

SISTEMAS DE PUESTA A TIERRA

PARTE 3

Napoleón Malpica Albert

Marzo 2022

Contenido

PARTE 3.....	1
1. Introducción.....	4
2. Ecuaciones de Maxwell para el campo eléctrico estacionario y su solución mediante funciones de Green.....	6
3. Función de Green para un medio infinito formado por dos estratos.....	9
4. Cálculo del potencial de cualquier punto del suelo debido a electrodos cilíndricos cargados.....	11
5. Cálculo de las resistencias propias y mutuas en barras, para suelo homogéneo.....	23
5.1 Resistencia propia de una barra.....	23
a. Resistencia propia de una barra. Cálculo simbólico.....	23
b. Resistencia propia de una barra. Cálculo numérico.....	26
5.2 Resistencia mutua entre barras.....	27
a. Resistencia mutua entre barras. Cálculo simbólico.....	27
b. Resistencia mutua entre barras. Cálculo numérico.....	29
6. Cálculo de las resistencias propias y mutuas en contrapesos, para suelo homogéneo.....	31
6.1 Resistencia propia de un contrapeso.....	31
a. Resistencia propia de un contrapeso. Cálculo simbólico.....	31
b. Resistencia propia de un contrapeso. Cálculo numérico.....	33
6.2 Resistencia mutua entre contrapesos.....	33
A Anexo A.....	35
• Cálculo numérico de la resistencia propia de una barra para suelo homogéneo.....	35
Cálculo usando MathLab.....	35
Cálculo usando MathCad.....	37
B Anexo B.....	38
• Cálculo numérico de la resistencia mutua entre barras para suelo homogéneo.....	38
Cálculo usando MathLab.....	38
Cálculo usando MathCad.....	39
C Anexo C.....	40
• Cálculo numérico de la resistencia propia de una barra instalada inclinada en el suelo.....	40
Cálculo usando MathLab.....	40
Cálculo usando MathCad.....	42
D Anexo D.....	44
• Cálculo numérico de la resistencia propia de un contrapeso.....	44
Cálculo usando MathLab.....	44
Cálculo usando MathCad.....	45

E	Anexo E.....	47
	• Resistencia mutua entre contrapesos donde ambos se encuentran paralelos al eje x..	47
	Cálculo usando MathLab:.....	47
	Cálculo usando MathCad.	48
	• Resistencia mutua entre contrapesos donde ambos se encuentran paralelos al eje y..	49
	Cálculo usando MathLab:.....	49
	Cálculo usando MathCad:	51
	• Resistencia mutua entre contrapesos donde ambos se encuentran formando un ángulo de 90 grados.....	52
	Cálculo usando MathLab:.....	52
	Cálculo usando MathCad:	53
	• Resistencia mutua entre contrapesos donde ambos se encuentran formando un ángulo cualquiera.....	54
	Cálculo usando MathLab:.....	54
	Cálculo usando MathCad:	56
F	Anexo F.....	58
	• Calculo numérico de la resistencia mutua entre un contrapeso y una barra.....	58
	Cálculo usando MathLab.....	58
	Cálculo usando MathCad	59

Napoleón Malpica A.

SISTEMAS DE PUESTA A TIERRA

TERCERA PARTE

1. Introducción.

Esta tercera parte de los apuntes sobre puesta a tierra, está enfocado tanto al cálculo de la resistencia de puesta a tierra de un electrodo o de un conjunto de electrodos, que conforman un sistema de puesta a tierra, como la obtención de las curvas equipotenciales del suelo, a partir de la solución de la ecuación de Laplace o de Poisson para el potencial escalar eléctrico V .

Haciendo un recuento de los contenidos en estos apuntes, la primera parte del curso (Sistemas de puesta a tierra. Parte 1), trata brevemente sobre los fundamentos de un sistema de puesta a tierra, teniendo como punto de partida las ecuaciones de Maxwell y como electrodo se emplea una semiesfera, enterrada al ras de suelo, que defino como el **electrodo académico** por la gran facilidad en realizar cálculos y la de explicar con simplicidad los conceptos básicos relacionados con la puesta a tierra.

En la segunda parte de los apuntes (Sistemas de puesta a tierra. Parte 2), ya no se utiliza el electrodo académico y en su lugar se trabaja con electrodos cilíndricos como barras y contrapesos, que son los electrodos que comúnmente se utilizan en los sistemas de puesta a tierra. En el documento se presentan una gran cantidad de fórmulas para calcular la resistencia de puesta a tierra, sin deducir como se obtuvieron las mismas. Muchas de las fórmulas fueron tomadas de recomendaciones como la IEEE Std 80, concebida para el diseño de mallas de puesta a tierra en subestaciones eléctricas, y la recomendación IEEE Std 142 conocido como el libro verde, que es aplicable para el diseño de mallas de puesta a tierra para infraestructuras de uso comercial e industrial y también se hace una discusión sobre el artículo 250 del Código Eléctrico Nacional, que es el artículo dedicado al diseño de mallas de puesta a tierra para infraestructuras que son alimentadas en baja tensión (menos de 1000V). Otro aspecto que se contempla en la segunda parte de los apuntes es el tratamiento del suelo, para el caso que el mismo tenga una alta resistividad y no se logre el valor de resistencia requerido.

Con los contenidos dados en las dos primeras partes de curso y con la información brindada por las recomendaciones y normas que sean aplicable a los sistemas de puestas a tierra, se espera que el lector cuente con la suficiente información y adquiera la destreza para comenzar hacer diseños de redes de puestas a tierra en infraestructuras como viviendas, industrias, comercios, subestaciones eléctricas, etc..

Entonces, ¿Qué objetivo se persigue con esta tercera parte del curso? Se trata de un curso avanzado sobre puesta a tierra, donde se espera que el lector pueda, por un lado, deducir fórmulas analíticas para calcular la resistencia de puesta a tierra con electrodos cilíndricos, también se busca que pueda calcular resistencias propias y mutuas pero numéricamente, utilizando una herramienta de cálculo como Scilab™ MathLab™ o MathCad™ o cualquier otra herramienta de cálculo matemático provista de rutinas para realizar la integración numérica de funciones.

Con este curso, se espera que el lector, si sabe utilizar alguna herramienta de cálculo matemático como MathLab, MatCad, Mathematica, etc. , pueda elaborar sus propias herramientas de cálculo.

La metodología para esta tercera parte de curso fue hecha con base a un método de integración para resolver la ecuación de Laplace o de Poisson para el potencial escalar eléctrico V , mediante el uso de las funciones de Green. Las aproximaciones obtenidas con esta metodología son mejores en comparación con algunos métodos empíricos explicados en la recomendación Std. 80, como el método de Sverak y el método de Schwarz. Por otra parte, también se espera que el lector, sea también capaz de obtener las líneas equipotenciales del suelo, con el uso apropiado de las funciones de Green.

Es conveniente decir que la metodología de cálculo explicada en este curso, donde se emplean las funciones de Green, permiten tomar en cuenta la no homogeneidad del suelo, como suele suceder en la realidad; por lo general, se considera que el suelo está formado por estratos o capas donde la resistividad de cada capa se considera constante, en estos casos, la resistencia de los electrodos y los potenciales en la superficie de suelo, se pueden calcular tomando en cuenta los estratos del suelo, usando la apropiada función de Green, con esto se logra una mejor aproximación de los resultados. Muchos de los programas comerciales para cálculo de sistemas de puestas a tierra, operan con base a esta metodología. En otros apuntes se abordará el tema sobre las funciones de Green para el caso que se quiera modelar el suelo por más de un estrato.

Napoleón Matemática

2. Ecuaciones de Maxwell para el campo eléctrico estacionario y su solución mediante funciones de Green.

Para calcular la resistencia de puesta a tierra y los potenciales que adquiere la superficie del suelo, es suficiente con asumir un régimen estacionario del campo electromagnético, así sea para modelar eventos transitorios como las descargas atmosféricas, por tal motivo, la gran mayoría de las publicaciones sobre puesta a tierra asumen, para el cálculo, un régimen estacionario del campo electromagnético.

Las ecuaciones diferenciales referente al campo eléctrico \mathbf{E} , asumiendo un régimen estacionario, son las siguientes:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho e}{\epsilon} \quad (2-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2-2)$$

donde ρe es la densidad volumétrica de carga y ϵ es la permitividad del medio.

Con las ecuaciones de la divergencia (2-1), el rotacional dado por (2-2) y las condiciones de frontera, el vector campo eléctrico \mathbf{E} tiene una única solución.

Como el rotor del campo eléctrico es nulo en (2-2), el campo eléctrico \mathbf{E} se puede obtener como el gradiente de una función escalar V :

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (2-3)$$

donde V es el potencial escalar eléctrico que adquiere cualquier punto del espacio a causa de la densidad volumétrica de carga ρe .

Al sustituir (2-3) en (2-1), se obtiene la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho e}{\epsilon} \quad (2-4)$$

La ecuación anterior representa una ecuación diferencial en derivadas parciales, que se puede resolver por un método de integración con el empleo de las funciones de Green (segunda identidad de Green).

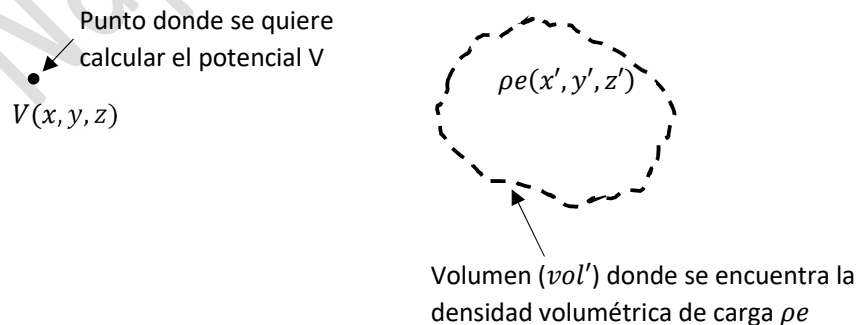


Fig. 1 Densidad volumétrica de carga en un espacio de dimensiones infinita y punto de coordenadas (x, y, z) donde se quiere calcular el potencial V .

En cuanto al método de integración, la Figura 1 muestra un medio homogéneo e infinito, donde se quiere calcular el potencial escalar eléctrico V en un punto del espacio que tiene coordenadas (x, y, z) .

El potencial escalar V en el punto (x, y, z) se puede calcular con la ecuación siguiente:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\epsilon} \int f_{Green}(x, y, z, x', y', z') \rho_e(x', y', z') d vol' \quad (2-5)$$

donde:

$f_{Green}(x, y, z, x', y', z')$	Es la función de Green.
(x, y, z)	Son las coordenadas donde se quiere calcular el potencial.
(x', y', z')	Son las coordenadas donde se encuentra la densidad volumétrica de carga.
vol'	Es el volumen donde se encuentra la densidad volumétrica de carga (ver la Figura 1).
$d vol'$	Es un diferencial de volumen.
$\rho_e(x', y', z')$	Es la densidad volumétrica de carga.

La función de Green no es única, ella depende del medio, por ejemplo, si el medio es completamente homogéneo e infinito, la función de Green es diferente a la función de Green correspondiente a un medio infinito formado por dos estratos (aire – tierra). En los capítulos siguientes se abarcará este tema.

¿Cómo se puede obtener la función de Green para resolver (2-4)?

Lo que hay que hacer es extraer la función de Green, de la expresión analítica para calcular el potencial escalar V , en un medio infinito, creado por una única carga puntual, como se muestra en la Figura 2, cuya solución aparece en numerosos textos de física.

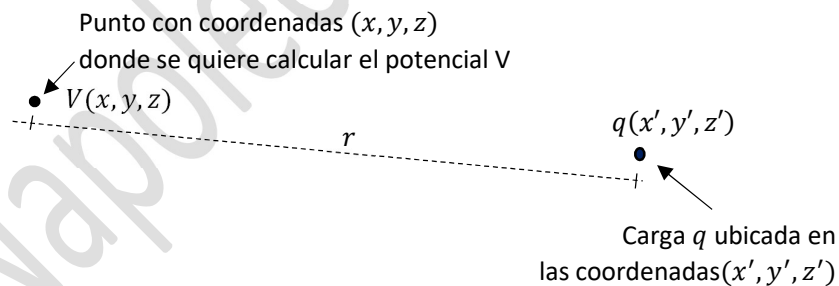


Fig. 2 Potencial V en un punto (x, y, z) del espacio debido a una carga puntual q , en un medio infinito y homogéneo.

El potencial creado por la carga puntual, mostrada en la Fig. 2, vendrá dado por:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4 \pi \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \frac{q(x', y', z')}{\epsilon} \quad (2-6)$$

La ecuación anterior se puede escribir más simple:

$$V(x, y, z) = f_{Green}(x, y, z, x', y', z') \frac{q(x', y', z')}{\epsilon} \quad (2-7)$$

donde la función de Green para un medio infinito y homogéneo vendrá dada por:

$$f_{Green}(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} \quad (2-8)$$

Entonces, si el medio es infinito y homogéneo, la solución de la ecuación de Poisson (2-4), para el potencial, se obtiene al sustituir (2-8) en (2-5):

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\epsilon} \int \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} \rho e(x', y', z') d vol' \quad (2-9)$$

Por otra parte, si el potencial es conocido, el campo eléctrico \mathbf{E} , en el punto de coordenadas (x, y, z) , se obtiene con la ecuación (2-3) y (2-9).

Napoleón Malpica A.

3. Función de Green para un medio infinito formado por dos estratos.

Para el cálculo de la resistencia de los electrodos de puesta a tierra y de los potenciales en el suelo, se considera que el medio está formada por dos capas o estratos, una capa es el aire y la otra capa es la tierra o el suelo, en la Figura 3 se muestra una carga puntual situada en el seno de la tierra, donde el medio está formado por dos estratos, también se muestra las líneas del campo y el vector campo eléctrico E que produce dicha carga.

En el capítulo anterior se dedujo la función de Green para calcular el potencial en un medio homogéneo e infinito. En el caso de tener un medio infinito formado por dos estratos, se puede recurrir al método de las imágenes.

Para calcular el potencial eléctrico en cualquier punto del suelo, debido a una carga puntual, aplicando el método de las imágenes, éste consiste en unificar el medio, se asume que todo el medio es homogéneo, todo es tierra, ya no se tiene dos estratos y en el volumen donde se encontraba el aire se coloca una carga imagen de la carga puntual, donde el plano de la tierra se comporta como si fuera un espejo.

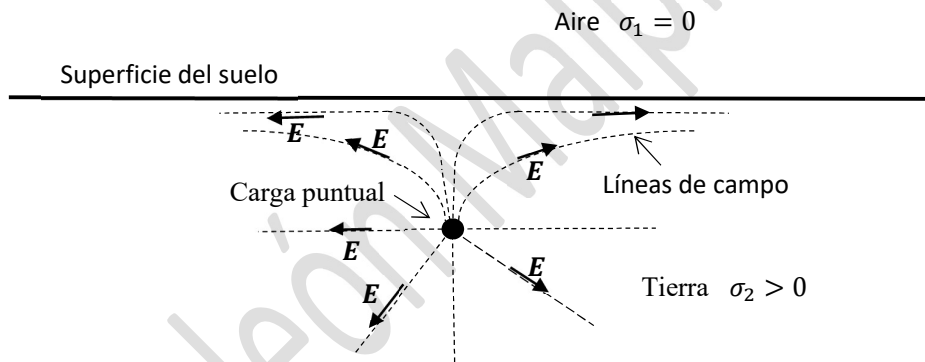


Fig. 3 Líneas de campo y vector campo eléctrico, producido por una carga puntual, ubicada en el seno de la tierra, donde el medio está formado por dos estratos (aire – tierra).

La Figura 4 muestra la aplicación del método de las imágenes, donde el problema presentado en la Figura 3, se transforma ahora en tener un medio homogéneo e infinito, pero en lugar de tener una sola carga puntual, se tienen dos cargas puntuales, con cargas iguales; de esta forma, la función de Green (2-8) deducida para medios homogéneos sigue siendo válida en este caso.

Al aplicar la ecuación (2-6) a las dos cargas de la Figura 4, se obtiene el potencial:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right) \frac{q(x', y', z')}{\epsilon} \quad (3-1)$$

Nótese de la figura 4, que por ser una carga imagen de la otra, una de ellas tiene coordenadas $+z'$ y la otra $-z'$, donde la coordenada $z' = 0$ corresponde siempre al plano de la tierra o la superficie del suelo o al espejo.

De la ecuación anterior, se extrae la función de Green para medios infinitos formados por dos estratos:

$$fGreen^{2est}(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right) \quad (3-2)$$

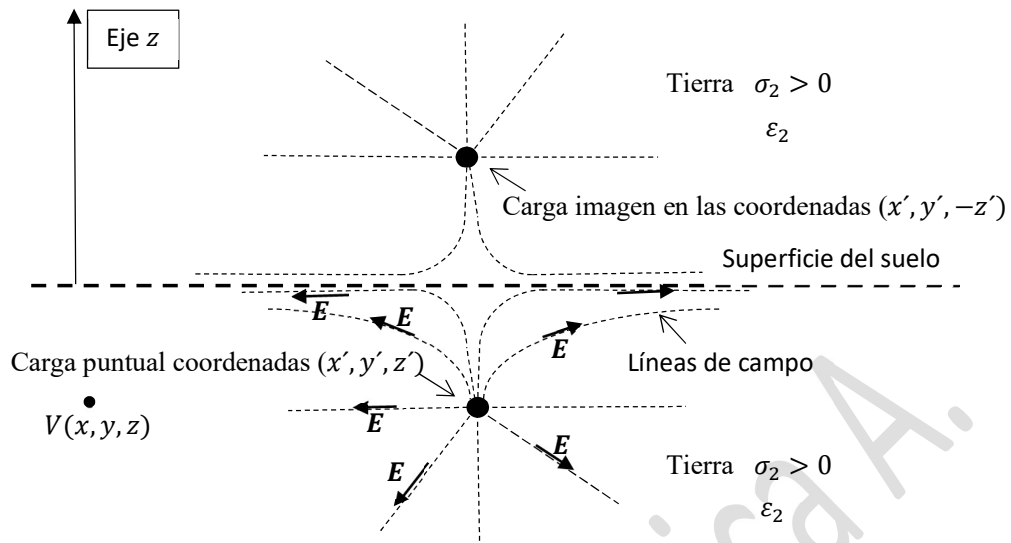


Fig. 4 Aplicación del método de las imágenes para una carga puntual situada en un medio biestratificado.

