

SISTEMAS DE PUESTA A TIERRA

PARTE 1

Napoleón Malpica Albert

Octubre 2020

Contenido

PARTE 1.....	1
1. Introducción.....	3
2. Las ecuaciones de Maxwell y el electrodo semiesférico para puesta a tierra.....	5
3. Modelo eléctrico del electrodo semiesférico para puesta a tierra.....	12
4. Potenciales sobre la superficie del suelo, la tensión de paso.....	13
5. La tensión de toque.....	17
6. La zona de influencia de un electrodo o de un grupo de electrodos de puesta a tierra	19
7. Resistencia mutua entre electrodos semiesféricos.	22
8. Sistema de puesta a tierra formado por dos electrodos.	24
9. Sistema de puesta a tierra formado por más de dos electrodos.....	26
10. La corriente de retorno de un sistema de puesta a tierra.....	29
11. Potencial del suelo en sistemas de puesta a tierra formado por más de un electrodo.	32

SISTEMAS DE PUESTA A TIERRA

PRIMERA PARTE

1. Introducción.

Un sistema de puesta a tierra consiste de uno o más electrodos, enterrados en el suelo, que se encuentran interconectados entre sí y que por estar en contacto galvánico con el suelo o la tierra, los mismos adquieren el potencial del suelo. Con el sistema de puesta a tierra, se puede poner al mismo “potencial del suelo o de la tierra” cualquier infraestructura, o cualquier cubierta metálica de un equipo eléctrico, al interconectar los electrodos con la infraestructura o con las cubiertas metálicas de los equipos eléctricos que se quieran proteger.

Cualquier infraestructura, por norma, debe contar con un sistema de puesta a tierra, que se utiliza para brindar seguridad a las personas o a los seres vivos y a los equipos eléctricos, al ocurrir fallas en los sistemas eléctricos o cuando impactan rayos en las edificaciones o infraestructuras. También es necesario proveer de un sistema de puesta a tierra en los equipos eléctricos que se encuentran expuestos a la intemperie. La recomendación IEEE 80¹ presenta numerosas situaciones sobre la necesidad de disponer de un sistema de puesta a tierra para cualquier infraestructura.

Como su título lo indica, este trabajo presenta una introducción a los sistemas de puesta a tierra, pero sin perder de vista los fundamentos físicos sobre la cual se fundamentan dichos sistemas; es por este motivo, que el primer capítulo está dedicado a las ecuaciones de Maxwell ya que en ellas se deducen los conceptos que están relacionados con los sistemas de puesta a tierra.

Cualquiera que ha tomado un curso sobre electromagnetismo, sabe de lo complicado del tema, además del hecho de tener que trabajar con sistemas de ecuaciones vectoriales, en derivadas parciales, que por lo general no resultan fáciles de resolver y cuya solución requieren métodos que son tratados en cursos avanzados sobre ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Sin embargo, es posible tratar el tema de puesta a tierra, con suficiente profundidad, usando las ecuaciones de Maxwell y sin tener que recurrir a complicados métodos matemáticos para resolver las ecuaciones diferenciales sobre el campo electromagnético

Para cumplir con este objetivo, buena parte de los conceptos tratados en este trabajo se desarrollan, en buena medida, con un solo tipo de electrodo, que consiste en una semiesfera enterrada al ras del suelo, donde el campo eléctrico producido por este electrodo en cuestión,

¹ IEEE Std 80-2000. Guide for Safety in AC Substation Grounding

al presentar una simetría esférica, las ecuaciones diferenciales resultantes tienen la particularidad que son fáciles de resolver. Las soluciones obtenidas y los conceptos manejados con el electrodo semiesférico se pueden extrapolar a electrodos de forma cilíndricas, como las barras que es el electrodo enterrado verticalmente y los contrapesos que son los electrodos enterrados horizontalmente y que son los más comunes o los más usados.

Pues bien, para modelar un sistema de puesta a tierra, es necesario determinar o conocer el comportamiento del campo electromagnético en el suelo o en la tierra; por lo general, las corrientes que se drenan por los sistemas de puesta a tierra, tienen una frecuencia de 60Hz, cuando se trata de ocurrencias de fallas en la red de suministro eléctrico, y en el caso de descargas atmosférica, las corrientes que se drenan a tierra pueden tener un espectro en frecuencia que puede llegar a los 10 MHz o más.

En vista que las corriente que se drenan por los sistemas de puesta a tierra, son variables en el tiempo, entonces para extraer el modelo eléctrico del sistema de puesta a tierra, a partir de las ecuaciones de Maxwell, lo correcto es considerar que el campo electromagnético es también variable en el tiempo, lo que trae como consecuencia que se tendría que trabajar con complicadas ecuaciones de difusión o de propagación del campo electromagnético. Sin embargo, si no se toma en cuenta las variaciones temporales del campo electromagnético, o sea, si se asume un campo estacionario, con la finalidad de trabajar con ecuaciones más simples, el modelo eléctrico aproximado que se obtiene para los electrodos, se aproxima en muy buena medida con los modelos que se obtendrían, si se asume que existe un fenómeno de propagación de ondas; o sea, si se considera la dinámica del campo electromagnético.

En vista de lo anterior, para modelar el sistema de puesta a tierra, en este trabajo se asume que el campo eléctrico no varía en el tiempo o es del tipo estacionario.

Para aquel lector que se inicia en este tema, se recomienda, acompañar este trabajo con la lectura de la recomendación IEEE Std 80 IEEE Guide for Safety in AC Grounding System.

2. Las ecuaciones de Maxwell y el electrodo semiesférico para puesta a tierra.

Son las siguientes:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad (2-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2-3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \quad (2-4)$$

donde:

D Es el vector desplazamiento eléctrico (C/m²).

E Es el vector campo eléctrico (V/m).

H Es el vector campo magnético (H/m).

B Es el vector inducción magnética o densidad de flujo magnético (T).

ρ Densidad volumétrica de carga (C/m³)

Debido a las propiedades del medio, ciertas cantidades vectoriales se relacionan entre sí:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (2-5)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (2-6)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2-7)$$

donde ε, σ, μ son la permitividad, la conductividad y la permeabilidad respectivamente del suelo.

Si en las ecuaciones de Maxwell no se consideran las variaciones temporales, entonces las ecuaciones (2-1), (2-2), (2-3) y (2-4) quedan así:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2-8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2-9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2-10)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (2-11)$$

Si se sustituye (2-5) en (2-8) y (2-7) en (2-10), las ecuaciones de Maxwell, en régimen estacionario, se reducen a las siguientes:

$$\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \rho \quad (2-12)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2-13)$$

$$\nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) = 0 \quad (2-14)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (2-15)$$

En este caso, al no considerar las variaciones temporales del campo, el campo eléctrico se desacopla del campo magnético, siendo suficiente las ecuaciones (2-12) y (2-13) para determinar el campo eléctrico en la tierra. Al retomar las ecuaciones (2-12) y (2-13) para calcular el campo eléctrico y asumiendo que la tierra es homogénea por capas, lineal e isotrópica, entonces las mismas se reducen a las siguientes:

$$\varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (2-16)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2-17)$$

Con las dos ecuaciones anteriores, es posible determinar unívocamente el campo eléctrico.

Como el rotor del campo eléctrico dado por (2-17) es nulo, entonces el campo eléctrico se puede definir como el gradiente de una función escalar V , conocida como el potencial escalar eléctrico:

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (2-18)$$

Luego, si se sustituye (2-18) en (2-16), se obtiene la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (2-19)$$

En la ecuación anterior, ρ representa la densidad volumétrica de carga. En un medio conductor como la tierra, esta densidad de carga tiene que ser nula, ya que las cargas se mueven por el medio conductor hasta situarse en las fronteras, en el caso de un sistema de puesta a tierra, las cargas se sitúan sobre las superficies de los electrodos; en resumen, en lugar de existir en la tierra una densidad volumétrica de carga, lo que existe es una densidad superficial de carga y que se encuentran sobre la superficie de los electrodos.

Entonces, en el seno de la tierra o el suelo, por no haber cargas, la ecuación de Poisson se transforma en la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (2-20)$$

Los fenómenos capacitivos y resistivos pueden ser representados mediante las ecuaciones (2-19) y (2-20), pero por el hecho de haber asumido un régimen estacionario, no se incluye los fenómenos inductivos asociados con el campo magnético en las ecuaciones de Laplace y de Poisson.

Las ecuaciones (2-19) y (2-20), pueden resolverse mediante el método de separación de variables, o también haciendo uso de las funciones de Green, mediante la aplicación de la segunda identidad de Green; pero cuando el campo tiene simetría esférica o cilíndrica, como es el caso de los electrodos de puesta a tierra, es preferible obtener el campo eléctrico, con la integral de volumen de la ecuación (2-16), método que es conocido como la ley de Gauss.

Al realizar la integral de volumen de la ecuación (2-16):

$$\iiint (\nabla \cdot \mathbf{E}) dv = \frac{1}{\epsilon} \iiint \rho dv \quad (2-21)$$

Al aplicar el teorema de la divergencia, la integral de volumen del miembro izquierdo, se convierte en una integral de superficie que limita el volumen de integración:

$$\iint \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} ds = \frac{1}{\epsilon} \iiint \rho dv \quad (2-22)$$

donde:

- dv Diferencial de volumen.
- ds Diferencial de superficie.
- \mathbf{n} Vector unitario normal a la superficie de integración

La integral de volumen de la densidad de carga ρ no es más que la carga q contenida en dicho volumen:

$$\iint \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} ds = \frac{q}{\epsilon} \quad (2-23)$$

La ecuación anterior es muy útil para calcular el campo eléctrico, en régimen estacionario, sobre todo cuando existen simetrías esféricas o cilíndricas. Por ejemplo, a continuación se obtendrá una expresión para calcular el campo eléctrico en una esfera cargada.

