

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA



**ELECTRODINÁMICA ESCALAR EN LA FORMULACIÓN DE
INTEGRALES DE CAMINO**

Trabajo Especial de Grado presentado por
Daniel Arturo Brito Urbina
ante la Facultad de Ciencias de la
Ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título
de: **Licenciado en Física**
Con la tutoría de: Prof. Gabriel Abellán

Octubre-2019
Caracas-Venezuela

Escuela de Física

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA



**ELECTRODINÁMICA ESCALAR EN LA FORMULACIÓN DE
INTEGRALES DE CAMINO**

Trabajo Especial de Grado presentado por
Daniel Arturo Brito Urbina
ante la Facultad de Ciencias de la
Ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título
de: **Licenciado en Física**
Con la tutoría de: Prof. Gabriel Abellán

Octubre-2019
Caracas-Venezuela



VEREDICTO

Quienes suscriben, miembros del Jurado designado por el Consejo de la Escuela de Física de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, para examinar el Trabajo Especial de Grado presentado por **Daniel Arturo Brito Urbina**, Cédula de Identidad **V-23713766**, bajo el título “**Electrodinámica Escalar en la formulación de Integrales de Camino**”, a los fines de cumplir con el requisito legal para optar al grado de **Licenciado en Física**, dejan constancia de lo siguiente:

1. Leído como fue dicho trabajo por cada uno de los miembros del Jurado, éste fijó el día 18 de octubre de 2019, a Las 7:00 am, para que el autor lo defendiera en forma pública, lo que éste hizo en la Sala de Seminarios Guillermo Ruggeri de la Escuela de Física, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual respondió satisfactoriamente a las preguntas que le fueron formuladas por el jurado; todo ello conforme a los artículos 20, 21, 22, 25, 26 y 28 de la Normativa de Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la UCV vigente.
2. Finalizada la defensa pública del trabajo, el jurado decidió declararlo aprobado por considerar que se ajusta a lo dispuesto y exigido en la Normativa de Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la UCV vigente en sus artículos 1, 5 y 6.

Se levanta la presente acta a los 18 días del mes de octubre de 2019, dejándose también constancia de que, conforme a la normativa jurídica vigente, actuó como coordinador del jurado el tutor del Trabajo Especial de Grado Prof Gabriel Antonio Abellan Poleo.

Firma del jurado evaluador

Prof Nelson Enrique Bolivar
Cova
UCV

Prof Gabriel Antonio Abellan
Poleo
UCV

Prof. José Antonio López
Rodríguez
UCV

Dedicatoria

Para Marisol y Edmundo, por su amor, trabajo y valores enseñados.

A ellos les debo todo lo que soy.

Agradecimientos

Agradezco a mi familia, Marisol, Edmundo y Enmanuel por apoyarme y darme las herramientas y condiciones para que pueda dedicarme a estudiar Física. A Rebeca, por escucharme hablar respecto a mi trabajo y darme ánimo y risas. A mis amigos, por estar presentes durante la aventura de estudiar en la Facultad de Ciencias.

Agradezco a los profesores con quienes he podido discutir y aprender algo nuevo, que de una u otra forma tuvo influencia en el desarrollo de mi proyecto. Por último, le doy gracias a la Escuela de Física por permitirme espacios para trabajar como el Laboratorio de Demostraciones.

RESUMEN

En el presente trabajo se estudiarán algunos aspectos de la Teoría Cuántica de Campos por medio de Integrales de Camino, específicamente, se busca calcular la sección eficaz para un proceso Compton a nivel árbol en la teoría de la Electrodinámica Escalar. También se introduce la idea de la renormalización de la teoría y se renormaliza el propagador del campo escalar. Con esto se busca aprender el manejo apropiado de la Integral de Camino en la descripción de los posibles escenarios en procesos cuánticos, así como también el uso y limitaciones de la teoría de perturbaciones.

Palabras clave: Integral de Camino, Electrodinámica Escalar, Sección Eficaz, Propagador.

Índice general

1. Teoría Clásica de Campos	15
1.1. Lagrangiano y Principio de Hamilton	15
1.2. Hamiltoniano	17
1.3. Extensión para campos.	18
1.3.1. Leyes de Conservación	19
2. Integrales de Camino de Feynman	21
2.1. El Propagador de una teoría	22
2.2. El Propagador como Integral de Camino	24
2.3. Integral de Camino en Teoría Cuántica de Campos	27
2.3.1. Vacío	28
2.4. Funcional Generador	29
3. Teorías de Campos	33
3.1. Campo Escalar	33
3.1.1. Campo Escalar Complejo	35
3.2. Campo Electromagnético	37
3.3. Electrodinámica Cuántica Escalar	40
3.3.1. Acoplamiento Minimal	41
4. Electrodinámica Cuántica Escalar	45
4.1. Teoría de Perturbaciones	45
4.2. Propagadores de la Teoría Libre	46
4.2.1. Propagador del Campo Escalar Complejo	46
4.2.2. Propagador del Campo Electromagnético	49
4.3. Vértices de interacción	52
4.4. Reglas de Feynman	55

5. Procesos en Electrodinámica Cuántica Escalar	59
5.1. Matriz-S	59
5.1.1. Proceso Compton	60
5.2. Sección Eficaz	63
5.3. Variables de Mandelstam	65
5.4. Sistemas de Referencia	66
5.4.1. Sistema del Centro de Masa	66
5.4.2. Sistema de Referencia del Laboratorio	67
5.5. Gráficas de la Sección Eficaz	69
5.6. Diagramas con loops	72
5.6.1. Regularización	73
5.6.2. Renormalización	76
6. Conclusiones	83

Introducción

Las teorías de campos proporcionan modelos teóricos que describen adecuadamente la interacción entre partículas. En la década de 1920 surge el primer intento de teoría de campos: la electrodinámica cuántica [1]; en ella se consideran campos de materia que interactúan con el campo electromagnético. Las partículas presentes en esta teoría son electrones, positrones y fotones y se interpretan como vibraciones de los campos cuánticos.

En la actualidad, la electrodinámica cuántica es una de las teorías físicas más exitosas del siglo XX debido a la gran exactitud que presenta con los resultados experimentales; el éxito de esta teoría no impide que hayan otras teorías de campos que describan materia cargada interactuando con el campo electromagnético, este es el caso de la Electrodinámica Escalar, esta teoría describe bosones de espín cero con carga eléctrica que están en interacción con el campo electromagnético.

Un aspecto interesante de la Electrodinámica Escalar es que sirve para modelar en un límite relativista la dinámica de materiales superconductores [2] [3]. Esto se debe a que un material superconductor cuando alcanza este estado, forma internamente pares de electrones con momento de espín opuesto conocidos como pares de Cooper y éstos se comportan como bosones de espín cero que se mantienen unidos por la interacción electrón fonón en la red cristalina.

Las teorías cuánticas de campos reciben este nombre, no sólo por tener campos en lugar de funciones de onda, sino también porque son teorías que están cuantizadas. Principalmente existen dos formas, entre otras, de cuantizar una teoría de campos: una forma es someterla al procedimiento de segunda cuantización canónica, en el mismo, los campos y momenta conjugados son promovidos a operadores que cumplen relaciones de conmutación. La otra forma es la que se empleará en este trabajo, cuantización funcional por integrales de camino. En esencia, la cuantización de una teoría es un procedimiento matemático con el cual se encuentran los observables y estados de la teoría cuántica a partir de la teoría clásica. Para abordar estos temas, este trabajo de investigación se estructuró de la siguiente forma:

En el capítulo 1, se revisan aspectos básicos de la mecánica Lagrangiana y Hamiltonia-

na que serán de utilidad para construir las teorías clásicas de campos. También se revisa el teorema de Noether para cantidades conservadas que se estudiarán posteriormente.

En el capítulo 2, se presenta la idea de la integral de camino de Feynman en el marco de la mecánica cuántica y de la teoría cuántica de campos considerando el propagador de una teoría. También se construye el funcional generador para una teoría cualquiera y se muestra la relación del funcional generador con las funciones de Green.

En el capítulo 3, se estudian clásicamente las teorías del campo escalar y campo electromagnético con las herramientas repasadas en el capítulo 1. Seguidamente se considera la interacción local de dichos campos para obtener así la teoría de la electrodinámica escalar y estudiarla clásicamente.

En el capítulo 4, se cuantiza la electrodinámica escalar usando la integral de camino, de esta forma, se obtienen los propagadores de la teoría libre, los vértices de interacción y también las reglas de Feynman.

Finalmente en el capítulo 5, se hacen cálculos explícitos para obtener la sección eficaz de un proceso Compton a nivel árbol, esto se hace en el sistema de referencia del centro de masa y del laboratorio. Luego se grafica el diferencial de sección eficaz en función del ángulo de dispersión y en función de la energía transferida. Por último, se considera el propagador del campo escalar con loops y se muestra que los diagramas con interacciones llevan a divergencias en la teoría que pueden ser corregidas siguiendo el proceso de renormalización.

Capítulo 1

Teoría Clásica de Campos

El propósito de esta investigación es calcular amplitudes de transición en la teoría de la electrodinámica escalar. Pensando en este objetivo, es importante revisar algunos aspectos de la mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana. Primero se define el Lagrangiano y usando el principio de Hamilton, se obtienen las ecuaciones de movimiento. Después, se extiende este mismo análisis a campos, por último, se comenta acerca de las leyes de conservación respecto a las simetrías y se incluye un ejemplo del campo escalar.

1.1. Lagrangiano y Principio de Hamilton

El Lagrangiano es una función escalar de las coordenadas generalizadas q_i y de sus derivadas temporales, con el cual se pueden describir sistemas de N grados de libertad y se define como:

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T - V \quad , \quad (1.1)$$

siendo $T = \frac{1}{2}m(\dot{q}_i)^2$ la energía cinética y $V = V(q_i)$ la energía potencial. Cada una de las coordenadas q_i corresponden a los grados de libertad del sistema.

Gran parte de los sistemas físicos son descritos por el principio de Hamilton a través de la acción S , un funcional lineal que está definido como:

$$S = \int_{t_{in}}^{t_{fi}} dt L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad . \quad (1.2)$$

El principio de Hamilton establece que la acción S toma un valor extremo cuando la coordenada q_i describe una trayectoria clásica; suponiendo que se conoce la trayectoria q_i para la cual la acción se hace extrema, una variación en la misma como se muestra en la figura 1.1, producirá la anulación del valor extremo de la acción. Ahora bien, si este cambio en la acción se hace cero, se mantendrá la condición de valor extremo en S , en la

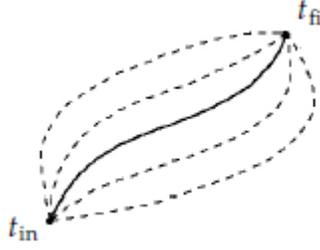


Figura 1.1: Variación de la trayectoria.

cual q_i describe la trayectoria clásica

$$\begin{aligned} \delta S &= \int dt \delta L(q_i, \dot{q}_i, t) \\ &= \int dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) = 0 . \end{aligned} \quad (1.3)$$

Realizando una integración por partes en el 2do término y suponiendo que la derivada temporal conmuta con la variación de la trayectoria, es decir, $\frac{d}{dt} \delta q_i = \delta \left(\frac{d}{dt} q_i \right)$, entonces la variación de la acción se reescribe como

$$\delta S = \int dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i = 0 . \quad (1.4)$$

En esta ecuación la variación del funcional es cero para cualquier variación de la trayectoria, por lo tanto, el integrando será cero. Este integrando representa la condición que debe cumplir la trayectoria q_i para que la acción sea extrema, y es precisamente, lo que se denomina la ecuación de Euler - Lagrange.

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 . \quad (1.5)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange también se conocen como las ecuaciones de movimiento para q_i y son completamente equivalentes a las leyes de Newton, es decir no constituyen una nueva teoría sino una forma alternativa conveniente de describir un mismo fenómeno físico.

La formulación Lagrangiana se enfoca en cantidades escalares (energías cinética y potencial) asociadas con el cuerpo y describe el movimiento como una propiedad de todo el sistema. Ahora bien, el principio de Hamilton permite interpretar el movimiento como el resultado de un propósito de la naturaleza, en contraste con el punto de vista Newtoniano de causa-efecto para explicar el movimiento por medio de fuerzas. [4]

1.2. Hamiltoniano

En la mecánica Lagrangiana hemos visto que los sistemas físicos se describen en términos de la posición y la velocidad, estas variables componen el espacio de configuración (q_i, \dot{q}_i) . Sin embargo, a veces es conveniente describir la dinámica en términos de otras variables. Una elección conveniente es utilizar las posiciones y los momenta (q_i, p_i) , este espacio se denomina espacio de fase.

La formulación Hamiltoniana consiste en utilizar las variables del espacio de fases para describir el sistema. Para lograr esto se realiza una transformada de Legendre al Lagrangiano, obteniendo así, una representación de los estados de un sistema en función de las variables del espacio de fase (q_i, p_i) . Partiendo del Lagrangiano (1.1) y haciendo una derivada respecto a la velocidad y posición, se obtiene respectivamente:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i = p_i, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} = \dot{p}_i. \quad (1.7)$$

Estas ecuaciones definen el momento conjugado de la posición y su derivada temporal. Ahora bien, si calculamos el diferencial total del Lagrangiano $L(q_i, \dot{q}_i)$ y utilizamos las ecuaciones (1.6 , 1.7) encontramos que

$$\begin{aligned} dL &= \dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \dot{p}_i dq_i + d(p_i \dot{q}_i) - \dot{q}_i dp_i + \frac{\partial L}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

pasando el término $d(p_i \dot{q}_i)$ al lado izquierdo, se obtiene el diferencial de una cantidad $L - p_i \dot{q}_i$ y del otro lado de la igualdad quedan las coordenadas independiente posición y momento conjugado que, como ya se mencionó, conforman el espacio de fase (q_i, p_i) . Motivado por esto se define el Hamiltoniano como

$$H(q_i, p_i) = \dot{q}_i p_i - L(q_i, \dot{q}_i, t). \quad (1.9)$$

Tomando el diferencial total del Hamiltoniano, $dH = \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i$, y comparando con (1.8), se pueden indentificar los resultados de las derivadas parciales del Hamiltoniano respecto a la posición y momento, mejor conocidas como ecuaciones de Hamilton

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i ; \quad (1.10)$$

éstas son las ecuaciones de movimiento para la formulación Hamiltoniana. Conforman un conjunto de 2 ecuaciones diferenciales de primer orden para cada grado de libertad, mientras que en la formulación Lagrangiana hay una ecuación de segundo orden por cada grado de libertad.

1.3. Extensión para campos.

En general, la mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana determinan el estado de un sistema por medio de la posición de sus partículas, y sus respectivas velocidades y momentos, sin embargo, en áreas como la Mecánica Cuántica y Teoría Cuántica de Campos, debido al Principio de Incertidumbre de Heisenberg, no es posible determinar de manera exacta la posición y momento de las partículas; por lo tanto, para expresar idealmente, el Lagrangiano de un sistema, éste debería depender de un campo con el cual se pueda expresar la posición en el espacio-tiempo como una amplitud del mismo y no en función de la posición q_i ya que no es exacta, es decir:

$$q_i(t) \longrightarrow \phi_i(t, \vec{x}) = \phi(x) , \quad (1.11)$$

debido a lo anteriormente expuesto, el Lagrangiano (1.1) pasa a ser una densidad Lagrangiana, la cual denominaremos de ahora en adelante Lagrangiana

$$L(q_i, \dot{q}_i) = \int d^3x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) , \quad (1.12)$$

igualmente, la acción del sistema deja de ser una integral sólo en el tiempo y pasa a ser una integral en el espacio-tiempo

$$S = \int dt L(q_i, \dot{q}_i) = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) , \quad (1.13)$$

en el mismo orden de ideas, el principio de Hamilton se escribiría:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta \phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi_i)} \delta (\partial^\mu \phi_i) \right) \\ &= \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta \phi_i - \partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi_i)} \right) \delta \phi_i + \cancel{\partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi_i)} \delta \phi_i \right)} \right) \\ &= \int d^4x \delta \phi_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi_i)} \right) \right) = 0 , \end{aligned} \quad (1.14)$$

donde se usó el argumento que los campos permanecen constantes en el infinito $\delta \phi|_\infty \longrightarrow 0$ para eliminar el último término en la segunda línea de la expresión anterior. De esta forma, se obtiene la Ecuación de Euler - Lagrange para el campo $\phi_i(x)$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi_i)} = 0 . \quad (1.15)$$

Como es de esperarse, la densidad Hamiltoniana se consigue al hacer una Transformada de Legendre a $\mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$. En primer lugar se define el momento conjugado $\pi(x)$ al campo $\phi(x)$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i \longrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_i)} = \pi_i(x) , \quad (1.16)$$

de manera análoga a como se obtuvo el Hamiltoniano en la ecuación (1.9), se consigue la densidad Hamiltoniana

$$\mathcal{H}(\phi_i, \pi_i) = \pi_i(x) \partial_0 \phi_i(x) - \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) , \quad (1.17)$$

por último, las ecuaciones de Hamilton para campos se denotan:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_i} = -\dot{\pi}_i \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_i} = \dot{\phi}_i . \quad (1.18)$$

1.3.1. Leyes de Conservación

En los sistemas físicos hay cantidades que se conservan como la energía, momento y momento angular; estas cantidades que permanecen constantes tienen un papel preponderante en la física teórica, debido a que permiten conocer propiedades del sistema y realizar predicciones sobre el comportamiento del mismo [5]. Estas leyes de conservación son consecuencias naturales de las simetrías que tiene un sistema y esto es precisamente lo que establece el teorema de Noether, el cual se resume:

Cada transformación continua de simetría que deje invariante el Lagrangiano y por lo tanto las ecuaciones de movimiento, tiene asociada una corriente conservada. La carga conservada de esa simetría es la integral en todo el espacio de la componente cero de la corriente.

Las teorías de Campos podrían mostrar propiedades de invariancia no relacionadas con el espacio tiempo (traslaciones y rotaciones), sino relacionadas con simetrías de los grados de libertad internos, como por ejemplo isoespín ó carga eléctrica. Si la Lagrangiana de una teoría se mantiene invariante bajo una transformación infinitesimal de los campos, es decir, $\phi_i(x) = \phi_i(x) + \delta\phi_i(x)$, entonces la variación de la Lagrangiana y por lo tanto de la acción será nula.

Por otro lado, la ecuación (1.14) permite deducir directamente que la variación de la Lagrangiana está representada en el segundo término, ya que el primer término es la ecuación de Euler-Lagrange y éste, es nulo debido a que la Lagrangiana extremiza la acción. De esta manera, se obtiene:

$$\delta \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) = \partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi_i)} \delta \phi_i \right) = 0 , \quad (1.19)$$

$$\implies \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi_i)} \delta \phi_i(x) = j^\mu , \quad (1.20)$$

donde $j^\mu = (j^0(x), \vec{j}(x))$ representa la corriente conservada asociada a la simetría. La carga conservada se obtiene integrando la ecuación de continuidad de la corriente ($\partial_\mu j^\mu = 0$) en

en todo el espacio:

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial}{\partial t} j^0(x) - \nabla \cdot \vec{j}(x) = 0 , \quad (1.21)$$

$$\implies \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x j^0(x) = \int d^3x \nabla \cdot \vec{j}(x) , \quad (1.22)$$

usando el teorema de Gauss, el lado derecho se puede reescribir como $\int_{\partial\Omega} \vec{j}(x) \cdot \vec{d}a$ siendo evidente que este término se anula ya que los campos decaen suficientemente rápido en el infinito; así, el término del lado izquierdo es cero y por lo tanto la carga conservada es constante:

$$Q = \int d^3x j^0(x) = \text{ctte} . \quad (1.23)$$

En algunas Teorías de Campos como el Campo Escalar Complejo ó el Campo Espinorial, puede ser aplicable el teorema de Noether para una simetría interna de los campos; en el caso del Campo Escalar Complejo, la Lagrangiana puede ser escrita de la siguiente forma

$$\mathcal{L}_{KGC} = (\partial_\mu \phi(x))^\dagger \partial^\mu \phi(x) - m^2 |\phi(x)|^2 , \quad (1.24)$$

ésta tiene la propiedad de permanecer invariante bajo una transformación de fase en los campos

$$\underline{\phi}(x) = \exp(-ie\lambda)\phi(x) \implies \underline{\phi}(x) = \phi(x) - ie\lambda\phi(x) . \quad (1.25)$$

Según la ecuación (1.20), la corriente conservada a esta simetría de los campos viene dada por

$$j^\mu = ie\lambda \left(\phi^\dagger(x) \partial^\mu \phi(x) - \phi(x) \partial^\mu \phi^\dagger(x) \right) , \quad (1.26)$$

ahora bien, la solución a la Ecuación de Klein - Gordon, como veremos en el capítulo 3, puede ser escrita en términos de una una expansión de Fourier

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E}} \left(a_p \exp(-ip^\mu x_\mu) + b_p^\dagger \exp(ip^\mu x_\mu) \right) , \quad (1.27)$$

sustituyendo en la ecuación de la carga conservada (1.23), se obtiene

$$Q = e\lambda \int d^3p \left(a_p^\dagger a_p - b_p^\dagger b_p \right) . \quad (1.28)$$

Cuando se cuantiza la teoría, los coeficientes de las ondas planas se interpretan como operadores de creación y aniquilación de partículas. Entonces, el Campo Escalar Complejo corresponde a un Campo Escalar Cargado y la carga total es la suma de las cargas de partículas y antipartículas; sabiendo que, las antipartículas tienen la misma masa pero carga opuesta con respecto a las partículas. Ahora bien, la carga conservada no necesariamente debe ser de origen eléctrico, puede ser cualquier tipo de carga discreta conservada como número bariónico, número leptónico etc.

Capítulo 2

Integrales de Camino de Feynman

En 1933 Paul Dirac, publicó un artículo en el que hacía una observación a la mecánica clásica, en ésta, el Lagrangiano y la acción tienen un papel preponderante debido a que forman parte de un principio fundamental de la física como lo es el principio de Hamilton; mientras que en la mecánica cuántica parecía tener más importancia el Hamiltoniano, ya que la evolución temporal de los observables (relaciones de conmutación) guardaba cierta similitud con los corchetes de Poisson. En su artículo, Paul Dirac especuló sin éxito con la idea de encontrar una relación entre el propagador de una teoría cuántica (función de Green) y $\exp\left(\frac{i}{\hbar}S\right)$, donde S era la acción clásica. [6]

La idea de Dirac pudo ser desarrollada por Richard Feynman en 1948 con una formulación matemática completamente distinta a las existentes en el momento, la cual llamó Integral de Camino [7]. La idea se basa en que el propagador de una teoría, entre un estado inicial y final, puede escribirse como una suma por todos los posibles caminos (no solo el camino clásico); cada uno contribuye en igual magnitud, pero la fase de contribución es la acción clásica. Esto se puede interpretar como si la partícula tomara todos los posibles caminos y la amplitud de probabilidad de cada uno de ellos se suma como en el principio de superposición.

