

**UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO EN FÍSICA**



**“ESTUDIO DE LA CORRESPONDENCIA ADS/CFT
APLICADA AL PROBLEMA DE METALES EXTRAÑOS Y
AGUJEROS NEGROS DE REISSNER-NORDSTRÖM”**

Trabajo de Grado de Maestría presentado ante la
ilustre Universidad Central de Venezuela por el
Licenciado Eudomar Henríquez, para optar al título
de Magíster Scientiarum, mención Física.

Tutor: Dr. Nelson Bolívar

Caracas – Venezuela
Mayo de 2018



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
COMISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

Comisión de Estudios de
Postgrado



VEREDICTO

Quienes suscriben, miembros del jurado designado por el Consejo de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, para examinar el **Trabajo de Grado** presentado por: **EUDOMAR RAFAEL HENRIQUEZ GUERRA**, Cédula de identidad N.º **20.801.022**, bajo el título "**ESTUDIO DE LA CORRESPONDENCIA AdS/CFT APLICADA AL PROBLEMA DE METALES EXTRAÑOS Y AGUJEROS NEGROS DE REISSNER-NORDSTRÖM**", a fin de cumplir con el requisito legal para optar al grado académico de **MAGISTER SCIENTIARUM, MENCIÓN FÍSICA**, dejan constancia de lo siguiente:

1.- Leído como fue dicho trabajo por cada uno de los miembros del jurado, se fijó el día **12 de Abril de 2018** a las **12:00 M.**, para que **el autor** lo defendiera en forma pública, lo que éste hizo en la **Sala Guillermo Ruggeri**, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual **respondió satisfactoriamente** a las preguntas que le fueron formuladas por el jurado, todo ello conforme con lo dispuesto en el Reglamento de Estudios de Postgrado.

2.- Finalizada la defensa del trabajo, el jurado decidió **aprobarlo**, por considerar, sin hacerse solidario con la ideas expuestas por el autor, que **se ajusta** a lo dispuesto y exigido en el Reglamento de Estudios de Postgrado.

Para dar este veredicto el jurado examinador dictaminó que el trabajo desarrollado representa una contribución apreciable plenamente valida para un Trabajo de Grado de Maestría. Se pudo comprobar que el estudiante pudo completar los objetivos del proyecto de forma satisfactoria. El estudio de la correspondencia AdS/CFT para el caso de Metales Extraños supone el estudio de diversas áreas, Relatividad General en espacios Anti-deSitter, teoría cuántica de campos y teorías conformes. Este trabajo abre caminos para estudios posteriores dentro de esta línea de investigación, aun inexplorada en el país y en este sentido es pionera.



En fe de lo cual se levanta la presente ACTA, a los **12** días del mes de **Abril** del año **2018**, conforme a lo dispuesto en el Reglamento de Estudios de Postgrado, actuó como **Coordinador** del jurado el **Dr. Nelson Bolívar**.



Dra. Joselen Peña
C.I. 11.078.067
Universidad Central de Venezuela



Dr. Ernesto Fuenmayor
C.I. 10.336.198
Universidad Central de Venezuela



Dr. Nelson Bolívar
C.I. 13.568.312
Universidad Central de Venezuela
Tutor

JP/EF/NB.- 12/04/2018.



Resumen

La correspondencia Anti-de Sitter/Teoría de Campo Conforme (AdS/CFT) es un ejemplo de una técnica más general conocida como principio holográfico, en la cual se establece una dualidad entre una teoría de campo fuertemente acoplada (CFT) y una teoría gravitacional débilmente acoplada (AdS). Debido a esto AdS/CFT se ha convertido en una herramienta importante en el análisis y estudio de problemas de distintas áreas de la física como QCD, física nuclear, física fuera del equilibrio y materia condensada. En este trabajo nos planteamos estudiar la metodología AdS/CFT aplicada a la correspondencia entre agujeros negros de Reissner-Nordström y metales extraños. El motivo de estudiar esta herramienta, es que ella nos permite establecer una correspondencia entre un sistema de materia condensada con acoplamiento fuerte y comportamiento crítico (metales extraños), el cual puede llegar a ser difícil de resolver, y un sistema de gravitación con acoplamiento débil (agujeros negros de Reissner-Nordström) un poco más manejable desde el punto de vista matemático. Para llevar a cabo esto, usaremos como base los trabajos de Teixeira [1], Zaanen [11], Hartnoll [31] y Schalm [35], sobre la metodología de AdS/CFT aplicada a sistemas de materia condensada con temperatura finita.

Palabras clave: Correspondencia AdS/CFT, Principio Holográfico, Metales Extraños de Reissner-Nordström, Agujeros Negros.

*A mi madre Blanca y a mi amada Jenny,
por el amor incondicional que ambas me brindan cada día*

Agradecimientos

En primer lugar, quiero darle gracias a Dios por todas las cosas que me ha brindado, por las personas que puso en mi vida y porque siempre me ha guiado, en especial en los momentos más difíciles.

Gracias a mi madre, quien con su amor y apoyo incondicional siempre ha sido mi fuerza para levantarme, por inspirarme a dar cada día lo mejor de mi. Gracias a mi Jenny amada, por estar siempre junto a mí con todo su amor incondicional y por siempre apoyarme a cumplir mis metas. Para ellas todo mi amor.

Gracias a mi tutor y amigo, Dr. Nelson Bolívar, quien me brindó todo su tiempo y apoyo para llevar a cabo este trabajo. Gracias por su paciencia, su confianza y por todo lo que aprendí al trabajar con él. Sin duda un excelente tutor y un gran amigo. Gracias a los jurados, Dr. Ernesto Fuenmayor y Dra. Joselen Peña, por todos sus consejos y recomendaciones para la realización de este trabajo.

Gracias a la Universidad Central de Venezuela y en especial a la Facultad de Ciencias por ser mi segundo hogar, a todos los profesores que tuve a lo largo de la carrera. Gracias por mi formación y por todo lo que me han enseñado. Gracias a la Escuela de Física y en especial al Postgrado en Física por todo su apoyo en mi formación.

Quiero agradecer muy especialmente a la Dra. Nuri Hurtado Villasana, quien creyó en mí y me brindó todo su apoyo en mi formación desde el pregrado. Muchas de las cosas que he aprendido son gracias a ella. Gracias por quererme como a un hijo y siempre motivarme a tener un futuro exitoso. Para mí ha sido como una madre. Por siempre gracias.

Resumen

Estudio de la correspondencia AdS/CFT aplicada al problema de metales extraños y agujeros negros de Reissner-Nordström

Eudomar Henríquez

Dr. Nelson Bolívar, Tutor

Universidad Central de Venezuela

La correspondencia Anti-de Sitter/Teoría de Campo Conforme (AdS/CFT) es un ejemplo de una técnica más general conocida como principio holográfico, en la cual se establece una dualidad entre una teoría de campo fuertemente acoplada (CFT) y una teoría gravitacional débilmente acoplada (AdS). Debido a esto AdS/CFT se ha convertido en una herramienta importante en el análisis y estudio de problemas de distintas áreas de la física como QCD, física nuclear, física fuera del equilibrio y materia condensada. En este trabajo nos planteamos estudiar la metodología AdS/CFT aplicada a la correspondencia entre agujeros negros de Reissner-Nordström y metales extraños. El motivo de estudiar esta herramienta, es que ella nos permite establecer una correspondencia entre un sistema de materia condensada con acoplamiento fuerte y comportamiento crítico (metales extraños), el cual puede llegar a ser difícil de resolver, y un sistema de gravitación con acoplamiento débil (agujeros negros de Reissner-Nordström) un poco más manejable desde el punto de vista matemático. Para llevar a cabo esto, usaremos como base los trabajos de Teixeira [1], Zaanen [11], Hartnoll [29] y Schalm [33], sobre la metodología de AdS/CFT aplicada a sistemas de materia condensada con temperatura finita.

Índice General

Índice General	vii
Lista de Figuras	x
1. Introducción	1
2. Teoría Gravitacional	4
2.1. Relatividad General y Ecuaciones de Einstein	4
2.1.1. Término de Frontera de Gibbons-Hawking	10
2.2. Espacio de Anti-de Sitter (AdS)	13
2.3. Teoría de Campo Conforme	15
3. Termodinámica de Agujeros Negros	18
3.1. Teorema de No-hair	20
3.2. Teorema de unicidad de las soluciones	20
3.3. Teorema del Área	21
3.4. Agujero Negro de Schwarzschild	21
3.5. Entropía de Bekenstein	22
3.6. Leyes de la Termodinámica para Agujeros Negros	23

Índice General

3.6.1. Ley Cero	23
3.6.2. Primera Ley	23
3.6.3. Segunda Ley	24
3.6.4. Segunda ley generalizada	24
3.7. Radiación de Hawking	24
3.8. Agujeros Negros de Reissner-Nordström	26
3.9. Algunas Cantidades Termodinámicas	28
4. Correspondencia AdS/CFT y Regla GKPW	29
4.1. Condiciones para la existencia de la dualidad	29
4.2. Dimensión Radial Extra y Escala de Energía	31
4.3. La Regla GKPW y sus consecuencias	35
4.4. Renormalización y cálculo de funciones de correlación	37
5. Correspondencia AdS/CFT en Materia Condensada	40
5.1. Primer ejemplo: Campo Escalar	40
5.1.1. Cálculo de la función de correlación de dos puntos empleando la regla GKPW	45
5.2. Segundo ejemplo: Temperatura Finita	48
6. Metales Extraños de Reissner-Nordström	53
6.1. Metales extraños: superconductores de alta temperatura crítica	53
6.2. Metales extraños de Reissner-Nordström (RN)	56
6.3. Potencial químico y potencial eléctrico	57
6.4. Solución a la teoría de Einstein-Maxwell	58
6.5. Termodinámica de RN	61
6.6. La geometría de AdS ₂ cerca del horizonte y la criticalidad cuántica local emergente	64

Índice General

7. Conclusiones	68
Bibliografía	70
A. Criticalidad en el Modelo de Ising cuántico	76
A.1. Modelo de Ising cuántico	76
A.1.1. Transiciones de Fase	79
B. Temperatura de Hawking para un agujero negro de Schwarzschild	
AdS	81
B.1. Temperatura de Hawking del agujero negro de Schwarzschild a partir de la teoría gravitacional euclídea	81

Lista de Figuras

3.1.	Vista de un Agujero Negro, donde se aprecian el disco de acreción, el horizonte de eventos y la singularidad en el centro del agujero. Tomado de [40].	19
4.1.	Conexión entre las regiones infrarrojo (IR) y ultravioleta (UV) a través de la coordenada radial extra r en un espacio-tiempo AdS_{d+1} . Tomado de [9].	32
4.2.	La escala de energía puede ser vista como una escala de resolución de la teoría entre las regiones infrarrojo (IR) y ultravioleta (UV). Tomado de [9].	34
6.1.	Estructura del cuprato $YBa_2Cu_3O_7$, el cual es uno de los superconductores de alta temperatura crítica (en este caso $T_c = 142K$). Se muestran los planos o capas de cobre-oxígeno que son responsables de la superconductividad en el material. Tomado de [51].	54
6.2.	Diagrama de fase para un cuprato. Se pueden apreciar (de derecha a izquierda) las fases ferromagnética, pseudogap, superconductora, metal extraño y líquido de Fermi al variar el dopaje en el material. Tomado de [52].	55

Capítulo 1

Introducción

La correspondencia Anti-de Sitter/Teoría de Campo Conforme (AdS/CFT) ha tomado gran importancia en los últimos años [1], lo cual ha traído consigo la publicación de centenares de artículos científicos respecto al tema [2-9]. Este fenómeno está motivado en el hecho de que AdS/CFT se ha convertido en una herramienta importante en el análisis y estudio de problemas de distintas áreas de la física como QCD, física nuclear, física fuera del equilibrio y materia condensada. De hecho, el trabajo original de Maldacena y colaboradores [2] ha sido citado en innumerables ocasiones en las principales revistas científicas de la Física [10].

La correspondencia AdS/CFT es un ejemplo de una técnica más general conocida como principio holográfico. La holografía debe ser interpretada como una dualidad “débil-fuerte” entre dos problemas físicos diferentes. Para una teoría de campo fuertemente acoplada, la teoría débilmente acoplada es ahora una teoría gravitacional de cuerdas y viceversa, una teoría gravitacional fuertemente acoplada tiene como descripción equivalente una teoría cuántica de campo débilmente acoplada [11]. Los orígenes de la holografía provienen principalmente del trabajo de Bekenstein, Hawking, Penrose y colaboradores sobre agujeros negros [12-14]. Los teoremas de singularidad de Hawking y Penrose permitieron la concepción de que la materia ordinaria podría colapsar

Capítulo 1: Introducción

a espacio-tiempos singulares y que era necesario considerar la existencia de agujeros negros en Relatividad General, lo cual abrió la puerta al estudio de estos objetos.

El descubrimiento del Modelo Estándar en la década de 1970 junto con un alza de la cromodinámica cuántica mostró que la teoría de cuerdas no era la correcta para describir interacciones fuertes. Más adelante se encontró que una cuerda cerrada describe naturalmente una partícula sin masa de espín 2 (gravitón: el cuanto del campo gravitacional). Esto dio lugar a que la teoría de cuerdas pudiera ser usada para describir gravedad.

En 1993, Gerard 't Hooft propuso que debía estudiarse con más cuidado el hecho de que la entropía del agujero negro crece geoméricamente con el área del horizonte [15]. El trabajo de 't Hooft, junto con el de Susskind [16], dio lugar a la idea de que la teoría de gravedad cuántica termina actuando como un holograma en el que la información puede ser escrita sobre el área superficial de la región cuya dinámica ésta describe [15, 16]. Esto sugiere que un agujero negro puede ser descrito a través del sistema estadístico usual, cuya dimensión espacial es una dimensión menor que la teoría gravitacional (principio holográfico). En 1996, Strominger y Vafa validaron los fundamentos estadísticos de la termodinámica de agujeros negros al exhibir el conteo exacto de los microestados asociados a la entropía de un agujero negro (muy específico) en teoría de cuerdas [17].

La correspondencia AdS/CFT es una de las conjeturas de mayor impacto que han sido descubiertas en los últimos años. La conjetura de Maldacena fue inicialmente propuesta para una teoría cuántica de campo particular altamente simétrica (llamada $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills en 4 dimensiones espacio-temporales) y una teoría de cuerdas formulada en un background espacio-temporal particular (llamada tipo IIB). Básicamente, esta conjetura establece que una teoría cuántica de gravedad (tal como la teoría de cuerdas) es dual a una teoría cuántica de campo sin gravedad en una dimensión menor. Al poco tiempo de ser publicada la conjetura de Maldacena, Witten

Capítulo 1: Introducción

simultáneamente con Gubser, Klebanov y Polyakov, mostraron una forma precisa de la correspondencia entre los observables de la teoría cuántica de campos y los de la supergravedad. De esta forma, AdS/CFT se transformó en el primer ejemplo explícito que muestra que la gravedad cuántica en efecto obedece el postulado del principio holográfico [8].

Recientemente, los trabajos de Sachdev, Hartnoll, Zaanen y otros, han sugerido que algunos fenómenos en sistemas de materia condensada, tales como las transiciones de fase cuánticas, pueden ser estudiados de manera similar a como se comparan AdS con CFT via la conjetura de Maldacena [18-31]. Esto resulta del hecho de que, en torno a los puntos críticos donde se dan dichas transiciones de fase, el sistema físico puede ser descrito por una teoría que presenta una invariancia de escala, lo que la convierte una teoría de campo conforme. Esta teoría conforme a su vez presenta el mismo grupo de simetrías que AdS y además tiene una teoría gravitacional dual.

Un sistema de materia condensada muy interesante, es el de metales extraños, los cuales se diferencian básicamente de los metales comunes por el comportamiento de su resistencia eléctrica al variar la temperatura. Estos materiales son cupratos que exhiben una superconductividad a temperaturas considerablemente altas respecto a los demás superconductores. Esta cualidad los hace muy útiles para el diseño de materiales eléctricos y magnéticos de gran eficiencia. En la literatura se pueden encontrar numerosos trabajos acerca de la correspondencia entre estos materiales y los agujeros negros de Reissner-Nordström [11, 26, 28, 32-34].

Este trabajo revisaremos algunos conceptos básicos de Relatividad General, estudiaremos las características generales y la termodinámica de los agujeros negros de Schwarzschild y Reissner-Nordström, así como, las reglas GKPW y la correspondencia AdS/CFT aplicada a sistemas de materia condensada: campo escalar y temperatura finita. Por último estudiaremos el caso particular de la correspondencia entre metales extraños y agujeros negros de Reissner-Nordström.

Capítulo 2

Teoría Gravitacional

Un concepto importante en la correspondencia AdS/CFT es cómo la geometría de la teoría gravitacional da lugar a simetrías adicionales y cómo éstas se manifiestan en una teoría cuántica de campo. En esta correspondencia en particular, la teoría gravitacional tiene como base un espacio-tiempo que puede ser descrito por un espacio asintóticamente Anti-deSitter (AdS). Este espacio es dual a un subconjunto de teorías cuánticas de campo especiales llamadas Teorías de Campo Conforme (CFT). En este capítulo estudiaremos este espacio AdS, así como también, las teorías de campo conforme.

2.1. Relatividad General y Ecuaciones de Einstein

En Relatividad General definimos la distancia entre dos puntos de un espacio-tiempo curvo a través del elemento de línea [1, 35]

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \quad (2.1)$$

donde $g_{\mu\nu}(x)$ es la métrica y x^μ las coordenadas sobre dicho espacio-tiempo. Además definimos el inverso de la métrica via $g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} = \delta_\sigma^\mu$. Una característica importante de $g_{\mu\nu}(x)$, es que contiene toda la información necesaria para describir la curvatura del

Capítulo 2: Teoría Gravitacional

espacio-tiempo. Con ella podemos subir y bajar índices $x^\mu = g^{\mu\nu}x_\nu$, $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$, así como también, transformar un vector covariante en uno contravariante $g^{\mu\nu}V_\nu = V^\mu$ y viceversa $g_{\mu\nu}V^\nu = V_\mu$. También existen otros usos de la métrica: brinda una noción de pasado y futuro, permite calcular la longitud de camino y tiempos propios, determina la distancia más corta entre dos puntos y con ella el movimiento de partículas de prueba, entre otros.

Para esta geometría (no euclídea), un vector cambia sus componentes al ser transportado paralelamente desde x_μ hasta $x_\mu + \varepsilon_\mu$ según

$$V^\mu(x) \rightarrow V^\mu(x + \varepsilon) + \varepsilon^\sigma \Gamma_{\rho\sigma}^\mu V^\rho(x) \quad (2.2)$$

donde $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu$ son los símbolos de Christoffel ó coeficientes de la conexión, los cuales están determinados por derivadas de la métrica

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (2.3)$$

y que cumplen la propiedad de simetría $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$

Por otra parte, es importante destacar que la derivada de un vector no es un tensor y por consiguiente es necesario definir un tipo de derivada que tenga esta característica, conocida como derivada covariante y que está definida de la siguiente forma

$$\nabla_\mu V_\nu \equiv \partial_\mu V_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho V_\rho \quad (2.4)$$

Otro objeto de interés es el tensor de Riemann, el cual está definido por

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho \equiv \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \quad (2.5)$$

este tensor cumple las identidades cíclica y de Bianchi, además, a través de la contracción

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda} R_{\sigma\mu\nu}^\lambda \quad (2.6)$$

se pueden ver sus simetrías $R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu}$

Capítulo 2: Teoría Gravitacional

A partir del tensor de Riemann, se puede definir el tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} \equiv g_{\rho\lambda} R_{\mu\lambda\nu}^{\rho} \quad (2.7)$$

así como también, el escalar de curvatura

$$R \equiv R_{\mu}^{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.8)$$

Armados con estas herramientas se puede empezar a estudiar la dinámica gravitacional, la cual viene descrita por las ecuaciones de campo de Einstein. Para obtener estas ecuaciones empezaremos considerando la métrica $g_{\mu\nu}$ como variable dinámica y a partir de ella construiremos un Lagrangiano. Ya que $g_{\mu\nu}$ puede tomar su forma canónica y que sus primeras derivadas son cero en algún punto, cualquier escalar no trivial debe considerar al menos segundas derivadas de la métrica (como es el caso del tensor de Riemann, de hecho cualquier tensor no trivial hecho con productos de $g_{\mu\nu}$, y sus primeras y segundas derivadas, puede expresarse en términos de Riemann). Como el único escalar independiente que se podría construir a partir de Riemann es Ricci, el Lagrangiano más simple que podemos considerar es el de la acción de Hilbert 35

$$S_H = \int d^n x \sqrt{-g} R \quad (2.9)$$

el término $\sqrt{-g}$, donde g es el módulo del determinante de la métrica, es necesario, ya que sólo el producto $d^n x \sqrt{-g}$ es invariante bajo una transformación general de coordenadas. Dado que $\partial_{\mu} g_{\mu\nu} = 0$, no podemos escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange directamente. Por lo tanto, haremos variaciones respecto al inverso de la métrica $g^{\mu\nu}$. Ya que $g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta_{\sigma}^{\mu}$ y δ_{σ}^{μ} no se ve afectado bajo variaciones, encontramos

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \delta g^{\rho\sigma} \quad (2.10)$$

los puntos de ensilladura con respecto a variaciones en la métrica $g^{\mu\nu}$ son equivalentes a los que son encontrados respecto a variaciones en $g_{\mu\nu}$. Usando (2.8) podemos escribir

$$S_H = \int d^n x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.11)$$

Capítulo 2: Teoría Gravitacional

de donde vemos que al hacer variaciones respecto a la métrica

$$\delta S_H = \int d^n x \left[\delta \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right] \quad (2.12)$$

el segundo término de esta expresión ya está determinado por [2.10](#), los otros dos términos hay que trabajarlos un poco. Si hacemos variaciones respecto a la métrica sobre el tensor de Riemann [\(2.5\)](#), encontramos que

$$\delta R_{\mu\lambda\nu}^{\rho} = \partial_{\lambda} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - \partial_{\nu} \delta \Gamma_{\lambda\mu}^{\rho} + \delta \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} - \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} \Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} \delta \Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} \quad (2.13)$$

luego vemos que si hacemos variaciones sobre las conexiones

$$\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} \rightarrow \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^{\rho} + \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} \quad (2.14)$$

y tomamos la derivada covariante de estas variaciones

$$\nabla_{\lambda} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} = \partial_{\lambda} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} \delta \Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} \quad (2.15)$$

obtenemos

$$\nabla_{\lambda} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - \nabla_{\nu} \delta \Gamma_{\lambda\mu}^{\rho} = \delta R_{\mu\lambda\nu}^{\rho} \quad (2.16)$$

