UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO EN MATEMÁTICA

TEOREMAS TIPO WEYL Y SUS VARIANTES PARA RESTRICCIONES DE OPERADORES LINEALES ACOTADOS

Autor: MSc. Dirwin Alfonzo Muñoz Pinto.
Tutor: Dr. Carlos Carpintero.

Tesis Doctoral presentada ante la ilustre Universidad Central de Venezuela para optar al título de Doctor en Ciencias, Mención Matemática.

Caracas, Venezuela

Octubre 2018

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
COMISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

VEREDICTO

Quienes suscriben, miembros del jurado designado por el Consejo de la Facultad de Ciencias y el Consejo de Estudios de Postgrado de la Universidad Central de Venezuela, para examinar la **TESIS DOCTORAL** presentada por el estudiante **MSC. MUÑOZ PINTO DIRWIN ALFONZO**, **CI.V-12.929.555**, bajo el título: ***"Teoremas tipo Weyl y sus variantes para restricciones de Operadores Lineales Acotados"***, a fin de cumplir con el requisito legal para optar al grado académico de **DOCTOR EN CIENCIAS, MENCIÓN MATEMÁTICA**, dejan constancia de lo siguiente:

1.- Leída como fue dicha Tesis por cada uno de los miembros del jurado, se fijó el día **Lunes, 01 de Octubre de 2018**, a las **9:00am**, para que el autor lo defendiera en forma pública, lo que éste hizo en la **Sala de postgrado en Matemática de la Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela**, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual respondió satisfactoriamente a las preguntas que le fueron formuladas por el jurado, todo ello conforme con lo dispuesto en el Reglamento de Estudios de Postgrado.

2.- El jurado decidió **APROBARLO**, sin hacerse solidario con la ideas expuestas por el autor, porque se ajusta a lo dispuesto y exigido en el Reglamento de Estudios de Postgrado.

Para dar este Veredicto, el jurado estimó que el trabajo examinado reúne los requisitos de presentación, originalidad, revisión bibliográfica e impacto necesarios para constituir una Tesis Doctoral ya que se estudia el comportamiento de los Teoremas tipo Weyl y algunas de sus variantes, para un operador lineal acotado sobre el rango de potencias cerradas del mismo. Se demuestra que los teoremas tipo Weyl, y sus variantes se transmiten de un operador a sus restricciones y viceversa. Como herramienta fundamental se emplea la Propiedad de la Extensi□on Univaluada (SVEP, por sus siglas del inglés). Adicionalmente se proporcionan algunos ejemplos ilustrativos de los resultados obtenidos.

En fe de lo cual se levanta la presente ACTA, a los **01 días del mes de Octubre del año 2018**, conforme a lo dispuesto en el Reglamento de Estudios de Postgrado. **Actuó como Coordinador del Jurado el DR. CARLOS CARPINTERO (UDO). El Dr. Pedro Peña participó como jurado vía Skype.**

Ramón Bruzual

DR. RAMÓN BRUZUAL (UCV)
C.I.V-**4.349.516**
Jurado designado por Consejo Facultad

Angel Padilla

DR. ÁNGEL PADILLA (UCV)
C.I.V-**15.912.745**
Jurado designado por Consejo de Facultad

DR. LUIS MÁRMOL (USB)
C.I.V-**6.978.864**
Jurado designado por Consejo de Estudios de Postgrado

Pedro Peña

DR. PEDRO PEÑA (ULA-TRUJILLO)
C.I.V-**12.738.066**
Jurado designado por Consejo de Estudios de Postgrado

Carlos R. Carpintero F

DR. CARLOS CARPINTERO (UDO-ORIENTE)
CI.V-8.443.180
(Tutor) (Coordinador)

Resumen

En este trabajo se estudia el comportamiento de los Teoremas tipo Weyl, y algunas de sus variantes, para un operador lineal acotado sobre el rango de potencias cerradas del mismo. Se prueba que los Teoremas tipo Weyl, y sus variantes, se transmiten de un operador a sus restricciones y viceversa. Estos Teoremas, así como sus variantes, se expresan en términos de ciertos espectros derivados de los operadores estudiados en las teorías de Fredholm, B-Fredholm y de algunas subclases importantes de éstos. La herramienta fundamental empleada en nuestro estudio es la Propiedad de la Extensión Univaluada (SVEP, por sus siglas del inglés), la cual permite relacionar dichos espectros a través de elementos propios de la teoría espectral local. Inspirados en el contexto introducido por Berkani [12]; en principio, mostramos que para un operador $T \in L(X)$, $L(X)$ el álgebra de los operadores lineales acotados que actúan sobre un espacio de Banach complejo infinito dimensional X, los Teoremas de Weyl y a-Weyl para T se transmiten a su restricción $T_n = T \mid_{R(T^n)}$ y viceversa, donde $R(T^n)$ es alguna potencia cerrada del rango de T. Luego, extendemos éstos resultados al caso de los Teoremas Generalizados de Weyl y de a-Weyl, y finalmente también logramos mostrar que variantes de éstos Teoremas introducidos recientemente obedecen al mismo comportamiento sobre restricciones de potencias cerradas del rango. Algunos ejemplos ilustrativos de los resultados son proporcionados.

Índice general

Introducción

En 1909 Hermann Weyl [41], estudió los espectros de las perturbaciones compactas de un operador hermitiano T, y encontró que un punto espectral está en el espectro de cualquier perturbación compacta $T + K$ del operador T, precisamente cuando dicho punto no es un punto aislado de multiplicidad finita del espectro de T. Este resultado clásico, posteriormente investigado en forma general y formulado de manera abstracta por Lewis Coburn en 1966 [24], es conocido actualmente en la literatura como el Teorema de Weyl. Siguiendo a Coburn, Vladimir Rakočević introduce en el año 1989 [36], una versión más fuerte que el Teorema de Weyl y la denomina Teorema de a-Weyl. En esta misma dirección, Mohamed Berkani y Jerry Koliha a mediados del año 2003 [17] introducen, empleando espectros derivados de la recién aparecida Teoría de los operadores B-Fredholm formulada por Berkani [15], [14], versiones generalizadas de estas propiedades conocidas en la literatura como los Teoremas generalizados de Weyl y a-Weyl, respectivamente. Los trabajos de estos pioneros constituyeron fuente de inspiración para que hoy en día muchos matemáticos se hayan dedicado a introducir, caracterizar y buscar aplicaciones para una vasta gama de propiedades asociadas con un operador lineal acotado T, que actúa de un espacio de Banach complejo en sí mismo, formuladas bien sea en términos de los espectros derivados de la clásica Teoría de operadores de Fredholm o bien en términos de los espectros derivados de la Teoría de operadores B-Fredholm. Es así como han surgido nuevas propiedades de corte similar a los Teoremas de Weyl y de Weyl generalizados, tales como: propiedades (ab), (aw) [18], propiedad (b), Teorema generalizado de Browder [18] y [19], Teorema de Browder [29], propiedad (w) [37], Teorema de a-Browder [38], propiedades (v), (h) [38] y [39] y las propiedades (z) y (az) [40]. Estas propiedades, así como otras formuladas en el mismo estilo, son conocidas usualmente en la literatura actual como Propiedades tipo Teoremas de Weyl o Teoremas tipo Weyl. Por otra parte, en general, casi nada puede decirse de la relación entre los Teoremas tipo Weyl (resp., sus variantes) para un operador dado y los Teoremas tipo Weyl (resp., sus variantes) correspondientes a sus restricciones. Uno de los primeros trabajos que versan sobre la relación entre la Teoría de Fredholm de un operador y la de sus restricciones, es debido a Mohamed Berkani [12]. Si bien estas investigaciones condujeron a nuevos e interesantes enfoques, cabe señalar que los resultados obtenidos por Berkani [12], se centran sólo en el estudio de propiedades de Fredholm y además descansan sobre múltiples y complicadas condiciones algebro-topológicas. En esta misma temática, nos hemos dedicado a investigar respecto a caracterizaciones para los Teoremas de Weyl y de a-Weyl, y su generalizaciones, a través de restricciones de un operador lineal acotado sobre potencias cerradas de su rango. Así como también, extender este estudio a otro conjunto de modificaciones o variantes de éstos Teoremas introducidas recientemente. Sobre éstos tópicos versan justamente los objetivos principales planteados en este trabajo, los cuales fueron abordados básicamente relacionando nociones de las teorías de operadores de Fredholm y B-Fredholm con nociones propias de la teoría espectral local, a través de la propiedad de extensión univaluada.

El trabajo consta de cuatro capítulos. En el primer capítulo se proporciona una introducción a las ideas y nociones básicas a emplear a lo largo de todo el trabajo. El segundo capítulo trata de la descripción o caracterización de los Teoremas de Weyl y a-Weyl para un operador a través de restricciones de éste sobre potencias cerradas de su rango. En el tercer capítulo se extienden las caracterizaciones obtenidas en el segundo capítulo a los Teoremas generalizados de Weyl y a-Weyl de un operador, a través de sus restricciones sobre potencias cerradas de su rango. En el cuarto capítulo se amplía el número de propiedades consideradas y se estudian modificaciones o variantes de los Teoremas tipo Weyl, además se aborda el estudio de éstas mediante técnicas similares a las empleadas en los capítulos anteriores y también se logran caracterizar estas variantes de los Teoremas tipo Weyl a través de las restricciones de un operador sobre potencias cerradas de su rango. Algunos ejemplos ilustrativos de los resultados obtenidos son proporcionados.

En este trabajo se recogen y detallan los resultados de las investigaciones que el autor ha venido desarrollando, junto a su tutor, durante estos últimos cuatro años en las áreas de teoría de operadores y teoría espectral. Entre los aportes fundamentales de este trabajo, cabe señalar que se lograron:

- mostrar que para un operador $T \in L(X)$, el Teorema de Weyl se transmite a su restricción $T_n = T \mid_{R(T^n)}$ y viceversa, donde $R(T^n)$ es alguna potencia cerrada del rango de T;
- mostrar que para un operador $T \in L(X)$, el Teorema de a-Weyl se transmite a su restricción $T_n = T \mid_{R(T^n)}$ y viceversa, donde $R(T^n)$ es alguna potencia cerrada del rango de T;
- mostrar que para un operador $T \in L(X)$, el Teorema generalizado de Weyl se transmite a su restricción $T_n = T \mid_{R(T^n)}$ y viceversa, donde $R(T^n)$ es alguna potencia cerrada del rango de T;
- mostrar que para un operador $T \in L(X)$, el Teorema generalizado de a-Weyl se transmite a su restricción $T_n = T \mid_{R(T^n)}$ y viceversa, donde $R(T^n)$ es alguna potencia cerrada del rango de T;
- extender los resultados obtenidos para los Teoremas de Weyl y los Teoremas de a-Weyl, para variantes de éstos teoremas introducidas recientemente, y mostrar que obedecen al mismo comportamiento sobre restricciones;

El impacto de los resultados mencionados anteriormente se traduce en varios artículos de investigación, con inéditos resultados, los cuales han sido publicados en prestigiosas revistas internacionales [21], [22] y [23]. Por otro lado, muchos de los resultados obtenidos y de las técnicas empleadas ya han comenzado a servir de base, o marco referencial, para nuevas investigaciones que en ésta área se están desarrollando actualmente, como puede evidenciarse en [22] y [23].

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo describiremos en forma general los elementos básicos estrictamente necesarios para el desarrollo de este trabajo, presentamos además algunos hechos relevantes relativos a las distintas relaciones existentes entre estos elementos que serán empleados a lo largo de los capítulos venideros. En su debida oportunidad, se dan ciertas citas respecto a las referencias bibliográficas en donde se puede ahondar en mayores detalles sobre las nociones y resultados aqui tratados.

1.1. Preliminares sobre operadores lineales

En esta sección se introducen y estudian ciertos parámetros asociados a un operador lineal acotado, así como también algunas relaciones importantes entre éstos y los correspondientes, a las restricciones del operador sobre algunos subespacios específicos de su dominio.

Denotaremos por $L(X)$ el álgebra de los operadores lineales y acotados que actúan sobre un espacio de Banach. Dado $T \in L(X)$, es conocido que

$$\begin{aligned} N(T) &= \{x \in X : Tx = 0\}, \\ R(T) &= \{Tx : x \in X\}, \end{aligned}$$

son subespacios T-invariantes de X. Así como también lo son

$$\begin{aligned} N(T^n) &= \{x \in X : T^n x = 0\}, \\ R(T^n) &= \{T^n x : x \in X\}; \end{aligned}$$

cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, T_n denotará la restricción de $T \in L(X)$ sobre el rango $R(T^n)$ de la n-ésima potencia de T.

Lema 1.1.1. *Dado un operador $T \in L(X)$, entonces:*

1. $N(T_m) \subseteq N(T_n)$ *siempre que* $m \geq n$;
2. $R(T_n^m) = R(T^{m+n}) = R(T_m^n)$ *cualesquiera sean* m *y* n;
3. $(T^n)^{-1}(R(T^{n+m})) = R(T^m) + N(T^n)$ *cualesquiera sean* n *y* m;
4. $T^{-1}(N(T^m) \cap R(T^{n+1})) = N(T) + N(T^{m+1}) \cap R(T^n)$ *para todo* n, m;
5. $T^m(N(T^{m+n})) = N(T^n) \cap R(T^m)$ *cualesquiera sean* n *y* m;
6. $\frac{R(T^n)}{R(T^{n+1})} \simeq \frac{X}{R(T)+N(T^n)}$ *para todo* n;
7. $\frac{N(T)\cap R(T^n)}{N(T)\cap R(T^{n+1})} \simeq \frac{N(T^{n+1})+R(T)}{N(T^n)+R(T)}$ *para todo* n.

Demostración: (1) y (2) son consecuencias inmediatas de la definición de T_n.

(3) Si $x \in R(T^m) + N(T^n)$, existen $u \in R(T^m)$, $v \in N(T^n)$ y $x = u + v$. Luego, $T^n x = T^n u + T^n v = T^n u \in T^n(T^m(X)) = T^{n+m}(X) = R(T^{n+m})$. Por lo cual $x \in (T^n)^{-1}(R(T^{n+m}))$. Recíprocamente, $x \in (T^n)^{-1}(R(T^{n+m}))$ implica que $T^n x = T^{n+m} u$, para algún $u \in X$. Así $T^n(x - T^m u) = 0$, por lo cual $x - T^m u \in N(T^n)$ y entonces $x = T^m u + (x - T^m u) \in R(T^m) + N(T^n)$.

(4) Si $x \in T^{-1}(N(T^m) \cap R(T^{n+1}))$, $Tx \in N(T^m) \cap R(T^{n+1})$, resultando que $Tx \in N(T^m)$ y $Tx \in R(T^{n+1})$. Por lo cual $Tx = T^{n+1}u$, para algún $u \in X$, y entonces $T^{m+1}(T^n u) = T^m(T^{n+1}u) = T^m(Tx) = 0$. Así, $T^n u \in N(T^{m+1})$ y además $T(x - T^n u) = 0$, lo que implica que

$$x = x - T^n u + T^n u \in N(T) + N(T^{m+1}) \cap R(T^n).$$

Recíprocamente, siendo $x \in N(T) + N(T^{m+1}) \cap R(T^n)$, existen $u \in N(T)$ y $v \in N(T^{m+1}) \cap R(T^n)$ tales que $x = u + v$. En consecuencia tendremos que $Tx = Tv \in N(T^m) \cap R(T^{n+1})$, pues $T^{m+1}v = T^m(Tv) = 0$, de donde resulta que $x \in T^{-1}(N(T^m) \cap R(T^{n+1}))$.

(5) $x \in N(T^{m+n})$, implica que $T^n(T^m x) = T^{m+n}x = 0$. Así $T^m x \in N(T^n) \cap R(T^m)$. Recíprocamente, si $y \in N(T^n) \cap R(T^m)$, existe $x \in X$ tal que $y = T^m x$ y además $T^{m+n}x = T^n(T^m x) = T^n y = 0$. Es decir, $y = T^m x$ para algún $x \in N(T^{m+n})$, y se tiene que $y \in T^m(N(T^{m+n}))$.

(6) $T^n x + R(T^{n+1}) = T^n y + R(T^{n+1})$, implica

$$T^n(x - y) = T^n x - T^n y \in R(T^{n+1}).$$

y entonces $x - y \in (T^n)^{-1}(R(T^{n+1})) = R(T) + N(T^n)$, así

$$x + (R(T) + N(T^n)) = y + (R(T) + N(T^n)).$$

Por otra parte, si $x + (R(T) + N(T^n)) = y + (R(T) + N(T^n))$, tendremos que $x - y \in R(T) + N(T^n) = (T^n)^{-1}(R(T^{n+1}))$. En consecuencia,

$$T^n x - T^n y = T^n(x - y) \in R(T^{n+1}),$$

de donde sigue la igualdad $T^n x + R(T^{n+1}) = T^n y + R(T^{n+1})$. Concluyéndose de esta forma, que la aplicación $T^n x + R(T^{n+1}) \mapsto x + (R(T) + N(T^n))$ es un isomorfismo, cualquiera sea n.

(7) Según lo demostrado en (3), sigue que

$$\frac{(T^{n+1})^{-1}(R(T^{n+2}))}{(T^n)^{-1}(R(T^{n+1}))} = \frac{N(T^{n+1}) + R(T)}{N(T^n) + R(T)}.$$

Por otra parte, si $x \in (T^{n+1})^{-1}(R(T^{n+2}))$ tendremos que $T^{n+1}x = T^{n+2}u$, para algún $u \in X$. Esto implica que $T(T^n x - T^{n+1}u) = 0$ y como $T^{n+1}u \in R(T^{n+1}) \subseteq R(T^n)$, se tiene que $T^n x - T^{n+1}u \in N(T) \cap R(T^n)$. Así para cada $x \in (T^{n+1})^{-1}(R(T^{n+2}))$, existe $u \in X$ tal que $T^n x - T^{n+1}u \in N(T) \cap R(T^n)$. Ahora si $y \in (T^{n+1})^{-1}(R(T^{n+2}))$ y ocurre que $x - y \in (T^n)^{-1}(R(T^{n+1}))$, entonces

$$T^n x - T^n y = T^n(x-y) \in R(T^{n+1}),$$

y existen vectores u, v en X, tales que

$$T^n x - T^{n+1}u - (T^n y - T^{n+1}v) = T^n(x-y) + T^{n+1}(v-u) \in R(T^{n+1}).$$

Como además,

$$T(T^n x - T^{n+1}u - (T^n y - T^{n+1}v)) = T^{n+1}x - T^{n+2}u - T^{n+1}y + T^{n+2}v = 0.$$

Entonces, $(T^n x - T^{n+1}u) - (T^n y - T^{n+1}v) \in N(T) \cap R(T^{n+1})$. Recíprocamente, en caso que $(T^n x - T^{n+1}u) - (T^n y - T^{n+1}v) \in N(T) \cap R(T^{n+1})$. Resulta que

$$T^n x - T^n y = (T^n x - T^{n+1}u) - (T^n y - T^{n+1}v) + T^{n+1}(u-v) \in R(T^{n+1}),$$

así $x - y \in (T^n)^{-1}(R(T^{n+1}))$. De acuerdo con lo anterior sigue que

$$\varphi : \frac{N(T^{n+1}) + R(T)}{N(T^n) + R(T)} = \frac{(T^{n+1})^{-1}(R(T^{n+2}))}{(T^n)^{-1}(R(T^{n+1}))} \to \frac{N(T) \cap R(T^n)}{N(T) \cap R(T^{n+1})},$$
$$\varphi(x + (T^n)^{-1}(R(T^{n+1}))) = T^n x - T^{n+1}u + N(T) \cap R(T^{n+1}),$$

cualquiera sea $u \in X$ tal que $T^{n+1}x = T^{n+2}u$, es un isomorfismo.

$\square$

El parámetro que a continuación describiremos permite caracterizar cuando el rango de un operador es cerrado, condición esta que se le exigirá a muchas clases importantes de operadores con los que trataremos.