La Integral de Camino no es una teoría nueva, ni ofrece nuevos resultados a la mecánica cuántica; sin embargo, es una herramienta muy útil en teorías de campos ya que proporciona una forma alternativa de cuantizar una teoría, también proporciona una visión interesante e intuitiva de procesos cuánticos. En éste capítulo se introducirá la Integral de Camino como herramienta para tratar Teorías de Campos [8], primero desde un enfoque de mecánica cuántica no relativista para luego ser extendido a campos [9].

2.1. El Propagador de una teoría

En Mecánica Cuántica una partícula sometida a un potencial $V(\vec{x})$, puede ser descrita usando la ecuación de Schrödinger

$$\begin{aligned} \widehat{H}\Psi(t, \vec{x}) &= -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2\Psi(t, \vec{x}) + V(\vec{x})\Psi(t, \vec{x}) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\Psi(t, \vec{x})) \\ &\implies \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \widehat{H}\right)\Psi(t, \vec{x}) = 0 . \end{aligned} \quad (2.1)$$

La solución a esta ecuación se puede obtener por el método de separación de variables y es un producto de funciones de la forma

$$\Psi(t, \vec{x}) = \sum \psi_n(\vec{x}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_n t\right) , \quad (2.2)$$

la función $\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_n t\right)$ es la solución a la parte temporal de la ecuación, luego de la separación de variables. Por otro lado, las funciones $\psi_n(\vec{x})$ son soluciones de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, éstas son autofunciones del Hamiltoniano con estados de energía E_n ; estas autofunciones son ortonormales, es decir, cumplen una relación de ortogonalidad: $\psi_n(\vec{x})\psi_m(\vec{x}) = \delta_{nm}$ y también componen una base para un espacio vectorial de Hilbert.

Las ecuaciones diferenciales, como por ejemplo (2.1), pueden ser resueltas por diversos métodos como por ejemplo el ya mencionado método de separación de variables o por la función de Green del operador. En el caso de la teoría Cuántica de Campos, la función de Green, tiene un uso más extenso que sólo resolver una ecuación diferencial; también se interpreta como la propagación de una partícula y se suele llamar propagador; esto se discutirá con mayor detenimiento en las siguientes secciones. Para el caso de la ecuación de Schrödinger, el propagador cumple

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \widehat{H}\right)G(t, \vec{x}, \underline{t}, \underline{\vec{x}}) = \delta(t - \underline{t})\delta(\vec{x} - \underline{\vec{x}}) , \quad (2.3)$$

donde la función $G(t, \vec{x}, \underline{t}, \underline{\vec{x}})$ es inversa al operador de (2.1), ésta función puede hallarse explícitamente si se expande en términos de una base apropiada como las autofunciones $\psi_n(\vec{x})$ del Hamiltoniano; esto es válido debido a que que las autofunciones $\psi_n(\vec{x})$ forman una base ortonormal, de esta forma se propone

$$G(t, \vec{x}, \underline{t}, \underline{\vec{x}}) = \sum_n^\infty a_n(\underline{t}, \underline{\vec{x}})\psi_n(\vec{x}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_n t\right)\Theta(t - \underline{t}) , \quad (2.4)$$

la función escalón $\Theta(t - \underline{t})$ indica que $G(t, \vec{x}, \underline{t}, \underline{\vec{x}})$ es distinta de cero para un tiempo $t \geq \underline{t}$. Por otra parte, el coeficiente $a_n(\underline{t}, \underline{\vec{x}})$ puede hallarse evaluando el propagador propuesto

en una condición inicial conveniente

$$G(\underline{t} + 0, \vec{x}, \underline{t}, \vec{x}) = \delta(\vec{x} - \vec{x}) . \quad (2.5)$$

Esta condición implica que las autofunciones $\psi_n(\vec{x})$ conforman una relación de completitud. Evaluando la condición inicial en la función de Green propuesta, se puede hallar el coeficiente

$$\begin{aligned} G(\underline{t} + 0, \vec{x}, \underline{t}, \vec{x}) &= \sum_n^\infty a_n(\underline{t}, \vec{x}) \Psi(\vec{x}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n \underline{t}\right) \Theta(\underline{t} - \underline{t}) \\ &= \sum_n^\infty a_n(\underline{t}, \vec{x}) \Psi(\vec{x}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n \underline{t}\right) = \delta(\vec{x} - \vec{x}) , \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\implies a_n(\underline{t}, \vec{x}) = \Psi^*(\vec{x}) \exp\left(\frac{i}{\hbar} E_n \underline{t}\right) ; \quad (2.7)$$

sustituyendo el coeficiente $a_n(\underline{t}, \vec{x})$ en la representación en serie del propagador y haciendo uso de la notación de Dirac, éste se logra reescribir como:

$$\begin{aligned} G(t, \vec{x}, \underline{t}, \vec{x}) &= \sum_n^\infty \Psi_n(\vec{x}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n(t - \underline{t})\right) \Psi_n^*(\vec{x}) \Theta(t - \underline{t}) \\ &= \sum_n^\infty \overbrace{\langle \vec{x} | \Psi_n \rangle}^{\Psi_n(\vec{x})} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n(t - \underline{t})\right) \overbrace{\langle \Psi_n | \vec{x} \rangle}^{\Psi_n^*(\vec{x})} \Theta(t - \underline{t}) \\ &= \langle \vec{x} | \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \widehat{H}(t - \underline{t})\right) | \vec{x} \rangle , \quad t > \underline{t} ; \end{aligned} \quad (2.8)$$

éste resultado permite interpretar al propagador como una transición desde un estado inicial $|\vec{x}\rangle$ en un tiempo \underline{t} a un estado final $|\vec{x}\rangle$ en un tiempo t ; es importante notar que ahora entre los estados $\langle \vec{x} |$ y $|\vec{x}\rangle$ está el operador evolución. Sabiendo que el Hamiltoniano cumple una relación de autovalores y autoestados

$$\widehat{H} |\Psi_n\rangle = E_n |\Psi_n\rangle , \quad (2.9)$$

entonces, la función $\exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n(t - \underline{t})\right)$ en presencia de un autoestado $|\Psi_n\rangle$ puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n(t - \underline{t})\right) |\Psi_n\rangle &= \left(1 |\Psi_n\rangle - \frac{i}{\hbar}(t - \underline{t}) E_n |\Psi_n\rangle - \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{\hbar}(t - \underline{t}) E_n\right)^2 |\Psi_n\rangle + \dots\right) \\ &= \left(\mathbb{I} + \left(-\frac{i}{\hbar} \widehat{H}(t - \underline{t})\right) + \frac{1}{2!} \left(-\frac{i}{\hbar} \widehat{H}(t - \underline{t})\right)^2 + \dots\right) |\Psi_n\rangle \\ &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \widehat{H}(t - \underline{t})\right) |\Psi_n\rangle , \end{aligned} \quad (2.10)$$

confirmando que es válido cambiar $E_n \longrightarrow \widehat{H}$ en el argumento de la función exponencial. Como ya mencionamos, debido a la condición (2.5) los autoestados del Hamiltoniano tienen una relación de completitud que permite simplificar la expresión del propagador

$$\sum_n^\infty |\Psi_n\rangle \langle \Psi_n| = \mathbb{I} . \quad (2.11)$$

2.2. El Propagador como Integral de Camino

Las autofunciones de \widehat{H} pueden ser escritas usando el propagador de la siguiente forma

$$\Psi(t, \vec{x}) = \Psi(x) = \int d^4 \underline{x} G(x, \underline{x}) \Psi(\underline{x}) , \quad (2.12)$$

esta ecuación sigue mostrando a $G(x, \underline{x})$ como una transición desde un estado inicial $\Psi(\underline{x})$ a un estado final $\Psi(x)$. La idea de una integral de camino se obtiene de dividir el intervalo de tiempo entre \underline{t} y t , agregando un estado intermedio $|x_1\rangle$ en un tiempo t_1 , es decir: $\underline{t} \rightarrow t_1 \rightarrow t$; de la misma forma se puede escribir $\Psi(x_i)$ de cada transición usando la función $G(x, \underline{x})$

$$\Psi(x_1) = \int d^4 \underline{x} G(x_1, \underline{x}) \Psi(\underline{x}) , \quad (2.13)$$

$$\Psi(x) = \int d^4 x_1 G(x, x_1) \Psi(x_1) ; \quad (2.14)$$

como se muestra, hay 2 transiciones en la función de onda, primero desde \underline{x} hasta x_1 y después, desde x_1 hasta x . Combinando las ecuaciones (2.13) y (2.14) y comparando con la (2.12)

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \int d^4 x_1 G(x, x_1) \int d^4 \underline{x} G(x_1, \underline{x}) \Psi(\underline{x}) \\ &= \iint d^4 \underline{x} d^4 x_1 G(x, x_1) G(x_1, \underline{x}) \Psi(\underline{x}) , \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\implies G(x, \underline{x}) = \int d^4 x_1 G(x, x_1) G(x_1, \underline{x}) = \langle \vec{x} | \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \widehat{H}(t - \underline{t})\right) | \underline{x} \rangle . \quad (2.16)$$

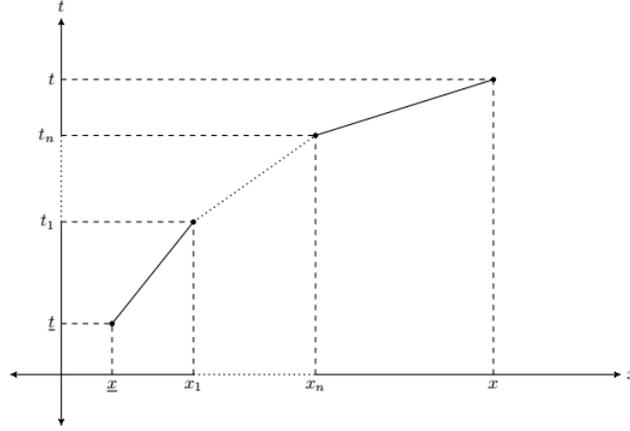
Ahora, agregando más estados intermedios entre \underline{t} y t :

$$\underline{t} \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots \rightarrow t_n \rightarrow t$$

y haciendo un procedimiento análogo al anterior, se puede obtener

$$G(x, \underline{x}) = \iiint \dots \int d^4 x_1 d^4 x_2 \dots d^4 x_n G(x, x_n) \dots G(x_3, x_2) G(x_2, x_1) G(x_1, \underline{x}) . \quad (2.17)$$

Con este resultado se puede ver la transición desde $(\underline{t}, \underline{x})$ a (t, x) como el resultado de $n+1$ transiciones, primero desde $(\underline{t}, \underline{x})$ hasta (t_1, x_1) por todas las posibles rutas, debido a que dx_1 está integrado, después desde (t_1, x_1) hasta (t_2, x_2) por todas las posibles rutas... Así sucesivamente hasta la última transición desde (t_n, x_n) hasta (t, x) . En la figura 2.1 se muestra la idea de todos los posibles caminos para extremos fijos entre los puntos (x, x_n) .


 Figura 2.1: Posibles caminos entre x_1 y x_n .

Desarrollando una transición cualquiera desde un estado inicial (x_j) hasta (x_{j+1}) según la ecuación (2.8) tenemos

$$\begin{aligned}
 G(x_{j+1}, x_j) &= \langle \vec{x}_{j+1} | \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \widehat{H} \overbrace{(t_{j+1} - t_j)}^{\Delta t} \right) | \vec{x}_j \rangle \\
 &= \langle \vec{x}_{j+1} | \left(1 + \frac{1}{1!} \left(-\frac{i}{\hbar} \widehat{H} \Delta t \right) + \frac{1}{2!} \left(-\frac{i}{\hbar} \widehat{H} \Delta t \right)^2 + \dots \right) | \vec{x}_j \rangle \\
 &\simeq \langle \vec{x}_{j+1} | \vec{x}_j \rangle - \frac{i}{\hbar} \Delta t \langle \vec{x}_{j+1} | \widehat{H} | \vec{x}_j \rangle . \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

Ésta aproximación es válida siempre que el intervalo de tiempo se haga suficientemente pequeño ($\Delta t \rightarrow 0$). Un Hamiltoniano $\widehat{H} = \widehat{H}(\hat{x}, \hat{p})$ comúnmente tiene energía cinética dependiente únicamente del momento \hat{p} y energía potencial dependiente únicamente de la posición \hat{x} , es decir

$$\widehat{H}(\hat{x}, \hat{p}) = \widehat{T}(\hat{p}) + \widehat{V}(\hat{x}) . \quad (2.19)$$

Los operadores $\widehat{T}(\hat{p})$ y $\widehat{V}(\hat{x})$ se asumen como operadores expandibles en serie de Taylor y al mismo tiempo los operadores posición \hat{x} y momento \hat{p} poseen respectivamente autovalores y autoestados de la forma: $\hat{a} | \vec{a} \rangle = a | \vec{a} \rangle$. Esto permite reescribir la expresión aproximada del propagador (2.18) como una función de variables \vec{x} y \vec{p} , es decir, los autovalores de \hat{x} y \hat{p} :

$$\begin{aligned}
 G(x_{j+1}, x_j) &\simeq \langle \vec{x}_{j+1} | \vec{x}_j \rangle - \frac{i}{\hbar} \Delta t \langle \vec{x}_{j+1} | \widehat{T}(\hat{p}) + \widehat{V}(\hat{x}) | \vec{x}_{j+1} \rangle \\
 &= \langle \vec{x}_{j+1} | \vec{x}_{j+1} \rangle - \frac{i}{\hbar} \Delta t \left(V(\vec{x}_j) \langle \vec{x}_{j+1} | \vec{x}_{j+1} \rangle + \int d^3 p T(\vec{p}) \langle \vec{x}_{j+1} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \vec{x}_j \rangle \right) \\
 &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3 p \exp \left(\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot (\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j) \right) \left(1 - \frac{i}{\hbar} \Delta t (V(\vec{x}_j) + T(\vec{p})) \right) , \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

donde se ha usado la representación integral de la delta de Dirac

$$\delta^3(\vec{x} - \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x})\right). \quad (2.21)$$

Considerando que los autoestados de \hat{x} y \hat{p} forman una base ortonormal completa y tienen una relación de completitud similar a (2.11), tenemos que el producto de los braket $|\vec{x}\rangle$ y $|\vec{p}\rangle$ cumplen:

$$\langle \vec{x} | \vec{p} \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p} \cdot \vec{x}\right), \quad \langle \vec{p} | \vec{x} \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{p} \cdot \vec{x}\right). \quad (2.22)$$

Ahora bien, tomando en cuenta que el intervalo de tiempo es muy pequeño, es válido aproximar el segundo factor de (2.20) a una función exponencial; así, al sustituir la expresión aproximada del propagador en (2.17) se obtiene:

$$\begin{aligned} G(x, \underline{x}) &= \int \cdots \int \underbrace{\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p_n \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_n \cdot (\vec{x} - \vec{x}_n) - \Delta t H(\vec{p}_n, \vec{x}_n))\right)}_{G(x, x_n)} \cdots \\ &\quad \cdots \underbrace{\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3\underline{p} \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\underline{p} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}) - \Delta t H(\underline{p}, \vec{x}))\right)}_{G(x_1, \underline{x})} d^4x_1 \cdots d^4x_n, \\ G(x, \underline{x}) &= \int \prod_{k=1}^n d^4x_k \int \prod_{\ell=0}^n \frac{d^3p_\ell}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\Delta t \sum_{j=0}^n \vec{p}_j \cdot \frac{\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j}{\Delta t} - \widehat{H}(\vec{x}_j, \vec{p}_j)\right). \end{aligned} \quad (2.23)$$

La integral construida, se denomina Integral de Camino, se extiende por todas las trayectorias con extremos fijos de x_k y p_ℓ . La función en el exponente tiene similitud con el Lagrangiano, en efecto lo es debido a que la variable p_ℓ fue introducida cuando se usó la representación integral de la delta de Dirac (2.21) con la condición que cumpla las relaciones de los braket (2.22).

En general, la integral de camino se puede resolver para un Hamiltoniano que tenga dependencia cuadrática en el momento; en particular, si $H(\vec{p}, \vec{x}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$, las integrales en p no son más integrales Gaussianas

$$G(x, \underline{x}) = \underbrace{\left(\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}\right)^{\frac{n+1}{2}}}_{\Lambda} \int \prod_{k=1}^n d^4x_k \exp\left(\frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^n \Delta t \frac{m}{2} \left(\frac{\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j}{\Delta t}\right)^2 - V(\vec{x}_j)\right), \quad (2.24)$$

tomando el límite cuando la diferencia de tiempos es cero, es equivalente a ir al límite continuo donde:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} G(x, \underline{x}) \implies \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^n \Delta t \longrightarrow \int dt \\ \frac{\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j}{\Delta t} \longrightarrow \dot{\vec{x}}_j \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda \prod_{k=1}^n d^4x_k \longrightarrow \mathcal{D}x \end{array} \right. \quad (2.25)$$

Obteniendo finalmente:

$$G(x, \underline{x}) = \int \mathcal{D}x \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int dt L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) \right) . \quad (2.26)$$

El resultado (2.26) es conocido como la Integral de Camino de Feynman para una teoría cuántica de un grado de libertad. La suma sobre todos los caminos con extremos fijos está contenida en $\mathcal{D}x$. Resolver la integral Gaussiana generó una transformada de Legendre en el argumento de la exponencial, obteniéndose la integral en el tiempo de $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}})$, que no es otra cosa que la acción $S(\vec{x}, \dot{\vec{x}})$. La constante Λ contenida en $\mathcal{D}x$, a pesar de ser formalmente infinito cuando se toma el límite de $\Delta t \rightarrow 0$, desaparece en el cálculo de cualquier cantidad física, por lo que la integral de camino lleva a una expresión bien definida.

2.3. Integral de Camino en Teoría Cuántica de Campos

Para una teoría de campos también se puede derivar la integral de camino, esta vez los estados intermedios no vienen dados por coordenadas $|q(t)\rangle$ sino por campos $|\phi(x)\rangle$, debido a esto no se divide el intervalo de tiempo, sino que se divide el intervalo del espacio-tiempo, es decir, $\underline{x} \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \rightarrow x$. Además, se conoce que en el marco de Schrödinger, los estados evolucionan en el tiempo, esto es

$$|\phi(x), t_s\rangle = \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \widehat{H} t_s \right) |\phi(x)\rangle , \quad (2.27)$$

mientras que en el marco de Heisenberg, los estados no evolucionan en el tiempo, son los operadores:

$$|\phi_H(x)\rangle = \exp \left(\frac{i}{\hbar} \widehat{H} t \right) |\phi(x), t\rangle = |\phi(x)\rangle . \quad (2.28)$$

El estado del sistema en el instante de tiempo t_ℓ , se denotará como $|\phi_\ell(x)\rangle$ en el marco de Schrödinger; así, usando la ecuación (2.8), se puede escribir la amplitud de transición desde un estado inicial a un estado final

$$\langle \phi_f(x) | \phi_i(x) \rangle = \langle \phi(x) | \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \widehat{H} (t_f - t_i) \right) | \phi(x) \rangle . \quad (2.29)$$

Ahora bien, considerando esta amplitud de transición con n estados intermedios; entonces, en analogía con la ecuación (2.17) el propagador se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \langle \phi_f(x) | \phi_i(x) \rangle &= \int \dots \int d\phi_1 d\phi_2 \dots d\phi_n \langle \phi(x_f) | \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \widehat{H} \Delta t \right) | \phi(x_n) \rangle \dots \langle \dots \rangle \\ &\langle \phi(x_2) | \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \widehat{H} \Delta t \right) | \phi(x_1) \rangle \langle \phi(x_1) | \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \widehat{H} \Delta t \right) | \phi(x_i) \rangle , \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde se muestra la idea de una integral de camino para una teoría de campos, esta vez las $n + 1$ transiciones son en todas las posibles configuraciones del campo ϕ_j , con $j = 1, 2, 3, \dots, n$. Considerando una densidad Hamiltoniana con un término cinético que dependa únicamente del momento conjugado $\pi(x)$, y con el término del potencial dependiente únicamente del campo $\phi(x)$, es decir:

$$\widehat{H}(\hat{\phi}, \hat{\pi}) = \widehat{T}(\hat{\pi}) + \widehat{V}(\hat{\phi}) , \quad (2.31)$$

nuevamente se espera que los operadores $\widehat{T}(\hat{\pi})$ y $\widehat{V}(\hat{\phi})$ tengan un desarrollo en serie de Taylor, y que los campos y momentos conjugados posean una relación de autovalores y autoestados de la forma:

$$\hat{\phi}(x) |\phi\rangle = \phi(x) |\phi\rangle , \quad (2.32)$$

$$\hat{\pi}(x) |\pi\rangle = \pi(x) |\pi\rangle . \quad (2.33)$$

Usando esto, la expresión (2.30) se reescribe como

$$\langle \phi_f(x) | \phi_i(x) \rangle = \int \prod_{j=1}^n d\phi_k \int \prod_{\ell=0}^n \frac{d\pi_\ell}{2\pi\hbar} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \Delta t \sum_{k=0}^n \pi_k \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{\Delta t} - \widehat{H}(\pi_k, \phi_k) \right), \quad (2.34)$$

donde efectuando la integración sobre los momenta conjugados, resulta en la Integral de Camino para una Teoría Cuántica de Campos

$$\langle \phi_f(x) | \phi_i(x) \rangle = \int \mathcal{D}\phi \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right) . \quad (2.35)$$

La integral de camino nos dice que sumar sobre todas las configuraciones clásicas del campo, es en realidad, sumar sobre todas las posibles variantes a las trayectorias, pero sólo las configuraciones dominantes son las que con mayor probabilidad pueden apreciarse físicamente.