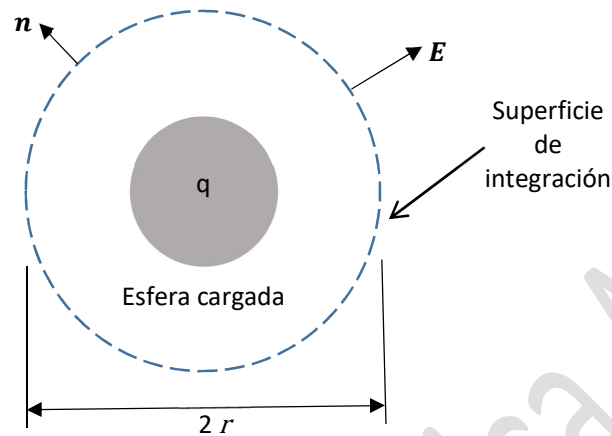


Fig. 1 Campo eléctrico creado por una esfera cargada

La Figura 1 muestra una esfera cargada en un medio homogéneo e infinito; también se muestra, en línea segmentada, la superficie de una esfera hipotética de radio r que se utilizará como superficie de integración para resolver (2-23). Nótese de la figura, que la magnitud del campo eléctrico, de cualquier punto que se encuentre sobre la superficie de integración de la figura, debe ser constante, porque se encuentra equidistante de la esfera cargada, bajo esta condición, la ecuación (2-23) es muy fácil de resolver:

$$\iint \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, ds = 4 \pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon} \quad (2-24)$$

De la ecuación anterior se obtiene la magnitud del campo eléctrico:

$$E(r) = \frac{1}{4 \pi r^2 \epsilon} q \quad (2-25)$$

Como el campo apunta en dirección del radio de la esfera cargada, entonces resulta útil, en este caso, emplear un sistema de coordenadas esféricas para el campo eléctrico:

$$\mathbf{E} = \left(\frac{1}{4 \pi r^2 \epsilon} q \right) \mathbf{a}_r \quad (2-26)$$

donde \mathbf{a}_r es un vector unitario, en coordenadas esféricas, que apunta en la dirección del radio.

La ecuación (2-26) se obtuvo de la integración de la ecuación (2-16), pero a la vez, el campo dado por (2-26) es irrotacional, en otras palabras, es solución de la ecuación (2-17). Por lo anterior, el potencial escalar eléctrico V que se obtenga de la integración del campo eléctrico dado por (2-26), será también solución de la ecuación de Poisson (2-19) o de Laplace (2-20).

Como aplicación de la ecuación (2-26), la misma puede ser usada para calcular la diferencia de potencial y la capacitancia entre dos esferas concéntricas cargadas. La figura 2 muestra dos esferas, donde se desea obtener la capacitancia y la diferencia de potencial que existe entre ellas.

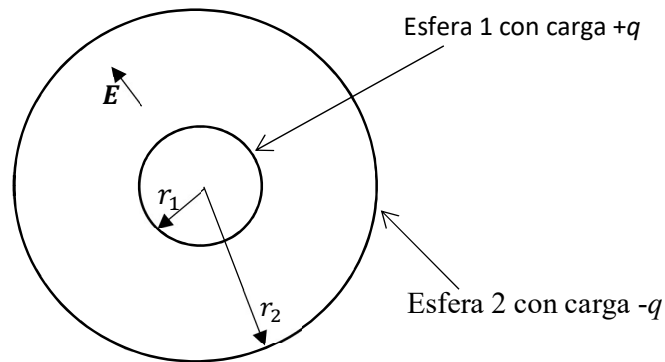


Fig. 2 Dos esferas concéntricas cargadas

Para encontrar la diferencia de potencial entre las esferas, lo que hay que hacer es calcular la integral de línea del campo eléctrico usando la ecuación (2-26):

$$V_{12} = V_1 - V_2 = - \int_{r_2}^{r_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_r dr = \int_{r_2}^{r_1} \frac{1}{4\pi r^2} \frac{q}{\epsilon} dr \quad (2-27)$$

donde V_1 es el potencial escalar eléctrico que adquiere la esfera de menor radio y V_2 es el potencial escalar eléctrico que adquiere la esfera de mayor radio.

La solución de la integral, en ecuación anterior, es la siguiente:

$$V_{12} = V_1 - V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (2-28)$$

De la ecuación anterior, se obtiene la capacitancia C_{12} que forman las dos esferas concéntricas:

$$C_{12} = \frac{q}{V_{12}} = 4\pi\epsilon \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \right) \quad (2-29)$$

Ahora bien, si el material que se encuentra confinado entre las dos esferas, tiene una conductividad no nula; entonces, además de la capacitancia también habrá una resistencia eléctrica, entre las esferas.

La Figura 3 muestra nuevamente las dos esferas donde se considera que el material que se encuentra de relleno entre ellas, tiene una conductividad no nula; por tal motivo, se ha agregado a la figura una fuente de tensión continua, conectada entre las esferas, a fin de mantener tanto la diferencia de potencial entre las esferas como la carga de las esferas, ya que si se desconecta la fuente, las cargas se recombinan, porque el medio entre las esferas es conductor.

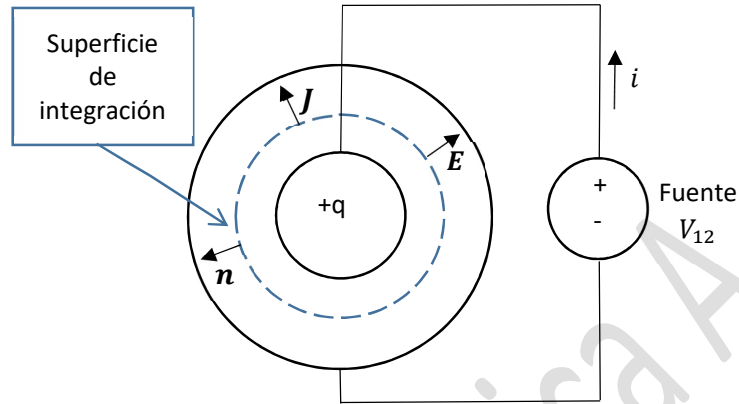
En relación a la Figura 3, se muestra el vector campo eléctrico \mathbf{E} y ahora, por ser el medio conductor, aparece también en el medio, el vector densidad de corriente \mathbf{J} , este vector se puede obtener con la ayuda de las ecuaciones (2-6) y (2-26):

$$\mathbf{J} = \left(\frac{\sigma}{4\pi r^2} \frac{q}{\epsilon} \right) \mathbf{a}_r \quad (2-30)$$

La corriente i que circula por la fuente de tensión mostrada en la Figura 3, se puede obtener integrando la densidad de corriente, dada por la ecuación anterior, sobre la superficie de la esfera hipotética mostrada en la misma Figura 3, a sabiendas que la magnitud del vector densidad de corriente debe ser constante en cualquier punto que se encuentre sobre la esfera hipotética:

$$i = \iint \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint \frac{\sigma}{4\pi r^2} \frac{q}{\epsilon} \, ds = \frac{\sigma}{\epsilon} q \quad (2-31)$$

donde \mathbf{n} es un vector normal a la superficie de integración ($\mathbf{n} = \mathbf{a}_r$) y ds es un diferencial de



superficie.

Fig. 3 Esferas concéntricas metálicas rellenas entre ellas con un material conductor

De la ecuación anterior se extrae la siguiente relación:

$$\frac{i}{\sigma} = \frac{q}{\epsilon} \quad (2-32)$$

Con la relación anterior, se puede obtener la resistencia formada por las dos esferas concéntricas.

Al despejar q de la ecuación (2-29):

$$q = 4\pi\epsilon \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \right) V_{12} \quad (2-33)$$

Al despejar q de la ecuación (2-32) e igualarla a la ecuación anterior:

$$\frac{\epsilon i}{\sigma} = 4\pi\epsilon \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \right) V_{12} \quad (2-34)$$

De donde se despeja V_{12} :

$$V_{12} = \frac{r_2 - r_1}{4\pi\sigma r_1 r_2} i \quad (2-35)$$

Finalmente, se extrae la resistencia R_{12} formada por las dos esferas concéntricas:

$$R_{12} = \frac{r_2 - r_1}{4\pi r_1 r_2} \quad (2-36)$$

O también, si se conoce la resistividad del suelo ρ en lugar de la conductividad σ , la resistencia se calcularía así:

$$R_{12} = \frac{(r_2 - r_1)\rho}{4\pi r_1 r_2} \quad (2-37)$$

Ahora bien ¿Que resistencia tendría el conjunto formado por las dos esferas, si la esfera de mayor diámetro, adquiere un radio de dimensiones infinitas?

$$R_1 = \lim_{r_2 \rightarrow \infty} R_{12} = \lim_{r_2 \rightarrow \infty} \frac{(r_2 - r_1)}{4\pi \sigma r_1 r_2} = \frac{1}{4\pi \sigma r_1} \quad (2-38)$$

Con la ecuación anterior, se puede obtener la resistencia de dos esferas concéntricas, como las mostradas en la Figura 3, donde la esfera de mayor diámetro tiene dimensiones infinitas.

Por último, asúmase que el conjunto formado por las dos esferas concéntricas, se divide en dos partes iguales, en la figura 4 se muestra una de las partes en que se ha dividido el conjunto, quedando una semiesfera o hemisferio de radio infinito y otra semiesfera de radio finito.

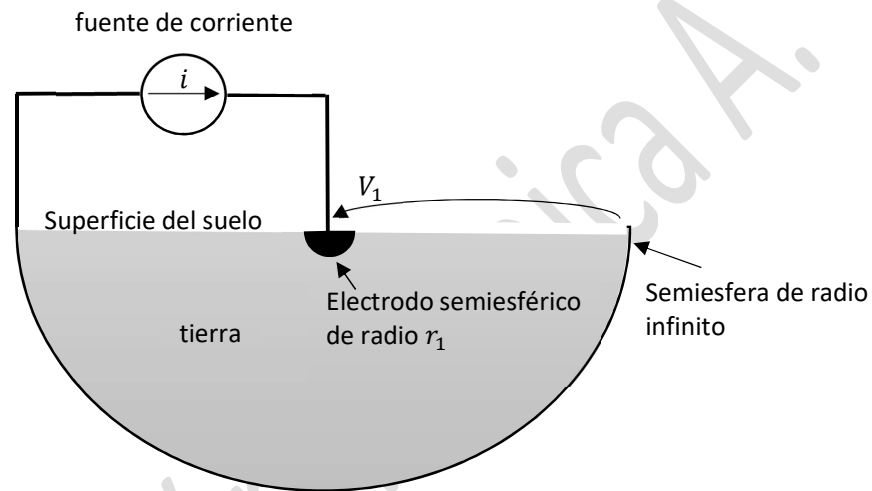


Fig. 4 Electrodo semiesférico para puesta a tierra

El arreglo de electrodos que se muestra en la figura 4, representa en muy buena medida lo que sucede en un sistema de puesta a tierra, el casquete semiesférico de radio infinito, representa la referencia de tierra o de potencial cero (se asume que el infinito se encuentra a potencial cero), la fuente de corriente se emplea para inyectar corriente a través del electrodo semiesférico de menor radio, que en este caso representa al electrodo que vamos a utilizar como el electrodo de puesta a tierra.

De acuerdo a la Figura 4, la corriente que se inyecta por el electrodo de puesta a tierra retorna por el infinito. Para cualquier sistema de puesta a tierra, se considera que la corriente retorna por el infinito.