La función de Green anterior es válida solamente para calcular el potencial en cualquier punto del suelo ($z \leq 0$), la función no es válida o no puede ser usada si el punto donde se quiere calcular el potencial se encuentra en el aire. Para saber si un punto se encuentra en la tierra o en el aire, se evalúa la coordenada z ; si $z > 0$, el punto se encuentra en el aire; si $z < 0$, el punto se encuentra en la tierra; si $z = 0$ el punto pertenece a la superficie del suelo.

4. Cálculo del potencial de cualquier punto del suelo debido a electrodos cilíndricos cargados.

La Figura 5 muestra un electrodo enterrado en el suelo, situado paralelo al eje x, por lo general cuando se trata de electrodos cilíndricos, la longitud del electrodo es mucho mayor que el radio del mismo, entonces se puede asumir que en lugar de tener una densidad volumétrica de carga ρ_e , se tiene una densidad lineal de carga λ ; entonces para calcular el potencial en cualquier punto del suelo, la integral de volumen dada por (2-5) se puede convertir en una integral de línea:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\epsilon} \int fGreen^{2est}(x, y, z, x', y', z') \lambda(x', y', z') dl' \quad (4-1)$$

donde:

dl' Es un diferencial de longitud.
 $fGreen^{2est}(x, y, z, x', y', z')$ Es la función de Green para dos estratos (3-2).
 $\lambda(x', y', z')$ Es la densidad lineal de carga ubicada a lo largo del electrodo, con coordenadas (x', y', z') .

Nótese de la ecuación (4-1) que $(\lambda(x', y', z') dl')$ es una carga puntual ubicada en las coordenadas (x', y', z') .

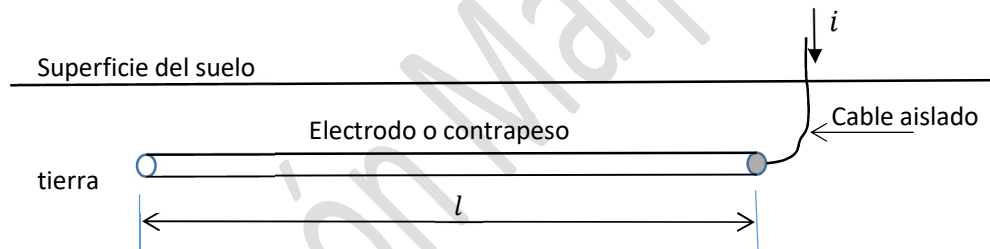


Fig. 5 Electrodo enterrado en el suelo.

Pero en sistemas de puesta a tierra, no se tiene mucho interés en trabajar con las cargas que tienen los electrodos, sino con la corriente que drena a tierra los mismos. A continuación se establece una relación entre la carga de los electrodos y la corriente que drena hacia la tierra el electrodo cargado en contacto con el suelo.

Para encontrar una relación entre la carga de un electrodo y la corriente que el electrodo drena a tierra, la misma se obtendrá con una esfera cargada que se encuentra en un medio conductor, como sucede con la tierra, y que se muestra en la Figura 6.

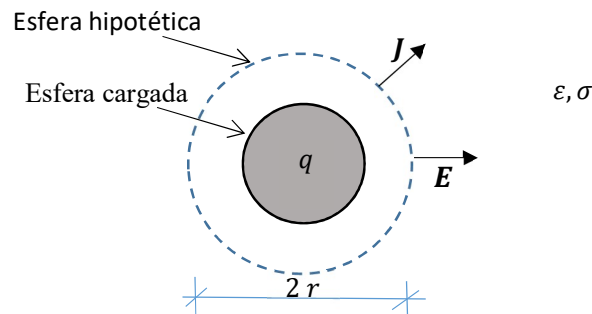


Fig. 6 Esfera cargada en un medio conductor como la tierra.

El vector campo eléctrico, que muestra en la Figura 6, se obtiene con la ley de Gauss, aplicada a una esfera hipotética que se muestra en la misma figura:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{a}_r \quad (4-2)$$

donde r es el radio de la esfera hipotética:

Si la conductividad del medio σ no es nula, entonces además del campo eléctrico estará también presente, en el medio, el vector densidad de corriente \mathbf{J} :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (4-3)$$

Al sustituir (4-2) en (4-3) se obtiene el vector densidad de corriente:

$$\mathbf{J} = \frac{\sigma q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{a}_r \quad (4-4)$$

donde \mathbf{a}_r es un vector unitario, en dirección del radio, en coordenadas esféricas y r es el radio de la esfera hipotética.

Si la densidad de corriente es conocida, la corriente que sale del electrodo se puede calcular integrando el vector densidad de corriente en toda la superficie de la esfera hipotética:

$$i = \int \frac{\sigma q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{n} ds \quad (4-5)$$

donde \mathbf{n} es un vector normal a la superficie de la esfera hipotética y ds es un diferencial de superficie.

Al resolver la integral en la ecuación anterior, se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{q}{\epsilon} = \frac{i}{\sigma} \quad (4-6)$$

que es la relación entre la carga de un electrodo y la corriente que el mismo drena a tierra.

Al usar la relación anterior en la ecuación (4-1), se obtiene el potencial V de un punto del suelo con coordenadas (x, y, z) debido a un electrodo cilíndrico

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\sigma} \int fGreen^{2est}(x, y, z, x', y', z') i'(l') dl' \quad (4-7)$$

donde:

$i'(l')$ Es la densidad de corriente que drena a tierra el electrodo por unidad de longitud (A/m).

dl' Es un diferencial de longitud (m).

Pero el problema que presenta la ecuación (4-7) es que la densidad de corriente que drena a tierra el electrodo por unidad de longitud $i'(l')$ es una función que depende de la posición en el electrodo y esta función es desconocida, para solventar de alguna forma este problema, se realiza una aproximación que consiste en asumir que la densidad de corriente no depende de la posición l' dentro del electrodo y por lo tanto es una constante.

La Figura 5 muestra un electrodo de longitud l que se encuentra enterrado horizontalmente, el electrodo se encuentra drenando a la tierra una corriente i como se aprecia en la figura, para este electrodo, la densidad de corriente $i'(l')$ se puede aproximar a una constante como se indica a continuación:

$$i'(l') \approx \frac{i}{l} \quad (4-8)$$

donde i es la corriente que drena a tierra el electrodo y l su longitud.

Al sustituir (4-8) en (4-7), la expresión para calcular el potencial queda de esta forma:

$$V(x, y, z) = \frac{i}{\sigma l} \int f_{Green}^{2est}(x, y, z, x', y', z') dl' \quad (4-9)$$

Nótese en la ecuación, que la densidad de corriente salió de la integral, ya que es una constante, entonces para calcular el potencial en cualquier punto del suelo, lo que hay que hacer es integrar solamente la función de Green, a continuación se presenta un ejemplo de cómo utilizar la ecuación anterior.

Problema 1

Se tiene un electrodo enterrado horizontalmente, a 60 cm de la superficie del suelo, situado paralelo al eje x , las Figuras 7 y 8 muestran detalles de su ubicación.

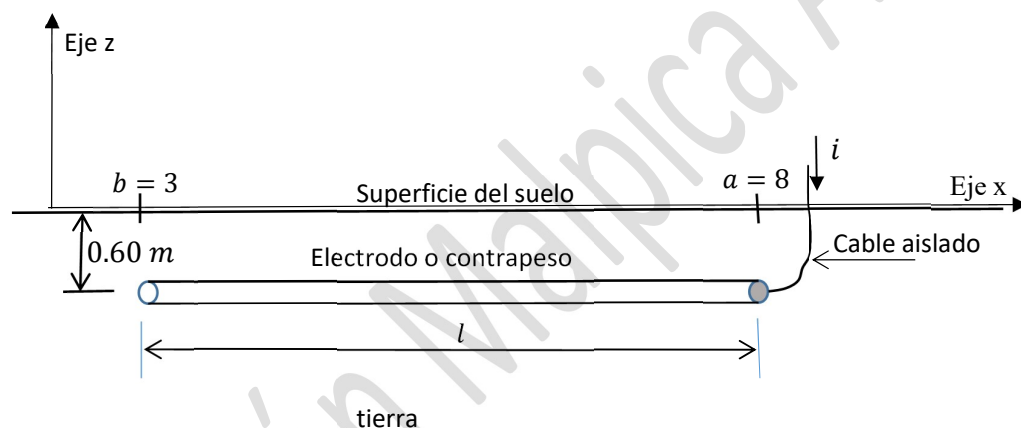


Fig. 7 Figura en elevación de un contrapeso enterrado

Si el suelo tiene una resistividad de $100 (\Omega m)$, determine las curvas equipotenciales para la superficie del suelo. Para el cálculo asuma que el electrodo tiene una longitud de 5 m y la corriente inyectada por el suelo es de 500A.

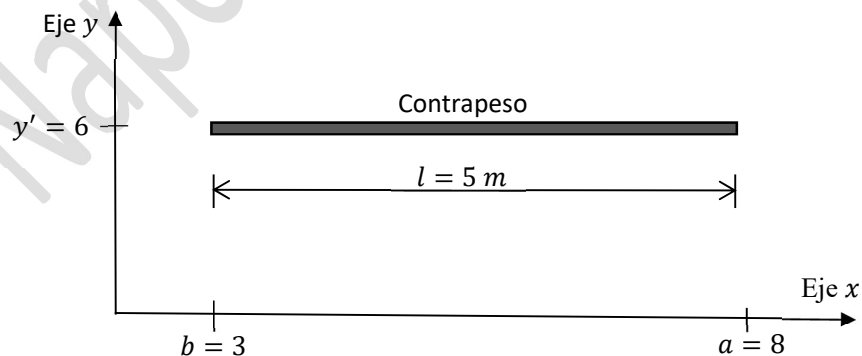


Fig. 8 Contrapeso enterrado en el suelo, figura en planta.

Para calcular el potencial en la superficie del suelo, primero hay que establecer las coordenadas del electrodo. Para ubicar el electrodo, se deben emplear las coordenadas primadas, ya que el electrodo al drenar corriente a tierra es porque se encuentra cargado, y las cargas se ubican empleando las coordenadas primadas.

Coordenadas del electrodo de acuerdo a las figuras 7 y 8 (coordenadas primadas):

$$y' = 6 \text{ (m)}$$

$$z' = -0.6 \text{ (m)}$$

$$a = 8 \text{ (m)}$$

$$b = 3 \text{ (m)}$$

Nota: a y b es el rango en que varía la coordenada x' .

$l = |a - b| = 5 \text{ (m)}$ longitud del electrodo.

Otros datos:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{100} = 0.01 \text{ (S/m)}$$
 Conductividad del suelo.

$i = 500 \text{ (A)}$ Corriente inyectada a tierra por el electrodo.

Al sustituir (3-2) en (4-9), se obtiene la expresión para calcular el potencial en cualquier punto de la tierra:

$$V(x, y, z) = \frac{i}{\sigma l} \int_b^a \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right) dx' \quad (4-10)$$

nótese que la integración se realiza en dirección del eje x' , ya que el electrodo se encuentra paralelo al eje x .

Si se quiere calcular solamente los potenciales en el plano de la tierra o en la superficie del suelo, entonces se asigna a la variable z el valor ($z = 0$) ya que todos los puntos que se encuentran en la superficie del suelo tienen esta coordenada:

$$V(x, y) = \frac{i}{\sigma l} \int_b^a \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z')^2}} \right) dx' \quad (4-11)$$

nótese de la ecuación anterior que para calcular el potencial en la superficie del suelo, si $z = 0$, la función del potencial sólo depende ahora de dos variables.

La integral en la fórmula anterior se puede resolver analíticamente:

$$V(x, y) = \frac{i}{2\pi\sigma l} \ln \left(\frac{\sqrt{(x-a)^2 + (y-y')^2 + (z')^2} - (x-a)}{\sqrt{(x-b)^2 + (y-y')^2 + (z')^2} - (x-b)} \right) \quad (4-12)$$

Al sustituir, en la ecuación anterior, los datos sobre las coordenadas del electrodo, se obtiene finalmente la expresión del potencial sobre la superficie del suelo:

$$V(x, y) = \frac{i}{2\pi \cdot 0.01 \cdot 5} \ln \left(\frac{\sqrt{(x-8)^2 + (y-6)^2 + (-0.6)^2} - (x-8)}{\sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2 + (-0.6)^2} - (x-3)} \right) \quad (4-13)$$

Con la ecuación anterior, se obtienen las líneas equipotenciales sobre la superficie del suelo con la ayuda de algún programa que permita realizar gráficas.

Otra forma de obtener las líneas equipotenciales es mediante el uso de una herramienta de cálculo matemático, que resuelva numéricamente la función (4-9), teniendo en cuenta que $z = 0$:

$$V(x, y) = \frac{i}{\sigma l} \int_b^a f_{Green}^{2est}(x, y, 0, x', y', z') dx' \quad (4-14)$$

donde: $y' = 6, z' = -0.6, a = 8, b = 3$, según las Figuras 7 y 8.

La Figura 9 muestra las curvas equipotenciales, obtenidas con la integración numérica de la ecuación anterior, empleando el software MathCad.

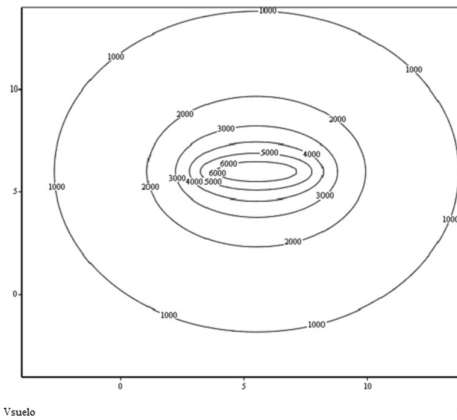


Fig 9 Curvas equipotenciales para la superficie del suelo (V), para un contrapeso.
Nota: Las unidades de los ejes de coordenadas están en metro

A continuación se presenta otro ejemplo del uso de la ecuación (4-9) para un contrapeso que se encuentra ahora paralelo al eje y .

Problema 2

Calcular nuevamente el potencial en la superficie del suelo, debido a un contrapeso, que se encuentra paralelo al eje y , tal como se muestra en la Figura 10, enterrado a una profundidad de 60 cm, la conductividad del suelo es de 0.01 (S/m)

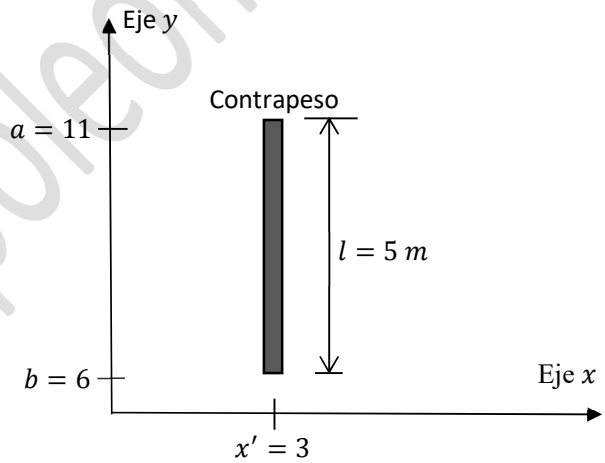


Fig. 10 Contrapeso ubicado paralelo al eje y .

Primero, se determinan las coordenadas del electrodo, con las coordenadas primadas:

$$x' = 3$$

$$z' = -0.6$$

Rango en que varía la coordenada y' :

$$a = 11.$$

$$b = 6$$

Longitud del electrodo

$$l = |a - b| = 5 \text{ (m) longitud del electrodo.}$$

Para el cálculo se usa la ecuación (4-9), donde el diferencial de longitud debe ser dy' , por estar el electrodo paralelo al eje y .

$$V(x, y, z) = \frac{i}{\sigma l} \int fGreen^{2est}(x, y, z, x', y', z') dy' \quad (4-15)$$

Para calcular el potencial en la superficie del suelo, la variable z toma el valor ($z = 0$). Al sustituir (3-2) en la ecuación anterior se obtiene lo siguiente:

$$V(x, y) = \frac{i}{\sigma l} \int_b^a \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z')^2}} \right) dy' \quad (4-16)$$

Y al resolver analíticamente la integral, se obtiene la solución para calcular el potencial en cualquier punto del suelo para un contrapeso situado paralelo al eje y :

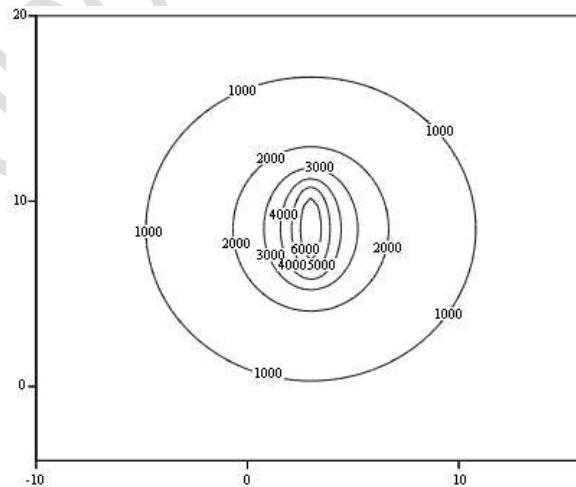
$$V(x, y) = \frac{i}{2\pi\sigma l} \ln \left(\frac{\sqrt{(x-x')^2 + (y-a)^2 + (z')^2} - (y-a)}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-b)^2 + (z')^2} - (y-b)} \right) \quad (4-17)$$

donde x', z', a y b se obtienen de las coordenadas del electrodo.