2.3.1. Vacío

La amplitud de transición desde un estado inicial cualquiera $|\phi_i(x)\rangle$ a un estado final cualquiera $|\phi_f(x)\rangle$ se determina usando la integral de camino. Una elección que comúnmente se hace es que el estado inicial y final $|\phi_i(\vec{x})\rangle = |\phi_f(\vec{x})\rangle = |0\rangle$, sean el estado base; así, la amplitud de transición se reescribe

$$\langle 0 | \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \widehat{H} \Delta t \right) | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right) . \quad (2.36)$$

Si el vacío es estable, al dejar evolucionar el sistema desde un $t_i = -\infty$ hasta $t_f = \infty$, seguiremos encontrando el vacío, esto significa que los procesos ocurren en una región

acotada del espacio-tiempo y que los estados inicial y final difieren a lo sumo en una fase, es decir:

$$|0_\infty\rangle = \exp(i\alpha) |0_{-\infty}\rangle \implies \langle 0_\infty| = \exp(-i\alpha) \langle 0_{-\infty}| \quad (2.37)$$

$$\implies \langle 0_\infty|0_{-\infty}\rangle = \exp(-i\alpha) = \int \mathcal{D}\phi \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)\right) . \quad (2.38)$$

Esta última condición permite normalizar a 1 la amplitud de transición vacío-vacío

$$\langle 0_\infty|0_{-\infty}\rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)\right)}{\int \mathcal{D}\phi \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)\right)} = 1 . \quad (2.39)$$

De esta manera la constante Λ contenida en $\mathcal{D}\phi$, que formalmente es infinito, se simplifica con Λ proveniente del factor de normalización; ésto lleva a que el cálculo de cantidades físicas como por ejemplo el valor medio de un campo

$$\langle 0_\infty|\hat{\phi}(x_1)|0_{-\infty}\rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)\right)}{\int \mathcal{D}\phi \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)\right)} = \langle \hat{\phi}(x_1) \rangle , \quad (2.40)$$

están bien definido usando la integral de camino. Por lo general, la amplitud de transición vacío-vacío se denota como

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)\right) , \quad (2.41)$$

también es llamada función de partición del sistema, debido a que contiene todas las configuraciones posibles del campo.

2.4. Funcional Generador

El funcional básico de toda teoría es el funcional generador $Z[J_i]$, adquiere este nombre debido a que a partir del mismo, se definen todos los funcionales de la teoría, así como también las funciones de Green y los vértices de interacción. Este funcional, se construye acoplando los campos $\phi_i(x)$ a fuentes $J_i(x)$, las cuales en principio, pueden ser funciones cualesquiera del espacio-tiempo y representan la fuente o sumidero de la perturbación; los acoplos con fuentes, se suman como términos $J_i(x)\phi_i(x)$ al potencial de la teoría $V(\phi_i)$ y una vez consideradas las perturbaciones a los campos, la función de partición de la teoría pasa a ser un funcional de J_i , el cual es llamado funcional generador

$$Z[J_i] = \int \mathcal{D}\phi_i \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int d^4x (\mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu\phi_i) + J_i\phi_i)\right) . \quad (2.42)$$

Se puede notar que si la perturbación desaparece, $J_i(x) = 0$, se tiene la amplitud de transición en el vacío de la teoría libre, es decir la ecuación (2.41).

El acople con fuentes también es útil para obtener valores medios de cantidades, para esto es conveniente definir el funcional

$$W[J_i] \equiv \log(Z[J_i]) \quad , \quad (2.43)$$

al igual que la derivada funcional en cuatro dimensiones respecto a la fuente

$$\frac{\delta}{\delta J(\underline{x})}(J(x)) = \delta^4(x - \underline{x}) \quad , \quad \frac{\delta}{\delta J(\underline{x})} \left(\int d^4x J(x)\phi(x) \right) = \phi(\underline{x}) \quad , \quad (2.44)$$

la cual no es más que una generalización para funciones continuas de la derivación de vectores:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = \delta_{ij} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j x_j k_j \right) = k_i \quad . \quad (2.45)$$

Calculando la primera derivada del funcional $W[J_i]$ y tomando en cuenta que las perturbaciones ocurren en una región acotada del espacio-tiempo, por lo que se debe evaluar en $J_i(x) = 0$, se obtiene el valor medio del campo multiplicado por una constante

$$\begin{aligned} -i \frac{\delta W[J_i]}{\delta J(\underline{x})} \Big|_{J=0} &= \frac{(-i)}{Z[J]} \frac{i}{\hbar} \int \mathcal{D}\phi \phi(\underline{x}) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int d^4x (\mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) + J_i \phi_i) \right) \Big|_{J=0} \\ &= \frac{1}{\hbar} \langle 0_\infty | \hat{\phi}(x_1) | 0_{-\infty} \rangle = \frac{1}{\hbar} \langle \hat{\phi}(\underline{x}) \rangle \quad . \end{aligned} \quad (2.46)$$

Si ahora se toman derivadas de más alto orden, por ejemplo de 2do orden

$$(-i)^2 \frac{\delta^2 W[J_i]}{\delta J(x_\alpha) \delta J(x_\beta)} \Big|_{J=0} = (-i)^2 \left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 \langle \hat{\phi}(x_\alpha) \hat{\phi}(x_\beta) \rangle \quad , \quad (2.47)$$

se debe considerar cuál de las coordenadas entre x_α y x_β es mayor debido a que las perturbaciones se propagan hacia adelante en el espacio-tiempo. En este caso se ha asumido que $x_\alpha > x_\beta$, pero si por el contrario $x_\alpha < x_\beta$, el orden en que aparecen los campos en la expresión anterior debe cambiarse. Ambos casos pueden considerarse si se introduce el operador ordenamiento temporal

$$T[\hat{\phi}(x_\alpha) \hat{\phi}(x_\beta)] = \begin{cases} \hat{\phi}(x_\alpha) \hat{\phi}(x_\beta) & x_\alpha > x_\beta \\ \hat{\phi}(x_\beta) \hat{\phi}(x_\alpha) & x_\beta > x_\alpha \end{cases} \quad (2.48)$$

De esta manera, usando el operador ordenamiento temporal en la expresión de la segunda derivada funcional, queda como

$$(-i)^2 \frac{\delta^2 W[J_i]}{\delta J(x_\alpha) \delta J(x_\beta)} \Big|_{J=0} = (-i)^2 \left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 \langle 0 | T[\hat{\phi}(x_\alpha) \hat{\phi}(x_\beta)] | 0 \rangle \quad , \quad (2.49)$$

y generalizando a la n-ésima derivada, se deduce:

$$\left(\frac{\hbar}{i}\right)^n \frac{\delta^n W[J_i]}{\delta J(x_n) \dots \delta J(x_2) \delta J(x_1)} = \langle 0|T[\hat{\phi}(x_n) \dots \hat{\phi}(x_2) \hat{\phi}(x_1)]|0\rangle . \quad (2.50)$$

Este resultado muestra que el valor de expectación del producto de campos ordenado temporalmente, también llamado funciones de correlación, puede ser obtenido a partir de derivadas funcionales de $W[J_i]$. Esto es de suma importancia ya que las funciones de correlación de la teoría, son en realidad las funciones de Green.

Capítulo 3

Teorías de Campos

En el capítulo anterior se estudió la integral de camino, una herramienta de cálculo para teorías de campos. Ahora se estudiarán algunas teorías de campos, todas relacionadas con la electrodinámica escalar. Primero se estudiará el campo escalar, su Lagrangiana, simetrías y leyes de conservación [10]. Se sigue con el campo electromagnético, la formulación covariante de las ecuaciones de Maxwell [11] y la fijación de calibres para el campo electromagnético. Finalmente se aborda a la electrodinámica cuántica escalar, considerando las simetrías de los campos y de calibre, se construye la Lagrangiana y se estudia como una teoría clásica de campos [12].

3.1. Campo Escalar

El Campo de Klein-Gordon o Campo Escalar es la teoría de campos más simple que se puede estudiar, en ella se tratan bosones con masa y sin espín por medio de la ecuación de Klein-Gordon. Esta ecuación puede introducirse considerando dos principios fundamentales, uno de relatividad especial y otro de mecánica cuántica.

De relatividad especial se conoce que la energía de una partícula relativista de masa m según la ecuación de Einstein, es

$$E^2 = (c\vec{p})^2 + (mc^2)^2, \quad (3.1)$$

mientras que en mecánica cuántica se sabe que el procedimiento de primera cuantización prescribe que las variables E y \vec{p} sean promovidas a operadores:

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar\nabla, \quad E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad (3.2)$$

sustituyendo los operadores de momento y energía en la ecuación de Einstein (3.1) y aplicando este operador diferencial a una función $\phi(x)$, se obtiene la ecuación de Klein-

Gordon

$$\left(\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4 \right) \phi(x) = 0 . \quad (3.3)$$

En teorías de campos, normalmente se trabaja en unidades naturales para hacer la notación más simple, es decir, con las constantes $\hbar = c = 1$ y también se define el operador D'Alambertiano como $(\partial_\mu \partial^\mu = \partial^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2)$, de este modo la ecuación de Klein-Gordon se escribe:

$$(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0 . \quad (3.4)$$

Esta ecuación es similar a la ecuación de onda, en realidad desde un punto de vista matemático, es una generalización de la misma y al igual que en la ecuación de onda, tiene soluciones de onda plana

$$\phi(\vec{x}, t) \sim A \exp(-i(Et - \vec{x} \cdot \vec{p})) , \quad (3.5)$$

donde A es constante. Sustituyendo esta solución en la ecuación de Klein-Gordon (3.4) se verifica que es válida si se cumple la siguiente relación entre la energía y momento:

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 . \quad (3.6)$$

Como observamos, esta relación de dispersión permite que la energía adquiera tanto valores positivos como negativos. Esto generó problemas en la comunidad científica ya que indicaba que la interpretación de la ecuación de Klein-Gordon como una ecuación de onda para una partícula relativista era incorrecta. En 1941 Richard Feynman con Ernst Stueckelberg, dieron interpretación a los valores negativos de la energía diciendo que se trataba de *partículas* con energía E positiva y carga opuesta (en caso que la tuviesen) que se movían hacia atrás en el tiempo, las cuales llamaron *antipartículas*. De este modo, la solución a la ecuación de Klein-Gordon no representa una función de onda, representa un campo $\phi(x)$ cuya excitación regula la creación y destrucción de partículas.

En el capítulo 2, se mostró que la Lagrangiana es necesaria para el estudio de teorías de campos por medio de la integral de camino. Para el campo escalar real, la Lagrangiana asociada debe conducir a la ecuación de Klein-Gordon (3.4) a través de la ecuación de Euler-Lagrange (1.15). Usando la métrica de Minkowski $\eta^{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$, la Lagrangiana del campo escalar real se define como:

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi(x) \partial_\mu \phi(x) - \frac{1}{2} m^2 (\phi(x))^2 , \quad (3.7)$$

donde se puede calcular la ecuación de Euler-Lagrange dando como resultado la ecuación de Klein-Gordon, cuya solución son ondas planas tipo (3.5), en realidad, la solución más

general se puede escribir en términos de una expansión de Fourier:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E}} \left(a_p \exp(-ip^\mu x_\mu) + a_p^\dagger \exp(ip^\mu x_\mu) \right) , \quad (3.8)$$

la constante de normalización se escogió convenientemente como $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E}}$ para que el campo cumpla las relaciones de conmutación debido a la cuantización canónica. Tomando en cuenta que el campos escalar es real, entonces se cumple $\phi(x) = \phi^\dagger(x)$. El momento conjugado del campo se halla con la ecuación (1.16) resultando en

$$\pi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{E}{2}} \left(a_p^\dagger \exp(ip^\mu x_\mu) - a_p \exp(-ip^\mu x_\mu) \right) . \quad (3.9)$$

Una vez definidos el campo y el momento conjugado, se puede cuantizar la teoría usando la integral de camino o segunda cuantización canónica.

Nuestro tema de estudio le compete la integral de camino, sin embargo, a modo informativo se muestra el procedimiento de la segunda cuantización, el cual consiste en imponer relaciones de conmutación entre el campo y su momento conjugado

$$[\phi(x), \pi(\underline{x})] = i\delta(x - \underline{x}) , \quad (3.10)$$

$$[\phi(x), \phi(\underline{x})] = [\pi(x), \pi(\underline{x})] = 0 ; \quad (3.11)$$

así, substituyendo las expresiones del campo y su momento conjugado

$$[a_p, a_{\underline{p}}^\dagger] = \delta(p - \underline{p}) , \quad (3.12)$$

$$[a_p, a_{\underline{p}}] = [a_p^\dagger, a_{\underline{p}}^\dagger] = 0 , \quad (3.13)$$

se hallan las relaciones de conmutación a igual tiempo de los operadores creación y aniquilación de partículas, siempre y cuando, la teoría sea no singular.

3.1.1. Campo Escalar Complejo

Un interesante caso sobre el campo escalar real ocurre al estudiar dos campos escalares reales e independientes, $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$, con la misma masa m . La Lagrangiana total sería la suma de las Lagrangianas independientes

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi_1(x) \partial_\mu \phi_1(x) - \frac{1}{2} m^2 (\phi_1(x))^2 + \frac{1}{2} \partial^\mu \phi_2(x) \partial_\mu \phi_2(x) - \frac{1}{2} m^2 (\phi_2(x))^2 , \quad (3.14)$$

con un cambio apropiado sobre los campos reales $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$, se pueden definir dos campos escalares complejos:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x) + i\phi_2(x)) , \quad (3.15)$$

$$\phi^\dagger(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x) - i\phi_2(x)) , \quad (3.16)$$

los cuales al ser sustituidos en la Lagrangiana (3.14), simplifican la notación y se obtiene la Lagrangiana del campo escalar complejo:

$$\mathcal{L}_{KGC} = (\partial_\mu \phi(x))^\dagger \partial^\mu \phi(x) - m^2 |\phi(x)|^2 . \quad (3.17)$$

Esta ecuación conduce a la ecuación de Klein-Gordon para los campos $\phi(x)$ y $\phi^\dagger(x)$, pero en este caso la expansión de Fourier de los campos tienen coeficientes distintos para las ondas planas, es decir:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E}} \left(a_p \exp(-ip^\mu x_\mu) + b_p^\dagger \exp(ip^\mu x_\mu) \right) \quad (3.18)$$

y para el complejo conjugado

$$\phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E}} \left(a_p^\dagger \exp(ip^\mu x_\mu) + b_p \exp(-ip^\mu x_\mu) \right) , \quad (3.19)$$

debido a que en el campo escalar complejo $\phi(x) \neq \phi^\dagger(x)$.

Como mencionamos antes, los campos $\phi(x)$ y $\phi^\dagger(x)$ regulan la producción de partículas y antipartículas; la diferencia del campo escalar real es que este cumple $\phi(x) = \phi^\dagger(x)$ y por esto, no hay forma de distinguir las partículas de las antipartículas. En cambio, como veremos a continuación, en el campo escalar complejo las partículas tienen carga, siendo distinguibles de las otras ya que tienen carga opuesta.

La Lagrangiana (3.17) posee una simetría interna de los campos que no tenía la Lagrangiana del campo escalar real, esta es una simetría de fase $U(1)$ la cual es posible sólo si el campo es complejo

$$\underline{\phi}(x) \longrightarrow \phi(x) \exp(-ie\lambda) \quad , \quad \underline{\phi}^\dagger(x) \longrightarrow \phi^\dagger(x) \exp(+ie\lambda) , \quad (3.20)$$

el parámetro λ puede ser constante o una función $\lambda(x)$ que dependa de las coordenadas; el hecho que sea constante o no, es determinante para un acople entre teorías. Si λ es constante, significa que la fase es igual en todo punto del espacio-tiempo; mientras que si $\lambda(x)$ depende de las coordenadas, la fase no necesariamente será igual en todos los puntos del espacio-tiempo, pudiendo provocar una ruptura de la simetría.

Las simetrías internas de los campos se pueden interpretar como distintos estados del sistema porque hay transformaciones de los campos; sin embargo, mantienen las mismas propiedades. Como se revisó en el capítulo 1, el teorema de Noether establece que las simetrías que posee una Lagrangiana tienen asociadas una corriente conservada, cuando la simetría de fase $U(1)$ es global, λ es constante y el cálculo de la corriente conservada ya se realizó en la ecuación (1.26) donde se obtuvo

$$j^\mu = ie\lambda \left(\phi^\dagger(x) \partial^\mu \phi(x) - \phi(x) \partial^\mu \phi^\dagger(x) \right) , \quad (3.21)$$

por la construcción de j^μ se sabe que cumple la ecuación de continuidad ($\partial_\mu j^\mu = 0$), que en este caso representa la ecuación de conservación de la carga y la carga conservada, igualmente, ya fué calculada en la ecuación (1.28), dando como resultado:

$$Q = e\lambda \int d^3p \left(a_p^\dagger a_p - b_p^\dagger b_p \right) . \quad (3.22)$$

3.2. Campo Electromagnético

Las Ecuaciones de Maxwell son un conjunto de 4 ecuaciones en derivadas parciales que describen por completo todos los fenómenos electromagnéticos. En el vacío, pueden ser expresadas como:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} \quad , \quad (3.23)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \nabla \times \vec{B} \quad , \quad (3.24)$$

usando el primer par de ecuaciones (3.23), es posible expresar los campos eléctricos y magnéticos como

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}(x)}{\partial t} - \nabla \varphi(x) \quad , \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}(x) \quad , \quad (3.25)$$

estas expresiones para los campos \vec{E} y \vec{B} , permiten definir un potencial vector en 4 dimensiones

$$A^\mu(x) = (\varphi(x), \vec{A}(x)) = (A^0(x), \vec{A}(x)) \quad , \quad (3.26)$$

en función del cual se reescriben los campos eléctrico y magnético

$$\implies \vec{E} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i \quad , \quad \implies \vec{B} = \epsilon^{ijk} \partial_j A_k \quad ; \quad (3.27)$$

de esta forma, se puede introducir un tensor antisimétrico de segundo orden que describa el campo electromagnético

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad , \quad (3.28)$$

cuyas componentes son:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Por otra parte, las ecuaciones de Maxwell (3.23 - 3.24) pueden intercambiar los campos eléctricos y magnéticos permaneciendo invariantes, es decir, haciendo los cambios: $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$ y $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$, se siguen obteniendo las mismas ecuaciones (3.23 - 3.24); esta simetría es conocida como dualidad electromagnética y por medio de ésta se deduce que hay un tensor dual de campo electromagnético $*F^{\mu\nu}$, el cual se define igual a (3.28) y sus componentes son:

$$*F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z & E_y \\ -B_y & E_z & 0 & -E_x \\ -B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Los tensores de campo electromagnético (3.29) y (3.30) se relacionan por medio del Tensor de Levi-Civita $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ de la siguiente forma:

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}. \quad (3.31)$$

El campo electromagnético como teoría de campos tiene una Lagrangiana que puede ser escrita en función de los tensores (3.29) y (3.30) como se muestra a continuación:

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(*F^{\mu\nu})(*F_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2), \quad (3.32)$$

el cálculo de la ecuación de Euler-Lagrange (1.15) conducirá a la ecuación de onda para el campo electromagnético

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)) \\ &= \partial^2 A^\nu(x) - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu(x)) = 0, \end{aligned} \quad (3.33)$$

esta ecuación tiene una solución que puede ser escrita en términos de una expansión de Fourier

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E}} \left(a_p \epsilon^\mu(\vec{p}) \exp(-ip^\sigma x_\sigma) + b_p^\dagger \epsilon^{\mu*}(\vec{p}) \exp(ip^\sigma x_\sigma) \right), \quad (3.34)$$

donde nuevamente se escogió como factor de normalización $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E}}$. También se encuentran los vectores de polarización de fotones $\epsilon^\mu(\vec{p})$, los cuales se fijan convenientemente de

forma ortogonal al cuadrimomento p^μ según el Calibre de Lorenz, como se estudiará más adelante, esto es:

$$\epsilon_\mu(\vec{p})p^\mu = 0 . \quad (3.35)$$

El campo vectorial $A^\mu(x)$ tiene 4 componentes, esto proporciona 4 grados de libertad, pero la teoría electromagnética asegura que el fotón tiene 2 grados de libertad conocidos como estados de polarización transversal, por ejemplo dextrógiro y levógiro; por esta razón se dice que la teoría está sobredeterminada. En realidad el campo vectorial posee 2 grados de libertad espúreos debido a que posee una simetría de calibre, es por esto que la teoría es singular y la función de Green no existe.

En la Lagrangiana (3.32), la componente $A^0(x)$ del campo vectorial no tiene término cinético $\dot{A}^0(x)$, esto significa que dadas unas condiciones iniciales en $\vec{A}(x)$ y en $\dot{\vec{A}}(x)$, el potencial escalar $\varphi(x)$ queda determinado por la Ley de Gauss en el vacío

$$\nabla^2\varphi(x) = -\nabla \cdot \frac{\partial \vec{A}(x)}{\partial t} , \quad (3.36)$$

ésta ecuación tiene solución en términos de la función de Green del operador Laplaciano dada por

$$\implies \varphi(x) = \int d^3\underline{x} \frac{\nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{A}(x)}{\partial t} \right)}{4\pi|x - \underline{x}|} , \quad (3.37)$$

entonces, la componente $A^0(x)$ no es independiente y de esta forma, la teoría queda reducida a tres grados de libertad. Todavía hay un grado de libertad que no tiene significado físico y que se puede reducir tomando en cuenta la simetría de calibre que posee el campo vectorial.

Una característica que no se puede pasar por alto de la Lagrangiana (3.32), es el gran número de simetrías asociadas al potencial vector, debido a que permanece invariante ante un cambio en el campo vectorial

$$\underline{A}^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu\lambda(x) , \quad (3.38)$$

donde $\lambda(x)$ puede ser cualquier función que dependa de las coordenadas, sólo se exige que $\lambda(x)$ sea una función que tienda a cero en el límite $\vec{x} \rightarrow \pm\infty$. Esta simetría del campo que no permite diferenciar entre $\underline{A}^\mu(x)$ y $A^\mu(x)$ es conocida como simetría de calibre.

Anteriormente nos encontramos con simetrías que se mantienen constantes en todo el espacio-tiempo, como por ejemplo la simetría de fase global (3.20) en el campo escalar complejo. Por otro lado, el Teorema de Noether dice que por cada simetría hay una ley de conservación, entonces surge la interrogante: ¿el campo vectorial tendrá una ley de conservación por cada función $\lambda(x)$ que deje invariante la Lagrangiana? La respuesta es

no, las simetrías de calibre tienen una interpretación distinta a las simetrías globales, éstas son las usadas en el Teorema de Noether y se interpretan como distintos estados físicos porque transforman los campos, aunque mantienen las mismas propiedades. Las simetrías de calibre son redundancias en la descripción, es decir, representan el mismo estado físico. Una forma de saber que esta interpretación de la simetría de calibre es necesaria, es notando que la Lagrangiana (3.32) no es suficiente para especificar la evolución de $A^\mu(x)$ ya que no es posible distinguir entre $\underline{A}^\mu(x)$ y $A^\mu(x) + \partial^\mu\lambda(x)$.