Una vez hecho esto, nos damos cuenta que el tercer término de [\(2.12\)](#) podemos escribirlo de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda} \\ &= \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left[\nabla_{\lambda} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \nabla_{\nu} \delta \Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda} \right] \\ &= \sqrt{-g} \left[g^{\mu\nu} \nabla_{\sigma} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} - g^{\mu\sigma} \nabla_{\sigma} \delta \Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda} \right] \\ &= \sqrt{-g} \nabla_{\sigma} \left[g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} - g^{\mu\sigma} \delta \Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda} \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

Luego miramos qué se obtiene de las variaciones de las conexiones [\(2.3\)](#)

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} \delta g^{\lambda\rho} (\partial_{\mu} g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} g_{\rho\mu} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_{\mu} \delta g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} \delta g_{\rho\mu} - \partial_{\rho} \delta g_{\mu\nu}) \quad (2.18)$$

Capítulo 2: Teoría Gravitacional

Al considerar (2.10), se puede ver que el primer término en (2.18) se reduce simplemente a $-g^{\lambda\rho}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\delta g_{\sigma\rho}$ y que una parte del segundo término se puede escribir como $\partial_{\mu}\delta g_{\rho\nu} + \partial_{\nu}\delta g_{\mu\rho} - \partial_{\rho}\delta g_{\mu\nu} = \nabla_{\mu}\delta g_{\rho\nu} + \nabla_{\nu}\delta g_{\mu\rho} - \nabla_{\rho}\delta g_{\mu\nu} + 2\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\delta g_{\sigma\rho}$, quedando así

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left(\nabla_{\mu}\delta g_{\rho\nu} + \nabla_{\nu}\delta g_{\mu\rho} - \nabla_{\rho}g_{\mu\nu}\right) \quad (2.19)$$

y con este resultado obtenemos que

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \sqrt{-g}\nabla_{\sigma}\left[g_{\mu\nu}\nabla^{\sigma}\delta g^{\mu\nu} - \nabla_{\lambda}\delta g^{\sigma\lambda}\right] \quad (2.20)$$

Usando el teorema de Stokes, puede verse que (2.20) es un término de frontera que se anula en el infinito, por lo tanto no contribuye al resultado final de (2.12). En este punto sólo resta ver el primer término de (2.12). Para cualquier matriz M cuadrada con $\det(M) \neq 0$ se cumple que $Ln[\det(M)] = Tr[Ln(M)]$ y si hacemos variaciones sobre esto vemos que $\det(M)^{-1}\delta[\det(M)] = Tr[M^{-1}\delta M]$. En el caso de la métrica, definiendo $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$, obtenemos

$$\delta g = gg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -gg_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad (2.21)$$

y que a su vez

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\frac{\delta g}{\sqrt{-g}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad (2.22)$$

Finalmente, lo que nos queda al hacer variaciones respecto a la métrica en la acción de Hilbert es

$$\begin{aligned} \delta S_H &= \int d^n x \left[-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + T.B. \right] \\ &= \int d^n x \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.23)$$

los puntos de ensilladura serán aquellos para los cuales

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_H}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0 \quad (2.24)$$

donde $R_{\mu\nu} = 0$, son las ecuaciones de Einstein en el vacío.

Capítulo 2: Teoría Gravitacional

En el caso que existan fuentes, se deben agregar términos asociados a cada una de éstas. Si consideramos una acción S_M para la materia, tendremos entonces que la acción total será $S = \frac{1}{16\pi G}S_H + S_M$ y de manera análoga al caso anterior

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right] + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \quad (2.25)$$

definiendo $T_{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}$ se encuentra que $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$, que son justamente las ecuaciones de Einstein para espacio no vacío.

Poco después del surgimiento de la Relatividad General, Einstein trató de encontrar un modelo cosmológico estático que fuera consistente con las observaciones astronómicas que habían tenido lugar. Para que este modelo cosmológico estático pudiera proporcionar una solución a las ecuaciones de campo con una fuente ordinaria de materia, Einstein agregó otro término a sus ecuaciones, el cual puede obtenerse al considerar el término adicional $S_{cc} = -\frac{1}{8\pi G} \int d^n x \sqrt{-g} \Lambda$ en la acción gravitacional. De esta manera, se tiene un término que representa la densidad de energía del vacío $\tilde{T}_{\mu\nu} = -\frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu}$. Por lo tanto, las ecuaciones de campo de Einstein suplementadas por este término adicional vendrán dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.26)$$

donde Λ es la constante cosmológica, G es la constante cosmológica de Newton y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento, el cual actúa como fuente del campo gravitacional. La componente T^{00} representa la densidad de energía, la T^{i0} es la densidad de momento en la dirección i , T^{0i} (que es igual a T^{i0}) representa el flujo de energía a través de la superficie x^i y T^{ij} es el estrés.

El término $\Lambda g_{\mu\nu}$ es colocado del lado derecho de la ecuación (2.26) y puede ser visto como una especie de tensor energía-momento. Por lo tanto, Λ puede ser interpretado como la densidad de energía del vacío, una fuente de energía y momentum que está presente aún en ausencia de materia.

2.1.1. Término de Frontera de Gibbons-Hawking

Es importante resaltar que la acción de Hilbert es apropiada sólo para espacio-tiempo cerrados [1]. Cuando el espacio-tiempo subyacente tiene una frontera (como es el caso de AdS), es necesario agregar un término llamado término de frontera de Gibbons-Hawking [36–38], el cual afecta las condiciones impuestas sobre la métrica de tal manera que el principio variacional esté bien definido. Esta corrección se obtiene al reconsiderar término de borde en (2.17)

$$\int d^n x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \int d^n x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} [\nabla_\lambda \delta \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda] \quad (2.27)$$

integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned} \int d^n x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \int d^n x \sqrt{-g} [\nabla_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu\mu}^\lambda) - \delta \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \nabla_\lambda g^{\mu\nu} - \nabla_\nu (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda) + \delta \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda \nabla_\nu g^{\mu\nu}] \\ &= \int d^n x \sqrt{-g} [\nabla_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu\mu}^\lambda) - \nabla_\nu (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda)] \\ &= \int d^n x \sqrt{-g} \nabla_\lambda [g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\sigma\mu}^\sigma] \\ &\equiv \int d^n x \sqrt{-g} \nabla_\lambda J^\lambda \end{aligned} \quad (2.28)$$

Por otra parte, el teorema de Stokes nos permite relacionar (2.28) con una integral de superficie de la siguiente manera

$$\int_M d^n x \sqrt{-g} \nabla_\lambda J^\lambda = \int_{\partial M} d^{n-1} x \sqrt{-h} n_\lambda J^\lambda \quad (2.29)$$

donde n_λ es un vector normal unitario y $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu$ es la métrica inducida asociados a la hipersuperficie (∂M).

Luego, vemos que en la definición de J^λ (2.28) al considerar la expresión (2.19) y cancelando algunos términos, podemos escribir

$$J_\lambda = g^{\mu\nu} [\nabla_\nu \delta g_{\mu\sigma} - \nabla_\sigma \delta g_{\nu\mu}] \quad (2.30)$$

Capítulo 2: Teoría Gravitacional

y ya que $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu$, es posible darse cuenta que

$$n^\lambda J_\lambda = n^\lambda h^{\mu\nu} \nabla_\nu \delta g_{\mu\sigma} - n^\lambda h^{\mu\nu} \nabla_\sigma \delta g_{\nu\mu} - n^\lambda n^\mu n^\nu \nabla_\nu \delta g_{\mu\sigma} + n^\lambda n^\mu n^\nu \nabla_\sigma \delta g_{\nu\mu} \quad (2.31)$$

Ya que proyectamos sobre la hipersuperficie para la cual $\int_{\partial M} d^{n-1}x \delta g_{\nu\mu} = 0$ y $\int_{\partial M} d^{n-1}x \delta h_{\nu\mu} = 0$, el primer término de (2.31) no contribuye a (2.29) y al definir $n^\lambda n^\mu n^\nu \equiv 0$ se obtiene que $n^\lambda J_\lambda = -n^\lambda h^{\mu\nu} \nabla_\sigma \delta g_{\nu\mu}$. Ahora bien, si definimos la derivada covariante proyectada sobre ∂M como $D_\mu \equiv h^\nu_\mu \nabla_\nu$ y aplicamos esta derivada sobre $h_{\nu\mu}$ en ∂M , obtenemos

$$\begin{aligned} D_\lambda h_{\nu\mu} &= h^\rho_\lambda h^\sigma_\nu h^\alpha_\mu \nabla_\rho [g_{\sigma\alpha} + n_\sigma n_\alpha] \\ &= h^\rho_\lambda h^\sigma_\nu h^\alpha_\mu \nabla_\rho n_\sigma n_\alpha \\ &= h^\rho_\lambda h^\sigma_\nu h^\alpha_\mu [n_\sigma \nabla_\rho n_\alpha + n_\alpha \nabla_\rho n_\sigma] \\ &= h^\rho_\lambda h^\sigma_\nu h^\alpha_\mu n_\sigma \nabla_\rho n_\alpha \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde hemos usado que $h_{\alpha\mu} n^\alpha = 0$ ya que son perpendiculares.

Luego definimos $K_{\lambda\alpha} \equiv h^\rho_\lambda \nabla_\rho n_\alpha$ como la curvatura extrínseca, cuya traza viene dada por $K = h^{\lambda\alpha} K_{\lambda\alpha} = h^{\lambda\alpha} \nabla_\lambda n_\alpha$. Ahora precedemos a hacer variaciones sobre esta traza

$$\begin{aligned} \delta K &= \delta(h^{\lambda\alpha} \nabla_\lambda n_\alpha) \\ &= \delta(h^{\lambda\alpha}) \nabla_\lambda n_\alpha + h^{\lambda\alpha} \delta(\nabla_\lambda n_\alpha) \end{aligned} \quad (2.33)$$

al proyectar sobre la hipersuperficie el primer término de esta expresión no contribuye; por su parte el segundo término puede ser reescrito usando (2.4), obteniendo así

$$\delta K = h^{\lambda\alpha} [\nabla_\lambda \delta n_\alpha - \delta(\Gamma^\rho_{\lambda\alpha}) n_\rho] \quad (2.34)$$

El primer término en (2.34) no contribuye, esto puede verse al ser reescrito como

$$h^{\lambda\alpha} \nabla_\lambda \delta n_\alpha = h^{\alpha\rho} h^\lambda_\rho \nabla_\lambda \delta n_\alpha = D_\rho [h^{\alpha\rho} \delta n_\alpha] = D_\rho [\delta(h^{\alpha\rho} n_\alpha) - n_\alpha \delta(h^{\alpha\rho})] = 0 \quad (2.35)$$

Capítulo 2: Teoría Gravitacional

donde hemos usado que $D_\rho h^{\alpha\rho} = 0$, $h^{\alpha\rho} n_\alpha = 0$ y $\delta(h^{\alpha\rho}) = 0$. Luego vemos que lo que nos queda es

$$\delta K = -h^{\lambda\alpha} \delta(\Gamma_{\lambda\alpha}^\rho) n_\rho \quad (2.36)$$

al sustituir (2.19) en (2.36) finalmente obtenemos

$$\delta K = -\frac{1}{2} h^{\lambda\alpha} n^\rho \nabla_\rho \delta g_{\lambda\alpha} = -\frac{1}{2} n^\lambda J_\lambda \quad (2.37)$$

con lo cual podemos escribir el término de Gibbons-Hawking como

$$\int_{\partial M} d^{n-1} x \sqrt{-h} n_\lambda J^\lambda = \int_{\partial M} d^{n-1} x \sqrt{-h} (-2\delta K) \quad (2.38)$$

Por último si integramos por parte el lado derecho de (2.38), tenemos

$$\int_{\partial M} d^{n-1} x \sqrt{-h} (-2\delta K) = -2 \left[\delta \left(\int_{\partial M} d^{n-1} x \sqrt{-h} K \right) - \int_{\partial M} d^{n-1} x \delta(\sqrt{-h}) K \right] \quad (2.39)$$

donde $\delta(\sqrt{-h}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-h} h_{\lambda\alpha} \delta h^{\lambda\alpha}$ y ya que $\delta h^{\lambda\alpha} \rightarrow 0$ en la frontera, finalmente vemos que

$$\int_{\partial M} d^{n-1} x \sqrt{-h} (-2\delta K) = -2\delta \left(\int_{\partial M} d^{n-1} x \sqrt{-h} K \right) \quad (2.40)$$

De esta manera, hemos encontrado la acción de Gibbons-Hawking

$$S_{GH} = -\frac{1}{8\pi G} \int_{\partial M} d^{n-1} x \sqrt{-h} K \quad (2.41)$$

Al final la acción gravitacional para nuestro espacio-tiempo asintóticamente AdS vendrá dada por $S_{Grav} = \frac{1}{16\pi G} S_H + S_{cc} + S_{GH}$

$$S_{Grav} = \frac{1}{16\pi G} \left[\int_M d^n x \sqrt{-g} [R - 2\Lambda] + 2 \int_{\partial M} d^{n-1} x \sqrt{-h} K \right] \quad (2.42)$$

2.2. Espacio de Anti-de Sitter (AdS)

La mejor manera de clasificar los espacio-tiempo es a través de las isometrías que éstos poseen, las cuales están asociadas a transformaciones que dejan invariante la métrica. En tal sentido, a cada isometría se puede asignar un vector de Killing, el cual satisface una ecuación de Killing

$$\nabla_{\mu} \xi_{\nu} + \nabla_{\nu} \xi_{\mu} = 0 \quad (2.43)$$

Los espacio-tiempo más simples suelen ser aquellos con la mayor cantidad de simetrías y por consiguiente la mayor cantidad de vectores de Killing (para una métrica en d dimensiones, esto implicaría tener al menos $d(d+1)/2$ vectores de Killing). Los espacio-tiempo con tal cantidad de vectores de Killing se dice que son maximalmente simétricos. Existen tres espacio-tiempo maximalmente simétricos en d dimensiones, clasificados de acuerdo al grupo formado por sus vectores de Killing: El espacio de Sitter cuyo grupo es el $SO(1, d)$, el espacio anti-de Sitter cuyo grupo es el $SO(2, d-1)$ y el espacio de Minkowski cuyo grupo es el $ISO(1, d-1) = SO(1, d-1)$.

La simplicidad de los espacio-tiempo maximalmente simétricos se ve reflejada en su curvatura, ya que básicamente en estos espacios la curvatura es constante. Para ver esto, tomando en cuenta (2.8) y $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = d$, multiplicamos (2.26) (con $T_{\mu\nu} = 0$) por $g^{\mu\nu}$ y obtenemos

$$R = \frac{2d}{d-2} \Lambda \quad (2.44)$$

sustituyendo (2.44) en (2.26) (con $T_{\mu\nu} = 0$) se tiene

$$R_{\mu\nu} = \frac{2d}{d-2} \Lambda g_{\mu\nu} \quad (2.45)$$

En este sentido, uno encuentra que $\Lambda > 0$ corresponde a un espacio de de Sitter, $\Lambda = 0$ corresponde a un espacio de Minkowski y $\Lambda < 0$ corresponde a un espacio de anti-de Sitter. Esto nos permite definir el espacio de anti-de Sitter en $d = 4$ como

Capítulo 2: Teoría Gravitacional

aquel espacio maximalmente simétrico con constante cosmológica negativa, el cual representa una solución única a las ecuaciones de Einstein en el vacío suplementadas con el término de la constante cosmológica.

Para describir el espacio de AdS en d dimensiones, éste puede ser embebido como una hipersuperficie hiperbólica en $(d + 1)$ dimensiones con coordenadas de embebiendo $(X_{-1}, X_o, X_1, \dots, X_{d-1})$ de manera que [1,33]

$$-X_{-1}^2 - X_o^2 + X_1^2 + \dots + X_{d-1}^2 = -L^2 \quad (2.46)$$

donde L es el radio de AdS y el elemento de línea viene dado por

$$ds^2 = -dX_{-1}^2 - dX_o^2 + dX_1^2 + \dots + dX_{d-1}^2 \quad (2.47)$$

La ecuación (2.46) puede ser resuelta usando las coordenadas de Poincaré (u, t, \vec{x}) , definidas como [1,33]

$$\begin{aligned} X_{-1} &= \frac{1}{2u} \left[1 + u^2(L^2 + \vec{x}^2 - t^2) \right] \\ X_o &= Lut \\ X^i &= Lux^i \quad (i = 1, \dots, d-2) \\ X_{d-1} &= \frac{1}{2u} \left[1 - u^2(L^2 - \vec{x}^2 + t^2) \right] \end{aligned} \quad (2.48)$$

donde $u > 0$ y $\vec{x} \in R^{d-2}$, de esta manera la métrica toma la siguiente forma

$$ds^2 = L^2 \left[\frac{du^2}{u^2} + u^2(-dt^2 + d\vec{x}^2) \right] \quad (2.49)$$

Las coordenadas de Poincaré cubren únicamente una parte del espacio de AdS [1]. Otra forma equivalente a (2.49) puede obtenerse haciendo $u = 1/r$, quedando así

$$ds^2 = \frac{L^2}{r^2} \left[-dt^2 + dr^2 + d\vec{x}^2 \right] \quad (2.50)$$

Si, por simplicidad, consideramos sólo

$$ds^2 = \frac{L^2}{r^2} \left[dr^2 + dx^2 \right] \quad (2.51)$$

lo que obtenemos es el semi-plano de Poincaré, el cual constituye la región bidimensional (x, r) , donde $r > 0$.

Los símbolos de Christoffel no nulos, obtenidos a partir de (2.51), son: $\Gamma_{xr}^x = \Gamma_{rx}^x = \Gamma_{xx}^r = -\Gamma_{rr}^r = -r^{-1}$. Las componentes del tensor Riemann no nulas son $R_{rxr}^x = -r^{-2}$ y otras componentes relacionadas a ésta. El tensor de Ricci es entonces $R_{xx} = R_{rr} = -r^{-2}$ y $R_{xr} = 0$, mientras que el escalar de curvatura es $R = -2/L^2$. La longitud del segmento de línea extendida verticalmente, para $x=\text{constante}$, desde r_1 hasta r_2 viene dado por [1]

$$\Delta s = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dr} \frac{dx^\nu}{dr}} dr = L \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = L \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \quad (2.52)$$

de donde se puede ver que para $r \rightarrow 0$ la longitud de camino se vuelve infinita, evidenciando una “frontera” en $r = 0$. Dicha frontera es conocida como Frontera Conforme.

Al dejar x fijo y tratar de moverse en la dirección de r desde un cierto valor finito hasta $r = 0$, se encuentra que la distancia se vuelve infinita. Sin embargo, la luz (en un espacio-tiempo de AdS) viaja a través de geodésicas nulas y alcanza la frontera en un tiempo finito. Este resultado puede ser extendido a dimensiones mayores [1]. Para el caso del espacio-tiempo de relatividad general, la frontera conforme tiene una geometría inducida de espacio de Minkowski.

La idea de la correspondencia AdS/CFT es que la frontera conforme de AdS puede ser considerada como un espacio-tiempo para la teoría cuántica conforme de campo que es equivalente a la teoría gravitacional clásica sobre el volumen de AdS, como veremos en los siguientes capítulos.

2.3. Teoría de Campo Conforme

Una ventaja de describir AdS localmente usando coordenadas de Poincaré es que las superficies con r constante son copias del espacio de Minkowski. La frontera de AdS

Capítulo 2: Teoría Gravitacional

en $r = 0$ es de gran interés y las condiciones impuestas sobre ella son un aspecto crucial de la correspondencia. Una condición de frontera posible es que el espacio-tiempo sea asintóticamente AdS, es decir, a medida que nos aproximamos a la frontera en el límite $r \rightarrow 0$ el espacio parece localmente como si tuviera curvatura constante negativa.

Las teorías de campo conformes (TCC) tienen simetrías usuales del grupo de Poincaré (traslaciones, rotaciones y boosts), pero también son invariantes bajo transformaciones de escala tales como $x \rightarrow x/b$ conocidas como transformaciones conformes especiales. Puede demostrarse, considerando el álgebra de Lie de las TCCs, que las transformaciones conformes especiales actúan como las traslaciones y que, junto con las transformaciones de escala, son invariantes bajo transformaciones locales de escala de la forma [39]

$$x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu}{b(x)} \quad (2.53)$$

donde $b(x)$ es real y depende de la posición en el espacio-tiempo.

La invariancia de escala es un subconjunto de estas simetrías locales cuando b es constante. Si uno considera el álgebra de Lie de una teoría de campo conforme, encuentra que es justamente el álgebra de Lie de $SO(2, d)$: $[iM^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - \eta^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}$. Este álgebra viene dado por los generadores de las rotaciones $M_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$, traslaciones $P_\mu = -i\partial_\mu$, dilataciones $D = -ix_\mu\partial^\mu$ y transformaciones especiales conformes $K_\mu = i(x^2\partial_\mu - 2x_\mu x_\nu\partial_\nu)$.