Si entre los dos electrodos que se muestran en la Figura 4, el medio es la tierra, entonces la resistencia que existe entre los dos electrodos se puede obtener utilizando la expresión de resistencia dada por la ecuación (2-38). Como se han dividido las esferas en dos partes iguales, ver la Figura 4, la resistencia obtenida debe ser el doble de la obtenida con la ecuación (2-38):

$$R_{tierra} = 2 R_1 \quad (2-39)$$

donde R_{tierra} es la resistencia de puesta a tierra que obtendríamos si empleamos como electrodo una semiesfera tal como se muestra en la figura 4:

$$R_{tierra} = \frac{1}{2\pi \sigma r_1} \quad (2-40)$$

donde σ es la conductividad del suelo o de la tierra.

En el caso de conocer la resistividad del suelo o de la tierra ρ , la resistencia es la siguiente:

$$R_{tierra} = \frac{\rho}{2\pi r_1} \quad (2-41)$$

El electrodo semiesférico como el mostrado en la Figura 4, resulta útil para estudiar sistemas de puesta a tierra, como se verá más adelante.

Ejercicio 1

- a) Calcular la resistencia de puesta a tierra, si la resistividad del suelo es de 100 (Ω m), y se emplea como electrodo una semiesfera metálica de radio igual a 30 cm.

$$R_{tierra} = \frac{\rho}{2\pi r_1} = \frac{100}{2\pi \cdot 0.30} = 53.05 \Omega \quad (2-42)$$

- b) El electrodo semiesférico se emplea para poner a tierra un poste de distribución, determine el potencial que adquiere el poste si durante un corto circuito, se inyecta por el electrodo de puesta a tierra una corriente de 150 A

$$V_{poste} = R_{tierra} i = 53.05 \cdot 150 = 7.9 \text{ kV} \quad (2-43)$$

Otro parámetro eléctrico que se puede obtener, es la capacitancia del electrodo con respecto al infinito, al retomar la ecuación (2-29):

$$C_{12} = \frac{q}{V_{12}} = 4\pi\epsilon \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \right) \quad (2-44)$$

Si r_2 tiende a infinito entonces la capacitancia de la esfera más pequeña, con respecto al infinito es la siguiente:

$$C_1 = \lim_{r_2 \rightarrow \infty} C_{12} = 4\pi \epsilon r_1 \quad (2-45)$$

Ahora bien, para el caso de los hemisferios mostrados en la Figura 4, la capacitancia entre los casquetes semiesféricos se reduce a la mitad de la capacitancia dada por la ecuación anterior:

$$C_{electrodo} = 2\pi \epsilon r_1 \quad (2-46)$$

Donde $C_{electrodo}$ es la capacitancia del electrodo semiesférico de puesta a tierra, que se muestra en la figura 4, con respecto al infinito.

3. Modelo eléctrico del electrodo semiesférico para puesta a tierra.

Si se asume un régimen estacionario del campo eléctrico, dadas por las ecuaciones (2-16) y (2-17), es posible obtener dos parámetros: la resistencia de puesta a tierra y la capacitancia que forma el electrodo o los electrodos de puesta a tierra con respecto al infinito. El sistema de puesta a tierra puede estar formado por uno o más electrodos. La Figura 5 muestra la red equivalente para modelar un sistema de puesta a tierra.

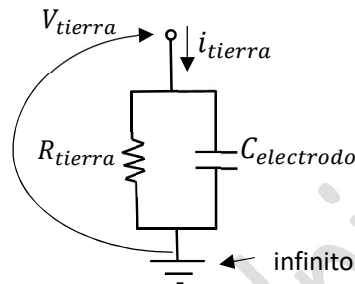


Fig. 5 Modelo eléctrico de un electrodo semiesférico

Al potencial V_{tierra} que se indica en la Figura 5, también se le conoce en la literatura con las siglas en inglés GPR (Ground Potential Rise) o aumento del potencial de tierra.

Para cualquier sistema de puesta a tierra, ya sea formado por electrodos semiesféricos o cilíndricos como barras y contrapesos o un conjunto de todos ellos, la capacitancia del sistema de puesta a tierra o de los electrodos se puede obtener si se conoce tanto la resistencia de puesta a tierra como las propiedades del medio:

$$C_{electrodo} = \frac{\epsilon}{\sigma R_{tierra}} = \frac{\epsilon \rho}{R_{tierra}} \quad (3-1)$$

Ejercicio 2

Calcular la capacitancia del sistema de puesta a tierra, si la resistencia de puesta a tierra es de 53.05 (Ω), la resistividad del suelo es de 100 (Ω m) y la permitividad relativa del suelo tiene un valor de 8.

datos: $\epsilon_r = 8$, $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ (F/m), $\rho = 100$ (Ω m), $R_{tierra} = 53.05$ (Ω m)

$$C_{electrodo} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 \rho}{R_{tierra}} = \frac{8 * 8.85 * 10^{-12} * 100}{53.05} = 133.5 \text{ (pF)} \quad (3-2)$$

4. Potenciales sobre la superficie del suelo, la tensión de paso

Cuando se inyectan corrientes a través del electrodo o los electrodos, de un sistema de puesta a tierra, como se muestra en la Fig. 4, como la tierra no es un conductor ideal, cualquier punto del suelo adquiere un potencial, sobre todo en aquella parte de la tierra que se encuentra cercana al electrodo o los electrodos.

El potencial del suelo es necesario calcularlo, ya que pueden alcanzar valores que pueden ser perjudiciales para los seres vivos y cosas que se encuentran cerca de la red de electrodos de puesta a tierra.

En el capítulo 2, el potencial escalar eléctrico V se obtuvo mediante la integral de línea del vector campo eléctrico; pero en este caso, el potencial en cualquier punto del suelo se obtendrá utilizando otro método, que consiste en la solución de la ecuación de Poisson (2-19), para una esfera cargada, teniendo un medio infinito formado por dos estratos como es el formado por la tierra y el aire.

La Figura 6 muestra un medio infinito formado por dos estratos (aire y tierra), también se muestran dos cargas puntuales, una carga q que se encuentra ubicada en la tierra, en las coordenadas (x', y', z') , y otra carga imagen, ubicada simétricamente con respecto a la superficie de la tierra, en las coordenadas $(x', y', -z')$; también se muestra en la figura un punto en la tierra con coordenadas (x, y, z) , punto donde se desea calcular el potencia eléctrico V .

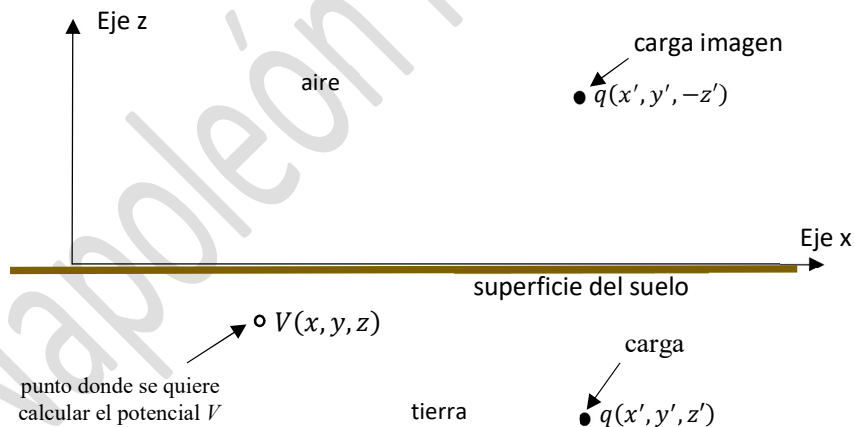


Fig. 6 Carga puntual y su imagen ubicada en un medio infinito formado por dos estratos

Para calcular el potencial en el punto con coordenadas (x, y, z) de la figura 6, se utiliza el método de la imágenes; por este motivo, se ha adicionado en la figura 6 una carga imagen de la carga ubicada en la tierra; la siguiente ecuación permite calcular el potencial en cualquier punto del suelo con coordenadas (x, y, z) , si se tiene una carga puntual en la tierra en las coordenadas (x', y', z') :

$$V(x, y, z, x', y', z') = \frac{q}{4\pi\epsilon\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} + \frac{q}{4\pi\epsilon\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}} \quad (4-1)$$

La ecuación anterior referente al método de las imágenes, es también solución de la ecuación de Poisson dada en (2-19).

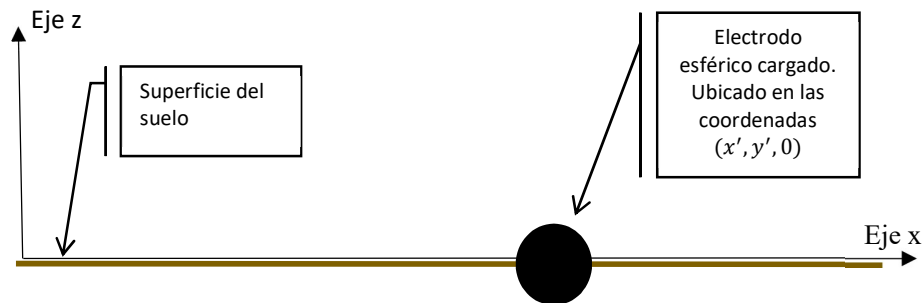


Fig. 7 Esfera empleada como electrodo de puesta a tierra

La Figura 7 muestra un electrodo esférico donde un hemisferio se encuentra enterrado a ras del suelo ($z' = 0$), tal como sucede en la Figura 4, al hacer uso de la ecuación (4-1), el potencial en cualquier punto del suelo, vendrá dado por:

$$V(x, y, z, x', y', 0) = \frac{q}{2\pi \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z)^2}} \quad (4-2)$$

donde $(x', y', 0)$ son las coordenadas de la esfera.

Al usar (2-32) en la ecuación anterior, se obtiene el potencial en cualquier punto del suelo, en función de la corriente que se inyecta por el electrodo:

$$V(x, y, z, x', y', 0) = \frac{i}{2\pi\sigma \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z)^2}} \quad (4-3)$$

La ecuación anterior tiene la utilidad que permite la obtención de las líneas equipotenciales sobre la superficie del suelo. A manera de ejemplo, asúmase que se tiene un electrodo semiesférico, de 30 cm de radio, enterrado a ras del suelo como se muestra en la Figura 4, el electrodo se encuentra en las coordenadas $x' = y' = z' = 0$ y el suelo tiene una resistividad de 100 ($\Omega \text{ m}$). En cuanto a la corriente, asúmase que se inyecta por el electrodo una corriente de 100(A).