Esta característica del campo vectorial permite una fijación de calibre que puede ser útil dependiendo de la situación; en general, los calibres más utilizados son el calibre de Lorenz

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0 \quad (3.39)$$

y el calibre de Coulomb

$$\nabla \cdot \vec{A}(x) = 0 \quad (3.40)$$

La elección de calibre es importante ya que puede simplificar el tratamiento matemático y mostrar aspectos de la teoría. El calibre de Lorenz tiene la ventaja de cumplir covariancia Lorentz y es condición necesaria para el cálculo del propagador de la teoría, por esta razón, será el calibre utilizado de ahora en adelante. Si un campo $\underline{A}^\mu(x)$ en la Lagrangiana de Maxwell (3.32) es obligado a cumplir el calibre de Lorenz (3.39), entonces también se cumple

$$\partial_\mu \underline{A}^\mu(x) = \partial_\mu (A^\mu(x) + \partial^\mu\lambda(x)) = 0 \quad (3.41)$$

$$\implies \partial_\mu A^\mu(x) + \partial^2\lambda(x) = 0 \quad (3.42)$$

donde el campo $A^\mu(x)$ no está determinado de manera única, porque hay una gran cantidad de campos describiendo el mismo estado físico y todos cumplen el calibre de Lorenz (3.39), de aquí podemos deducir que estos campos están relacionados por la condición

$$\partial^2\lambda(x) = 0 \quad (3.43)$$

El hecho de que el campo vectorial tenga la ligadura del calibre de Lorenz, implica que el tercer grado de libertad no tiene significado físico, por lo que la teoría solo tiene dos grados de libertad independientes.

3.3. Electrodinámica Cuántica Escalar

Finalmente se han revisado todos los conceptos necesarios para construir la teoría de la Electrodinámica Cuántica Escalar, en la cual, la luz interactúa con materia cargada eléctricamente. El acople entre las teorías de Maxwell y Klein-Gordon implica una interacción

local de la carga eléctrica del campo escalar complejo con el campo electromagnético. Esto sugiere promover la simetría de fase global (3.20) de la Lagrangiana del campo escalar complejo a una simetría de fase local, en la que el parámetro λ sea una función de las coordenadas, es decir

$$\underline{\phi}(x) \longrightarrow \phi(x) \exp(-ie\lambda(x)) , \quad (3.44)$$

sin embargo, el cambio a una fase local trae como consecuencia la pérdida de la simetría interna del campo ya que la derivada parcial ∂_μ no conmuta con $\exp(-ie\lambda(x))$ y por la regla de la cadena, surge un término que rompe la simetría, esto puede corregirse utilizando el acoplamiento minimal y el sistema adquiere simetría de fase local.

3.3.1. Acoplamiento Minimal

El principio de calibre o gauge consiste en introducir nuevos campos de calibre al sistema, con el objetivo de eliminar en la Lagrangiana los términos que rompen la simetría; de este modo, con la sustitución de derivadas parciales ∂^μ por derivadas covariantes \mathcal{D}^μ , el acoplamiento minimal permite promover la simetría de fase global a una simetría de fase local, esto es

$$\partial^\mu \longrightarrow \mathcal{D}^\mu = \partial^\mu + ieA^\mu(x) . \quad (3.45)$$

El segundo término es el campo de calibre introducido, en este caso se utilizará el campo electromagnético $A^\mu(x)$, recordemos que este campo posee la simetría de calibre (3.38) que mantenía invariante la Lagrangiana de Maxwell. Entonces, uniendo las condiciones de fase local (3.44), derivada covariante (3.45) y simetría de calibre (3.38), se puede lograr que la Lagrangiana del campo escalar complejo tenga la simetría de fase local ya que el campo $\phi(x)$ cumple

$$\mathcal{D}^\mu \underline{\phi}(x) = \overbrace{\left(\partial^\mu + ie \underbrace{(A^\mu(x) + \partial^\mu \lambda(x))}_{\underline{A}^\mu(x)} \right)}^{\mathcal{D}^\mu} \left(\overbrace{\phi(x) \exp(-ie\lambda(x))}^{\underline{\phi}(x)} \right) = \exp(-ie\lambda(x)) \mathcal{D}^\mu \phi(x) \quad (3.46)$$

e igualmente, el campo conjugado $\phi^\dagger(x)$ cumple:

$$\left(\mathcal{D}^\mu \underline{\phi}(x) \right)^\dagger = (\partial^\mu - ieA^\mu(x) - iq\partial^\mu \lambda(x)) \phi(x)^\dagger \exp(ie\lambda(x)) = \exp(ie\lambda(x)) (\mathcal{D}^\mu \phi(x))^\dagger , \quad (3.47)$$

en ambos casos la derivada covariante \mathcal{D}^μ conmuta con la fase local, de esta forma, la Lagrangiana del campo escalar complejo queda:

$$\mathcal{L}_{KGC} = (\mathcal{D}_\mu \phi(x))^\dagger \mathcal{D}^\mu \phi(x) - m^2 |\phi(x)|^2 , \quad (3.48)$$

siendo ahora una teoría que admite la simetría de fase local (3.44). El acoplamiento minimal se puede interpretar como el cambio de una simetría de fase global $U(1)$ a una simetría de fase local $U(1)$; sin embargo, la teoría no está cerrada debido a que no hay término cinético del campo de calibre $A^\mu(x)$.

Para remediar esto, notamos que la Lagrangiana del campo electromagnético admite la simetría de calibre (3.38) y se puede probar por sustitución que el tensor de campo electromagnético (3.28) es invariante ante el acoplamiento minimal (3.45), por lo tanto, la Lagrangiana de Maxwell es el término que cierra la teoría y se puede sumar a la Lagrangiana localmente invariante del campo escalar complejo (3.48), obteniéndose la Lagrangiana de la electrodinámica escalar

$$\mathcal{L}_{SED} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + (\mathcal{D}_\mu\phi(x))^\dagger\mathcal{D}^\mu\phi(x) - m^2|\phi(x)|^2 . \quad (3.49)$$

La cual, vista así, no muestra explícitamente interacción entre el campo electromagnético y el campo escalar complejo. Al expandir las derivadas covariantes se hacen evidentes las interacciones

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SED} = & -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + (\partial_\mu\phi(x))^\dagger\partial^\mu\phi(x) - m^2|\phi(x)|^2 \\ & -ieA_\mu(x)\left(\phi^\dagger(x)\partial^\mu\phi(x) - \phi(x)\partial^\mu\phi^\dagger(x)\right) + e^2A^2(x)|\phi(x)|^2 . \end{aligned} \quad (3.50)$$

En la Lagrangiana se pueden identificar las teorías libres de Klein-Gordon y Maxwell más dos términos adicionales de interacción, el primero

$$\mathcal{L}_{3int} = -ieA_\mu(x)\left(\phi^\dagger(x)\partial^\mu\phi(x) - \phi(x)\partial^\mu\phi^\dagger(x)\right) , \quad (3.51)$$

se identifica como una interacción de tres campos donde se encuentra el campo de calibre $A^\mu(x)$ y la corriente conservada del campo escalar complejo (3.21), por otro lado, el segundo término de interacción

$$\mathcal{L}_{4int} = e^2A^2(x)|\phi(x)|^2 , \quad (3.52)$$

se identifica como una interacción de cuatro campos.

Las ecuaciones de movimiento se hayan con la habitual ecuación de Euler-Lagrange para campos (1.15), al calcularlas para el campo escalar complejo tomando en cuenta el calibre de Lorenz, quedan reducidas a

$$(\partial^2 + m^2)\phi(x) = -ieA_\mu(x)\mathcal{D}^\mu\phi(x) - ieA_\mu(x)\partial^\mu\phi(x) , \quad (3.53)$$

$$(\partial^2 + m^2)\phi^\dagger(x) = ieA_\mu(x)(\mathcal{D}^\mu\phi(x))^\dagger + ieA_\mu(x)\partial^\mu\phi^\dagger(x) , \quad (3.54)$$

la ecuación de movimiento del campo escalar $\phi(x)$, es la ecuación de Klein-Gordon con un potencial de interacción $V(\phi, \partial^\mu\phi, A^\mu)$, esto tiene sentido ya que en hay una interacción

local entre el campo escalar y el campo electromagnético. Para el campo conjugado $\phi^\dagger(x)$, se tiene la misma ecuación de movimiento que $\phi(x)$ salvo que es el complejo conjugado de la misma. Por otro lado, la ecuación de movimiento para el campo electromagnético, tomando en cuenta el calibre de Lorentz, se obtiene

$$\partial^2 A^\mu(x) = ie\left(\phi^\dagger(x)\mathcal{D}^\mu\phi(x) - \phi(x)(\mathcal{D}^\mu\phi(x))^\dagger\right), \quad (3.55)$$

esta ecuación es similar a la ecuación de movimiento del campo electromagnético en presencia de una fuente $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$, en este caso la fuente tiene la estructura de la corriente conservada del campos escalar complejo. Esto es de esperarse ya que en el acople de las teorías, el campo de Klein-Gordon se usó como fuente mientras que el campo electromagnético se usó como campo de calibre.

La electrodinámica cuántica escalar como teoría de campos, también posee una corriente conservada debido a la simetría de fase local del campo escalar, al igual que antes, usando la ecuación (1.20) se obtiene

$$j^\mu = ie\lambda(x)\left(\phi^\dagger(x)\mathcal{D}^\mu\phi(x) - \phi(x)(\mathcal{D}^\mu\phi^\dagger(x))^\dagger\right), \quad (3.56)$$

la misma corriente de la ecuación de movimiento del campo vectorial. Esta corriente, como ya dijimos, tiene la misma estructura que la corriente del campo de Klein-Gordon libre, la diferencia está en que ahora no hay derivadas parciales, sino derivadas covariantes. Tomando en cuenta que el campo electromagnético se introdujo como campo de calibre cuando se hizo el acoplamiento minimal, entonces es de esperar que hayan interacciones entre los campos que afecten la corriente conservada.

Además de estudiar clásicamente la electrodinámica escalar por medio de las ecuaciones de movimiento y la corriente conservada, la teoría se puede cuantizar usando la integral de camino de Feynman; de esta forma, se determinan los propagadores de la teoría libre y los vértices de interacción.

Capítulo 4

Electrodinámica Cuántica Escalar

En este capítulo se realizará la cuantización de la electrodinámica escalar estudiada en el capítulo anterior. Para esto se calcularán los propagadores de la teoría y también analizaremos sus interacciones. Toda esta información quedará resumida en un conjunto de reglas que se van a definir al final del capítulo y tienen por nombre Reglas de Feynman.

4.1. Teoría de Perturbaciones

En general, las teorías de campos con interacción no pueden resolverse de manera exacta, es por esto que una manera de abordar su estudio (en el régimen de acoplamiento débil) es a través de pequeñas perturbaciones respecto a la teoría libre debido a que normalmente se conocen soluciones exactas para ésta. La idea con la teoría de perturbaciones es conseguir soluciones a problemas complejos a partir de problemas cuya solución es conocida. Típicamente el resultado se expresa en términos de una expansión polinómica, de esta forma se hallan soluciones que a pesar de no ser exactas, se van acercando a la solución buscada a medida que se toman más términos de la aproximación.

Para calcular los propagadores y los vértices de la electrodinámica escalar $\mathcal{L}_{SED} = \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{KGC} + \mathcal{L}_{int}$, podemos utilizar el funcional generador $Z[J_i]$ estudiado en el capítulo 2 y realizar perturbaciones a la teoría.

$$Z[J^\dagger, J, J^\mu] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^\dagger \exp \{iS_{KGC}[J] + iS_M[J] + iS_{int}\} , \quad (4.1)$$

en esta expresión se han acoplado los campos con unas corrientes apropiadas de manera que podamos realizar la expansión perturbativa más adelante. Los términos que aparecen

en el funcional generador son

$$S_{KGC}[J] = \int d^4x \left((\partial_\mu \phi(x))^\dagger \partial^\mu \phi(x) - m^2 |\phi(x)|^2 + J^\dagger(x) \phi(x) + J(x) \phi^\dagger(x) \right), \quad (4.2)$$

$$S_M[J] = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + J_\mu(x) A^\mu(x) \right), \quad (4.3)$$

$$S_{int} = \int d^4x \left(-ie A_\mu(x) \left(\phi^\dagger(x) \partial^\mu \phi(x) - \phi(x) \partial^\mu \phi^\dagger(x) \right) + e^2 A^2(x) |\phi(x)|^2 \right). \quad (4.4)$$

Recordamos que estamos trabajando con unidades naturales, es decir $c = \hbar = 1$. Ahora bien, la expresión de funcional generador (4.1) puede reescribirse haciendo una expansión en serie de Taylor al factor que corresponde a la interacción

$$\begin{aligned} Z[J^\dagger, J, J^\mu] &= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^\dagger \exp \{iS_{KGC}[J] + iS_M[J]\} \exp \{iS_{int}\} \\ &= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^\dagger \exp \{iS_{KGC}[J] + iS_M[J]\} \left(1 + iS_{int} + \frac{(iS_{int})^2}{2!} + \dots \right), \end{aligned} \quad (4.5)$$

de esta forma, se logra estudiar la teoría a distintos órdenes en el régimen perturbativo y así, determinar los propagadores de la teoría libre y los vértices de interacción.

4.2. Propagadores de la Teoría Libre

El primer término en la expansión anterior corresponde al orden cero en interacción; de esta manera, el funcional generador de la teoría queda expresado como

$$Z[J^\dagger, J, J^\mu; 0] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^\dagger \exp \{iS_{KGC}[J] + iS_M[J]\}, \quad (4.6)$$

donde se puede notar que los campos de Klein-Gordon y Maxwell no presentan interacción alguna. De esta forma la integral de camino puede resolverse de manera exacta para ambos campos.

4.2.1. Propagador del Campo Escalar Complejo

Para resolver la integral de camino en el régimen perturbativo vamos a necesitar los propagadores de las teorías, por esto, es conveniente reescribir la acción del campo escalar (4.2), haciendo una integración por partes en el término cinético del campo $\partial_\mu \phi(x)^\dagger \partial^\mu \phi(x)$ y asumiendo que los campos decaen suficientemente rápido en el infinito, la acción puede ser escrita como

$$S_{KGC} = \int d^4x \left(-\phi^\dagger(x) \left(\partial^2 + m^2 \right) \phi(x) + J^\dagger(x) \phi(x) + J(x) \phi^\dagger(x) \right), \quad (4.7)$$

para ser sustituida en el funcional generador

$$Z[J, J^\dagger] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^4x \left(-\phi^\dagger(x) (\partial^2 + m^2) \phi(x) + J^\dagger(x)\phi(x) + J(x)\phi^\dagger(x) \right) \right\} . \quad (4.8)$$

Para resolver la integral conviene hacer los siguientes cambios en la acción

$$\phi(x) = \psi(x) - \int d^4\underline{x} D_F(x - \underline{x}) J(\underline{x}) , \quad (4.9)$$

$$\phi^\dagger(x) = \psi^\dagger(x) - \int d^4\underline{x} J^\dagger(\underline{x}) D_F(x - \underline{x}) , \quad (4.10)$$

donde las funciones $\psi(x)$ y $\psi^\dagger(x)$ son campos escalares complejos y $D_F(x - \underline{x})$ representa la función de Green del operador $(-\partial^2 - m^2)$, así al sustituir las expresiones (4.9 - 4.10), el funcional generador queda como

$$Z[J, J^\dagger] = \int \mathcal{D}\psi \exp \left\{ -i \int d^4x \psi^\dagger(x) (\partial^2 + m^2) \psi(x) \right\} \exp \left\{ -i \int d^4\underline{x} d^4x J^\dagger(x) D_F(x - \underline{x}) J(x) \right\} . \quad (4.11)$$

El primer factor se puede identificar como la teoría libre, el cual se reduce a la constante $Z[0]$, tal como se mostró en el capítulo 2, así el funcional generador queda reducido a

$$Z[J, J^\dagger] = Z[0] \exp \left\{ -i \int d^4\underline{x} d^4x J^\dagger(x) D_F(x - \underline{x}) J(x) \right\} . \quad (4.12)$$

La función de Green del operador de Klein-Gordon, se halla resolviendo la ecuación

$$-(\partial^2 + m^2) D_F(x - \underline{x}) = \delta(x - \underline{x}) , \quad (4.13)$$

donde se propone la siguiente expansión de Fourier como solución

$$D_F(x - \underline{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} g(p) \exp \{ i p_\mu (x^\mu - \underline{x}^\mu) \} \quad (4.14)$$

y se obtiene que es válida si en el espacio de momento se cumple

$$g(p) = \frac{1}{p^2 - m^2} = \frac{1}{E^2 - \vec{p}^2 - m^2} . \quad (4.15)$$

Se observa que la función $g(p)$ tiene un polo simple cuando el módulo cuadrado del cuadrimomento es $p^2 = m^2$, este valor representa la masa física del bosón que se está propagando. En el capítulo 5 veremos que al considerar el propagador a un loop la ubicación del polo sigue siendo en la masa física del bosón, pero la masa cambia.

El propagador de Feynman también se puede determinar en el espacio de coordenadas, esto se hace resolviendo la integral en la componente p^0 del cuadrimomento $p^\mu = (E, \vec{p})$. Con frecuencia se usa la prescripción de Feynman sobre la masa: $m^2 \rightarrow m^2 - i\varepsilon$,

donde ε es una constante real y positiva que tiende a cero. Esto garantiza la convergencia de (4.8) en caso que $|\phi|$ tenga un valor alto ya que habrá un término proporcional a $\exp(-\frac{\varepsilon}{2} \int d^4x |\phi|^2)$; además, la prescripción de Feynman, corre ligeramente del eje real las singularidades del propagador $g(p)$, permitiendo así utilizar el teorema del residuo para la resolución de la integral en p^0 , al final se toma el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} D_F(x - \underline{x}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\exp\{ip_\mu(x^\mu - \underline{x}^\mu)\}}{p^2 - m^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\exp\{ip_\mu(x^\mu - \underline{x}^\mu)\}}{E^2 - \underbrace{(\vec{p}^2 + m^2)}_{\omega_p^2}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\exp\{ip_\mu(x^\mu - \underline{x}^\mu)\}}{(E + \sqrt{\omega_p^2 - i\varepsilon})(E - \sqrt{\omega_p^2 - i\varepsilon})} . \end{aligned} \quad (4.16)$$

El cálculo de residuos depende del contorno y la singularidad que éste encierre. Si se considera que $x^0 > \underline{x}^0$, la singularidad $E_1 = -\sqrt{\omega_p^2 - i\varepsilon} \simeq -\omega_p + i\frac{\varepsilon}{2\omega_p}$ es encerrada por un contorno semicircular, en el semiplano superior, con radio $R \rightarrow \infty$ y que pasa a lo largo del eje real desde $-\infty$ hasta ∞ , tal como se muestra en la figura 4.1, obteniéndose como residuo:

$$\begin{aligned} Res \left[E_1 = -\omega_p + i\frac{\varepsilon}{2\omega_p} \right] &= -\frac{1}{2\omega_p} \exp\{-i(\omega_p(t - \underline{t}) + \vec{p} \cdot (\vec{x} - \underline{\vec{x}}))\} \exp\left\{\frac{-\varepsilon}{2\omega_p}(t - \underline{t})\right\} \\ &= -\frac{1}{2\omega_p} \exp\{-i(\omega_p(t - \underline{t}) + \vec{p} \cdot (\vec{x} - \underline{\vec{x}}))\} \Theta(t - \underline{t}) ; \end{aligned} \quad (4.17)$$

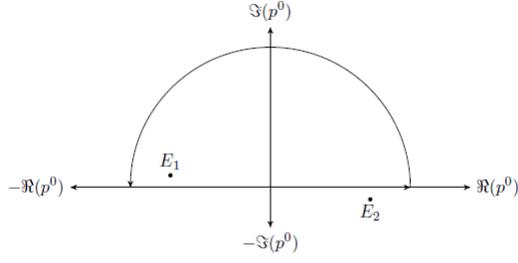
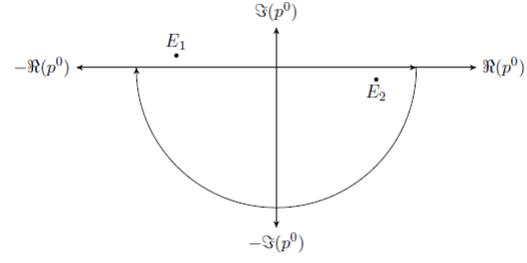
mientras que si $x^0 < \underline{x}^0$, se hace lo opuesto, es decir, la singularidad $E_2 = \sqrt{\omega_p^2 - i\varepsilon} \simeq \omega_p - i\frac{\varepsilon}{2\omega_p}$ es encerrada por un contorno semicircular en el semiplano inferior, que también pasa a lo largo del eje real desde $-\infty$ hasta ∞ , como se muestra en la figura 4.2, así se obtiene:

$$Res \left[E_2 = \omega_p - i\frac{\varepsilon}{2\omega_p} \right] = \frac{1}{2\omega_p} \exp\{i(\omega_p(t - \underline{t}) - \vec{p} \cdot (\vec{x} - \underline{\vec{x}}))\} \Theta(\underline{t} - t) . \quad (4.18)$$

Finalmente, aplicando el teorema del residuo y haciendo el cambio $p \rightarrow -p$ en el término (4.17), el propagador de Feynman queda

$$\begin{aligned} D_F(x - \underline{x}) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^4} 2\pi i \sum_{i=1}^2 Res[E_i] \\ &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2\omega_p} \exp\{-i(\omega_p(t - \underline{t}) - \vec{p} \cdot (\vec{x} - \underline{\vec{x}}))\} \Theta(t - \underline{t}) \\ &\quad + \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2\omega_p} \exp\{i(\omega_p(t - \underline{t}) - \vec{p} \cdot (\vec{x} - \underline{\vec{x}}))\} \Theta(\underline{t} - t) . \end{aligned} \quad (4.19)$$

Físicamente, $D_F(x - \underline{x})$ describe la amplitud de una perturbación en el campo propagándose de un punto a otro. El primer término describe la creación de una partícula con


 Figura 4.1: Contorno para $x^0 > \underline{x}^0$

 Figura 4.2: Contorno para $x^0 < \underline{x}^0$

frecuencia positiva en el punto \underline{x} y su aniquilación en x , por otro lado, el segundo término describe la propagación de partículas con frecuencia negativa desde \underline{x} hasta x . Otra forma de interpretar el segundo término es considerando las partículas con frecuencia negativa como antipartículas, de esta forma, se crea una antipartícula en x y es aniquilada en \underline{x} . [13]

4.2.2. Propagador del Campo Electromagnético

Para hallar el propagador de Maxwell realizamos un procedimiento análogo al anterior, para esto reescribimos la Lagrangiana:

$$\begin{aligned}
 S &= \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) = \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu(x) F^{\mu\nu} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} A_\nu F^{\mu\nu} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2} \int d^4x A_\nu(x) \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)) \\
 &= \frac{1}{2} \int d^4x A_\nu(x) (\eta^{\nu\mu} \partial^2 - \partial^\nu \partial^\mu) A_\mu(x) , \tag{4.20}
 \end{aligned}$$

el problema es que la Lagrangiana de Maxwell es singular y por lo tanto no tiene función inversa, en otras palabras, el determinante del operador $(\eta^{\nu\mu} \partial^2 - \partial^\nu \partial^\mu)$ se anula, y la función de Green no está definida.