La ecuación anterior se puede graficar con alguna herramienta de cálculo matemático.

Otra forma de obtener el potencial del suelo consiste en resolver numéricamente la ecuación (4-15) evaluada para $z = 0$:

$$V(x, y) = \frac{i}{\sigma l} \int_b^a fGreen^{2est}(x, y, 0, x', y', z') dy' \quad (4-18)$$



Vsuelo2

Fig. 11 Líneas equipotenciales para un contrapeso enterrado paralelo al eje y .

La Figura 11 muestra las líneas equipotenciales para el contrapeso ubicado paralelo al eje y que se muestra en la Figura 10, obtenidas con la integración numérica de (4-18), empleando para ello el programa MathCad.,

A continuación se presenta otro ejemplo de un cálculo de las líneas equipotenciales del suelo para un electrodo que no se encuentra paralelo a ninguno de los ejes de coordenadas, por ejemplo, a veces sucede, cuando se emplean barras, que se deben instalar inclinadas en lugar de instalarlas verticalmente, debido a la presencia de rocas en el suelo.

Problema 3

La Figura 12 muestra una barra que no se pudo enterrar verticalmente por obstáculos en el suelo; por tal motivo, se instaló con cierta inclinación hacia el eje x tal como se muestra en la Figura en cuestión. La Figura muestra las coordenadas de los dos puntos extremos de la barra y en cuanto a la coordenada y' , esta es igual a 3. Por otra parte, el suelo tiene una conductividad de 0.01 (S/m). Asuma que la corriente inyectada a la tierra es de 500 (A).

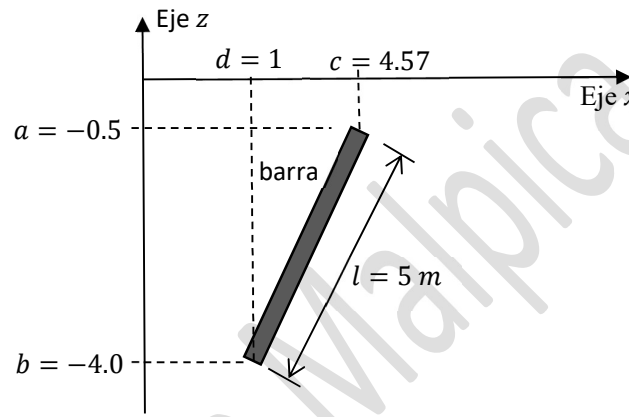


Fig. 12 Barra instalada inclinada en el suelo.

Se desea obtener las curvas equipotenciales en la superficie del suelo, aplicando la ecuación (4-9); pero existe una dificultad en aplicar dicha ecuación en este caso, ya que como el electrodo no se encuentra paralelo a ninguno de los ejes de coordenada, el diferencial de longitud dl' depende ahora de las variables x' y z' . Para resolver este inconveniente, se empleará la ecuación de una recta, la recta definida por el propio electrodo; de esta forma, la coordenada z' del electrodo se pondrá en función de la coordenada x' , en otras palabras, se realizará un cambio de variables. A continuación se presenta la ecuación de la recta que define el propio electrodo, con las coordenadas que se muestran en la Figura 12:

$$z'(x') = \frac{a-b}{c-d}(x' - d) + b \quad (4-19)$$

La ecuación se puede escribir en forma más condensada:

$$z'(x') = m(x' - d) + b \quad (4-20)$$

donde m es la pendiente de la recta y viene dado por:

$$m = \frac{a-b}{c-d} \quad (4-21)$$

Al calcular el diferencial de z' con la ecuación (4-20):

$$dz' = m dx' \quad (4-22)$$

Para aplicar la ecuación (4-9) hay que definir un diferencial de longitud dl' :

$$dl' = \sqrt{dx'^2 + dz'^2} \quad (4-23)$$

Al sustituir (4-22) en (4-23) se obtiene el diferencial de longitud dl' :

$$dl' = \sqrt{1 + m^2} dx' \quad (4-24)$$

Con la ecuación (4-9) y la función de Green (3-2), ambas evaluadas para $z = 0$, se obtiene el potencial en el suelo:

$$V(x, y) = \frac{i}{\sigma l} \int \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z')^2}} \right) dl' \quad (4-25)$$

Al sustituir (4-20) y (4-24) en la ecuación anterior se obtiene:

$$V(x, y) = \frac{i}{\sigma l} \int_d^c \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (m(x'-d)+b)^2}} \right) dx' \quad (4-26)$$

Nótese que con el cambio de variable realizado, solamente hay que integrar con respecto a una única variable (x').

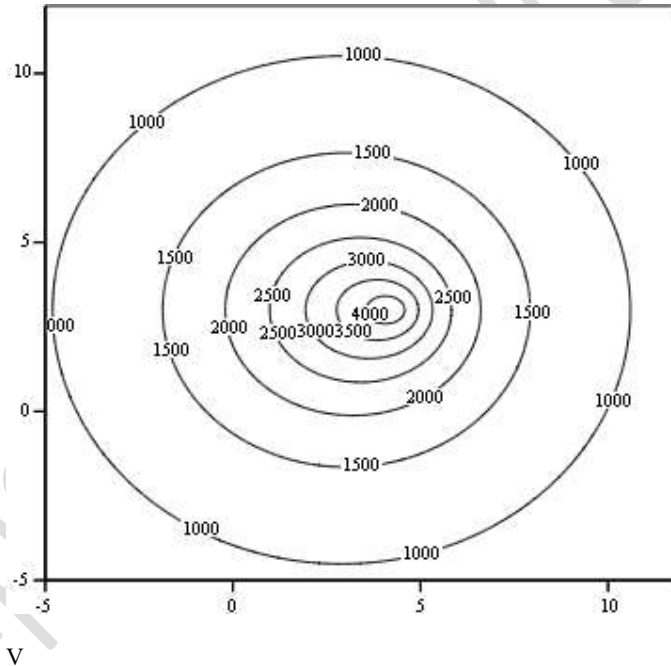


Fig 13. Líneas equipotenciales en la superficie del suelo para una barra enterrada inclinada como se muestra en la Figura 12

La integral de la ecuación (4-26), se puede resolver numéricamente con algún software matemático. La figura 13 muestra las líneas equipotenciales para la barra mostrada en la Figura 12, empleando el software MathCad.

Se deja al lector investigar si la integral de la ecuación (4-26) tiene solución analítica.

A continuación se presenta el cálculo del potencial en la superficie del suelo a causa de una barra instalada verticalmente y que inyecta una corriente en la tierra.

Problema 4

La Figura 14 muestra una barra enterrada en el suelo, y que se encuentra inyectando una corriente de 500 (A), el suelo tiene una conductividad iguala a 0.01 (S/m). Obtener las líneas equipotenciales del suelo.

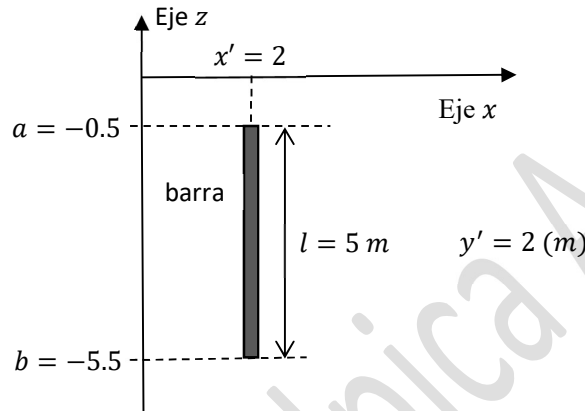


Fig.14 Barra enterrada en el suelo, figura en elevación.

Primero, se define las coordenadas de la barra y su longitud:

$$x' = 2 \text{ (m)}$$

$$y' = 2 \text{ (m)}$$

$a = -0.5 \text{ (m)}$, coordenada z' del extremo superior de la barra.

$b = -5.5 \text{ (m)}$, coordenada z' del extremo inferior de la barra ($a > b$).

$l = a - b = 5 \text{ (m)}$ Longitud de la barra.

Con las ecuaciones (4-9) y (3-2) evaluadas para $z = 0$, y con las coordenadas dadas con anterioridad, se obtiene el potencial en la superficie del suelo:

$$V(x, y) = \frac{i}{\sigma l} \int_b^a \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z')^2}} \right) dz' \quad (4-27)$$

Cuya solución analítica es la siguiente:

$$V(x, y) = \frac{i}{2\pi\sigma l} \ln \left(\frac{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (a)^2} + a}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (b)^2} + b} \right) \quad (4-28)$$

Con la ecuación anterior y empleando cualquier herramienta que permita realizar gráficas, se pueden obtener las líneas equipotenciales en el suelo.

Como ya se ha hecho con otros problemas presentados, la integral de la ecuación (4-27) se puede resolver numéricamente, la Figura 15 muestra las líneas equipotenciales obtenidas con la solución numérica de la ecuación (4-27).

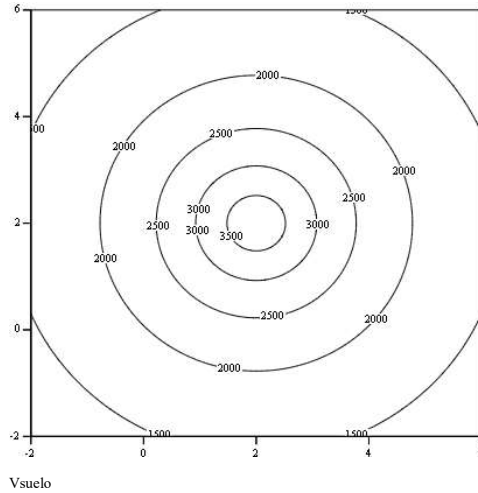


Fig. 15 Líneas equipotenciales para una barra enterrada en el suelo.

A seguir se presenta como se puede obtener las líneas equipotenciales, sobre la superficie del suelo, en el caso de tener un sistema de puesta a tierra formado por dos electrodos.

Problema 4

La Figura 16 muestra dos electrodos enterrados horizontalmente, cada uno de ellos se encuentran inyectando una corriente i de 500 (A), la longitud l de los electrodos es de 5 (m), están enterrados a una profundidad de 60 (cm) y la conductividad de la tierra es de 0.01 (S/m). Obtener las líneas equipotenciales sobre la superficie del suelo.

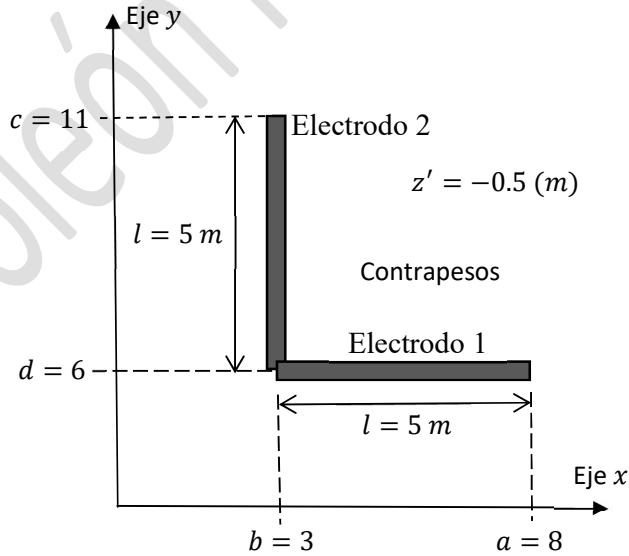


Figura 16 Dos contrapesos enterrados

Coordenadas del primer electrodo:

$z' = -0.6$ (m)

$y' = 6$ (m)

$a = 8$ (m) coordenada x' de un extremo del electrodo.

$b = 3$ (m) coordenada x' del otro extremo del electrodo.

$l1 = a - b = 5$ (m) Longitud del primer electrodo.

Potencial en el suelo debido al primer electrodo.

Se obtiene con las ecuaciones (3-2) y (4-9), las coordenadas del electrodo dadas con anterioridad y haciendo $z = 0$. Como el electrodo se encuentra paralelo al eje x , la integración se realiza en el eje x' :

$$V1(x, y) = \frac{i}{\sigma l1} \int_b^a \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z')^2}} \right) dx' \quad (4-29)$$

Coordenadas del segundo electrodo:

$$z' = -0.6 \text{ (m)}$$

$$x' = 3 \text{ (m)}$$

$$c = 11 \text{ (m)}$$

Coordenada y' de un extremo del electrodo

$$d = 6 \text{ (m)}$$

Coordenada y' del otro extremo del electrodo $c > d$.

$$l2 = c - d = 5 \text{ (m)}$$

Longitud de la barra.

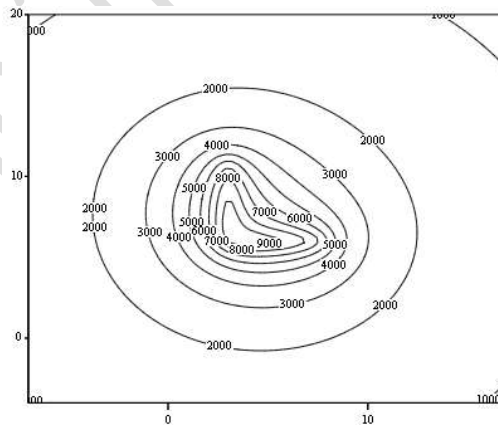
Potencial del segundo electrodo:

$$V2(x, y) = \frac{i}{\sigma l2} \int_d^c \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z')^2}} \right) dy' \quad (4-30)$$

El potencial del suelo se obtiene al sumar las funciones (4-29) y (4-30):

$$V(x, y) = V1(x, y) + V2(x, y) \quad (4-31)$$

Con la ecuación anterior se obtienen las curvas equipotenciales del suelo, la Figura 17 muestra las curvas en cuestión. Para este caso, las integrales de las ecuaciones (4-29) y



Vsuelo

(4-30) fueron resueltas numéricamente con el software MathCad.

Fig. 17 Curvas equipotenciales en la superficie de suelo debido a dos contrapesos enterrados en el suelo.

En resumen, en el caso de tener un sistema de puesta a tierra formado por más de un electrodo, como el mostrado en la Fig. 16, lo que hay que hacer es sumar las contribuciones al potencial que genera cada uno de los electrodo, que es lo que representa la ecuación (4-31) para el caso de dos electrodos.

Siempre que se tenga un sistema formado por más de un electrodo, para el cálculo de los potenciales del suelo, siempre será necesario determinar cuanta corriente drena a tierra cada uno de los electrodos. Para calcular dichas corrientes, es necesario construir la matriz resistencia de la red de puesta a tierra, en el documento "Sistemas de puesta a tierra. Parte 2." se presentan numerosos ejemplos de cómo construir esta matriz, cuyos elementos lo constituyen las resistencias propias de los electrodos y las resistencias mutuas entre electrodos.

Luego de construir la matriz resistencia, la misma se invierte, para obtener la matriz conductancia, con esta matriz se obtiene la corriente que drena a tierra cada uno de los electrodos, usando la siguiente ecuación:

$$i_k = \frac{\sum_{j=1}^n G_{k,j}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n G_{i,j}} i_{tierra} \quad (4-32)$$

donde:

$G_{i,j}$ Es el elemento i, j de la matriz conductancia.

i_k Es la corriente que drena a tierra el electrodo k .

i_{tierra} Es la corriente que se inyecta a la tierra por el sistema de puesta a tierra.

Con la corriente i_k que drena a tierra el electrodo k , se calcula el potencial de la tierra que produce el propio electrodo.

5. Calculo de las resistencias propias y mutuas en barras, para suelo homogéneo.

Para calcular la resistencia de un electrodo como una barra, por lo general hay que realizar una doble integración a la función de Green (3-2), si las integrales se pueden resolver analíticamente o simbólicamente, entonces como resultado se obtiene una fórmula para calcular la resistencia del electrodo.

Otra forma de calcular resistencia, consiste en resolver numéricamente la doble integración; en este caso, la solución será un número que arroje la herramienta de cálculo matemático utilizada como MatLab™, MathCad™ o cualquier otra herramienta matemática, como las de uso gratuito, disponibles en la red.

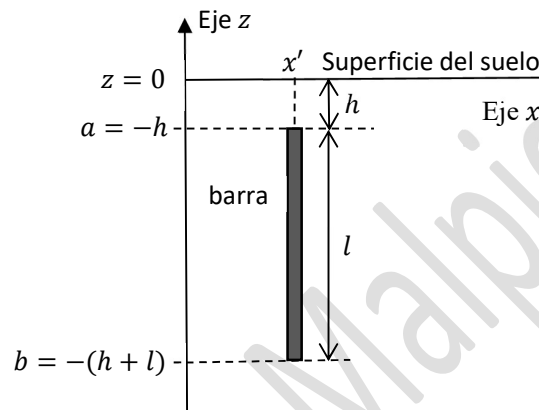


Fig. 18 Barra instalada en el suelo verticalmente.

La Figura 18 muestra una barra enterrada en el suelo, el cálculo de la resistencia se realizará con base a las coordenadas mostradas en la misma; en la figura, h es la profundidad a la cual se encuentra enterrada el extremo superior de la barra ($h \geq 0$) y l es la longitud de la barra ($l > 0$). Por otra parte, en todo este trabajo se asume que todos los puntos que formen parte de la superficie del suelo tienen coordenada $z = 0$, como se puede apreciar en la Figura 18.