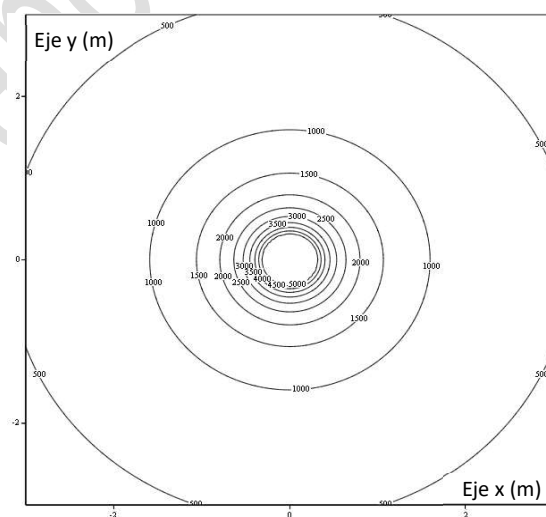


Fig. 8 Curvas equipotenciales (V), sobre la superficie del suelo ($z = 0$), para un electrodo semiesférico de 30 cm de radio,

La Fig. 8 muestra las curvas equipotenciales sobre la superficie del suelo ($z = 0$), obtenidas con la ecuación (4-3), para el electrodo en cuestión, estas curvas son muy importante porque permiten calcular las tensiones de toque y de paso que sufre una persona, cuando ocurren fallas eléctricas, donde la corriente de falla se drena por el sistema de puesta a tierra. En los proyectos de diseño de mallas de puesta a tierra, es común que se contemple el cálculo de las curvas equipotenciales de la superficie del suelo, como la mostrada en la Fig. 8.

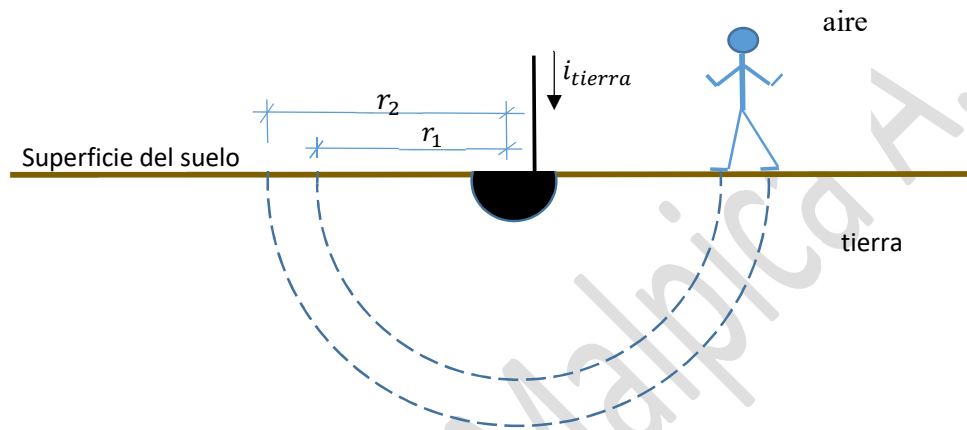


Fig. 9 Persona sometida a una tensión de paso

En relación a la tensión de paso, esta se define como la tensión o la diferencia de potencial que existe entre los pies de una persona, tal como se muestra en la Figura 9; si los pies se encuentran juntos, la tensión de paso es muy pequeña o nula, pero aumenta a medida que aumenta la separación entre los pies.

Para evaluar la tensión de paso, se pueden usar las curvas equipotenciales de la Figura 8; o también, realizando un cambio de variable en la ecuación (4-3), para que quede de manera más simple como se verá a continuación. Sea r la distancia que existe entre el electrodo semiesférico y el punto donde se quiere calcular el potencial V con coordenadas (x, y, z) :

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z)^2} \quad (4-4)$$

Al sustituir la ecuación anterior en la ecuación (4-3) se obtiene lo siguiente:

$$V(r) = \frac{\rho i}{2\pi r} \quad (4-5)$$

La ecuación (4-5) puede ser empleada también para evaluar el potencial que tiene cualquier punto sobre la superficie del suelo; donde r es la distancia que existe desde el punto sobre la superficie del suelo donde se quiere calcular el potencial hasta el electrodo, la Figura 10 muestra el potencial de la superficie del suelo en función de la distancia r , obtenida con la ecuación (4-5).

La Figura 10 es útil para determinar la tensión de paso debido a la inyección de corriente por tierra a través del electrodo; como ejemplo, si una persona tiene un pie a 3m del electrodo y el otro pie se encuentra a 2 m del electrodo, de la gráfica se puede obtener la tensión de paso bajo esas condiciones.

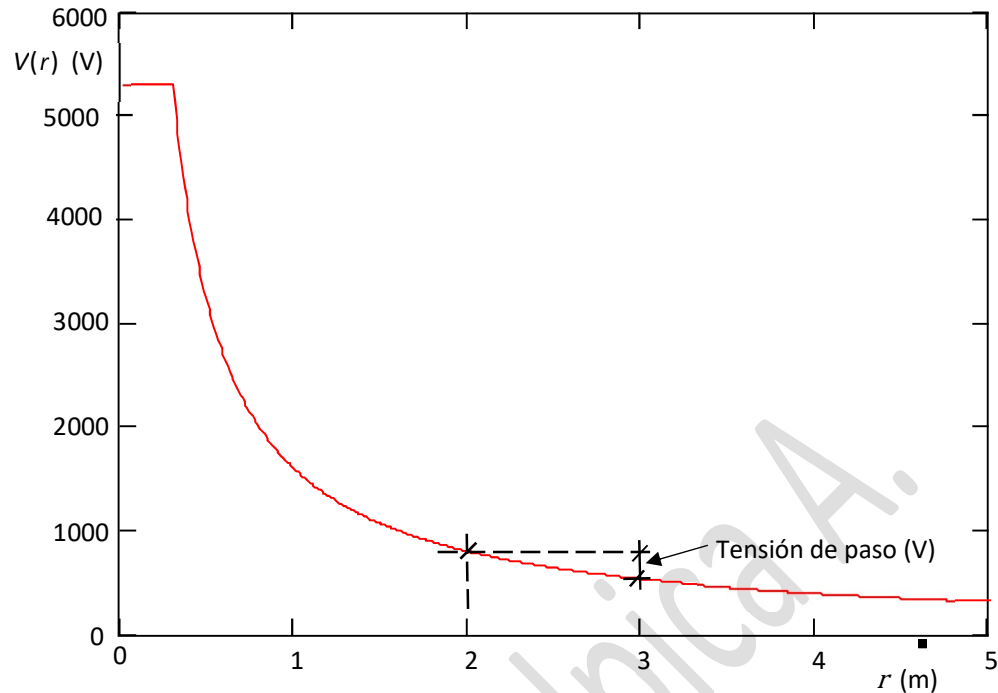


Fig. 10 Potencial en la superficie del suelo, en función de la distancia r que existe entre el electrodo y el punto del suelo donde se quiere determinar el potencial

Es evidente de la figura 10, que la tensión de paso será mayor en la zona de la gráfica donde se observa mayor pendiente o gradiente; en este caso, la zona de mayor gradiente es la superficie de la tierra que se encuentra más cerca del electrodo.

La tensión de paso también se puede obtener, para el ejemplo planteado, a través de las ecuaciones (4-3) o (4-5), como se indica a continuación:

$$V_{paso} = V(r_1) - V(r_2) = \frac{\rho i}{2\pi r_1} - \frac{\rho i}{2\pi r_2} = \frac{100 \cdot 100}{2 \cdot \pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = 265 \text{ V} \quad (4-6)$$

5. La tensión de toque.

La Figura 11 ilustra el caso de una tensión de toque, donde la mano de una persona se encuentra tocando un poste, en el instante que ocurre una falla en el poste en cuestión. En este caso, puede aparecer una diferencia de potencial entre la mano de la persona y los pies que es conocida como tensión de toque.

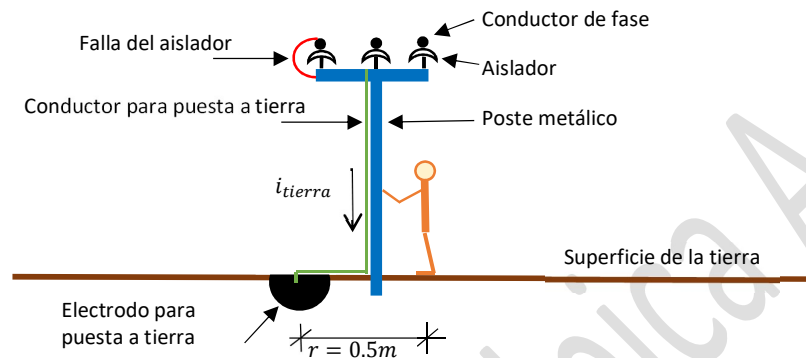


Fig. 11 Condición de tensión de toque

El potencial que adquiere la mano, es el mismo que adquiere el poste y es el mismo que adquiere el sistema de puesta a tierra *GPR*. Al hacer uso de (2-41) se obtiene el potencial de la mano:

$$V_{mano} = GPR = R_{tierra} i_{tierra} = \frac{\rho}{2\pi r_{electrodo}} i_{tierra} \quad (5-1)$$

donde $r_{electrodo}$ es el radio del electrodo semiesférico e i_{tierra} es la corriente que se inyecta a tierra a través del electrodo y que se indica en la Figura 11.

Por otra parte, el potencial que adquieren los pies se puede calcular con la ecuación (4-5):

$$V_{pies} = \frac{\rho}{2\pi r} i_{tierra} \quad (5-2)$$

donde r es la distancia que existe entre el electrodo y los pies, según se aprecia en la Figura 11.

Entonces con los potenciales tanto de la mano como de los pies dados por (5-1) y (5-2), se obtiene la tensión de toque:

$$V_{toque} = V_{mano} - V_{pies} = \frac{\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{r_{electrodo}} - \frac{1}{r} \right) i_{tierra} \quad (5-3)$$

Ejercicio 3

En relación a la Figura 11, calcular la tensión de toque de la persona, si la corriente inyectada por el sistema de puesta a tierra es de 200 (A), la resistividad del suelo es de 100(Ω m), el electrodo tiene un radio de 30cm y los pies de la persona se encuentran a una distancia de 0.5 (m) del electrodo.