Ya que las TCCs son invariantes bajo reescalamiento espacial, ellas son también invariantes bajo cambios en la escala de energía y por lo tanto el acoplamiento dentro de la teoría no cambia (esto se discutirá con más detalle en la sección 4.2 del capítulo 4). Si consideramos una teoría cuántica de campo que es invariante de escala y utilizamos la escala de energía u de esta teoría como una coordenada adicional para construir una métrica para la teoría de gravedad. Usando la invariancia de escala, la métrica tiene que ser invariante bajo transformaciones de escala $x \rightarrow x/b$, con u transformando como $u \rightarrow ub$ (por análisis dimensional). La métrica debe preservar también invariancia de

Capítulo 2: Teoría Gravitacional

Poincaré. Imponiendo estas restricciones se obtiene [39]

$$ds^2 = (u\tilde{L})^2 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{du^2}{u^2} L^2 \quad (2.54)$$

donde L y \tilde{L} son longitudes. Bajo la transformación de escala $u \rightarrow \frac{L}{\tilde{L}}u$ se puede remover la dependencia de \tilde{L} en (2.54) y la métrica toma la forma

$$ds^2 = (uL)^2 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{du^2}{u^2} L^2 \quad (2.55)$$

Podemos hacer un cambio de coordenada adicional para llevar la métrica a una forma que hace la invariancia de escala más evidente. Si intercambiamos u con una escala de longitud $r = 1/u$, la métrica toma la siguiente forma

$$ds^2 = \frac{L^2}{r^2} [\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dr^2] \quad (2.56)$$

La expresión (2.56) tiene la misma forma que la métrica de AdS en coordenadas de Poincaré. Otro aspecto importante a notar es que el grupo de simetría de AdS en $(d+1)$ dimensiones y una TCC en d dimensiones son ambos $SO(2, d)$. Esto corrobora el hecho de que una teoría cuántica de campo invariante de escala, con una teoría gravitacional dual, puede también ser descrita por una teoría de campo conforme [39].

Capítulo 3

Termodinámica de Agujeros Negros

Los orígenes de la holografía provienen principalmente del trabajo de Bekenstein, Hawking, Penrose y colaboradores sobre agujeros negros [12–14]. Los teoremas de singularidad de Hawking y Penrose permitieron la concepción de que la materia ordinaria podría colapsar a espacio-tiempos singulares y que era necesario considerar la existencia de agujeros negros en Relatividad General, lo cual abrió la puerta al estudio de estos objetos.

Un agujero negro es una región del espacio-tiempo en la cual se encuentra concentrada una gran cantidad de masa y la gravedad es tan intensa que puede entrar masa y luz del exterior, pero nada puede escapar de allí. La frontera de esta región se conoce como horizonte de eventos, la cual representa una hipersuperficie que separa los puntos del espacio-tiempo que están conectados (a través de caminos tipo tiempo) a regiones muy lejos del agujero negro de aquellos puntos que no lo están [35]. En otras palabras, el horizonte representa una frontera entre la región que está causalmente conectada a observadores distantes y la que no lo está. Dicho horizonte tiene un radio conocido como radio del horizonte, el cual delimita la hipersuperficie.

En el centro del agujero negro existe una singularidad gravitacional, constituida por una región donde la curvatura del espacio-tiempo se hace infinita. Los agujeros

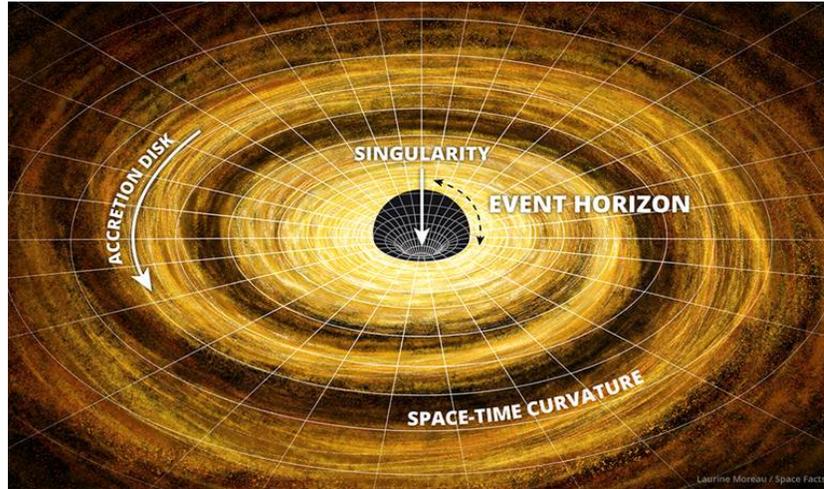


Figura 3.1: Vista de un Agujero Negro, donde se aprecian el disco de acreción, el horizonte de eventos y la singularidad en el centro del agujero. Tomado de [40].

negros también presentan un disco de acreción, el cual es una estructura formada por material difuminado que orbita alrededor del agujero (ver figura 3.1).

Otra característica resaltante en los agujeros negros es lo que se conoce como gravedad superficial, la cual puede pensarse como una fuerza por unidad de masa ó aceleración gravitacional sobre el horizonte. La gravedad superficial viene dada por

$$\kappa = \frac{c^4}{4GM} \quad (3.1)$$

Una forma de determinar (3.1) es la que se muestra en [10], donde se estudia el movimiento de una partícula considerando un agujero negro de Schwarzschild y su correspondiente métrica, se determina la magnitud de la aceleración covariante $g_{\mu\nu}a^\mu a^\nu$, calculan el trabajo que realiza un observador asintótico al halar la partícula una distancia propia y aplicando conservación de energía (respetando que tanto el trabajo como la energía dependen del observador considerado) encuentran (3.1).

3.1. Teorema de No-hair

Este teorema surge del trabajo de Israel en 1967, el cual propuso una primera versión del teorema para agujeros negros esféricamente simétricos [41]. Más tarde este resultado sería extendido por Israel y Carter al considerar agujeros negros rotantes y cargados [42, 43]. Si se considera que el electromagnetismo es el único campo no gravitacional de largo alcance presente, la versión final de este teorema establece que las soluciones tipo agujero negro, estacionarias y asintóticamente planas, que no son singulares fuera del horizonte de eventos están completamente caracterizadas por la masa M , momento angular J y las cargas eléctrica Q_e y magnética Q_m [35, 44, 45]. Todas las otras características no contribuyen a las propiedades gravitacionales del agujero negro para un observador externo.

Las soluciones estacionarias son de especial interés, ya que es de esperar que ellas sean los estados finales del colapso gravitacional. Si consideramos un sistema complejo (como una estrella) que colapsa para formar un agujero negro, eventualmente dicho agujero negro alcanzará un estado final estacionario. El teorema de No-hair establece que este estado es único. Una alternativa sería alguna especie de configuraciones oscilantes, pero dichas oscilaciones al final serán disipadas a medida que la energía se pierde a través de la emisión de la radiación gravitacional [35].

3.2. Teorema de unicidad de las soluciones

Sólo existe una pequeña familia de soluciones de agujero negro, estacionarias y asintóticamente planas, para las ecuaciones de Einstein [41, 42, 47]. Estas soluciones son espacio-tiempos con un horizonte de eventos y un vector de Killing tipo tiempo muy lejos del agujero negro. En este punto, es importante destacar que un espacio-tiempo estático y uno estacionario presentan simetría bajo reflexión temporal. Sin embargo,

Capítulo 3: Termodinámica de Agujeros Negros

un agujero negro rotante es estacionario mas no estático, mientras que un agujero que no rota es estático.

En este sentido, el teorema de unicidad establece que la única solución estática de vacío con un horizonte de eventos es la de Schwarzschild (descrito únicamente por su masa M) y que la única solución estacionaria de vacío es la de Kerr (parametrizada por la masa total M y momento angular J). Este teorema también establece que, al incluir un campo electromagnético, la única solución estática con un horizonte de eventos con una componente conectada es la de Reissner-Nordström (parametrizada por la masa y las cargas eléctrica Q_e y magnética Q_m) y que si además, el agujero puede rotar, la única solución estacionaria con campo electromagnético es la de Kerr-Newman [47].

3.3. Teorema del Área

En 1970 Hawking propone este teorema, el cual establece que el área del horizonte de eventos de un agujero negro nunca decrece en el tiempo [14]

$$dA \geq 0 \tag{3.2}$$

Además, si dos agujeros negros se fusionan, el área del agujero negro resultante será mayor al área total de los agujeros negros originales. Este teorema también sugiere una analogía entre el área del agujero negro y la entropía termodinámica.

3.4. Agujero Negro de Schwarzschild

El ejemplo más sencillo de un agujero negro es el agujero negro de Schwarzschild, cuyo elemento de línea para una métrica esféricamente simétrica del vacío está dada por [10]

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2d\Omega^2 \tag{3.3}$$

Capítulo 3: Termodinámica de Agujeros Negros

donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2$ y

$$f(r) = 1 - \frac{r_o}{r} \quad (3.4)$$

El término r_o en (3.4) es el radio del horizonte de eventos del agujero negro de Schwarzschild, el cual indica el valor para el cual la métrica (3.3) no está bien definida ($f(r) = 0$) y viene dado por (10)

$$r_o = \frac{2GM}{c^2} \quad (3.5)$$

donde M es la masa del agujero negro, c es la velocidad de la luz y G es la constante gravitacional. Para este agujero negro, el radio del horizonte de eventos es proporcional a la masa del agujero. De esta manera, si cae dentro del agujero negro alguna cantidad de materia entonces el área del horizonte se incrementa. Esto se puede apreciar de la siguiente expresión

$$A = 4\pi r_o^2 = \frac{16\pi G^2 M^2}{c^4} \quad (3.6)$$

Es importante destacar que en el caso del agujero negro de Schwarzschild es posible adoptar otro sistema de coordenadas tal que la métrica sea regular a través del horizonte r_o , de esta manera la singularidad puede ser removida.

3.5. Entropía de Bekenstein

Cuando un sistema termodinámico desaparece detrás del horizonte de eventos de un agujero negro, su entropía desaparece para un observador externo. El área del horizonte de eventos crecerá cuando el agujero negro absorba el sistema. En este punto, es natural preguntarse si este incremento en el área es de alguna forma una compensación por la pérdida de entropía de materia. Basado en este razonamiento, Bekenstein sugirió que un agujero negro posee una entropía proporcional al área de su horizonte de eventos $S_{BH} = \eta A$, donde η es una constante. Más tarde, esta constante sería determinada por Hawking, quedando así (en unidades de Planck) (12)

$$S_{BH} = \frac{A}{4} \quad (3.7)$$

3.6. Leyes de la Termodinámica para Agujeros Negros

3.6.1. Ley Cero

Ya que un agujero negro llega a convertirse en cierto punto en un agujero esféricamente simétrico, aún cuando inicialmente éste haya sido asimétrico, sobre el horizonte de eventos la fuerza gravitacional se hace constante en cada punto. Esta característica resulta similar al de un sistema termodinámico, el cual alcanza un equilibrio térmico y la temperatura se hace constante en cada punto del sistema, esto es lo que se conoce como Ley Cero de la Termodinámica de agujeros negros. De esta manera uno puede pensar que existe una semejanza entre la temperatura y la gravedad superficial, además ambas cantidades son positivas. En este sentido, un agujero negro estacionario cuya gravedad superficial es constante, puede pensarse como un estado de equilibrio [10, 46, 47].

3.6.2. Primera Ley

Si la masa del agujero negro se incrementa por una cantidad dM , el área del horizonte se incrementa una cantidad dA también. Por lo tanto uno encuentra que

$$GdM = \frac{\kappa}{8\pi}dA \quad (3.8)$$

En el caso del agujero negro de Schwarzschild, basta con hacer variaciones en (3.6) para ver esta proporcionalidad. Sin embargo para agujeros negros con carga Q y momento angular J se tiene que [10, 46, 47]

$$GdM = \frac{\kappa}{8\pi}dA + \Omega dJ + \Phi dQ \quad (3.9)$$

donde Ω es la velocidad angular y Φ es el potencial electrostático.

Las expresiones (3.8) y (3.9) constituyen lo que se conoce como Primera Ley de la Termodinámica de agujeros negros.

3.6.3. Segunda Ley

Clásicamente nada puede escapar del agujero negro y por lo tanto el área (3.6) es una cantidad que nunca decrece. Este comportamiento es similar al de la entropía. En tal sentido, es de esperar que exista una semejanza entre estas dos cantidades $S \propto A$, donde S representa lo que llamamos la entropía del agujero negro. Por lo tanto, $\delta A \geq 0$ constituye la Segunda Ley de la Termodinámica de agujeros negros [10, 46, 47].

3.6.4. Segunda ley generalizada

Bekenstein además propuso que la segunda ley de la Termodinámica es válida sólo para la suma de la entropía fuera del agujero negro y la entropía de él mismo [47]

$$dS_{\text{total}} \geq 0 \quad (3.10)$$

Para sistemas de materia ordinaria simples, no es necesario que sea válida la segunda ley. Pero si la entropía de agujeros negros (3.7) se incluye en el balance, la entropía total nunca disminuirá. Esto se conoce como la segunda ley generalizada [47].

3.7. Radiación de Hawking

Ya que los agujeros negros tienen una masa M y una entropía de Bekenstein S_{BH} , la primera ley establece que los agujeros negros deben tener una temperatura T tal que

$$dM = TdS_{BH} \quad (3.11)$$

el área del horizonte hace las veces de la entropía y la gravedad superficial del agujero negro, κ , juega el papel de la temperatura.

Capítulo 3: Termodinámica de Agujeros Negros

Por otra parte, un cuerpo negro con temperatura no nula debe radiar, pero para un agujero negro esto sería imposible. Clásicamente, nada puede escapar del agujero negro y por ende su temperatura debe ser exactamente cero. Esta paradoja fue resuelta gracias a que se consideraron los efectos cuánticos de la materia. Hawking mostró, a través de un cálculo semi-clásico, que un observador distante detectará un espectro térmico de partículas saliendo del agujero negro. Esta radiación se conoce como Radiación de Hawking y su temperatura (de Hawking), para un agujero negro de Schwarzschild, viene dada por [10, 46]

$$k_B T = \frac{\hbar \kappa}{2\pi c} = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M} \quad (3.12)$$

Esto representa un efecto cuántico porque la temperatura es proporcional a \hbar . Si reescribimos (3.8) podemos ver que

$$d(Mc^2) = \frac{\kappa c^2}{8\pi G} dA = \frac{\hbar \kappa}{2\pi k_B c} \frac{k_B c^3}{4G\hbar} dA = T \frac{k_B c^3}{4G\hbar} dA \quad (3.13)$$

que al comparar con la primera ley de la termodinámica $dU = TdS$ nos permite obtener [10]

$$S = \frac{A}{4G\hbar} k_B c^3 = \frac{1}{4} \frac{A}{l_p^2} k_B \quad (3.14)$$

donde $l_p = \sqrt{G\hbar/c^3} \approx 10^{-35} \text{m}$ es la longitud de Plank, la cual representa la escala de longitud donde los efectos cuánticos de gravedad se vuelven importantes. La expresión (3.14) representa una forma explícita del teorema de área.

El descubrimiento de la radiación de Hawking aclaró la interpretación de la descripción termodinámica de los agujeros negros. En particular, los resultados de Hawking afirmaron que la entropía de los agujeros negros debería ser considerada como una contribución genuina de la entropía total contenida en el universo, tal como Bekenstein anticipó (3.10).

3.8. Agujeros Negros de Reissner-Nordström

Los agujeros negros estáticos y cargados se conocen como agujeros negros de Reissner-Nordström, los cuales son soluciones de la teoría de Einstein-Maxwell [10]

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^d x \sqrt{-g} \left[R - GF^2 \right] \quad (3.15)$$

en este caso el tensor energía-momento para electromagnetismo viene dado por

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho} F_{\nu}^{\rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \quad (3.16)$$

donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor de estrés del campo electromagnético.

Si se considera una simetría esférica, las ecuaciones de campo serán las ecuaciones de Einstein acopladas con las ecuaciones de Maxwell [10]

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R &= 2G \left[F_{\mu\rho} F_{\nu}^{\rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right] \\ \nabla_{\nu} F^{\mu\nu} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\nu} \left(\sqrt{-g} F^{\mu\nu} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

la solución a estas ecuaciones se conoce como la métrica de Reissner-Nordström, la cual viene dada por [10]

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.18)$$

donde

$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{G(Q^2 + P^2)}{r^2} \quad (3.19)$$

en este caso, G es la constante gravitacional mientras que M representa la masa, Q la carga eléctrica y P la carga magnética del agujero negro. La métrica de RN [3.18] presenta una singularidad en $r = 0$. El horizonte de eventos se encuentra haciendo $f(r) = 0$ en [3.19], encontrándose que para este agujero negro existen dos horizontes de eventos $r = r_{\pm}$ que vienen dados por [10]

$$r_{\pm} = GM \pm \sqrt{G^2 M^2 - G(Q^2 + P^2)} \quad (3.20)$$

Capítulo 3: Termodinámica de Agujeros Negros

Es importante destacar que, a diferencia del caso de Schwarzschild, esta singularidad si representa un caso físico y no es posible removerla bajo un cambio de coordenadas.

De la expresión (3.20) se obtienen tres casos posibles (35):

- Caso uno: $GM^2 < Q^2 + P^2$. En este caso $f(r) > 0$ siempre y la métrica es completamente regular. Pero existe aún una singularidad en $r = 0$ que se conoce como singularidad desnuda, ya que no existe un horizonte de eventos. A medida que $r \rightarrow \infty$ el espacio-tiempo se vuelve plano. Esta caso es generalmente considerado no-físico ya que representa una situación donde la energía total del agujero es menor que la contribución del campo electromagnético solo.
- Caso dos: $GM^2 > Q^2 + P^2$. En este caso la energía del campo electromagnético es menor que la energía total. El coeficiente $f(r) > 0$ para grandes y pequeños valores de r , pero negativo entre los dos puntos donde se anula ($r_{\pm} = GM \pm \sqrt{G^2M^2 - G(Q^2 + P^2)}$). La métrica tiene singularidades para r_+ y r_- que pueden ser removidas a través de un cambio de coordenadas.
- Caso tres: $GM^2 = Q^2 + P^2$. Este caso se conoce como agujero negro extremo. Una interesante propiedad de estos agujeros es que su masa está (en algún sentido) balanceada por la carga, es decir, poseen la cantidad mínima de masa M compatible con una configuración de carga.

Es importante resaltar que debido a la controversia en torno a la existencia de los monopolos magnéticos, en algunos casos se suele estudiar estos agujeros negros de Reissner-Nordström sin considerar una carga magnética ($P = 0$). Por otra parte, usando (3.20) es posible escribir (3.19) como

$$f(r) = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right) \quad (3.21)$$

3.9. Algunas Cantidades Termodinámicas

Es posible obtener las cantidades termodinámicas para los agujeros negros si se calcula la temperatura de Hawking. Una manera fácil de calcular esto es trabajar con un formalismo Euclídeo donde el requisito indispensable es la identificación periódica de un tiempo imaginario ($t_E = it$), donde la temperatura vendrá dada por el inverso de dicha periodicidad β . De esta manera es posible escribir la métrica como

$$ds_E^2 = f(r)dt_E^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2d\Omega^2 \quad (3.22)$$

siguiendo este procedimiento, que será explicado con más detalle en la sección (5.2), uno encuentra que la temperatura de Hawking viene dada por (11)

$$T = \frac{f'(r)|_{r_o}}{4\pi} \quad (3.23)$$

En el caso del agujero negro de Schwarzschild, al usar (5.47) en (3.4), se encuentra que la temperatura de Hawking es (11)

$$T = \frac{1}{4\pi r_o} = \frac{1}{8\pi GM} \quad (3.24)$$

mientras que para el caso de los agujeros negros de Reissner-Nordström, al usar (5.47) en (3.21), se encuentra que la temperatura de Hawking es (11)

$$T = \frac{r_+ - r_-}{4\pi r_+^2} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sqrt{G^2M^2 - GQ^2}}{2GM(GM + \sqrt{G^2M^2 - GQ^2}) - GQ^2} \right] \quad (3.25)$$

de donde puede verse que para un agujero negro de Reissner-Nordström extremo $T = 0$.

Luego, usando (3.14) en unidades naturales ($c = \hbar = 1$), uno puede ver que la entropía para un agujero negro de Schwarzschild es (11)

$$S = \frac{A}{4G} = \frac{4\pi r_o^2}{4G} = \frac{1}{16\pi GT^2} \quad (3.26)$$

mientras que para los agujeros negros de Reissner-Nordström la entropía es (11)

$$S = \frac{A}{4G} = \frac{4\pi r_+^2}{4G} = \frac{\pi}{G} \left[GM + \sqrt{G^2M^2 - GQ^2} \right]^2 \quad (3.27)$$

Capítulo 4

Correspondencia AdS/CFT y Regla GKPW

Luego de haber estudiado los conceptos básicos referentes a espacios anti-de Sitter e invariancia de escala, podemos empezar a estudiar las condiciones para que exista la dualidad entre la teoría gravitacional y la teoría de campo conforme. El lema principal de la dualidad establece que una teoría de gravedad clásica en $(d + 1)$ dimensiones en un espacio-tiempo vacío AdS_{d+1} es equivalente (en una región local del espacio) a una teoría de campo conforme fuertemente acoplada en d dimensiones en un espacio-tiempo plano cuando el número de grados de libertad por sitio N^2 de esta teoría es grande.

4.1. Condiciones para la existencia de la dualidad

El hecho de que la teoría dual a la gravedad clásica sea una teoría de campo conforme está sustentado principalmente en que el grupo de isometría $SO(2, d)$ de AdS_{d+1} es justamente el grupo de isometría de una teoría de campo conforme en d dimensiones, ya que si dicha teoría conforme se ubica en alguna región del espacio AdS_{d+1} entonces ésta tiene que ser invariante bajo la misma simetría de AdS_{d+1} . Por otra parte, en la dualidad se corresponden el número de grados de libertad \mathcal{N} de una

Capítulo 4: Correspondencia AdS/CFT y Regla GKPW

teoría $(d + 1)$ dimensional con el número de grados de libertad \mathcal{N}_d de una teoría d dimensional [48].