5.1 Resistencia propia de una barra.

a. Resistencia propia de una barra. Cálculo simbólico

En el capítulo 4 se dedujo una expresión, particularmente la (4-9), que permite calcular el potencial en cualquier punto de la tierra, debido a la inyección de una corriente a través de un electrodo cilíndrico; pues bien, si esta expresión se emplea para calcular el potencial que tiene un punto de la tierra que se encuentre en contacto con la superficie del electrodo; entonces, obtendríamos también el potencial del electrodo. Al conocer el potencial del electrodo y la magnitud de la corriente inyectada a la tierra, obtendríamos la resistencia del electrodo.

Al aplicar la ecuación (4-9) a la barra, obtenemos el potencial en cualquier punto de la tierra debido a la inyección de corriente por la barra:

$$V(x, y, z) = \frac{i}{\sigma l} \int_b^a f_{Green}^{2est}(x, y, z, x', y', z') dz' \quad (5-1)$$

donde $0 \geq a > b$ (ver la Fig. 18) y cuyos valores son los límites de integración para la coordenada z' .

Al sustituir la función de Green dada por (3-2) en la ecuación anterior y al resolver simbólicamente la integral, se obtiene el resultado siguiente:

$$V(x, y, z) = \frac{i}{4\pi\sigma l} \left[\ln \left(\frac{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-a)^2} - z + a}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-b)^2} - z + b} \right) + \dots \right] + \ln \left(\frac{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+a)^2} + z + a}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+b)^2} + z + b} \right) \quad (5-2)$$

donde x' y y' son las coordenadas x , y donde se encuentra el electrodo, i es la corriente inyectada a la tierra a través del electrodo y l la longitud del mismo.

Luego, la expresión anterior se utiliza para evaluar el potencial de la tierra que esté en contacto con el electrodo, para ello se utilizará la ayuda de la Figura 19, donde se muestra un corte de la barra con las coordenadas de un punto de la superficie que se encuentra en contacto con la tierra.

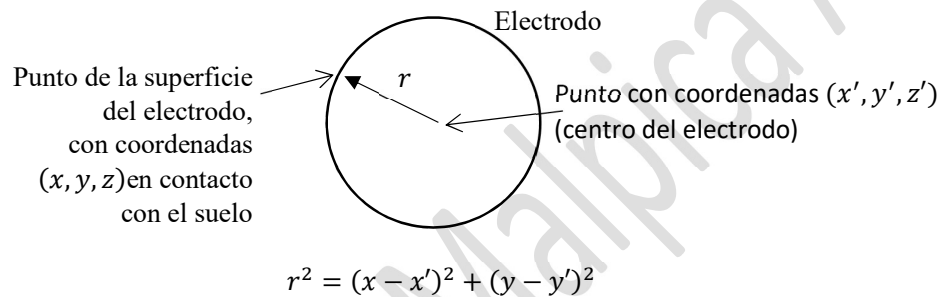


Fig. 19 Vista en corte de una barra de radio r .

Al tomar un punto que se encuentre sobre la superficie del electrodo, a fin de evaluar su potencial, entonces se cumple la relación referente a r^2 , y que se muestra en la misma Fig.19.

Al usar la relación referente a r^2 , mostrada en la Figura 19, se puede realizar un cambio de variable en la ecuación (5-2):

$$V_{superficie}(z) = \frac{i}{4\pi\sigma l} \left[\ln \left(\frac{\sqrt{(r)^2 + (z-a)^2} - z + a}{\sqrt{(r)^2 + (z-b)^2} - z + b} \right) + \dots \right] + \ln \left(\frac{\sqrt{(r)^2 + (z+a)^2} + z + a}{\sqrt{(r)^2 + (z+b)^2} + z + b} \right) \quad (5-3)$$

donde $a \geq z \geq b$.

La ecuación anterior permite calcular el potencial en la superficie de la barra, en función de la coordenada z , donde z debe estar en el intervalo $a \geq z \geq b$, de acuerdo a la Figura 18).

Pero la ecuación (5-3) presenta un problema, y es que el potencial que tiene la superficie de la barra no es una constante como se esperaba, presenta una dependencia con respecto a la coordenada z . Si la barra es un buen conductor o es un conductor ideal su potencial debe ser constante.

¿A qué se debe este error?

Se debe al hecho de haber asumido que la densidad de corriente que drena el electrodo a tierra $i'(l')$, (ver la ecuación (4-8)) es una constante, cuando esta densidad lineal de corriente debe depender de l' o de z' , para que el potencial en toda la superficie de la barra sea una constante.

Para solventar de alguna forma este problema, se realiza una aproximación, que consiste en tomar como potencial del electrodo, el potencial promedio que tiene toda la superficie de la barra y esta solución implica realizar una integración del potencial dado por (5-3):

$$V_{barra} = \frac{i}{l} \int_b^a V_{superficie}(z) dz \quad (5-4)$$

Al sustituir (5-3) en la ecuación anterior:

$$V_{barra} = \frac{i}{4\pi\sigma l^2} \left[\int_b^a \ln \left(\frac{\sqrt{(r)^2+(z-a)^2}-z+a}{\sqrt{(r)^2+(z-b)^2}-z+b} \right) dz + \dots \right. \\ \left. + \int_b^a \ln \left(\frac{\sqrt{(r)^2+(z+a)^2}+z+a}{\sqrt{(r)^2+(z+b)^2}+z+b} \right) dz \right] \quad (5-5)$$

Al resolver analíticamente o simbólicamente las dos integrales, se obtiene el potencial promedio de la barra:

$$V_{barra} = \frac{i}{4\pi\sigma l^2} \left[b \cdot \ln \left[\frac{(\sqrt{(l+2h)^2+r^2}+(l+2h))(\sqrt{l^2+r^2}-l)(\sqrt{(2b)^2+r^2+2b})^2}{r^2} \right] + \dots \right. \\ \left. - (l-h) \cdot \ln \left(\sqrt{(l)^2+r^2} - (l) \right) + \dots \right. \\ \left. + (l+3h) \cdot \ln \left(\sqrt{(l+2h)^2+r^2} - (l+2h) \right) + \dots \right. \\ \left. - h \cdot \ln \left(\frac{(\sqrt{(2h)^2+r^2}-(2h))^2}{r^2} \right) + 2(l-h) \cdot \ln(r) + \dots \right. \\ \left. - \sqrt{(2(l+h))^2+r^2} - 2\sqrt{(l)^2+r^2} + \dots \right. \\ \left. + 2\sqrt{(l+2h)^2+r^2} - \sqrt{(2h)^2+r^2} + 2r \right] \quad (5-6)$$

donde:

- r Es el radio del electrodo, en metros.
- l Es la longitud, en metros, del electrodo $l > 0$.
- h Es la profundidad, en metros, que se encuentra enterrada la parte superior del electrodo, $h \geq 0$, (Ver la Figura 18).

$$b = -(l+h)$$

Al dividir la ecuación anterior por la corriente inyectada i , se obtiene la resistencia de la barra en ohmios:

$$R_{barra} = \frac{1}{4\pi\sigma l^2} \left[b \cdot \ln \left[\frac{(\sqrt{(l+2h)^2+r^2}+(l+2h))(\sqrt{l^2+r^2}-l)(\sqrt{(2b)^2+r^2+2b})^2}{r^2} \right] + \dots \right. \\ \left. - (l-h) \cdot \ln \left(\sqrt{(l)^2+r^2} - (l) \right) + \dots \right. \\ \left. + (l+3h) \cdot \ln \left(\sqrt{(l+2h)^2+r^2} - (l+2h) \right) + \dots \right. \\ \left. - h \cdot \ln \left(\frac{(\sqrt{(2h)^2+r^2}-(2h))^2}{r^2} \right) + 2(l-h) \cdot \ln(r) + \dots \right. \\ \left. - \sqrt{(2(l+h))^2+r^2} - 2\sqrt{(l)^2+r^2} + \dots \right. \\ \left. + 2\sqrt{(l+2h)^2+r^2} - \sqrt{(2h)^2+r^2} + 2r \right] \quad (5-7)$$

En el caso que la parte superior de la barras se encuentre enterrada al ras del suelo ($h = 0$), entonces la ecuación anterior se simplifica a la siguiente:

$$R_{barra} = \frac{1}{2\pi \sigma l} \left[\ln \left[\frac{\left(\sqrt{(2l)^2 + r^2} + (2l) \right)}{r} \right] - \frac{\sqrt{(2l)^2 + r^2}}{2l} + \frac{r}{2l} \right] (\Omega) \quad (5-8)$$

Y si la longitud de la barra es mucho mayor que el radio, entonces se puede hacer la siguiente aproximación, para calcular la resistencia de la barra.

$$R_{barra} \approx \frac{1}{2\pi \sigma l} \left[\ln \left[\frac{4l}{r} \right] - 1 \right] (\Omega) \quad (5-9)$$

La ecuación anterior es la misma que publica Dwight en su trabajo.

b. Resistencia propia de una barra. Cálculo numérico.

El cálculo numérico de la resistencia propia de una barra, se realiza con la función de Green (3-2) y con la ecuación para calcular el potencial en cualquier punto del suelo (4-9):

$$V(x, y, z) = \frac{i}{\sigma l} \int_b^a f_{Green}^{2est}(x, y, z, x', y', z') dz' \quad (5-10)$$

Al sustituir la función de Green (3-2) en la ecuación anterior se obtiene lo siguiente:

$$V(x, y, z) = \frac{i}{\sigma l} \int_b^a \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right) dz' \quad (5-11)$$

Luego, se evalúa el potencial en un punto sobre la superficie de la barra. De acuerdo a la Figura 19, las coordenadas de los puntos que se encuentran sobre la superficie de la barra, deben cumplir con la siguiente relación:

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 \quad (5-12)$$

Al sustituir la ecuación anterior en la ecuación (5-11), se obtiene el potencial en cualquier punto de coordenada z del electrodo:

$$V_{superficie}(z) = \frac{i}{\sigma l} \int_b^a \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-z')^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+z')^2}} \right) dz' \quad (5-13)$$

Luego se calcula el potencial promedio de la barra, realizando una segunda integración a la ecuación anterior:

$$V_{barra} = \frac{1}{l} \int_b^a V_{superficie}(z) dz \quad (5-14)$$

Al sustituir (5-13) en la ecuación anterior se obtiene el potencial promedio de la barra:

$$V_{barra} = \frac{i}{\sigma l^2} \int_b^a \int_b^a \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-z')^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+z')^2}} \right) dz' dz \quad (5-15)$$

Si la corriente del electrodo se pasa al otro lado de la igualdad, se obtiene la resistencia de la barra:

$$R_{barra} = \frac{1}{\sigma l^2} \int_b^a \int_b^a \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-z')^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+z')^2}} \right) dz' dz \quad (5-16)$$

donde los límites de integración, de acuerdo a la Figura 18, vienen dados por:

$$a = -h \quad (5-17)$$

$$b = -(h + l) \quad (5-18)$$

Al sustituir (5-17) y (5-18) en (5-16):

$$R_{barra} = \frac{1}{\sigma l^2} \int_{-(h+l)}^{-h} \int_{-(h+l)}^{-h} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-z')^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2+(z+z')^2}} \right) dz' dz \quad (5-19)$$

La ecuación anterior puede ser resuelta numéricamente empleando una adecuada herramienta de cálculo matemático, por ejemplo, utilizando la función *dblquad* de MathLab que realiza la doble integración de una función de dos variables; o empleando el programa MathCad, o cualquier otro programa matemático que pueda resolver la doble integración. En el Anexo A, se presentan ejemplos de códigos de programación para calcular la resistencia propia de una barra.

5.2 Resistencia mutua entre barras.

a. Resistencia mutua entre barras. Cálculo simbólico.

La Figura 20 muestra dos barras, instaladas verticalmente, ambas con longitudes iguales y enterradas a la misma profundidad h . Por la barra 1 se inyecta una corriente i_1 y por la barra 2 no se inyecta corriente. Se desea calcular la resistencia mutua que existe entre ambas barras, para ello se calculará primero el potencial V_2 que adquiere la barra 2 con respecto al infinito, debido a la corriente i_1 . La Figura 21 muestra una vista en planta de las barras, donde se aprecia la separación d que existe entre ellas. Para ubicar la barra 1, se emplean las coordenadas primadas porque es en esta barra por donde se inyecta la corriente y para ubicar la barra 2 se emplean las coordenadas no primadas, porque es la barra donde se quiere calcular el potencial.

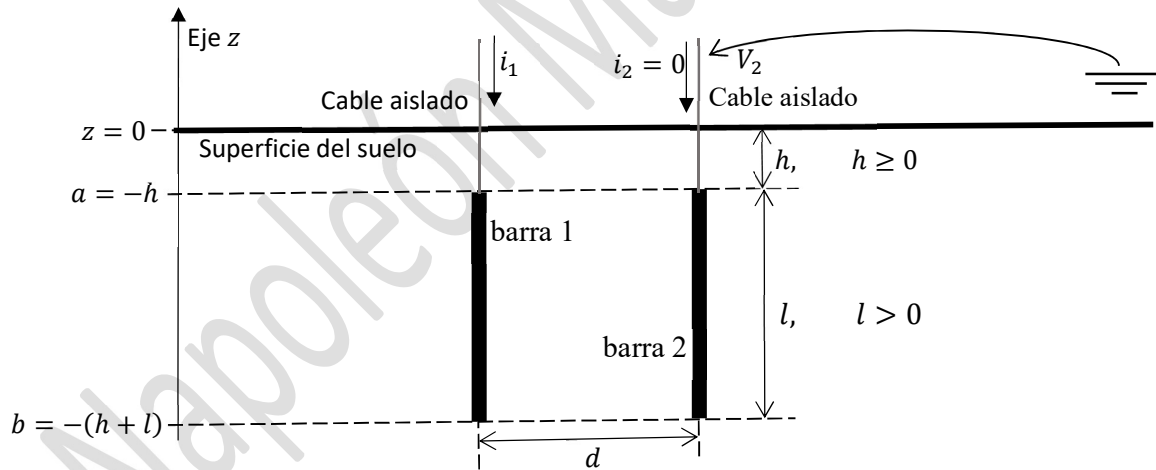


Fig. 20 Barras para puesta a tierra de iguales longitudes. Vista en elevación

Retomando la ecuación (5-2), obtenemos el potencial en cualquier punto del suelo para una barra:

$$V(x, y, z) = \frac{i}{4\pi\sigma l} \left[\ln \left(\frac{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-a)^2}-z+a}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-b)^2}-z+b} \right) + \dots \right. \\ \left. + \ln \left(\frac{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+a)^2}+z+a}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+b)^2}+z+b} \right) \right] \quad (5-20)$$

donde $0 \geq a > b$ y cuyos valores son los límites de integración para la coordenada z' , ver la Fig. 20.

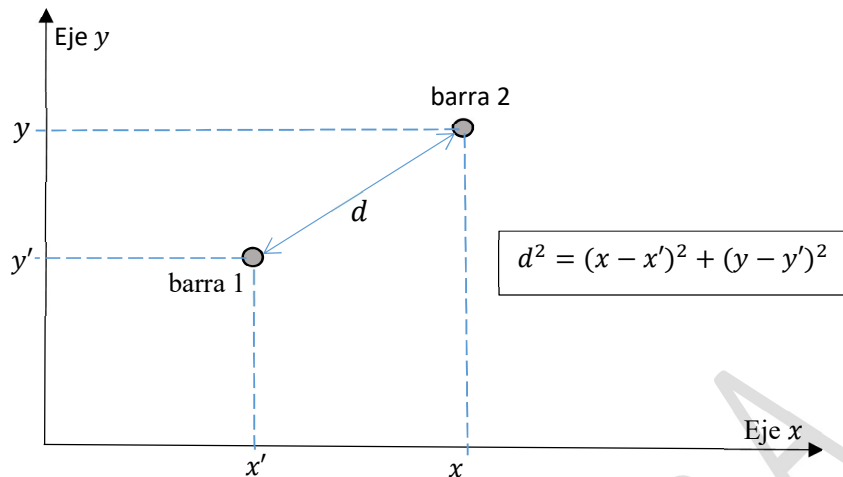


Fig. 21. Vista en elevación de las barras mostradas en la Figura 20

La ecuación (5-20) se empleará para calcular el potencial que adquiere la barra 2. Al hacer un cambio de variable en la ecuación anterior, usando la relación para d^2 mostrada en la Figura 21, se obtiene lo siguiente:

$$V_{\text{barra}_2}(z) = \frac{i_1}{4\pi\sigma l} \left[\ln \left(\frac{\sqrt{d^2 + (z-a)^2} - z + a}{\sqrt{d^2 + (z-b)^2} - z + b} \right) + \dots \right. \\ \left. + \ln \left(\frac{\sqrt{d^2 + (z+a)^2} + z + a}{\sqrt{d^2 + (z+b)^2} + z + b} \right) \right] \quad (5-21)$$

donde $a \geq z \geq b$.