Primero se calculará el potencial de las manos

$$V_{mano} = GPR = \frac{\rho}{2\pi r_{electrodo}} i_{tierra} = \frac{100}{2\pi \cdot 0.3} 200 = 10.6 \text{ (kV)} \quad (5-4)$$

Se procede a calcular la tensión de los pies:

$$V_{pies} = \frac{\rho}{2\pi r} i_{tierra} = \frac{100}{2\pi \cdot 0.5} 200 = 6.3 \text{ (kV)} \quad (5-5)$$

Por último se obtiene la tensión de toque:

$$V_{toque} = V_{mano} - V_{pies} = 10.6 - 6.3 = 4.2 \text{ (kV)} \quad (5-6)$$

6. La zona de influencia de un electrodo o de un grupo de electrodos de puesta a tierra

La figura 12 ilustra en contexto lo que es una resistencia de puesta a tierra, ésta está formada por: el electrodo o los electrodos de puesta a tierra, donde para el caso de la figura se emplea una semiesfera; también se muestra un segundo electrodo, que es hipotético, que también consiste en una semiesfera metálica, de radio infinito y que contiene todo el volumen infinito de tierra y por último, la tierra misma, que es el medio por donde circula la corriente.

Entonces, de acuerdo a la Figura 12, la puesta a tierra consiste en una resistencia donde se emplea todo el volumen infinito de tierra y que tiene cierta resistividad.

Pero realmente el volumen de tierra que se encuentra cercano al electrodo, es quien contribuye con la resistencia de puesta a tierra y a este volumen finito de tierra se le conoce como la zona de influencia del sistema de puesta a tierra o zona de influencia del electrodo de puesta a tierra.

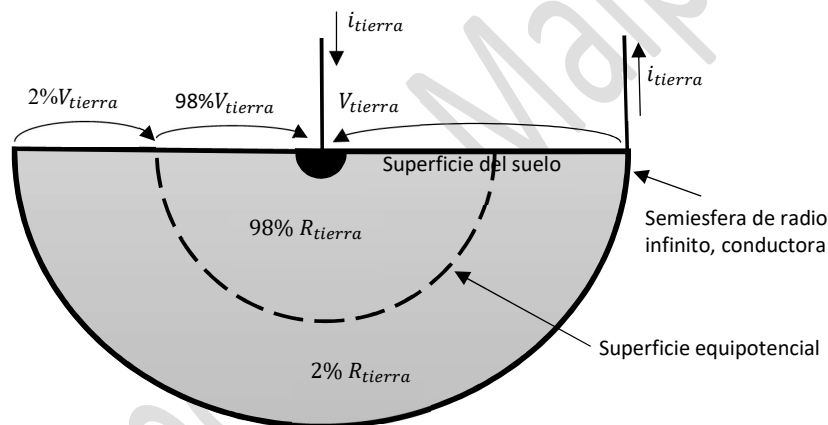


Fig. 12 Definición de la zona de influencia de un electrodo para puesta a tierra

En este trabajo se definirá como zona de influencia del electrodo de puesta a tierra o del sistema de puesta a tierra como el volumen de tierra que contribuye con el 98% de la resistencia de puesta a tierra. Este porcentaje se puede cambiar de acuerdo al criterio del diseñador.

En referencia a la Figura 12, se muestra una semiesfera en línea segmentada que no es más que una superficie equipotencial donde todos los puntos tienen un potencial igual al 2% de la tensión del electrodo de tierra V_{tierra} .

El volumen de tierra que se encuentra entre la superficie equipotencial de la Figura 12 y el electrodo semiesférico de menor radio, constituye la zona de influencia del electrodo.

A continuación se calcula el radio de la superficie equipotencial, cuyo volumen de tierra contribuye con el 98% de la resistencia de puesta a tierra:

Tensión del electrodo de puesta a tierra con respecto al infinito:

$$V_{tierra} = GPR = R_{tierra} i_{tierra} \quad (6-1)$$

Al hacer uso de (2-41) en la ecuación anterior:

$$V_{tierra} = GPR = \frac{\rho}{2\pi r_{electrodo}} i_{tierra} \quad (6-2)$$

donde $r_{electrodo}$ es el radio del electrodo e i_{tierra} es la corriente inyectada por el electrodo.

Luego, con la ecuación (4-5), se define la superficie equipotencial, que tiene un potencial igual al 2% de la tensión del electrodo de tierra

$$2\% V_{tierra} = \frac{\rho i}{2\pi r_{2\%}} \quad (6-3)$$

Al sustituir (6-1) en la ecuación anterior, se obtiene el radio de la superficie semiesférica que contiene el volumen de tierra que contribuye con el 98% de la resistencia:

$$r_{2\%} = \frac{\rho}{2\pi R_{tierra} 0.02} \quad (6-4)$$

donde $r_{2\%}$ es el radio de la esfera hipotética que contiene el volumen de tierra que contribuye con el 98% de la resistencia de puesta a tierra.

Ejercicio 4

Calcular el radio de la zona de influencia de la puesta a tierra de una subestación eléctrica si la resistencia de puesta a tierra tiene un valor de 5 (Ω) y la resistividad del suelo es de 100 (Ωm).

Al hacer uso de (6-4):

$$r_{2\%} = \frac{\rho}{2\pi R_{tierra} 0.02} = \frac{100}{2\pi * 5 * 0.02} = 159 \text{ (m)} \quad (6-5)$$

Entonces, el volumen de tierra contenido en una semiesfera de 159 (m) de radio, contribuye con el 98% de la resistencia de la subestación.

Ejercicio 5

Calcular el radio de la zona de influencia de un electrodo semiesférico usado como puesta a tierra, si el radio es de 7 (cm) y la resistividad del suelo es de 100 ($\Omega\text{ m}$).

Primero se calcula la resistencia del electrodo con la ecuación (2-41):

$$R_{tierra} = \frac{\rho}{2\pi r_1} = \frac{100}{2\pi * 0.07} = 227 \text{ (}\Omega\text{)} \quad (6-6)$$

Luego se calcula el radio de la zona de influencia con la ecuación (6-4):

$$r_{2\%} = \frac{\rho}{2\pi R_{tierra} 0.02} = \frac{100}{2\pi * 227 * 0.02} = 3.5 \text{ (m)} \quad (6-7)$$

Nótese que el radio de la zona de influencia de la puesta a tierra es mucho menor que el calculado en el ejercicio anterior.

Al definir la zona de influencia de un sistema de puesta a tierra, se sabe que cualquier punto de la superficie de suelo que se encuentre dentro de la zona de influencia, su potencial se elevará el 2% o más de la tensión que adquiere el sistema de puesta a tierra cuando ocurre una falla, siendo esto de utilidad cuando se consideran potenciales transferidos y resistencias mutuas como se verá más adelante. Como ejemplo, la Figura 13 muestra una zona industrial, donde la zona de influencia da la red de puesta a tierra de la fábrica 1, cubre parte de la superficie que

ocupa la fábrica 2, esto quiere decir que al ocurrir una falla en la fábrica 1, el potencial de la tierra de la fábrica 2 se ve alterado, pudiendo esto causar daños a equipos que operan en la fábrica 2.

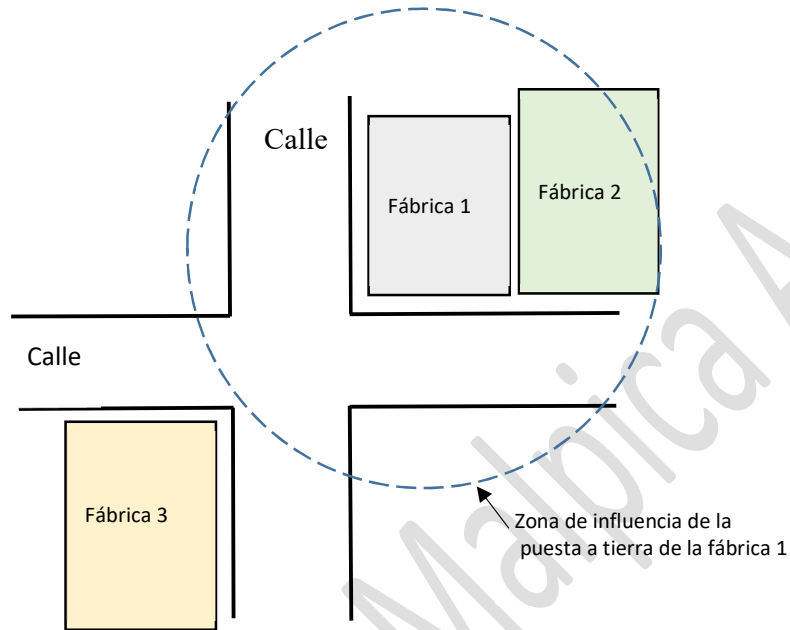


Fig. 13 Zona de influencia de la puesta a tierra de una fábrica en una zona industrial

7. Resistencia mutua entre electrodos semiesféricos.

La Figura 14 muestra dos electrodos semiesféricos separados a una distancia d_{12} , se desea encontrar la resistencia mutua entre los dos electrodos, para ello se asumirá que por el electrodo 2 no se inyecta corriente, solo se inyecta corriente por el electrodo 1. La tensión que adquiere el electrodo 2, debido a la corriente que se inyecta por el electrodo 1 se puede obtener con la ecuación (4-5):

$$V_2 = \frac{\rho}{2\pi d_{12}} i_1 \quad (7-1)$$

donde:

- V_2 Es la tensión que adquiere el electrodo 2 con respecto al infinito
- i_1 Es la corriente que se inyecta por la tierra a través del electrodo 1.
- d_{12} Es la separación que existe entre los electrodos.

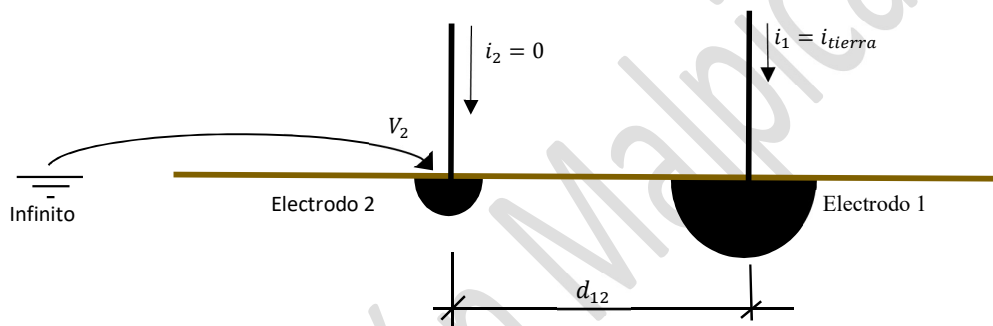


Fig. 14 Dos electrodos semiesféricos enterrados

De la ecuación anterior, se obtiene la resistencia mutua entre los electrodos:

$$R_{12} = \frac{V_2}{i_1} = \frac{\rho}{2\pi d_{12}} \quad (7-2)$$

Donde R_{12} es la resistencia mutua entre los electrodos semiesféricos.