Para entender esto, consideramos la entropía de los agujeros negros ($S \propto A$) y ya que, por ser un agujero negro debe tener la mayor entropía entre todos los objetos presentes en el volumen V , a cada región del espacio corresponde una entropía máxima $S_{max}^{esp} \propto A$. Ésta entropía es mucho menor que la entropía de una teoría cuántica de campos $S_{max}^{TCC} \propto V$ en el mismo espacio. Sin embargo, es posible relacionar la máxima entropía del espacio S_{max}^{esp} con el número de grados de libertad \mathcal{N}_d de una teoría cuántica de campos local que vive en dimensiones menores [48]

$$S_{max}^{esp} = \frac{A}{4G} \sim \mathcal{N}_d \quad (4.1)$$

La correspondencia AdS/CFT es un caso particular del principio holográfico, donde la teoría de gravedad vive en un espacio-tiempo AdS_{d+1} vacío y sus grados de libertad están codificados sobre la frontera conforme. Si calculamos el área de la frontera conforme de AdS_{d+1} , usando la métrica (2.56) embebida en una hipersuperficie de radio constante z y tiempo t , obtenemos

$$A = \int_{z \rightarrow 0} d^{d-1}x \sqrt{g} = \int_{z \rightarrow 0} d^{d-1}x \frac{L^{d-1}}{z^{d-1}} \quad (4.2)$$

donde g es el determinante de la métrica embebida, y hemos tomado el límite $z \rightarrow 0$ ya que esta es la localización de la frontera conforme.

La integral (4.2) debe ser regularizada ya que diverge en $z \rightarrow 0$. Para ello, resolvemos la integral hasta un valor pequeño $z = R$ y encerramos el espacio en un volumen cerrado V_{d-1}

$$A = \frac{L^{d-1}}{R^{d-1}} V_{d-1} \quad (4.3)$$

Finalmente, de acuerdo con (4.1) la máxima entropía en el volumen de AdS_{d+1} es [48]

$$S_{max}^{esp} \sim \frac{L^{d-1}}{R^{d-1}} \frac{V_{d-1}}{4G} \quad (4.4)$$

Capítulo 4: Correspondencia AdS/CFT y Regla GKPW

La teoría cuántica de campo dual en d dimensiones también presenta divergencias y debe ser regularizada de igual manera, introduciendo una caja de volumen V_{d-1} , y una corta distancia a . Por lo tanto, es necesario construir en el lado gravitacional una cantidad con dimensiones de longitud que debe ser arbitrariamente pequeña. Pero, en el paso anterior hemos tomado un valor pequeño R a la coordenada radial de AdS z la cual tiene dimensiones de energía. Consecuentemente, un candidato natural es $a \sim RL^2$. El número total de grados de libertad \mathcal{N}_d de una teoría cuántica de campo en d dimensiones está dado por el número de celdas espaciales $V_{d-1}/a^{d-1} \sim V_{d-1}/(L^{2d-2}R^{d-1})$ multiplicado por el número de grados de libertad por sitio de red N^2 [48]

$$\mathcal{N}_d \sim \frac{V_{d-1}}{(L^{2d-2}R^{d-1})} N^2 \quad (4.5)$$

El hecho de que el número de grados de libertad por sitio en la teoría TCC dual sea grande está relacionado a que estamos considerando gravedad clásica, por lo tanto la longitud de excitación típica de la teoría de gravedad debe ser mucho mayor que la longitud de Planck l_p . Considerando AdS, su escala de longitud típica está dada por su radio L , y ya que $G \sim l_p^{d-1}$, al usar (4.1) y (4.2) obtenemos [48]

$$\frac{L^{d-1}}{G} \sim \frac{L^{d-1}}{l_p^{d-1}} \sim N^2 \gg 1 \quad (4.6)$$

lo que corrobora nuestro supuesto.

4.2. Dimensión Radial Extra y Escala de Energía

El hecho de que la TCC esté fuertemente acoplada, está vinculado al problema de dar cierta interpretación física a la coordenada radial gravitacional extra r en el lado dual. Es natural identificar esta dimensión extra de escala con la dimensión radial en el lado gravitacional. Para ver esto, escribimos la métrica de AdS_{d+1} de la siguiente manera [39]

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{L^2}{r^2} dr^2 \quad (4.7)$$

donde la frontera conforme está ahora localizada en $r \rightarrow \infty$.

La parametrización (4.7) hace evidente que la geometría de AdS_{d+1} puede ser vista como una familia de copias de espacios de Minkowski parametrizadas por la coordenada radial r , cuyo tamaño se reduce cuando r decrece desde la frontera conforme $r \rightarrow \infty$ al horizonte de AdS en $r \rightarrow 0$. Esto aclara la conexión UV/IR entre gravedad y la teoría de campo dual y explica por qué la teoría de campo que vive en la frontera está fuertemente acoplada. De hecho, desde el punto de vista de la teoría de gravedad, la física cerca de la frontera conforme $r \rightarrow \infty$ es la física del gran volumen (IR). Cerca del horizonte $r = 0$ en cambio es la física de corta distancia (UV). Por el contrario, desde el punto de vista de la TCC, la física para r grande corresponde a física de corta distancia UV y viceversa (ver figura 4.1).

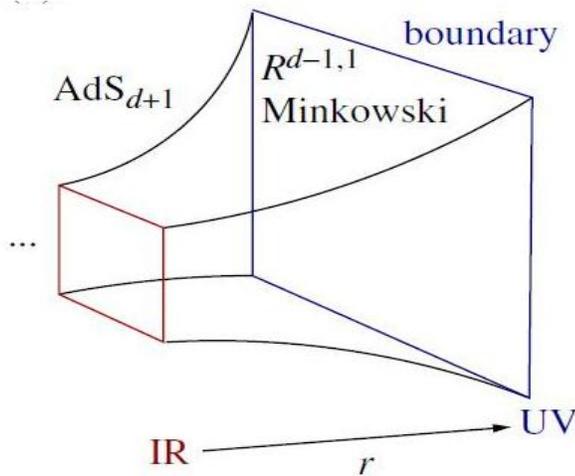


Figura 4.1: Conexión entre las regiones infrarrojo (IR) y ultravioleta (UV) a través de la coordenada radial extra r en un espacio-tiempo AdS_{d+1} . Tomado de [9].

Si una TCC y una teoría gravitacional son duales, el grado de libertad asociado a la coordenada radial extra juega un papel fundamental. Sin embargo, para entender cómo éste se manifiesta dentro de la TCC es necesario considerar el grupo de Renormalización (RG), el cual está asociado al proceso de renormalización necesario para solventar las divergencias UV de la TCC. Este procedimiento involucra integrales que

Capítulo 4: Correspondencia AdS/CFT y Regla GKPW

necesariamente son evaluadas sobre todo el espacio-tiempo donde los campos de la teoría están definidos. Para ello se introduce un corte UV (cut-off), Λ , que trunca todas las integrales usadas para calcular los observables físicos de la teoría.

Estudiando la dependencia de todas las funciones de correlación respecto al corte UV, puede verse si la TCC depende de Λ en un número finito o infinito de formas. Si la TCC es renormalizable, no sólo es finita la dependencia respecto a Λ , sino que también el número de veces que Λ aparece es menor o igual al número de acoplamientos de la teoría. Si éste es el caso, las divergencias UV pueden ser absorbidas dentro de la definición de los acoplamientos y un nuevo conjunto de acoplamientos finitos (“renormalizados” ó finitos) puede ser determinado. Estos acoplamientos pueden ser medidos, tal que los cálculos (que dependen de los acoplamientos físicos) conducen a resultados finitos de las cantidades físicas [39].

La correspondencia AdS/CFT geometriza la escala de energía de la teoría de campos. La escala de corte Λ es esencial para el concepto del grupo de renormalización. Ya que la posición y el momentum son variables conjugadas en la teoría cuántica y que la energía y el momentum están relacionados de igual forma que el espacio y el tiempo lo están en relatividad general, una escala de energía define una escala de longitud conjugada. La escala de longitud asociada con el corte puede ser imaginada como una escala de resolución (ver figura 4.2) que sirve para describir un sistema físico (parecido a como una cámara digital tiene una resolución asociada al número de píxeles) [39].

Si la escala del pequeño valor radial (cut-off) de la teoría se cambia entonces los acoplamientos cambian, así como también, los grados de libertad en la forma de los campos. Este cambio viene descrito por una acción de grupo en la que cualquier escala de energía es alcanzada via cualquier otra transformación. De allí el nombre de grupo de renormalización. Una de las ecuaciones más importantes asociadas con el grupo de renormalización es la tasa de cambio de los acoplamientos respecto al cambio en la

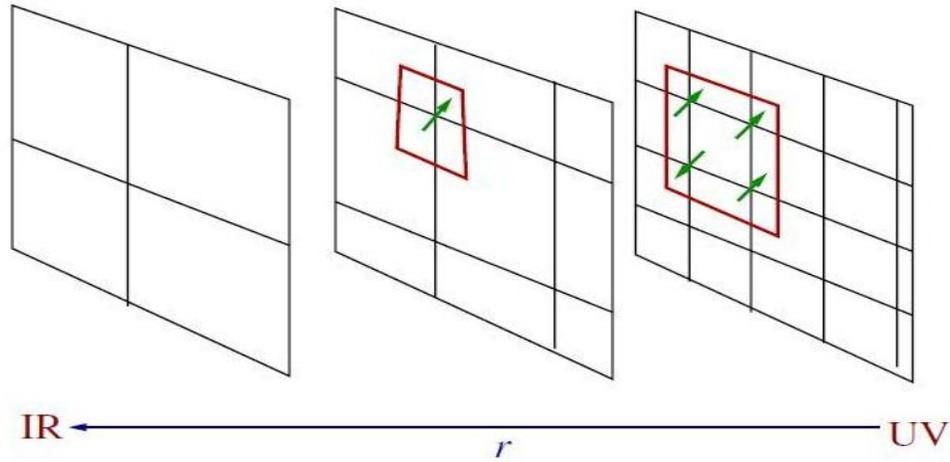


Figura 4.2: La escala de energía puede ser vista como una escala de resolución de la teoría entre las regiones infrarrojo (IR) y ultravioleta (UV). Tomado de [9].

escala de energía, conocida como función beta de la teoría, la cual viene dada por [1, 39]

$$\beta[g(\Lambda)] = \frac{dg(\Lambda)}{d\Lambda} \quad (4.8)$$

Un aspecto importante a resaltar en (4.8) es que, β depende localmente del valor de la escala de energía Λ . Esto significa que para saber cómo cambian los acoplamientos no es necesario conocer el acoplamiento en las regiones de alta energía (UV) ó baja energía (IR), sólo basta trabajar localmente la función beta. Esta localidad está relacionada a las coordenadas espacio-temporales, ya que en relatividad general para calcular cantidades locales sólo se debe tomar en cuenta la geometría local del espacio-tiempo. Por lo tanto, es posible asociar la dimensión extra de la teoría gravitacional a la escala de energía del grupo de renormalización [39]. El caso que nos interesa en este trabajo es cuando los acoplamientos no cambian del todo con la escala de energía ($\beta = 0$), ya que la teoría resulta ser invariante de escala y como ya vimos en el capítulo 2, es por tanto una teoría de campo conforme.

4.3. La Regla GKPW y sus consecuencias

Ya que la teoría gravitacional es clásica, en principio podemos (usando la dualidad) calcular fácilmente observables en la TCC fuertemente acoplada. Sin embargo, para ello es necesario una prescripción de manera de poder relacionar observables en la teoría gravitacional con los de la teoría dual de campo fuertemente acoplada. En particular, los objetos fundamentales de las TCC son los campos primarios. Por lo tanto, para calcular los observables en la TCC es necesario saber cómo relacionar los campos en el sector gravitacional con los campos primarios de la TCC.

Consideremos un Lagrangiano de una teoría de campo conforme \mathcal{L}_{TCC} . El cual puede ser perturbado agregándole funciones arbitrarias $J^A(x)$, conocidas como fuentes de operadores locales $\mathcal{O}_A(x)$

$$\mathcal{L}_{TCC} \rightarrow \mathcal{L}_{TCC} + \sum_A J^A(x) \mathcal{O}_A(x) \quad (4.9)$$

Esto es una perturbación de UV ya que se está usando un operador local. De acuerdo a la conexión general entre la coordenada radial de AdS y el grupo de renormalización, ésta coordenada corresponde a una perturbación cerca de la frontera $r \rightarrow \infty$ en AdS [48]. Por lo tanto, una perturbación con la fuente $J(x)$ de la TCC estará codificada en la condición de frontera sobre los campos del volumen.

Si ahora extendemos la fuente hacia el volumen $J(x) \rightarrow J(x_\mu, r)$ con la coordenada extra r siendo la dimensión radial de AdS_{d+1} , los campos en la frontera serán denotados con coordenadas x , y los campos en el volumen dependerán de las coordenadas (x_μ, r) . Si $J(x_\mu, r)$ es solución de las ecuaciones de movimiento en el volumen, con la condición de frontera

$$\lim_{r \rightarrow \infty} J(x_\mu, r) \equiv J(x) \quad (4.10)$$

e imponemos otra condición de frontera conveniente en el horizonte para fijar $J(x_\mu, r)$ unívocamente. Se tendrá entonces un mapeo uno a uno entre los campos del volumen y

Capítulo 4: Correspondencia AdS/CFT y Regla GKPW

los campos de la frontera [7,8,49]. Por lo tanto, a cada operador local $\mathcal{O}(x)$ corresponde una fuente $J(x)$, la cual representa el valor de frontera en AdS de un campo $J(x_\mu, z)$ del volumen [48].

Para deducir cuál debería ser el campo relacionado a cierto operador, es necesario recurrir a las simetrías, ya que no existe una prescripción general con la cual pueda hallarse dicho campo. Como regla general, ya que la simetría interna del campo en el sector gravitacional se preserva en la teoría de campo dual, en general, podemos decir que el espín de los campos del volumen corresponde al espín de los operadores duales en la teoría de campo de la frontera. Para poder entender esto mejor, veamos cómo el tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$ de la teoría cuántica de campo es codificado en el sector gravitacional dual usando la prescripción que ya mencionamos. En particular, la fuente de $T_{\mu\nu}$ debería ser un tensor $g_{\mu\nu}$ [48]. Para tener un acoplamiento invariante de calibre

$$\int d^d x T_{\mu\nu}(x) g^{\mu\nu}(x) \quad (4.11)$$

el tensor $g_{\mu\nu}(x)$ debería ser el valor de frontera de un campo de calibre correspondiente a la invariancia traslacional local. Dicho campo es por supuesto la métrica $g_{ab}(x_\mu, r)$, con valor de frontera

$$\lim_{R \rightarrow \infty} g_{ab}(x_\mu, r) \Big|_{r=R} \equiv g_{\mu\nu}(x) \quad (4.12)$$

El lado derecho de (4.12) puede verse como el embebimiento de la métrica del volumen en la hipersuperficie $r = \text{const}$. Ya que la métrica $g_{\mu\nu}$ sirve de fuente para el tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$ y que éste es una corriente global conservada ($\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$) debido a la invariancia global traslacional y rotacional de la teoría de campo dual, se puede afirmar que, existe una correspondencia entre simetrías globales en la teoría de calibre y simetrías de calibre en la teoría gravitacional dual [48].

La conexión entre campos y operadores permite expresar la dualidad como una igualdad entre funciones de partición. Gubser, Klebanov, Polyakov y Witten formularon una propuesta que actualmente es una conjetura [7,8]. Esta propuesta, cono-

cida como regla GKPW, afirma que la función de partición de la teoría cuántica de campos $Z_{TCC}[J(x)]$ es igual a la función de partición de la teoría gravitacional dual $Z_{AdS}[J(x_\mu, r)]$

$$Z_{TCC}[J(x)] = Z_{AdS}[J(x_\mu, r)] \quad (4.13)$$

donde $J(x)$ es el conjunto de todas las fuentes asociadas a cada operador local en la teoría de campo y $J(x_\mu, r)$ es el conjunto de campos del volumen. Sin embargo, el lado derecho de (4.13) está claramente identificado en el límite de N grande, donde la teoría gravitacional es clásica. En este límite se puede realizar la integral de camino bajo la aproximación de punto de ensilladura, con lo cual (4.13) puede ser escrito como (48)

$$Z_{TCC}[J(x)] = e^{iS_{on-shell}[J(x_\mu, r)]} \quad (4.14)$$

donde $S_{on-shell}[J(x_\mu, r)]$ es la acción gravitacional clásica calculada sobre las ecuaciones de movimiento (on-shell). Finalmente, podemos postular la primera regla de la correspondencia AdS/CFT: *La dualidad calibre/gravedad es una dualidad entre funciones de partición que relaciona la función de partición de una TCC en d dimensiones con la acción on-shell de una teoría gravitacional en AdS_{d+1} según (4.14)*. Las demás reglas propuestas por Gubser, Klebanov, Polyakov y Witten están asociadas a la dualidad entre las cantidades de interés de ambas teorías (gravitacional/conforme) y pueden apreciarse en la tabla (4.1).

4.4. Renormalización y cálculo de funciones de correlación

La expresión (4.14) no está del todo definida, ya que ambos lados de la igualdad presentan cierta divergencia y por lo tanto deben ser renormalizados cuidadosamente. Por lo tanto, es necesario encontrar una forma de renormalizar la acción gravitacional on-shell para así poder calcular las funciones de correlación en la teoría de campo dual. El procedimiento de renormalización se conoce como renormalización holográfica (49).

Esquemáticamente, el procedimiento de renormalización consiste en los siguientes pasos:

Capítulo 4: Correspondencia AdS/CFT y Regla GKPW

Tabla 4.1: Reglas de GKPW para la dualidad entre las cantidades de la teoría gravitacional que vive en el volumen y las de la teoría conforme que vive en la frontera.

Teoría Gravitacional (Volumen)	\leftrightarrow	Teoría Conforme (Frontera)
Métrica $g_{\mu\nu}$		Tensor energía-momento $T^{\mu\nu}$
Campo de Calibre A_μ		Corriente conservada J^μ
Campo escalar ϕ		Parámetro de Orden/ Operador escalar \mathcal{O}_b
Campo de Dirac ψ		Operador fermiónico \mathcal{O}_f
Espín/Carga del Campo		Espín/Carga del operador
Masa del campo		Dimensión de escala Δ del operador
Agujero Negro		Fase deconfinada a temperatura T
Agujero Negro cargado		Potencial químico μ
Simetría de Calibre		Simetría global
Temperatura de Hawking		Temperatura
Inestabilidad de Agujero Negro		Transición de fase

- Fijar las condiciones de frontera y hallar una solución a las ecuaciones de movimiento: Se debe escoger condiciones de frontera convenientes tanto para el horizonte como para la frontera conforme y así poder resolver la ecuación de movimiento gravitacional. La condición de frontera tiene que ser escogida cuidadosamente ya que el horizonte y la frontera determinan la relevancia física de la solución.
- Calcular la acción on-shell y aislar la parte divergente: La acción on-shell en AdS_{d+1} es sensible a divergencias debido a la divergencia del volumen de la frontera ($r \rightarrow \infty$). A fin de calcular la acción on-shell y aislar la parte divergente es necesario introducir un valor pequeño (cut-off) de UV en $r = R$ y calcular la acción usando la solución de las ecuaciones de movimiento obtenidas anteriormente. Esta acción obtenida consistirá de dos partes:

$$S_{on-shell}(\phi_i, R) = S^{reg}(\phi_i, R) + S^{div}(\phi_i, R) \quad (4.15)$$

Capítulo 4: Correspondencia AdS/CFT y Regla GKPW

donde ϕ_i es el conjunto de campos involucrados en la teoría gravitacional, S^{reg} es la parte regular de la acción on-shell en el límite $R \rightarrow \infty$ mientras que S^{div} es la parte divergente.

- Encontrar contratérminos adecuados: Una vez identificados los términos divergentes, el último paso es hallar contratérminos apropiados $S^{c.t.}(\phi_i(x, R), R)$ los cuales cancelen dichas divergencias. Para que la teoría gravitacional sea consistente, $S^{c.t.}(\phi_i(x, R), R)$ debe respetar las siguientes propiedades:

1. Debe ser una función local de los campos de la teoría gravitacional evaluada en $r = R$ y de la métrica inducida γ_{ij} sobre la variedad $r = R$.
2. Debe preservar el problema de valor de frontera definido anteriormente, es decir, no debe modificar la condición de frontera en la frontera conforme.

- Habiendo realizado estos pasos previos, la acción on-shell renormalizada está definida como

$$S_{on-shell}^{ren} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[S_{on-shell}(\phi_i, R) + S^{c.t.}(\phi_i(x, R), R) \right] \quad (4.16)$$

en este punto, manteniendo en mente la correspondencia campo-operador que ya discutimos, podemos dar la prescripción para calcular las funciones de correlación de la TCC dual a partir de la acción gravitacional on-shell renormalizada.

- Una vez que se ha obtenido la acción on-shell renormalizada $S^{(ren)}$ como una función de los valores de frontera de los campos gravitacionales $\phi_i(x)$ (los cuales actúan como fuentes para los operadores locales en la teoría de campo dual), las funciones de correlación de la TCC de frontera están dadas por la siguiente relación:

$$\langle \mathcal{O}_i(x_1) \mathcal{O}_j(x_2) \cdots \mathcal{O}_l(x_n) \rangle = \frac{\delta}{\delta \phi_i(x_1)} \frac{\delta}{\delta \phi_j(x_2)} \cdots \frac{\delta}{\delta \phi_l(x_n)} S^{(ren)}(J_i(x)) \quad (4.17)$$

Capítulo 5

Correspondencia AdS/CFT en Materia Condensada

En este capítulo abordaremos dos ejemplos de la correspondencia AdS/CFT aplicada en materia condensada, o como se conoce a veces, correspondencia AdS/CMT por sus siglas en inglés. Estos ejemplos serán los correspondientes a Campo Escalar y Temperatura Finita. En el primero, partiremos de la acción de campo escalar, determinaremos la ecuación de movimiento, impondremos condiciones de frontera apropiadas para determinar la solución a esta ecuación y utilizaremos la acción on-shell para determinar las funciones de correlación. Luego, en el caso de Temperatura Finita partiremos de la métrica de Poincaré para AdS, asumiremos un formalismo euclídeo para la coordenada temporal con una cierta periodicidad, identificando el inverso de esta periodicidad con la temperatura y así poder determinar la entropía, por último, partiremos de la acción gravitacional, determinaremos la energía libre y constataremos el resultado antes obtenido para la entropía.