Como el potencial de la barra 2 muestra una dependencia con respecto a la variable z cuando el potencial debería ser constante, entonces el potencial de la barra 2 se toma como el potencial promedio que tiene la barra en cuestión:

$$V_2 = \frac{i}{l} \int_b^a V_{\text{barra}_2}(z) dz \quad (5-22)$$

Al sustituir (5-16) en la ecuación anterior:

$$V_2 = \frac{i_1}{4\pi\sigma l^2} \left[\int_b^a \ln \left(\frac{\sqrt{(d)^2 + (z-a)^2} - z + a}{\sqrt{(d)^2 + (z-b)^2} - z + b} \right) dz + \dots \right. \\ \left. + \int_b^a \ln \left(\frac{\sqrt{(d)^2 + (z+a)^2} + z + a}{\sqrt{(d)^2 + (z+b)^2} + z + b} \right) dz \right] \quad (5-23)$$

Al resolver la integral simbólicamente se obtiene el potencial de la barra 2:

$$V_2 = \frac{i_1}{4\pi \sigma l^2} \left[\begin{aligned} & b \cdot \ln \left[\frac{(\sqrt{(l+2h)^2+d^2+(l+2h)})(\sqrt{l^2+d^2-l})(\sqrt{(2b)^2+d^2+2b})^2}{d^2} \right] + \dots \\ & \quad -(l-h) \cdot \ln(\sqrt{(l)^2+d^2} - (l)) + \dots \\ & \quad +(l+3h) \cdot \ln(\sqrt{(l+2h)^2+d^2} - (l+2h)) + \dots \\ & \quad -h \cdot \ln \left(\frac{(\sqrt{(2h)^2+d^2-(2h)})^2}{d^2} \right) + 2(l-h) \cdot \ln(d) + \dots \\ & \quad -\sqrt{(2(l+h))^2+d^2} - 2\sqrt{(l)^2+d^2} + \dots \\ & \quad +2\sqrt{(l+2h)^2+d^2} - \sqrt{(2h)^2+d^2} + 2d \end{aligned} \right] \quad (5-24)$$

donde el valor de b se muestra en la Figura 20.

La resistencia mutua entre las barras viene dada por:

$$R_{mutua} = \frac{V_2}{i_1} \quad (5-25)$$

Al sustituir (5-19) en la ecuación anterior, se obtiene la resistencia mutua:

$$R_{mutua} = \frac{1}{4\pi \sigma l^2} \left[\begin{aligned} & b \cdot \ln \left[\frac{(\sqrt{(l+2h)^2+d^2+(l+2h)})(\sqrt{l^2+d^2-l})(\sqrt{(2b)^2+d^2+2b})^2}{d^2} \right] + \dots \\ & \quad -(l-h) \cdot \ln(\sqrt{(l)^2+d^2} - (l)) + \dots \\ & \quad +(l+3h) \cdot \ln(\sqrt{(l+2h)^2+d^2} - (l+2h)) + \dots \\ & \quad -h \cdot \ln \left(\frac{(\sqrt{(2h)^2+d^2-(2h)})^2}{d^2} \right) + 2(l-h) \cdot \ln(d) + \dots \\ & \quad -\sqrt{(2(l+h))^2+d^2} - 2\sqrt{(l)^2+d^2} + \dots \\ & \quad +2\sqrt{(l+2h)^2+d^2} - \sqrt{(2h)^2+d^2} + 2d \end{aligned} \right] \quad (5-26)$$

donde: $b = -(l+h)$

Nótese que la ecuación anterior es la misma ecuación (5-7), si la separación entre las barras d se sustituye por el radio de las barras r .

Si la parte superior de las barras se encuentra enterrada al ras del suelo ($h = 0$), la ecuación anterior se reduce la siguiente:

$$R_{mutua} = \frac{1}{2\pi \sigma l} \left[\ln \left[\frac{(\sqrt{(2l)^2+d^2+(2l)})}{d} \right] - \frac{\sqrt{(2l)^2+d^2}}{2l} + \frac{d}{2l} \right] (\Omega) \quad (5-27)$$

b. Resistencia mutua entre barras. Cálculo numérico.

El cálculo numérico de la resistencia mutua entre barras, se realiza con la función de Green (3-2) y con la ecuación para calcular el potencial en cualquier punto del suelo (4-9):

$$V(x, y, z) = \frac{i}{4\pi\sigma l} \int_b^a \left[\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} + \dots \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right) \right] dz' \quad (5-28)$$

Como la resistencia mutua depende de la separación d que existe entre las barra, podemos hacer que la barra 1, que es la barra por donde se inyecta la corriente, se ubique en las coordenadas $x' = 0, y' = 0$ y la barra 2 se ubique en las coordenadas $x = d$ y $y = 0$, de esta forma, la separación entre las barras se mantiene en d . Al usar las coordenadas en cuestión en la fórmula anterior, se obtiene el potencial de la barra 2

$$V_{\text{barra}_2}(z) = \frac{i_1}{4\pi\sigma l} \int_b^a \left[\left(\frac{1}{\sqrt{(d)^2 + (z-z')^2}} + \dots \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{(d)^2 + (z+z')^2}} \right) \right] dz' \quad (5-29)$$

Como el potencial en la barra 2 muestra una dependencia con la variable z , cuando debería ser constante, entonces se toma el potencial promedio como potencial de la barra, el potencial promedio que tiene la barra viene dado por la siguiente expresión:

$$V_2 = \frac{1}{l} \int_b^a V_{\text{barra}_2}(z) dz \quad (5-30)$$

Al sustituir (5-29) en (5-30):

$$V_2 = \frac{i_1}{\sigma l^2} \int_b^a \int_b^a \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{(d)^2 + (z-z')^2}} + \dots \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{(d)^2 + (z+z')^2}} \right) dz' dz \quad (5-31)$$

Que corresponde a haber realizado una doble integración a la función de Green (3-2), con las coordenadas dadas anteriormente:

$$V_2 = \frac{i_1}{\sigma l^2} \int_b^a \int_b^a f_{\text{Green}}^{2\text{est}}(d, 0, z, 0, 0, z') dz' dz \quad (5-32)$$

Al pasar la corriente al otro miembro de la ecuación, se obtiene la resistencia mutua entre las barras:

$$R_{\text{mutua}} = \frac{1}{\sigma l^2} \int_b^a \int_b^a f_{\text{Green}}^{2\text{es}}(d, 0, z, 0, 0, z') dz' dz \quad (5-33)$$

En el Anexo B, se presentan ejemplos de códigos de programación para calcular la resistencia mutua entre barras.

6. Calculo de las resistencias propias y mutuas en contrapesos, para suelo homogéneo.

Para calcular la resistencia de un contrapeso, el procedimiento básicamente es el mismo que se explicó para una barra, que consiste en realizar una doble integración de la función de Green (3-2). Si las integrales se pueden resolver simbólicamente, entonces como resultado se obtiene una fórmula para calcular la resistencia del electrodo y si la solución es numérica entonces se obtiene un valor o un número solamente, que corresponde al valor de la resistencia.

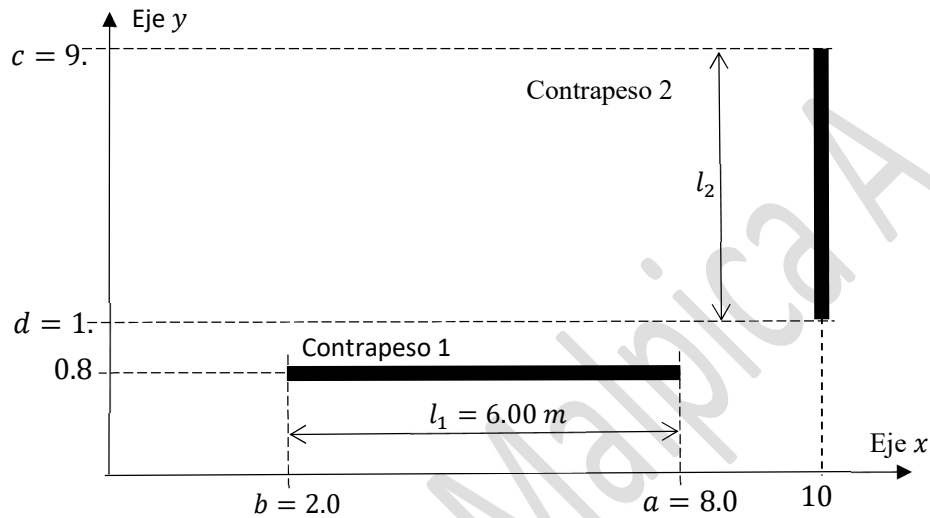


Fig. 22 Vista en planta de dos contrapesos enterrados en el suelo

En ciertas ocasiones, no es posible obtener una fórmula para calcular resistencias, particularmente la resistencia mutua entre electrodos que no estén situados en paralelo, para estos casos sólo se presentará el cálculo numérico de la resistencia.

La Figura 22 muestra dos contrapesos enterrados en el suelo, y se desea obtener tanto la resistencia propia de cada electrodo, así como la resistencia mutua que existe entre ellos, primero se calculará la resistencia propia, a partir de la ecuación (4-9).

6.1 Resistencia propia de un contrapeso.

a. Resistencia propia de un contrapeso. Cálculo simbólico.

Se desea obtener una expresión que sirva para calcular la resistencia propia de un contrapeso, como el contrapeso N° 1 que se muestra en la Figura 22, si por dicho electrodo se inyecta a la tierra una corriente i_1 , entonces el potencial en cualquier punto del suelo se puede obtener con la ecuación (4-9), donde la integración se realiza en la dirección del eje x , ya que el electrodo se encuentra en la misma dirección:

$$V(x, y, z) = \frac{i_1}{\sigma l_1} \int_b^a f_{Green}^{2est}(x, y, z, x', y', z') dx' \quad (6-1)$$

donde las coordenadas primadas se emplean para ubicar el eje central del electrodo, a y b son las coordenadas x' de los puntos extremos del contrapeso; por otro lado, por encontrarse el electrodo paralelo al eje x , las coordenadas y' y z' son valores constantes. Si el electrodo se encuentra enterrado a una profundidad h , donde h es positivo, entonces $z' = -h$

La ecuación anterior tiene la solución analítica siguiente:

$$V(x, y, z) = \frac{i_1}{4\pi\sigma l_1} \left[\ln \left(\frac{\sqrt{(x-a)^2 + (y-y')^2 + (z-h)^2} - (x-a)}{\sqrt{(x-b)^2 + (y-y')^2 + (z-h)^2} - (x-b)} \right) + \dots \right] + \ln \left(\frac{\sqrt{(x-a)^2 + (y-y')^2 + (z+h)^2} - (x-a)}{\sqrt{(x-b)^2 + (y-y')^2 + (z+h)^2} - (x-b)} \right) \quad (6-2)$$

La ecuación anterior permite calcular el potencial en cualquier punto del suelo ubicado en las coordenadas (x, y, z) , debido a la inyección de corriente a través del electrodo. Al integrar la ecuación anterior, se puede obtener el potencial promedio que tiene la superficie del contrapeso, para ello, las coordenadas (x, y, z) se evalúan en puntos que se encuentre en la superficie del electrodo, la Figura 22 muestra un corte del electrodo, donde se indica las coordenadas de un punto de la superficie.

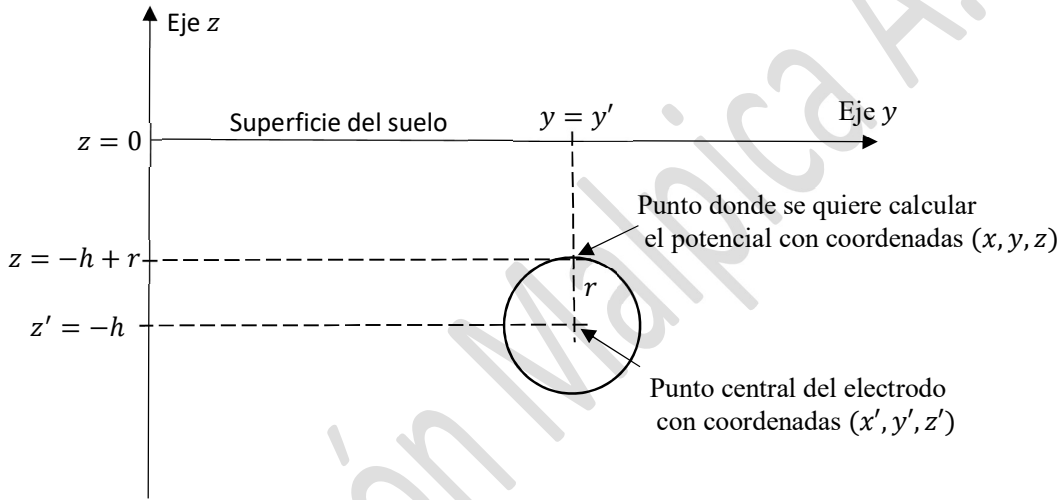


Fig. 23 Corte de un contrapeso, situado paralelo al eje de coordenadas x .

De acuerdo a la Figura 23, los puntos donde se quiere calcular el potencial tienen coordenadas $y = y'$ y $z = -h + r$; al usar estas coordenadas en la ecuación anterior y al integrar la ecuación, se obtiene el potencial promedio del contrapeso:

$$V_{\text{contrapeso 1}} = \frac{i_1}{4\pi\sigma l_1^2} \int_b^a \left[\ln \left(\frac{\sqrt{(x-a)^2 + (r)^2} - (x-a)}{\sqrt{(x-b)^2 + (r)^2} - (x-b)} \right) + \dots \right] dx + \ln \left(\frac{\sqrt{(x-a)^2 + (r-2h)^2} - (x-a)}{\sqrt{(x-b)^2 + (r-2h)^2} - (x-b)} \right) \quad (6-3)$$

La integral en la ecuación anterior tiene solución analítica, a continuación se muestra la solución donde el valor de a se ha sustituido por $l_1 + b$, de acuerdo a la Figura 22:

$$V_{\text{contrapeso 1}} = \frac{i_1}{2\pi\sigma l_1^2} \left[\ln \left[\frac{(\sqrt{(l_1)^2 + (r)^2} + l_1)(\sqrt{(2h)^2 + (l_1)^2 + (r)^2} + l_1)}{r\sqrt{(2h)^2 + (r)^2}} \right] + \dots \right] - \frac{\sqrt{(2h)^2 + (l_1)^2 + (r)^2}}{l_1} + \frac{\sqrt{(2h)^2 + (r)^2}}{l_1} - \frac{\sqrt{(l_1)^2 + (r)^2}}{l_1} + \frac{r}{l_1} \quad (6-4)$$

Nótese en la ecuación anterior que el potencial promedio del contrapeso ya no es función de sus coordenadas, sólo es función del radio, su longitud y la profundidad a la cual se encuentra enterrado.

Si la corriente en la ecuación anterior, se pasa al otro lado de la igualdad, se obtiene una fórmula general para calcular la resistencia propia del contrapeso:

$$R_{contrapeso} = \frac{1}{2\pi\sigma l} \left[\ln \left[\frac{(\sqrt{(l)^2+(r)^2+l})(\sqrt{(2h)^2+(l)^2+(r)^2+l})}{r\sqrt{(2h)^2+(r)^2}} \right] + \dots \right] \quad (6-5)$$

$$\left[-\frac{\sqrt{(2h)^2+(l)^2+(r)^2}}{l} + \frac{\sqrt{(2h)^2+(r)^2}}{l} - \frac{\sqrt{(l)^2+(r)^2}}{l} + \frac{r}{l} \right]$$

donde l es la longitud del contrapeso.

Si la longitud del electrodo es mucho mayor que la profundidad h a la cual se encuentra enterrado el mismo ($l \gg h$) y si el radio es mucho menor que la longitud ($l \gg r$), entonces la ecuación anterior se aproxima a la siguiente:

$$R_{contrapeso} \approx \frac{\rho}{\pi l} \left[\ln \left[\frac{2l}{\sqrt{2hr}} \right] - 1 \right] \quad (6-6)$$

que es la fórmula presentada por Schwarz para contrapesos.

b. Resistencia propia de un contrapeso. Cálculo numérico.

El cálculo numérico de la resistencia propia de un contrapeso, se realiza con la doble integración de la función de Green (3-2):

$$R_{contrapeso} = \frac{1}{\sigma l^2} \int_0^l \int_0^l fGreen^{2est}(x, y, z, x', y', z') dx' dx \quad (6-7)$$

donde las coordenadas y, y', z y z' , que son las variables que no van a ser integradas, toman los siguientes valores:

$$y = y' = 0 \quad (6-8)$$

$$z' = -h \quad (6-9)$$

$$z = -h + r \quad (6-10)$$

Al sustituir (3-2) (6-8)(6-9) y (6-10) en la ecuación (6-7):

$$R_{contrapeso} = \frac{1}{4\pi\sigma l^2} \int_0^l \int_0^l \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(r)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(-2h+r)^2}} \right) dx' dx \quad (6-11)$$

La ecuación anterior se puede resolver numéricamente con algún programa o software de cálculo matemático.

Otra forma de calcular la resistencia consiste en codificar o programar la función de Green (3-2) para luego realizar la integración de la función en cuestión, con las coordenadas indicadas en(6-8)(6-9) y (6-10):

$$R_{contrapeso} = \frac{1}{\sigma l^2} \int_0^l \int_0^l fGreen^{2est}(x, 0, -h + r, x', 0, -h) dx' dx \quad (6-12)$$

En el Anexo D se presenta un ejemplo del cálculo numérico.

6.2 Resistencia mutua entre contrapesos.

En este apartado se calcula la resistencia mutua entre dos contrapesos, como los mostrados en la figura 22, si los contrapesos se encuentran en paralelo, es posible resolver analíticamente las integrales correspondientes al cálculo de la resistencia y de esta forma se obtiene una expresión o una fórmula para calcular resistencias mutuas. En el caso que no estén en paralelo, la resistencia entre electrodo se obtiene solamente resolviendo las integrales numéricamente, siguiendo la metodología que se ha explicado con las barras en estos apuntes.

Para calcular la resistencia mutua entre contrapesos, hay que asumir que solamente uno de ellos inyecta corriente al suelo, volviendo a los electrodos de la Figura 22, se asumirá que el electrodo No 1 es el que inyecta corriente en la tierra, bajo esta condición, entonces se calcula el potencial promedio que adquiere el electrodo No 2. La resistencia mutua se obtiene como la razón entre el potencial promedio del electrodo No 2 y la magnitud de la corriente que se inyecta por el electrodo No 1.