Ejercicio 6

Calcular la resistencia mutua entre dos electrodos semiesféricos que se encuentran a tres metros de separación, si la resistividad del suelo es de 50 (Ω m):

$$R_{12} = \frac{V_2}{i_1} = \frac{\rho}{2\pi d_{12}} = \frac{50}{2\pi \cdot 3} = 2.65 \text{ } (\Omega) \quad (7-3)$$

Ejercicio 7

Se tiene dos electrodos semiesféricos, que se encuentran separados a 2 (m) de distancia, el electrodo 1 tiene un radio de 15 (cm) y el electrodo 2 tiene un radio de 20 (cm). Calcular los potenciales que adquiere cada electrodo si por el electrodo 1 se inyecta una corriente de 200 (A) y por el electrodo 2 se inyecta una corriente de 150 (A).

datos:

$$r_1 = 0.15 \text{ (m)}$$

$$\begin{aligned}
 r_2 &= 0.20 \text{ (m)} \\
 d_{12} &= 2.00 \text{ (m)} \\
 \rho &= 50 \text{ (\Omega m)} \\
 i_1 &= 200 \text{ (A)} \\
 i_2 &= 150 \text{ (A)}
 \end{aligned}$$

Se calculan todas las resistencias propias y mutuas con las ecuaciones (2-41) y (7-2):

$$R_{11} = \frac{\rho}{2\pi r_1} = \frac{50}{2\pi * 0.15} = 53.1 \text{ (\Omega)} \quad (7-4)$$

$$R_{22} = \frac{\rho}{2\pi r_2} = \frac{50}{2\pi * 0.20} = 39.79 \text{ (\Omega)} \quad (7-5)$$

$$R_{12} = \frac{\rho}{2\pi d_{12}} = \frac{50}{2\pi * 2.00} = 3.98 \text{ (\Omega)} \quad (7-6)$$

Calculada todas las resistencias, se plantean las ecuaciones de tensión para cada electrodo:

$$V_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2 = 53.1 * 200 + 3.98 * 150 = 11.21 \text{ (kV)} \quad (7-7)$$

$$V_2 = R_{12}i_1 + R_{22}i_2 = 3.98 * 200 + 39.79 * 150 = 6.70 \text{ (kV)} \quad (7-8)$$

8. Sistema de puesta a tierra formado por dos electrodos.

La Figura 15 muestra un Sistema de puesta a tierra formado por dos electrodos, a continuación se calcula la resistencia de puesta a tierra debido a los dos electrodos, que se encuentran conectados en paralelo.

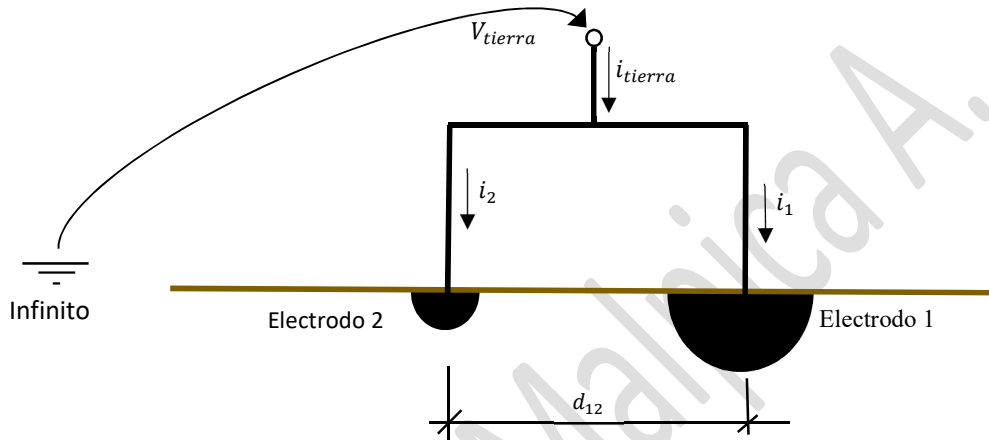


Fig. 15. Sistema de puesta a tierra formado por dos electrodos

Como se observa de la figura, ambos electrodos, por estar conectados entre sí, tienen el mismo potencial, entonces las ecuaciones de tensión para los dos electrodos, son las siguientes:

$$V_{tierra} = V_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2 \quad (8-1)$$

$$V_{tierra} = V_2 = R_{12}i_1 + R_{22}i_2 \quad (8-2)$$

donde R_{11} y R_{22} son las resistencias propias de los electrodos 1 y 2 respectivamente y R_{12} es la resistencia mutua entre los electrodos.

Al despejar i_1 de la ecuación (8-1):

$$i_1 = \frac{V_{tierra} - R_{12}i_2}{R_{11}} \quad (8-3)$$

Al sustituir la ecuación anterior en la ecuación (8-2) se obtiene i_2 :

$$i_2 = \frac{R_{11} - R_{12}}{R_{11}R_{22} - R_{12}^2} V_{tierra} \quad (8-4)$$

Por analogía, se obtiene la corriente i_1 :

$$i_1 = \frac{R_{22} - R_{12}}{R_{11}R_{22} - R_{12}^2} V_{tierra} \quad (8-5)$$

Al sumar i_1 e i_2 se obtiene la corriente que drena el sistema de puesta a tierra:

$$i_{tierra} = i_1 + i_2 = \frac{R_{11} + R_{22} - 2R_{12}}{R_{11}R_{22} - R_{12}^2} V_{tierra} \quad (8-6)$$

De la ecuación anterior se obtiene la resistencia del sistema de puesta a tierra:

$$R_{tierra} = \frac{V_{tierra}}{i_{tierra}} = \frac{R_{11}R_{22} - R_{12}^2}{R_{11} + R_{22} - 2R_{12}} \quad (8-7)$$

A pesar que los dos electrodos se encuentran conectados en paralelo, de acuerdo a la Figura 15, la resistencia de puesta a tierra obtenida en la ecuación anterior no corresponde con la expresión típica para calcular resistencias en paralelo, a menos que la resistencia mutua R_{12} fuera despreciable. En el caso que la resistencia mutua no fuera despreciable, la resistencia de puesta a tierra arroja un valor mayor en comparación con la resistencia de puesta a tierra en el caso que la resistencia mutua fuera despreciable.

Como en los sistemas de puesta a tierra, lo deseable es que el valor de resistencia sea lo menor posible; entonces para reducir la resistencia a veces se logra reduciendo las resistencias mutuas entre los electrodos y esto se logra separando, en la medida de lo posible, los electrodos.

Ejercicio 8

Calcular la resistencia de puesta a tierra para el par de electrodos mostrados en la figura 15.

Datos :

$r_1 = 0.2$ (m)	Radio del primer electrodo
$r_2 = 0.15$ (m)	Radio del segundo electrodo
$d_{12} = 0.5$ (m)	Separación entre electrodos
$\rho = 50.0$ (Ω m)	Resistividad del suelo

Se calculan las resistencias propias y mutuas de los electrodos:

$$R_{22} = \frac{\rho}{2\pi r_2} = \frac{50}{2\pi * 0.15} = 53.1 \text{ } (\Omega) \quad (8-8)$$

$$R_{11} = \frac{\rho}{2\pi r_1} = \frac{50}{2\pi * 0.20} = 39.79 \text{ } (\Omega) \quad (8-9)$$

$$R_{12} = \frac{\rho}{2\pi d_{12}} = \frac{50}{2\pi * 0.5} = 15.92 \text{ } (\Omega) \quad (8-10)$$

Con la ecuación (8-7) se calcula la resistencia de puesta a tierra:

$$R_{tierra} = \frac{R_{11}R_{22} - R_{12}^2}{R_{11} + R_{22} - 2R_{12}} = \frac{53.1 * 39.79 - (15.92)^2}{53.1 + 39.79 - 2 * 15.92} = 30.45 \text{ } (\Omega) \quad (8-11)$$

Ejercicio 9

Repetir el ejercicio 8 pero separando los electrodos a 12 (m) de distancia, para ver el efecto de la resistencia mutua en el valor de la resistencia de puesta a tierra.

Se calcula nuevamente la resistencia mutua:

$$R_{12} = \frac{\rho}{2\pi d_{12}} = \frac{50}{2\pi * 12.0} = 0.66 \text{ } (\Omega) \quad (8-12)$$

Se calcula la resistencia de puesta a tierra con la ecuación (8-7):

$$R_{tierra} = \frac{R_{11}R_{22} - R_{12}^2}{R_{11} + R_{22} - 2R_{12}} = \frac{53.1 * 39.79 - (0.66)^2}{53.1 + 39.79 - 2 * 0.66} = 23.06 \text{ } (\Omega) \quad (8-13)$$

De los dos últimos ejercicios se observa que al separar los electrodos, se baja el valor de la resistencia de puesta a tierra.

En otras palabras, para bajar el valor de la resistencia de puesta a tierra, lo ideal es que las zonas de influencia de cada electrodo no se solapen entre si.

9. Sistema de puesta a tierra formado por más de dos electrodos.

La Figura 16 muestra un arreglo de puesta a tierra formado por tres electrodos, la metodología descrita en este capítulo, para calcular la resistencia de puesta a tierra, es válida para cualquier número de electrodos y para cualquier forma de electrodos.

Como se puede apreciar en la Figura 16, como todos los electrodos están interconectados, todos tienen el mismo potencial.