Definición 1.1.1. *Sean X un espacio de Banach y $T \in L(X)$ un operador no nulo. El módulo minimal reducido de T, denotado $\gamma(T)$, viene dado por la expresión*

$$\gamma(T) = inf_{\ x \notin N(T)} \frac{\|Tx\|}{dist\ (x, N(T))}.$$

En la siguiente proposición exhibimos la relación existente entre el módulo minimal y el rango de un operador.

Teorema 1.1.1. *Sean X un espacio de Banach y $T \in L(X)$ un operador no nulo. Entonces,*

$$R(T) \text{ es cerrado } \Leftrightarrow \gamma(T) > 0.$$

Demostración: Veáse Proposición 36.1. [30]. $\square$

Es de interés observar que $\gamma(T) = \gamma(T^*)$, donde $T^* \in L(X^*)$ es el dual de T (véase Teorema 3.[34]. Según esto, y del teorema anterior

$$R(T) \text{ es cerrado } \Leftrightarrow R^*(T^*) \text{ es cerrado.}$$

Definición 1.1.2. *Sea X un espacio de Banach. Un subespacio M de X se dice paracompleto o paracerrado, si M es el rango de un operador acotado.*

Observemos que para $\lambda \neq 0$ y $T \in L(X)$,

$$(\lambda I - T)(N(T)) = N(T).$$

Además, por el inciso (5) del Lema 1.1.1,

$$T^m(N(T^{m+n})) = N(T^n) \cap R(T^m).$$

Así, $N(T)$ y $N(T^n) \cap R(T^m)$ son subespacios paracompletos

La siguiente proposición, conocida en la literatura matemática como el Lema de Neubauer, proporciona condiciones suficientes bajo las cuales subespacios paracompletos son cerrados.

Lema 1.1.2. *Sean X un espacio de Banach y M, N subespacios de X. Si M y N son subespacios paracompletos tales que $N \cap M$ y $N + M$ son cerrados, entonces N y M son cerrados.*

Demostración: Veáse Proposición 2.1.1. [32]. ▭

El siguiente resultado trata sobre el rango de las potencias de $\lambda I - T$, con $\lambda \in \mathbb{C}$ y $T \in L(X)$, el cual juega un papel importante a lo largo de este capítulo y los venideros.

Lema 1.1.3. *Si $R(T^n)$ es cerrado en X y $R((\lambda I - T_n)^m)$ es cerrado en $R(T^n)$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $R((\lambda I - T)^k)$ es cerrado en X.*

Demostración:

Observe que para $\lambda = 0$, $R((0I - T_n)^m) = R((T_n)^m) = R(T^{m+n})$. Entonces $R(T^{m+n})$ es un subespacio cerrado de $R(T^n)$. Como $R(T^n)$ es cerrado, se tiene que $R((0I - T)^{m+n}) = R(T^{m+n})$ es cerrado. En el otro caso, si $\lambda \neq 0$ y $R((\lambda I - T_n)^m)$ es un subespacio cerrado de $R(T^n)$, ya que $R(T^n)$ es cerrado en X, entonces tenemos que $R((\lambda I - T_n)^m)$ es cerrado en X. Pero, por el inciso (ii) del Lema 1.1.3, $R((\lambda I - T_n)^m) = R((\lambda I - T)^m) \cap R(T^n)$. Asi $R((\lambda I - T)^m) \cap R(T^n)$ es cerrado en X. También, si $\lambda \neq 0$ los polinomios $(\lambda - z)^m$ y z^n no tienen divisores comunes, luego, existen dos polinomios u y v tal que $1 = (\lambda - z)^m u(z) + z^n v(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$. De aqui, $I = (\lambda I - T)^m u(T) + T^n v(T)$ y asi $R((\lambda I - T)^m) + R(T^n) = X$. Ya que tanto $R((\lambda I - T)^m)$ como $R(T^n)$ son subespacios paracerrados, y tanto $R((\lambda I - T)^m) \cap R(T^n)$ como $R((\lambda I - T)^m) + R(T^n)$ son cerrados, usando el Lema 1.1.2, tenemos finalmente que $R((\lambda I - T)^m)$ es cerrado.

▭

A partir de las sucesiones de subespacios formadas, respectivamente, con los núcleos e imágenes de las potencias de un operador lineal, se derivan también dos parámetros importantes asociados con el operador los cuales describiremos seguidamente.

Definición 1.1.3. *Sean X un espacio vectorial y $T : X \to X$ un operador lineal. El ascent de T, denotado $p(T)$, se define según*

$$p(T) = \begin{cases} min\ \{n : N(T^n) = N(T^{n+1})\} & , si\ \{n : N(T^n) = N(T^{n+1})\} \neq \emptyset \\ \\ \infty & , si\ \{n : N(T^n) = N(T^{n+1})\} = \emptyset \end{cases}$$

En forma similar, el descent de T, denotado $q(T)$, como

$$q(T) = \begin{cases} min\ \{n : R(T^n) = R(T^{n+1})\} & , si\ \{n : R(T^n) = R(T^{n+1})\} \neq \emptyset \\ \\ \infty & , si\ \{n : R(T^n) = R(T^{n+1})\} = \emptyset \end{cases}$$

Observe que $p(T) = 0$ (resp. $q(T) = 0$) si y sólo si T es inyectivo (resp. sobreyectivo).

Si $T \in L(X)$ y M es un subespacio T-invariante (esto es, $T(M) \subseteq M$), tendremos que $N(T \mid M) = N(T) \cap M$. Más aún, $N((T \mid M)^n) = N(T^n) \cap M$ para todo n, pues $T(M) \subseteq M$. Así $p(T) < \infty$ implicará $p(T \mid M) < \infty$; ya que si $p = p(T) < \infty$, entonces $N(T^n) = N(T^p)$ cualquiera sea $n \geq p$. Luego $N((T \mid M)^n) = N(T^n) \cap M = N(T^p) \cap M = N((T \mid M)^p)$, en consecuencia $p(T \mid M) \leq p(T) < \infty$. Pero, $p(T \mid M) < \infty$ no implicará, en general, que $p(T) < \infty$. No obstante, para el caso que $M = R(T^n)$, $n \in \mathbb{N}$, se tienen los siguientes resultados.

Lema 1.1.4. *Para $T \in L(X)$, se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Si $p(T)$ y $q(T)$ son ambos finitos, entonces $p(T) = q(T)$;*

2. *Si $p(T)$ y $q(T)$ son ambos finitos, entonces $\alpha(T) = \beta(T)$;*

3. *Si $\alpha(T) = \beta(T) < \infty$ y $p(T)$ o $q(T)$ es finito, entonces $p(T) = q(T)$.*

Demostración: Para la prueba de (1), ver [30], Prop.38.3. Para (2) y (3), ver [30], Prop.38.6

$\square$

Lema 1.1.5. *Para un operador $T \in L(X)$,*

1. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

   a) $p(T) < \infty$;

   b) *existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $p(T_j) < \infty$, para todo $j \geq i$;*

   c) *existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $N(T_j) = \{0\}$, para todo $j \geq k$.*

   Además

2. *Si $p(T_i) < \infty$ para algún $i \in \mathbb{N}$, existe $j \geq i$ tal que $p(T_j) < \infty$ y $p(T_n) = p(T_j)$ cualquiera sea $n \geq j$*

Demostración:

1. (a)$\Rightarrow$(b). Supongamos que $p = p(T) < \infty$, y sea $y \in N(T) \cap R(T^j)$, con $j \geq p$. Según esto $y = T^j x$, para algún $x \in X$, y además tendremos que $T^{j+1}x = T(T^j x) = 0$. Luego $x \in N(T^{j+1}) = N(T^j)$, pues $j \geq p$, en consecuencia $y = T^j x = 0$. Así $N(T) \cap R(T^j) = \{0\}$, implicando esto que $N(T_j) = N(T) \cap R(T^j) = \{0\}$, para todo $j \geq p$. Esto nos dice que T_j es inyectivo cuando $j \geq p$, que equivale a $p(T_j) = 0 < \infty$, para todo $j \geq p$.

(b)$\Rightarrow$(c). Supongamos que existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $p(T_j) < \infty$, para todo $j \geq i$. Sea $p = p(T_j)$, $j \geq i$, procediendo de manera análoga como en el caso anterior obtenemos que $N(T_j) \cap R(T_j^m) = \{0\}$, para todo $m \geq p$. Según esto, y de acuerdo con el inciso (2) del Lema 1.1.1,

$$\begin{aligned} N(T_{m+j}) &= N(T) \cap R(T^{m+j}) \\ &= N(T) \cap (R(T^j) \cap R(T^{m+j})) \\ &= (N(T) \cap R(T^j)) \cap R(T_j^m) \\ &= N(T_j) \cap R(T_j^m) \\ &= \{0\}. \end{aligned}$$

En consecuencia $N(T_j) = \{0\}$, siempre que $j \geq p + i$.

(c)$\Rightarrow$(a). Supongamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $N(T_j) = \{0\}$, para todo $j \geq k$. Entonces, $N(T) \cap R(T^j) = \{0\}$ para $j \geq k$. Si tomamos $x \in N(T^{j+1})$ tendremos que $T(T^j x) = T^{j+1}x = 0$. Luego $T^j x \in N(T) \cap R(T^j) = \{0\}$, así $x \in N(T^j)$ y resulta la igualdad $N(T^{j+1}) = N(T^j)$, de donde sigue que $p(T) < \infty$.

2. Observemos que $T_{n+1} = T_n \mid R(T^{n+1})$, para todo n. En consecuencia, y conforme a lo señalado anteriormente, si $p(T_i) < \infty$ para algún $i \in \mathbb{N}$, tendremos que $p(T_{i+1}) < \infty$ y $p(T_{i+1}) \leq p(T_i)$. Procediendo en forma inductiva se concluye que $p(T_n) < \infty$ y $p(T_n) \leq p(T_i)$ cualquiera sea $n \geq i$. De acuerdo con lo anterior, sigue que $(p(T_n))_{n \geq i}$ es una sucesión acotada y decreciente de enteros no negativos, por lo cual existe $j \geq i$ (por la construcción) tal que $p(T_n) = p(T_j)$ para $n \geq j$.

$\square$

Similarmente, también se tienen las siguientes propiedades para el descent de un operador T y de sus restricciones T_n.

Lema 1.1.6. *Para un operador $T \in L(X)$,*

1. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

   a) *$q(T) < \infty$;*

   b) *existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $q(T_j) < \infty$, para todo $j \geq i$;*

   c) *para cada $j \in \mathbb{N}$, existe un subespacio Y_j de X que satisface*

$$Y_j \subseteq N(T^{q(T)}) \quad X = Y_j \oplus R(T^j).$$

   Además,

2. *Si $q(T_i) < \infty$ para algún $i \in \mathbb{N}$, existe $j \geq i$ tal que $q(T_j) < \infty$ y $q(T_n) = q(T_j)$ para todo $n \geq j$.*

Demostración:

1. (a)$\Leftrightarrow$(b). Supongamos que $q = q(T) < \infty$, según esto y por el inciso (2) del Lema 1.1.1, tendremos que para $j \geq q$,

$$R(T_j^q) = R(T^{q+j}) = R(T^{q+j+1}) = R(T_j^{q+1}).$$

En virtud de lo cual $R(T_j^q) = R(T_j^{q+1})$. Lo que implica que $q(T_j) < \infty$, para $j \geq q$. Recíprocamente, si $q = q(T_j) < \infty$ para todo $j \geq i$, tendremos que

$$R(T^{j+q}) = R(T_j^q) = R(T_j^{q+1}) = R(T^{j+q+1}).$$

De donde se concluye que $q(T) < \infty$.

$(a) \Leftrightarrow (c)$ es consecuencia de la Proposición 38.2 [30].

2. Sea $q = q(T_i) < \infty$, para algún $i \in \mathbb{N}$, entonces $R(T_i^{q+1}) = R(T_i^{q+2})$. En virtud del inciso (2) del Lema 1.1.1, tendremos que $R(T_{i+1}^q) = R(T_{i+1}^{q+1}))$. Así, $q(T_{i+1}) \leq q(T_i) < \infty$. Procediendo en forma inductiva, obtenemos una sucesión de enteros no negativos $(q(T_n))_{n \geq i}$ que es decreciente y acotada superiormente, luego existe $j \geq i$ tal que $q(T_n) = q(T_j)$, cualquiera sea $n \geq j$.

$\square$

Lema 1.1.7. *Si $T \in L(X)$ y $p = p(T) < \infty$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

1. *Existe $n \geq p + 1$ tal que $R(T^n)$ es cerrado;*

2. *$R(T^n)$ es cerrado para todo $n \geq p$.*

Demostración: Definimos $c_i^{'}(T) := \dim(N(T^i)/N(T^{i+1}))$. Claramente, $p = p(T) < \infty$, lo cual implica que $c_i^{'}(T) = 0$ para todo $i \geq p$, asi, $k_i(T) := c_i^{'}(T) - c_{i+1}^{'}(T) = 0$ para todo $i \geq p$. La equivalencia sigue fácilmente de [34], Lema 12.

$\square$

Observación 1.1.1. *Por Proposición 38.1 [30], si* $p = p(T) < \infty$, *entonces* $T^p(X) \cap N(T) = \{0\}$. *Pero, ya que* $T^{p+1}(X) \subseteq T^p(X)$, *se tiene que* $T^{p+1}(X) \cap N(T) = T^p(X) \cap N(T)$.

Otros parámetros de utilidad asociados con un operador $T \in L(X)$, se introducen en las siguientes definiciones.

Definición 1.1.4. *Dado* $T \in L(X)$. *Las deficiencias de* T *con respecto a su núcleo* $N(T)$ *y su imagen* $R(T)$ *denotadas, respectivamente, por* $\alpha(T)$ *y* $\beta(T)$, *se definen en la forma siguiente*

$$\alpha(T) = dim\ N(T) \quad y \quad \beta(T) = codim\ R(T).$$

Si las deficiencias de T *son finitas, se define el índice de* T, *denotado* $ind\ (T)$, *como*

$$ind\ (T) = \alpha(T) - \beta(T).$$

Con respecto a las deficiencias de las restricciones T_n, se tienen los resultados siguientes.

Lema 1.1.8. *Para un operador* $T \in L(X)$, *se tienen:*

1. *Si* $\alpha(T_i) < \infty$ *para cierto* $i \in \mathbb{N}$, *entonces existe un entero* $j \geq i$ *tal que* $\alpha(T_n) = \alpha(T_j) < \infty$ *cualquiera sea* $n \geq j$.

2. *Si* $\beta(T_i) < \infty$ *para cierto* $i \in \mathbb{N}$, *entonces existe un entero* $j \geq i$ *tal que* $\beta(T_n) = \beta(T_j) < \infty$ *cualquiera sea* $n \geq j$.

Demostración:

1. Si $\alpha(T_i) = \dim N(T_i) < \infty$ para algún i, como $N(T_{i+1}) \subseteq N(T_i)$, resulta que $\alpha(T_{i+1}) \leq \alpha(T_i)$. Procediendo en forma inductiva, tendremos que $\alpha(T_{n+1}) \leq \alpha(T_n) < \infty$ para todo $n \geq i$. Así, $(\alpha(T_n))_{n \geq i}$ es una sucesión decreciente y acotada superiormente, por lo que existe un entero $j \geq i$ tal que $\alpha(T_n) = \alpha(T_j) < \infty$, cualquiera sea $n \geq j$.

2. En virtud del isomorfismo $\frac{R(T^n)}{R(T^{n+1})} \simeq \frac{X}{R(T)+N(T^n)}$, tendremos que

$$\beta(T_n) = \dim\ \frac{R(T^n)}{R(T^{n+1})} = \dim\ \frac{X}{R(T)+N(T^n)} = \text{codim}\ (R(T)+N(T^n)).$$

Siendo que $R(T)+N(T^i) \subseteq R(T)+N(T^{i+1})$, resulta que

$$\text{codim}\ (R(T)+N(T^{i+1})) \leq \text{codim}\ (R(T)+N(T^i)).$$

Según esto, y siendo que $\beta(T_i) < \infty$,

$$\beta(T_{i+1}) = \text{codim}\ (R(T)+N(T^{i+1})) \leq \text{codim}\ (R(T)+N(T^i)) = \beta(T_i) < \infty.$$

Procediendo en forma inductiva, $(\beta(T_n))_{n\geq i}$ es una sucesión decreciente de enteros no negativos acotada superiormente, por lo que existe un entero $j \geq i$ tal que $\beta(T_n) = \beta(T_j) < \infty$, para todo $n \geq j$.

$\square$

1.2. Operadores Semi-Fredholm y Fredholm

En esta sección introduciremos los operadores de semi-Fredholm, semi-Fredholm superior (resp. inferior), y de Fredholm. Damos algunas propiedades básicas de estos y en especial hacemos mención de dos importantes tipos de operadores de semi-Fredholm, como lo son, los operadores bounded below y sobreyectivos.

Definición 1.2.1. *Sea X un espacio de Banach complejo. La clase de todos los operadores semi-Fredholm superior en $L(X)$, denotada $\Phi_+(X)$, se define como*

$$\Phi_+(X) = \{T \in L(X) : \alpha(T) < \infty \quad y \quad R(T) \quad \textit{es cerrado}\},$$

y la clase de todos los operadores semi-Fredholm inferior en $L(X)$, $\Phi_-(X)$, esta dada por

$$\Phi_-(X) = \{T \in L(X) : \beta(T) < \infty\},$$

$\Phi_{\pm}(X) = \Phi_{+}(X) \cup \Phi_{-}(X)$ y $\Phi(X) = \Phi_{+}(X) \cap \Phi_{-}(X)$ definen, respectivamente, las clases de los operadores semi-Fredholm y de Fredholm en $L(X)$.

Para la clase de los operadores de semi-Fredholm, la noción de índice de un operador se define en la forma siguiente.

Definición 1.2.2. *Si $T \in \Phi_{\pm}(X)$, el índice de T, denotado ind (T), esta dado en la forma siguiente*

$$ind\ (T) = \begin{cases} \alpha(T) - \beta(T) & , \text{ si } \alpha(T) \text{ y } \beta(T) \text{ son finitos,} \\ \\ +\infty & , \text{ si } \alpha(T) = +\infty, \\ \\ -\infty & , \text{ si } \beta(T) = +\infty. \end{cases}$$

Obviamente, el indice de un operador de semi-Fredholm es entonces un número entero ó $\pm\infty$.

Observación 1.2.1 A continuación destacaremos una serie de propiedades relativas a la naturaleza algebraica y topológica de las clases de los operadores de semi-Fredholm y Fredholm, como subconjuntos del álgebra $L(X)$, así como también propiedades de perturbación, dualidad y algunas formas de representación de dichas clases de operadores. Para los detalles correspondientes a las afirmaciones que siguen, pueden consultarse en [31].

(a) $\Phi_{+}(X)$, $\Phi_{-}(X)$ y $\Phi(X)$ son semi-grupos multiplicativos de $L(X)$.

(b) Las nociones de operadores semi-Fredholm superior (resp. inferior), son mutuamente duales. En el sentido siguiente:

$$T \in \Phi_{+}(X) \quad \Leftrightarrow \quad T^{*} \in \Phi_{-}(X^{*}),$$

$$T \in \Phi_{-}(X) \quad \Leftrightarrow \quad T^{*} \in \Phi_{+}(X^{*})$$

Más aún,

$$\alpha(T) = \beta(T^*) \quad \text{y} \quad \beta(T) = \alpha(T^*),$$

y

$$p(T) = q(T^*) \quad \text{y} \quad q(T) = p(T^*).$$

(c) $\Phi_+(X)$, $\Phi_-(X)$ y $\Phi(X)$ son subconjuntos abiertos en $L(X)$. Esto es, para cada operador $T \in \Phi_+(X)$, existe un número $\epsilon > 0$ tal que si un operador $S \in L(X)$ satisface que $\|S\| < \epsilon$, entonces $T + S \in \Phi_+(X)$. Además,

$$\alpha(T+S) \leq \alpha(T) \quad \text{y} \quad \text{ind }(T+S) = \text{ind }(T).$$

De manera análoga dado $T \in \Phi_-(X)$, existe un número $\epsilon > 0$ para el cual si $S \in L(X)$ satisface que $\|S\| < \epsilon$, entonces $T + S \in \Phi_-(X)$, y también tendremos que

$$\beta(T+S) \leq \beta(T) \quad \text{y} \quad \text{ind }(T+S) = \text{ind }(T).$$

De lo anterior también se tiene que la función índice

$$\text{ind} : \Phi_\pm(X) \to \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\},$$

es constante sobre las componentes conexas del abierto $\Phi_+(X)$ (resp. $\Phi_-(X)$ y $\Phi(X)$).