Si el electrodo No 1 inyecta corriente en la tierra, entonces este electrodo genera un potencial en cualquier punto del suelo, y este potencial se puede obtener con la ecuación (6-1) y con las coordenadas del propio electrodo:

$$V(x, y, z) = \frac{i_1}{\sigma l_1} \int_b^a fGreen^{2est}(x, y, z, x', y', z') dx' \quad (6-13)$$

donde y' y z' son coordenadas primadas del electrodo No 1

Luego, con la ecuación anterior, se calcula el potencial promedio que tiene la superficie del electrodo No 2, realizando para ello una segunda integración, a lo largo de la superficie del mismo, como el electrodo se encuentra paralelo al eje y , la segunda integración se realiza en el mismo eje.

$$V_{contrapeso\ 2} = \frac{i_1}{\sigma l_1 l_2} \int_d^c \int_b^a fGreen^{2est}(x, y, z, x', y', z') dx' dy \quad (6-14)$$

donde x y z son coordenadas del electrodo No 2

De la ecuación anterior se extrae la resistencia mutua entre los contrapesos:

$$R_{1\ 2} = \frac{1}{\sigma l_1 l_2} \int_d^c \int_b^a fGreen^{2est}(x, y, z, x', y', z') dx' dy \quad (6-15)$$

En el Anexo E se muestran ejemplos de cálculo de la resistencia mutua entre contrapesos.

A Anexo A

- Cálculo numérico de la resistencia propia de una barra para suelo homogéneo

En estos anexos se emplean los programas MathLab™ y MathCad™ para calcular tanto la resistencia propia de un electrodo como las resistencias mutuas que pueden existir entre electrodos. Si el lector está interesado en elaborar una herramienta de cálculo, para mallas de puesta a tierra, es probable que existan otros programas cuyos lenguajes sean más adecuado para elaborar rutinas relacionadas con puesta a tierra, por tal motivo se recomienda investigar sobre los diferentes lenguajes de programación para así seleccionar el que más convenga.

A continuación se explica cómo se puede obtener numéricamente la resistencia de una barra, como la mostrada en la Figura 18, utilizando algunas herramientas de cálculo matemático como MathLab™ y MathCad™.

Cálculo usando MathLab.

Para calcular la resistencia de una barra, hay que realizar la doble integración de la función de Green (3-2), según se muestra en la ecuación (5-19). MathLab™ cuenta con una rutina denominada *dblquad* que se utiliza para realizar la doble integración numérica de una función que tiene dos variables independientes.

Ahora bien, la función de Green (3-2) para suelos homogéneos, tiene seis variables independientes (x, y, z, x', y', z'); a continuación se transcribe la función de Green con sus seis variables:

$$fGreen^{2est}(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right) \quad (A-1)$$

Sin embargo, la rutina *dblquad* trabaja únicamente con funciones que tengan dos variables independientes; entonces, es necesario redefinir la función de Green, que tiene seis variables, a una función de sólo dos variables independientes. Por ejemplo, en el caso de una barra, se integrarían las variables z y z' y el resto de las variables como x, y, x', y' deben estar definidas como *global*; por ejemplo, la función de Green, para calcular la resistencia de una barra:

$$fGreen_z_zp(z, z') = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right) \quad (A-2)$$

La función de Green anterior es la que se usaría para calcular la resistencia de una barra, utilizando MatLab, con la fórmula siguiente:

$$Rbarra = \frac{1}{\sigma l^2} \int_b^a \int_b^a fGreen_z_zp(z, z') dz' dz \quad (A-3)$$

Las Figura A1 y A2 muestran los códigos en MathLab para la función $fGreen_z_zp(z, z')$ y para la ecuación anterior.

```

1 function out = fGreen_z_zp(z, zp)
2     global y yp x xp
3
4     % Funcion de Green para calcular la resistencia propia de una barra
5     % o mutuas entre barras.
6
7     out = (1./(4.*pi)).*((1./(sqrt((x-xp).^2+(y-yp).^2+(z - zp).^2)))+...
8         (1./(sqrt((x-xp).^2+(y-yp).^2+(z + zp).^2))));

```

Fig. A1 Función de Green $f_{Green_z_zp}(z, z')$ programada con los códigos de MathLab.

```

1     % Cálculo de la resistencia propia de una barra.
2     % Este calculo esta hecho con base al apartado 5.1.
3     % Se procede a borrar todas las variables:
4     clear
5     clear variables
6     global x xp y yp
7     % Datos de la barra y del suelo:
8     % Estos datos pueden ser modificados por el usuario.
9     rho = 100;      % resistividad del suelo ohm / m .
10    long = 4;       % longitud de la barra en metros.
11    r = .006;       % radio de la barra en metros.
12    h = 0.8;       % profundidad a la cual se encuentra el extremo superior
13                  % de la barra o la separación que existe entre el extremo
14                  % superior de la barra y la superficie del suelo.
15
16    % Cálculos:
17    long = abs(long);
18    ap = -abs(h);
19    xp = 0;
20    yp = 0;
21    bp = ap-long;
22    x = abs(r);
23    y = 0;
24    a = ap;
25    b = bp;
26    sigma = abs(1/rho); % conductividad del suelo (S / m) .
27    % Se realiza la doble integración de la función de Green:
28    Integral = dblquad(@fGreen_z_zp, a, b, ap, bp);
29    % Se presenta el resultado:
30    R_barra = (1/(sigma.*long.^2)).*Integral; % Solucion
31    R_barra

```

Fig. A2 Códigos para calcular la resistencia de una barra con MathLab.

Cálculo usando MathCad.

En el caso de usar MathCad, el cálculo se puede realizar con la función de Green (3-2) y la ecuación (5-14)

, la Figura A3 muestra un ejemplo de un cálculo de una resistencia para una barra.

M Mathcad - [Anexo de los apuntes parte 3]

Calculo de la resistencia de una barra . Solución numérica

Ver el apartado 5.1

Función de Green:

$$fGrenn(x, y, z, xp, yp, zp) := \frac{1}{4 \cdot \pi} \left[\frac{1}{\sqrt{(x - xp)^2 + (y - yp)^2 + (z - zp)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x - xp)^2 + (y - yp)^2 + (z + zp)^2}} \right]$$

Datos del suelo y de la barra :

$h := .8$ Profundidad a la cual se encuentra enterrada la parte superior de la barra (m)

$l := 4$ Longitud de la barra (m)

$\rho := 100$ (Ω m) Resistividad del suelo

$\sigma := \frac{1}{\rho}$ Conductividad del suelo

$\sigma = 0.01$ (S / m)

$r := 0.006$ Radio de la barra en (m)

Cálculos:

$a := -h$ Límite de integración para las variables z y zp,

$b := -1 + a$ Límite de integración para la variable z y zp

$a = -0.8$ (m)

$b = -4.8$ (m)

Ecuacion (5.19):

$$RBarra := \frac{1}{\sigma \cdot l^2} \int_b^a \int_b^a fGrenn(r, 0, z, 0, 0, zp) dzp dz$$

Solución

$RBarra = 26.233$ (Ω)

Fig. A3 Cálculo de la resistencia propia de una barra empleando los códigos de MathCad.

B Anexo B

- Cálculo numérico de la resistencia mutua entre barras para suelo homogéneo

Cálculo usando MathLab.

Para calcular la resistencia mutua entre barras, es necesario conocer la separación horizontal d que existe entre ellas, el cálculo es similar al cálculo de la resistencia propia.

```
Editor - C:\Users\Nçñ\Documents\Curso Puesta a tierra\MathLab\Apoyo Apuntes No 3\RMutuaBarras.m*
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
[-] 1.0 + ÷ 1.1 × %>% %>% ⓘ
1  % Cálculo de la resistencia mutua entre barras usando MathLab
2  % Se asume que las barras tiene longitudes iguales.
3  % Este calculo esta hecho con base al apartado 5.2.
4  % Se procede a borrar todas las variables:
5  - clear
6  - clear variables
7  - global x xp y yp
8  % Datos de las barras y del suelo:
9  % Los datos mostrados a continuación pueden ser modificados por el usuario.
10 - rho = 100;          % resistividad del suelo ohm / m .
11 - long = 4;          % longitud de la barra en metros.
12 - d = 6;            % separación entre las barras en metros.
13 - h = 0.8;         % progundidad a la cual se encuentra el extremo supe-
14                   % rior de la barra o la separación que existe entre el
15                   % extremo superior de la barra y la superficie del
16                   % suelo.
17  % Cálculos:
18 - a = -abs(h);      % Es un limite de integración.
19 - sigma = abs(1/rho); % conductividad del suelo S / m
20 - long = abs(long);
21 - x = abs(d);
22 - xp = 0;
23 - y = 0;
24 - yp = 0;
25 - b = a-long;      % Es otro límite de integración.
26  % Se realiza la doble integración de la función de Green:
27 - Integral = dblquad(@fGreen_z_zp,a,b,a,b);
28  % Se presenta el resultado:
29 - R_mutua_barras = (1./(sigma.*long.^2)).*Integral;
30 - R_mutua_barras % Solución
31
```

Fig. A4 Códigos para calcular la resistencia mutua entre barras empleando MathLab.

Cálculo usando MathCad.

Mathcad - [Anexo de los apuntes parte 3]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

100%

Calculo de la resistencia mutua entre barras . Solución numérica

Ver el apartado 5.2

Función de Green:

$$fGrenn(x, y, z, xp, yp, zp) := \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{(x - xp)^2 + (y - yp)^2 + (z - zp)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x - xp)^2 + (y - yp)^2 + (z + zp)^2}} \right]$$

Datos del suelo y de la barra :

$h := .8$ Profundidad a la cual se encuentra enterrada la parte superior de la barra (m)

$l := 4$ Longitud electrodo (m)

$\rho_s := 100$ (Ω m) Resistividad del suelo

$\sigma := \frac{1}{\rho}$ Conductividad del suelo

$\sigma = 0.01$ (S / m)

$d := 6$ Separación horizontal entre las barras (m)

Cálculos:

$a := -h$ Límite de integración para las variables z y zp,

$b := -l + a$ Límite de integración para la variable z y zp

$a = -0.8$ (m)

$b = -4.8$ (m)

Ecuacion (5.33) de los apuntes:

$$R_mutua_barras := \frac{1}{\sigma \cdot l^2} \int_b^a \int_b^a fGrenn(d, 0, z, 0, 0, zp) dzp dz$$

Solución

$R_mutua_barras = 2.258$ (Ω)

Fig. A5 Códigos para calcular la resistencia mutua entre barras empleando MathLab.

C Anexo C

- Cálculo numérico de la resistencia propia de una barra instalada inclinada en el suelo.

La figura A6 muestra una barra que se encuentra instalada formando un ángulo α con respecto a la vertical, esta situación suele ocurrir cuando se tiene un suelo rocoso, donde no es posible realizar la instalación de la barra verticalmente.

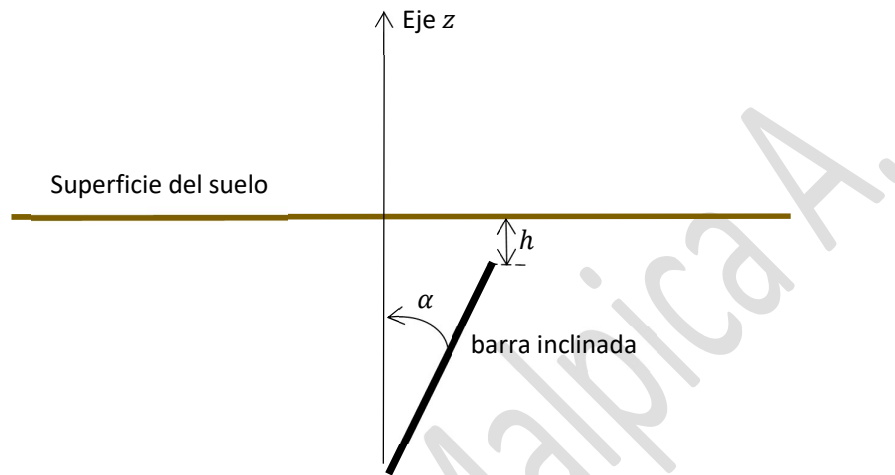


Fig. A6. Barra instalada en el suelo con un cierto ángulo de inclinación.

Cálculo usando MathLab.

```
Editor - C:\Users\Nçñ\Documents\Curso Puesta a tierra\MathLab\Apoyo Apuntes No 3\fGreen_z_zp_inc.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
[Barra de herramientas]
[Barra de calculadora]
1 function out = fGreen_z_zp_inc(z,zp)
2 global m b d bp dp y yp
3
4 % Funcion de Green para calcular la resistencia propia de una barra
5 % instalada inclinada en el suelo.
6
7 out = (1./(4.*pi)).*((1./sqrt((m.*(z-b)+d-m.*(zp-bp)-dp).^2+...
8 (y-yp).^2+(z-zp).^2))+ (1./sqrt((m.*(z-b)+d-m.*(zp-bp)-dp).^2+...
9 (y-yp).^2+(z+zp).^2)));
```

Fig. A7 Función de Green para calcular la resistencia de una barra inclinada


```

File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
Stack: Base
- 1.0 + 1.1 x %>% %>%
1 % Cálculo de la resistencia propia de una barra insalada inclinada en el
2 % suelo.
3 % Se procede a borrar todas las variables:
4 - clear
5 - clear variables
6 - global m b d bp dp y yp
7 % Datos de la barra y del suelo:
8 % Estos datos pueden ser modificados por el usuario.
9 - rho = 100; % resistividad del suelo ohm / m .
10 - long = 4; % longitud de la barra en metros.
11 - r = .006; % radio de la barra en metros.
12 - h = 0.8; % progundidad a la cual se encuentra el extremo superior
13 % de la barra o la separación que existe entre el extremo
14 % superior de la barra y la superficie del suelo.
15 - alfa = 15; % Angulo que forma la barra con respecto a un eje hipoté-
16 % tico instalado normal a la superficie del suelo (grados)
17 % Cálculos:
18 - long = abs(long);
19 - alfa = alfa.*pi./180;
20 - m = tan(alfa);
21 - ap = -abs(h);
22 - dp = 0;
23 - y = 0;
24 - yp = 0;
25 - cp = long.*sin(alfa);
26 - bp = ap-long.*cos(alfa);
27 - deltax = r.*cos(alfa);
28 - deltaz = r.*sin(alfa);
29 - a = ap + deltaz;
30 - b = bp + deltaz;
31 - c = cp - deltax;
32 - d = dp - deltax;
33 - sigma = abs(1/rho); % conductividad del suelo (S / m) .
34 % Se realiza la doble integración de la función de Green:
35 - Integral = dblquad(@fGreen_z_zp_inc,a,b,ap,bp);
36 % Se presenta el resultado:
37 - R_barra_inc = ((1.+m^2)/(sigma.*long.^2)).*Integral; % Solucion
38 - R_barra_inc

```

Fi. A8. Resistencia propia de una barra instalada inclinada en el suelo, usando MathLab.

Cálculo usando MathCad

Mathcad - [Anexo de los apuntes parte 3]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

100%

Calculo de la resistencia propia de una barra instalada inclinada en el suelo. Solución numérica

Función de Green:

$$f_{\text{Green}}(x, y, z, x_p, y_p, z_p) := \frac{1}{4 \cdot \pi} \left[\frac{1}{\sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + (z - z_p)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + (z + z_p)^2}} \right]$$

Datos del suelo y de la barra :

$h := 0.8$ Profundidad a la cual se encuentra enterrada la parte superior de la barra (m).

$l := 4$ Longitud de la barra (m).

$\rho := 100$ (Ω m) Resistividad del suelo

$\alpha := 15$ Angulo que forma la barra con respecto a un eje hipotético que apunta en dirección vertical (grados)

$\alpha_{\text{rad}} := \alpha \cdot \frac{\pi}{180}$

$\sigma := \frac{1}{\rho}$ Conductividad del suelo

$\sigma = 0.01$ (S / m)

$r := 0.006$ Radio de la barra en (m)

Cálculos:

$m := \tan(\alpha)$

$m = 0.268$

$dp := 0$

$cp := 1 - \sin(\alpha)$

$bp := -|h| - |l| \cdot \cos(\alpha)$

$ap := -|h|$

$xp(zp) := m \cdot (zp - bp) + dp$

$\Delta x := r \cdot \cos(\alpha)$

$\Delta z := r \cdot \sin(\alpha)$

Fig. A9-1. Cálculo de la resistencia de una barra instalada inclinada en el suelo.

$$xxp(zp) := m \cdot (zp - bp) + dp$$

$$\Delta x := r \cdot \cos(\alpha)$$

$$\Delta z := r \cdot \sin(\alpha)$$

$$b := bp + \Delta z$$

$$a := ap + \Delta z$$

$$c := cp - \Delta x$$

$$d := dp - \Delta x$$

$$xx(z) := m \cdot (z - b) + d$$

$$R_{\text{Barra}} := \frac{1 + m^2}{\sigma \cdot l^2} \cdot \int_b^a \int_{bp}^{ap} f_{\text{Grenn}}(xx(z), 0, z, xxp(zp), 0, zp) dzp dz$$

Solución

$$R_{\text{Barra}} = 26.264 \quad (\Omega)$$

Fig A9-2 Cálculo de la resistencia de una barra instalada inclinada en el suelo. Continuación.

D Anexo D

- Cálculo numérico de la resistencia propia de un contrapeso.