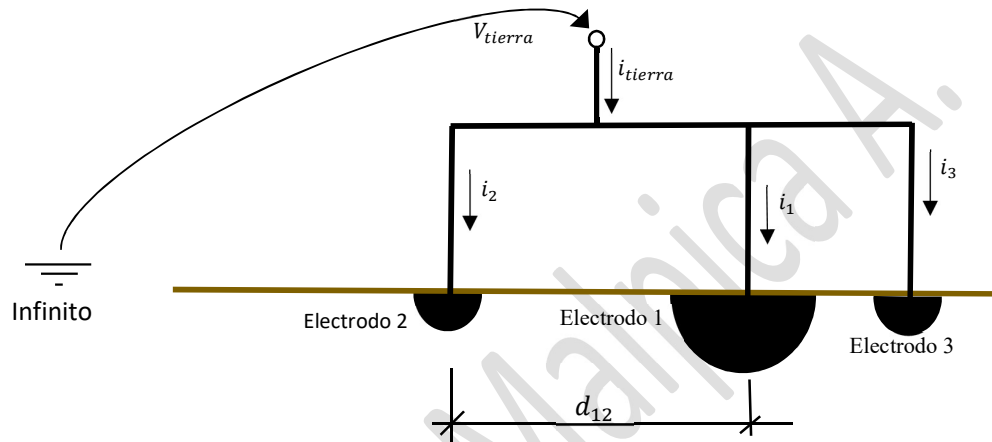


Fig. 16 Sistema de puesta a tierra formado por tres electrodos

Ecuaciones de tensión para los tres electrodos:

$$V_{tierra} = V_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2 + R_{13}i_3 \quad (9-1)$$

$$V_{tierra} = V_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2 + R_{23}i_3 \quad (9-2)$$

$$V_{tierra} = V_3 = R_{31}i_1 + R_{32}i_2 + R_{33}i_3 \quad (9-3)$$

donde:

- R_{jj} Es la resistencia propia del electrodo j .
- R_{kj} Es la resistencia mutua entre los electrodos k y j .
- R_{kj} Es la resistencia mutua entre los electrodos k y j .
- i_j Es la corriente que se inyecta por el electrodos j .
- V_j Es la tensión que tiene el electrodos j .
- $V_j = V_{tierra}$
- $R_{kj} = R_{jk}$

En el caso de tener n electrodos, es preferible trabajar con ecuaciones matriciales, entonces las tres ecuaciones anteriores quedan de esta forma:

$$\begin{bmatrix} V_{tierra} \\ V_{tierra} \\ V_{tierra} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \quad (9-4)$$

Al invertir la matriz en la ecuación anterior, se obtienen las corrientes en cada uno de los electrodos:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_{tierra} \\ V_{tierra} \\ V_{tierra} \end{bmatrix} \quad (9-5)$$

La inversa de la matriz resistencia, es la matriz conductancia:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}^{-1} \quad (9-6)$$

Al sustituir la inversa de la matriz resistencia por la matriz conductancia, en la ecuación (9-5):

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{tierra} \\ V_{tierra} \\ V_{tierra} \end{bmatrix} \quad (9-7)$$

De acuerdo a la figura 16, al sumar todas las corrientes de los electrodos, se obtiene la corriente que se inyecta por el sistema de puesta a tierra:

$$i_{tierra} = i_1 + i_2 + i_3 \quad (9-8)$$

Al usar la ecuación (9-7) en la ecuación anterior:

$$i_{tierra} = (\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n G_{jk}) V_{tierra} \quad (9-9)$$

donde n es el orden de la matriz o el número de electrodos.

De la ecuación se obtiene la resistencia del sistema de puesta a tierra:

$$R_{tierra} = \frac{V_{tierra}}{i_{tierra}} = \frac{1}{(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n G_{jk})} \quad (9-10)$$

Como conclusión, para un sistema de puesta a tierra formado por n electrodos, la resistencia de puesta a tierra se obtiene construyendo la matriz resistencia, que luego se invierte para obtener la matriz conductancia. La resistencia se obtiene como el inverso de la suma de todos los elementos de la matriz conductancia.

Ejercicio 10

Obtener la resistencia de puesta a tierra para tres electrodos semiesféricos como los mostrados en la Figura 16.

datos:

$r_1 = 0.15$ (m)	Radio del primer electrodo.
$r_2 = 0.20$ (m)	Radio del segundo electrodo.
$r_3 = 0.18$ (m)	Radio del tercer electrodo.
$d_{12} = 0.8$ (m)	Separación entre los electrodos 1 y 2.
$d_{23} = 1.2$ (m)	Separación entre los electrodos 2 y 3.
$d_{13} = 1.5$ (m)	Separación entre los electrodos 1 y 3
$\rho = 100.0$ (Ω m)	Resistividad del suelo.

Se calculan todas las resistencias propias y mutuas para construir la matriz resistencia:

$$R_{11} = \frac{\rho}{2\pi r_1} = \frac{100}{2\pi * 0.15} = 106.1 (\Omega) \quad (9-11)$$

$$R_{22} = \frac{\rho}{2\pi r_2} = \frac{100}{2\pi * 0.20} = 79.6 (\Omega) \quad (9-12)$$

$$R_{33} = \frac{\rho}{2\pi r_3} = \frac{100}{2\pi * 0.18} = 88.4 (\Omega) \quad (9-13)$$

$$R_{12} = \frac{\rho}{2\pi d_{12}} = \frac{100}{2\pi * 0.8} = 19.9 (\Omega) \quad (9-14)$$

$$R_{13} = \frac{\rho}{2\pi d_{13}} = \frac{100}{2\pi * 1.5} = 10.6 (\Omega) \quad (9-15)$$

$$R_{23} = \frac{\rho}{2\pi d_{23}} = \frac{100}{2\pi * 1.2} = 13.26 (\Omega) \quad (9-16)$$

Al usar (9-6) y los valores de resistencia, se obtiene la matriz conductancia:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.949 & -2.347 & -0.842 \\ -2.347 & 13.00 & -1.735 \\ -0.842 & -1.735 & 12.00 \end{bmatrix} * 10^{-3} (\text{S}) \quad (9-17)$$

Luego se suman todas las conductancias de la matriz:

$$G_{total} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 G_{jk} = 25 (\text{m S}) \quad (9-18)$$

Finalmente se obtiene la resistencia de puesta a tierra:

$$R_{tierra} = \frac{1}{G_{total}} = \frac{1}{0.025} = 39.66 (\Omega) \quad (9-19)$$

10. La corriente de retorno de un sistema de puesta a tierra.

Hasta ahora se ha asumido que la corriente que se inyecta por un sistema de puesta a tierra, la misma retorna por el infinito, pero se sabe que esto no es verdad, la corriente retorna a una distancia finita del sistema de puesta a tierra de donde se inyecta la corriente.

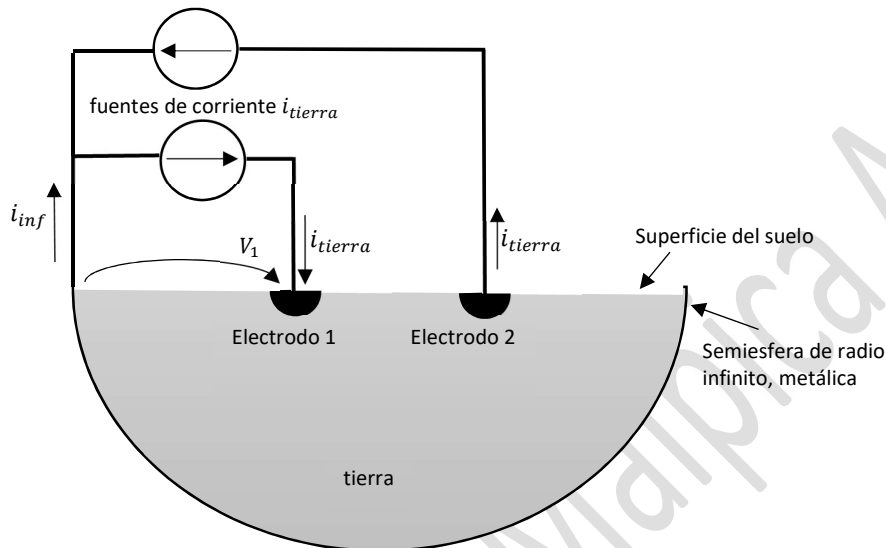


Fig. 17 Corriente de retorno de un sistema de puesta a tierra

La figura 17 muestra 2 electrodos o sistemas de puestas a tierra y dos fuentes de corrientes con corrientes iguales. El potencial que adquiere el electrodo 1 con respecto a tierra o el infinito, vendrá dado por:

$$V_1 = R_{11} i_{tierra} - R_{12} i_{tierra} \quad (10-1)$$

donde R_{11} es la resistencia propia del electrodo 1 y R_{12} es la resistencia mutua entre los electrodos, el signo menos en la ecuación obedece a que la corriente se encuentra saliendo del electrodo 2.

En la Figura 17 también se muestra la corriente que retorna de infinito i_{inf} pero al sumar las corrientes en el nodo, esta corriente debe ser nula:

$$i_{inf} = i_{tierra} - i_{tierra} = 0 \quad (10-2)$$

Como no existe corriente en el infinito, esto equivale a desconectar galvánicamente ambas fuentes del infinito y esto se representa en la Figura 18.

Ahora bien, en la Figura 18, ambas fuentes de corriente han quedado en serie, pero como ambas fuentes son de igual magnitud, entonces es suficiente con utilizar una sola fuente y que se muestra en la Figura 19.

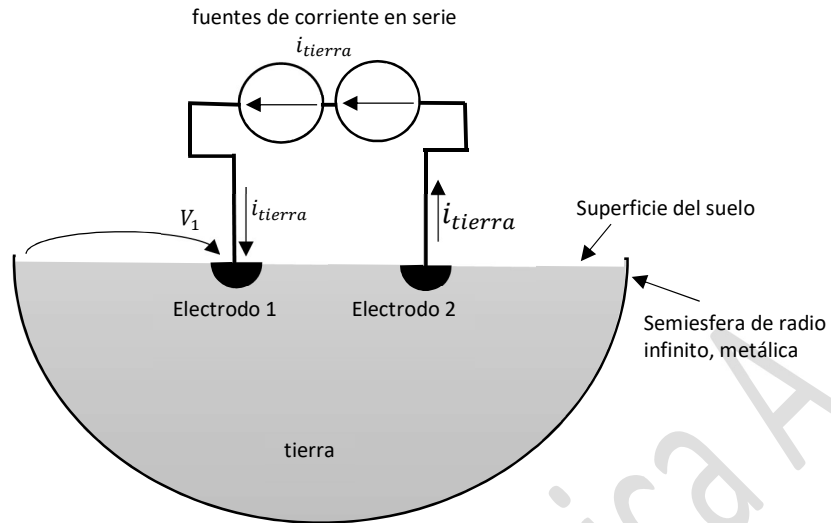


Fig. 18 Inyección de corriente por un sistema de puesta a tierra y la corriente de retorno

La Figura 19 muestra realmente lo que realmente sucede en un sistema de puesta a tierra, la corriente se inyecta por un electrodo o un sistema de puesta a tierra (electrodo 1) y retorna a una distancia finita por otros electrodos o sistema de puesta tierra.