(d) Si $T \in \Phi_+(X)$ (resp. $\Phi_-(X)$) y K es un operador de rango finito, o compacto, en $L(X)$, entonces $T + K \in \Phi_+(X)$ (resp. $\Phi_-(X)$). Más aún, ind $(T+K) =$ ind (T), cualesquiera sean $T \in \Phi_\pm(X)$ y K de rango finito o compacto en $L(X)$.

(e) Para un operador $T \in L(X)$, $T \in \Phi(X)$ e ind $(T) = 0$ justamente cuando T tiene la forma $T = S+K$, en donde S es un operador invertible y K es compacto (o de rango finito) en $L(X)$. Teoremas similares de representación también se tienen para las clases más amplias de los operadores de semi-Fredholm. Es decir, $T \in \Phi_+(X)$ y ind $(T) \leq 0$ si y sólo si $T = S + K$, donde S es un operador inyectivo con rango cerrado y K es compacto (o de rango finito) en $L(X)$. Análogamente, $T \in \Phi_-(X)$ y ind $(T) \geq 0$ equivale a la representación $T = S + K$, con S un operador sobreyectivo y K compacto (o de rango finito) en $L(X)$.

Seguidamente describiremos ciertas partes del espectro clásico $\sigma(T)$ de un operador $T \in L(X)$, con X un espacio de Banach complejo infinito dimensional, motivadas por los operadores definidos anteriormente, así como también algunas relaciones existentes entre ellas.

Definición 1.2.3. *Para un operador acotado $T \in L(X)$ sobre un espacio de Banach X. El espectro semi-Fredholm superior está definido como*

$$\sigma_{uf}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \Phi_+(X)\};$$

y el espectro semi-Fredholm inferior se define por

$$\sigma_{lf}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \Phi_-(X)\}.$$

Mientras que los espectros semi-Fredholm y de Fredholm están definidos, respectivamente, por

$$\sigma_{sf}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \Phi_\pm(X)\} \quad y \quad \sigma_f(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \Phi(X)\}.$$

Observemos que,

$$\sigma_{sf}(T) = \sigma_{uf}(T) \cap \sigma_{lf}(T), \quad \sigma_f(T) = \sigma_{uf}(T) \cup \sigma_{lf}(T)$$

En lo que resta de esta sección, introducimos dos clases particularmente importantes de operadores y sus respectivos espectros.

Definición 1.2.4. *Sea $T \in L(X)$ un operador acotado sobre un espacio de Banach complejo X. T se dice bounded below si T es inyectivo y $R(T)$ es cerrado.*

En el siguiente lema se dan algunas relaciones de interés entre las nociones de operadores sobreyectivo y bounded below.

Lema 1.2.1. *Sea $T \in L(X)$, X un espacio de Banach complejo. Entonces:*

1. *T es sobreyectivo (resp. bounded below) si y sólo si T^* es bounded below (resp. sobreyectivo);*
2. *Si T es bounded below,(resp. sobreyectivo) entonces $\lambda I - T$ es bounded below (resp. sobreyectivo), para todo $|\lambda| < \gamma(T)$.*

Demostración:

(1) Supongamos que T es sobreyectivo, según esto T tiene trivialmente rango cerrado y en consecuencia T^* también tiene rango cerrado. De aquí, y por la igualdad $N(T^*) = \overline{R(T)}^{\perp}$, obtenemos que

$$N(T^*) = \overline{R(T)}^{\perp} = R(T)^{\perp} = X^{\perp} = \{0\}.$$

Así $N(T^*) = \{0\}$, lo que implica que T^* es bounded below.

Recíprocamente, si T^* es bounded below entonces $N(T^*) = \{0\}$ y $R(T^*)$ es cerrado. De esto último sigue, por lo observado en el Teorema 1.1.1, que $R(T)$ es cerrado. De acuerdo con lo anterior y en virtud de la igualdad $\overline{R(T)} =^{\perp} N(T^*)$, tendremos

$$R(T) = \overline{R(T)} =^{\perp} N(T^*) =^{\perp} \{0\} = X.$$

Es decir, $R(T) = X$ y por lo tanto T es sobreyectivo.

Para el caso T bounded below si y sólo si T^* es sobreyectivo, se procede en forma similar al caso demostrado anteriormente.

(2) De la definición de módulo minimal de T,

$$\gamma(T) = \inf \left\{ \frac{\|Tx\|}{\text{dist } (x, N(T))} : x \notin N(T) \right\},$$

resulta la desigualdad

$$\gamma(T)\text{dist } (x, N(T)) \leq \|Tx\| \text{ , para todo } x \in X.$$

Siendo T bounded below, $N(T) = \{0\}$ y $R(T)$ es cerrado, y tendremos

$$\|Tx\| \geq \gamma(T)\|x\| \text{ para todo } x \in X,$$

con $\gamma(T) > 0$. Como

$$\|(\lambda I - T)x\| = \|Tx - \lambda x\| \geq \|Tx\| - |\lambda|\|x\| \quad (\forall x \in X).$$

Se deduce de lo anterior, la desigualdad

$$\|(\lambda I - T)x\| \geq (\gamma(T) - |\lambda|)\|x\| \text{ para todo } x \in X.$$

La cual implica que $\lambda I - T$ es inyectivo para todo $|\lambda| < \gamma(T)$. Así $\lambda I - T$ resulta bounded below, para todo $|\lambda| < \gamma(T)$.

Para el caso T sobreyectivo, observemos que según lo demostrado en la parte (1), T^* es bounded below; así $\lambda I^* - T^*$ es bounded below siempre que $|\lambda| < \gamma(T^*) = \gamma(T)$. Siguiendo de esto, nuevamente por lo demostrado en la parte (1), que $\lambda I - T$ es sobreyectivo para cada $|\lambda| < \gamma(T)$.

$\square$

Definición 1.2.5. *Sea $T \in L(X)$ un operador acotado sobre un espacio de Banach X. El espectro aproximado puntual de T, denotado por $\sigma_{ap}(T)$, es definido como*

$$\sigma_{ap}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \textit{ no es bounded below}\}.$$

Definición 1.2.6. *Sea $T \in L(X)$ un operador acotado sobre un espacio de Banach X. El espectro sobreyectivo de T, denotado por $\sigma_{su}(T)$, se define como*

$$\sigma_{su}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \textit{ no es sobreyectivo}\}.$$

Note que en virtud de la parte (i) del Lema 1.2.1, el espectro aproximado puntual y el espectro sobreyectivo son duales cada uno del otro, en el sentido de las igualdades $\sigma_{ap}(T) = \sigma_{su}(T^*)$ y $\sigma_{ap}(T^*) = \sigma_{su}(T)$. Además, también se tiene que;

$$\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_{su}(T).$$

1.3. Operadores Semi-Browder, Browder y de Weyl

En esta sección introducimos los operadores semi-Browder, Browder y de Weyl, así como los espectros determinados por dichas clases de operadores.

Definición 1.3.1. *Sea X un espacio de Banach complejo. La clase de todos los operadores semi-Browder superior en $L(X)$, denotada $B_+(X)$, se define como*

$$B_+(X) = \{T \in \Phi_+(X) : p(T) < \infty\},$$

y la clase de los operadores semi-Browder inferior, denotada $B_-(X)$, por

$$B_-(X) = \{T \in \Phi_-(X) : q(T) < \infty\}.$$

$B(X) = B_+(X) \cap B_-(X)$ define la clase los operadores de Browder en $L(X)$.

Las clases $B_+(X)$ y $B_-(X)$ fueron introducidas por Harte en [28]. La clase de todos los operadores de Browder también es conocida en la literatura como la clase de los operadores de Riesz-Schauder. Para $T \in B_+(X)$ se tiene que ind $(T) =\leq 0$, mientras que para $T \in B_-(X)$ tendremos que ind $(T) \geq 0$.
Seguidamente introducimos otra importante clase de operadores, conocidas como los operadores de Weyl.

Definición 1.3.2. *Sea X un espacio de Banach complejo. La clase de los operadores de Weyl en $L(X)$, denotada $W(X)$, es definida por*

$$W(X) = \{T \in \Phi(X) : ind(T) = 0\}$$

La clase $W(X)$ puede describirse también en la forma

$$W(X) = W_+(X) \cap W_(X),$$

donde

$$\begin{aligned} W_+(X) &= \{T \in \Phi_+(X) : \text{ind } (T) \leq 0\} \\ W_-(X) &= \{T \in \Phi_-(X) : \text{ind } (T) \geq 0\} \end{aligned}$$

Observemos que $B(X) \subseteq W(X)$, ya que cada operador $T \in L(X)$ de Fredholm en X, con $p(T)$ y $q(T)$ finitos, necesariamente tiene índice cero, en virtud del Lema 1.1.4.

Las distintas clases de operadores definidas anteriormente motivan, de manera natural, la definición de ciertos espectros asociados respectivamente a cada uno estos, los cuales se introducen a continuación.

Definición 1.3.3. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$.*

$$\sigma_{ub}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin B_+(X)\},$$

$$\sigma_{lb}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin B_-(X)\},$$

$$\sigma_b(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin B(X)\},$$

definen, respectivamente, los espectros: semi-Browder superior, semi-Browder inferior y de Browder de un operador $T \in L(X)$.

Claramente,

$$\sigma_b(T) = \sigma_{ub}(T) \cup \sigma_{lb}(T).$$

Además también tenemos, de la definición anterior y las propiedades de los operadores de semi-Fredholm, que

$$\sigma_{ub}(T) = \sigma_{lb}(T^*) \quad \sigma_{lb}(T) = \sigma_{ub}(T^*)$$

Por lo cual,

$$\sigma_b(T) = \sigma_b(T^*)$$

De manera natural introducimos los espectros de Weyl, en la siguiente definición.

Definición 1.3.4. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$.*

$$\sigma_{uw}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin W_+(X)\},$$

$$\sigma_{lw}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin W_-(X)\},$$

$$\sigma_w(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin W(X)\},$$

definen, respectivamente, los espectros: semi-Weyl superior, semi-Weyl inferior y Weyl de un operador $T \in L(X)$.

Claramente,

$$\sigma_w(T) = \sigma_{uw}(T) \cup \sigma_{lw}(T).$$
$$\sigma_{uw}(T) \subseteq \sigma_{ap}(T) \text{ y } \sigma_{lw}(T) \subseteq \sigma_{su}(T)$$

Además también tenemos que

$$\sigma_{uw}(T) = \sigma_{lw}(T^*) \text{ y } \sigma_{lw}(T) = \sigma_{uw}(T^*)$$

Similarmente a los espectros semi-Browder, se tiene $\sigma_w(T) = \sigma_w(T^*)$.

Más aún, también se tienen las inclusiones siguientes:

(1) $\sigma_f(T) \subseteq \sigma_w(T) \subseteq \sigma_b(T)$.

(2) $\sigma_{sf}(T) \subseteq \sigma_{uf}(T) \subseteq \sigma_{ub}(T) \subseteq \sigma_b(T)$

(3) $\sigma_{sf}(T) \subseteq \sigma_{lf}(T) \subseteq \sigma_{lb}(T) \subseteq \sigma_b(T)$

1.4. Propiedad de la Extensión Univaluada

En esta sección tratamos la propiedad de la extensión univaluada localizada en un punto, versión introducida por J. Finch [27], y presentamos caracterizaciones para esta propiedad en el caso de los operadores semi-Fredholm.

Definición 1.4.1. *Un operador acotado* $T \in L(X)$ *sobre un espacio de Banach complejo* X*, tiene la propiedad de la extensión univaluada en* λ_0 *(abreviada* $SVEP$ *en* λ_0*), si para cada disco abierto* $\mathbb{D}_{\lambda_0} \subseteq \mathbb{C}$ *centrado en* λ_0*, la única función analítica* $f : \mathbb{D}_{\lambda_0} \to X$ *que satisface la ecuación*

$$(\lambda I - T)f(\lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{D}_{\lambda_0},$$

es la función $f \equiv 0$ *sobre* $\mathbb{D}_{\lambda_0}$*. Se dice que* T *tiene la propiedad de la extensión univaluada (abreviado* $SVEP$*) si tiene la propiedad de la extensión univaluada en cada punto* $\lambda \in \mathbb{C}$*.*

Para un operador $T \in L(X)$, denotaremos por

$$\Xi(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T \text{ no tiene la } SVEP\}.$$

Notemos que por el principio de identidad para funciones analíticas, (ver [33]) y de la definición anterior, sigue que $\Xi(T)$ es un conjunto abierto contenido en el interior del espectro $\sigma(T)$.

Observación 1.4.1. A continuación listamos una serie de propiedades básicas de la $SVEP$ para un operador $T \in L(X)$, X un espacio de Banach complejo, que siguen inmediatamente de la definición anterior.

(i) Si T tiene la $SVEP$ en λ, entonces para cualquier subespacio cerrado Y de X que sea T-invariante, la restricción $T \mid Y$ también tiene la $SVEP$ en λ. Pues, si $\mathbb{D}_\lambda$ es un disco abierto centrado en λ y $f : \mathbb{D}_\lambda \to Y$ es una función analítica tal que

$$(\mu I - T \mid Y)f(\mu) = 0, \quad \forall \mu \in \mathbb{D}_\lambda.$$

Tendremos que $f : \mathbb{D}_\lambda \to Y \subseteq X$ es analítica y además satisface la condición,

$$(\mu I - T)f(\mu) = 0, \quad \forall \mu \in \mathbb{D}_\lambda.$$

Siendo que T tiene la $SVEP$ en λ, sigue que $f \equiv 0$ sobre $\mathbb{D}_\lambda$.

(ii) T tiene la $SVEP$ en λ si y sólo si $\lambda I - T$ tiene la $SVEP$ en 0.

(iii) T tiene la $SVEP$ en cada punto λ del resolvente $\rho(T)$ de T. Ya que si tomamos un $\lambda \in \rho(T)$ y $f : \mathbb{D}_\lambda \to X$ es una función analítica sobre un disco $\mathbb{D}_\lambda$ centrado λ, que satisface

$$(\mu I - T)f(\mu) = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{D}_\lambda.$$

Como $\lambda \in \rho(T)$, existe también un disco abierto $\mathbb{D}(\lambda, \epsilon)$, $\epsilon > 0$, para el cual $\mathbb{D}(\lambda, \epsilon) \subseteq \rho(T) \cap \mathbb{D}_\lambda$, además

$$(\mu I - T)f(\mu) = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{D}(\lambda, \epsilon).$$

Según esto último $f(\mu) = 0$ para cada $\mu \in \mathbb{D}(\lambda, \epsilon)$, ya que el resolvente es inyectivo en cualquier $\mu \in \mathbb{D}(\lambda, \epsilon) \subset \rho(T)$. Por el principio de identidad para funciones analíticas concluimos que $f \equiv 0$ sobre $\mathbb{D}_\lambda$. Más aún, T también tiene la $SVEP$ en cada $\lambda \in \overline{\rho(T)}$. Ya que, dado un disco abierto $\mathbb{D}_\lambda$ centrado en λ y una función analítica $f : \mathbb{D}_\lambda \to X$ tal que

$$(\mu I - T)f(\mu) = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{D}_\lambda.$$

Siendo $\lambda \in \overline{\rho(T)}$, existe una sucesión $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \rho(T)$ para la cual $\lambda_n \to \lambda$ cuando $n \to \infty$. De acuerdo con esto, para algún $m \in \mathbb{Z}_+$ ocurre que

$$\lambda_n \in \mathbb{D}_\lambda \text{ siempre que } n \geq m.$$

Así, encontramos discos abiertos $\mathbb{D}_{\lambda_n} \subseteq \mathbb{D}_\lambda$, por cada $n \geq m$, y restricciones analíticas $f : \mathbb{D}_{\lambda_n} \to X$ que satisfacen

$$(\mu I - T)f(\mu) = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{D}_{\lambda_n}.$$

Dado que T tiene la $SVEP$ en cada λ_n concluimos, por el principio de identidad para funciones analíticas, que $f \equiv 0$ en $\mathbb{D}_\lambda$ y así T tiene la $SVEP$ en λ.

(iv) T tiene la $SVEP$ en cada $\lambda \in \partial\sigma(T)$, ya que $\partial\sigma(T) \subseteq \overline{\rho(T)}$.

(v) T tiene la $SVEP$ en cada λ que no sea punto límite del espectro puntual de T, $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ es un autovalor de } T\}$.

(vi) T tiene la $SVEP$ en cada λ que no sea punto límite del espectro aproximado puntual $\sigma_{ap}(T)$ de T. Como $\sigma_{su}(T) = \sigma_{ap}(T^*)$, también se tiene que T^* tiene la $SVEP$ en cada λ que no sea punto límite del espectro sobreyectivo $\sigma_{su}(T)$ de T.

(vii) Para cualquier operador $T \in L(X)$, T y T^* tienen la $SVEP$ en cada punto aislado λ del espectro $\sigma(T)$. Debido al principio de la identidad para funciones analíticas, y la igualdad $\sigma(T) = \sigma(T^*)$.

(viii) Si T es cuasi-nilpotente, entonces T tiene la $SVEP$. Esta afirmación, sigue del hecho que para T cuasi-nilpotente, $\sigma(T) = \{0\}$. Así, cada $\lambda \neq 0$ es punto aislado de $\sigma(T)$, lo que implica según lo observado en (ix) que T tiene la $SVEP$ en cada $\lambda \neq 0$. El caso $\lambda = 0$ sigue del inciso (vi), pues $0 \in \partial\sigma(T)$.

Teorema 1.4.1. *Sea $T \in L(X)$ un operador semi-Fredholm. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) T tiene la SVEP en λ;

(ii) $p(\lambda I - T) < \infty$;

(iii) $\lambda \notin acc\ \sigma_{\mathrm{ap}}(T)$

Demostración: Veáse[1] Capítulo 3 $\square$

Dualmente también se tiene,

Teorema 1.4.2. *Sea $T \in L(X)$ un operador semi-Fredholm. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) T^* *tiene la SVEP en* λ*;*

(ii) $q(\lambda I - T) < \infty$*;*

(iii) $\lambda \notin acc\ \sigma_{\mathrm{su}}(T)$

Demostración: Veáse[1] Capítulo 3 $\square$

Capítulo 2

Teoremas de Weyl, a-Weyl y Restricciones sobre Operadores Acotados

En este capítulo desarrollamos en detalle los resultados del artículo, C. Carpintero, D. Muñoz, E. Rosas, O. García, J. Sanabria: Weyl type theorems and restrictions for bounded linear operators. Extractha Mathematicae. [21] (2013), 127-139, en los que se describen los Teoremas de Weyl y a-Weyl para un operador $T \in L(X)$, y se muestra que estos Teoremas se transmiten del operador a su restricción sobre potencias cerradas de su rango y viceversa.

2.1. Propiedades algebraicas entre T y T_n

El siguiente resultado establece algunas propiedades algebraicas entre T y T_n, con T_n visto como un operador del espacio $R(T^n)$ en si mismo.