Esta dificultad se puede superar si se modifica la Lagrangiana de Maxwell de forma que deje de ser singular; esto se lleva a cabo agregando un término de fijación de calibre en la Lagrangiana que rompa con la invariancia de calibre en la ecuación de movimiento del campo electromagnético, esto es

$$\mathcal{L}_{Mf} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \zeta (\partial_\mu A^\mu(x))^2 , \tag{4.21}$$

en principio el parámetro ζ puede ser cualquiera, excepto $\zeta = 0$. La ecuación de movimiento para esta Lagrangiana con término de fijación de calibre, es la que se muestra

acontinuación:

$$\begin{aligned}\partial_\mu (F^{\mu\nu} + \zeta \eta^{\mu\nu} (\partial_\sigma A^\sigma(x))) &= 0 \\ \partial^2 A^\nu(x) + (\zeta - 1) \partial^\nu (\partial_\sigma A^\sigma(x)) &= 0 ,\end{aligned}\quad (4.22)$$

donde es evidente que esta ecuación de movimiento es más general que la ecuación (3.33) obtenida en el capítulo 3; sin embargo, se comprueba que el término de fijación de calibre no cambia la ecuación de movimiento y por lo tanto la Lagrangiana (4.21) sigue describiendo el campo electromagnético en ausencia de fuentes. En un caso particular, si se escoge $\zeta = 1$, la ecuación de movimiento queda reducida a la ecuación de onda para el campo vectorial $\partial^2 A^\nu(x) = 0$; mientras que, en la ecuación de movimiento (3.33) se debe usar el calibre de Lorenz $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$ para obtener también la ecuación de onda para el campo vectorial; por esta razón, se dice que el término de fijación de calibre rompe la simetría.

Con la Lagrangiana modificada, se reescribe la acción en forma de un operador que actúe sobre los campos

$$\begin{aligned}S &= \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \zeta (\partial_\mu A^\mu(x))^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu(x) \left(\eta^{\mu\nu} \partial^2 + (\zeta - 1) \partial^\mu \partial^\nu \right) A_\nu(x)\end{aligned}\quad (4.23)$$

y se sustituye en la integral de camino para la teoría de Maxwell

$$Z[J^\mu] = \int \mathcal{D}A \exp \left\{ i \int d^4x \left(A_\mu(x) \frac{1}{2} \left(\eta^{\mu\nu} \partial^2 + (\zeta - 1) \partial^\mu \partial^\nu \right) A_\nu(x) + J_\mu(x) A^\mu(x) \right) \right\} .\quad (4.24)$$

Si se supone que el operador de Maxwell $\widehat{M} = \frac{1}{2} (\eta^{\mu\nu} \partial^2 + (\zeta - 1) \partial^\mu \partial^\nu)$ es diagonalizable a un operador $\widehat{\underline{M}}$, bajo una transformación de similaridad \widehat{S} que cumpla

$$\widehat{S}^\dagger \widehat{S} = \widehat{1} ,\quad (4.25)$$

y que diagonalice al operador como se muestra a continuación:

$$\widehat{\underline{M}} = \widehat{S} \widehat{M} \widehat{S}^\dagger ,\quad (4.26)$$

entonces, la integral de camino puede ser escrita de una forma más sencilla para su resolución. De hecho, insertando la expresión (4.25) que no es más que la identidad, entre los campos $A_\mu(x)$ y haciendo los siguientes cambios en la acción:

$$B^\mu(x) = \widehat{S} A^\mu(x) , \quad \xi_\mu(x) = \widehat{S} J_\mu(x) ,\quad (4.27)$$

se obtiene, la integral de camino como una integral Gaussiana generalizada:

$$Z[\xi^\mu] = \int \mathcal{D}B \exp \left\{ i \int d^4x \left(B_\mu(x) \widehat{\underline{M}} B_\mu(x) + \xi_\mu(x) B^\mu(x) \right) \right\} \quad (4.28)$$

la cual, tiene como solución:

$$Z[\xi^\mu] = i \sqrt{\frac{2\pi}{\det |\widehat{M}|}} \exp \left\{ -i \int d^4x \xi^\mu(x) \widehat{M}^{-1} \xi^\mu(x) \right\} , \quad (4.29)$$

en esta expresión, nuevamente, se pueden insertar identidades (4.25) entre $\xi^\mu(x)$ y el operador \widehat{M}^{-1} , para después usar las ecuaciones (4.26 - 4.27) y obtener el funcional generador para la teoría de Maxwell

$$Z[J^\mu] = Z[0] \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4\underline{x} J_\mu(x) D_F^{\mu\nu}(x - \underline{x}) J_\nu(\underline{x}) \right\} . \quad (4.30)$$

Al igual que el campo escalar, la constante $Z[0]$ es un factor que no es necesario determinar en nuestro caso ya que desaparece en el cálculo de cantidades físicas. Por otro lado, la función $D_F^{\mu\nu}(x - \underline{x})$ es el propagador de Feynman para el campo electromagnético [5], el cual se halla resolviendo la ecuación

$$(\eta_{\mu\nu} \partial^2 - (\zeta - 1) \partial_\mu \partial_\nu) D_F^{\nu\sigma}(x - \underline{x}) = \delta_\mu^\sigma \delta^4(x - \underline{x}) , \quad (4.31)$$

en la cual se propone como solución:

$$D_F^{\nu\sigma}(x - \underline{x}) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} g^{\nu\sigma}(k) \exp \{ i k_\mu (x^\mu - \underline{x}^\mu) \} \quad (4.32)$$

y se obtiene que es válida si se cumple:

$$(-k^2 \eta_{\mu\nu} + (1 - \zeta) k_\mu k_\nu) g^{\nu\sigma}(k) = \delta_\mu^\sigma . \quad (4.33)$$

Suponiendo un ansatz de la forma

$$g^{\nu\sigma}(k) = E(k) \eta^{\nu\sigma} + F(k) k_\nu k_\sigma \quad (4.34)$$

y comparando con la condición (4.33), se encuentra que los coeficientes deben ser

$$E(k) = -\frac{1}{k^2} , \quad F(k) = \frac{\zeta - 1}{k^2 \zeta k^2} , \quad (4.35)$$

finalmente en el espacio de momento el propagador para el fotón es

$$g^{\mu\nu}(k) = -\frac{\eta^{\mu\nu}}{k^2} + \frac{k^\mu (\zeta - 1) k^\nu}{k^2 \zeta k^2} . \quad (4.36)$$

El parámetro ζ , que se introdujo en el término de fijación de calibre, es importante que tenga un valor $\zeta \neq 0$ debido a que el propagador estaría indeterminado; sin embargo, hay valores particulares para ζ conocidos como calibres, que pueden simplificar en mayor o menor medida la expresión del propagador, por ejemplo:

- Calibre de Feynman $\zeta = 1$

$$g^{\mu\nu}(k) = -\frac{\eta^{\mu\nu}}{k^2} . \quad (4.37)$$

- Calibre de Landau $\zeta \rightarrow \infty$

$$g^{\mu\nu}(k) = -\frac{\eta^{\mu\nu}}{k^2} + \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2)^2} . \quad (4.38)$$

Para nuestro trabajo se usará el calibre de Feynman.

4.3. Vértices de interacción

Luego del orden cero en interacción, el siguiente orden de la teoría corresponde con el segundo término de la ecuación (4.5), el cual es

$$\begin{aligned} Z_1[J^\dagger, J, J^\mu; 1] &= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^\dagger \exp \left\{ iS_{KGC[J]} + iS_{M[J]} \right\} iS_{int} \\ &= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^\dagger \exp \left\{ iS_{KGC[J]} + iS_{M[J]} \right\} i \int d^4x (\mathcal{L}_{3int} + \mathcal{L}_{4int}) , \end{aligned} \quad (4.39)$$

aquí se identifican dos Lagrangianas de interacción, las cuales darán origen a dos tipos de vértices. En cualquier teoría de campos, el factor de vértice viene dado por

$$VF = i \frac{\partial^{\ell+m+n} \mathcal{L}_{int}}{(\partial A_\mu)^\ell (\partial \phi)^m (\partial \phi^\dagger)^n} \Big|_{\phi_i=0} (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + \dots k_\ell + p_1 + \dots p_n + \dots + q_n) . \quad (4.40)$$

En esta relación encontramos las expresiones de los vértices haciendo derivadas al potencial respecto a los campos, así se obtiene la dinámica de las interacciones. Por otra parte, el factor $(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + \dots k_\ell + p_1 + \dots p_n + \dots + q_n)$ muestra la dirección del cuadrimomento de los campos respecto al vértice; los momenta que entran al vértice tienen un signo, positivo o negativo, mientras que los momenta que salen del vértice tienen signo opuesto. Con este factor se asegura la conservación del cuadrimomento en el vértice de interacción.

El factor de vértice asociado al primer término de interacción, el cual posee la corriente conservada del campo de Klein-Gordon libre y el campo campo electromagnético

$$\int d^4x \mathcal{L}_{3int} = \int d^4x (-ie) A_\mu(x) \left(\phi^\dagger(x) \partial^\mu \phi(x) - \phi(x) \partial^\mu \phi^\dagger(x) \right) , \quad (4.41)$$

se halla sustituyendo la Lagrangiana de interacción en la ecuación (4.40). En este caso, se deben considerar las derivadas del campo escalar complejo, por lo que no se puede usar la ecuación (4.40) directamente, sin embargo, tomando en cuenta que el campo escalar en el espacio de momento cumple

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E}} \left(a_p \exp \{-ip^\mu x_\mu\} + b_p^\dagger \exp \{ip^\mu x_\mu\} \right) = \phi(x) , \quad (4.42)$$

$$\partial^\mu \phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{(-ip^\mu)}{\sqrt{2E}} \left(a_p \exp \{-ip^\mu x_\mu\} - b_p^\dagger \exp \{ip^\mu x_\mu\} \right) = -ip^\mu \phi(x) , \quad (4.43)$$

e igualmente el campo conjugado

$$\phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3\underline{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E}} \left(a_{\underline{p}}^\dagger \exp\{i\underline{p}^\mu x_\mu\} + b_{\underline{p}} \exp\{-i\underline{p}^\mu x_\mu\} \right) = \phi^\dagger(x) , \quad (4.44)$$

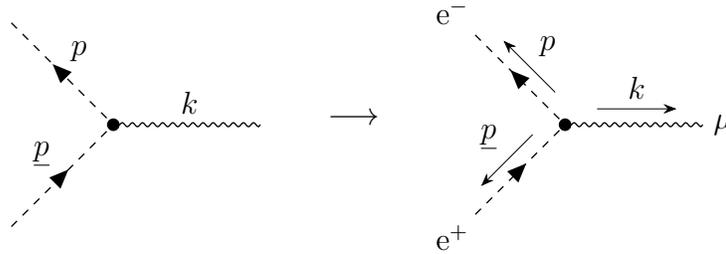
$$\partial^\mu \phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3\underline{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{i\underline{p}^\mu}{\sqrt{2E}} \left(a_{\underline{p}}^\dagger \exp\{i\underline{p}^\mu x_\mu\} - b_{\underline{p}} \exp\{-i\underline{p}^\mu x_\mu\} \right) = i\underline{p}^\mu \phi^\dagger(x) , \quad (4.45)$$

entonces sustituyendo las expresiones (4.43 , 4.45) en la Lagrangiana de interacción \mathcal{L}_{3int} , permite obtener el factor de vértice en el espacio de momento

$$\begin{aligned} VF_{3int} &= i \frac{\partial^3}{\partial A_\mu \partial \phi \partial \phi^\dagger} (\mathcal{L}_{3int}) \Big|_{\phi_i=0} (2\pi)^4 \delta^4(k + p + \underline{p}) \\ &= -ie(p^\mu + \underline{p}^\mu)(2\pi)^4 \delta^4(k + p + \underline{p}) . \end{aligned} \quad (4.46)$$

En los vértices debe haber conservación de la energía, momento, carga y números cuánticos; es por esto que, el factor de vértice obtenido no representa un proceso físico posible ya que no todos los momenta de los campos pueden estar saliendo o entrando al vértice y aún así, conservar el momento. En realidad, lo que se obtiene con la expresión (4.40) es la forma del factor para una determinada dirección con respecto al vértice de los momenta.

Los vértices también pueden representarse en función de los conocidos Diagramas de Feynman, con éstos, se muestra de una manera gráfica y sencilla la interacción entre campos, así como también la propagación de los mismos. El factor de vértice (4.46) es representado de la siguiente forma:



En el diagrama los campos escalares son representados con líneas punteadas mientras que el fotón es representado con la línea ondulada. Ahora bien, vamos a explicar las flechas en el diagrama: las flechas que están fuera de las líneas de los campos representan la dirección en que el momento está fluyendo, mientras que las flechas superpuestas sobre las líneas de los campos representan partículas o antipartículas. Si la flecha de la línea del campo está en la misma dirección que la flecha del momento, entonces el campo escalar representa una partícula con carga, energía y momento lineal: (e^-, E, \vec{p}) , pero si por el contrario, la flecha de la línea del campo está en dirección opuesta a la flecha del momento, entonces el campo estará representando una antipartícula $(e^-, -E, \vec{p})$. Recordemos que las antipartículas se interpretan como partículas con carga opuesta (e^+) y que viajan hacia

atrás en el tiempo, por lo que el momento lineal cambia de signo, así la carga, energía y momento lineal son $(e^+, \underline{E}, -\underline{p})$ y el factor de vértice (4.46) se reescribe como

$$VF_{3int} = -ie(p^\mu - \underline{p}^\mu) . \quad (4.47)$$

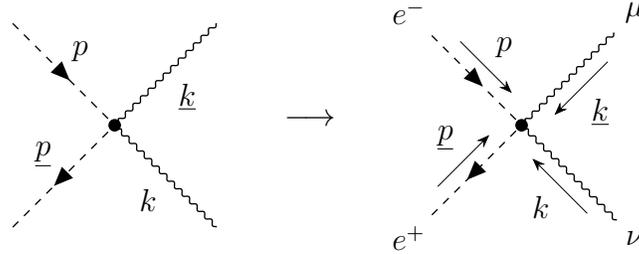
El factor de vértice para el segundo término de interacción se encuentra de manera análoga al caso anterior. Primero se considera el término de interacción

$$\int d^4x \mathcal{L}_{4int} = \int d^4x e^2 A^2(x) |\phi(x)|^2 , \quad (4.48)$$

y usando la ecuación (4.40), se obtiene el factor de vértice para este tipo de interacción

$$\begin{aligned} VF_{4int} &= i \frac{\partial^4}{\partial A_\mu \partial A^\mu \partial \phi \partial \phi^\dagger} (\mathcal{L}_{4int}) \Big|_{\phi_i=0} (2\pi)^4 \delta^4(k + \underline{k} + p + \underline{p}) \\ &= 2ie^2 \eta^{\mu\nu} (2\pi)^4 \delta^4(k + \underline{k} + p + \underline{p}) . \end{aligned} \quad (4.49)$$

Este factor de vértice está multiplicado por 2 debido a que el campo electromagnético está contraído consigo mismo. En función de los diagramas de Feynman, este vértice se representa como:



En este caso, las flechas del momento lineal entran al vértice y su dirección es especificada únicamente en la delta de conservación del cuadrimomento. Las líneas que representan fotones, no tienen una flecha superpuesta como las líneas de los campos escalares, esto se debe a que el fotón es su propia antipartícula siendo imposible distinguir entre fotones y antifotones.

Otra forma de obtener los vértices de la teoría es sustituyendo la representación en el espacio de momento de los campos escalares (4.42 , 4.44) y el campo electromagnético

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E}} \left(a_p \epsilon^\mu(\vec{k}) \exp(-ik^\sigma x_\sigma) + b_p^\dagger \epsilon^{\mu*}(\vec{k}) \exp(ik^\sigma x_\sigma) \right) , \quad (4.50)$$

en las respectivas Lagrangianas de interacción (4.41 , 4.48). De esta forma, se obtienen en cada caso, los factores de vértice de cada tipo de interacción con todas las posibles combinaciones de dirección de momento de los campos especificada en la delta Dirac. También es importante aclarar que al sustituir las expresiones de los campos en el espacio

de Fourier, ya se está tomando en cuenta que, en el campo escalar las partículas tienen carga, energía y momento (e^- , E , \vec{p}) y las antipartículas (e^+ , E , $-\vec{p}$).

El análisis de la teoría en el régimen perturbativo permitió deducir los propagadores de la teoría libre y también los vértices de interacción, éstas son las piezas con las que se definen las Reglas de Feynman de una teoría.

4.4. Reglas de Feynman

Los procesos que tienen lugar en una teoría, pueden ser representados en función de Diagramas de Feynman, los cuales tienen asociada una amplitud \mathcal{M} en la cual está contenida la información dinámica del proceso. Con las Reglas de Feynman, se logra conectar la representación diagramática de un proceso dado, con su respectiva amplitud, todo esto sin necesidad de hacer explícitamente el tratamiento perturbativo a la teoría. Para la Electrodinámica Cuántica Escalar, las reglas de Feynman en el espacio de momento son:

1. Para líneas de momenta externas:

- a) Los campos escalares se etiquetan con p_i y tienen un factor 1.
- b) Los fotones se etiquetan con k_i y tienen un vector de polarización $\epsilon^{\mu*}(\vec{k}_i)$ cuando están entrando, y $\epsilon^\mu(\vec{k}_i)$ cuando están saliendo.

2. Los propagadores internos se etiquetan con q_i .

a) Para el campo escalar asociar el propagador:

$$\frac{i}{q^2 - m^2} \longrightarrow \text{---}\blacktriangleright\text{---}$$

b) Para el campo fotón asociar el propagador (en el calibre Feynman $\zeta = 1$):

$$\frac{-i\eta^{\mu\nu}}{q^2} \longrightarrow \text{~~~~~}$$

3. Vértice de 3 campos:

a) Asociar un factor:

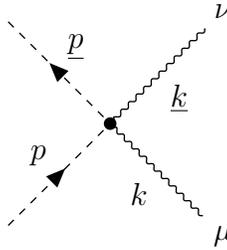
$$-ie(p^\mu + \underline{p}^\mu) \longrightarrow \begin{array}{c} \text{---}\blacktriangleright\text{---} \\ \text{---}\blacktriangleright\text{---} \\ \text{~~~~~}\mu \end{array}$$

b) Factor de conservación del momento

$$(2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum p_{in} - \sum p_{out} \right)$$

4. Vértice de 4 campos:

a) Asociar un factor:

$$2ie^2 \eta^{\mu\nu} \longrightarrow$$


b) Factor de conservación del momento:

$$(2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum p_{in} - \sum p_{out} \right)$$

5. Integrar sobre cada momento interno

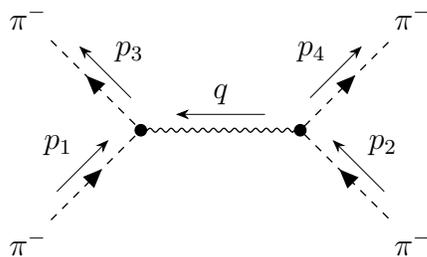
$$\int \frac{d^4 q_i}{(2\pi)^4}$$

6. Agregar el factor de simetría

7. Se sobreentiende una delta de conservación del momento en la amplitud

Aplicando estas reglas, se obtiene la amplitud del proceso estudiado.

Un ejemplo para la aplicación de las reglas de Feynman es el cálculo de la amplitud para un proceso de dispersión de piones $\pi^- \pi^- \longrightarrow \pi^- \pi^-$:



$$= i\mathcal{M}(2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum p_{in} - \sum p_{out} \right) \quad (4.51)$$

En los digramas consideraremos que el tiempo fluye desde abajo hacia arriba, de esta forma, el diagrama se interpreta como una dispersión de piones por medio de la interacción de un fotón. Las líneas internas son asociadas a partículas virtuales, las cuales no se consideran reales; esto se debe a que los estados observables y por lo tanto medibles, son

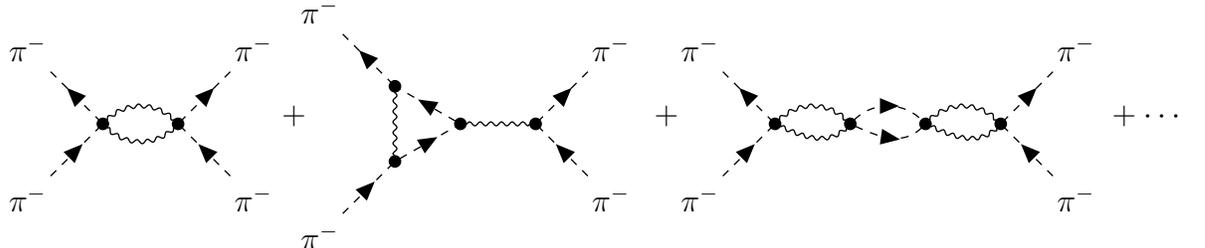
los estados inicial y final (líneas externas). Usando las reglas de Feynman se construye la amplitud del proceso

$$i\mathcal{M}(2\pi)^4\delta^4\left(\sum p_{in} - \sum p_{out}\right) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (-ie)(p_1^\mu + p_3^\mu) \left(\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{q^2}\right) (-ie)(p_2^\nu + p_4^\nu) \times (2\pi)^4\delta^4(p_1 - p_2 + q)(2\pi)^4\delta(p_2 - p_4 - q) , \quad (4.52)$$

ahora solo queda resolver la integral. En este caso, son sólo funciones delta de Dirac

$$i\mathcal{M} = ie^2 \frac{(p_1^\mu + p_3^\mu)\eta_{\mu\nu}(p_2^\nu + p_4^\nu)}{(p_3 - p_1)^2} . \quad (4.53)$$

En la amplitud, se supone un factor $(2\pi)^4\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$ para la conservación del momento. Una pregunta que podemos hacernos es: ¿será que el proceso de dispersión sólo puede ocurrir de una forma? La verdad es que no. En el orden de mayor importancia, es decir nivel árbol, el único diagrama que contribuye es (4.51); sin embargo, si se consideran diagramas más complejos, se encuentra que la cantidad de diagramas que contribuyen al proceso es infinita, aquí algunos ejemplos:



$$(4.54)$$

El primer diagrama corresponde a una corrección cuántica a un loop por parte del vértice de 4 campos, el siguiente contribuye a la dispersión de piones con una corrección cuántica a un loop en el vértice de 3 campos, por último, el tercer diagrama es una corrección cuántica a 3 loops del vértice de 4 campos.

Cuando se estudia un proceso en una teoría de campos, normalmente se busca calcular secciones eficaces o tazas de decaimiento, para esto, primero se fija el orden en que se va a trabajar: nivel árbol, un loop, 2 loop, etc. Después se calcula la amplitud total \mathcal{M}_T del proceso sumando las amplitudes de todos los diagramas que contribuyen. Por último, como veremos más adelante, se determina la sección eficaz o la tasa de decaimiento usando la regla de oro de Fermi. En el siguiente capítulo también veremos que la teoría de perturbaciones presenta divergencias cuando consideramos procesos con loops, por esta razón debe darse un mecanismo para manejar estos efectos no físicos y la teoría de campos debe ser renormalizada.