5.1. Primer ejemplo: Campo Escalar

A continuación, resolveremos las ecuaciones de movimiento para un campo escalar ϕ en el volumen de AdS. Este campo es el correspondiente a una teoría gravitacional en

Capítulo 5: Correspondencia AdS/CFT en Materia Condensada

un espacio-tiempo AdS. Dicha teoría gravitacional tiene una teoría de campo conforme (fuertemente acoplada) dual en la frontera de AdS. Siguiendo las reglas GKPW para la dualidad, el campo ϕ debe ser igual a la fuente J en la teoría de campo en la frontera y a través de ϕ se pueden calcular todas las cantidades físicas de interés en ella.

La acción para el campo escalar real ϕ , en el volumen de AdS está dada por

$$S = -\frac{1}{2} \int_{AdS} dr d^{d+1}x \sqrt{-g} \left[g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + m^2 \phi^2 \right] \quad (5.1)$$

con $\sqrt{-g} = (r/L)^d$ y las correspondientes ecuaciones de movimiento son

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \right) - m^2 \phi = 0 \quad (5.2)$$

Integrando por partes el primer término de (5.1), vemos que podemos reescribir esta expresión de la siguiente manera

$$S = -\frac{1}{2} \int_{AdS} dr d^{d+1}x \left[\partial_\mu \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \phi \partial_\nu \phi \right) - \phi \partial_\mu \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \right) + \sqrt{-g} m^2 \phi^2 \right] \quad (5.3)$$

usando el teorema de Stokes, el primer término en la integral puede ser escrito como un término de frontera, con lo cual la acción vendrá dada por

$$S = \frac{1}{2} \int_{AdS} dr d^{d+1}x \sqrt{-g} \phi (\square - m^2) \phi - \frac{1}{2} \int_{\partial AdS} d^{d+1}x \sqrt{-\gamma} \phi \partial_n \phi \quad (5.4)$$

donde γ es el determinante de la métrica inducida sobre la frontera de AdS. Para la métrica de AdS

$$ds^2 = \frac{L^2}{r^2} dr^2 + \gamma_{\mu\nu}(r, x) dx^\mu dx^\nu \quad (5.5)$$

la métrica inducida es el tensor $\gamma_{\mu\nu}(r, x)$ evaluado en la frontera $r \rightarrow \infty$. La derivada normal $\partial_n \equiv n^\mu \partial_\mu$ en el término de frontera está dirigida desde la frontera hacia afuera a lo largo del vector normal unitario $n^\mu = (r/L, 0, \dots, 0)$. Tomando por simplicidad la métrica pura de AdS, se tiene que $\gamma_{\mu\nu} = (r^2/L^2) \eta_{\mu\nu}$. Este término de frontera no contribuye a las ecuaciones de movimiento, pero es fundamental en la correspondencia.

Capítulo 5: Correspondencia AdS/CFT en Materia Condensada

Luego, si ϕ es solución de las ecuaciones de movimiento (5.2), el primer término en (5.4) se anula y la acción on-shell está dada sólo por el término de frontera

$$S = -\frac{1}{2} \int_{\partial AdS} d^{d+1}x \sqrt{-\gamma} \phi \partial_n \phi \quad (5.6)$$

Ya que existe una invariancia traslacional se puede efectuar una transformada de Fourier y escribir el campo ϕ de la siguiente manera [1, 11]

$$\phi(\vec{x}, r, t) = e^{-(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} f(r) \quad (5.7)$$

al sustituir esta expresión en las ecuaciones de movimiento resulta

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{d+2}{r} \frac{d}{dr} - \left(\frac{\lambda^2 L^4}{r^4} + \frac{m^2 L^2}{r^2} \right) \right] f_\lambda(r) = 0 \quad (5.8)$$

donde $\lambda^2 \equiv -\omega^2 + \vec{k}^2$. Si consideramos soluciones asintóticas cerca de la frontera $r \rightarrow \infty$ para (5.8), tal que $f(r) \propto r^{-\Delta}$, podemos ver que la ecuación de movimiento (5.2) se reduce a

$$\Delta(\Delta - 1)r^{-\Delta} + (d+2)\Delta r^{-\Delta} - r^{-\Delta-2}(\lambda^2 L^4) - m^2 L^2 r^{-\Delta} = 0 \quad (5.9)$$

la cual para $r \rightarrow \infty$ conduce a

$$\Delta(\Delta - d - 1) = m^2 L^2 \quad (5.10)$$

cuyas soluciones para Δ serán [11]

$$\Delta_{\pm} = \frac{d+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d+1}{2}\right)^2 + m^2 L^2} \quad (5.11)$$

De (5.11) puede verse que $\Delta_+ \equiv \Delta$ es siempre positivo, por lo tanto $r^{-\Delta}$ se anula cerca de la frontera ($r \rightarrow \infty$). El hecho que los exponentes sean reales implica que existe una condición llamada condición de Breitenlohmer-Freedman: $m^2 L^2 \geq -(d+1)^2/4$, la cual es una propiedad del espacio-tiempo AdS. Si esta condición se satisface entonces el espacio resulta ser estable en presencia del campo masivo ϕ [1].

Por otra parte, la expresión (5.2) es una ecuación de Bessel modificada, la cual para $\lambda^2 > 0$ tiene como solución

$$f_\lambda(r) = A \left(\frac{r}{L^2} \right)^{-(d+1)/2} K_\nu \left(\frac{\lambda L^2}{r} \right) + B \left(\frac{r}{L^2} \right)^{-(d+1)/2} I_\nu \left(\frac{\lambda L^2}{r} \right) \quad (5.12)$$

donde A y B son constantes a determinar imponiendo ciertas condiciones, mientras que K_ν y I_ν son las funciones de Bessel modificada de segunda clase y

$$\nu = \Delta - \frac{d+1}{2} = \sqrt{\left(\frac{d+1}{2} \right)^2 + m^2 L^2} \quad (5.13)$$

Ya que $I(x) \sim e^x$ y $K(x) \sim e^{-x}$ para x grande, tomamos $B = 0$ en (5.12) ya que para $r \rightarrow 0$ esta es la solución que mejor se comporta. Por otra parte, para $r \rightarrow \infty$ se tiene que

$$K_\nu \left(\frac{\lambda L^2}{r} \right) = \left(\frac{\lambda L^2}{2r} \right)^{-\nu} \frac{\Gamma(\nu)}{2} + \left(\frac{\lambda L^2}{2r} \right)^\nu \frac{\Gamma(-\nu)}{2} + \dots \quad (5.14)$$

de esta manera la solución del volumen tiene un comportamiento asintótico universal cerca de la frontera $r \rightarrow \infty$ de la forma [11]

$$\begin{aligned} \phi_{sol}(\omega, \vec{k}, r) &= \frac{\Gamma(\nu)\lambda^{-\nu}}{2^{(1-\nu)}} \left(\frac{r}{L} \right)^{-(d+1-\Delta)} + \frac{\Gamma(-\nu)\lambda^\nu}{2^{(1+\nu)}} \left(\frac{r}{L} \right)^{-\Delta} + \dots \\ &= A(\omega, \vec{k}) \left(\frac{r}{L} \right)^{-(d+1-\Delta)} + B(\omega, \vec{k}) \left(\frac{r}{L} \right)^{-\Delta} + \dots \end{aligned} \quad (5.15)$$

donde $\Delta = (d+1)/2 + \sqrt{(d+1)^2/4 + m^2 L^2}$.

De acuerdo a la regla GKPW, el valor de frontera de $\phi_{sol}(\omega, \vec{k}, r \rightarrow \infty)$ debería tomarse fijo e igual a la fuente $J(\omega, \vec{k})$. En este punto surge un problema, ya que el exponente $d+1-\Delta$ será negativo generalmente y por tanto el valor en la frontera de ϕ no estará bien definido. Por otra parte, aproximarse a la frontera es equivalente a incrementar la escala de renormalización hasta infinito y en ese caso surgen divergencias UV. Por tal motivo es necesario regularizar la teoría.

La regla GKPW establece que se debería realizar los cálculos a una distancia infinitesimal $r = \varepsilon^{-1}$ de la frontera y modificar la teoría tal que luego se pueda tomar un

límite apropiado $\varepsilon \rightarrow 0$. Siguiendo este procedimiento, la acción on-shell regularizada viene dada por [\(11\)](#)

$$S_{on-shell}(\varepsilon) = \frac{1}{2L} \int_{r=\varepsilon^{-1}} \frac{d\omega d^d \vec{k}}{(2\pi)^{d+1}} \left(\frac{r}{L}\right)^d \left[(d+1-\Delta) A^2 \left(\frac{r}{L}\right)^{-(2d+1-2\Delta)} + (d+1) AB \left(\frac{r}{L}\right)^{-d} + \dots \right] \quad (5.16)$$

El primer término es problemático ya que es un término divergente. La clave para que la acción esté bien definida consiste en agregar un término de frontera arbitrario en ella que no altere las ecuaciones de movimiento. Este término adicional tendrá la forma

$$\begin{aligned} S_{ct}(\varepsilon) &= -\frac{(d+1-\Delta)}{2L} \int_{r=\varepsilon^{-1}} \frac{d\omega d^d \vec{k}}{(2\pi)^{d+1}} \sqrt{-\gamma} \phi^2 \\ &= -\frac{(d+1-\Delta)}{2L} \int_{r=\varepsilon^{-1}} \frac{d\omega d^d \vec{k}}{(2\pi)^{d+1}} \left(\frac{r}{L}\right)^{d+1} \left[A^2 \left(\frac{r}{L}\right)^{-2(d+1-\Delta)} + 2AB \left(\frac{r}{L}\right)^{-(d+1)} + \dots \right] \end{aligned} \quad (5.17)$$

Combinando las expresiones [\(5.16\)](#) y [\(5.17\)](#), nos queda

$$S_{on-shell}(\varepsilon) + S_{ct}(\varepsilon) = \frac{1}{2L} \int_{r=\varepsilon^{-1}} \frac{d\omega d^d \vec{k}}{(2\pi)^{d+1}} \left(\frac{r}{L}\right)^{d+1} \left[(2\Delta - d - 1) AB \left(\frac{r}{L}\right)^{-(d+1)} + \dots \right] \quad (5.18)$$

que está bien definida (finita). Por otra parte, el comportamiento dominante (el coeficiente $A(\omega, \vec{k})$) de la solución $\phi_{sol}(\omega, \vec{k}, r)$ puede ser igualado a la fuente local $J(\omega, \vec{k})$.

Ya que lo anterior debe coincidir con la expresión de la fuente en la teoría de campo

$$S_{fuente} = -i \int d^{d+1} x J \mathcal{O} \quad (5.19)$$

al tomar la derivada simple con respecto a J se obtiene la función de correlación $\langle \mathcal{O} \rangle$ del operador de la teoría de campo en presencia de la fuente. Esta función de correlación está dada por

$$\langle \mathcal{O}(\omega, \vec{k}) \rangle = \frac{2\Delta - d - 1}{2L} B(\omega, \vec{k}) \quad (5.20)$$

Por lo tanto, es evidente que igualar el comportamiento dominante $A(\omega, \vec{k})$ de la solución cerca de la frontera con la fuente $J(\omega, \vec{k})$, implica que el comportamiento sub-dominante $B(\omega, \vec{k})$ cerca de la frontera es la correspondiente respuesta. La teoría de respuesta lineal establece que la respuesta $B(\omega, \vec{k})$ debería ser linealmente proporcional a la fuente $A(\omega, \vec{k})$ [11]. Dividiendo esta proporcionalidad, junto con un factor combinatorial de 2, nos da la función de correlación de la TCC [32]

$$\langle \mathcal{O}(-\omega, -\vec{k}) \mathcal{O}(\omega, \vec{k}) \rangle = \frac{(2\Delta - d - 1) B(\omega, \vec{k})}{L A(\omega, \vec{k})} \quad (5.21)$$

esta expresión también puede obtenerse aplicando la regla GKPW al derivar dos veces la acción gravitacional on-shell del volumen respecto a la fuente J .

5.1.1. Cálculo de la función de correlación de dos puntos empleando la regla GKPW

Para calcular la función de correlación de dos puntos empleando la regla de GKPW por diferenciación con respecto a la fuente J , es necesario darse cuenta que se está resolviendo un problema simple de condiciones de frontera Dirichlet. También hay que notar que la ecuación de movimiento para el campo escalar ϕ es una ecuación diferencial de segundo orden con dos soluciones linealmente independientes. Llamaremos ϕ_B la solución con $A = 0$ y cuyo comportamiento en la frontera viene dado por $\phi_B(r) = Br^{-\Delta}(1 + \sum_n c_n r^n)$. Esta es la solución Dirichlet apropiada ya que se anula en la frontera. Para la otra solución, tomaremos una expresión que es regular en el interior, la cual llamaremos $\phi_{int}(r)$. Por simplicidad tomaremos $L = 1$, lo cual puede realizarse siempre si se hace un reescalamiento de las coordenadas de manera que sean cantidades adimensionales $(t, x_i, r) \rightarrow L(t, x_i, r)$.

Se puede escribir la ecuación de movimiento de ϕ de la siguiente manera

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi(r) + P(r) \frac{\partial}{\partial r} \phi(r) + Q(r) \phi(r) = 0 \quad (5.22)$$

Capítulo 5: Correspondencia AdS/CFT en Materia Condensada

con la función de Green AdS Dirichlet obedeciendo

$$\begin{aligned} (\nabla^\mu \nabla_\mu - m^2) \mathcal{G}^{AdS}(r, r') &= e^{-\int^r d\tilde{r} P(\tilde{r})} \delta(r - r') \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{G}^{AdS}(r, r') &= 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

donde \tilde{r} es una variable de integración.

La función de Green vendrá dada por

$$\mathcal{G}^{AdS}(r, r') = \frac{\phi_B(r) \phi_{int}(r') \theta(r - r') + \phi_{int}(r) \phi_B(r') \theta(r' - r)}{W(\phi_{int}, \phi_B)} \quad (5.24)$$

con $W(\phi_{int}, \phi_B) \equiv e^{\int^r d\tilde{r} P(\tilde{r})} (\phi_{int} \partial_r \phi_B - \phi_B \partial_r \phi_{int})$ el Wronskiano, el cual asegura que se ha elegido la normalización correcta y que se puede evaluar la función para cualquier r .

Luego para una fuente $J(\omega, \vec{k})$ en la frontera, la solución a la ecuación de movimiento es

$$\begin{aligned} \phi_{sol}(\omega_1, \vec{k}_1, r) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r'=\varepsilon^{-1}} \frac{d\omega d^d \vec{k}}{(2\pi)^{d+1}} e^{\int^{r'} P} \partial_{r'} \mathcal{G}(r, \omega_1, \vec{k}_1; r', \omega, \vec{k}) J(\omega, \vec{k}) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{d\omega d^d \vec{k}}{(2\pi)^{d+1}} \frac{e^{\int^{r'} P} \partial_{r'} \phi_B(r') \phi_{int}(r) |_{r'=\varepsilon^{-1}}}{e^{\int^r P} (\phi_{int} \partial_r \phi_B - \phi_B \partial_r \phi_{int})} J(\omega, \vec{k}) \end{aligned} \quad (5.25)$$

por construcción esta solución obedece $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi_{sol}(\omega, \vec{k}, r) = J(\omega, \vec{k})$, ya que el Wronskiano se reduce a $e^{\int^r P} \phi_{int} \partial_r \phi_B$ para $r \rightarrow \infty$. La derivada normal de la solución será entonces

$$\begin{aligned} \partial_r \phi_{sol}(\omega_1, \vec{k}_1, r) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r'=\varepsilon^{-1}} \frac{d\omega d^d \vec{k}}{(2\pi)^{d+1}} e^{\int^{r'} P} \partial_r \partial_{r'} \mathcal{G}(r, \omega_1, \vec{k}_1; r', \omega, \vec{k}) J(\omega, \vec{k}) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{d\omega d^d \vec{k}}{(2\pi)^{d+1}} \frac{\partial_r \phi_{int}(r)}{\phi_{int}(\varepsilon^{-1})} J(\omega, \vec{k}) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Al sustituir esto en la acción, se encuentra

$$\begin{aligned} S_{on-shell} + S_{ct} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} \int d^{d+1} x r^{d+2} \phi_{sol} \partial_r \phi_{sol} - \frac{1}{2} (d+1 - \Delta) \int d^{d+1} x r^{d+1} \phi_{sol}^2 \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{d\omega d^d \vec{k}}{(2\pi)^{d+1}} \frac{1}{2} J(-\omega, -\vec{k}) \left[-\frac{1}{\varepsilon^{d+2}} \frac{\partial_r \phi_{int}(r)}{\phi_{int}(r)} \Big|_{r=\varepsilon^{-1}} - \frac{(d+1 - \Delta)}{\varepsilon^{d+1}} \right] J(\omega, \vec{k}) \end{aligned} \quad (5.27)$$

Capítulo 5: Correspondencia AdS/CFT en Materia Condensada

Recordando que el comportamiento genérico de la solución ϕ_{int} cerca de la frontera es $\phi_{int} = A_{int}r^{-(d+1-\Delta)} + B_{int}r^{-\Delta}$ y si derivamos dos veces esta expresión respecto a la fuente J , se encuentra

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}(-\omega, -\vec{k}) \mathcal{O}(\omega, \vec{k}) \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{\varepsilon^{d+2}} \frac{\partial_{\varepsilon^{-1}} \phi_{int}(\varepsilon^{-1})}{\phi_{int}(\varepsilon^{-1})} - \frac{(d+1-\Delta)}{\varepsilon^{d+1}} \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1-\Delta} \frac{\partial_{\varepsilon} [\varepsilon^{-(d+1-\Delta)} \phi_{int}(\varepsilon^{-1})]}{\phi_{int}(\varepsilon^{-1})} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\Delta-2d-2} (2\Delta - d - 1) \frac{B(\omega, \vec{k})}{A(\omega, \vec{k})} \end{aligned} \quad (5.28)$$

El último paso es que uno simplemente descarta la dependencia general del regulador y se obtiene la misma expresión que en (5.21). La justificación para poder hacer esto radica en que existe una ambigüedad al identificar $J(\omega, \vec{k})$. Debido a la simetría conforme, es posible identificar esta fuente hasta una cierta transformación de escala [8]. Ya que J tiene dimensión de escala $d+1-\Delta$, aparece el factor $\varepsilon^{2\Delta-2d-2}$ y por lo tanto es necesario renormalizar la fuente de la frontera $J(\omega, \vec{k})$ para que coincida con la fuente obtenida a partir del campo escalar del volumen, es decir, hacer $J_{vol}(\omega, \vec{k}; \varepsilon) = \varepsilon^{d+1-\Delta} J_{CFT}(\omega, \vec{k})$. De esta forma, la dependencia general del regulador será considerada de inmediato [32].

Al final, si se sustituyen los valores de $A(\omega, \vec{k})$ y $B(\omega, \vec{k})$ de la expresión (5.15), se tiene que

$$\langle \mathcal{O}(-\omega, -\vec{k}) \mathcal{O}(\omega, \vec{k}) \rangle = (2\Delta - d - 1) \frac{B(\omega, \vec{k})}{A(\omega, \vec{k})} = 2\nu \left[\frac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} \right] \left[\frac{\lambda}{2} \right]^{2\Delta-d-1} \quad (5.29)$$

y realizando la transformada de Fourier inversa (espacial), se obtiene

$$\langle \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(y) \rangle = \frac{2\nu}{\pi^{(d+1)/2}} \frac{\Gamma(\Delta)}{\Gamma(\nu)} \frac{1}{|x-y|^{2\Delta}} \quad (5.30)$$

De esta manera, Δ puede ser interpretado como la dimensión de escalamiento del operador \mathcal{O} en la teoría de frontera.