Lema 2.1.1. *Sea $T \in L(X)$ y T_n, $n \in \mathbb{N}$, la restricción de el operador T sobre el subespacio $R(T^n) = T^n(X)$. Entonces para todo $\lambda \neq 0$, se tiene:*

1. *$N((\lambda I - T_n)^m) = N((\lambda I - T)^m)$, para cualquier m;*

2. *$R((\lambda I - T_n)^m) = R((\lambda I - T)^m) \cap R(T^n)$, para cualquier m;*

3. *$\alpha(\lambda I - T_n) = \alpha(\lambda I - T)$;*

4. *$p(\lambda I - T_n) = p(\lambda I - T)$;*

5. *$\beta(\lambda I - T_n) = \beta(\lambda I - T)$.*

Demostración:

(1) Para $m = 0$,

$$N((\lambda I - T_n)^m) = N((\lambda I - T)^m),$$

se cumple trivialmente. Sea $x \in N((\lambda I - T)^m)$, $m \geq 1$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda I - T)^m x \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!}(-1)^k \lambda^{m-k} T^k x \\ &= \lambda^m x + \sum_{k=1}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!}(-1)^k \lambda^{m-k} T^k x. \end{aligned}$$

Así $0 = \lambda^m x + h(T)x$, donde $h(T) = \sum_{k=1}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!}(-1)^k \lambda^{m-k} T^k$. De aquí $-\lambda^m x = h(T)x$, y ya que $\lambda \neq 0$, entonces $x = -\lambda^{-m} h(T)x$. A partir de esta ecuación se sigue que

$$(-\lambda^{-m} h(T))^2 x = -\lambda^{-m} h(T)(-\lambda^{-m} h(T)x) = -\lambda^{-m} h(T)x = x.$$

Consecuentemente $x = (-\lambda^{-m} h(T))^2 x$. Repitiendo el mismo argumento sucesivamente, obtenemos que $x = (-\lambda^{-m} h(T))^j x$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Pero, $-\lambda^{-m} h(T)x \in R(T)$, entonces $(-\lambda^{-m} h(T))^j x \in R(T^j)$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,
$x = (-\lambda^{-m} h(T))^n x \in R(T^n)$,

y como $R(T^n)$ es un subespacio T-invariante, concluimos que

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda I - T)^m x \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!}(-1)^k \lambda^{m-k} T^k x \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!}(-1)^k \lambda^{m-k} (T_n)^k x \\ &= (\lambda I - T_n)^m x \end{aligned}$$

Así $x \in N((\lambda I - T_n)^m)$, obteniéndose la inclusión

$$N((\lambda I - T)^m) \subseteq N((\lambda I - T_n)^m).$$

En el otro sentido, ya que T_n es la restricción de T sobre $R(T^n)$, y $R(T^n)$ es invariante bajo T, tenemos

$$N((\lambda I - T_n)^m) \subseteq N((\lambda I - T)^m).$$

Por lo tanto se sigue que $N((\lambda I - T_n)^m) = N((\lambda I - T)^m)$.

(2) Ya que T_n es la restricción de T sobre $R(T^n)$, y $R(T^n)$ es invariante bajo T, se tiene que

$$R((\lambda I - T_n)^m) \subseteq R((\lambda I - T)^m) \cap R(T^n).$$

Ahora mostraremos la inclusión $R((\lambda I - T)^m) \cap R(T^n) \subseteq R((\lambda I - T_n)^m)$. Para ello es suficiente mostrar que para $m \in \mathbb{N}$, la implicación

$$(\lambda I - T)^m x \in R(T^n) \Rightarrow x \in R(T^n),$$

se cumple. Para $m = 1$. Sea $y \in R(\lambda I - T) \cap R(T^n)$, entonces existe $x \in X$ tal que $\lambda x - Tx = (\lambda I - T)x = y \in R(T^n)$, así $\lambda^2 x - \lambda T x = \lambda y \in R(T^n)$. Pero como $\lambda T x - T^2 x = Ty \in R(T^n)$, porque $\lambda x - Tx = y$ y $R(T^n)$ es invariante bajo T, se tiene que tanto $\lambda^2 x - \lambda T x$ como $\lambda T x - T^2 x$ pertenecen a $R(T^n)$. Luego

$$\lambda^2 x - T^2 x = \lambda^2 x - \lambda T x + \lambda T x - T^2 x \in R(T^n).$$

Así, $\lambda^2 x - T^2 x \in R(T^n)$. De aquí se tiene $\lambda^3 x - \lambda T^2 x = \lambda(\lambda^2 x - T^2 x) \in R(T^n)$, y como $\lambda T^2 x - T^3 x = T^2 y \in R(T^n)$, se tiene que tanto $\lambda^3 x - \lambda T^2 x$ como $\lambda T^2 x - T^3 x$ pertenecen a $R(T^n)$, por el cual,

$$\lambda^3 x - T^3 x = \lambda^3 x - \lambda T^2 x + \lambda T^2 x - T^3 x \in R(T^n).$$

Esto es, $\lambda^3 x - T^3 x \in R(T^n)$. Ahora supongamos que $\lambda^j x - T^j x \in R(T^n)$, para algún $j \in \mathbb{N}$. De esto se tiene que, $\lambda^{j+1} x - \lambda T^j x = \lambda(\lambda^j x - T^j x) \in R(T^n)$, y $\lambda T^j x - T^{j+1} x = T^j y \in R(T^n)$, así $\lambda^{j+1} x - \lambda T^j x$, $\lambda T^j x - T^{j+1} x \in R(T^n)$, por el cual,

$$\lambda^{j+1} x - T^{j+1} x = \lambda^{j+1} x - \lambda T^j x + \lambda T^j x - T^{j+1} x \in R(T^n).$$

Luego por inducción matemática, obtenemos $\lambda^j x - T^j x \in R(T^n)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. En particular, $\lambda^n x - T^n x \in R(T^n)$, y ya que $\lambda \neq 0$, entonces

$$x = \lambda^{-n}((\lambda^n x - T^n x) + T^n x) \in R(T^n).$$

Por el razonamiento anterior, obtenemos que para $m = 1$, la implicación

$$(\lambda I - T)x \in R(T^n) \Rightarrow x \in R(T^n)$$

se cumple.

Ahora supongamos que para $m \geq 1$,

$$(\lambda I - T)^m x \in R(T^n) \Rightarrow x \in R(T^n).$$

Si $(\lambda I - T)^{m+1} x \in R(T^n)$, entonces $(\lambda I - T)((\lambda I - T)^m x) \in R(T^n)$. En virtud de la prueba para el caso $m = 1$, concluimos que $(\lambda I - T)^m x \in R(T^n)$. Luego, por hipótesis inductiva, $x \in R(T^n)$. Entonces, por inducción matemática, se concluye que, para todo $m \in \mathbb{N}$

$$(\lambda I - T)^m x \in R(T^n) \Rightarrow x \in R(T^n),$$

se cumple.

Finalmente, si $y \in R((\lambda I - T)^m) \cap R(T^n)$ existe $x \in X$ tal que $(\lambda I - T)^m x = y \in R(T^n)$, entonces $(\lambda I - T)^m x \in R(T^n)$. Como en la prueba anterior, concluimos que $x \in R(T^n)$. Así

$$\begin{aligned} y &= (\lambda I - T)^m x \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} \lambda^{m-k} T^k x \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} \lambda^{m-k} (T_n)^k x \\ &= (\lambda I - T_n)^m x, \end{aligned}$$

y de aquí $y \in R((\lambda I - T_n)^m)$. Así, hemos mostrado que,

$$R((\lambda I - T)^m) \cap R(T^n) \subseteq R((\lambda I - T_n)^m).$$

En consecuencia, $R((\lambda I - T_n)^m) = R((\lambda I - T)^m) \cap R(T^n)$.

(3) y (4), sigue inmediatamente de la igualdad,

$$N((\lambda I - T_n)^m) = N((\lambda I - T)^m), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

(5) Observe que $R(\lambda I - T_n)$ es un subespacio de $R(T^n)$. Sea M un subespacio de $R(T^n)$ tal que $R(T^n) = R(\lambda I - T_n) \oplus M$. Ya que $R(\lambda I - T_n) = R(\lambda I - T) \cap R(T^n)$, se tiene

$$R(\lambda I - T) \cap M = R(\lambda I - T) \cap R(T^n) \cap M = R(\lambda I - T_n) \cap M = \{0\}.$$

Así $R(\lambda I - T) \cap M = \{0\}$. Ahora veamos que $X = R(\lambda I - T) + M$.

Sea $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $\mu I - T$ es invertible en $L(X)$, entonces $(\mu I - T)^j$ es invertible en $L(X)$, para todo $j \in \mathbb{N}$. En particular $(\mu I - T)^m$ es invertible en $L(X)$, para todo

$m \geq n$. Así, si $y \in X$ existe $x \in X$ tal que $y = (\mu I - T)^m x$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y &= (\mu I - T)^m x \\ &= \sum_{j=0}^{m} \frac{m!}{j!(m-j)!}(-1)^j \mu^{m-j} T^j x \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m!}{j!(m-j)!}(-1)^j \mu^{m-j} T^j x + \sum_{j=n}^{m} \frac{m!}{j!(m-j)!}(-1)^j \mu^{m-j} T^j x. \end{aligned}$$

Ya que $R(T^j) \subseteq R(T^n)$, para $n \leq j \leq m$, entonces podemos escribir $y = u + v$, donde:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m!}{j!(m-j)!}(-1)^j \mu^{m-j} T^j x \in X, \\ v &= \sum_{j=n}^{m} \frac{m!}{j!(m-j)!}(-1)^j \mu^{m-j} T^j x \in R(T^n). \end{aligned}$$

Ahora bien, de la descomposición anterior y para cualquier $\lambda \neq 0$, obtenemos una sucesión $(y_k)_{k=0}^{\infty}$, donde $y_k = \lambda^{-k-1}(\lambda I - T)T^k u$, para $k = 0, 1, ...$, tal que

$$u = y_0 + y_1 + ... + y_{n-1} + \lambda^{-n} T^n u \in R(\lambda I - T) + R(T^n),$$

porque $y_k = \lambda^{-k-1}(\lambda I - T)T^k u \in R(\lambda I - T)$ y $\lambda^{-n} T^n u \in R(T^n)$.

Por otro lado,

$$v + \lambda^{-n} T^n u \in R(T^n) + R(T^n) = R(T^n) = R(\lambda I - T_n) + M.$$

Así, $v + \lambda^{-n} T^n u = z + m$, donde $z \in R(\lambda I - T_n)$ y $m \in M$. Debido a esto, y ya que $R(\lambda I - T_n) \subseteq R(\lambda I - T)$, obtenemos que

$$\begin{aligned} y &= u + v \\ &= y_0 + y_1 + ... + y_{n-1} + \lambda^{-n} T^n u + v \\ &= y_0 + y_1 + ... + y_{n-1} + z + m \\ &= (y_0 + y_1 + ... + y_{n-1} + z) + m \in R(\lambda I - T) + M. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que $X \subseteq R(\lambda I - T) + M$, en consecuencia $X = R(\lambda I - T) + M$. Pero como $R(\lambda I - T) \cap M = \{0\}$, entonces $X = R(\lambda I - T) \oplus M$, lo cual implica que $\beta(\lambda I - T) = \dim\, M = \beta(\lambda I - T_n)$. Esto muestra que $\beta(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T_n)$.

$\square$

Recordemos que para un operador $T \in L(X)$, tenemos $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$ precisamente cuando λ es un polo del resolvente de T (ver [30] Prop. 50.2).

2.2. Teoremas de Weyl y a-Weyl

Denotemos por iso K el conjunto de todos los puntos aislados de $K \subseteq \mathbb{C}$. Sea $T \in L(X)$, definimos

$$\begin{aligned} \pi_{00}(T) &= \{\lambda \in iso\, \sigma(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty\}, \\ \pi^a_{00}(T) &= \{\lambda \in iso\, \sigma_{ap}(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty\}. \end{aligned}$$

Claramente, para $T \in L(X)$ se tiene $\pi_{00}(T) \subseteq \pi^a_{00}(T)$.

Definición 2.2.1. *Sea $T \in L(X)$. Según Coburn [24], T se dice que satisface el Teorema de Weyl, en simbolos (W), si $\sigma(T) \backslash \sigma_w(T) = \pi_{00}(T)$. Análogamente según Rakočević [36], T se dice que satisface el Teorema de a-Weyl, en simbolos (aW), si $\sigma_{ap}(T) \backslash \sigma_{uw}(T) = \pi^a_{00}(T)$.*

Notemos que

$$\text{(aW)} \Rightarrow \text{(W)}$$

Véase ([1], capítulo 3). El recíproco de esta implicación en general no es cierto, como se exhibe en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.1. *Consideremos $T : l^2(\mathbb{N}) \times l^2(\mathbb{N}) \longrightarrow l^2(\mathbb{N}) \times l^2(\mathbb{N})$, tal que $T = R \oplus S$, definida por $T(x, y) = (R_x, S_y)$, donde*

$$R(x_1, x_2, x_3...) = (0, x_1, x_2...)$$
$$S(x_1, x_2, x_3...) = (x_2, \tfrac{x_3}{2}, \tfrac{x_4}{3}...)$$

Entonces tenemos que $\sigma(R) = \overline{\mathbb{D}(0,1)}$ *y* $\sigma(S) = \{0\}$, *de donde se obtiene que* $\sigma(T) = \sigma(R) \cup \sigma(S) = \overline{\mathbb{D}(0,1)}$. *Por otro lado vemos que* $\sigma_{ap}(R) = \partial\mathbb{D}(0,1)$ *y* $\sigma_{ap}(S) = \{0\}$, *lo que nos dice que* $\sigma_{ap}(T) = \sigma_{ap}(R) \cup \sigma_{ap}(S) = \partial\mathbb{D}(0,1) \cup \{0\}$. *Ahora bien, el* $Ker(T) = Ker(R) \times Ker(S) = \{0\} \times Ker(S) \simeq Ker(S)$*(como espacios vectoriales), luego,* $\alpha(T) = \alpha(S) = 1$ *y* $\pi^a_{00}(T) = \{0\}$.
Si S *tiene rango finito, es decir,* $\gamma(S) > 0$, *entonces como* S *tiene la SVEP en 0,* $dim H_o(S) < \infty$, *lo cual es imposible, pues* $H_o(S) = l^2(\mathbb{N})$. *Así,* $\gamma(S) = 0$ *y como* $0 \leq \gamma(T) \leq \gamma(S) = 0$, *se tiene que* $\gamma(T) = 0$ *y* $T \notin \Phi_+(X)$, *por lo tanto,* $0 \in \sigma_{uw}(T)$. *Así,* $\sigma_{uw}(T) = \partial\mathbb{D}(0,1) \cup \{0\}$, *de modo que*

$$\sigma_{ap}(T) \backslash \sigma_{uw}(T) = \emptyset \neq \pi^a_{00}(T)$$

lo que nos dice que T *no satisface a-Weyl, pero si satisface Weyl, pues* T *tiene la SVEP.*

Lema 2.2.1. *Si* 0 *no es un polo del resolvente de* $T \in L(X)$ *y* $R(T^n)$ *es cerrado, entonces* $\pi_{00}(T) \subseteq \pi_{00}(T_n)$.

Demostración:

Por el Lema [?], tenemos que $\sigma(T_n) \setminus \{0\} = \sigma(T) \setminus \{0\}$. También, si $0 \notin \sigma(T)$ implica que T es biyectiva, así $T = T_n$. De aquí, tenemos que $\sigma(T_n) \subseteq \sigma(T)$. Además, $iso\,\sigma(T) \subseteq iso\,\sigma(T_n)$. Ahora bien, como $\lambda \in iso\,\sigma(T)$, entonces $\sigma(T) \cap \mathbb{D}_\lambda = \{\lambda\}$ para algún disco abierto $\mathbb{D}_\lambda \subseteq \mathbb{C}$ centrado en λ. Así

$$\sigma(T_n) \cap \mathbb{D}_\lambda \subseteq \sigma(T) \cap \mathbb{D}_\lambda = \{\lambda\}.$$

En consecuencia $\sigma(T_n) \cap \mathbb{D}_\lambda = \{\lambda\}$ o $\sigma(T_n) \cap \mathbb{D}_\lambda = \emptyset$.

Si $\sigma(T_n) \cap \mathbb{D}_\lambda = \emptyset$, entonces $\lambda \notin \sigma(T_n)$, así que $p(\lambda I - T_n) = \beta(\lambda I - T_n) = 0$. Para el caso $\lambda \neq 0$, por el Lema [?], se tiene que $p(\lambda I - T) = 0$ y $\beta(\lambda I - T) = 0$, luego $\lambda \notin \sigma(T)$, lo cual es una contradicción.

En el caso donde $\lambda = 0$, $p(T_n) = q(T_n)$, lo cual implica, por ([19], Lema 2 y Lema 3) y ([30], Proposición 38.6), que $0 < p(T) = q(T) < \infty$, lo cual es imposible, ya que 0 no es un polo del resolvente de T. En consecuencia, $\sigma(T_n) \cap \mathbb{D}_\lambda = \{\lambda\}$, obteniéndose finalmente que $\lambda \in iso\, \sigma(T_n)$.

Mostraremos ahora que $\pi_{00}(T) \subseteq \pi_{00}(T_n)$. Si $\lambda \in \pi_{00}(T)$, se tiene que $\lambda \in iso\, \sigma(T_n)$, por que $\lambda \in iso\, \sigma(T)$. En el caso para $\lambda \neq 0$, el Lema 2.1.1 implica que $\alpha(\lambda I - T) = \alpha(\lambda I - T_n)$, así, $0 < \alpha(\lambda I - T_n) < \infty$. Para $\lambda = 0$, afirmamos que $\alpha(T_n) > 0$. Si $\alpha(T_n) = 0$, tenemos que $p(T_n) = 0$. Y por ([19],Lema 2), $p(T) < \infty$. Además, por ([19],Observación 1),

$$p(T) = \inf\{k \in \mathbb{N} : T_k \text{ es inyectiva}\} \leq n.$$

Luego, por el Lema 1.1.7 se tiene que T_n es bounded below, ya que T_n es inyectiva y $R(T_n) = R(T^{n+1})$ es cerrado, así T_n es semi-Fredholm. También $(T_n)^*$ tiene la SVEP en 0 ya que $0 \in \mathrm{iso}\sigma(T_n)$, entonces $q(T_n) < \infty$,([1], Capítulo 3). Lo cual implica que $q(T) < \infty$ ([19], Lema 3). En consecuencia $0 < p(T) = q(T) < \infty$, lo cual contradice el hecho de que 0 no es un polo del resolvente de T. Por lo tanto $0 < \alpha(T_n) = \alpha(0I - T_n)$. Finalmente, como $N(T_n) \subseteq N(T)$ y $\alpha(T) < \infty$ entonces sigue la igualdad $\alpha(T_n) = \alpha(0I - T_n) < \infty$. Así, $0 \in \mathrm{iso}\sigma(T_n)$ y $0 < \alpha(0I - T_n) < \infty$. En consecuencia, $\lambda \in \pi_{00}(T_n)$ para cada $\lambda \in \pi_{00}(T)$, quedando el Lema demostrado.

$\square$

El Lema anterior puede extenderse como sigue:

Lema 2.2.2. *Si* 0 *no es un polo del resolvente de* $T \in L(X)$ *y* $R(T^n)$ *es cerrado, entonces* $\pi^a_{00}(T) \subseteq \pi^a_{00}(T_n)$.

Demostración:

Si $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$, entonces $\lambda I - T$ es inyectiva y $R(\lambda I - T)$ es cerrado. Ahora consideremos los dos casos diferentes, $\lambda \neq 0$ y $\lambda = 0$. Si $\lambda \neq 0$, por Lema 2.1.1,

$N(\lambda I - T_n) = N(\lambda I - T)$ y $R(\lambda I - T_n) = R(\lambda I - T) \cap R(T^n)$ es cerrado. De aquí, se tiene que $\lambda I - T_n$ es bounded below, y así $\lambda \notin \sigma_{ap}(T_n)$. En el otro caso, $-T$ bouded below implica que $0 = p(T) = p(T_n)$ y $R(T)$ es cerrado. Así, T_n es inyectiva y por el Lema 1.1.7, $R(T_n) = R(T^{n+1})$ es cerrado. De esto se obtiene que T_n es bounded below. En consecuencia, $\sigma_{ap}(T_n) \subseteq \sigma_{ap}(T)$. Similarmente, como en la prueba del Lema anterior, y tomando en cuenta el Lema 2.1.2, se prueba que iso$\sigma_{ap}(T) \subseteq$ iso$\sigma_{ap}(T_n)$.