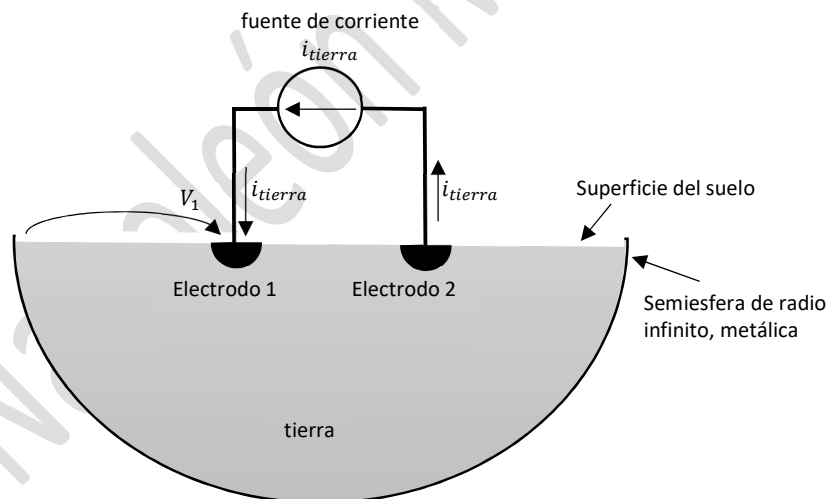


Fig. 19 Inyección de corriente por un sistema de puesta a tierra y la corriente de retorno.

Sin embargo, para la Figura 19, la ecuación (10-1) sigue siendo válida:

$$V_1 = R_{11} i_{tierra} - R_{12} i_{tierra} \quad (10-3)$$

Si las zonas de influencia de ambos electrodos no se solapan, porque se encuentran lo suficientemente alejados entre sí, entonces la resistencia mutua se puede despreciar, en la ecuación anterior, quedando el potencial del electrodo así:

$$V_1 = GPR_1 \approx R_{11} i_{tierra} \quad (10-4)$$

Que en definitiva es la ecuación que resulta de asumir que la corriente retorna por el infinito.

Napoleón Malpica A.

11. Potencial del suelo en sistemas de puesta a tierra formado por más de un electrodo.

Como se ha mencionado en los capítulos 4 y 5, es necesario calcular el potencial en cualquier punto del suelo, en los alrededores de un sistema de puesta a tierra, ya que permite determinar las tensiones de paso y de toque a la cual están expuestas las personas.

En el capítulo 4 se presentó el cálculo de las curvas equipotenciales para un electrodo semiesférico, pero ¿Cómo sería el cálculo de las curvas equipotenciales si el sistema de puesta a tierra estuviera constituido por más de un electrodo?

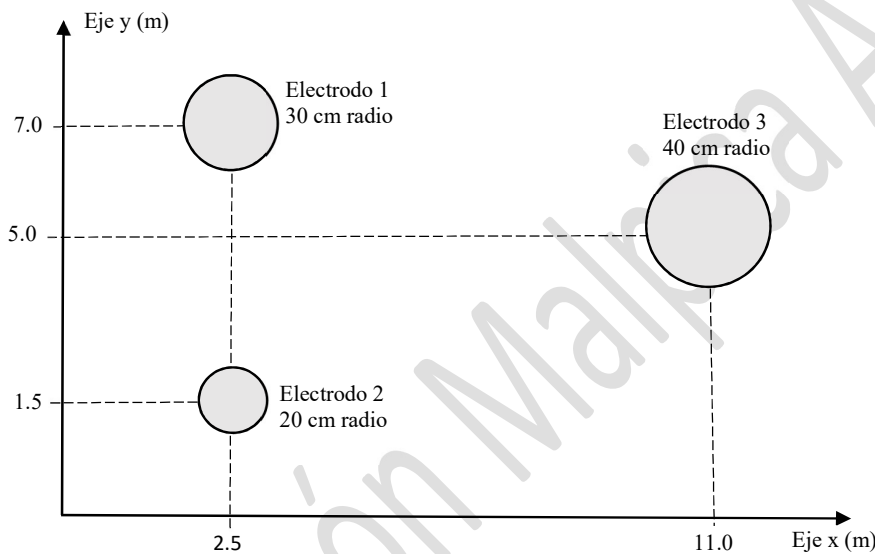


Fig. 20 Sistema de puesta a tierra formado por tres electrodos semiesféricos

La Figura 20 muestra un plano de planta de la superficie del suelo con la ubicación de tres electrodos semiesféricos, enterrados a ras del suelo. Los tres electrodos se encuentran conectados eléctricamente entre sí.

Para calcular las curvas equipotenciales de la superficie del suelo, es necesario calcular la corriente que drena cada electrodo a tierra, para ello es necesario construir la matriz resistencia del sistema de puesta a tierra y luego se obtienen las corrientes que drena cada electrodo con la ecuación (9-7).

Después de calcular las corrientes que drena a tierra cada electrodo, el potencial en la superficie del suelo se calcula como la suma de los potenciales que contribuye cada electrodo, usando la ecuación (4-3).

Ejercicio 11:

Calcular las líneas equipotenciales para un sistema de puesta a tierra formado tres electrodos semiesféricos

Datos:

- Primer electrodo:
Coordenadas: $x'_1 = 2.5 (m)$, $y'_1 = 7.0 (m)$.
Radio: $r_1 = 0.3 (m)$
- Segundo electrodo:
Coordenadas: $x'_2 = 2.5 (m)$, $y'_2 = 1.5 (m)$.
Radio: $r_2 = 0.2 (m)$
- Tercer electrodo:
Coordenadas: $x'_3 = 11.0 (m)$, $y'_3 = 5.0 (m)$.
Radio: $r_3 = 0.4 (m)$
- Resistividad del suelo:
 $\rho = 75 (\Omega m)$.
- Corriente inyectada en la tierra:
 $i_{tierra} = 100 (A)$

Primero se calculan todas las resistencias propias, con la ayuda de la ecuación (2-41):

$$R_{11} = \frac{\rho}{2\pi r_1} = \frac{75}{2\pi * 0.3} = 39.79 (\Omega) \quad (11-1)$$

$$R_{22} = \frac{\rho}{2\pi r_2} = \frac{75}{2\pi * 0.20} = 59.68 (\Omega) \quad (11-2)$$

$$R_{33} = \frac{\rho}{2\pi r_3} = \frac{75}{2\pi * 0.40} = 29.84 (\Omega) \quad (11-3)$$

Luego se calculan las separaciones entre los electrodos:

$$d_{12} = \sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2} = 5.50 (m) \quad (11-4)$$

$$d_{23} = \sqrt{(x'_2 - x'_3)^2 + (y'_2 - y'_3)^2} = 9.19 (m) \quad (11-5)$$

$$d_{13} = \sqrt{(x'_1 - x'_3)^2 + (y'_1 - y'_3)^2} = 8.73 (m) \quad (11-6)$$

Con las separaciones entre los electrodos, se calculan las resistencias mutuas, con la ayuda de (7-2):

$$R_{12} = \frac{\rho}{2\pi d_{12}} = \frac{75}{2\pi * 5.5} = 2.17 (\Omega) \quad (11-7)$$

$$R_{23} = \frac{\rho}{2\pi d_{23}} = \frac{75}{2\pi * 9.19} = 1.299 (\Omega) \quad (11-8)$$

$$R_{13} = \frac{\rho}{2\pi d_{13}} = \frac{75}{2\pi * 8.73} = 1.367 (\Omega) \quad (11-9)$$

Con las resistencias propias y mutuas, se construye la matriz resistencia:

$$R_{matriz} = \begin{bmatrix} 39.79 & 2.17 & 1.367 \\ 2.17 & 59.68 & 1.299 \\ 1.367 & 1.299 & 29.84 \end{bmatrix} (\Omega) \quad (11-10)$$

Se invierte la matriz resistencia para obtener la matriz conductancia:

$$G_{matriz} = \begin{bmatrix} 39.79 & 2.17 & 1.367 \\ 2.17 & 59.68 & 1.299 \\ 1.367 & 1.299 & 29.84 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & -0.893 & -1.12 \\ -0.893 & 17 & -0.69 \\ -1.12 & -0.69 & 34 \end{bmatrix} (m S) \quad (11-11)$$

Se suman todos los elementos de la matriz conductancia:

$$G_{total} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 G_{jk} = 0.07 (S) \quad (11-12)$$

Se obtiene la resistencia de puesta a tierra con la suma de todas las conductancias:

$$R_{tierra} = \frac{1}{G_{total}} = \frac{1}{0.07} = 14.242 (\Omega) \quad (11-13)$$

Con la resistencia de puesta a tierra y la corriente inyectada por la tierra, se calcula la tensión que adquiere el sistema de puesta a tierra:

$$V_{tierra} = GPR = R_{tierra} i_{tierra} = 14.241 * 100 = 1424 (V) \quad (11-14)$$

Con la tensión que adquiere el sistema de puesta a tierra, se calcula la corriente que drena cada uno de los electrodos:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} GPR \\ GPR \\ GPR \end{bmatrix} \quad (11-15)$$

Al sustituir (11-11) en la ecuación anterior:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & -0.893 & -1.12 \\ -0.893 & 17 & -0.69 \\ -1.12 & -0.69 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1424 \\ 1424 \\ 1424 \end{bmatrix} * 10^{-3} (A) \quad (11-16)$$

Al realizar la multiplicación, se obtienen las corrientes que drenan a tierra cada uno de los electrodos:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33.056 \\ 21.676 \\ 45.268 \end{bmatrix} (A) \quad (11-17)$$

Para calcular el potencial en cualquier punto sobre la superficie del suelo, se empleará la ecuación (4-3):

$$V(x, y) = \sum_{k=1}^n \frac{\rho i_k}{2\pi \sqrt{(x-x'_k)^2 + (y-y'_k)^2}} \quad (11-18)$$

donde n es el número de electrodos, (x'_k, y'_k) son las coordenadas del electrodo k e i_k es la corriente que drena a tierra el electrodo k .

Con la ecuación anterior se evalúa el potencial de cualquier punto que se encuentre sobre la superficie del suelo, como se muestra en la Figura 21.

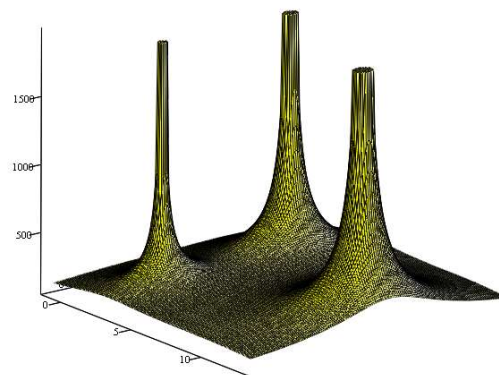


Fig. 21 Potencial en la superficie del suelo para los tres electrodos semiesféricos.

De la Figura 21 se observa las abruptas pendientes en los alrededores de los electrodos, condición que es muy desfavorable para las tensiones de paso.

El procedimiento aquí descrito, para obtener el potencial en el suelo, es el mismo si se emplean otros tipos de electrodos como barras y conductores cilíndricos, solamente la ecuación usada para calcular el potencial como la (11-18) debe ser la adecuada para el tipo de electrodo como barras o contrapesos.