Cálculo usando MathLab

```
Editor - C:\Users\Nçñ\Documents\Curso Puesta a tierra\MathLab\Apoyo Apuntes No 3\fGreen_x_xp.m*
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
- 1.0 + ÷ 1.1 × %>% %>% %>% %>%
1 function out = fGreen_x_xp(x, xp)
2 global y yp z zp
3 % Funcion de Green para calcular la resistencia propia de un contrapeso y
4 % mutuas entre contrapesos, ambos situados paralelo al eje x.
5 out = (1./(4.*pi)).*((1./(sqrt((x-xp).^2+(y-yp).^2+(z - zp).^2)))+...
6 (1./(sqrt((x-xp).^2+(y-yp).^2+(z + zp).^2))));
```

Fig. A10. Función de Green para calcular la resistencia propia de un contrapeso

```
Editor - C:\Users\Nçñ\Documents\Curso Puesta a tierra\MathLab\Apoyo Apuntes No 3\Rcontrapeso.m*
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
- 1.0 + ÷ 1.1 × %>% %>% %>% %>%
1 % Cálculo de la resistencia propia de un contrapeso
2 % Este calculo esta hecho con base al apartado 6.1.
3 % Se procede a borrar todas las variables:
4 clear
5 clear variables
6 global y yp z zp
7 % Datos del contrapeso y del suelo:
8 % Estos datos pueden ser modificados por el usuario.
9 rho = 100; % resistividad del suelo ohm / m .
10 long = 6; % longitud del contrapeso en metros.
11 r = .006; % radio del contrapeso en metros.
12 h = 0.8; % profundidad a la cual se encuentra el contrapeso en
13 % metros.
14 % Cálculos:
15 a = abs(long); % Es un limite de integración.
16 sigma = abs(1/rho); % conductividad del suelo (S / m) .
17 y = 0;
18 yp = 0;
19 zp = -abs(h);
20 z = zp+abs(r);
21 b = 0; % Es otro limite de integración.
22 % Se realiza la doble integración de la función de Green:
23 Integral = dblquad(@fGreen_x_xp,a,b,a,b);
24 % Se presenta el resultado:
25 R_contrapeso = (1./(sigma.*long.^2)).*Integral; % Solucion
26 R_contrapeso
```

Fig. A11 Cálculo de la resistencia propia de un contrapeso.

Cálculo usando MathCad

Mathcad - [Anexo de los apuntes parte 3]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

100%

Calculo de la resistencia propia de un contrapeso. Solución numérica

En este anexo se muestra el cálculo de la resistencia propia del contrapeso No 1 mostrado en la Figura 22

Consultar el apartado 6.1 para el cálculo de la resistencia.

Función de Green:

$$f_{\text{Grenn}}(x, y, z, xp, yp, zp) := \frac{1}{4 \cdot \pi} \left[\frac{1}{\sqrt{(x - xp)^2 + (y - yp)^2 + (z - zp)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x - xp)^2 + (y - yp)^2 + (z + zp)^2}} \right]$$

Datos del suelo y de la barra :

$h := .8$ Profundidad a la cual se encuentra enterrado el contrapeso (m)

$l := 6$ Longitud electrodo (m)

$\rho := 100$ (Ω m) Resistividad del suelo

$\sigma := \frac{1}{\rho}$ Conductividad del suelo

$\sigma = 0.01$ (S / m)

$r := 0.006$ Radio del contrapeso en (m)

Cálculos:

$zp := -h$ Coordenada zp del electrodo ec. (6.8) (m)

$zp = -0.8$

$z := zp + |r|$ Coordenada z del electrodo ec. (6.9) (m)

$z = -0.794$

$yp := 0$ Coordenada yp del electrodo ec. (6.8) (m)

$y := 0$ Coordenada y del electrodo ec. (6.8) (m)

$a := 8$ Límite de integración para las variables x y xp,

$b := -|1| + a$ Límite de integración para la variable x y xp

$a = 8$ (m)

$b = 2$ (m) +

Ecuacion (6.12) :

$$R_{\text{Contrapeso}} := \frac{1}{.2} \int_b^a \int_b^a f_{\text{Grenn}}(x, y, z, xp, yp, zp) dx dy$$

Fig A12-1 Cálculo de la resistencia propia de un contrapeso.

$$\begin{aligned} a &= 8 && (\text{m}) \\ b &= 2 && (\text{m}) \end{aligned} \quad +$$

Ecuación (6.12) :

$$R_{\text{Contrapeso}} := \frac{1}{\sigma \cdot l^2} \int_b^a \int_b^a f_{\text{Grenn}}(x, y, z, x_p, y_p, z_p) \, dx_p \, dy_p$$

Solución

$$R_{\text{Contrapeso}} = 20.872 \quad (\Omega)$$

Fig. A12-2 Cálculo de la resistencia de un contrapeso. Continuación.

Napoleón Malpica

E Anexo E

Calculo numérico de la resistencia mutua entre contrapesos.

- Resistencia mutua entre contrapesos donde ambos se encuentran paralelos al eje x:

Cálculo usando MathLab:

```
Editor - C:\Users\Nçñ\Documents\Curso Puesta a tierra\MathLab\Apoyo Apuntes No 3\RMutuaContrapesos
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
- 1.0 + + 1.1 x
1 % Cálculo de la resistencia mutua entre contrapesos, ambos paralelos al
2 % eje x.
3 % Este calculo esta hecho con base al apartado 6.2.
4 % Se procede a borrar todas las variables:
5 clear
6 clear variables
7 global y zp z zp
8 % Datos de las barras y del suelo:
9 % Los datos mostrados a continuación pueden ser modificados por el usuario.
10 % Se deben ingresar las coordenadas de los contrapesos.
11 % Coordenadas del primer contrapeso (Se asume que se encuentra paralelo al
12 % eje X):
13 yp = 5; % Coordenada y del primer contrapeso (m).
14 hl = 1.2; % Profundidad a la cual se encuentra enterrado el pri-
15 % mer contrapeso (m).
16 zp = -abs(hl);
17 a = 8; % Coordenada x de un extremo del primer contrapeso (m).
18 b = 2; % Coordenada x del otro extremo del primer contrapeso
19 % (m).
20 if b > a
21 aa = b;
22 b = a;
23 a = aa;
24 end
25 l1 = abs(a-b); % Longitud del primer contrapeso (m).
26 %Coordenadas de segundo contrapeso:
27 y = 2; % Coordenada y del segundo contrapeso (m).
28 h2 = 1; % Profundidad a la cual se encuentra enterrado el se-
29 % gundo contrapeso (m).
30 c = 6; % Coordenada x de un extremo del segundo contrapeso (m)
31 d = 1; % Coordenada x del otro extremo del segundo contrapeso
32 % (m).
33 if d > c
34 aa = d;
35 d = c;
36 c = aa;
37 end
38 l2 = abs(c-d); % Longitud del segundo contrapeso (m).
39 % Otros datos:
40 rho = 100; % resistividad del suelo ohm / m .
```

Fig A13-1 Resistencia mutua entre dos contrapesos, ambos situados paralelos al eje x.

```
39 % Otros datos:
40 rho = 100; % resistividad del suelo ohm / m .
41 r = 0.006; % Radio de los contrapesos en metro.
42 z = -abs(h2)+r;
43 % Cálculos:
44 sigma = abs(1/rho); % conductividad del suelo S / m
45 % Se realiza la doble integración de la función de Green:
46 Integral = dblquad(@fGreen_x_xp,c,d,a,b);
47 % Se presenta el resultado:
48 R_mutua_contrapesos = (1./(sigma.*l1.*l2)).*Integral;
49 R_mutua_contrapesos % Solución
50
```

Fig A13-2 Resistencia mutua entre dos contrapesos, ambos situados paralelos al eje x.
Continuación.

Cálculo usando MathCad.

Mathcad - [Anexo de los apuntes parte 3]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

100%

Calculo de la resistencia mutua entre contrapesos que se encuentran paralelos al eje x. Solución numérica

A continuación se presenta el cálculo de la resistencia mutua entre dos contrapesos que se, encuentran paralelos al eje x, consultar el apartado 6.2 para el fundamento teórico.

Función de Green:

$$f_{Green}(x, y, z, xp, yp, zp) := \frac{1}{4 \cdot \pi} \left[\frac{1}{\sqrt{(x - xp)^2 + (y - yp)^2 + (z - zp)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x - xp)^2 + (y - yp)^2 + (z + zp)^2}} \right]$$

Datos del suelo y de los contrapesos :

Primer contrapeso:

$h1 := 1.2$ Profundidad a la cual se encuentra enterrado el primer contrapeso (m)
 $yp := 5$ Coordenada yp del contrapeso No. 1 (m).
 $a := 8$ Coordenada xp de un extremo del electrodo No 1 (m).
 $b := 2$ Coordenada xp del otro extremo del electrodo No. 1 (m).
 $l1 := |a - b|$ Longitud contrapeso No 1 en metros.
 $l1 = 6$
 $zp := -|h1|$ Coordenada zp del contrapeso No 1 en metros

Segundo Contrapeso:

$y := 2$ Coordenada y del contrapeso No. 2 en metros
 $h2 := 1$ Profundidad a la cual se encuentra enterrado el primer contrapeso (m).
 $c := 6$ Coordenada x de un extremo del electrodo No 2 (m).
 $d := 1$ Coordenada x del otro extremo del electrodo No. 2 (m).
 $l2 := |c - d|$ Longitud contrapeso No 2 en metros
 $l2 = 5$
 $r := 0.006$ Radio de los electrodos (m).
 $z := -|h2| + |r|$ Coordenada z del contrapeso No 2 en metros
 $z = -0.994$

Otros datos:

$\rho := 100$ (Ω m) Resistividad del suelo
 $\sigma := \frac{1}{\rho}$ Conductividad del suelo

Fig. A14.1 Resistencia mutua entre dos contrapesos ubicados paralelos al eje x


```

z := -|h2| + |r|   Coordenada z del contrapeso No 2 en metros
z = -0.994
Otros datos:
ρs := 100         (Ω m) Resistividad del suelo
σ := 1/ρ         Conductividad del suelo
σ = 0.01        (S / m)
Cálculos:
R_mutua_contrapesos := 1 / (σ * l1 * l2) * ∫dc ∫ba fGreen(x, y, z, xp, yp, zp) dx dy
R_mutua_contrapesos = 3.951   (Ω)

```

Fig. A14-2 Resistencia mutua entre dos contrapesos ubicados paralelos al eje x. Continuación.

- Resistencia mutua entre contrapesos donde ambos se encuentran paralelos al eje y:

Cálculo usando MathLab:

```

Editor - C:\Users\Nçñ\Documents\Curso Puesta a tierra\MathLab\Apoyo Apuntes No 3\Green_y_yp.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
Stack: Base
1 function out = fGreen_y_yp(y, yp)
2 global x xp z zp
3
4 % Funcion de Green para calcular la resistencia propia de un contrapeso y
5 % mutuas entre contrapesos, ambos situados paralelo al eje y.
6
7 out = (1./(4.*pi)).*(1./(sqrt((x-xp).^2+(y-yp).^2+(z-zp).^2)))+...
8 (1./(sqrt((x-xp).^2+(y-yp).^2+(z+zp).^2)));

```

Fig. A15 Función de Green para calcular la resistencia propia de contrapesos situados paralelos al eje y, y además para calcular la resistencia mutua entre electrodos que se encuentren paralelos al eje y.

Cálculo usando MathCad:

Mathcad - [Anexo de los apuntes parte 3]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

Calculation of the mutual resistance between two parallel electrodes. Solution by numerical method.

A continuación se presenta el cálculo de la resistencia mutua entre dos contrapesos que se encuentran paralelos al eje y, consultar el apartado 6.2 para el fundamento teórico.

Función de Green:

$$f_{\text{Green}}(x, y, z, xp, yp, zp) := \frac{1}{4 \cdot \pi} \left[\frac{1}{\sqrt{(x - xp)^2 + (y - yp)^2 + (z - zp)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x - xp)^2 + (y - yp)^2 + (z + zp)^2}} \right]$$

Datos del suelo y de los contrapesos :

Primer contrapeso:

$h1 := 1.2$ Profundidad a la cual se encuentra enterrado el primer contrapeso (m)
 $xp := 5$ Coordenada xp del contrapeso No. 1 (m).
 $a := 8$ Coordenada yp de un extremo del electrodo No 1 (m).
 $b := 2$ Coordenada yp del otro extremo del electrodo No. 1 (m).
 $l1 := |a - b|$ Longitud contrapeso No 1 en metros.
 $l1 = 6$
 $zp := -|h1|$ Coordenada zp del contrapeso No 1 en metros

Segundo Contrapeso:

$x := 2$ Coordenada x del contrapeso No. 2 en metros
 $h2 := 1$ Profundidad a la cual se encuentra enterrado el primer contrapeso (m).
 $c := 6$ Coordenada y de un extremo del electrodo No 2 (m).
 $d := 1$ Coordenada y del otro extremo del electrodo No. 2 (m).
 $l2 := |c - d|$ Longitud contrapeso No 2 en metros
 $l2 = 5$
 $r := 0.006$ Radio de los electrodos (m).
 $z := -|h2| + |r|$ Coordenada z del contrapeso No 2 en metros
 $z = -0.994$

Otros datos:

$\rho := 100$ (Ω m) Resistividad del suelo
 $\sigma := \frac{1}{\rho}$ Conductividad del suelo

Fig. A17-1 Cálculo de la resistencia mutua entre contrapesos, ambos situados paralelos al eje y.

$r := 0.006$ Radio de los electrodos (m).
 $z := -|h2| + |r|$ Coordenada z del contrapeso No 2 en metros
 $z = -0.994$

Otros datos:

$\rho := 100$ (Ω m) Resistividad del suelo
 $\sigma := \frac{1}{\rho}$ Conductividad del suelo
 $\sigma = 0.01$ (S / m)

Cálculos y solución:

$$R_{\text{mutua_contrapesos}} := \frac{1}{\sigma \cdot l1 \cdot l2} \int_d^c \int_b^a f_{\text{Green}}(x, y, z, xp, yp, zp) \, dy \, dy$$

$R_{\text{mutua_contrapesos}} = 3.951$ (Ω)

Fig. A17-2 Cálculo de la resistencia mutua entre contrapesos, ambos situados paralelos al eje y.
Continuación.

- Resistencia mutua entre contrapesos donde ambos se encuentran formando un ángulo de 90 grados.

Cálculo usando MathLab:

```

Editor - C:\Users\Nçñ\Documents\Curso Puesta a tierra\MathLab\Apoyo Apuntes No 3\Green_x_yp.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
- 1.0 + + 1.1 x
1 function out = fGreen_x_yp(x,yp)
2 global xp y z zp
3
4 % Funcion de Green para calcular la resistencia mutua entre contrapesos,
5 % uno de ellos situado paralelo al eje x y el otro paralelo al eje y.
6
7 out = (1./(4.*pi)).*(1./(sqrt((x-xp).^2+(y-yp).^2+(z - zp).^2)))+...
8 (1./(sqrt((x-xp).^2+(y-yp).^2+(z + zp).^2)));

```

Fig. A18 Función de Green para calcular la resistencia mutua entre contrapesos que forman un ángulo de 90 grados.

```

Editor - C:\Users\Nçñ\Documents\Curso Puesta a tierra\MathLab\Apoyo Apuntes No 3\RMutuaContrapeso
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
- 1.0 + + 1.1 x
1 % Cálculo de la resistencia mutua entre contrapesos, formando 90 grados,
2 % uno paralelo al eje x y el otro paralelo al eje y.
3 % Este calculo esta hecho con base al apartado 6.2.
4 % Se procede a borrar todas las variables:
5 clear
6 clear variables
7 global x yp z zp
8 % Datos de los contrapesos y del suelo:
9 % Los datos mostrados a continuación pueden ser modificados por el usuario.
10 % Se deben ingresar las coordenadas de los contrapesos.
11 % Coordenadas del contrapeso que se encuentra paralelo al eje x:
12 yp = 5; % Coordenada y del contrapeso (m).
13 hl = 1.2; % Profundidad a la cual se encuentra enterrado el
14 % contrapeso (m).
15 zp = -abs(hl);
16 a = 8 ; % Coordenada x de un extremo del contrapeso (m).
17 b = 2; % Coordenada x del otro extremo del contrapeso
18 % (m).
19 if b > a
20 aa = b;
21 b = a;
22 a = aa;
23 end
24 l1 = abs(a-b); % Longitud del contrapeso (m) paralelo al eje x.
25 %Coordenadas de contrapeso que se encuentra paralelo al eje y:
26 x = 2; % Coordenada x del contrapeso (m).
27 h2 = 1; % Profundidad a la cual se encuentra enterrado el
28 % contrapeso (m).
29 c = 6; % Coordenada y de un extremo del contrapeso (m)
30 d = 1; % Coordenada y del otro extremo del contrapeso
31 % (m).
32 if d > c
33 aa = d;
34 d = c;
35 c = aa;
36 end
37 l2 = abs(c-d); % Longitud del contrapeso (m) paralelo al eje x.
38 % Otros datos:
39 rho = 100; % resistividad del suelo ohm / m .
40 r = 0.006; % Radio de los contrapesos en metro.

```

Fig. A19-1 Resistencia mutua entre contrapesos que forman entre ellos un ángulo de 90 grados.

```

36 - end
37 - l2 = abs(c-d);      % Longitud del contrapeso (m) paralelo al eje x.
38 - % Otros datos:
39 - rho = 100;        % resistividad del suelo ohm / m .
40 - r = 0.006;       % Radio de los contrapesos en metro.
41 - z = -abs(h2)+r;
42 - % Cálculos:
43 - sigma = abs(1/rho); % conductividad del suelo S / m
44 - % Se realiza la doble integración de la función de Green:
45 - Integral = dblquad(@fGreen_y_xp,c,d,a,b);
46 - % Se presenta el resultado:
47 - R_mutua_contrapesos = (1./(sigma.*l1.*l2)).*Integral;
48 - R_mutua_contrapesos % Solución
49
RMutuaContrapesos_X_X.m*  RMutuaContrapesos_X_Y.m*  x

```

Fig. A19-2 Resistencia mutua entre contrapesos que forman entre ellos un ángulo de 90 grados. Continuación.