Capítulo 5

Procesos en Electrodinámica Cuántica Escalar

En el capítulo anterior estudiamos cómo extraer las reglas de Feynman para una teoría dada una Lagrangiana y se mostró un ejemplo de amplitud a nivel árbol. Ahora en este capítulo realizaremos un estudio más profundo tomando como ejemplo el proceso Compton entre un fotón y un Bosón cargado. Usando las reglas de Feynman se calculará la amplitud total \mathcal{M}_T a nivel árbol y con la regla de oro de Fermi se calculará la sección eficaz. Finalmente se realizará la renormalización del propagador y veremos cómo cambia al considerar la teoría a 1-loop.

5.1. Matriz-S

Una fuente importante de información sobre partículas, proviene de realizar experimentos de colisión. Típicamente, estos experimentos consisten en introducir las partículas en aceleradores, donde se llevan a cierto nivel de energía y una vez alcanzado este nivel se hacen colisionar. Usando instrumentos de medición es posible identificar las trayectorias, así como también la cantidad de movimiento de los productos de la colisión.

Las cantidades medibles en los experimentos, son predichas teóricamente usando probabilidades [9]; según los postulados de la mecánica cuántica, las probabilidades de los estados finales vienen dadas en términos del módulo cuadrado del producto de los estados del sistema, es decir

$$dP = \frac{|\langle F, t_f | I, t_i \rangle|^2}{\langle F | F \rangle \langle I | I \rangle} d\Pi , \quad (5.1)$$

el producto $\langle F, t_f | I, t_i \rangle$ está en la representación de Schrödinger, en la cual los estados del sistema evolucionan en el tiempo por medio del el operador evolución temporal.

El estado inicial está dado por $|I, t_i\rangle = \exp(-i\widehat{H} t_i)|I\rangle$, mientras que el estado final $\langle F, t_f| = \langle F|\exp(i\widehat{H} t_f)$. Los productos $\langle F|F\rangle$ e $\langle I|I\rangle$ en el denominador de la expresión (5.1) aparecen debido a que los estados definidos en un tiempo fijo, pueden no estar normalizados $\langle I|I\rangle = \langle F|F\rangle = 1$; finalmente, el factor $d\Pi$ representa la densidad de posibles estados finales del sistema y comúnmente es llamado factor de espacio de fase.

En teoría cuántica de campos resulta natural trabajar en el marco de Heisenberg, aquí la dependencia del tiempo la tienen los operadores y no los estados; de este modo, la evolución de autoestados de momento desde un tiempo t_i hasta un tiempo t_f , relacionados a un proceso de colisión de partículas, se representan como:

$$\langle F, t_f|I, t_i\rangle_{Schrödinger} = \langle F|\widehat{S}|I\rangle_{Heisenberg} . \quad (5.2)$$

La matriz \widehat{S} contiene toda la información sobre cómo los estados inicial y final evolucionan en el tiempo, en realidad, es el operador evolución para el caso en que se describen procesos de dispersión de partículas (particle scattering). Al igual que el operador evolución de la mecánica cuántica, la matriz S es unitaria, cumple $\widehat{S}^{-1} = \widehat{S}^\dagger$. Los estados inicial $|I\rangle$ y final $\langle F|$ que actúan sobre la matriz S son estados asintóticos. Asumiendo que las interacciones ocurren en una región acotada del espaciotiempo, los estados asintóticos coinciden con estados libres

Los elementos de la matriz \widehat{S} se calculan usando teoría de perturbaciones. Para una teoría sin interacción la matriz \widehat{S} es simplemente la identidad \mathbb{I} . De esta manera podemos escribir la matriz \widehat{S} para una teoría con interacción de la siguiente forma

$$\widehat{S} = \mathbb{I} + i\widehat{\mathcal{T}} , \quad (5.3)$$

donde $i\widehat{\mathcal{T}}$ es llamada matriz de transferencia y describe desviaciones a la teoría libre, la i es incluida por convención motivado a que el operador evolución es unitario. En una colisión se sabe que hay conservación de la energía y cantidad de movimiento, es por esto que para un proceso de dispersión cualquiera es útil un factor que asegure la conservación del cuadrimomento, así un elemento de la matriz \widehat{S} en un proceso de dispersión se puede escribir como

$$\langle p_{out}|\widehat{S}|p_{in}\rangle = \langle p_{out}|i\widehat{\mathcal{T}}|p_{in}\rangle = i\mathcal{M}(2\pi)^4\delta^4\left(\sum p_{in} - \sum p_{out}\right) , \quad (5.4)$$

donde \mathcal{M} es la amplitud del proceso, la cual como ya hemos mencionado antes, se obtiene al aplicar las reglas de Feynman.

5.1.1. Proceso Compton

El efecto Compton, descubierto por Arthur Holly Compton en 1923, consiste en la dispersión de un fotón, el cual puede ser de rayos X o rayos gamma, por parte una

partícula cargada (usualmente es un electrón, aunque también podría ser un bosón); esto resulta en una disminución de la energía del fotón ya que parte de ésta es transferida al bosón cargado.

El orden más bajo en que se puede tratar esta interacción es a nivel árbol, en donde no hay bucles cerrados (loops) [3]. Durante el proceso, los estados inicial y final son: $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$, sin embargo, a nivel árbol hay 3 diagramas de Feynman que describen esta interacción

$$(5.5)$$

en los diagramas se considera que el tiempo está fluyendo de abajo hacia arriba y usando las reglas de Feynman, se calcula la amplitud de cada diagrama; en el primero se obtiene:

$$i\mathcal{M}_1 \delta(\sum p) = 2ie^2 \eta^{\mu\nu} \epsilon_\mu^*(\vec{p}_2) \epsilon_\nu(\vec{p}_4) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \quad (5.6)$$

$$\implies i\mathcal{M}_1 = 2ie^2 \eta^{\mu\nu} \epsilon_\mu^*(\vec{p}_2) \epsilon_\nu(\vec{p}_4) , \quad (5.7)$$

donde el factor $\delta(\sum p)$ es una manera corta de escribir la conservación del cuadrimento $(2\pi)^4 \delta^4(\sum p_{in} - \sum p_{out})$; en este caso, la amplitud viene dada por el factor de vértice ya que no hay partículas virtuales.

El segundo y tercer digrama tienen partículas virtuales, por lo que el cálculo de la amplitud implica la resolución de una integral respecto al momento interno q_i . El diagrama dos describe un proceso Compton en el que un bosón con carga e^- y momento inicial p_1 interactúa con el fotón que tiene momento p_2 , absorbe la energía y momento p_2 pasa a ser un bosón virtual con momento q , luego emite un fotón con cuadrimento p_4 y debido a esto, cambia su momento a p_3

$$i\mathcal{M}_2 \delta(\sum p) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (-ie)(p_1^\mu + q^\mu) \epsilon_\mu^*(\vec{p}_2) \frac{i}{q^2 - m^2} (-ie)(q^\nu + p_3^\nu) \epsilon_\nu(\vec{p}_4) \quad (5.8)$$

$$\times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - q) (2\pi)^4 \delta^4(q - p_3 - p_4) ,$$

el resultado de la amplitud es indiferente del orden en que se integren las funciones delta de Dirac, en cualquier caso, al final una delta de Dirac asegura la conservación del cuadrimento. Por otra parte, el diagrama tres muestra un proceso Compton en el que un bosón con momento p_1 interactúa con un fotón con momento p_2 , a través del bosón virtual

con momento q ; los productos de la interacción son el bosón y el fotón con momenta p_3 y p_4 respectivamente, la amplitud del diagrama es

$$i\mathcal{M}_3 \delta(\sum p) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (-ie)(p_1^\nu + q^\nu) \epsilon_\nu(\vec{p}_4) \frac{i}{q^2 - m^2} (-ie)(q^\mu + p_3^\mu) \epsilon_\mu^*(\vec{p}_2) \quad (5.9)$$

$$\times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_4 - q) (2\pi)^4 \delta^4(q + p_2 - p_3) .$$

Usando la conservación del cuadrimento ($p_1 + p_2 = p_3 + p_4$) y el hecho que en el espacio de momento, el campo de Klein - Gordon libre cumple $(-ip_\mu)(-ip^\mu) + m^2 = 0$ y el campo electromagnético libre cumple $k^2 = 0$ y el calibre Lorentz $\epsilon_\mu(\vec{k}_i) k_i^\mu = 0$, entonces las amplitudes del segundo y tercer diagrama se pueden simplificar a

$$i\mathcal{M}_2 = -2ie^2 \frac{p_1^\mu \epsilon_\mu^*(\vec{p}_2) p_3^\nu \epsilon_\nu(\vec{p}_4)}{(p_1 \cdot p_2)} , \quad (5.10)$$

$$i\mathcal{M}_3 = 2ie^2 \frac{p_1^\nu \epsilon_\nu(\vec{p}_4) p_3^\mu \epsilon_\mu^*(\vec{p}_2)}{(p_1 \cdot p_4)} . \quad (5.11)$$

La amplitud total para proceso Compton, será la suma de las amplitudes de los diagramas asociados, es decir, las ecuaciones (5.7 , 5.10 , 5.11), obteniéndose

$$i\mathcal{M}_T = 2ie^2 \left(\eta^{\mu\nu} \epsilon_\mu^*(\vec{p}_2) \epsilon_\nu(\vec{p}_4) - \frac{p_1^\mu \epsilon_\mu^*(\vec{p}_2) p_3^\nu \epsilon_\nu(\vec{p}_4)}{(p_1 \cdot p_2)} + \frac{p_1^\nu \epsilon_\nu(\vec{p}_4) p_3^\mu \epsilon_\mu^*(\vec{p}_2)}{(p_1 \cdot p_4)} \right) . \quad (5.12)$$

Para el cálculo de la sección eficaz, como veremos más adelante, es necesario determinar el módulo cuadrado de la amplitud total, la cual por ser compleja, viene dada por:

$$|\mathcal{M}_T|^2 = (i\mathcal{M}_T)(i\mathcal{M}_T)^\dagger$$

$$= \left\{ 2ie^2 \left(\eta^{\mu\nu} \epsilon_\mu^*(\vec{p}_2) \epsilon_\nu(\vec{p}_4) - \frac{p_1^\mu \epsilon_\mu^*(\vec{p}_2) p_3^\nu \epsilon_\nu(\vec{p}_4)}{(p_1 \cdot p_2)} + \frac{p_1^\nu \epsilon_\nu(\vec{p}_4) p_3^\mu \epsilon_\mu^*(\vec{p}_2)}{(p_1 \cdot p_4)} \right) \right\}$$

$$\times \left\{ -2ie^2 \left(\eta^{\alpha\beta} \epsilon_\alpha(\vec{p}_2) \epsilon_\beta^*(\vec{p}_4) - \frac{p_1^\alpha \epsilon_\alpha(\vec{p}_2) p_3^\beta \epsilon_\beta^*(\vec{p}_4)}{(p_1 \cdot p_2)} + \frac{p_1^\beta \epsilon_\beta^*(\vec{p}_4) p_3^\alpha \epsilon_\alpha(\vec{p}_2)}{(p_1 \cdot p_4)} \right) \right\} . \quad (5.13)$$

Esta expresión se puede simplificar promediando sobre los vectores de polarización de los fotones de los estados inicial y final, esto es

$$\sum_{polarizaciones} \epsilon_\mu^*(k_i) \epsilon_\nu(k_i) \longrightarrow -\eta_{\mu\nu} , \quad (5.14)$$

así, el módulo cuadrado de la amplitud puede simplificarse a

$$|\mathcal{M}_T|^2 = 4e^4 \left(1 + \frac{(p_1)^2 (p_3)^2}{(p_1 \cdot p_2)^2} + \frac{(p_1)^2 (p_3)^2}{(p_1 \cdot p_4)^2} + \frac{2(p_1 \cdot p_3)}{(p_1 \cdot p_4)} - \frac{2(p_1 \cdot p_3)}{(p_1 \cdot p_2)} - \frac{2(p_1 \cdot p_3)^2}{(p_1 \cdot p_2)(p_1 \cdot p_4)} \right) . \quad (5.15)$$

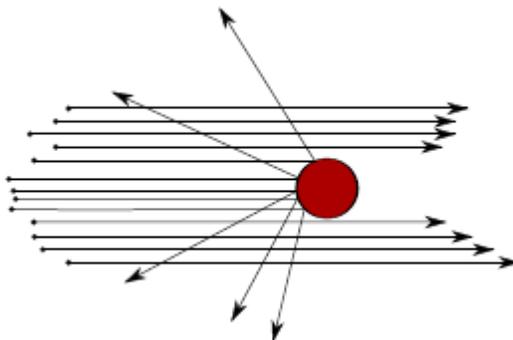


Figura 5.1: El número de partículas dispersadas es proporcional a la sección eficaz.

Para calcular la sección eficaz, hace falta sustituir en el módulo cuadrado de la amplitud un sistema de referencia, éstos pueden ser: el sistema de referencia del centro de masa o el sistema de referencia del laboratorio, los cuales se definirán más adelante; una vez se sustituye un sistema de referencia en la expresión anterior, se usa la Regla de oro de Fermi para determinar la sección eficaz.

5.2. Sección Eficaz

Como ya hemos mencionado anteriormente, el estado final de un sistema modelado con teorías de campos, es expresado en términos de la probabilidad que tiene dicho estado de suceder. Esta probabilidad es expresada en términos de la sección eficaz, una cantidad intrínseca a un proceso de colisión; para tener una idea sobre qué es una sección eficaz, imaginemos la siguiente situación. Consideremos un arquero que intenta dispararle a un blanco. Un parámetro que podría interesar es el tamaño del blanco, pero en realidad, lo que más importa es el área transversal o sección transversal que representa el blanco para los proyectiles incidentes. Esta misma idea se puede tomar para un experimento de colisión de partículas, si se dispara con un cañón de electrones a un blanco de protones, el parámetro de interés es el área transversal que representa el blanco de protones para el haz incidente; el problema con las partículas es que hay complicaciones adicionales, por ejemplo, el proyectil puede interactuar con el blanco por medio de algún potencial de interacción, es por esto que no solo se trata de acertar o fallar al objetivo, la sección eficaz también depende de la naturaleza del proyectil y del blanco y por esto, en teoría cuántica de campos tiene un significado más abstracto que el área transversal, también da una medida sobre cuán fuerte es la interacción.

El cálculo de secciones eficaces se hace usando la Regla de Oro de Fermi [14]. En esencia, la regla de oro dice que la sección eficaz de un proceso de dispersión viene dada por el producto del factor de espacio de fase $d\Pi$, multiplicado por el módulo cuadrado de la amplitud del proceso, esto es:

$$\sigma = \frac{S\hbar^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}} \int |\mathcal{M}_T|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) d\Pi, \quad (5.16)$$

el factor del espacio de fase está dado por

$$d\Pi = \prod_{j=3}^4 (2\pi) \delta(p_j^2 - m_j^2 c^2) \Theta(p_j^0) \frac{d^4 p_j}{(2\pi)^4}. \quad (5.17)$$

Esta expresión para la sección eficaz tiene sentido pensando en lo siguiente: ingenuamente, se espera que la sección eficaz sea proporcional al número de colisiones ($\sigma \propto \mathcal{N}$) y clásicamente la probabilidad para que una partícula sea dispersada esta dada por $P = \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}_{inc}}$, donde \mathcal{N}_{inc} es el número de partículas incidentes, de este modo, la sección eficaz debe ser proporcional a la probabilidad ($\sigma \propto dP$); además, tomando en cuenta que la probabilidad que tiene un estado de suceder viene dado por la ecuación (5.1) y que al mismo tiempo un elemento de la matriz \hat{S} está dado por (5.4), entonces resulta sensato que se cumpla

$$d\sigma \propto |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4\left(\sum p_{in} - \sum p_{out}\right) \times d\Pi. \quad (5.18)$$

Por otra parte, las masas m_1, m_2 y los cuadrimomento p_1, p_2 en el denominador, son de las partículas que inicialmente colisionan. En el numerador, S es un factor estadístico que corrige conteos adicionales cuando en el estado final del proceso hay partículas indistinguibles, en ese caso $S = \frac{1}{s!}$; por ejemplo, supongamos un proceso de dispersión $a + b \rightarrow c + c + d + d + d$, aquí $S = \frac{1}{2!} \frac{1}{3!} = \frac{1}{12}$. El resto en la regla de oro (5.16) es el factor de espacio de fase que como ya dijimos representa la densidad de posibles estados finales y está sometido a las siguientes restricciones:

- Las partículas del estado final se considera que están on shell, es decir, son soluciones a la ecuación $E^2 - \vec{p}^2 = m^2$ y por lo tanto se encuentran en una de las hojas de este hiperboloide. Esto se asegura con la función $\delta(p_j^2 - m^2)$.
- La energía de todas las partículas debe ser positiva $E_i > 0$, es por esto que está la función escalón $\Theta(p_i^0)$.

Para el cálculo de la sección eficaz, primero se va a desarrollar el factor del espacio de fase. Recordemos que estamos trabajando en unidades naturales ($c = \hbar = 1$) y usando la

siguiente propiedad de la función delta de Dirac

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x=x_i}}, \quad (5.19)$$

donde x_i son las raíces de la función $g(x)$, entonces $d\Pi$ puede ser reescrito como

$$\begin{aligned} d\Pi &= \prod_{j=3}^4 (2\pi) \delta((p_j^0)^2 - a_j^2) \Theta(p_j^0) \frac{d^4 p_j}{(2\pi)^4}, \quad a_j^2 = \vec{p}_j^2 + m_j^2 > 0 \\ &= \frac{\pi^2}{a_3 a_4} \Theta(p_3^0) \Theta(p_4^0) \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_4}{(2\pi)^4} \\ &\quad \times \left(\delta(p_3^0 + a_3) + \delta(p_3^0 - a_3) \right) \left(\delta(p_4^0 + a_4) + \delta(p_4^0 - a_4) \right). \end{aligned} \quad (5.20)$$

En un proceso Compton, el factor estadístico es $S = 1$ ya que las partículas de los estados inicial y final son distinguibles, un bosón cargado y un fotón. Considerando que la masa del fotón es $m_2 = 0$ y sustituyendo (5.20) en la sección eficaz

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{4(p_1 \cdot p_2)} \int |\mathcal{M}_T|^2 (2\pi)^4 \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \delta(p_1^0 + p_2^0 - a_3 - a_4) \\ &\quad \times \frac{\pi^2}{a_3 a_4} \Theta(a_3) \Theta(a_4) \frac{d^3 \vec{p}_3}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \vec{p}_4}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Haciendo la integración de $d^3 \vec{p}_3$ o $d^3 \vec{p}_4$ sobre $\delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4)$, se asegura la conservación del momento lineal, es decir $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4$, de esta forma la sección eficaz queda como

$$\sigma = \frac{1}{(p_1 \cdot p_2)} \int |\mathcal{M}_T|^2 (2\pi)^4 \delta(p_1^0 + p_2^0 - a_3 - a_4) \frac{\pi^2}{a_3 a_4} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3}. \quad (5.22)$$

Además haciendo un cambio a coordenadas esféricas $d^3 \vec{p}_4 = |\vec{p}_4|^2 d|\vec{p}_4| d\Omega$ finalmente se obtiene

$$\sigma = \frac{1}{(p_1 \cdot p_2)} \int d|\vec{p}_4| d\Omega \frac{|\vec{p}_4|^2}{64\pi^2 a_3 a_4} |\mathcal{M}_T|^2 \delta(p_1^0 + p_2^0 - a_3 - a_4). \quad (5.23)$$

Esta es la expresión más general de la sección eficaz para un proceso Compton en una teoría de campos, sólo haría falta sustituir el módulo cuadrado de la amplitud, la cual viene dada por la ecuación (5.15). Antes de sustituir el sistema de referencia, vamos a definir las variables de Mandelstam.

5.3. Variables de Mandelstam

Una conveniente forma de expresar la sección eficaz es en función de las variables de Mandelstam, las cuales resultan útiles para simplificar, además de eso son invariante

Lorentz, esto trae como consecuencia que la sección eficaz no cambia cuando se expresa en términos de estas variables. Para un proceso de dispersión $2 \rightarrow 2$ con momento inicial p_1 y p_2 y momento final p_3 y p_4 , las variables se definen como:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 , \quad (5.24)$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_4 - p_2)^2 , \quad (5.25)$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_3 - p_2)^2 . \quad (5.26)$$

las cuales cumplen:

$$s + t + u = \sum_j m_j^2 , \quad (5.27)$$

donde m_j es la masa de cada una de las partículas involucradas en el proceso. En el caso de un proceso Compton

$$s + t + u = 2m^2 , \quad (5.28)$$

ya que sólo los campos escalares poseen masa distinta de cero.

5.4. Sistemas de Referencia

5.4.1. Sistema del Centro de Masa

En este sistema de referencia, el bosón y fotón tienen momento lineal de igual magnitud pero de direcciones opuestas. Colocando el sistema de referencia de forma que el momento lineal sólo esté en la dirección z, tenemos para los estados inicial y final:

$$p_1 = (E, 0, 0, -\omega) \quad , \quad p_2 = (\omega, 0, 0, \omega) \quad (5.29)$$

$$p_3 = (E_3, \vec{p}_3) \quad , \quad p_4 = (E_4, \vec{p}_4) . \quad (5.30)$$

La conservación de la energía $E + \omega = E_3 + E_4$ y del momento lineal $\vec{p}_{in} = \vec{p}_{out}$ obliaga que se cumpla

$$\vec{p}_4 = -\vec{p}_3 , \quad (5.31)$$

$$|\vec{p}_4| = |\vec{p}_3| = \omega , \quad (5.32)$$

$$E = E_3 = \sqrt{\omega^2 + m^2} . \quad (5.33)$$

Calculando las variables de Mandelstam, se obtiene

$$s = m^2 + 2\omega(\sqrt{\omega^2 + m^2} + \omega) , \quad (5.34)$$

$$t = 2\omega^2(\cos(\theta) - 1) , \quad (5.35)$$

$$u = m^2 - 2\omega(\sqrt{\omega^2 + m^2} + \omega \cos(\theta)) , \quad (5.36)$$

con las cuales se reescriben los productos $(p_1 \cdot p_2)$, $(p_1 \cdot p_4)$ y $(p_1 \cdot p_3)$ en el módulo cuadrado de la amplitud

$$|\mathcal{M}_T|^2 = 4e^4 \left(\frac{4m^4}{(m^2 - u)^2} + \frac{2t(s - m^2) + (s - 3m^2)^2}{(m^2 - s)^2} + \frac{2(2m^2 - t)(3m^2 - s - t)}{(m^2 - s)(m^2 - u)} \right). \quad (5.37)$$

Ahora bien, usando nuevamente la propiedad de la delta de Dirac (5.19), se puede reescribir la delta de Dirac de la conservación de la energía

$$\delta(p_1^0 + p_2^0 - a_3 - a_4) = \frac{\delta(|\vec{p}_4| - \omega)}{1 + \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + m^2}}} \quad (5.38)$$

y sustituyendo este resultado en la expresión la expresión (5.23), finalmente se obtiene

$$\frac{d\sigma_{com}}{d\Omega} = \frac{1}{(E + \omega)^2} \frac{|\mathcal{M}_{Tcom}|^2}{64\pi^2}, \quad (5.39)$$

La expresión obtenida es un análogo a la fórmula de Klein - Nishina de la electrodinámica cuántica, muestra como cambia la sección eficaz respecto al ángulo sólido. Si el sistema posee simetría azimutal, se simplifica la expresión ya que el diferencial de ángulo sólido se puede escribir como $d\Omega = 2\pi d \cos(\theta)$, pudiendo así, expresar la sección eficaz en función del ángulo de dispersión. También se puede escribir $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ en términos las variables de Mandelstam, recordemos que son invariante Lorentz y debido a esto, la sección eficaz no cambia sin importar el sistema de referencia; usando la variable t en la ecuación (5.35), se hace un cambio de variable en el diferencial de ángulo sólido

$$dt = 2\omega^2 \overbrace{(-\sin(\theta)d\theta)}^{d \cos(\theta)} = 2\omega^2 d \cos(\theta) \implies d \cos(\theta) = \frac{dt}{2\omega^2}, \quad (5.40)$$

el cual se sustituye en la expresión (5.39) y escribiendo $(E + \omega)^2$ en términos de s , se obtiene

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{(s - m^2)^2} \frac{|\mathcal{M}_T|^2}{16\pi}, \quad (5.41)$$

donde el módulo cuadrado de la amplitud esta dado por (5.37).