5.2. Segundo ejemplo: Temperatura Finita

La temperatura finita o el potencial químico rompen la simetría de dilatación del espacio-tiempo. Sin embargo, es de esperar que el espacio-tiempo recupere la invariancia de escala a medida que nos acercamos a la frontera, es decir, el espacio-tiempo debería ser asintóticamente AdS. Si consideramos la siguiente métrica [1, 11]

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2} \left[-f(r)dt^2 + h(r)dx^i dx^i \right] + \frac{L^2}{r^2} g(r) dr^2 \quad i = 1, \dots, d \quad (5.31)$$

Se sabe que todas las TCC pueden ser llevadas a temperaturas diferentes de cero. Por lo tanto es posible utilizar la misma acción para $T = 0$ como para $T \neq 0$. Ya que el problema que estudiaremos presenta una simetría esférica y que estamos tratando con un problema de AdS, podemos tomar $g(r) = 1/f(r)$ y $h(r) = 1$, con lo cual la métrica toma la forma

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2} \left[-f(r)dt^2 + dx^i dx^i \right] + \frac{L^2}{r^2} \frac{dr^2}{f(r)} \quad i = 1, \dots, d \quad (5.32)$$

luego, identificamos

$$g_{tt} = -\frac{r^2 f(r)}{L^2} \quad g_{rr} = \frac{L^2}{f(r)r^2} \quad g_{xx} = g_{yy} = \frac{r^2}{L^2} \quad (5.33)$$

podemos usar (2.3) y así obtener las conexiones

$$\Gamma_{rr}^r = -\frac{1}{r} - \frac{f'}{2f} \quad \Gamma_{rt}^t = -\frac{1}{r} + \frac{f'}{2f} \quad \Gamma_{tt}^r = -\frac{f^2}{r} + \frac{ff'}{2} \quad (5.34)$$

$$\Gamma_{xx}^r = \Gamma_{xx}^r = \frac{f}{r} \quad \Gamma_{xr}^x = \Gamma_{yr}^y = -\frac{1}{r} \quad (5.35)$$

Mientras que de la expresión (2.7) se encuentran las componentes del tensor de Ricci

$$R_{tt} = \frac{f[6f + r(-4f' + rf'')]}{2r^2} \quad R_{rr} = -\frac{6f - 4rf' + r^2 f''}{2r^2 f} \quad (5.36)$$

$$R_{xx} = R_{yy} = \frac{-3f + rf'}{r^2} \quad (5.37)$$

Capítulo 5: Correspondencia AdS/CFT en Materia Condensada

Al igualar (5.36) y (5.37) con (2.45) (usando $R_{rr} = -g_{rr}d$) y resolver la ecuación diferencial que nos queda, se encuentra que

$$f(r) = 1 - \left(\frac{r_o}{r}\right)^3 \quad (5.38)$$

donde r_o es el radio del horizonte de un agujero negro. De (5.38) se puede ver que a medida que la coordenada $r \rightarrow \infty$ el factor $f \rightarrow 1$ y la métrica (5.32) toma la forma de la métrica de AdS, obteniendo así que el espacio-tiempo resulta ser asintóticamente AdS. En general se tiene que el factor que aparece en la métrica, para $d+1$ dimensiones, viene dado por

$$f(r) = 1 - \left(\frac{r_o}{r}\right)^{d+1} \quad (5.39)$$

A continuación realizaremos un procedimiento, basados en un formalismo euclídeo, para poder determinar la temperatura y entropía del agujero negro. Si hacemos $\tau = it$, donde τ es el tiempo euclídeo, podemos escribir la métrica (5.32) de la siguiente manera

$$ds_E^2 = \frac{r^2}{L^2} \left[f(r) d\tau^2 + dx^i dx^i \right] + \frac{L^2}{r^2} \frac{dr^2}{f(r)} \quad i = 1, \dots, d \quad (5.40)$$

cerca de $r = r_o$ podemos escribir

$$f(r) \approx f(r_o) + (r - r_o) f'(r_o) = (r - r_o) f'(r_o) \quad (5.41)$$

Utilizando (5.41), la métrica puede ser escrita como

$$ds_E^2 \approx \frac{r_o^2 (r - r_o) f'(r_o)}{L^2} d\tau^2 + \frac{L^2 dr^2}{r_o^2 (r - r_o) f'(r_o)} + \frac{r_o^2 dx^i dx^i}{L^2} \quad (5.42)$$

esta métrica tiene una singularidad en el horizonte, la cual puede ser removida bajo una apropiada elección de coordenadas [50]. Además, en $r = r_o$ la dirección temporal euclídea se reduce a un punto. Esto es similar a lo que ocurre en el origen de coordenadas polares $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$, donde φ es el ángulo polar.

Si hacemos un cambio de coordenadas tal que, la parte $\{r, t\}$ de (5.42) luzca como $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$

$$ds_E^2 \approx \frac{r_o^2 (r - r_o) f'(r_o)}{L^2} d\tau^2 + \frac{L^2 dr^2}{r_o^2 (r - r_o) f'(r_o)} = \rho^2 d\varphi^2 + d\rho^2 \quad (5.43)$$

entonces cerca del horizonte tenemos

$$d\rho^2 = \frac{L^2 dr^2}{r_o^2(r - r_o)f'(r_o)} \Rightarrow \rho = \frac{2L\sqrt{r - r_o}}{r_o\sqrt{f'(r_o)}} \quad (5.44)$$

escribiendo $\varphi = \beta\tau$ se tiene que $\rho^2 d\varphi^2 = \rho^2 \beta^2 d\tau^2$, con lo cual

$$\rho^2 d\varphi^2 = \rho^2 \beta^2 d\tau^2 = \frac{4L^2(r - r_o)}{r_o^2 f'(r_o)} \beta^2 d\tau^2 = \frac{r_o^2(r - r_o)f'(r_o)}{L^2} d\tau^2 \quad (5.45)$$

usando $|f'(r_o)| = (d + 1)/r_o$ se encuentra que $\beta = r_o^2 f'(r_o)/2L^2 = (d + 1)r_o/2L^2$.

Esta métrica describe una geometría regular si φ es periódico con período 2π

$$\beta\tau \rightarrow \beta\tau + 2\pi \Rightarrow \tau \rightarrow \tau + \frac{2\pi}{\beta} = \tau + \frac{4\pi L^2}{(d + 1)r_o} \quad (5.46)$$

Identificando en (5.46) la temperatura de Hawking como el inverso de la periodicidad, se tiene

$$T = \frac{(d + 1)r_o}{4\pi L^2} \quad (5.47)$$

De esta manera, puede verse que la temperatura (5.47) aumenta a medida que el radio del agujero negro aumenta en la dirección radial. Así, una TCC en presencia de un agujero negro tiene una temperatura T . Generalmente, el calor específico de un agujero negro es negativo y el agujero negro termina siendo termodinámicamente inestable, pero en el caso de un espacio-tiempo AdS el agujero negro es estable y por lo tanto representa una situación o estado de equilibrio [1]. Es importante notar que a $T = 0$ la coordenada radial $r_o \rightarrow 0$ y se recupera la métrica de AdS.

Por otra parte, es posible calcular el área del horizonte de eventos de la siguiente forma

$$A = \int_{\Sigma_d} \sqrt{g} d^d x = \left(\frac{r_o}{L}\right)^d V_d \quad (5.48)$$

donde V_d es el volumen espacial de la frontera Σ_d . Por lo tanto, la entropía vendrá dada por

$$S = \frac{A}{4G} = \frac{r_o^d V_d}{4GL^d} = \frac{V_d L^d}{4G} \left(\frac{4\pi T}{d + 1}\right)^d \quad (5.49)$$

con lo cual podemos escribir la densidad de entropía

$$s = \frac{S}{V_d} = \frac{L^d}{4G} \left(\frac{4\pi T}{d+1} \right)^d \quad (5.50)$$

El cálculo de la entropía para una TCC con interacciones fuertes es por lo general difícil. Como puede verse, s puede ser hallada de manera más sencilla calculando el área del horizonte (5.48).

Por otra parte, la entropía puede ser calculada directamente a partir de la acción gravitacional utilizando la correspondencia AdS/CFT. La acción de gravedad on-shell para una solución de agujero negro será la acción de gravedad $S_{grav} = S_{Einst} + S_{GH} + S_{ct}$, que viene dada por (11)

$$S = -\frac{1}{2k^2} \left[\int_{AdS} d^{d+2}x \sqrt{g} \left(R + \frac{d(d+1)}{L^2} \right) + \int_{\partial AdS} d^{d+1}x \sqrt{h} \left(2K - \frac{2d}{L} \right) \right] \quad (5.51)$$

donde hemos usado $\Lambda = -d(d+1)/2L^2$. La métrica es la correspondiente a (5.40) y se tiene además que $\sqrt{g} = (r/L)^d$.

Ya que la métrica inducida es ortogonal al vector normal y sabiendo que

$$h_{\mu\nu} = \text{diag} \left\{ \frac{r^2 f}{L^2}, \frac{r^2}{L^2}, \dots, \frac{r^2}{L^2}, 0 \right\}, \quad \sqrt{h} = \left(\frac{r}{L} \right)^{d+1} \sqrt{f}, \quad n_\mu = \left(0, \dots, 0, \frac{L}{r\sqrt{f}} \right) \quad (5.52)$$

la traza de la curvatura extrínseca K en el término de Gibbons-Hawking (5.51) puede ser escrito como (11)

$$\begin{aligned} K &= -h^{\lambda\alpha} \Gamma_{\lambda\alpha}^\rho n_\rho = -h^{\tau\tau} \Gamma_{\tau\tau}^r n_r - \sum_{i=1}^d h^{x_i x_i} \Gamma_{x_i x_i}^r n_r \\ &= -\frac{L^2}{r^2 f} \Gamma_{\tau\tau}^r \frac{L}{r\sqrt{f}} - \sum_{i=1}^d \frac{L^2}{r^2} \Gamma_{x_i x_i}^r \frac{L}{r\sqrt{f}} = \frac{\sqrt{f}}{L} \left[\frac{r f'}{2f} + (d+1) \right] \end{aligned} \quad (5.53)$$

donde hemos usado que $\Gamma_{\tau\tau}^r = -\frac{r^3 f [2f + f']}{2L^4}$ y $\Gamma_{x_i x_i}^r = -\frac{r^3 f}{2L^4}$.

Capítulo 5: Correspondencia AdS/CFT en Materia Condensada

Luego, utilizando $R = -(d+2)(d+1)/L^2$, el primer término de (5.51) queda

$$\begin{aligned} \int_{AdS} d^{d+2}x \sqrt{g} \left(R + \frac{d(d+1)}{L^2} \right) &= \int_0^\beta d\tau \int_{-\infty}^\infty d^d x \int_{r_o}^\infty dr \left(\frac{r}{L} \right)^d \left(\frac{-2(d+1)}{L^2} \right) \\ &= \frac{\beta V_d}{L^{d+2}} [-2(d+1)] \int_{r_o}^\varepsilon dr r^d \\ &= \frac{V_d}{TL^{d+2}} 2 \left[r_o^{d+1} - \varepsilon^{d+1} \right] \end{aligned} \quad (5.54)$$

donde hemos integrado hasta un cierto cut-off $\varepsilon \rightarrow \infty$.

Por último, utilizando la expresión (5.53), el segundo término de (5.51) queda

$$\begin{aligned} \int_{\partial AdS} d^{d+1}x \sqrt{h} \left(2K - \frac{2d}{L} \right) &= \int_0^\beta d\tau \int_{-\infty}^\infty d^d x \left(\frac{r}{L} \right)^{d+1} \sqrt{f} \left[2 \frac{\sqrt{f}}{L} \left[\frac{rf'}{2f} + (d+1) \right] - \frac{2d}{L} \right] \Bigg|_{r \rightarrow \varepsilon} \\ &= \frac{V_d}{TL^{d+2}} \left[r^{d+1} f \left[\frac{rf'}{f} + 2(d+1) \right] - 2d r^{d+1} \sqrt{f} \right] \Bigg|_{r \rightarrow \varepsilon} \\ &= \frac{V_d}{TL^{d+2}} \left[r^{d+2} f' + 2(d+1)r^{d+1} f - 2d r^{d+1} \sqrt{f} \right] \Bigg|_{r \rightarrow \varepsilon} \\ &= \frac{V_d}{TL^{d+2}} \left[2\varepsilon^{d+1} - r_o^{d+1} \right] \end{aligned} \quad (5.55)$$

combinando los resultados (5.54) y (5.55), se obtiene finalmente (usando (5.47))

$$S_{grav} = -\frac{V_d}{2\kappa^2 TL^{d+2}} r_o^{d+1} = -\frac{V_d}{2\kappa^2 TL^{d+2}} \left[\frac{4\pi L^2 T}{d+1} \right]^{d+1} \quad (5.56)$$

Por otra parte, a partir de (5.56) se puede obtener la energía libre

$$F = -T \text{Ln}(Z) = TS_{grav} = -\frac{V_d}{2\kappa^2 L^{d+2}} \left[\frac{4\pi L^2 T}{d+1} \right]^{d+1} \quad (5.57)$$

y la entropía

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{(4\pi)^{d+1} L^d}{2k^2 (d+1)^d} V_d T^d \quad (5.58)$$

donde este resultado coincide con (5.49) ya que $k^2 = 8\pi G$.

Capítulo 6

Metales Extraños de Reissner-Nordström

En este capítulo estudiaremos la correspondencia AdS/CFT aplicada a un caso particular de materia condensada. En este sentido, presentaremos la dualidad entre un agujero negro de Reissner-Nordström (por parte de la teoría gravitacional) y un metal extraño (por parte de la teoría de campo conforme). Para esto iniciaremos este capítulo con las características generales de un metal extraño para luego hablar propiamente de la dualidad entre ambas teorías.

6.1. Metales extraños: superconductores de alta temperatura crítica

Luego del descubrimiento de la superconductividad en 1911 por Kamerlingh Onnes y Gilles Holst, quienes fueron los primeros en lograr alcanzar temperaturas cercanas al cero absoluto gracias a la licuefacción del helio, la mayor temperatura crítica T_c había sido 23K en Nb_3Ge . En 1986, se encontraron los superconductores de alta T_c , los cuales son compuestos de óxido de cobre llamados cupratos. Entre estos superconductores de alta T_c , algunos sistemas bien conocidos son los de $YBa_2Cu_3O_7$ (“YBCO”), $Bi_2Sr_2Ca_2Cu_3O_{10}$ (“BSCCO”) y el $HgBa_2Ca_2Cu_3O_8$, el cual tiene una de las mayores T_c ($\sim 135K$ y $\sim 165K$ bajo altas presiones) [10].

Capítulo 6: Metales Extraños de Reissner-Nordström

El tema de los superconductores de alta T_c es bastante diverso. La propiedad más importante de los materiales de alta T_c es que su temperatura crítica parece muy alta respecto a los superconductores convencionales (teoría BCS), donde se espera que la mayor T_c sea 30-40K. La teoría BCS está basada en la descripción de Líquido de Fermi débilmente acoplado, por lo que la descripción parece insuficiente para describir materiales de alta T_c . Esto sugiere que es necesaria una descripción de acoplamiento fuerte [10].

La estructura de los cupratos está conformada por capas de cobre y oxígeno, que forman una red cuadrada. En los vértices de cada cuadrado se sitúan los átomos de cobre, mientras que los átomos de oxígeno se encuentran en el punto medio de las aristas (ver figura 6.1). Estas capas atómicas controlan el comportamiento del material al paso de la corriente eléctrica [51].

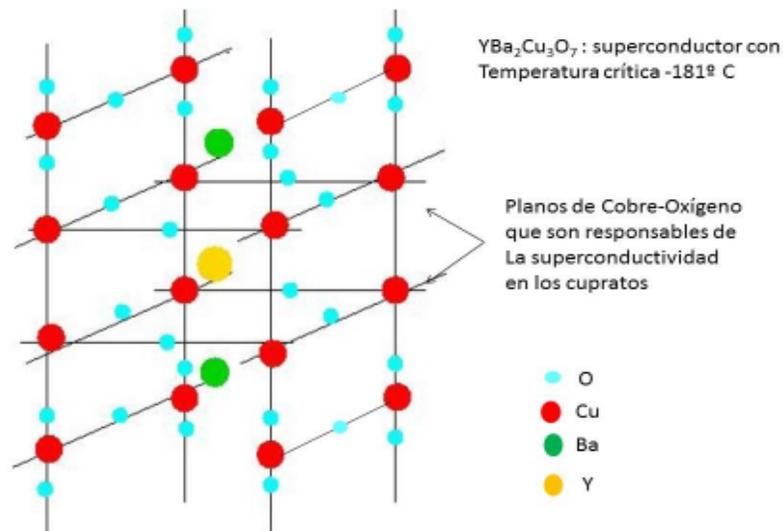


Figura 6.1: Estructura del cuprato YBa₂Cu₃O₇, el cual es uno de los superconductores de alta temperatura crítica (en este caso $T_c = 142\text{K}$). Se muestran los planos o capas de cobre-oxígeno que son responsables de la superconductividad en el material. Tomado de [51].

En los cupratos la aparición de la superconductividad está ligada a la cantidad de

electrones que se mueven en la capa de cobre-oxígeno. En los “compuestos originales” cada átomo de cobre aporta un electrón al flujo de cargas. Sin embargo, debido a la fuerte correlación entre los electrones los compuestos originales son aislantes que reciben el nombre de aislantes Mott. En estos materiales el paso de la corriente eléctrica se inhibe para evitar que haya dos electrones en el mismo átomo, ya que debido a la repulsión esto requeriría mucha energía. Los electrones localizados se ordenan de forma antiferromagnética [51].

Al añadir o quitar electrones de la capa de cobre-oxígeno desaparecen el carácter aislante y el antiferromagnetismo y aparece la superconductividad (ver figura 6.2). A temperaturas superiores a la crítica el cuprato conduce la electricidad, sin embargo sus propiedades son muy anómalas debido a la fuerte repulsión entre los electrones. Se cree que esta fuerte repulsión y/o la tendencia al antiferromagnetismo pueden estar en el origen de la superconductividad de alta temperatura [51].

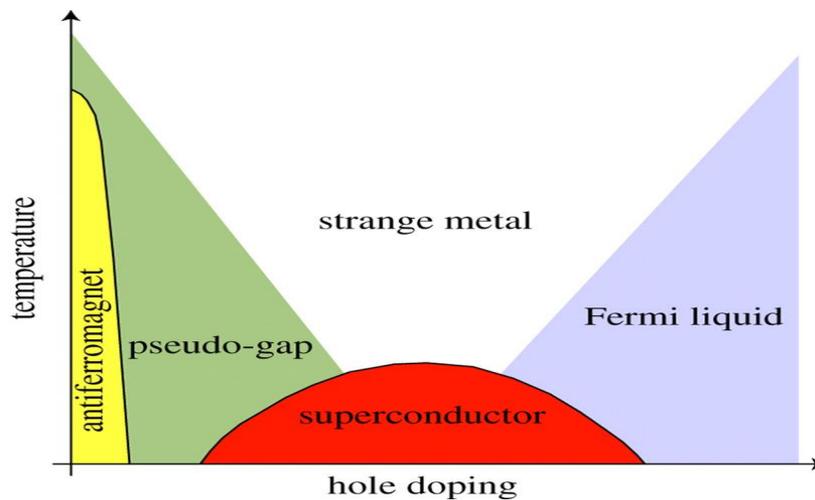


Figura 6.2: Diagrama de fase para un cuprato. Se pueden apreciar (de derecha a izquierda) las fases ferromagnética, pseudogap, superconductor, metal extraño y líquido de Fermi al variar el dopaje en el material. Tomado de [52]

Cuando no existe dopaje, el material es un aislante antiferromagnético y presenta una fuerte interacción electrón-electrón. A medida que el dopaje aumenta, el material

pasa a ser conductor y en algún punto llega a convertirse en superconductor mientras va aumentando la temperatura crítica. Sin embargo, si se aumenta mucho más el dopaje, la temperatura crítica comienza a disminuir y eventualmente el material pierde su fase superconductor. La temperatura de transición T_c es mayor cuando el dopaje es óptimo [51].

Un “metal extraño” es una fase de electrones en sólidos a temperatura finita que parece ser común a la mayoría de los cupratos (ver figura 6.2). El comportamiento de los metales comunes a temperaturas suficientemente bajas, puede ser explicado por el modelo de líquido de Fermi. Sin embargo, en el caso de los metales extraños ya no es posible explicar su comportamiento a través de éste modelo [51]. La razón de esto no es del todo clara para los físicos. Parece que las investigaciones más recientes están tratando de vincular la teoría de cuerdas con extraños comportamientos metálicos.

En los metales normales la resistencia aumenta con el cuadrado de la temperatura en el régimen de bajas temperaturas. Los metales extraños se diferencian principalmente de los metales normales en que su resistencia eléctrica aumenta de manera lineal en relación con la temperatura en una amplia gama de valores de T . Debido a este efecto, muchos metales extraños son superconductores a altas temperaturas (sin resistencia eléctrica). Esto los hace muy interesantes, ya que todos los superconductores descubiertos hasta el momento no tienen resistencia eléctrica por debajo de una cierta temperatura [52].

6.2. Metales extraños de Reissner-Nordström (RN)

El diccionario AdS / CFT establece que para describir el problema de densidad finita en la frontera, es necesario introducir una carga eléctrica en el interior del volumen. La teoría más simple que puede hacer esto es la teoría clásica (N grande) de AdS-Einstein-Maxwell. Las ecuaciones de movimiento para esta teoría tienen una única familia de soluciones estáticas e invariantes bajo rotación: la versión AdS de

agujeros negros cargados descubierta entre 1916 y 1918 por Reissner y Nordström, conocida como agujeros negros de Reissner-Nordström (RN) [11].

Cuando la masa del agujero negro coincide con su energía electromagnética, éste no puede perder energía debido a la conservación de la carga. Para este agujero negro “extremo” la temperatura de Hawking desaparece, ya que no puede irradiar. El estado dual de este agujero negro extremo es el metal extraño de densidad finita de temperatura cero en la frontera. En este capítulo estudiaremos la solución del agujero negro cargado en AdS y obtendremos la termodinámica de la teoría en la frontera con énfasis en su misteriosa entropía de estado fundamental. Posteriormente, analizaremos en detalle el papel especial que desempeña la geometría especial “cerca del horizonte” AdS₂. Esta será dual al surgimiento de la criticidad cuántica local en la frontera, así como también el escalamiento de “volumen” por violación de hiperescala [11].

6.3. Potencial químico y potencial eléctrico

Partiendo de la teoría de campo en la frontera y en ausencia de fuentes electromagnéticas en el volumen, la teoría describe las fluctuaciones electromagnéticas, pero el estado del sistema sigue siendo de densidad cero. Para llevar esto a una densidad finita uno tiene que exponer la teoría de campo a un potencial químico que se conjuga con la densidad. A partir de las reglas de GKPW, se ve inmediatamente que la fuente para el operador de densidad es el potencial electrostático A_t del volumen. Para una densidad, independiente del tiempo y espacialmente uniforme, esto sólo puede depender de la dirección radial. Por lo tanto, para codificar el potencial químico en la frontera, se requiere un campo eléctrico radial, con líneas de campo que “perforan” la frontera de una manera espacialmente uniforme [11].

Para ello, es necesario almacenar de alguna forma una carga eléctrica puntual en el interior profundo (región IR) del volumen. A temperatura finita esta carga se asocia, de una manera u otra, con el requisito de que un agujero negro tenga que estar

presente también. La manera más simple es combinar los dos requisitos y considerar el agujero negro cargado eléctricamente: este es el agujero negro de Reissner-Nordström (RN). De hecho, para la teoría de Einstein-Maxwell en el volumen, esta es la única solución estacionaria, como se mencionó antes.