Cálculo usando MathCad:

Mathcad - [Anexo de los apuntes parte 3]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

100%

Calculo de la resistencia mutua entre dos contrapesos, que forman un ángulo de 90 grados. Solución numérica

A continuación se presenta el cálculo de la resistencia mutua entre dos contrapesos como los mostrados en la Fig. 22, uno de ellos encuentran paralelos al eje x, y el otro paralelo al eje y, consultar el apartado 6.2 para el fundamento teórico.

Función de Green:

$$f_{Green}(x,y,z, xp, yp, zp) = \frac{1}{4 \cdot \pi} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-xp)^2 + (y-yp)^2 + (z-zp)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-xp)^2 + (y-yp)^2 + (z+zp)^2}} \right]$$

Datos del suelo y de los contrapesos :

Primer contrapeso que se encuentra paralelo al eje x:

h1 = 1.2 Profundidad a la cual se encuentra enterrado el primer contrapeso (m)
yp = 5 Coordenada y del contrapeso No. 1 (m)
xp = 8 Coordenada x de un extremo del electrodo No 1 (m)
bx = 2 Coordenada x del otro extremo del electrodo No. 1 (m)
l1 = |a - b| Longitud contrapeso No 1 en metros.
l1 = 6
zp = -|h1| Coordenada zp del contrapeso No 1 en metros

Segundo Contrapeso:

x = 2 Coordenada x del contrapeso No. 2 en metros
h2 = 1 Profundidad a la cual se encuentra enterrado el segundo contrapeso (m).
yp = 6 Coordenada y de un extremo del electrodo No 2 (m).
xp = 1 Coordenada y del otro extremo del electrodo No. 2 (m).
l2 = |c - d| Longitud contrapeso No 2 en metros
l2 = 5
r = 0.006 Radio de los electrodos (m).
z = -|h2| + |r| Coordenada z del contrapeso No 2 en metros
z = -0.994

Otros datos:

ρ = 100 (Ω m) Resistividad del suelo
σ = 1 / ρ Conductividad del suelo
σ = 0.01 (S / m)

Cálculos:

$$R_{mutua_contrapesos} = \frac{1}{\sigma \cdot l1 \cdot l2} \int_a^c \int_b^d f_{Green}(x,y,z, xp, yp, zp) dx dy$$

R_mutua_contrapesos = 5.006 (Ω)

Fig. A20-1 Resistencia mutua entre contrapesos que forman entre ellos un ángulo de 90 grados.

Otros datos:

ρ = 100 (Ω m) Resistividad del suelo
σ = 1 / ρ Conductividad del suelo
σ = 0.01 (S / m)

Cálculos:

$$R_{mutua_contrapesos} = \frac{1}{\sigma \cdot l1 \cdot l2} \int_a^c \int_b^d f_{Green}(x,y,z, xp, yp, zp) dx dy$$

R_mutua_contrapesos = 5.006 (Ω)

Fig. A20-2 Resistencia mutua entre contrapesos que forman entre ellos un ángulo de 90 grados. Continuación

- Resistencia mutua entre contrapesos donde ambos se encuentran formando un ángulo cualquiera.

La Fig. 21 muestra un plano de planta de dos contrapesos que se encuentran formando un cierto ángulo α entre ellos, pero diferente a 90 grados, se desea obtener el valor de la resistencia mutua que existe entre ambos.

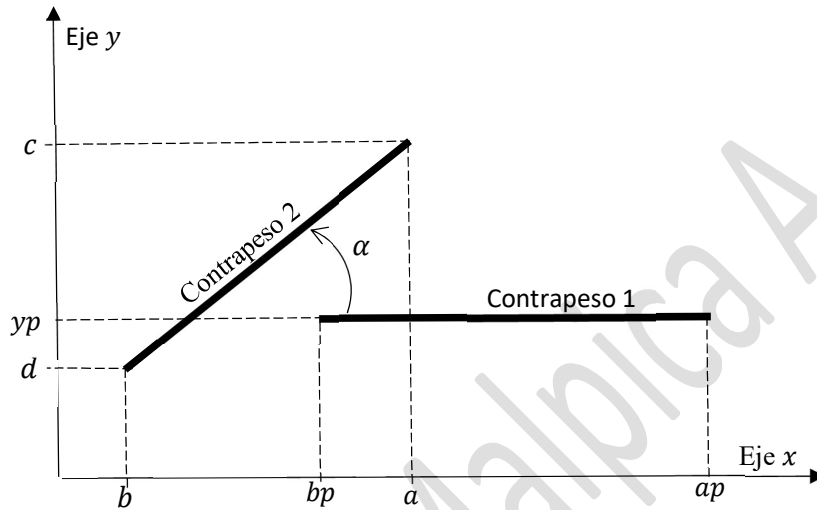


Fig.A21 Dos contrapesos que forman un ángulo α entre ellos.

Cálculo usando MathLab:

```

Editor - C:\Users\Nqn\Documents\Curso Puesta a tierra\MathLab\Apoyo Apuntes No 3\MutuaContrapeso
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
% Cálculo de la resistencia mutua entre contrapesos, formando un ángulo
% cualquiera, uno paralelo al eje x y el otro orientado en cualquier
% ángulo.
% Se procede a borrar todas las variables:
clear
clear variables
global m b d z zp yp
% Datos de los contrapesos y del suelo:
% Los datos mostrados a continuación pueden ser modificados por el usuario
% Se deben ingresar las coordenadas de los contrapesos.
% Coordenadas del contrapeso que se encuentra paralelo al eje x:
yp = 5; % Coordenada y del contrapeso (m).
h1 = 1.2; % Profundidad a la cual se encuentra enterrado el
% contrapeso (m).
zp = -abs(h1);
ap = 8; % Coordenada x de un extremo del contrapeso (m).
bp = 2; % Coordenada x del otro extremo del contrapeso
% (m).
if bp > ap
aa = bp;
bp = ap;
ap = aa;
end
l1 = abs(ap-bp); % Longitud del contrapeso (m) paralelo al eje x.
%Coordenadas de los puntos extremos del contrapeso que se encuentra
% formando cualquier ángulo:
c = 4; % Coordenada y del extremo 1 (m).
a = 2; % Coordenada x del extremo 1 (m).
d = 2; % Coordenada y del extremo 2 (m).
b = 0; % Coordenada x del extremo 2 (m).
h2 = 1; % Profundidad a la cual se encuentra enterrado el
% contrapeso (m).
if b > a
aa = b;
b = a;
a = aa;
aa = d;
d = c;
c = aa;
end

```

Fig. A22-1 Resistencia mutua entre dos contrapesos que forman un ángulo α entre ellos.

```

39 -       c = aa;
40 -     end
41 -     m = (c-d)/(a-b);
42 -     l2 = sqrt((a-b)^2+(c-d)^2); % Longitud del contrapeso (m) .
43 -     % Otros datos:
44 -     rho = 100; % resistividad del suelo ohm / m .
45 -     z = 0.006; % Radio de los contrapesos en metro.
46 -     z = -abs(h2)+z;
47 -     % Cálculos:
48 -     sigma = abs(1/rho); % conductividad del suelo S / m
49 -     % Se realiza la doble integración de la función de Green:
50 -     Integral = dblquad(@fGreen_x_xp_contrap_angulo,a,b,ap,bp);
51 -     % Se presenta el resultado:
52 -     R_mutua_ContrapEnAngulo = (sqrt(1+m^2)/(sigma.*l1.*l2)).*Integral;
53 -     R_mutua_ContrapEnAngulo % Solución
54 -

```

Fig. A22-2 Resistencia mutua entre dos contrapesos que forman un ángulo α entre ellos.
Continuación.

```

Editor - C:\Users\Ngn\Documents\Curso Puesta a tierra\MathLab\Apoyo Apuntes No 3\fGreen_x_xp_contrap_a
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
Stack: Base
- 1.0 + + 1.1 x
1 function out = fGreen_x_xp_contrap_angulo(x, xp)
2 global m b d yp z zp
3
4 % Funcion de Green para calcular la resistencia mutua entre contrapesos
5 % que forman un ángulo cualquiera que no sea 90 grados.
6
7 out = (1./(4.*pi)).*(1./(sqrt((x-xp).^2+(m.*(x-b)+d-yp).^2+(z - zp).^2)))+...
8 (1./(sqrt((x-xp).^2+(m.*(x-b)+d-yp).^2+(z + zp).^2)));

```

Fig A23 Función de Green para calcular la resistencia mutua entre dos contrapesos que forman un ángulo diferente a 90 grados.

Napoleón Malpica A.

Cálculo usando MathCad:

Mathcad - [Anexo de los apuntes parte 3]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

100%

Calculo de la resistencia mutua entre contrapesos y que se encuentran formando un angulo cualquiera. Solución numérica

A continuación se presenta el cálculo de la resistencia mutua entredos contrapesos que se encuentran formando un ángulo cualquiera, diferente a 90 grados, uno de ellos se encuentra paralelo al eje x, consultar el apartado 6.2 para el fundamento teórico.

Función de Green:

$$f_{Green}(x, y, z, xp, yp, zp) := \frac{1}{4 \cdot \pi} \left[\frac{1}{\sqrt{(x - xp)^2 + (y - yp)^2 + (z - zp)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x - xp)^2 + (y - yp)^2 + (z + zp)^2}} \right]$$

Datos del suelo y de los contrapesos :

Primer contrapeso, paralelo al eje x:

$h1 := 1.2$ Profundidad a la cual se encuentra enterrado el primer contrapeso (m)

$yp := 5$ Coordenada y del contrapeso No. 1 (m).

$ap := 8$ Coordenada x de un extremo del electrodo No 1 (m).

$bp := 2$ Coordenada x del otro extremo del electrodo No. 1 (m).

$l1 := |ap - bp|$ Longitud contrapeso No 1 en metros.

$h1 = 6$

$zp := -|h1|$ Coordenada zp del contrapeso No 1 en metros

Segundo Contrapeso :

Coordenadas de un extremo del segundo contrapeso:

$ca := 4$ Coordenada y en metros

$aa := 2$ Coordenada x en metros

Coordenadas del otro extremo del segundo contrapeso:

$da := 2$ Coordenada y en metros

$ba := 0$ Coordenada x en metros

$h2 := 1$ Profundidad a la cual se encuentra enterrado el segundo contrapeso (m).

Fig. A24-1 Resistencia mutua entre dos contrapesos que forman un ángulo α entre ellos.


```

h2 := 1      Profundidad a la cual se encuentra enterrado el segundo contrapeso
              (m).

l2 := sqrt((c - d)^2 + (a - b)^2)  Longitud contrapeso No 2 en metros
l2 = 2.828
r := 0.006  Radio de los electrodos (m).
z := -|h2| + |r|  Coordenada z del contrapeso No 2 en metros
z = -0.994

Otros datos:
rho := 100  (Ω m) Resistividad del suelo
sigma := 1/rho  Conductividad del suelo
sigma = 0.01  (S / m)

Cálculos:
m := (c - d) / (a - b)
yy(x) := m * (x - b) + d

Ecuacion (6, 14):
R_mutua_contrapesos := (sqrt(1 + m^2) / (sigma * l1 * l2)) * integral(b, a) integral(bp, sp) fGrenn(x, yy(x), z, xp, yp, zp) dx dp

```

Solución

```

R_mutua_contrapesos = 3.784 (Ω)

```

Fig. A24-2 Resistencia mutua entre dos contrapesos que forman un ángulo α entre ellos.
Continuación.

Napoleón Malpica A.

F Anexo F

- Cálculo numérico de la resistencia mutua entre un contrapeso y una barra.

Cálculo usando MathLab:

```

Editor - C:\Users\Ncp\Documents\Curso Puesta a tierra\MathLab\Apoyo Apuntes No 3\Green_x_zp.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
1 function out = fGreen_x_zp(x,zp)
2     global xp y zp z
3
4     % Funcion de Green para calcular la resistencia mutua entre un contrapeso
5     % y una barra, el contrapeso paralelo al eje x.
6
7     out = (1./((4.*pi)).*(1./((sqrt((x-xp).^2+(y-yp).^2+(z-zp).^2)))+...
8           (1./((sqrt((x-xp).^2+(y-yp).^2+(z+zp).^2)))));

```

Fig A25 Función de Green utilizada para calcular la resistencia mutua entre una barra y un contrapeso.

```

Editor - C:\Users\Ncp\Documents\Curso Puesta a tierra\MathLab\Apoyo Apuntes No 3\RmutuaBarraContrapeso_X.m*
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
1 % Cálculo de la resistencia mutua entre una barra y un contrapeso situado
2 % paralelo al eje X.
3 % Se procede a borrar todas las variables:
4 - clear
5 - clear variables
6 - global xp y zp z
7 % Datos de los contrapesos y del suelo:
8 % Los datos mostrados a continuación pueden ser modificados por el usuario.
9 % Se deben ingresar las coordenadas de los contrapesos.
10 % Coordenadas del contrapeso que se encuentra paralelo al eje x:
11 y = 5; % Coordenada y del contrapeso (m).
12 h1 = 1.2; % Profundidad a la cual se encuentra enterrado el
13 % contrapeso (m).
14 z = -abs(h1);
15 c = 8; % Coordenada x de un extremo del contrapeso (m).
16 d = 2; % Coordenada x del otro extremo del contrapeso
17 % (m).
18 if d > c
19     aa = d;
20     d = c;
21     c = aa;
22 end
23 l1 = abs(c-d); % Longitud del contrapeso (m) paralelo al eje x.
24 % Coordenadas de la barra:
25 xp = 2; % Coordenada x de la barra (m).
26 yp = 6; % Coordenada y de la barra (m).
27 l2 = 4; % Longitud de la barra (m)
28 h2 = 1; % Profundidad a la cual se encuentra enterrada el
29 % extremo superior de la barra (m).
30 a = -abs(h2); % Coordenada y de un extremo del contrapeso (m)
31 b = a-abs(l2); % Coordenada y del otro extremo del contrapeso (m).
32 % Otros datos:
33 rho = 100; % resistividad del suelo ohm / m .
34 r = 0.006; % Radio de los contrapesos en metro.
35 z = z+r;
36 % Cálculos:
37 sigma = abs(1/rho); % conductividad del suelo S / m
38 % Se realiza la doble integración de la función de Green:
39 Integral = dbliquad(@fGreen_x_zp,c,d,a,b);
40 % Se presenta el resultado:
41 R_mutua_barra_contrapeso = (1./((sigma.*l1.*l2)).*Integral;
42 R_mutua_barra_contrapeso % Solución
43

```

Fig A26-1 Resistencia mutua entre un contrapeso y una barra.

```

32 % Otros datos:
33 rho = 100; % resistividad del suelo ohm / m .
34 r = 0.006; % Radio de los contrapesos en metro.
35 z = z+r;
36 % Cálculos:
37 sigma = abs(1/rho); % conductividad del suelo S / m
38 % Se realiza la doble integración de la función de Green:
39 Integral = dbliquad(@fGreen_x_zp,c,d,a,b);
40 % Se presenta el resultado:
41 R_mutua_barra_contrapeso = (1./((sigma.*l1.*l2)).*Integral;
42 R_mutua_barra_contrapeso % Solución
43

```

Fig A26-2 Resistencia mutua entre un contrapeso y una barra. Continuación

Cálculo usando MathCad

Mathcad - [Anexo de los apuntes parte 3]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

100%

Calculo de la resistencia mutua entre una barra y un contrapeso. Solución numérica

A continuación se presenta el cálculo de la resistencia mutua entre una barra y un contrapesos que se, encuentran paralelos al eje x.

Función de Green:

$$f_{Green}(x, y, z, xp, yp, zp) := \frac{1}{4 \cdot \pi} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-xp)^2 + (y-yp)^2 + (z-zp)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-xp)^2 + (y-yp)^2 + (z+zp)^2}} \right]$$

Datos del suelo, del contrapeso y la barra :

Contrapeso:

$h2 := 1.2$ Profundidad a la cual se encuentra enterrado el contrapeso (m)
 $yp := 5$ Coordenada y del contrapeso (m).
 $cp := 8$ Coordenada x de un extremo del contrapeso (m).
 $cd := 2$ Coordenada x del otro extremo del contrapeso (m).
 $l2 := |c - d|$ Longitud contrapeso en metros.
 $l2 = 6$
 $z2 := -|h2|$ Coordenada z del contrapeso en metros

Barra:

$l1 := 4$ Longitudde la barra (m).
 $yp := 6$ Coordenada y de la barra en metros
 $xp := 2$ Coordenada x de la barra en metros
 $h1 := 1$ Profundidad a la cual se encuentra enterrado el extremo sup. de la barra (m)
 $az := -|h1|$ Coordenada z del extremo superior de la barra (m).
 $bz := a - |h1|$ Coordenada z del extremo inferior de la barra (m).
 $ra := 0.006$ Radio de los electrodos (m).

Otros datos:

$z := z + r$
 $\rho_s := 100$ (Ω m) Resistividad del suelo
 $\sigma := \frac{1}{\rho}$ Conductividad del suelo
 $\sigma = 0.01$ (S / m)

Cálculos y solución:

Fig. A27-1 Resistencia mutua entre un contrapeso y una barra.

Otros datos:

$z := z + r$
 $\rho_s := 100$ (Ω m) Resistividad del suelo
 $\sigma := \frac{1}{\rho}$ Conductividad del suelo
 $\sigma = 0.01$ (S / m)

Cálculos y solución:

$$R_{mutua_contrapeso_barra} := \frac{1}{\sigma \cdot l1 \cdot l2} \int_b^a \int_d^c f_{Green}(x, y, z, xp, yp, zp) dx dz$$

$R_{mutua_contrapeso_barra} = 3.992$ (Ω)

Fig. A27-2 Resistencia mutua entre un contrapeso y una barra. Continuación.