Finalmente, mostraremos que $\pi^a_{00}(T) \subseteq \pi^a_{00}(T_n)$. Observemos que si $\lambda \in \pi^a_{00}(T)$, entonces $\lambda \in$iso$\sigma_{ap}(T)$ y $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$. Por lo tanto $\lambda \in$ iso $\sigma_{ap}(T_n)$. Para $\lambda \neq 0$, por el Lema 2.1.1, se tiene $\alpha(\lambda I - T) = \alpha(\lambda I - T_n)$ y así $0 < \alpha(\lambda I - T_n) < \infty$. En el caso $\lambda = 0$, $p(T_n) = 0$ y $R(T^n)$ es cerrado. Similarmente al caso $p(T_n) = 0$ y $R(T^n)$ cerrado, en la prueba del Lema 2.1.3, se muestra que $0 < \alpha(0I - T_n) < \infty$, en consecuencia, $\pi^a_{00}(T) \subseteq \pi^a_{00}(T_n)$.

$\square$

2.3. Teoremas de Weyl para T, versus Teoremas de a-Weyl para T_n

En esta sección daremos condiciones para los cuales los Teoremas de Weyl (resp. a-Weyl) para un operador $T \in L(X)$, son equivalentes a los Teoremas de Weyl (resp. a-Weyl), para cierta restricción T_n de T.

Es bien conocido que si λ es un polo del resolvente de T, entonces λ es un punto aislado del espectro $\sigma(T)$. Por lo tanto, el siguiente resultado es una consecuencia inmediata del Lema 2.1.1 y el Lema 2.1.3.

Teorema 2.3.1. *Supongamos que* 0 *no es un punto aislado de* $\sigma(T)$. *Entonces* T *satisface (W) si y sólo si existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $R(T^n)$ *es cerrado y* T_n *satisface (W).*

Demostración:

(Necesidad). Supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface (W). Sea $\lambda \in \pi_{00}(T)$, es decir, $\lambda \in \text{iso}\sigma(T)$ y $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$. Por hipótesis y en virtud del Lema 2.1.3, $0 \neq \lambda \in \pi_{00}(T_n) = \sigma(T_n) \setminus \sigma_w(T_n)$. Luego, $\alpha(\lambda I - T_n) = \beta(\lambda I - T_n) < \infty$, ya que $\lambda I - T_n$ es un operador de Weyl y por el Lema 2.1.1 se tiene

$$\alpha(\lambda I - T) = \alpha(\lambda I - T_n) = \beta(\lambda I - T_n) = \beta(\lambda I - T) < \infty$$

Por lo tanto, $\lambda \in \sigma(T)$ porque $\lambda \in \sigma(T_n) \subseteq \sigma(T)$. Así, $\lambda I - T$ es de Weyl, en consecuencia $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$. Pero como $\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) \subseteq \pi_{00}(T)$, se sigue que $\pi_{00}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$, lo cual implica que T satisface (W).

(Suficiencia). Supongamos que T satisface (W), entonces para $n = 0$, $R(T^0) = X$ es cerrado y $T_0 = T$ satisface (W). $\square$

En el mismo sentido que el Teorema 2.2.1, tenemos la siguiente caracterización del Teorema de a-Weyl para algún operador T a través del Teorema de a-Weyl para alguna restricción T_n de T.

Teorema 2.3.2. *Supongamos que 0 no es un punto aislado de $\sigma(T)$. Entonces T satisface (aW) si y sólo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface (aW).*

Demostración: (Necesidad). Supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface (aW). Sea $\lambda \in \pi_{00}^a(T)$, por hipótesis y el Lema 2.1.3, $\lambda \in \pi_{00}^a(T_n) = \sigma_{ap}(T_n) \setminus \sigma_{uw}(T_n)$. Así, $\lambda I - T_n$ es superiormente semi-Fredholm, debido a que $\lambda I - T_n$ es superiormente semi-Weyl. Como $\lambda I - T_n$ es superiormente semi-Fredholm, se tiene que $R((\lambda I - T_n)^m)$ es cerrado en $R(T^n)$ para todo $m \in \mathbb{N}$, luego por el Lema 2.1.2, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $R((\lambda I - T)^k)$ es cerrado. Pero como $\alpha(\lambda I - T) < \infty$, entonces $\alpha((\lambda I - T)^k) < \infty$. Esto nos dice que $(\lambda I - T)^k$ es superiormente semi-Fredholm, lo cual implica que $\lambda I - T$ es superiormente semi-Fredholm. Por lo tanto, T tiene la SVEP en λ porque $\lambda \in \text{iso}\ \sigma_{ap}(T)$. En consecuencia, si $\lambda \in \pi_{00}^a(T)$, entonces $\lambda I - T$ es superiormente semi-Fredholm y $p(\lambda I - T) < \infty$, luego, $\lambda I - T$

es superiormente semi-Weyl y $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$, así $\lambda \in \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{uw}(T)$, lo cual nos dice que $\pi_{00}^{a}(T) \subseteq \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{uw}(T)$. Como $\sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{uw}(T) \subseteq \pi_{00}^{a}(T)$, se sigue que $\pi_{00}^{a}(T) = \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{uw}(T)$, lo cual implica que T satisface (aW).

(Suficiencia). Si T satisface (aW), entonces para $n = 0$, trivialmente se tiene $R(T^0) = X$ es cerrado y $T_0 = T$ satisface (aW). $\square$

Claramente T tiene la SVEP en todo punto aislado de $\sigma(T)$. Por lo tanto por el Teorema 2.3.1 y el Teorema 2.3.2 se tienen los siguientes Corolarios.

Corolario 2.3.1. *Si T no tiene la SVEP en 0, entonces:*

1. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface (W) si y solo si T satisface (W).*

2. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface (aW) si y solo si T satisface (aW).*

Corolario 2.3.2. *Si $0 \notin \partial\sigma(T)$, entonces:*

1. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface (W) si y solo si T satisface (W).*

2. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface (aW) si y solo si T satisface (aW).*

Corolario 2.3.3. *Si $p(T) = \infty$, entonces:*

1. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface (W) si y solo si T satisface (W).*

2. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface (aW) si y solo si T satisface (aW).*

Corolario 2.3.4. *Si $q(T) = \infty$, entonces:*

1. *Existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $R(T^n)$ *es cerrado y* T_n *satisface (W) si y solo si* T *satisface (W).*

2. *Existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $R(T^n)$ *es cerrado y* T_n *satisface (aW) si y solo si* T *satisface (aW).*

Sean $T \in L(X)$ y M un subespacio propio continuamente proyectable de X. Si $P \in L(X)$ es una proyección sobre X, i. e $P^2 = P$ y $P(X) = M$. Entonces podemos definir el operador $\widehat{T} := PT \in L(X)$. Por otra parte, la compresión de T al subespacio $M = P(X)$, denotada T_P, es el operador $T_P : M \to M$ dada por la fórmula $T_P x = PTx$ para todo $x \in M = P(X)$. Obviamente $\widehat{T}$ es una extensión de T_P. Además, si $PT = TP$ entonces $M = P(X)$ es T-invariante y resulta que $T_P = T|_M$, donde $T|_M$ denota la restricción de T sobre M. En caso de un espacio de Hilbert H, se tiene la siguiente aplicación de nuestros resultados.

Ejemplo 2.3.1. *Si* $T \in L(H)$ *y* $R(T^n)$ *es un subespacio cerrado de* H*, para algún* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* $H = R(T^n) \oplus R(T^n)^{\perp}$*. Así,* $R(T^n)$ *es continuamente proyectable en* H *y existe una proyección* $P \in L(H)$ *tal que* $P(H) = R(T^n)$*. Entonces, como* $R(T^n)$ *es* T*-invariante, tendremos que* T *satisface el Teorema de Weyl (resp. a-Weyl) si y sólo si* $\widehat{T}$ *satisface el Teorema de Weyl (resp. a-Weyl). En consecuencia, si alguna de las siguientes condiciones valen:*

(i) $0 \notin iso\,\sigma(T) \cup iso\,\sigma(\widehat{T})$,

(i) $0 \notin \partial\sigma(T) \cup \partial\sigma(\widehat{T})$,

(iii) $0 \in \Xi(T) \cap \Xi(\widehat{T})$,

(iv) $0 \in \Xi(T^*) \cap \Xi(\widehat{T}^*)$,

entonces T *satisface el Teorema de Weyl (resp. a-Weyl) si y sólo si* T_P *satisface el Teorema de Weyl (resp. a-Weyl). Así, el Lema 3.56 obtenido por Aiena en [1] puede ser extendido para las propiedades espectrales estudiadas anteriormente. Es decir, el*

Teorema de Weyl (resp. a-Weyl) para T es equivalente al Teorema de Weyl (resp. a-Weyl) de alguna compresión de T.

Capítulo 3

Teoremas Generalizados de Wey, a-Weyl y Restricciones de un Operador

En este capítulo desarrollamos en detalle los resultados del artículo, C. Carpintero, D. Muñoz, E. Rosas, O. García, J. Sanabria: Weyl type theorems and restrictions, Mediterranean Journal of Mathematics. [22] (2014), 1215-1228, en los que se extienden las caracterizaciones obtenidas en el segundo capítulo a los Teoremas generalizados de Weyl y a-Weyl de un operador, a través de sus restricciones sobre potencias cerradas de su rango.

3.1. Operadores Casi Fredholm

En esta sección se estudian los operadores casi Fredholm, introducidos por Labrousse en [32], y se examinan algunas características y propiedades de estos operadores.

Para $T \in L(X)$ y $n \in \mathbb{N}$, denotaremos

$$\kappa_n(T) = \dim\ ((R(T^n) \cap N(T))/(R(T^{n+1}) \cap N(T))).$$

En virtud del inciso 7, del Lema 1.1.1,

$$\kappa_n(T) = \dim\ ((R(T) + N(T^{n+1}))/(R(T) + N(T^n))).$$

Lema 3.1.1. *Sean $T \in L(X)$ un operador y $d \in \mathbb{N}$ tales que*

$$R(T^d) \cap N(T) = R(T^n) \cap N(T),$$

para todo entero $n \geq d$, entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

1. *$N(T^d) + R(T)$ y $N(T) \cap R(T^d)$ son cerrados en X;*

2. *$R(T^{d+1})$ es cerrado;*

3. *$R(T^n)$ es cerrado, para todo $n \geq d$;*

4. *$R(T^i) + N(T^j)$ es cerrado, siempre que $i + j \geq d$*

Demostración:

(1)$\Rightarrow$(3). Observemos que $N(T) \cap R(T^{d+j+1}) = N(T) \cap R(T^d)$ es cerrado, para todo $j \in \mathbb{N}$, y por el inciso (4) del Lema 1.1.1,

$$T^{-1}(N(T) \cap R(T^{d+j+1})) = N(T) + N(T^2) \cap R(T^{d+j}),$$

por lo cual $N(T) + N(T^2) \cap R(T^{d+j})$ es cerrado para todo $j \in \mathbb{N}$, y como $N(T) \cap (N(T^2) \cap R(T^{d+j})) = N(T) \cap R(T^{d+j})$ es cerrado, por el Lema de Neubauer, $N(T^2) \cap R(T^{d+j})$ es cerrado, para todo $j \in \mathbb{N}$. Supongamos que $N(T^m) \cap R(T^{d+j})$ es cerrado, para $m \geq 1$. Según esta hipótesis y por la igualdad

$$T^{-1}(N(T^m) \cap R(T^{d+j+1})) = N(T) + N(T^{m+1}) \cap R(T^{d+j}),$$

concluimos que $N(T) + N(T^{m+1}) \cap R(T^{d+j})$ es cerrado. Así

$$N(T) + N(T^{m+1}) \cap R(T^{d+j}),$$

es cerrado cualesquiera sean $m, j \in \mathbb{N}$. Además, como

$$N(T) \cap (N(T^{m+1}) \cap R(T^{d+j})) = N(T) \cap R(T^{d+j}),$$

sigue que $N(T) \cap (N(T^{m+1}) \cap R(T^{d+j}))$ es cerrado. Por el Lema de Neubauer concluimos entonces que $N(T^{m+1}) \cap R(T^{d+j})$ es cerrado, para todo $m, j \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $N(T^m) \cap R(T^{d+j})$ es cerrado para todo $m, j \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, si $x \in N(T^{d+1})$, entonces $T(T^d x) = T^{d+1}x = 0$. Así $T^d x \in N(T) \cap R(T^d) = N(T) \cap R(T^{d+j})$, por lo que existe $u \in X$ tal que $T^d x = T^{d+j}u$, de donde sigue que $x - T^j u \in N(T^d)$. Según esto, tendremos que

$$x = x - T^j u + T^j u \in N(T^d) + R(T^j).$$

Concluyéndose de esta forma que $N(T^{d+1}) \subseteq N(T^d) + R(T^j)$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Considerando el operador lineal $\hat{T} : X \setminus N(T^d) \to X \setminus N(T^d)$, dado por $\hat{T}(x + N(T^d)) = Tx + N(T^d)$, tendremos entonces que $N(\hat{T}) \subseteq R(\hat{T}^j)$, para cualquier $j \in \mathbb{N}$, ya que

$$N(\hat{T}) = N(T^{d+1}) \subseteq R(T^j) + N(T^d) = R(\hat{T}^j).$$

Como además $R(\hat{T}) = R(T) + N(T^d)$ es cerrado concluimos, del Lema 1.1.2 y el Teorema 1.1.1, que $\gamma(\hat{T}^j) \geq (\gamma(\hat{T}))^j > 0$, por lo cual $R(T^j) + N(T^d) = R(\hat{T}^j)$ es cerrado, para cada $j \in \mathbb{N}$. Siendo que $N(T^d) + R(T^{d+j})$ y $N(T^d) \cap R(T^{d+j})$ son cerrados, concluimos nuevamente por el Lema de Neubauer que $R(T^{d+j})$ es cerrado cualquiera sea $j \in \mathbb{N}$, es decir $R(T^n)$ es cerrado para todo $n \geq d$.

(3)$\Rightarrow$(4). Supongamos que $R(T^n)$ es cerrado, para todo $n \geq d$. Según esto, $R(T^{i+j})$ es cerrado, siempre que $i + j \geq d$. Como T^j es continuo y además, por el inciso (3) del Lema 1.1.1,

$$R(T^i) + N(T^j) = (T^j)^{-1}(R(T^{i+j})),$$

concluimos que $R(T^i) + N(T^j)$ es cerrado siempre que $i + j \geq d$.

(4)$\Rightarrow$(1). Si $R(T^i) + N(T^j)$ es cerrado, siempre que $i + j \geq d$. Tendremos $R(T) + N(T^d)$ y $R(T^d) = R(T^d) + N(T^0)$ son cerrados, así $R(T) + N(T^d)$ y $N(T) \cap R(T^d)$ son cerrados.

(3)$\Rightarrow$(2). Es inmediata.

(2)$\Rightarrow$(1). Siendo $R(T^{d+1})$ cerrado, y como $T^{-1}(R(T^{d+1})) = R(T) + N(T^d)$, entonces $R(T) + N(T^d)$ es cerrado. Por otro lado, $N(T) \cap R(T^d) = N(T) \cap R(^{d+1})$ es cerrado. $\square$

En la siguiente definición, debida a Labrousse [32], se describen los operadores casi Fredholm.

Definición 3.1.1. *Un operador $T \in L(X)$ se dice casi-Fredholm, si existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $\kappa_n(T) = 0$, para todo $n \geq d$, y vale alguna de las condiciones mencionadas en el Lema anterior.*

$QF(X)$ denotará la colección de todos los operadores casi Fredholm en X.

Berkani y Ouahab en [14], introducen el siguiente espectro asociado con los operadores casi-Fredholm.

Definición 3.1.2. *El espectro esencialmente casi Fredholm de un operador $T \in L(X)$, denotado $\sigma_e(T)$, se define como*

$$\sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \textit{ no es casi Fredholm } \}.$$

3.2. Operadores Semi B-Fredholm

A continuación describiremos los operadores B-Fredholm y semi B-Fredholm, introducidos por Berkani en [13] y [15], los cuales constituyen, respectivamente, una generalización de los operadores de Fredholm y semi Fredholm.

Definición 3.2.1. *Un operador $T \in L(X)$, se dice semi B-Fredholm superior (resp. inferior), si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado en X y T_n, visto como operador* *de $R(T^n)$ en $R(T^n)$, es semi-Fredholm superior (resp. inferior). T es un operador B-Fredholm, si $R(T^n)$ es cerrado y T_n es de Fredholm, para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Las clases introducidas anteriormente se denotarán, respectivamente, como: $SBF_+(X)$, $SBF_-(X)$ y $BF(X)$. La clase de los operadores semi B-Fredholm se define como $SBF_\pm(X) = SBF_+(X) \cup SBF_-(X)$. Notemos que $BF(X) = SBF_+(X) \cap SBF_-(X)$.

Observe que las proyecciones continuas son operadores semi B-Fredholm que no necesariamente son semi-Fredholm. De manera similar los operadores nilpotentes.

El siguiente resultado exhibe la relación existente entre los operadores semi B-Fredholm y los operadores cuasi Fredholm.

Teorema 3.2.1. *Sea $T \in L(X)$. T es un operador semi B-Fredholm superior (resp. inferior) si y sólo si $T \in QF(X)$ y $N(T) \cap R(T^d)$ (resp. $R(T) + N(T^d)$) es de dimensión (resp. codimensión) finita, para algún $d \in \mathbb{N}$.*

Demostración:

(Suficiencia). Supongamos que T es un operador semi B-Fredholm superior (resp. inferior), entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha(T_n) < \infty$ (resp. $\beta(T_n) < \infty$)y $R(T^n)$ es cerrado, por el inciso (1) (resp (2)) del Lema 1.1.8, se tiene que existe $d \in \mathbb{N}$, $d \geq n$, tal que $\alpha(T_m) = \alpha(T_d) < \infty$ (resp. $\beta(T_m) = \beta(T_d) < \infty$) para todo $m \geq d$, según esto $\kappa_m(T) = 0$ para todo $m \geq d$. Por otro lado, como T_n es semi Fredholm superior (rep. inferior), entonces $R(T^{n+j}) = R(T_n^j)$ es cerrado para todo $j \in \mathbb{N}$, ya que T_n^j es semi Fredholm, luego $R(T^{d+1})$ es cerrado. Por lo cual $\kappa_m(T) = 0$, para $m \geq d$, y $R(T^{d+1})$ es cerrado. Así T es cuasi Fredholm y $N(T) \cap R(T^d)$ (resp. $R(T) + N(T^d)$) es de dimensión (resp. codimensión) finita.

(Necesidad). Si $T \in QF(X)$ y $N(T) \cap R(T^d)$ (resp. $R(T) + N(T^d)$) es de dimensión (resp. codimensión) finita, para algún $d \in \mathbb{N}$. Entonces $\alpha(T_d) < \infty$ (resp.

$\beta(T_d) < \infty$), por el Lema 1.1.8, existe un $k \geq d$ tal que $\alpha(T_n) = \alpha(T_k)$ (resp. $\beta(T_n) = \beta(T_k)$), para cada $n \geq k$. Por otra parte, como $T \in QF(X)$ existe un $k' \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado, siempre que $n \geq k'$. En consecuencia, T es un operador semi B-Fredholm superior (resp. inferior).

