-1723.

[22] M. Berkani y M. Sarih *On semi B-Fredholm operators,* Glasgow Math. J., 43 (2001), 457-465.

[23] M. Berkani y A. Ouahab *Théorème de l'application spectrale pour le spectre assentiel quasi-Fredholm,Weyl type theorems for bounded linear operators,* Proc. Amer. Math. Soc., 125 (1997), 763-774.

[24] C. Carpintero, O. García, E. Rosas y J. Sanabria *B-Browder Spectra an Localized SVEP,* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 57 (2008), 241-255.

[25] N. N. Chourasia and P. B Ramanujan *Paranormal operators on Banach spaces,* Bll. Austral. Math. Soc., 21 (1980), 161-168.

[26] L. A. Coburn *Weyl's theorem for nonnormal operators,* Michigan Math. J., 20 (1970), 529-544.

[27] J. K. Finch. *The single valued extension property on a Banach space,* Pacific J. Math., 279 (1975), 61-69.

[28] S. Grabiner. *Uniform ascent and descent of bounded operators,* J. Math. Soc. Japan, 34 (1982), N^0 2, 317-337.

[29] R. E. Harte. *Ïnertibility and Singularity for Bounded Linear Operators",* Wiley, New York, 1988.

[30] R. E. Harte y W.Y Lee. *Another note on Weyl's theorem,* Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), N^0 1, 2115-2224.

[31] H. Heuser. *"Functional Analysis",* Marcel Dekker, New York, 1982.

[32] T. Kato. *Pertubation theory for linear operators,* Springer-Verlag, New York, 1966.

[33] V. Müller. *On the Kato Descomposition of Quasi-Fredholm and B-Fredholm Operators,* Preprint ESI 1013, Viena, (2001).

[34] V. Müller. *"Spectra Theory of Linear Operators and Spectral Systems in Banach Algebras",* Birkhäuser Verlag, Berlin, 2003.

[35] K. B. Laursen y M. M. Neuman *Introdution to local spectral theory,* Clarendon Press, Oxfor, 2000.

[36] J. P. Labrousse. *Les Operateurs quasi Fredholm: une generalization des operateurs semi Fredholm,* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 29 (1980), 161-258.

[37] M. Oudghiri *Weyl's and Browder's theorem for operators satysfysing the SVEP,* Studia Math., 163 (2004), 85-101.

[38] M. Oudghiri *Weyl's theorem and perturbations,* Int. Equa. Oper. Theory, 53 (2005), 535-545.

[39] V. Rakočević. *On a class of operators,* Math. Vesnik, 37 (1985), 423-426.

[40] V. Rakočević. *Operators obeying a-Weyl's theorem,* Rev. Roumaine Math. Pures Appl, 34 (1989), N^0 10, 915-919.

[41] V. Rakočević. *Semi-Fredholm operators with finite ascent or descent and perturbations,* Pro. Amer. Math. Soc., 123 (1995), 3823-3825.

[42] V. Rakočević. *Semi-Browder operators and perturbations,* Studia Math., 122 (1996), 131-137.

[43] H. Weyl *Uber beschrankle quadraliche Formen, deren Differenz vollsteig ist,* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 27 (1909), 373-92.

[44] H. Schechter y R. Whitley *Best Fredholm perturbation theorem,* Studia Math., 90 (1988), 175-190.