5.4.2. Sistema de Referencia del Laboratorio

En este sistema, el bosón se considera en reposo. Esto es una aproximación a lo que ocurre en un laboratorio cuando se estudia el proceso a bajas energías ya que el bosón tiene una velocidad mucho menor que la del fotón, por esta razón se considera que está en

resposo y su energía es simplemente debido a su masa. Para los estados iniciales y finales tenemos:

$$p_1 = (m, 0, 0, 0) \quad , \quad p_2 = (\omega, 0, 0, \omega) \quad , \quad (5.42)$$

$$p_3 = (E_3, \vec{p}_3) \quad , \quad p_4 = (E_4, \vec{p}_4) \quad . \quad (5.43)$$

De la conservación de la energía $m + \omega = E_3 + E_4$ y cantidad de movimiento $\vec{p}_{in} = \vec{p}_{out}$, se obtiene:

$$|\vec{p}_3|^2 = \omega^2 - 2\omega|\vec{p}_4| \cos(\theta) + |\vec{p}_4|^2 \quad , \quad (5.44)$$

$$|\vec{p}_4| = \frac{m\omega}{m + \omega(1 - \cos(\theta))} = \underline{\omega} \quad . \quad (5.45)$$

En este sistema de referencia las variables de Mandelstam vienen dadas por:

$$s = m^2 + 2m\omega \quad , \quad (5.46)$$

$$t = 2\omega\underline{\omega}(\cos(\theta) - 1) \quad , \quad (5.47)$$

$$u = m^2 - 2m\omega \quad . \quad (5.48)$$

Nuevamente, usando la propiedad (5.19) se reescribe la delta de conservación de la energía de la siguiente forma

$$\delta(p_1^0 + p_2^0 - a_3 - a_4) = \frac{\delta(|\vec{p}_4| - \underline{\omega})}{1 + \frac{|\vec{p}_4| - \underline{\omega} \cos(\theta)}{E_3}} \quad , \quad (5.49)$$

sustituyendo este resultado en la expresión (5.23) y escribiendo convenientemente la energía $E_3 = \omega + m - \underline{\omega}$, se obtiene la sección eficaz en el sistema de referencia del laboratorio

$$\frac{d\sigma_{lab}}{d\Omega} = \frac{1}{m\omega} \frac{|\mathcal{M}_{Tlab}|^2}{64\pi^2} \frac{\underline{\omega}}{m + \omega(1 - \cos(\theta))} \quad , \quad (5.50)$$

donde el módulo cuadrado de la amplitud para este sistema de referencia está dado por:

$$|\mathcal{M}_{Tlab}|^2 = \frac{4e^4 m^4}{\omega^2 (m + \underline{\omega}(\cos(\theta) - 1))^2} - \frac{8e^4 m^2 (m + \omega)}{\omega^2 (m + \underline{\omega}(\cos(\theta) - 1))} + \frac{4e^4 (m + \omega)^2}{\omega^2} \quad . \quad (5.51)$$

La expresión (5.50) es el análogo a la fórmula de Klein - Nishina para el sistema del laboratorio. De manera similar al caso anterior, se reescribe esta expresión en términos de las variables de Mandelstam; usando t en la ecuación (5.47) se reescribe el diferencial del ángulo sólido

$$\frac{dt}{d\theta} = -2\underline{\omega}^2 \sin(\theta) \implies d\cos(\theta) = \frac{dt}{2\underline{\omega}^2} \quad (5.52)$$

y sustituyendo este cambio en la sección eficaz para el sistema del laboratorio (5.50) se obtiene

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{(s - m^2)^2} \frac{|\mathcal{M}_T|^2}{16\pi} . \quad (5.53)$$

Como se observa, la misma ecuación (5.41). Confirmando que la sección eficaz se puede escribir de manera única usando las variables s, t, u . Esto permite pasar de un sistema de referencia a otro, una vez conocidas las variables de Mandelstam en cada sistema. Además, esta expresión muestra como cambia la sección eficaz en función de la transferencia de momento, recordemos que $t = (p_1 - p_3)^2$.

5.5. Gráficas de la Sección Eficaz

La distribución de la sección eficaz en una colisión puede visualizarse respecto al ángulo de dispersión $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, o también puede visualizarse respecto a la energía transferida $\frac{d\sigma}{dt}$. En ambas formas, se pueden considerar 3 casos límite para la variable s , los cuales evidencian el nivel de energía del estado inicial ya que $s = (p_1 + p_2)^2$, estos son:

$$(s - m^2) \ll m^2 , \quad (5.54)$$

$$(s - m^2) \approx m^2 , \quad (5.55)$$

$$(s - m^2) \gg m^2 . \quad (5.56)$$

Con frecuencia la variable s es llamada energía del centro de masa y cumple $s > m^2$, la energía del centro de masa es mayor que la energía en reposo del sistema. En el primer caso $(s - m^2) \ll m^2$, la energía del fotón es menor que la energía en reposo del bosón. Cuando $(s - m^2) \approx m^2$, la energía del fotón es aproximadamente la misma que la del bosón en reposo, por último, cuando $(s - m^2) \gg m^2$ la energía del fotón es mucho mayor que la energía en reposo de la partícula.

Antes de evaluar cada uno de los casos en $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, primero se elimina la dependencia de ω , usando la ecuación (5.45), así se obtiene

$$\frac{d\sigma_{lab}}{d\Omega} = \frac{e^4}{16\pi^2} \frac{\cos^2(\theta)}{(m + \omega(1 - \cos(\theta)))^2} , \quad (5.57)$$

donde se puede usar la ecuación (5.46) para sustituir

$$\omega = \frac{s - m^2}{2m} , \quad (5.58)$$

aquí, se van a sustituir los casos (5.54 - 5.56) para los cuales se grafica el diferencial de sección eficaz de la expresión (5.57).

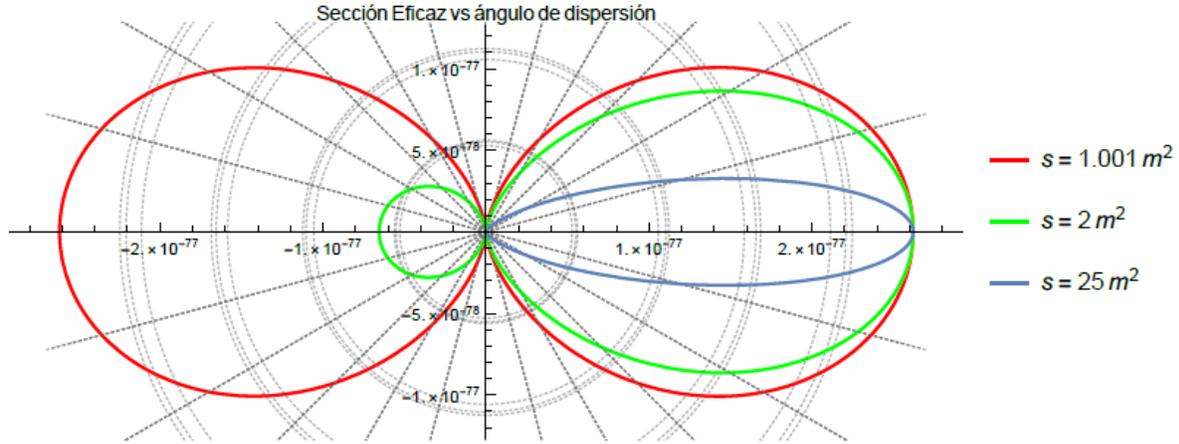


Figura 5.2: Distribución de la sección eficaz respecto al ángulo de dispersión

En la figura 5.2 se muestra cómo se distribuye la sección eficaz respecto al ángulo de dispersión. Para el caso de baja energía (curva de color rojo) la sección eficaz se puede considerar simétrica, esto revela que en el proceso de colisión, el fotón dispersado tiene casi la misma probabilidad de ir hacia el frente como ir hacia atrás respecto a la dirección inicial. A nivel medio de energía (curva verde) la distribución de la sección eficaz deja de ser simétrica, ahora es más favorable que el fotón se disperse hacia el frente con algún ángulo ya que queda muy poca sección eficaz distribuida entre los ángulos $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$. En el caso de alta energía, se nota que la sección eficaz es prácticamente nula en el cuadrante II y III, entonces el proceso sólo favorece una dispersión frontal. En general la gráfica muestra que a medida que la energía del estado inicial aumenta, la interacción entre partículas es cada vez menor y también lo es el ángulo de dispersión.

Volviendo a la expresión de la sección eficaz respecto a la transferencia e momento $\frac{d\sigma}{dt}$, podemos eliminar la dependencia de u usando la relación (5.28), de esta manera la expresión se puede simplificar obteniéndose

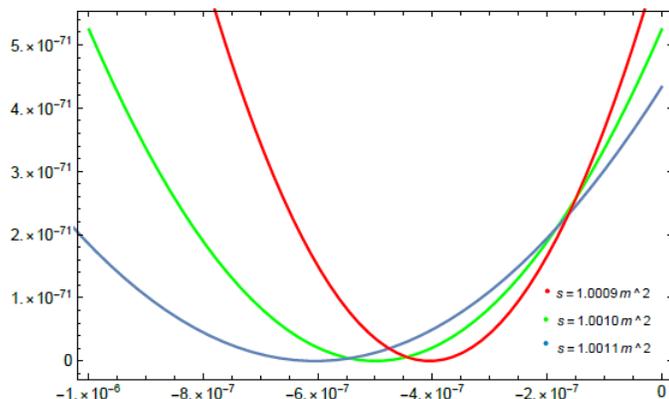
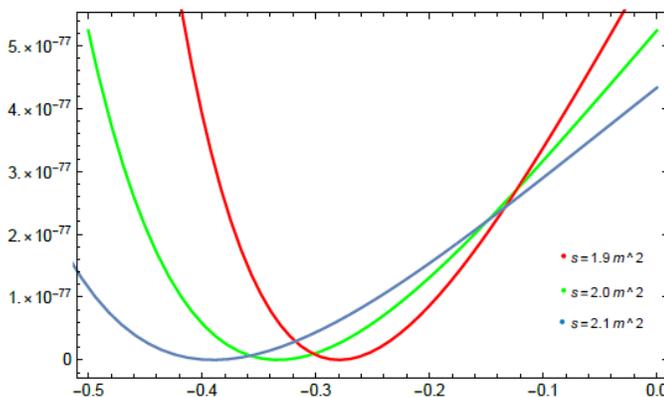
$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{e^4}{4\pi} \frac{(t(m^2 + s) + (m^2 - s)^2)^2}{(m^2 - s)^4 (s + t - m^2)^2} . \quad (5.59)$$

Usando la ecuación (5.47) y evaluando en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$, se obtienen los límites de energía en t respecto de ω

$$-\frac{4m\omega^2}{m + 2\omega} \leq t \leq 0 , \quad (5.60)$$

ahora se escribe ω en función de s usando la ecuación (5.58), así se obtiene

$$-\frac{(s - m^2)^2}{s} \leq t \leq 0 . \quad (5.61)$$

Figura 5.3: $\frac{d\sigma}{dt}$ vs t Figura 5.4: $\frac{d\sigma}{dt}$ vs t

Es notable que t es estrictamente negativo y su dominio depende de la energía del centro de masa.

Una vez establecidos los límites de t , se grafica la expresión (5.59) para los distintos niveles de energía: bajo, medio y alto; de allí se obtienen las figuras 5.3, 5.4 y 5.5 respectivamente. En ellas se puede observar que a medida que aumenta $|t|$, el grado de interacción disminuye hasta alcanzar un mínimo que está cada vez más corrido a la izquierda cuando s aumenta. Después del mínimo, la interacción aumenta en mayor o menor medida según el nivel de energía. En la figura 5.3 las curvas se pueden considerar simétricas, esto sugiere que la interacción es en igual medida para valores de $t > t_{min}$ y $t < t_{min}$, siendo t_{min} el valor para el cual la sección eficaz es mínima. Para un nivel medio de energía, la figura 5.4 muestra curvas que ya no son simétricas, en este caso se observa que después del mínimo la sección eficaz aumenta en mayor medida que el caso anterior. Por último, la figura 5.5 muestra que la sección eficaz aumenta rápidamente para $t < t_{min}$, esto sugiere a altas

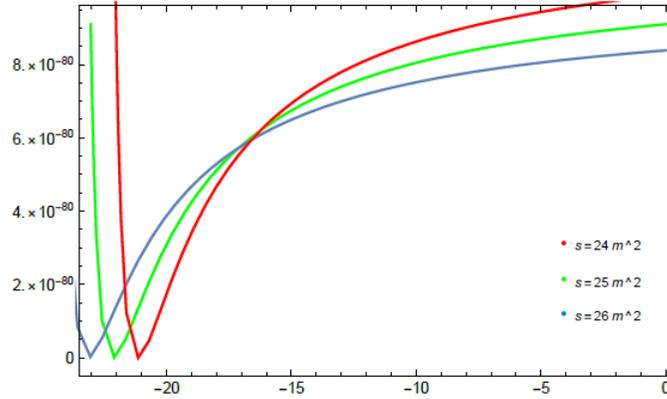


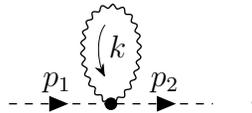
Figura 5.5: $\frac{d\sigma}{dt}$ vs t

energías, la interacción entre partículas es mayor cuando hay una transferencia de energía y momento alta.

5.6. Diagramas con loops

Hasta este punto se han estudiado diagramas de un proceso Compton en el orden más bajo, nivel árbol, donde los momenta de los propagadores internos están determinados en función de las líneas externas, esto es gracias a las funciones delta de Dirac que garantizan la conservación del momento. Sin embargo, a medida que se toman más términos de la teoría de perturbaciones, los diagramas de Feynman se hacen más complicados y pueden tener propagadores con líneas internas cuyo momento no está determinando de manera única [15]. Tal es el caso de diagramas que contienen loops, en los cuales el momento es integrado en todos los posibles valores, es decir $\int_{-\infty}^{\infty} d^4q$; en estos casos, la amplitud del diagrama por lo general lleva a una divergencia.

Consideremos un proceso en el que un bosón se propaga con momento p_1 y emite un fotón con momento k , éste hace un loop y es absorbido por el bosón en el mismo punto de emisión, donde el bosón continua su propagación con momento p_2 .



aplicando las reglas de Feynman se consigue

$$i\mathcal{M}\delta(\sum p) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2ie^2 \eta^{\mu\nu} \left(\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2} \right) (2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2) . \quad (5.62)$$

A diferencia de los diagramas evaluados anteriormente, la delta de conservación del momento no permite calcular la amplitud directamente debido a que el diagrama posee un loop. La resolución de la integral se facilita haciendo un cambio de variable, conocido como rotación de Wick; este cambio consiste en rotar en el plano complejo la componente temporal del cuadrimomento

$$\begin{aligned} k^0 &\longrightarrow ik^4 \\ \implies k^2 &\longrightarrow -(k_E)^2 = (ik^4)^2 - (\vec{k})^2 ; \end{aligned} \quad (5.63)$$

de esta forma se halla la solución al problema en el espacio de Minkowski mediante la búsqueda de la solución en un espacio Euclídeo. Además haciendo un cambio a coordenadas polares en 4 dimensiones

$$k_E^1 = \omega \sin(\alpha) \sin(\theta) \cos(\phi) \quad , \quad k_E^2 = \omega \sin(\alpha) \sin(\theta) \sin(\phi) \quad , \quad (5.64)$$

$$k_E^3 = \omega \sin(\alpha) \cos(\theta) \quad , \quad k_E^4 = \omega \cos(\alpha) \quad , \quad (5.65)$$

$$d^4 k_E = \omega^3 \sin^2(\alpha) \sin(\theta) d\omega d\alpha d\theta d\phi \quad , \quad (k_E)^2 = \omega^2 \quad , \quad (5.66)$$

la contribución del loop en (5.62) es reescrita como:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= -\frac{2ie^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k_E}{(k_E)^2} \\ &= -\frac{2ie^2}{(2\pi)^4} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty d\omega d\phi d\theta d\alpha \omega^3 \sin^2(\alpha) \sin(\theta) \frac{1}{\omega^2} \\ &= -\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{ie^2}{8\pi^2} \omega^2 . \end{aligned} \quad (5.67)$$

Como podemos notar, la amplitud del diagrama diverge cuadráticamente, este tipo de divergencia se dice que es ultravioleta ya que ocurre cuando $\omega \longrightarrow \infty$. Este resultado no tiene interpretación debido a que en la física, las cantidades observables y por lo tanto medibles son finitas; esto quiere decir que la teoría de perturbaciones presenta efectos no físicos cuando se estudia fuera del nivel árbol.

Para remover las divergencias y lograr que la teoría esté bien definida en la escala de interés, se acude a la renormalización; la cual consiste en redefinir cantidades presentes en la Lagrangiana de forma que absorban los infinitos, estas cantidades suelen ser la masa y las constantes de acople. De esta manera se logra que la teoría prediga valores finitos a cantidades que sólo se determinan experimentalmente, tales cantidades son la masa renormalizada, carga renormalizada, etc. [16] [17] [18] [19] [20]

5.6.1. Regularización

Antes de renormalizar la teoría y lograr que esté bien definida, se deben regularizar las amplitudes; esto consiste en hacer finitas las integrales en etapas intermedias del cálculo y

Para facilitar la resolución de la integral se usa la siguiente fórmula, conocida como parametrización de Feynman

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 d\xi \frac{1}{(A\xi + B(1-\xi))^2} , \quad (5.74)$$

esta fórmula se comprueba haciendo el cálculo directo. En nuestro caso los denominadores serán $A = (p-k)^2 - m^2$ y $B = k^2$, aunque en realidad es indiferente la escogencia de A y B , al sustituir la parametrización de Feynman en la expresión (5.73) se obtiene

$$i\Sigma_3(\Lambda) = \frac{(-ie)^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 d\xi d^4k \frac{(2p-k)^2}{(\xi p^2 - 2\xi(p \cdot k) + k^2 - m^2\xi)^2} . \quad (5.75)$$

El siguiente paso es completar cuadrados en el denominador y hacer un cambio de variable $q^\mu = k^\mu - \xi p^\mu$, así la expresión anterior es reescrita como

$$i\Sigma_3(\Lambda) = \frac{(-ie)^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 d\xi d^4q \frac{p^2(2-\xi)^2 + (q \cdot p)(2\xi - 4) + q^2}{(q^2 - \chi)^2} , \quad (5.76)$$

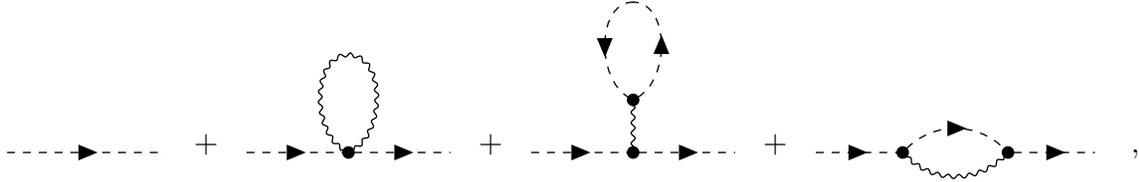
donde se abrevia $\chi = \xi(m^2 - p^2(1-\xi))$. Se puede notar que en esta expresión, el término $(q \cdot p)(2\xi - 4)/(q^2 - \chi)^2$ se desvanece cuando se integra en d^4q ya que ésta es una función impar integrada a lo largo del intervalo $(-\infty, \infty)$. Ahora, haciendo una rotación de Wick como en (5.63) y también un cambio a coordenadas polares en 4 dimensiones (5.64 - 5.66), se llega a

$$\begin{aligned} i\Sigma_3(\Lambda) &= \frac{(-ie)^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 d\xi \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\Lambda i d\omega d\phi d\theta d\alpha \omega^3 \sin^2(\alpha) \sin(\theta) \frac{p^2(2-\xi)^2 - \omega^2}{(\omega^2 + \chi)^2} \\ &= \frac{ie^2}{16\pi^2} \int_0^1 d\xi \left(\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + \chi} (2\chi + \Lambda^2 + p^2(\xi - 2)^2) + \log\left(\frac{\chi}{\Lambda^2 + \chi}\right) (2\chi + p^2(\xi - 2)^2) \right) \\ &\approx \frac{ie^2}{16\pi^2} \int_0^1 d\xi \left(2\chi + \Lambda^2 + p^2(\xi - 2)^2 + \log\left(\frac{\chi}{\Lambda^2}\right) (2\chi + p^2(\xi - 2)^2) \right) \\ &= \frac{ie^2}{16\pi^2} \left(\Lambda^2 + \log\left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right) \left(\frac{m^2}{p^2} + 2\right) + 2 \log\left(\frac{m^2}{m^2 - p^2}\right) \left(\frac{m^4}{p^2} - p^2\right) + \Delta \right) \\ &= \frac{ie^2}{16\pi^2} \Upsilon(\Lambda, p^2) , \end{aligned} \quad (5.77)$$

donde $\Upsilon(\Lambda, p^2)$ comprende todo lo que está en el paréntesis, también se ha abreviado $\Delta = -\frac{3}{2}m^2 - \frac{13}{6}p^2$. En el paso donde se ha hecho la aproximación, simplemente se desprecia χ en comparación con Λ^2 en el argumento del logaritmo y también en el cociente $\frac{\Lambda^2}{\chi + \Lambda^2}$, recordemos que el corte $\Lambda \rightarrow \infty$. Con este resultado, se concluye la regularización de los diagramas que corrigen el propagador, lo siguiente es la renormalización.