$\square$

Teorema 3.2.2. *Para un operador $T \in L(X)$, las siguientes proposiciones son equivalentes*

1. *T es B-Fredholm*
2. *existen subespacios M y N, cerrados, T-invariantes para los cuales $X = N \oplus M$ y $T|_N$ es nilpotente y $T|_M$ es de Fredholm.*

Demostración:

(2) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que M y N son subespacios cerrados, T-invariantes, tales que $X = N \oplus M$, $T|_N$ es nilpotente y $T|_M$ es de Fredholm. Sea d el índice de nilpotencia de $T|_N$, entonces $R(T^n) = R((T|_M)^n)$ para todo $n \geq d$. Según esto, obtenemos lo siguiente

$$N(T_n) = N(T) \cap R(T^n) = N(T) \cap R((T|_M)^n) \subseteq N(T) \cap R(T|_M) \subseteq N(T|_M).$$

Así $\alpha(T_n) = \dim N(T_n) \leq \dim N(T|_M) < \infty$, pues $T|_M$ es Fredholm. Por otro lado, como $R(T^{n+1}) = R((T|_M)^{n+1})$ y $R(T^n) \subset X$, entonces $\beta(T_n) \leq \beta(R((T|_M)^{n+1})) < \infty$, ya que $(T|_M)^n$ es Fredholm, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, pues $T|_M$ lo es. De lo anterior T_n es de Fredholm, para $n \geq d$, y en consecuencia T es B-Fredholm.

(1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que T es B-Fredholm, entonces existe un $d \in \mathbb{N}$ tal que T es cuasi-Fredholm, y $N(T) \cap R(T^d)$, $R(T) + N(T^d)$ son subespacios complementados. Según esto, y por el Teorema 3.2.1, existen subespacios M y N, cerrados, T-invariantes tales que $X = N \oplus M$, $T|_N$ es nilpotente y $T|_M$ es semi regular. Además, existe un n (n cualquier entero mayor que d y el índice de nilpotencia de

$T\mid_N$) para el cual

$$\alpha(T_n)=\alpha((T\mid_N)^n)+\alpha((T\mid_M)^n)=\alpha((T\mid_M)^n),$$

y

$$\beta(T_n)=\beta((T\mid_N)^n)+\beta((T\mid_M)^n)<\infty.$$

Siendo que $\kappa_j(T)=0$ para todo $j\geq d$, concluimos que $\alpha(T\mid_M)<\infty$ y $\beta(T\mid_M)<\infty$, así $T\mid_M$ es de Fredholm.

$\square$

Seguidamente introducimos los espectros correspondiente a los operadores semi B-Fredholm.

Definición 3.2.2. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T\in L(X)$.*

$$\sigma_{ubf}(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda I-T\notin SBF_+(X)\},$$

$$\sigma_{lbf}(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda I-T\notin SBF_-(X)\},$$

$$\sigma_{bf}(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda I-T\notin BF(X)\},$$

definen, respectivamente, los espectros: semi B-Fredholm superior, semi B-Fredholm inferior y B-Fredholm de un operador $T\in L(X)$.

Claramente,

$$\sigma_{bf}(T)=\sigma_{ubf}(T)\cup\sigma_{lbf}(T).$$

3.3. Operadores semi B-Browder y B-Weyl

En esta sección generalizamos la clase de los operadores semi Browder, damos caracterizaciones para esta clase generalizada de operadores y obtenemos nuevas relaciones espectrales, para los espectros correspondientes.

Definición 3.3.1. *Un operador $T \in L(X)$, X de Banach infinito dimensional, se dice semi B-Browder superior (resp. inferior), si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado en X y T_n es semi Browder superior (resp. inferior). T es un operador B-Browder (res. semi B-Browder), si $R(T^n)$ es cerrado y T_n es de Browder (resp. semi Browder), para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Denotaremos, respectivamente, por $SBB_+(X)$, $SBB_-(X)$ a las clases de los operadores B-Browder superior y B-Browder inferior. Además,

$$SBB(X) = SBB_+(X) \cap SBB_-(X),$$

$$SBB_\pm(X) = SBB_+(X) \cup SBB_-(X),$$

denotan, respectivamente, las clases de los operadores B-Browder y semi B-Browder.

De la Definición 3.2.1 y los Lemas 1.1.5 y 1.1.6, procede la siguiente caracterización para los operadores semi B-Browder.

Teorema 3.3.1. *Un operador $T \in L(X)$, X de Banach infinito dimensional, es semi B-Browder superior (resp. inferior), si y sólo existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y $p(T) < \infty$ (resp. $q(T) < \infty$).*

Demostración:

Supongamos que $T \in L(X)$ es semi B-Fredholm superior, por la Definición 3.2.1, tendremos que $R(T^n)$ es cerrado, $\alpha(T_n) < \infty$ y $p(T_n) < \infty$ para cierto entero no negativo n. Como $R(T^n)$ es cerrado y $\alpha(T_n) < \infty$, tendremos que T es semi B-Fredholm. Lo que implica, según el Teorema 3.2.1, que T es cuasi Fredholm y existe un $d \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^j)$ es cerrado para $j \geq d$. Por otra parte, por el Lema 1.1.5, la condición $p(T_n) < \infty$ es equivalente a que $p(T) < \infty$. De acuerdo a lo anterior tenemos que $R(T^j)$ es cerrado para $j \geq d$ y $p(T) < \infty$, siempre que $j \geq \max\{d, p(T)\}$, en consecuencia

$$R(T_j^*) = T^{*j+1}(X^*) = N(T^{j+1})^\perp = N(T^j)^\perp = T^{*j}(X^*) = R(T^{*j}).$$

Lo que nos dice que T_j^* es sobreyectivo y que $q(T^*) < \infty$, para cada $j \geq \max\{d, p(T)\}$. Así $R(T^{*j})$ es cerrado, T_j^* es semi B-Fredholm inferior y $q(T_j^*) < \infty$, para cada $j \geq \max\{d, p(T)\}$, que por la Definición 3.2.1 significa que T^* es semi B-Browder inferior.

Recíprocamente, si $T^* \in L(X^*)$ es semi B-Fredholm inferior, por la Definición 3.2.1, tendremos que $R(T^{*n})$ es cerrado, $\beta(T_n^*) < \infty$ y $q(T_n^*) < \infty$ para cierto $n \in \mathbb{N}$. Siendo $R(T^{*n})$ cerrado y $\beta(T_n^*) < \infty$, resulta que T^* es semi B-Fredholm y entonces, por el Teorema 3.2.1, T^* es casi Fredholm y existe un $d \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^{*j})$ es cerrado para $j \geq d$. Por otra parte, por el Lema 1.1.5, $q(T_n^*) < \infty$ equivale a que $q(T^*) < \infty$. De acuerdo a lo anterior tenemos que $R(T^{*j})$ es cerrado para $j \geq d$ y $q(T) < \infty$, siempre que $j \geq \max\{d, q(T)\}$, en consecuencia

$$^{\perp}(N(T^{j+1})^{\perp}) = ^{\perp}(T^{*j+1}(X^*)) = ^{\perp}(T^{*j}(X^*)) = ^{\perp}(N(T^j)^{\perp}).$$

Resultando la igualdad,

$$N(T^{j+1}) = ^{\perp}(N(T^{j+1})^{\perp}) = ^{\perp}(N(T^j)^{\perp}) = N(T^j),$$

para todo $j \geq \max\{d, q(T)\}$, y así $p(T) < \infty$. Lo que implica, por el Lema 1.1.5, que existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $p(T_j) = 0$ siempre que $j \geq k$. Por lo cual $\alpha(T_j) = 0 < \infty$, para cada $j \geq k$. De lo anterior se concluye que para cada $j \geq \max\{d, q(T), k\}$; $R(T^j)$ es cerrado, $\alpha(T_j) < \infty$ y $p(T_j) < \infty$ que, por la Definición 3.3.1, nos dice que T es semi B-Browder superior.

$\square$

Las distintas clases de operadores definidas y estudiadas anteriormente motivan, de manera natural, la definición de ciertos espectros asociados respectivamente a cada uno estos, los cuales se introducen a continuación.

Definición 3.3.2. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$.*

$$\sigma_{ubb}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin SBB_+(X)\},$$

$$\sigma_{lbb}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin SBB_{-}(X)\},$$

$$\sigma_{bb}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin BB(X)\},$$

definen, respectivamente, los espectros: semi B-Browder superior, semi B-Browder inferior y B-Browder de un operador $T \in L(X)$.

Del siguiente resultado, debido a Berkani, [13] se deriva la compacidad del espectro B-Browder de un operador.

Teorema 3.3.2. *Para cada operador $T \in L(X)$, X un espacio de Banach complejo, $\sigma_{bb}(T)$ es cerrado.*

Demostración:

Veáse Berkani [13].

$\square$

Claramente, se tiene que

$$\sigma_{bb}(T) = \sigma_{ubb}(T) \cup \sigma_{lbb}(T).$$

Además también, del Teorema 3.2.1, siguen que

$$\sigma_{ubb}(T) = \sigma_{lbb}(T^{*}) \quad \sigma_{lbb}(T) = \sigma_{ubb}(T^{*})$$

Por lo cual,

$$\sigma_{bb}(T) = \sigma_{bb}(T^{*})$$

Según el Lema 1.1.8, tenemos que si T_n es un operador de Fredholm entonces T_m es de Fredholm y ind $(T_m) =$ ind (T_n), para todo $m \geq n$. Así, el indice de un operador B-Fredholm T, es definido como ind $(T) =$ ind (T_n), donde T_n es la restricción de T sobre cualquier $R(T^n)$ cerrado, que sea de Fredholm. Esta noción de indice permite la siguiente generalización de los operadores de Weyl, debida a Berkani [13].

Definición 3.3.3. *Un operador $T \in L(X)$, X un espacio de Banach, se dice un operador B-Weyl si T es B-Fredholm e ind $T = 0$*

Observemos que T B-Weyl justamente significa que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado, T_n es Fredholm e ind $(T_n) = 0$.

La clase de los operadores B-Weyl, se denotará por $BW(X)$. Como toda proyección continua es un operador B-Weyl y no es de Weyl, la clase $BW(X)$ contiene propiamente a la clase de los operadores de Weyl. Observemos que $BW(X)$ también puede describirse en la forma

$$BW(X) = BW_+(X) \cap BW_(X),$$

donde

$$\begin{aligned} BW_+(X) &= \{T \in SBF_+(X) : \text{ind } (T) \leq 0\} \\ BW_-(X) &= \{T \in SBF_-(X) : \text{ind } (T) \geq 0\} \end{aligned}$$

Definición 3.3.4. *El espectro de B-Weyl determinado por un operador lineal y acotado $T \in L(X)$, se define según*

$$\sigma_{bw}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin BW(X)\}.$$

Más aún, también se tienen las inclusiones siguientes:

(1) $\sigma_{bf}(T) \subseteq \sigma_{bw}(T) \subseteq \sigma_{bb}(T)$.

(2) $\sigma_{sbf}(T) \subseteq \sigma_{ubf}(T) \subseteq \sigma_{ubb}(T) \subseteq \sigma_{bb}(T)$

(3) $\sigma_{sbf}(T) \subseteq \sigma_{lbf}(T) \subseteq \sigma_{lbb}(T) \subseteq \sigma_{bb}(T)$

Donde $\sigma_{ubf}(T)$, $\sigma_{lbf}(T)$,$\sigma_{bf}(T)$, $\sigma_{sbf}(T)$ son, respectivamente, los espectros correspondientes a las generalizaciones en el sentido de Berkani de los operadores de Fredholm y semi Fredholm clásicos.

En la siguiente definición se generalizan las nociones de los espectros aproximado puntual y sobreyectivo de Weyl.

Definición 3.3.5. *Para un operador $T \in L(X)$, X un espacio de Banach complejo infinito dimensional, definimos:*

$$\sigma_{bw_+}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin BW_+(X)\}.$$

$$\sigma_{bw_-}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin BW_-(X)\}.$$

Note que

$$\sigma_{bw}(T) = \sigma_{bw_+}(T) \cup \sigma_{bw_-}(T).$$

Para finalizar esta sección, introduciremos la noción de Drazin Invertibilidad, la cual se define como sigue.

Definición 3.3.6. $T \in L(X)$*, X un espacio de Banach, se dice Drazin invertible a izquierda si $p := p(T) < \infty$ y $T^{p+1}(X)$ es cerrado, mientras que $T \in L(X)$ se dice Drazin invertible a derecha si $q := q(T) < \infty$ y $T^q(X)$ es cerrado.*

Es importante señalar que la condición $q = q(T) < \infty$ no implica que $T^q(X)$ sea cerrado. Obviamente, $T \in L(X)$ es Drazin invertible a izquierda y derecha si y sólo si T es Drazin invertible. En efecto, si $0 < p := p(T) = q(T) < \infty$ entonces $T^p(X) = T^{p+1}(X)$ es el núcleo de la proyección espectral P_0 asociada al subconjunto espectral $\{0\}$.

A continuación daremos algunas caracterizaciones espectrales para los operadores semi B-Browder y de B-Browder, las cuales extienden para esta clase de operadores generalizados los resultados obtenidos por P. Aiena y C. Carpintero en [5].

Teorema 3.3.3. *Para un operador $T \in L(X)$, las siguientes equivalencias son equivalentes:*

1. $\lambda_0 I - T$ *es Drazin invertible a izquierda;*

2. $\lambda_0 I - T$ *es superiormente semi B-Browder;*

3. $\lambda_0 I - T$ *es cuasi-Fredholm y tiene ascent finito;*

4. $\lambda_0 I - T$ *es cuasi-Fredholm y* T *tiene la* $SVEP$ *en* λ_0.

Demostración:

Véase [35].

$\square$

De manera similar se tiene a continuación un resultado dual.

Teorema 3.3.4. *Para un operador* $T \in L(X)$, *las siguientes equivalencias son equivalentes:*

1. $\lambda_0 I - T$ *es Drazin invertible a derecha;*

2. $\lambda_0 I - T$ *es inferiormente semi B-Browder;*

3. $\lambda_0 I - T$ *es cuasi-Fredholm y tiene descent finito;*

4. $\lambda_0 I - T$ *es cuasi-Fredholm y* T^* *tiene la* $SVEP$ *en* λ_0.

Demostración:

Véase [35].

$\square$

Como consecuencia inmediata de los dos teoremas anteriores, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 3.3.1. *Para un operador* $T \in L(X)$, *las siguientes equivalencias son equivalentes:*

1. $\lambda_0 I - T$ *es Drazin invertible;*

2. $\lambda_0 I - T$ *es B-Browder;*

3. $\lambda_0 I - T$ *es cuasi-Fredholm con ascent y descent finito;*

4. $\lambda_0 I - T$ *es cuasi-Fredholm y* T, T^* *tiene la* $SVEP$ *en* λ_0.

Demostración:

Véase [35].

$\square$

3.4. Teoremas generalizados de Weyl y a-Weyl

Recordemos que iso K denota el conjunto de puntos aislados de $K \subseteq \mathbb{C}$. Sea $T \in L(X)$, definimos

$$\begin{aligned} E(T) &= \{\lambda \in iso\sigma(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T)\}, \\ E^a(T) &= \{\lambda \in iso\sigma_{ap}(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T)\}. \end{aligned}$$

Claramente, para cualquier $T \in L(X)$, se tiene

$$\pi_{00}(T) \subseteq E(T) \subseteq E^a(T)$$

y

$$\pi_{00}(T) \subseteq \pi_{00}^a(T) \subseteq E^a(T)$$

Según Berkani y Koliha [17], T se dice que satisface el Teorema generalizado de Weyl, en símbolos, (gW), si $\sigma(T)\backslash\sigma_{bw}(T) = E(T)$. Similarmente, T se dice que satisface el Teorema generalizado de a-Weyl, en símbolos, (gaW), si $\sigma_{ap}(T)\backslash\sigma_{ubw}(T) = E^a(T)$.

Observemos que

$$(gaW) \Rightarrow (gW) \Rightarrow (W).$$

Véase en [9] y [17]. Lo contrario de todas estas implicaciones en general no es cierto.

Un operador acotado $T \in L(X)$ se dice que satisface el Teorema de Browder si $\sigma_w(T) = \sigma_b(T)$, mientras que T se dice que satisface el Teorema generalizado de Browder si $\sigma_{bw}(T) = \sigma_{bb}(T)$.

Teorema 3.4.1. *Si $T \in L(X)$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *T satisface el Teorema de Browder;*

2. *T satisface el Teorema generalizado de Browder;*

3. *T tiene la SVEP para todo $\lambda \notin \sigma_{bw}(T)$.*

Demostración:

La prueba de la equivalencia (1) $\Leftrightarrow$ (2) se pueden ver en [6] y para la equivalencia (2) $\Leftrightarrow$ (3) ver en [7].

$\square$

Observe que si $T \in L(X)$ satisface el Teorema de Weyl, entonces T satisface el Teorema de Browder, pero en general lo contrario no es cierto.

Lema 3.4.1. *Si 0 no es un polo del resolvente de $T \in L(X)$ y $R(T^n)$ es cerrado, entonces $E(T) \subseteq E(T_n)$.*

Demostración:

Por el Lema 2.1.1, $\sigma(T_n) \setminus \{0\} = \sigma(T) \setminus \{0\}$. También, $0 \notin \sigma(T)$ implica que T es biyectiva, así, $T = T_n$. Entonces $0 \notin \sigma(T) = \sigma(T_n)$. Consecuentemente $0 \notin \sigma(T)$ implica que $0 \notin \sigma(T_n)$, o equivalentemente, $0 \in \sigma(T_n)$ implica que $0 \in \sigma(T)$, luego, $\sigma(T_n) \subseteq \sigma(T)$. Además, iso $\sigma(T) \subseteq$ iso $\sigma(T_n)$. Entonces, si $\lambda \in$ iso $\sigma(T)$, se tiene que $\sigma(T) \cap \mathbb{D}_\lambda = \{\lambda\}$ para algún disco abierto $\mathbb{D}_\lambda \subseteq \mathbb{C}$ centrado en λ. Así, $\sigma(T_n) \cap \mathbb{D}_\lambda \subseteq \sigma(T) \cap \mathbb{D}_\lambda = \{\lambda\}$. En consecuencia, $\sigma(T_n) \cap \mathbb{D}_\lambda = \{\lambda\}$ o $\sigma(T_n) \cap \mathbb{D}_\lambda = \emptyset$. Si

$\sigma(T_n)\cap\mathbb{D}_\lambda = \emptyset$, entonces se tiene $\lambda \notin \sigma(T_n)$, de modo que $p(\lambda I - T_n) = \beta(\lambda I - T_n) = 0$. Para el caso $\lambda \neq 0$, por el Lema 2.1.1, $p(\lambda I - T) = 0$ y $\beta(\lambda I - T) = 0$, entonces $\lambda \notin \sigma(T)$ lo cual es una contradicción. En el caso donde $\lambda = 0$, $p(T_n) = q(T_n) = 0$, implica, por los Lemas 2 y 3 en [19] y proposición 38.6 en [30], que $0 < p(T) = q(T) < \infty$, lo cual es imposible, ya que 0 no es un polo del resolvente de T. En consecuencia, $\sigma(T_n) \cap \mathbb{D}_\lambda = \{\lambda\}$, así tenemos que $\lambda \in \operatorname{iso} \sigma(T_n)$. Ahora bien, el siguiente argumento muestra que $E(T) \subseteq E(T_n)$. Si $\lambda \in E(T)$, tenemos que $\lambda \in \operatorname{iso} \sigma(T_n)$, ya que $\lambda \in \operatorname{iso} \sigma(T)$. Por otra parte, para $\lambda \neq 0$, el Lema 2.1.1 implica que $\alpha(\lambda I - T) = \alpha(\lambda I - T_n)$, así $0 < \alpha(\lambda I - T_n)$. Para $\lambda = 0$, afirmamos que $\alpha(T_n) > 0$. Si $\alpha(T_n) = 0$, tenemos que $p(T_n) = 0$. Por el Lema 2 en [19], $p(T) < \infty$. Además,

$$p(T) = \inf\{k \in \mathbb{N} : T_k \text{ es inyectiva}\} \leq n.$$

Así, por el Lema 1.1.8, T_n es bounded below, ya que T_n es inyectiva y $R(T_n) = R(T^{n+1})$ es cerrado, así T_n es semi-Fredholm. También $(T_n)^*$ tiene la $SVEP$ en 0, ya que $0 \in \operatorname{iso} \sigma(T_n)$, así $q(T_n) < \infty$ ([1] Capítulo 3), lo cual implica por ([19] Lema 3) que $q(T) < \infty$. De aquí, $0 < p(T) = q(T) < \infty$, lo cual es una contradicción, pues 0 no es un polo del resolvente de T. Por lo tanto, $0 < \alpha(T_n) = \alpha(0I - T_n)$. Así, $0 \in \operatorname{iso} \sigma(T_n)$ y $0 < \alpha(0I - T_n)$. En consecuencia $\lambda \in E(T_n)$, para cada $\lambda \in E(T)$, entonces se tiene la inclusión $E(T) \subseteq E(T_n)$.