6.4. Solución a la teoría de Einstein-Maxwell

La acción de Einstein-Maxwell que incluye la constante cosmológica para el espacio-tiempo general $(d + 2)$ es

$$S_{EM} = \int d^{d+2}x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} \left(R + \frac{d(d-1)}{L^2} \right) - \frac{1}{4g_F^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \quad (6.1)$$

El punto de ensilladura de la acción (6.1) en AdS puede ser escrito en forma de una métrica y un potencial de calibre A_t según [11]

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2} (-f(r) dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{L^2}{r^2} \frac{dr^2}{f(r)}, \quad (6.2)$$

$$f(r) = 1 + \frac{Q^2}{r^{2d}} - \frac{M}{r^{d+1}}, \quad A_t = \mu \left(1 - \frac{r_o^{d-1}}{r^{d-1}} \right)$$

donde

$$\mu = \frac{g_F Q}{2c_d \sqrt{\pi G} L r_o^{d-1}} = \frac{\sqrt{2} g_F Q}{c_d \kappa L r_o^{d-1}}, \quad \text{con } c_d = \sqrt{\frac{2(d-1)}{d}} \quad (6.3)$$

la diferencia en la geometría, comparada con la solución de AdS-Schwarzschild

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2} (-f(r) dt^2 + dx_i dx_i) + \frac{L^2}{r^2} \frac{dr^2}{f(r)}, \quad i = 1, \dots, d \quad (6.4)$$

$$f(r) = 1 - \frac{r_o^{d+1}}{r^{d+1}}$$

está encapsulada en el cambio del factor de emblackening $f(r)$.

El horizonte está, como siempre, determinado por el cero de esta función, $f(r_o) = 0$. De donde se infiere directamente que esta condición lleva a dos soluciones, las cuales representan un horizonte interno y uno externo. En el contexto de la holografía

Capítulo 6: Metales Extraños de Reissner-Nordström

el horizonte interno no juega ningún papel. El horizonte externo juega el mismo papel del horizonte del agujero negro de Schwarzschild.

Usando el mismo procedimiento usado para calcular las cantidades termodinámicas para el agujero negro de Schwarzschild (ver apéndice B), la temperatura del agujero negro de Reissner-Nordstrom es [11]

$$T = \frac{\sqrt{\frac{d}{dr}g_{tt}\frac{d}{dr}g^{rr}}}{4\pi} \Big|_{r=r_o} = \frac{(d+1)r_o}{4\pi L^2} \left[1 - \frac{(d-1)Q^2}{(d+1)r_o^{2d}} \right] \quad (6.5)$$

y la densidad de entropía del agujero negro de Reissner-Nordstrom es

$$s = \frac{S}{V_d} = \frac{A}{4GV_d} = \frac{1}{4G} \left(\frac{r_o}{L} \right)^d \quad (6.6)$$

donde hemos usado que

$$A_{RN} = \int d^d x \sqrt{-g} \Big|_{r=r_o} = \left(\frac{r_o}{L} \right)^d V_d \quad (6.7)$$

Por otra parte, de la condición $f(r_o) = 0$ también se obtiene una expresión de la masa del agujero negro en términos de la carga y la posición del horizonte externo r_o

$$M = r_o^{d+1} + \frac{Q^2}{r_o^{d-1}} \quad (6.8)$$

de la expresión (6.8) puede verse que cuando la masa M del agujero negro de RN es grande comparada con su carga Q , el agujero negro pareciera no estar cargado y en ese caso se recuperan los resultados del agujero negro de Schwarzschild. Esto no es particularmente interesante, ya que sólo significa que la temperatura en la frontera es grande comparada con el potencial químico μ . El nuevo régimen interesante es cuando T es mucho menor que μ . Allí se espera que aparezca la física asociada con densidad finita. El agujero negro de RN se comporta bastante interesante en este caso [11].

Al disminuir la masa M (temperatura) para una carga fija Q (potencial químico), el horizonte retrocederá hacia el interior profundo del volumen. Sin embargo, aunque la energía almacenada en el tejido espacio-temporal disminuye cuando el agujero negro

Capítulo 6: Metales Extraños de Reissner-Nordström

se contrae, la energía almacenada en el campo electromagnético es fija para una carga fija. La energía total no puede ser menor que la energía contenida en este campo electromagnético fijo. Violar esta restricción intuitiva daría lugar a una singularidad desnuda. De esta manera, la solución a la ecuación (6.2) está acotada entonces por (11)

$$M \geq \frac{4(d+1)^{(d+1)/2d}}{c_d^2(d-1)^{(d+1)/2d}} Q^{(d+1)/d} \quad (6.9)$$

para ver esto se toma $T = 0$ en (6.5), se obtiene $r_o = [(d-1)Q^2/(d+1)]^{1/2d}$ y luego se sustituye en $f(r_o) = 0$.

El caso interesante es cuando se cumple la igualdad en (6.9). Este es el caso especial del agujero negro extremo, caracterizado por una masa que es enteramente debida a su carga electromagnética. En el contexto de la termodinámica de agujeros negros, tales agujeros negros extremos son objetos fascinantes (11).

Sustituyendo el valor de saturación (6.9) en la fórmula para temperatura de Hawking (6.5), muestra que su temperatura es cero. Para entender esto, pensemos por un momento en el agujero negro de Schwarzschild, este agujero es inestable porque emite radiación de Hawking y como consecuencia su masa debería disminuir en el tiempo. Sin embargo, cuando su masa es enteramente debida a su carga eléctrica conservada, sería imposible reducir su masa mucho más. La conservación de la energía prohíbe la emisión adicional de radiación por lo que su temperatura debe ser cero.

Por lo tanto, el agujero negro RN extremo codifica un estado de densidad finita a temperatura cero. Pero ahora viene la notable “extrañeza” de este estado: cuando la ecuación (6.9) está saturada todavía hay una solución de agujero negro con un horizonte en

$$r_* = \left[\frac{d-1}{d+1} \right]^{1/2d} Q^{1/d} \quad (6.10)$$

El horizonte (y en particular su área) es, por lo tanto, manifiestamente de un tamaño macroscópico. Esto implica a su vez que el agujero negro extremo lleva una

entropía finita de Bekenstein-Hawking $S = A/4G$. La estructura gravitacional que se supone es la forma más elemental de codificar la densidad finita en la teoría de campo, predice un estado fundamental que es altamente degenerado: este es un estado caracterizado por la entropía de temperatura cero [11].

Los estados de entropía del estado fundamental finito son abundantes en la materia (clásica). En materia condensada se les llama sistemas frustrados. Un ejemplo elemental es el modelo de Ising de antiferromagnetos en una red triangular, que se caracteriza por un extenso número de configuraciones de espín diferentes que tienen la misma energía mínima. Sin embargo, la degeneración del estado fundamental del estado de metal RN de alguna manera tiene un origen muy diferente que en la actualidad no se comprende en absoluto. Un sistema con una gran degeneración en el estado fundamental viola la tercera ley de Nernst de la Termodinámica.

Esta ley pragmática se refiere a que tales estados son muy frágiles: cualquier influencia elevará la degeneración. En el caso de los sistemas geoméricamente frustrados clásicos, el “volumen de frustración” de los estados básicos en el espacio de configuración se extiende a través de configuraciones espaciales, pero ese no parece ser el caso para el metal RN [11].

Intuitivamente es de esperar que el agujero negro RN sea un estado increíblemente inestable. Desde un punto de vista puramente gravitacional los agujeros negros, siendo el estado final ineludible de toda la materia, deberían ser infinitamente estables. En AdS, esto simplemente no es cierto, y no es exagerado afirmar que es esta sorpresa la que rige una gran parte del programa AdS/CMT.

6.5. Termodinámica de RN

Para el agujero negro de RN utilizamos el procedimiento usual que establecen las reglas GKPW, partiendo de una teoría de campo y derivando de la acción las

Capítulo 6: Metales Extraños de Reissner-Nordström

cantidades termodinámicas relevantes. En la teoría de campo, considerar un potencial químico finito μ para la corriente global J^μ , significa perturbar la teoría de campo con

$$\delta S_{FT} = \mu \int d^{d+1}x J^t \quad (6.11)$$

De acuerdo con el diccionario, el valor de frontera de A_μ es la fuente para el operador correspondiente J^μ , tal que $A_t(r \rightarrow \infty) = \mu$. En este caso, trabajamos en el ensamble gran canónico y el potencial térmico para la teoría de campo dual puede ser calculado a partir de la acción on-shell euclídea. A diferencia de la acción gravitacional, no se necesita un término de frontera especial para la parte de Maxwell y directamente se obtiene

$$\begin{aligned} S_M &= \int d^{d+2}x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4g_F^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] = \int d^{d+2}x \left(\frac{r}{L} \right)^d \left[\frac{1}{2g_F^2} (\partial_r A_t)^2 \right] \\ &= \int d^d x \int_0^\beta d\tau \int dr \left(\frac{r}{L} \right)^d \left[\frac{1}{2g_F^2} (\partial_r A_t)^2 \right] \\ &= \frac{V_d \beta}{2L^d g_F^2} \int dr r^d \left[\frac{(d-1)\mu r_o^{d-1}}{r^d} \right]^2 = \frac{2V_d (d-1)^2 Q \mu r_o^{d-1}}{T \sqrt{2} L^{d+1} \kappa c_d g_F} \int_\infty^{r_o} dr \frac{1}{r^d} \\ &= -V_d \frac{2(d-1)Q\mu}{T \sqrt{2} \kappa c_d g_F L^{d+1}} \end{aligned} \quad (6.12)$$

donde hemos usado μ en términos de r_o para obtener la penúltima línea. Con este resultado y el que se obtuvo del análisis de temperatura finita para la primera parte de (6.1), se encuentra el potencial termodinámico [11]

$$\begin{aligned} \Omega &= -T \ln Z = T S_E[g_E] \\ &= -V_d \left[\frac{2(d-1)Q\mu}{\sqrt{2} \kappa c_d g_F L^{d+1}} - \frac{2\pi}{\kappa^2} \left(\frac{r_o}{L} \right)^d T \right] \end{aligned} \quad (6.13)$$

donde $V_d = \int d^d x$ y T es la temperatura (6.5). Por lo tanto la densidad de carga ρ y la densidad de entropía s para la teoría de campo de la frontera son [11]

$$\begin{aligned} \rho &= -\frac{1}{V_d} \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = \frac{2(d-1)}{c_d} \frac{Q}{\sqrt{2} \kappa L^{d+1} g_F}, \\ s &= -\frac{1}{V_d} \frac{\partial \Omega}{\partial T} = \frac{2\pi}{\kappa^2} \left(\frac{r_o}{L} \right)^d \end{aligned} \quad (6.14)$$

Capítulo 6: Metales Extraños de Reissner-Nordström

Por otra parte, la presión para un fluido conforme viene dada por

$$P = \frac{\epsilon}{d} \quad (6.15)$$

donde ϵ es la densidad de energía para la teoría de campo de la frontera y viene dada por

$$\epsilon = \mu\rho + Ts - P = \frac{d}{2\kappa^2} \frac{M}{L^{d+2}} \quad (6.16)$$

Dado que $L^d/(2\kappa^2) \sim N^2$ y $g_F \sim \kappa/L$, todas estas cantidades termodinámicas son del orden de N^2 . Además, para este sistema de densidad finita se cumple la primera ley de la termodinámica

$$d\epsilon = Tds + \mu d\rho \quad (6.17)$$

Es conveniente introducir una escala de longitud r_* para parametrizar la carga Q , según

$$Q = \sqrt{\frac{d+1}{d-1}} r_*^d \quad (6.18)$$

Con ello, todas las cantidades físicas pueden ser expresadas en función de r_o y r_* , obteniendo así [\[11\]](#)

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{r_*}{L}\right)^d \frac{1}{e_d}, \\ \mu &= \frac{d(d+1)r_*}{(d-1)L^2} \left(\frac{r_*}{r_o}\right)^{d-1} e_d, \\ T &= \frac{(d+1)r_o}{4\pi L^2} \left[1 - \frac{r_*^{2d}}{r_o^{2d}}\right], \end{aligned} \quad (6.19)$$

donde $e_d = Lg_F/(\kappa\sqrt{d(d+1)})$ es una constante adimensional, usando unidades naturales $k_B = \hbar = c = 1$.

A temperatura cero, se tiene que $r_o = r_*$ y en consecuencia $M = (2d/(d-1))r_*^{d+1}$. Es importante notar que el área del horizonte es distinta de cero. Por lo tanto se tiene una entropía de estado fundamental distinta de cero. La densidad de entropía es

$$s = (2\pi e_d)\rho \quad (6.20)$$

A bajas temperaturas, $T/\mu \ll 1$, es necesario expandir la densidad de entropía en torno a $r = r_o$ ($T = 0$). Para ello, se sustituye el valor de Q en términos de μ en (6.5) y se despeja $r_o(T)$. Luego, basta ver que $s[r_o(T)]$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} s &= \frac{2\pi}{\kappa^2} \left(\frac{r}{L}\right)^d = s\Big|_{r=r_o, T=0} + \left[\frac{\partial s}{\partial r_o} \frac{\partial r_o}{\partial T}\right]\Big|_{r=r_o, T=0} + \dots \\ &= (2\pi e_d)\rho + \frac{4\pi r_o^{d-1}}{(d+1)\kappa^2 L^{d-2}} T + \mathcal{O}(T^2) \end{aligned} \quad (6.21)$$

Además, se puede calcular fácilmente el calor específico $c_v = T\partial s/\partial T \propto T$. Cuando la temperatura es muy elevada, se sabe que el RN AdS es bastante similar al agujero negro de Schwarzschild y en ese caso se tiene que $s \propto r_o^d$ y $T \propto r_o$, y por lo tanto $c_v = T\partial s/\partial T \propto T^d$, como es de esperarse para la teoría de campo conforme ($d+1$) dimensional a temperatura finita [11].

Por conveniencia en cuanto a los cálculos, pueden usarse cantidades adimensionales, a través de un escalamiento

$$r \rightarrow r_o r, \quad (t, \vec{x}) \rightarrow \frac{L}{r_o} (t, \vec{x}) \quad A_t \rightarrow \frac{r_o}{L^2} A_t, \quad M \rightarrow r_o^{d+1} M, \quad Q \rightarrow r_o^d Q \quad (6.22)$$

y la solución de RN puede ser fácilmente caracterizada por la cantidad adimensional T/μ .

6.6. La geometría de AdS₂ cerca del horizonte y la criticalidad cuántica local emergente

A continuación presentamos una de las ideas más reveladoras de AdS/CMT: la emergencia de la criticalidad cuántica local puramente temporal en el metal extraño RN (inestable) [22, 53]. Para materia condensada, la física de interés es la física emergente en el IR profundo. Siguiendo el diccionario, esta física se puede encontrar en el interior profundo, cerca del horizonte del agujero negro de AdS. Todo lo que realmente cuenta se puede deducir de lo que ocurre con la geometría en el límite cercano al horizonte del agujero negro extremo a temperatura cero [11].

Capítulo 6: Metales Extraños de Reissner-Nordström

La información crucial está dada por el comportamiento, cerca del horizonte, del factor $f(r)$ en la ecuación (6.2). El horizonte r_o está determinado por la condición $f(r_o) = 0$ y es posible expandir $f(r)$ cerca del horizonte en términos de una pequeña cantidad $r - r_o$ como sigue

$$f(r) = f'(r_o)(r - r_o) + f''(r_o)(r - r_o)^2 + \dots \quad (6.23)$$

el orden dominante en esta expansión es representativo de la física IR en la teoría de campo.

Al determinar la temperatura de Hawking (6.5) encontramos que $f'(r_o) \propto T$ en (6.23). Por lo tanto, la solución a temperatura cero es donde $f'(r_o) \rightarrow 0$. De esta forma, se manifiesta una característica universal en los sistemas a temperatura cero: tienen un doble cero en el horizonte ($f'(r_o)(r - r_o)$). Si se considera el factor $f(r)$ en $T = 0$ explícitamente, es posible escribirlo en términos de la coordenada de horizonte r_* (6.18), resultando

$$\begin{aligned} f(r) &= 1 - \frac{2d}{d-1} \left(\frac{r_*}{r}\right)^{d+1} + \frac{d+1}{d-1} \left(\frac{r_*}{r}\right)^{2d} \\ &= d(d+1) \frac{(r - r_*)^2}{r_*^2} + \dots \quad \text{cuando } r \rightarrow r_* \end{aligned} \quad (6.24)$$

donde puede verse el doble cero en el horizonte.

Lo que ha sucedido es que los horizontes interno y externo del agujero negro RN de temperatura finita se fusionan en un solo horizonte doble para el caso extremo de temperatura cero. Este análisis muestra inmediatamente que la geometría cerca del horizonte a temperatura cero, que se rige por el coeficiente de segundo orden $f''(r_o)$, es fundamentalmente diferente de la geometría cerca del horizonte a temperatura finita, que se rige por el coeficiente de primer orden $f'(r_o)$ (11).

Insertando el factor de emblackening $f(r)$ cerca de la frontera en la métrica (6.2) se obtiene la geometría cerca del horizonte en el régimen $(r - r_*)/r_* \ll 1$

$$ds^2 = -\frac{d(d+1)(r - r_*)^2 dt^2}{L^2} + \frac{L^2 dr^2}{d(d+1)(r - r_*)^2} + \frac{(r_*)^2}{L^2} dx^2 + \dots \quad (6.25)$$

mientras que el potencial de calibre toma la forma

$$A_t = \frac{d(d+1)e_d}{L^2}(r - r_*) \quad (6.26)$$

Se infiere que, en términos de la coordenada radial de horizonte cercano $r - r_*$, los coeficientes que acompañan a dt^2 y dr^2 en el elemento de línea adquieren una estructura similar a los coeficientes de la métrica AdS_{d+2}

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{L^2}{r^2} dr^2 \quad (6.27)$$

La expresión (6.25) es una geometría efectiva anti-de Sitter, excepto que las direcciones espaciales (dx^2) están multiplicadas por la constante r_*^2 . Las direcciones espaciales forman un espacio plano, mientras que existe una geometría efectiva bidimensional anti-de Sitter en el plano $\{t, r\}$. Para representar esto más explícitamente, volvamos a parametrizar la métrica del horizonte cercano en términos de una coordenada radial ζ , que es la inversa de la distancia medida desde el horizonte, y un radio L_2 [11]

$$\zeta = \frac{L_2^2}{r - r_*}, \quad L_2 = \frac{L}{\sqrt{d(d+1)}} \quad (6.28)$$

$$ds^2 = \frac{L_2^2}{\zeta^2} (-dt^2 + d\zeta^2) + \frac{r_*^2}{L^2} d\vec{x}^2, \quad A_t = \frac{e_d}{\zeta} \quad (6.29)$$

Recuérdese ahora el “dogma central” de la holografía: las isometrías en el volumen están codificadas en el espacio-tiempo global y las simetrías de escala en la teoría de campo de la frontera. Al considerar la geometría pura de AdS_{d+2}

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (-dt^2 + dz^2 + dx_1^2 + \dots + dx_d^2) \quad (6.30)$$

donde z es la dirección radial y comparar su isometría de escala

$$t \rightarrow \lambda t, \quad z \rightarrow \lambda z, \quad \vec{x} \rightarrow \lambda \vec{x}, \quad (6.31)$$

con lo antes obtenido, hace evidente que la métrica (6.29) tiene la isometría de escala

$$t \rightarrow \lambda t, \quad \zeta \rightarrow \lambda \zeta, \quad \vec{x} \rightarrow \vec{x} \quad (6.32)$$

Capítulo 6: Metales Extraños de Reissner-Nordström

Se infiere directamente que estamos tratando con un estado cuántico crítico (cuasi) local en la teoría de campo en la frontera: en las direcciones espaciales no hay noción de invariancia de escala, mientras que la dinámica de los campos es invariante de escala simplemente en el tiempo. Tal escalamiento puede parecer poco familiar, pero es una extensión natural de la escala anisotrópica familiar en las teorías de materia condensada no relativista. Las teorías continuas emergentes pueden exhibir una simetría de escala donde, bajo un reescalamiento espacial, la coordenada temporal escala con un exponente dinámico crítico diferente z [11]

$$t \rightarrow \lambda^z t, \quad \vec{x} \rightarrow \lambda \vec{x} \quad (6.33)$$

Al redefinir $\lambda \rightarrow \lambda^{1/z}$, reconocemos la simetría de escala de AdS_2 cerca del horizonte en el límite $z \rightarrow \infty$. No existe un precedente en la teoría del grupo de renormalización clásica/bosónica para un exponente crítico dinámico tan grande, y menos divergente. Sin embargo, tal comportamiento (al parecer) tuvo lugar en experimentos con metales extraños de laboratorio, comenzando con el líquido marginal de Fermi de finales de los años ochenta (1980's) [11].

Conclusiones

Hemos utilizado la correspondencia AdS/CFT para estudiar un problema de densidad finita como el de metales extraños, a partir de una teoría gravitacional clásica de Einstein-Maxwell en un espacio-tiempo de AdS, cuyas ecuaciones de movimiento tienen una única familia de soluciones estáticas conocidas como agujeros negros de Reissner-Nordström (RN). Esto ha sido posible gracias al principio holográfico, el cual establece una dualidad entre la teoría gravitacional en el volumen de AdS y la teoría que describe estos metales ubicada en la frontera de AdS.

Cuando la energía del agujero negro RN es puramente de origen electromagnético (conocido como agujero extremo) su temperatura de Hawking es cero y no hay radiación de energía. En este caso el agujero negro tiene la masa mínima compatible con la configuración eléctrica y presenta un horizonte de eventos que garantiza la existencia de una entropía (de Bekenstein-Hawking). Este estado extremo es dual a un metal extraño de densidad finita con temperatura cero en la frontera. Al estudiar la termodinámica de estos sistemas de densidad finita encontramos que las cantidades termodinámicas son proporcionales al número de grados de libertad de la teoría (N^2) y que además cumplen la primera ley de la termodinámica.

Capítulo 7: Conclusiones

Otro aspecto interesante en estos metales extraños RN es la aparición de una criticidad cuántica local puramente temporal. Esto pudo verse al estudiar la geometría cerca del horizonte, donde los coeficientes que acompañan a dt^2 y dr^2 en la métrica adquieren una estructura similar a los coeficientes de la métrica AdS_{d+2} . Esta geometría es tal que las direcciones espaciales forman un espacio plano, mientras que existe una geometría efectiva bidimensional anti-de Sitter en el plano $\{t, r\}$. Además, cerca del horizonte se presenta una invariancia de escala en la coordenada temporal cuyo exponente crítico es grande. Este comportamiento ha tenido lugar en experimentos de laboratorio con metales extraños.