5.6.2. Renormalización

Como se ha mencionado antes, el propagador de la teoría debe ser finito para que pueda interpretarse físicamente, es por esto que las contribuciones a un loop deben ser renormalizadas. Como podemos notar, las expresiones de $i\Sigma_1(\Lambda)$ e $i\Sigma_3(\Lambda)$ (5.70 y 5.77), ambas tienen dependencia de e^2 y divergen en 2 formas diferentes: $i\Sigma_1(\Lambda)$ diverge cuadráticamente mientras que $i\Sigma_3(\Lambda)$ diverge cuadrática y logarítmicamente; además estas divergencias son proporcionales a m^2 y p^2 , esto implica que para remover ambas divergencias se deben renormalizar 2 cantidades asociadas al propagador del bosón [9]. Para empezar consideremos el propagador a nivel árbol y las correcciones a un loop



las cuales se reescriben en función del *corte*

$$\begin{aligned} ig_0(p) &= \frac{i}{p^2 - m^2} + \left(\frac{i}{p^2 - m^2} \right)^2 i\Sigma_1(\Lambda) + 0 + \left(\frac{i}{p^2 - m^2} \right)^2 i\Sigma_3(\Lambda) \\ &= \frac{i}{p^2 - m^2} \left(1 - \frac{\Sigma_1(\Lambda) + \Sigma_3(\Lambda)}{p^2 - m^2} \right), \end{aligned} \quad (5.78)$$

abreviando $\Sigma_T(\Lambda, p^2) = \Sigma_1(\Lambda) + \Sigma_3(\Lambda)$ y tomando en cuenta que $\Sigma_T(\Lambda, p^2) \propto e^2$, entonces es válido hacer la siguiente aproximación cuando $e^2 \ll 1$

$$ig_0(p) \approx \frac{i}{p^2 - m^2} \left(1 + \frac{\Sigma_T(\Lambda, p^2)}{p^2 - m^2} \right)^{-1} = \frac{i}{p^2 - m^2 + \Sigma_T(\Lambda, p^2)}, \quad (5.79)$$

esta expresión representa el propagador del bosón con correcciones a un loop. Se puede ver que una redefinición de la masa del bosón podría absorber uno de los infinitos que están en el término $\Sigma_T(\Lambda, p^2)$, sin embargo, como ya dijimos no todas las divergencias las puede absorber la masa; es por esto que el otro parámetro asociado al bosón con el cual se puede absorber infinitos es la función de onda $\phi(x)$ y $\phi^\dagger(x)$.

La renormalización de la masa y de la función de onda consiste en redefinir las cantidades desnudas (no medibles experimentalmente) en función de las cantidades renormalizadas (medibles experimentalmente), de esta forma tenemos

$$m^2 = m_R^2 Z_m = m_R^2 (1 + \delta_m), \quad (5.80)$$

$$\phi(x) = \phi_R(x) \sqrt{Z_\phi} = \phi_R(x) \sqrt{1 + \delta_\phi}, \quad \phi^\dagger(x) = \phi_R^\dagger(x) \sqrt{Z_\phi} = \phi_R^\dagger(x) \sqrt{1 + \delta_\phi}. \quad (5.81)$$

Cuando se consideran autointeracciones en la teoría, cambian propiedades de las partículas como por ejemplo la masa y la carga. Decimos entonces que estas propiedades están

renormalizadas, de esta manera podemos pensar en la renormalización como vestir las partículas con interacciones. En cada caso la renormalización tiene la siguiente estructura: $Z = 1 + \delta$. El 1 corresponde a la normalización de la teoría cuando está a nivel árbol, sin interacciones, mientras que δ corresponde a las correcciones a un loop vía renormalización. Conviene señalar que a un loop, no ocurre siempre que $\delta \neq 0$, como ocurre en la teoría $\lambda\phi^4$.

La Lagrangiana de la teoría está escrita en términos de cantidades desnudas, de modo que cuando se sustituyen las expresiones (5.80 , 5.81) en la Lagrangina de la electrodinámica cuántica escalar, ecuación (3.50), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SED} = & -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + Z_\phi(\partial_\mu\phi(x))^\dagger\partial^\mu\phi(x) - Z_mZ_\phi m^2|\phi(x)|^2 \\ & - Z_\phi ieA_\mu(x)\left(\phi^\dagger(x)\partial^\mu\phi(x) - \phi(x)\partial^\mu\phi^\dagger(x)\right) + Z_\phi e^2 A^2(x)|\phi(x)|^2 , \end{aligned} \quad (5.82)$$

la misma Lagrangiana de la teoría, esta vez en función de las cantidades renormalizadas, más unos contratérminos adicionales (por parte de δ_m y δ_ϕ) con los cuales se cancelan las divergencias de orden e^2 provenientes de los diagramas con loops. Los contratérminos son expresados en función de los parámetros renormalizados y el *corte*, lo que quiere decir que son formalmente infinitos.

Una vez redefinidas la masa y la función de onda del bosón, lo que queda es hallar la forma de los contratérminos. Recordemos que el la función de Green de 2 puntos, o propagador, es el producto ordenado de los campos

$$\langle\phi^\dagger(x)\phi(\underline{x})\rangle = i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\{ip_\mu(x^\mu - \underline{x}^\mu)\}g(p) , \quad (5.83)$$

el cual está escrito en términos de los campos desnudos, es decir, en términos de los campos de la teoría no renormalizada. Si esperamos que el propagador con correcciones a un loop sea finito, deberíamos expresarlo en términos de los campos renormalizados

$$\langle\phi_R^\dagger(x)\phi_R(\underline{x})\rangle = i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\{ip_\mu(x^\mu - \underline{x}^\mu)\}g_R(p) . \quad (5.84)$$

Ahora bien, usando las redefiniciones de los campos escalares (5.81) se deduce que la relación entre el propagador de la teoría no renormalizada $ig(p)$ y el propagador renormalizado $g_R(p)$ está dada por

$$ig_R(p) = \frac{ig(p)}{Z_\phi} , \quad (5.85)$$

donde se sustituye el propagador de la teoría con correcciones a un loop, ecuación (5.79), y de esta manera se encuentra una expresión para el propagador del campo escalar renor-

malizado

$$\begin{aligned}
ig_R(p) &= \frac{1}{1 + \delta_\phi p^2 - m^2 + \Sigma_T(\Lambda, p^2)} \frac{i}{i} = \frac{1}{1 + \delta_\phi p^2 - m_R^2 Z_m + \Sigma_T(\Lambda, p^2)} \frac{i}{i} \\
&= \frac{i}{p^2 + p^2 \delta_\phi - m_R^2 (1 + \delta_m)(1 + \delta_\phi) + \Sigma_T(\Lambda, p^2) + \delta_\phi \Sigma_T(\Lambda, p^2)} \\
&= \frac{i}{p^2 - m_R^2 + \Sigma_R(\Lambda, p^2)} \quad , \tag{5.86}
\end{aligned}$$

con $\Sigma_R(\Lambda, p^2) = p^2 \delta_\phi + \Sigma_T(\Lambda, p^2) - m_R^2 (\delta_m + \delta_\phi)$. Como veremos más adelante δ_ϕ y δ_m son proporcionales a e^2 , es por esto que los términos $\delta_\phi (\Sigma_T(\Lambda, p^2) + m_R^2 \delta_m)$ se desprecian de $\Sigma_R(\Lambda, p^2)$ ya que son proporcionales a e^4 .

Ya encontrado el propagador renormalizado, en él se identifica la masa física del bosón m_f^2 como el valor de p^2 para el cual, el propagador tiene un polo o singularidad. También se debe tomar en cuenta que el residuo del propagador, renormalizado o no, es i . En base a esto se definen los llamados esquemas de resta, con los cuales se fijan las partes finitas de los contratérminos de la Lagrangiana. Los observables de la teoría renormalizada son finitos e independientes del esquema de resta escogido, sin embargo, hay elecciones más convenientes que otras.

Hay 2 esquemas de resta que se utilizan normalmente, esquema de resta mínima y esquema de resta on-shell. En el esquema de resta mínimo los contratérminos de las cantidades renormalizadas son definidos de manera que no tengan parte finita, sólo contienen los términos singulares que cancelan las divergencias, además la masa física no coincide con la masa renormalizada $m_f^2 \neq m_R^2$ y por lo general este esquema de resta se usa con la regularización dimensional, aunque también se pueden usar otros regularizadores. Por otra parte, el esquema de resta on-shell generalmente se usa en la electrodinámica cuántica, aquí los contratérminos son fijados de forma que la masa física del bosón coincide con la masa renormalizada $m_f^2 = m_R^2$; los contratérminos también dependen del *corte*, pero tienen una parte finita. El esquema on-shell es el que usaremos para renormalizar el propagador, sin embargo, en cualquiera de los casos, el propagador va a tener un polo simple en $p^2 = m_f^2$.

Por lo comentado anteriormente, el propagador renormalizado (5.86) tendrá un polo simple cuando el denominador cumpla

$$m_f^2 = m_R^2 - \Sigma_R(\Lambda, m_f^2) \quad . \tag{5.87}$$

Además, la condición que el residuo del propagador sea i implica

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p^2} (p^2 - m_R^2 + \Sigma_R(\Lambda, p^2)) \Big|_{p^2=m_f^2} &= 1 + \frac{\partial}{\partial p^2} (\Sigma_R(\Lambda, p^2)) \Big|_{p^2=m_f^2} = 1 \\
\implies \frac{\partial}{\partial p^2} \Sigma_R(\Lambda, p^2) \Big|_{p^2=m_f^2} &= 0 \quad . \tag{5.88}
\end{aligned}$$

Estas últimas expresiones (5.87 , 5.88) definen la masa física del bosón y también los contratérminos independientemente del esquema de resta que se utilice.

Sustituyendo el esquema de resta on-shell $m_f^2 = m_R^2$, se hallan explícitamente los contratérminos. Primero se usa la ecuación (5.87) para hallar el contratérmino de la masa

$$\begin{aligned}\Sigma_R(\Lambda, m_R^2) &= m_R^2 \delta_\phi - m_R^2 (\delta_m + \delta_\phi) + \Sigma_T(\Lambda, m_R^2) = 0 \\ \implies \delta_m &= \frac{\Sigma_T(\Lambda, m_R^2)}{m_R^2},\end{aligned}\quad (5.89)$$

el cual se escribe de manera explícita sustituyendo las amplitudes regularizadas (5.70 , 5.77), también se debe sustituir $m^2 \rightarrow m_R^2$ debido a que la masa de la partícula durante el proceso a un loop es m_R^2 , de esta forma se obtiene:

$$\delta_m = \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{1}{m_R^2} \left(-\Lambda^2 + 3m_R^2 \log\left(\frac{m_R^2}{\Lambda^2}\right) - \frac{11}{3}m_R^2 \right). \quad (5.90)$$

Por otra parte, usando la condición (5.88) se encuentra el contratérmino del campo

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p^2} \Sigma_R(\Lambda, p^2) \Big|_{p^2=m_R^2} &= \delta_\phi + \frac{\partial}{\partial p^2} \Sigma_T(\Lambda, p^2) \Big|_{p^2=m_R^2} = 0 \\ \implies \delta_\phi &= -\frac{\partial}{\partial p^2} \Sigma_T(\Lambda, p^2) \Big|_{p^2=m_R^2},\end{aligned}\quad (5.91)$$

e igual que el caso anterior, usando las expresiones (5.70 , 5.77), se obtiene

$$\delta_\phi = \lim_{p^2 \rightarrow m_R^2} \frac{e^2}{16\pi^2} \left(-2 \log\left(\frac{m_R^2}{\Lambda^2}\right) - 4 \log\left(\frac{m_R^2}{m_R^2 - p^2}\right) + \frac{13}{6} \right). \quad (5.92)$$

Como ya mencionamos antes, los contratérminos dependen del corte Λ y debido a esto son divergentes. La redefinición de las cantidades desnudas, como por ejemplo m en (5.80), nos dice que la masa desnuda del bosón es infinita. Sin embargo, cuando se estudia la teoría considerando interacciones, la masa que interviene en el proceso no es la masa desnuda sino la masa física, la cual es finita e igual a $m_f^2 = m_R^2$ en el esquema de resta on-shell. Entonces, cuando se escriben los parámetros renormalizados en función de los parámetros desnudos usando las ecuaciones (5.80) y (5.81), se puede ver que los contratérminos corrigen los parámetros desnudos corriendo una cantidad infinita su valor de forma que el resultado es finito.

Una vez hallados los contratérminos se puede escribir el propagador renormalizado. Antes de hacer esto, notamos que en (5.86) el término que comprende la suma de los

diagramas a un loop y los contratérminos deja de ser divergente a medida que $p^2 \rightarrow m_R^2$

$$\begin{aligned}
\Sigma_R(\Lambda, p^2) &= p^2 \delta_\phi + \Sigma_T(\Lambda, p^2) - m_R^2 (\delta_m + \delta_\phi) \\
&= p^2 \left(\frac{e^2}{16\pi^2} \left(-2 \log \left(\frac{m_R^2}{\Lambda^2} \right) - 4 \log \left(\frac{m_R^2}{m_R^2 - p^2} \right) + \frac{13}{6} \right) \right) + \\
&+ \frac{e^2}{16\pi^2} \left(-\Lambda^2 + (m_R^2 + 2p^2) \log \left(\frac{m_R^2}{\Lambda^2} \right) + \frac{2}{p^2} (m_R^4 - (p^2)^2) \log \left(\frac{m_R^2}{m_R^2 - p^2} \right) - \frac{5m_R^2}{2} - \frac{13p^2}{6} \right) \\
&- m_R^2 \left(\frac{e^2}{16\pi^2} \left(-\frac{\Lambda^2}{m_R^2} + 3 \log \left(\frac{m_R^2}{\Lambda^2} \right) - \frac{11}{3} - 2 \log \left(\frac{m_R^2}{\Lambda^2} \right) - 4 \log \left(\frac{m_R^2}{m_R^2 - p^2} \right) + \frac{13}{6} \right) \right).
\end{aligned} \tag{5.93}$$

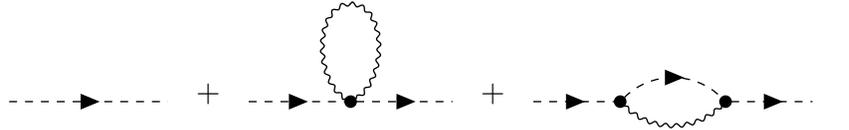
Así, el polo del propagador renormalizado está ubicado en la masa física de la partícula, es decir, en $p^2 = m_f^2 = m_R^2$ para el esquema de resta on-shell. De esta manera, podemos escribir el propagador renormalizado como

$$ig_R(p) = \frac{i}{p^2 - m_R^2} + \mathcal{O}(\Lambda, p^2) . \tag{5.94}$$

donde el término $\mathcal{O}(\Lambda, p^2)$ se hace regular cuando $p^2 = m_R^2$.

En resumen, para hacer la renormalización del propagador del bosón a un loop, se debe:

1. Considerar el propagador a nivel árbol y las correcciones a un loop que tienen contribución no nula, en nuestra teoría son:



las cuales se regularizaron haciendo un cut-off, aunque también se pueden utilizar otros métodos como la regularización dimensional. La suma de estos términos representa el propagador con correcciones a un loop en la teoría no renormalizada, expresión (5.79)

2. Se redefine la masa y los campos según las ecuaciones (5.80) y (5.81), así se establece la relación entre cantidades desnudas y cantidades renormalizadas. Usando (5.81), se deduce que la relación entre el propagador de la teoría renormalizada y el propagador de la teoría desnuda es $ig_R(p) = \frac{ig(p)}{Z_\phi}$, donde se sustituye (5.79) y así se determina el propagador renormalizado a un loop (5.86). Luego se identifica la masa física de la partícula m_f^2 como el valor de p^2 para el cual el propagador renormalizado tiene un polo. En base a esto, se definen los esquemas de resta que permiten hallar los contratérminos.

3. Se sustituye el esquema de resta que se va a utilizar, estos pueden ser: esquema de resta mínimo, esquema de resta on-shell, entre otros. Tomando en cuenta que el residuo del propagador es i , se hallan las condiciones que definen los contratérminos de la masa y de la función de onda, éstas son: $m_f^2 = m_R^2 - \Sigma_R(\Lambda, m_f^2)$ y $\frac{\partial}{\partial p^2} \Sigma_R(\Lambda, p^2) \Big|_{p^2=m_f^2} = 0$. Estas condiciones son independientes del esquema de resta que se utilice. El esquema de resta on-shell establece que $m_f^2 = m_R^2$, así los contratérminos vienen dados por las expresiones (5.90 , 5.92)
4. Se verifica que las divergencias del propagador desaparecen a medida que $p^2 \rightarrow m_R^2$ y de esta forma el propagador renormalizado puede ser escrito como $ig_R(p) = \frac{i}{p^2 - m_R^2} + \mathcal{O}(\Lambda, p^2)$.

La renormalización del propagador nos permitió darnos cuenta que en las teorías de campos que no presentan interacciones (loops), las partículas que en ella se describen tienen propiedades como masa, función de onda, carga, entre otras, definidas a ese nivel de interacción. En cambio, cuando se consideran loops, las partículas descritas cambian sus propiedades de acuerdo al tipo interacción y al nivel de la misma. Es por esto que haciendo perturbaciones fuera del nivel árbol, aparecen divergencias producto de haber considerado la teoría en función de parámetros que no son reales. Con la renormalización, se corrigen los parámetros sólo al nivel de interacción en que se renormaliza la teoría; de esta manera, al considerar la teoría en un siguiente nivel de interacción, es de esperar conseguir términos divergentes que se pueden corregir renormalizando nuevamente la teoría.

Capítulo 6

Conclusiones

- Se demostró que la electrodinámica escalar como teoría de campos clásica, posee una densidad Lagrangiana a partir de la cual, tal como vimos en el capítulo 3, se obtienen las ecuaciones de movimiento. También posee una simetría de fase local en el campo escalar complejo que da lugar a una corriente conservada usando el teorema de Noether de la física clásica que se revisó en el capítulo 1. Esta corriente tiene la misma estructura que la corriente del campo escalar complejo, sin embargo, se ve afectada por la influencia del campo electromagnético a través de la derivada covariante.
 - La integral de camino de Feynman es una herramienta de utilidad para estudiar los aspectos cuánticos de una teoría a partir de una cantidad clásica como lo es la acción. El funcional generador de la teoría $Z[J_i]$, como vimos en el capítulo 2, se construye haciendo un acople de los campos a fuentes, permitiendo estudiar la teoría a través de perturbaciones y así obtener cantidades esenciales como lo son las funciones de Green.
 - La teoría de perturbaciones se emplea para estudiar a distintos órdenes teorías con interacciones. En el capítulo 4 vimos que en el orden más bajo se encuentran los propagadores de la teoría libre y en el siguiente orden, los vértices de interacción; así se obtienen las reglas de Feynman, las cuales agrupan la información de como ocurren los procesos que tienen lugar en la teoría.
 - Los procesos de colisión proporcionan información sobre la interacción de partículas en teorías cuánticas de campos a través del cálculo de la sección eficaz. La misma proporciona una medida de la probabilidad que ocurra la interacción y cuán fuerte es. En el capítulo 5, se encontró que a medida que la energía del estado inicial aumenta, entonces habrá menos probabilidad de interacción.
-

- El estudio de diagramas con loops, revela que la teoría de perturbaciones presenta efectos no físicos cuando se consideran diagramas con interacciones. Esto se corrige con el proceso de renormalización de la teoría. Así se da una nueva interpretación a la masa y otras cantidades observables que cambian producto que la teoría incluye interacciones.
-

Bibliografía

- [1] Paul Adrien Maurice Dirac. The quantum theory of the emission and absorption of radiation. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 114(767):243–265, 1927.
 - [2] Matthew PA Fisher and G Grinstein. Quantum critical phenomena in charged superconductors. *Physical review letters*, 60(3):208, 1988.
 - [3] CI Ribeiro-Silva, EMF Curado, and MA Rego-Monteiro. Deformed scalar quantum electrodynamics as a phenomenological model for composite scalar particles. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 41(14):145404, 2008.
 - [4] Mario Cosenza. Mecánica clásica. *Universidad de los Andes (ULA). Facultad de Ciencias. Departamento de Física. Mérida-Venezuela (Publicación Electrónica)*, pages 43–49, 2015.
 - [5] Walter Greiner and Joachim Reinhardt. *Field quantization*. Springer Science & Business Media, 2013.
 - [6] Paul AM Dirac. The lagrangian in quantum mechanics. In *Feynman's Thesis—A New Approach To Quantum Theory*, pages 111–119. World Scientific, 2005.
 - [7] Richard Phillips Feynman. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. In *Feynman's Thesis—A New Approach To Quantum Theory*, pages 71–109. World Scientific, 2005.
 - [8] Ulrich Mosel. *Path integrals in field theory: An introduction*. Springer Science & Business Media, 2012.
 - [9] Matthew D Schwartz. *Quantum field theory and the standard model*. Cambridge University Press, 2014.
 - [10] David McMahon. *Quantum field theory demystified: A self-teaching guide*. 2009.
-

- [11] Andrés Aceña. La transición a la formulación covariante del electromagnetismo. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, 39(1), 2017.
 - [12] Charles G Torre. Introduction to classical field theory. 2016.
 - [13] Anthony Zee. *Quantum field theory in a nutshell*, volume 7. Princeton university press, 2010.
 - [14] David Griffiths. *Introduction to elementary particles*. John Wiley & Sons, 2008.
 - [15] Abdus Salam. Renormalization of scalar electrodynamics using β -formalism. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 211(1105):276–284, 1952.
 - [16] Abdus Salam. Renormalized s-matrix for scalar electrodynamics. *Physical Review*, 86(5):731, 1952.
 - [17] PT Matthews and Abdus Salam. Renormalization. *Physical Review*, 94(1):185, 1954.
 - [18] PK Kuo and Donald R Yennie. Renormalization theory. *Annals of Physical*, 51(3):496–560, 1969.
 - [19] R Keith Ellis, Zoltan Kunszt, Kirill Melnikov, and Giulia Zanderighi. One-loop calculations in quantum field theory: from feynman diagrams to unitary cuts. *Physics reports*, 518(4-5):141–250, 2012.
 - [20] MP Fry. Electrodynamics of spin-0 mesons at small distances. *Physical Review D*, 7(2):423, 1973.
 - [21] Pei-Ming Ho and Xue-Yan Lin. A uv completion of scalar electrodynamics. *The European Physical Journal C*, 71(2):1562, 2011.
-