$\square$

El resultado del Lema anterior puede ser extendido como sigue.

Lema 3.4.2. *Si 0 no es un polo del resolvente de $T \in L(X)$ y $R(T^n)$ es cerrado, entonces $E^a(T) \subseteq E^a(T_n)$.*

Demostración:

Si $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{ap}}(T)$, entonces $\lambda I - T$ es inyectiva y $R(\lambda I - T)$ es cerrado. Consideremos ahora dos casos diferentes: $\lambda \neq 0$ y $\lambda = 0$. Si $\lambda \neq 0$, por el Lema 2.1.1, $N(\lambda I - T_n) = N(\lambda I - T)$ y $R(\lambda I - T_n) = R(\lambda I - T) \cap R(T^n)$ es cerrado. De aquí, $\lambda I - T_n$ es bounded below, y así $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{ap}}(T_n)$. En el otro caso, $-T$ bounded below implica que $0 = p(T) = p(T_n)$ y $R(T)$ es cerrado. Así T_n es inyectiva y por el Lema 1.1.8, $R(T_n) = R(T^{n+1})$ es cerrado. De acá obtenemos que T_n es bounded below. En consecuencia, $\sigma_{\text{ap}}(T_n) \subseteq \sigma_{\text{ap}}(T)$. Similarmente, como en la prueba del Lema 3.4.1 y tomando en cuenta el Lema 1.1.4, podemos probar que iso $\sigma_{\text{ap}}(T) \subseteq$ iso $\sigma_{\text{ap}}(T_n)$. Finalmente mostraremos que $E^a(T) \subseteq E^a(T_n)$. Observemos que, si $\lambda \in E^a(T)$ entonces $\lambda \in$ iso $\sigma_{\text{ap}}(T)$ y $0 < \alpha(\lambda I - T)$. Así, $\lambda \in$ iso $\sigma_{\text{ap}}(T_n)$. Para $\lambda \neq 0$, por el Lema 2.1.1 se tiene que $\alpha(\lambda I - T) = \alpha(\lambda I - T_n)$, y así $0 < \alpha(\lambda I - T_n)$. En el caso $\lambda = 0$, $p(T_n) = 0$ y $R(T^n)$ es cerrado y en la prueba del Lema 3.4.1, fácilmente deducimos que $0 < \alpha(T_n)$. En consecuencia $E^a(T) \subseteq E^a(T_n)$.

$\square$

3.5. Teoremas Generalizados de Weyl, a-Weyl y Restricciones

En esta sección se dan condiciones suficientes para los cuales el Teorema generalizado de Weyl (resp. el Teorema generalizado de a-Weyl) para un operador $T \in L(X)$ es equivalente al Teorema generalizado de Weyl (resp. el Teorema generalizado de a-Weyl), para cierta restricción T_n de T.

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del Lema 2.1.1 y el Lema 3.4.1.

Teorema 3.5.1. *Si 0 no es un punto aislado del espectro $\sigma(T)$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface (gW), si y solo si T satisface (gW).*

Demostración:

Asumamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface (gW). Sea $\lambda \in E(T)$, es decir, $\lambda \in$ iso $\sigma(T)$ y $0 < \alpha(\lambda I - T)$. En virtud de la hipótesis y por el Lema 3.4.1, tenemos que $\lambda \in E(T_n) = \sigma(T_n) \setminus \sigma_{\text{bw}}(T_n)$. Ya que $\lambda I - T_n$ es B-Fredholm, entonces $\lambda I - T_n$ es casi-Fredholm ([15] Prop. 2.5). Entonces existe

$d \in \mathbb{N}$ tal que $R((\lambda I - T_n)^m)$ es un subespacio cerrado de $R(T^n)$ para todo $m \geq d$. Como $\lambda \in E(T)$ y 0 no es un punto aislado del espectro, $\lambda \neq 0$, y por el Lema 1.1.4, $R((\lambda I - T)^m)$ es cerrado para todo $m \geq d$. Ahora, siendo $\lambda \in \text{iso}\,\sigma(T)$, entonces T tiene la $SVEP$ en λ, y así T_n tiene la $SVEP$ en λ. Pero $\lambda I - T_n$ es quasi-Fredholm, y por el Teorema 2.3 en [3], $p(\lambda I - T_n) < \infty$. De nuevo $\lambda \neq 0$, implica por el Lema 2.1.1 que $p(\lambda I - T) = p(\lambda I - T_n) < \infty$. Por el lema 1.1.6 deducimos que $d \leq p = p(\lambda I - T) < \infty$, esto implica que $R((\lambda I - T)^{p+1})$ es cerrado. Luego, $\lambda I - T$ es un operador Drazin invertible a izquierda, y por el Teorema 3 en [19], $\lambda I - T$ es un operador cuasi-Fredholm. También, ya que T y T^* tienen la $SVEP$ en λ, por Corolario 1 en [**?**], se sigue que $\lambda I - T$ es B-Browder. En consecuencia $\lambda I - T$ es B-Weyl. Por lo tanto $\lambda \in \sigma(T)$ y $\lambda I - T$ es B-Weyl, así $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_{\mathrm{bw}}(T)$ del cual obtenemos la inclusión $E(T) \subseteq \sigma(T) \setminus \sigma_{\mathrm{bw}}(T)$. Ahora mostraremos la otra inclusión. Observemos que bajo la hipótesis de que T_n satisface (gW), tenemos que T_n satisface (W). Por ([22] Teorema 3.1), T satisface (W) y entonces T satisface el Teorema de Browder. De acuerdo al Teorema 3.5.1 se tiene que T tiene la SVEP en todo $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_{\mathrm{bw}}(T)$. En consecuencia,

$$\sigma(T) \setminus \sigma_{\mathrm{bw}}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{\mathrm{bb}}(T) \subseteq \pi_{00}(T) \subseteq E(T).$$

Por lo tanto, $\sigma(T) \setminus \sigma_{\mathrm{bw}}(T) \subseteq E(T)$. De aquí, $E(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{\mathrm{bw}}(T)$, y T satisface (gW). Para el reverso, suponga que T satisface (gW). Luego, para $n = 0$, $R(T^0) = X$ es cerrado y $T_0 = T$ satisface (gW).

$\square$

De la misma manera como en Teorema 3.5.1, se tiene la siguiente caracterización para el Teorema Generalizado de a-Weyl.

Teorema 3.5.2. *Si 0 no es un punto aislado del espectro $\sigma(T)$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface (gaW), si y solo si T satisface (gaW).*

Demostración:

Procediendo como en la primera parte del Teorema 3.5.1, si $\lambda \in E^a(T)$, por el Lema 3.4.2, $\lambda \in E^a(T_n) = \sigma_{\mathrm{ap}}(T_n) \setminus \sigma_{\mathrm{ubw}}(T_n)$. Así, $\lambda I - T_n$ es superiormente semi B-Fredholm, y en consecuencia casi-Fredholm ([15] Prop. 2.5). Entonces existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $R((\lambda I - T_n)^m)$ es un subespacio cerrado de $R(T^n)$ para todo $m \geq d$. Como $\lambda \in E^a(T)$ y 0 no es un punto aislado del espectro, $\lambda \neq 0$, y por el Lema 1.1.4, $R((\lambda I - T)^m)$ es cerrado para todo $m \geq d$. Sea $\lambda \in \text{iso}\, \sigma_{\text{ap}}(T)$, entonces T tiene la $SVEP$ en λ, y por lo tanto también su restricción T_n tiene la $SVEP$ en λ. Pero $\lambda I - T_n$ es cuasi-Fredholm, y de nuevo por el Teorema 2.3 en [3] implica que $p(\lambda I - T_n) < \infty$. Ya que $\lambda \neq 0$, por el Lema 2.1.1, $p(\lambda I - T) = p(\lambda I - T_n) < \infty$. Por el lema 1.1.6, deducimos que $d \leq p = p(\lambda I - T) < \infty$, y esto implica que $R((\lambda I - T)^{p+1})$ es cerrado. Así, $\lambda I - T$ Drazin invertible a izquierda, o equivalentemente superiormente semi B-Browder, por el Teorema 3 en [19] se tiene que es B-Weyl. Por lo tanto, $\lambda \in \sigma_{\text{ap}}(T) \setminus \sigma_{\text{ubw}}(T)$, del cual se obtiene la inclusión $E^a(T) \subseteq \sigma_{\text{ap}}(T) \setminus \sigma_{\text{ubw}}(T)$. Como en la prueba del Teorema 3.5.1 la inclusión opuesta se cumple, por lo tanto $E^a(T) = \sigma_{\text{ap}}(T) \setminus \sigma_{\text{ubw}}(T)$, y T satisface (gaW). Inversamente, supongamos que T satisface (gaW). Entonces para $n = 0$, trivialmente $R(T^0) = X$ es cerrado y $T_0 = T$ satisface (gaW).

$\square$

Al igual que el capítulo anterior, se tienen los siguientes corolarios.

Corolario 3.5.1. *Si T no tiene la SVEP en 0, entonces:*

1. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface (gW) si y solo si T satisface (gW).*

2. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface (gaW) si y solo si T satisface (gaW).*

Corolario 3.5.2. *Si $0 \notin \partial\sigma(T)$, entonces:*

1. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface (gW) si y solo si T satisface (gW).*

2. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface (gaW) si y solo si T satisface (gaW).*

Corolario 3.5.3. *Si $p(T)=\infty$, entonces:*

1. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface (gW) si y solo si T satisface (gW).*

2. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface (gaW) si y solo si T satisface (gaW).*

Corolario 3.5.4. *Si $q(T)=\infty$, entonces:*

1. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface (gW) si y solo si T satisface (gW).*

2. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface (gaW) si y solo si T satisface (gaW).*

Como ilustración de éstos resultados, hacemos referencia al ejemplo 2.3.1 donde los Teoremas generalizados de Weyl, a- Weyl y sus restricciones también se satisfacen perfectamente para la proyección vista en dicho ejemplo como podemos observar a continuación.

Ejemplo 3.5.1. *Sea H un espacio de Hilbert. Si $T \in L(H)$ y $R(T^n)$ es un subespacio cerrado de H, para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $H = R(T^n) \oplus R(T^n)^{\perp}$. Así, $R(T^n)$ es continuamente proyectable en H y existe una proyección $P \in L(H)$ tal que $P(H) = R(T^n)$. Entonces, como $R(T^n)$ es T-invariante, tendremos que T satisface el Teorema generalizado de Weyl (resp. el Teorema generalizado de a-Weyl) si y sólo si $\widehat{T}$ satisface el Teorema generalizado de Weyl (resp. el Teorema generalizado de a-Weyl). En consecuencia, si alguna de las siguientes condiciones valen:*

(i) $0 \notin iso\,\sigma(T) \cup iso\,\sigma(\widehat{T})$,

(i) $0 \notin \partial\sigma(T) \cup \partial\sigma(\widehat{T})$,

(iii) $0 \in \Xi(T) \cap \Xi(\widehat{T})$,

(iv) $0 \in \Xi(T^*) \cap \Xi(\widehat{T^*})$,

entonces T *satisface el Teorema generalizado de Weyl (resp. el Teorema de generalizado de a-Weyl) si y sólo si* T_P *satisface el Teorema generalizado de Weyl (resp. el Teorema generalizado de a-Weyl). Así, el Lema 3.56 obtenido por Aiena en [1] puede ser extendido para las propiedades espectrales estudiadas anteriormente. Es decir, el Teorema generalizado de Weyl (resp. el Teorema generalizado de a-Weyl) para* T *es equivalente al Teorema generalizado de Weyl (resp. el Teorema generalizado de a-Weyl) de alguna compresión de* T.

Capítulo 4

Variantes de los Teoremas de tipo Weyl y Restricciones

En este capítulo desarrollamos en detalle los resultados del artículo, C. Carpintero, E. Rosas, J. Rodriguez, D. Muñoz, K. Alcalá: Spectral Properties and Restrictions of Bounded Linear Operators. Annals Functional Analysis. [23] (2015), 173-183, en el cual se amplía el número de propiedades consideradas en los capítulos previos y se estudian modificaciones o variantes de los Teoremas de tipo Weyl. Se aborda el estudio de éstas variantes mediante técnicas similares a las empleadas en los capítulos anteriores, lográndose también caracterizar dichas variantes de los Teoremas tipo Weyl a través de las restricciones de un operador sobre potencias cerradas de su rango.

4.1. Propiedades Espectrales

Recordemos que iso K denota el conjunto de puntos aislados de $K \subseteq \mathbb{C}$. Sea $T \in L(X)$, definimos

$$\begin{aligned} p_{00}(T) &= \sigma(T) \setminus \sigma_b(T), \\ p_{00}^a(T) &= \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{ub}(T) \end{aligned}$$

Claramente, para cualquier $T \in L(X)$, se tiene

$$p_{00}(T) \subseteq \pi_{00}(T) \subseteq \pi_{00}^a(T)$$

En el mismo estilo que las propiedades de Weyl y a-Weyl en ([15], [16], [29], [36], [37], [38] y [39]), se han formulado nuevas propiedades espectrales las cuales se recogen en la siguiente definición.

Definición 4.1.1. *Un operador $T \in L(X)$ se dice que satisface la propiedad:*

1. *(b), si $\sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{uw}(T) = p_{00}(T)$;*
2. *(ab), si $\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = p_{00}^a(T)$;*
3. *(z), si $\sigma(T) \setminus \sigma_{uw}(T) = \pi_{00}^a(T)$;*
4. *(az), si $\sigma(T) \setminus \sigma_{uw}(T) = p_{00}^a(T)$;*
5. *(v), si $\sigma(T) \setminus \sigma_{uw}(T) = \pi_{00}(T)$;*

4.2. Relaciones entre los espectros de T y T_n

Comenzamos examinando algunas relaciones entre los espectros de T y T_n.

Lema 4.2.1. *Sea $T \in L(X)$ y T_n, $n \in \mathbb{N}$, la restricción del operador T sobre el subespacio $R(T^n)$. Si $R(T^n)$ es cerrado, entonces:*

1. *$\sigma(T_n) \subseteq \sigma(T)$ y $\sigma_{ap}(T_n) \subseteq \sigma_{ap}(T)$;*
2. *$\sigma_w(T_n) \subseteq \sigma_w(T)$ y $\sigma_{uw}(T_n) \subseteq \sigma_{uw}(T)$;*

3. $\sigma_b(T_n) \subseteq \sigma_b(T)$ *y* $\sigma_{ub}(T_n) \subseteq \sigma_{ub}(T)$.

Demostración: (1) Por el Lema 2.1.1, $\sigma(T_n) \setminus \{0\} = \sigma(T) \setminus \{0\}$. Como $0 \notin \sigma(T)$, implica que T es biyectiva, así $T = T_n$ En consecuencia $0 \notin \sigma(T_n)$, o equivalentemente, si $0 \in \sigma(T_n)$ entonces $0 \in \sigma(T)$, es decir $\sigma(T_n) \subseteq \sigma(T)$. Para la otra inclusión, si $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$, entonces $\lambda I - T$ es inyectiva y $R(\lambda I - T)$ es cerrado. Ahora bien, consideremos dos casos diferentes, $\lambda \neq 0$ y $\lambda = 0$. Si $\lambda \neq 0$, por el Lema 2.1.1 se tiene $N(\lambda I - T_n) = N(\lambda I - T)$ y $R(\lambda I - T_n) = R(\lambda I - T) \cap R(T^n)$ es cerrado. De aqui se tiene $\lambda I - T_n$ es bounded below y así $\lambda \notin \sigma_{ap}(T_n)$. En el otro caso, si $\lambda I - T$ es bounded below, implica que $0 = p(T) = p(T_n)$ y $R(T)$ es cerrado. Así T_n es inyectiva y por el Lema 1.1.8 $R(T_n) = R(T^{n+1})$ es cerrado, de esto obtenemos que T_n es bounded below y en consecuencia $\sigma_{ap}(T_n) \subseteq \sigma_{ap}(T)$.

(2) Por el Lema 2.1.1, $\sigma_w(T_n) \setminus \{0\} = \sigma_w(T) \setminus \{0\}$. También, si $0 \notin \sigma_w(T)$, entonces T es de Weyl, así T es de Fredholm y $\text{ind}T = 0$. Entonces $T_0 = T$ es de Fredholm y por ([15], Proposición 2.1), se sigue que T_n también es de Fredholm y $\text{ind}T_n = \text{ind}T_0 = 0$. Pero esto implica que T_n es de Weyl, así $0 \notin \sigma_w(T_n)$. Esto prueba que $\sigma_w(T_n) \subseteq \sigma_w(T)$. Para la otra inclusión, por el Lema 2.1.1, $\sigma_{uw}(T_n) \setminus \{0\} = \sigma_{uw}(T) \setminus \{0\}$. Ahora supongamos que $0 \notin \sigma_{uw}(T)$. Entonces T es superiormente semi-Weyl, así, T es superiormente semi-Fredholm y $\text{ind}T \leq 0$. De nuevo por ([15] Proposición 2.1), T_m es superiormente semi-Fredholm y $\text{ind}T_m = \text{ind}T_0$ para todo $m \geq 0$. En particular, T_n es superiormente semi-Weyl, por lo tanto, $\sigma_{uw}(T_n) \subseteq \sigma_{uw}(T)$.

La parte (3) sigue de las partes (1) y (2). $\square$

En general, casi nada se puede decir en relación con la igualdad entre los espectros de T y T_n. Sin embargo, asumiendo algunas condiciones espectrales, el espectro de Browder y el espectro aproximado puntual, son los mismos para T y T_n. También, λ se dice que es *un polo a izquierda del resolvente de* $T \in L(X)$, si $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ y $\lambda I - T$ es Drazin invertible a izquierda. Ver [17].

Lema 4.2.2. *Sea $T \in L(X)$ y T_n, $n \in \mathbb{N}$, la restricción del operador T sobre el subespacio $R(T^n)$. Si $R(T^n)$ es cerrado, entonces:*

1. *Si $q(T) = \infty$, entonces $\sigma(T_n) = \sigma(T)$;*

2. *Si 0 no es un polo del resolvente de T, entonces $\sigma_b(T_n) = \sigma_b(T)$;*

3. *Si 0 no es un polo a izquierda del resolvente de T, entonces $\sigma_{ap}(T_n) = \sigma_{ap}(T)$.*

Demostración:

(1) Por el Lema 2.1.1, $\sigma(T_n) \setminus \{0\} = \sigma(T) \setminus \{0\}$. También tenemos que $q(T) = \infty$ implica que $R(X) \neq X$ y $R(T_n = R(T^{n+1}) \neq R(T^n)$, así $0 \in \sigma(T)$ y $0 \in \sigma(T_n)$, por lo tanto $\sigma(T_n) = \sigma(T)$.

(2) Por el Lema 2.1.1, $\sigma_b(T_n) \setminus \{0\} = \sigma_b(T) \setminus \{0\}$. Supongamos ahora que $0 \notin \sigma_b(T)$, entonces T es un operador de Browder con $p(T)$ y $q(T)$ finitos. Por ([30] Proposicion 38.6), $0 < p(T) = q(T) < \infty$, lo cual tendríamos una contradicción, así $0 \in \sigma_b(T)$. En el otro caso, $0 \notin \sigma_b(T_n)$ implica que $0 < p(T_n) = q(T_n) < \infty$, y por los Lemas 2 y 3 en [20] y ([30] Proposicion 38.6), se tiene que $0 < p(T) = q(T) < \infty$, donde nuevamente tenemos una contradicción. Por lo tanto, $0 \in \sigma_b(T)$ y $0 \in \sigma_b(T_n)$. En consecuencia $\sigma_b(T_n) = \sigma_b(T)$.