De esta forma se ha logrado obtener resultados que sugieren una descripción, al menos termodinámica (hasta donde vimos nosotros), de metales extraños a través de la dualidad AdS/CFT. Al final vemos que el principio holográfico ha propiciado un nuevo conjunto de herramientas matemáticas y ha dado lugar a la aparición de nuevas ideas que permitan entender aún más ciertos problemas complejos de la física.

Bibliografía

- [1] Pires A S T AdS/CFT correspondence in condensed matter arXiv:1006.5838 [cond-mat.str-el]
- [2] J. M. Maldacena, “The large N limit of super-conformal field theories and supergravity,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998) [republished *Int. J. Theor. Phys.* **38**, 1113 (1999)] [arXiv:9711200 [hep-th]].
- [3] Klebanov, I. R., and Maldacena, J. M. (2009). Solving quantum field theories via curved spacetimes. *Physics today*, 62(1), 28-33.
- [4] Johnson, C. V., and Steinberg, P. (2010). What black holes teach about strongly coupled particles. *Physics today*, 63(5), 29-33.
- [5] Nastase, Horatiu. “Introduction to AdS-CFT.” arXiv preprint arXiv:0712.0689 (2007).
- [6] Aharony, O., Gubser, S. S., Maldacena, J., Ooguri, H., and Oz, Y. (2000). Large N field theories, string theory and gravity. *Physics Reports*, 323(3), 183-386.
- [7] Gubser, S. S., Klebanov, I. R., and Polyakov, A. M. (1998). Gauge theory correlators from non-critical string theory. *Physics Letters B*, 428(1), 105-114.
- [8] Witten, E. (1998). Anti de Sitter space and holography. arXiv preprint hep-th/9802150.

Bibliografia

- [9] McGreevy, J. (2010). Holographic duality with a view toward many-body physics. *Advances in High Energy Physics*, 2010.
- [10] Natsuume, M. (2015). *AdS/CFT duality user guide* (Vol. 903). Springer.
- [11] Zaanen, J., Liu, Y., Sun, Y. W., and Schalm, K. (2015). *Holographic duality in condensed matter physics*. Cambridge University Press.
- [12] Bekenstein, J. D. (1972). Black holes and the second law. *Lettere Al Nuovo Cimento* (1971-1985), 4(15), 737-740.
- [13] Bardeen, J. M., Carter, B., and Hawking, S. W. (1973). The four laws of black hole mechanics. *Communications in Mathematical Physics*, 31(2), 161-170.
- [14] Hawking, S. W., and Penrose, R. (1970, January). The singularities of gravitational collapse and cosmology. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* (Vol. 314, No. 1519, pp. 529-548). The Royal Society.
- [15] Hooft, G. T. (1993). Dimensional reduction in quantum gravity. arXiv preprint gr-qc/9310026.
- [16] Susskind, L. (1995). The world as a hologram. *Journal of Mathematical Physics*, 36(11), 6377-6396. [arXiv:9409089 [hep-th]].
- [17] Strominger, A., and Vafa, C. (1996). Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy. *Physics Letters B*, 379(1), 99-104. [arXiv:9601029 [hep-th]].
- [18] Herzog, C. P., Kovtun, P., Sachdev, S., and Son, D. T. (2007). Quantum critical transport, duality, and M theory. *Physical Review D*, 75(8), 085020.
- [19] Hartnoll, S. A., and Kovtun, P. K. (2007). Hall conductivity from dyonic black holes. *Physical Review D*, 76(6), 066001.

Bibliografia

- [20] Hartnoll, S. A., Kovtun, P. K., Müller, M., and Sachdev, S. (2007). Theory of the Nernst effect near quantum phase transitions in condensed matter and in dyonic black holes. *Physical Review B*, 76(14), 144502.
- [21] Hartnoll, S. A., and Herzog, C. P. (2008). Impure AdS/CFT correspondence. *Physical Review D*, 77(10), 106009.
- [22] Faulkner, T., Liu, H., McGreevy, J., and Vegh, D. (2011). Emergent quantum criticality, Fermi surfaces, and AdS 2. *Physical Review D*, 83(12), 125002.
- [23] Hartnoll, S. A., Herzog, C. P., and Horowitz, G. T. (2008). Holographic superconductors. *Journal of High Energy Physics*, 2008(12), 015.
- [24] Sachdev, S., and Müller, M. (2009). Quantum criticality and black holes. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 21(16), 164216.
- [25] Sachdev, S. (2010). Finite temperature dissipation and transport near quantum critical points. *Understanding Quantum Phase Transitions. Series: Condensed Matter Physics*, ISBN: 978-1-4398-0251-9. CRC Press, Edited by Lincoln Carr, pp. 3-30, 3-30.
- [26] Sachdev, S. (2010). Strange metals and the AdS/CFT correspondence. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2010(11), P11022.
- [27] Sachdev, S. (2012). What can gauge-gravity duality teach us about condensed matter physics?. *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.*, 3(1), 9-33.
- [28] Faulkner, T., Iqbal, N., Liu, H., McGreevy, J., and Vegh, D. (2010). From black holes to strange metals. *arXiv preprint arXiv:1003.1728*.
- [29] Hartnoll, S. A. (2009). Lectures on holographic methods for condensed matter physics. *Classical and Quantum Gravity*, 26(22), 224002.
- [30] Hartnoll, S. A. (2009). Quantum critical dynamics from black holes. *arXiv preprint arXiv:0909.3553*.

Bibliografía

- [31] Sachdev, S. (2011). Condensed matter and AdS/CFT. In *From gravity to thermal gauge theories: the AdS/CFT correspondence* (pp. 273-311). Springer Berlin Heidelberg.
- [32] Zaanen J., Sun Y. W., Liu Y., and Schalm, K. The AdS/CFT manual for plumbers and electricians. (www.lorentz.leidenuniv.nl/~kschalm/papers/adscmtreview.pdf)
- [33] Schalm, K., and Davison, R. A simple introduction to AdS/CFT and its application to condensed matter physics. D-ITP Advanced Topics in Theoretical Physics Fall 2013. Leiden University.
- [34] Faulkner, T., Iqbal, N., Liu, H., McGreevy, J., and Vegh, D. (2010). Strange metal transport realized by gauge/gravity duality. *Science*, 329(5995), 1043-1047.
- [35] Carroll, S. M. (2004). *Spacetime and geometry. An introduction to general relativity*.
- [36] York Jr, J. W. (1972). Role of conformal three-geometry in the dynamics of gravitation. *Physical Review Letters*, 28(16), 1082.
- [37] Gibbons, G. W. and Hawking, S. W. (1977). Action integrals and partition functions in quantum gravity. *Physical Review D*, 15(10), 2752.
- [38] Hawking, S. W. and Horowitz, G. T. (1996). The gravitational Hamiltonian, action, entropy and surface terms. *Classical and Quantum Gravity*, 13(6), 1487.
- [39] Ready, A. J. (2012). *The AdS/CFT correspondence and condensed matter physics* (Doctoral dissertation, Imperial College London).
- [40] *Dynamical Instabilities in Accretion Discs*. Departamento de Física, Universidad de Oxford (Steven Balbus). Recuperado el 12 de Febrero de 2018, de <http://mnp-club.github.io/blog/blackhole-paradox/>
- [41] Israel, W. (1967). Event horizons in static vacuum space-times. *Physical review*, 164(5), 1776.

Bibliografía

- [42] Israel, W. (1968). Event horizons in static electrovac space-times. *Communications in Mathematical Physics*, 8(3), 245-260.
- [43] Carter, B. (1971). Axisymmetric black hole has only two degrees of freedom. *Physical Review Letters*, 26(6), 331.
- [44] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, 1973.
- [45] J. D. Bekenstein, Black hole hair: 25 years after, in *Second International A. D. Sakharov Conference on Physics*, 1996, pp. 216-219 [arXiv:9605059 [gr-qc]].
- [46] Grumiller, D., McNees, R., and Salzer, J. (2015). *Black Holes and Thermodynamics: The First Half Century*. In *Quantum Aspects of Black Holes* (pp. 27-70). Springer, Cham.
- [47] Jacobson, T. (1996). *Introductory lectures on black hole thermodynamics*. Given at Utrecht U. in, 26.
- [48] Amoretti, A. (2017). *Condensed Matter Applications of AdS/CFT: Focusing on Strange Metals*. Springer.
- [49] Skenderis, K. (2002). *Lecture notes on holographic renormalization*. *Classical and Quantum Gravity*, 19(22), 5849.
- [50] Petersen, J. L. (1999). *Introduction to the Maldacena conjecture on AdS/CFT*. *International Journal of Modern Physics A*, 14(23), 3597-3672.
- [51] SUPERCONDUCTIVIDAD (ICMM-CSIC). (s.f.). Recuperado el 11 de Marzo de 2018, de <https://wp.icmm.csic.es/superconductividad/materiales-superconductores/superconductores-no-convencionales/superconductores-de-alta-temperatura/cupratos/>

Bibliografia

- [52] Phillips, P. (2011). Mottness collapse and T-linear resistivity in cuprate superconductors. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 369(1941), 1574-1598.
- [53] Iqbal, N., Liu, H. and Mezei, M. (2012). Semi-local quantum liquids. *JHEP* 1204, 086.
- [54] Birmingham, D. (1999). Topological black holes in anti-de Sitter space. *Class. Quant. Grav.* 16, 1197.

Apéndice **A**

Criticalidad en el Modelo de Ising cuántico

A.1. Modelo de Ising cuántico

El modelo de Ising, llamado así en honor al físico Ernst Ising, es un modelo matemático de ferromagnetismo en mecánica estadística. Éste consiste de variables discretas que representan los momentos magnéticos dipolares de los espines atómicos. Para estudiar este modelo se considera un lattice o red, en la cual se encuentran dispuestos los respectivos espines. Por ejemplo, en 1 dimensión lo que se tiene es una cadena de espines, en 2 dimensiones puede pensarse esta red como un arreglo cuadrado (aunque también podría ser triangular o hexagonal), mientras que en 3 dimensiones podría pensarse en un arreglo cúbico. En el caso del modelo bidimensional, éste es uno de los modelos estadísticos más simples para entender las transiciones de fase. Si denotamos por i un sitio en la red, para cada sitio tenemos asociada una configuración de espín σ_i que sólo toma valores $+1$ ó -1 y además consideraremos interacciones entre primeros vecinos.

Denotamos Λ_L el subconjunto finito de la red, el cual está compuesto por d sitios en la red. La función de energía o Hamiltoniano más sencillo que uno puede asociar a

Apéndice A: Criticalidad en el Modelo de Ising cuántico

este sistema tiene la forma:

$$H(\sigma) = - \sum_{i,j \in \Lambda_L: |i-j|=1} \sigma_i \sigma_j \quad (\text{A.1})$$

donde la suma es sobre todos los pares de sitios que son primeros vecinos dentro del volumen finito, tal que la distancia Euclídea entre ellos es 1. Dado que la interacción es a primeros vecinos, ambos sitios se encuentran dentro del volumen Λ_L y a estas condiciones de frontera se les llama "libres".

Luego, definimos la medida de probabilidad

$$\mu_L(\sigma) = \exp(-\beta H(\sigma)) / Z \quad (\text{A.2})$$

donde $Z = \sum_{\sigma} \exp(-\beta H(\sigma))$ es la función de partición.

También es posible imponer otras condiciones de frontera, lo que resultará muy importante para las transiciones de fase. Estas otras condiciones pueden ser: condiciones + (donde se consideran sitios fuera del volumen Λ_L con $\sigma_i = +1$) y condiciones - (donde se consideran sitios fuera del volumen Λ_L con $\sigma_i = -1$). También pueden considerarse condiciones mixtas, pero en este caso no se consideran.

Una cantidad importante en este modelo es el valor medio del espín en el origen, ya que a final de cuentas nuestro problema de transiciones de fase va a venir dado por el comportamiento de éste según las condiciones de frontera que impongamos. El valor medio del espín en el origen viene dado por

$$\langle \sigma_o \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\sigma} \sigma_o \exp(-\beta H(\sigma)) \quad (\text{A.3})$$

Al usar condiciones de frontera "libres" se impone una simetría global de cambio de espín, en la que si cambiamos σ_i por $-\sigma_i$ el Hamiltoniano no cambia. Dado que σ_o cambia de signo bajo esta transformación, se encuentra que su valor medio con condiciones de frontera libres es igual a cero. Este resultado cambia si cambiamos las condiciones de frontera.

Apéndice A: Criticalidad en el Modelo de Ising cuántico

Dos cantidades importantes del modelo son la magnetización

$$M = \left\langle \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i \right\rangle \quad (\text{A.4})$$

y la energía

$$E = \langle H \rangle \quad (\text{A.5})$$

Otra cantidad de interés que juega un papel importante es la longitud de correlación ξ . La manera más simple de medir qué tan correlacionados están los espines σ_i y σ_j , que se encuentran separados uno de otro, es a través de la función de correlación truncada

$$\langle \sigma_i; \sigma_j \rangle = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle \quad (\text{A.6})$$

tal que si los espines son independientes, esta cantidad es cero. Lo que suele suceder es que a medida que $|i - j|$ tiende a infinito $\langle \sigma_i; \sigma_j \rangle \sim \exp(-|i - j|/\xi)$ para todos los valores de β excepto uno. La longitud de correlación describe lo interesante del modelo, ya que si ésta es pequeña entonces los espines distantes están débilmente correlacionados.

Por otra parte, también podemos considerar un Hamiltoniano más general, en el cual el sistema se ve influenciado por un campo magnético externo h

$$H = - \sum_{\langle i, j \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i \quad (\text{A.7})$$

Luego, la energía libre F se define como

$$\exp(-\beta F) = Z = \sum_{\sigma} \exp(-\beta H) \quad (\text{A.8})$$

a partir de la cual se pueden obtener las funciones respuesta tales como la magnetización

$$m(\beta, h) = -\frac{\partial f}{\partial h} \quad (\text{A.9})$$

la susceptibilidad magnética

$$\chi = \frac{\partial m}{\partial h} = -\frac{\partial^2 f}{\partial h^2} \quad (\text{A.10})$$

y el calor específico

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} \quad (\text{A.11})$$

A.1.1. Transiciones de Fase

Las transiciones de fase tienen lugar cuando se producen cambios abruptos en el sistema de volumen infinito para determinados valores de temperatura y/o campo magnético. Los puntos en los cuales estos parámetros toman dichos valores se conocen como puntos críticos. Existen tres maneras de identificar una transición de fase. La primera es a través de un cambio abrupto del valor medio del espín en el origen para un cierto β_c ($\beta_c = 1/T_c$), al considerar condiciones de frontera + o -. La segunda es a través del estudio de la analiticidad de las funciones respuesta tales como magnetización y calor específico. La tercera es notar que la longitud de correlación diverge en el punto crítico (esto sucede para transiciones de fase de segundo orden).

En estos puntos críticos pueden identificarse los llamados exponentes críticos, los cuales describen el comportamiento de algunas magnitudes físicas en las proximidades de las transiciones de fase. Definimos $t \equiv (T - T_c)/T_c$, que representa una medida de la desviación de la temperatura crítica de forma adimensional. La longitud de correlación diverge como $\xi \sim |t|^{-\nu}$, donde ν es el exponente crítico. A medida que T tiende a T_c el calor específico y la susceptibilidad magnética divergen como $\chi \sim |t|^{-\gamma}$ y $C \sim |t|^{-\alpha}$ respectivamente.

Si $T < T_c$ y además imponemos condiciones de frontera + sobre el sistema, entonces la magnetización por sitio m será estrictamente positiva en el límite de volumen infinito. A medida que T tienda a T_c por la izquierda la magnetización va a converger a cero $m \sim (-t)^\beta$, donde β es otro exponente crítico. Los 4 exponentes críticos $(\alpha, \beta, \gamma, \nu)$ describen el comportamiento del sistema a medida que éste se acerca a la temperatura crítica. Existen otros dos exponentes definidos para $T = T_c$. Ya que en

Apéndice A: Criticalidad en el Modelo de Ising cuántico

este punto la magnetización por sitio es cero, al someter el sistema a un campo magnético externo ya esta cantidad deja de ser cero. Por lo tanto el comportamiento de m a medida que el campo magnético h tiende a cero da lugar a otro exponente crítico $|m| \sim |h|^{1/\delta}$.

Como ya se mencionó, en el punto crítico la longitud de correlación diverge, sin embargo, las funciones de correlación decaen como una potencia de la distancia. Esta potencia es otro exponente crítico $\langle \sigma_o \sigma_x \rangle \sim 1/|x|^{d-2+\eta}$. Es importante destacar que, para una gran variedad de modelos los exponentes críticos en cada uno de ellos resultan ser los mismos, lo que se conoce como principio de universalidad. Estos exponentes críticos dependerán del número de dimensiones, pero no de las interacciones microscópicas ni del arreglo particular de la red.

Por último, los exponentes críticos se encuentran relacionados a través de lo que se conoce como leyes de escala y leyes de hiperescala. Las leyes de escala son:

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \tag{A.12}$$

y

$$\beta\delta = \beta + \gamma \tag{A.13}$$

Mientras que las leyes de hiperescala (con d el número de dimensiones) son:

$$d\nu = 2 - \alpha \tag{A.14}$$

y

$$2 - \eta = d \frac{(\delta - 1)}{(\delta + 1)} \tag{A.15}$$

En el caso particular del modelo de Ising bidimensional, con interacciones únicamente a primeros vecinos y sin campo magnético externo, los exponentes críticos han sido completamente estudiados, encontrándose en este caso

$$\alpha = \log, \beta = 1/8, \gamma = 7/4, \delta = 15, \nu = 1, \eta = 1/4 \tag{A.16}$$

Apéndice **B**

Temperatura de Hawking para un agujero negro de Schwarzschild AdS

B.1. Temperatura de Hawking del agujero negro de Schwarzschild a partir de la teoría gravitacional euclídea

Las ecuaciones de Einstein del vacío con constante cosmológica, en un espacio-tiempo $(d + 1)$ dimensional, vienen dadas por [\[54\]](#)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \frac{d(d+1)}{2L^2}g_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{B.1})$$

cuya solución viene dada por la métrica

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2} \left[-f(r)dt^2 + dx_i dx_i \right] + \frac{L^2}{r^2 f(r)} dr^2, \quad i = 1, \dots, d. \quad (\text{B.2})$$

donde L es el radio de AdS y r es la dirección radial, mientras que el factor de emblackening $f(r)$ es

$$f(r) = 1 - \frac{M}{r^{d+1}} \quad (\text{B.3})$$

Al imponer la condición $f(r = r_o) = 0$, donde r_o es el radio del horizonte de eventos, se encuentra que la masa de este agujero negro viene dada por

$$m = r_o^{d+1} \quad (\text{B.4})$$

Apéndice B: Temperatura de Hawking para un agujero negro de Schwarzschild AdS

Si se considera una métrica general de agujero negro estático de la forma

$$ds^2 = -g_{tt}(r)dt^2 + \frac{dr^2}{g^{rr}(r)} + g_{x_i x_i}(r)dx^i dx^i \quad (\text{B.5})$$

donde $g_{tt}(r)$ y $g^{rr}(r)$ se anulan en el horizonte r_o .

A través de una rotación de Wick $\tau = it$, se encuentra una expresión para esta métrica en un formalismo euclídeo

$$ds_E^2 = g_{tt}(r)d\tau^2 + \frac{dr^2}{g^{rr}(r)} + g_{x_i x_i}(r)dx^i dx^i \quad (\text{B.6})$$

Si suponemos que las propiedades del agujero negro se ven reflejadas en la geometría cerca del horizonte, donde $g_{tt}(r)$ y $g^{rr}(r)$ se anulan, es posible expandir la métrica entorno a $r = r_o$ tal que

$$g_{tt}(r) = g'_{tt}(r_o)(r-r_o) + \dots, \quad g^{rr}(r) = g'^{rr}(r_o)(r-r_o) + \dots, \quad g_{x_i x_i}(r) = g_{x_i x_i}(r_o) + \dots \quad (\text{B.7})$$

de esta manera se obtiene la métrica euclídea cerca del horizonte

$$ds_E^2 = g'_{tt}(r_o)(r-r_o)d\tau^2 + \frac{dr^2}{g'^{rr}(r_o)(r-r_o)} + g_{x_i x_i}(r_o)dx^i dx^i + \dots \quad (\text{B.8})$$

Es conveniente reparametrizar la dirección radial en términos de una nueva variable $R_o = 2\sqrt{r-r_o}/\sqrt{g'^{rr}(r_o)}$, de esta manera la métrica puede ser escrita

$$ds_E^2 = \frac{1}{4}R_o^2 g'_{tt}(r_o)d\tau^2 + dR_o^2 + g_{x_i x_i}(r_o)dx^i dx^i + \dots \quad (\text{B.9})$$

donde el plano interesante es el formado por R_o y la dirección temporal imaginaria τ .

La métrica (B.9) es exactamente igual a la de un plano en coordenadas polares con τ actuando como la dirección angular compacta. Al aproximarse al horizonte $R_o \rightarrow 0$, el prefactor de $d\tau^2$ se anula, lo que significa que la dirección temporal euclídea se reduce a un punto. Sin embargo, ya que el horizonte no es un punto especial, no se debería permitir que este punto sea singular. Para ello, es posible tomar $R_o = 0$ como el

Apéndice B: Temperatura de Hawking para un agujero negro de Schwarzschild AdS

centro de un sistema coordinado polar euclídeo, lo que implica que la coordenada τ sea periódica con período $4\pi/\sqrt{g'_{tt}(r_o)g'^{rr}(r_o)}$. Esta periodicidad se identifica directamente con el inverso de la temperatura del agujero negro. En este caso, para un agujero negro de Schwarzschild, la temperatura vendrá dada por:

$$T = \left. \frac{\sqrt{g'_{tt}(r_o)g'^{rr}(r_o)}}{4\pi} \right|_{r=r_o} = \frac{(d+1)r_o}{4\pi L^2} \quad (\text{B.10})$$