(3) Por los Lemas 2.1.1 y 1.1.4, se tiene $\sigma_{ap}(T_n) \setminus \{0\} = \sigma_{ap}(T) \setminus \{0\}$. Por otra parte, $0 \notin \sigma_{ap}(T_n)$ implica $p(T_n) = 0$ y por el Lema 1.1.8 se tiene $R(T^{n+k}) = R((T_n)^k)$ es cerrado para todo $k \geq 0$. También por el Lema 2 en [19], se tiene que $p(T) < \infty$, ya que $p(T_n) = 0$. Así, si $0 \in \sigma_{ap}(T)$, entonces 0 es un polo a izquierda del resolvente de T, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $0 \notin \sigma_{ap}(T)$. Similarmente se obtiene que si $0 \notin \sigma_{ap}(T)$ implica $0 \notin \sigma_{ap}(T_n)$.

$\square$

Análogamente como en el Lema 2.1.2, se tienen las siguientes relaciones:

Lema 4.2.3. *Sea $T \in L(X)$ y $R(T^n)$ cerrado, entonces*

1. *Si 0 no es un polo del resolvente de T, entonces $p_{00}(T) \subseteq p_{00}(T_n)$;*

2. *Si 0 no es un polo a izquierda del resolvente de T, entonces $p_{00}^a(T) \subseteq p_{00}^a(T_n)$.*

Demostración:

(1) Sea $\lambda \in p_{00}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_b(T)$, luego tenemos que $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$. En virtud de esta igualdad y por hipótesis, se tiene que $\lambda \neq 0$. Por lo tanto, $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma(T_n) \setminus \{0\} \subseteq \sigma(T_n)$. Por otro lado, por el Lema 4.2.2 se tiene $\lambda \notin \sigma_b(T) = \sigma_b(T_n)$. En consecuencia, $\lambda \in \sigma(T_n) \setminus \sigma_b(T_n) = p_{00}(T_n)$.

(2) Sea $\lambda \in p_{00}^a(T) = \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{ub}(T)$, de donde se tiene que $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$, $0 < p(\lambda I - T) < \infty$ y $(\lambda I - T)^k(X)$ es cerrado para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces λ es un polo a izquierda del resolvente de T, y por hipótesis, $\lambda \neq 0$. Así, $\lambda \in \sigma_{ap}(T) \setminus \{0\} = \sigma_{ap}(T_n) \setminus \{0\} \subseteq \sigma_{ap}(T_n)$. También, por el Lema 4.2.2 se tiene $\lambda \notin \sigma_{ub}(T) \supseteq \sigma_{ub}(T_n)$. Por lo tanto, $\lambda \notin \sigma_{ub}(T_n)$ y así, $\lambda \in \sigma_{ap}(T_n) \setminus \sigma_{ub}(T_n) = p_{00}^a(T_n)$. En consecuencia, $p_{00}^a(T) \subseteq p_{00}^a(T_n)$.

$\square$

En lo sucesivo mostraremos que las propiedades vistas en la definición 4.1.1, son esencialmente las mismas para T y alguna restricción T_n de T sobre $R(T^n)$.

Teorema 4.2.1. *Si $T \in L(X)$ tiene ascent infinito, entonces*

1. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface la propiedad (w), si y solo si T satisface la propiedad (w);*

2. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface la propiedad (b), si y solo si T satisface la propiedad (b);*

3. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface el Teorema de a-Browder, si y solo si T satisface el Teorema de a-Browder.*

Demostración:

(1) Supongamos que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface la propiedad (w). Sea $\lambda \in \pi_{00}(T)$, por el Lema 2.1.2 se tiene que $\lambda \in \pi_{00}(T) \subseteq \pi_{00}(T_n) = \sigma_{ap}(T_n) \setminus \sigma_{uw}(T_n)$. Ya que $\lambda I - T_n$ es un operador semi-Fredholm y $\lambda \in \mathrm{iso}\sigma(T_n)$, entonces $\lambda I - T_n$ tiene ascent y descent finito. Así, $0 < p(\lambda I - T_n) = q(\lambda I - T_n) < \infty$. En virtud de esta igualdad y por hipótesis, si $\lambda = 0$ se tiene que $0 < p(T_n) = q(T_n) < \infty$. Por los Lemas 2 y 3 en [19] y ([30] Proposición 38.6), se concluye que $0 < p(T) = q(T) < \infty$, lo cual es una contradicción. Pero $0 < \alpha(\lambda I - T_n) = \beta(\lambda I - T_n) < \infty$, ya que $0 < p(\lambda I - T_n) = q(\lambda I - T_n) < \infty$. Ahora bien, siendo $\lambda \neq 0$, por el Lema 2.1.1 tenemos que

$$0 < \beta(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T_n) = \alpha(\lambda I - T_n) = \alpha(\lambda I - T) < \infty$$

y también $p(\lambda I - T) = p(\lambda I - T_n) < \infty$, entonces $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$. En consecuencia, $\lambda \in \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{uw}(T)$. Por lo tanto, $\pi_{00}(T) \subseteq \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{uw}(T)$. Para la otra inclusión observemos que si $\lambda \in \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{uw}(T)$, por hipótesis y los Lemas 4.2.1 y 4.2.2, tenemos que $\lambda \in \sigma_{ap}(T_n) \setminus \sigma_{uw}(T_n) = \pi_{00}(T_n)$. Debido a esta igualdad y procediendo como en la primera parte, obtenemos de manera inmediata la igualdad $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$, lo cual implica que $\lambda \in \pi_{00}(T)$. Así, $\sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{uw}(T) \subseteq \pi_{00}(T)$. En consecuencia, $\sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{uw}(T) = \pi_{00}(T)$ y T satisface la propiedad (w).

(2) Supongamos que la propiedad (b) se cumple para T_n. Sea $\lambda \in p_{00}(T)$, por el Lema 2.1.2 tenemos que $\lambda \in p_{00}(T) \subseteq p_{00}(T_n) = \sigma_{ap}(T_n) \setminus \sigma_{uw}(T_n)$. Entonces $\lambda I - T_n$ es un operador semi-Fredholm donde $p(\lambda I - T_n)$ y $q(\lambda I - T_n)$ son finitos. Similarmente como en la prueba de la parte (i), obtenemos la igualdad $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$ y así $\lambda \in \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{uw}(T)$. Luego, $p_{00}(T) \subseteq \lambda \in \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{uw}(T)$. Para la otra inclusión, supongamos que $\lambda \in \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{uw}(T)$, por hipótesis y en virtud de los Lemas 4.2.1 y 4.2.2, tenemos que $\lambda \in \sigma_{ap}(T_n) \setminus \sigma_{uw}(T_n) = p_{00}(T_n)$. A partir de esta igualdad y procediendo análogamente como en la parte anterior, obtenemos que $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$, así $\lambda \in p_{00}(T)$, por lo tanto,

$\sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{uw}(T) \subseteq p_{00}(T)$. En consecuencia, $\sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{uw}(T) = p_{00}(T)$ y T satisface la propiedad (b).

(3) Si T_n satisface el Teorema de a-Browder, entonces iso$\sigma_{ap}(T_n) \subseteq \sigma_{uw}(T_n)$. En virtud a los Lemas 4.2.1 y 4.2.2 tenemos que iso$\sigma_{ap}(T) =$ iso$\sigma_{ap}(T_n) \subseteq \sigma_{uw}(T_n) \subseteq \sigma_{uw}(T)$. Así, $\sigma_{ub}(T) = \sigma_{uw}(T) \cup$ iso$\sigma_{ap}(T) = \sigma_{uw}(T)$. Por lo tanto T satisface el Teorema de a-Browder. $\square$

Teorema 4.2.2. *Si $T \in L(X)$ tiene descent infinito, entonces*

1. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface la propiedad (aw), si y solo si T satisface la propiedad (aw);*

2. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface la propiedad (ab), si y solo si T satisface la propiedad (ab);*

3. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface la propiedad (v), si y solo si T satisface la propiedad (v);*

4. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface el Teorema de Browder, si y solo si T satisface el Teorema de Browder;*

5. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface el Teorema generalizado de Browder, si y solo si T satisface el Teorema generalizado de Browder;*

Demostración:

(1) Supongamos que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface la propiedad (aw). Sea $\lambda \in \pi^a_{00}(T)$, por el Lema 2.1.3 tenemos $\lambda \in \pi^a_{00}(T) \subseteq \pi^a_{00}(T_n) = \sigma(T_n) \setminus \sigma_w(T_n)$. Ya que $\lambda I - T_n$ es un operador de Fredholm, ind$(\lambda I - T_n) = 0$ y $\lambda \in$ iso$\sigma_{ap}(T_n)$, entonces $p(\lambda I - T_n) < \infty$ y $0 < \alpha(\lambda I - T_n) = \beta(\lambda I - T_n) < \infty$, así, $0 < p(\lambda I - T_n) = q(\lambda I - T_n) < \infty$. De esta desigualdad y por hipótesis tenemos que $\lambda = 0$ implica que $0 < p(T_n) = q(T_n) < \infty$ y por los Lemas 2 y 3 en [19] y ([30] Proposición 38.6),

tenemos que $0 < p(T) = q(T) < \infty$ lo cual es una contradicción. Ahora bien, siendo $\lambda \neq 0$, por el Lema 2.1.1 se tiene

$$0 < \beta(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T_n) = \alpha(\lambda I - T_n) = \alpha(\lambda I - T) < \infty$$

Pero $p(\lambda I - T) = p(\lambda I - T_n) < \infty$, entonces $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$, en consecuencia $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$. Por lo tanto, $\pi_{00}^a(T) \subseteq \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$. Para la otra inclusión observemos que $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$, por hipótesis y los Lemas 4.2.1 y 4.2.2, tenemos que $\lambda \in \sigma(T_n) \setminus \sigma_w(T_n) = \pi_{00}^a(T_n)$. De esta igualdad y procediendo como en la primera parte, obtenemos de manera inmediata la igualdad $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$, lo cual implica que $\lambda \in \pi_{00}^a(T)$. Por lo tanto, $\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) \subseteq \pi_{00}^a(T)$, en consecuencia se tiene que $\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \pi_{00}^a(T)$ y T satisface la propiedad (aw).

(2)Supongamos que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface la propiedad (ab). Sea $\lambda \in p_{00}^a(T)$, por el Lema 2.1.3, $\lambda \in p_{00}^a(T) \subseteq p_{00}^a(T_n) = \sigma(T_n) \setminus \sigma_w(T_n)$. Ya que $\lambda I - T_n$ es un operador de Fredholm, $\text{ind}(\lambda I - T_n) = 0$ y $p(\lambda I - T_n) < \infty$. Entonces $0 < \alpha(\lambda I - T_n) = \beta(\lambda I - T_n) < \infty$, así $0 < p(\lambda I - T_n) = q(\lambda I - T_n) < \infty$. Usando el mismo argumento de la parte (i) obtenemos la igualdad $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$, lo cual implica que $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$. Así, $p_{00}^a(T) \subseteq \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$. Para la otra inclusión observemos que si $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$, por hipótesis y los Lemas 4.2.1 y 4.2.2, tenemos que $\lambda \in \sigma(T_n) \setminus \sigma_w(T_n) = p_{00}^a(T_n)$. Como en el caso anterior sigue que $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$ y de aqui tenemos que $\lambda \in p_{00}^a(T)$, así, $\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) \subseteq p_{00}^a(T)$. En consecuencia se tiene que $\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = p_{00}^a(T)$ y T satisface la propiedad (ab).

(3) Supongamos que T_n satisface la propiedad (v). Sea $\lambda \in \pi_{00}(T)$, por el Lema 2.1.2, tenemos que $\lambda \in \pi_{00}(T) \subseteq \lambda \in \pi_{00}(T_n) = \sigma(T_n) \setminus \sigma_{uw}(T_n)$. Entonces $\lambda I - T_n$ es un operador semi-Fredholm y $\lambda I - T_n$ tiene ascent y descent finito. Usando el mismo argumento del Teorema 4.2.1 se tiene que $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$, luego, $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_{uw}(T)$, así $\pi_{00}(T) \subseteq \sigma(T) \setminus \sigma_{uw}(T)$. Para la otra inclusión obser-

vemos que si $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_{uw}(T)$, por hipótesis y los Lemas 4.2.1 y 4.2.2, tenemos que $\lambda \in \sigma(T_n) \setminus \sigma_{uw}(T_n) = \pi_{00}(T_n)$. Como en el caso anterior sigue que $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$ y de aquí tenemos que $\lambda \in \pi_{00}(T)$, así, $\sigma(T) \setminus \sigma_{uw}(T) \subseteq \pi_{00}(T)$. En consecuencia se tiene que $\sigma(T) \setminus \sigma_{uw}(T) = \pi_{00}(T)$ y T satisface la propiedad (v).

(4) Si T_n satisface el Teorema de Browder, entonces iso$\sigma(T_n) \subseteq \sigma_w(T_n)$. Luego, por los Lemas 4.2.1 y 4.2.2, tenemos que iso$\sigma(T) =$ iso$\sigma(T_n) \subseteq \sigma_w(T_n) \subseteq \sigma_w(T)$. Así, $\sigma_b(T) = \sigma_w(T) \cup$ iso$\sigma(T) = \sigma_w(T)$ de donde T satisface el Teorema de Browder.

(5) Sigue de la parte (iv) y las equivalencias entre el Teorema de Browder y el Teorema generalizado de Browder probadas en [6].

Para el inverso de todas las implicaciones, observemos que para $n = 0$ trivialmente se tiene que $R(T^0) = X$ es cerrado y $T_0 = T$. $\square$

Teorema 4.2.3. *Si $T \in L(X)$ tiene ascent y descent infinito, entonces*

1. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface la propiedad (z), si y solo si T satisface la propiedad (z);*
2. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface la propiedad (az), si y solo si T satisface la propiedad (az);*
3. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y T_n satisface la propiedad (ab), si y solo si T satisface la propiedad (ab).*

Demostración:

La prueba es análoga a la de los Teoremas 4.2.1 y 4.2.2. $\square$

Bibliografía

[1] P. Aiena, *Fredholm and Local Spectral Theory, with Application to Multipliers*, Kluwer Acad. Publishers (2004).

[2] P. Aiena, *Classes of Operators Satisfying a-Weyl's theorem*, Studia Math. **169** (2005), 105-122.

[3] P. Aiena, *Quasi-Fredholm operators and localized SVEP*. Acta Sci. Mat. (Szeged) **73** (2007), 251-263.

[4] P. Aiena, E. Aponte and E. Balzan, *Weyl type theorems for left and right polaroid operators*, Int. Equa. Oper. Theory. **136** (2010), 2839-2848.

[5] P. Aiena, C. Carpintero. *Single valued extension property and semi-Browder spectra.* Acta Sci. Math. (Szeged), 20 (2003), 1027-1040

[6] P. Aiena, M. T. Biondi and C. Carpintero, *On Drazin invertibility*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), 2839-2848.

[7] P. Aiena, O. García, *Generalized Browder's theorem and SVEP*, Mediterr. J. Math **4**(2)(2007), 215-228.

[8] P. Aiena, C. Muneo and Z. Lingling, *Weyl's theorems and extensions of bounded linear operators*, Tokyo J. Math. **35**(2) (2012), 279-289.

[9] M. Amouch and M. Berkani *On the property* (gw), Mediterr. J. Math **5**(3)(2008), 371-378.

[10] B. Barnes, *The spectral and Fredholm theory of extensions of bounded linear operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **105**(4) (1989), 941-949.

[11] B. Barnes, *Restrictions of bounded linear operators: closed range*, Proc. Amer. Math. Soc. **135**(6) (2007), 1735-1740.

[12] M. Berkani, *Restriction of an operator to the range of its powers*, Studia Math. **140**(2) (2000), 163-175.

[13] M. Berkani, *On a class of quasi-Fredholm operators*, Int. Equa. Oper. Theory **34** (1) (1999), 244-249.

[14] M. Berkani and A. Ouahab, *Theoreme de l'application spectrale pour le spectre essentiel quasi-Fredholm*, Proceedings of the American Mathematical Society 125 **3** (1991), 763-774.

[15] M. Berkani and M. Sarih, *On semi B-Fredholm operators*, Glasgow Math. J. **43** (2001), 457-465.

[16] M. Berkani and H. Zariouh, *Extended Weyl type theorems*, Math. Bohemica. **134**(4) (2009), 369-378.

[17] M. Berkani and J. Koliha, *Weyl type theorems for bounded linear operators.* Acta Sci. Math. (Szeged). 69 (2003), 359-376.

[18] M. Berkani and H. Zariouh, *New extended Weyl type theorems*, Mat. Vesnik. **62** (2010), 145-154.

[19] M. Berkani, M. Sarih and H. Zariouh, *Browder-type theorems and SVEP*, Mediterr. J. Math. **8** (2011), 399-409.

[20] C. Carpintero, E. Rosas, O. García and J. Sanabria, *B-Browder spectra and localized SVEP*, Rend. Circ. Mat. Palermo.(2) **57** (2008), 241-255.

[21] C. Carpintero, D. Muñoz, E. Rosas, O. García and J. Sanabria, *Weyl type theorems and restrictions for bounded linear operators*, Extractha Mathematicae. **28**(1) (2013), 127-139.

[22] C. Carpintero, D. Muñoz, E. Rosas, O. García and J. Sanabria, *Weyl type theorems and restrictions*, Mediterr. J. Math. **11** (2014), 1215-1228, DOI 10.1007/s00009-013-0369-7.

[23] C. Carpintero, E. Rosas, J. Rodriguez, D. Muñoz and K. Alcalá, *Spectral Properties and Restrictions of Bounded Linear Operators*, Ann. Funct. Anal. **6(2)**(2015), 173-183, DOI: 10.15352/afa/06-2-15.

[24] L. A. Coburn, *Weyl's Theorem for Nonnormal Operators*, Research Notes in Mathematics. **51** (1981).

[25] N. Dunford, *Spectral operators*, Pacific J. Math. **4** (1954), 321-354.

[26] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators*, Part II (1967). Wiley New York (1971).

[27] J. K. Finch, *The single valued extension property on a Banach space*, Pacific J. Math. **58** (1975), 61-69.

[28] R. E. Harte and W. Y. Lee, *Another note on Weyl's theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), 2115-2124.

[29] R. E. Harte, *Invertibility and Ssingularity for Bounded Linear Operators*, Wiley. New York, 1988.

[30] H. Heuser, *Functional Analysis*, Marcel Dekker, New York 1982.

[31] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin 1966.

[32] J. P. Labrousse, *Les opérateurs quasi Fredholm: une généralization des opérateurs semi Fredholm*, Rend. Circ. Mat. Palermo. **29**(2) (1980), 161-258.

[33] K. B. Laursen, M. M. Neumann, *Introduction to local spectral theory*, Clarendon Press. Oxford 2000.

[34] M. Mbekhta and V. Müller, *On the axiomatic theory of the spectrum II*, Studia Math. **119** (1996), 129-147.

[35] D. Muñoz, *Un estudio de los Teoremas de Weyl y a-Weyl generalizados a través del ascent y descent*, Trabajo especial de grado para obtar al título de Magíster Scientiarum en Matemáticas. Cumaná-Venezuela. (2006).

[36] V. Rakočević, *Operators obeying a-Weyl's theorem*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 34 (1989), no. 10, 915-919.

[37] V. Rakočević, *On the essential approximate point spectrum II*, Math. Vesnick. **36** (1984), 89-97.

[38] J. Sanabria, C. Carpintero, E. Rosas and O. García, *On generalized property* (v) *for bounded linear operators*, Studia Math. **212** (2012), 141-154.

[39] H. Zariouh, *Property* (gz) *for bounded linear operators*, Mat. Vesnik. **65**(1) (2013), 94-103

[40] H. Zariouh, *New version of property* (az), Mat. Vesnik. **66**(3) (2014), 317-322

[41] H. Weyl,