UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

LA INTEGRAL DE LEBESGUE DESDE UNA PERSPECTIVA CATEGÓRICA

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Diego Hernández** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Dr. Yannic Vargas.

Caracas, Venezuela
Octubre del 2018

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**La integral de Lebesgue desde una perspectiva categórica**", presentado por el **Br. Diego Hernández**, titular de la Cédula de Identidad **24.803.971**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Yannic Vargas L.

Dr. Yannic Vargas

Tutor

Dr. Jean Carlos Liendo

Jurado

Dra. Cristina Balderrama

Jurado

Índice general

Resúmen

Se presenta una descripción de la integral de Lebesgue desde la teoría de categorías. En particular, se caracteriza el espacio $L^1[0,1]$ con una sencilla propiedad universal, evitando los pasos de la construcción clásica de la integral de Lebesgue, y utilizando solamente nociones básicas de espacios de Banach. En particular, se obtiene de manera natural la existencia de la integral de Lebesgue sobre el espacio $L^1[0,1]$.

Palabras claves: integral de Lebesgue, espacio de Banach, $L^1[0,1]$, teoría de categorías, objeto inicial.

Introducción

La teoría de categorías es una rama de las matemáticas que permite, a pesar de ser considerada a veces como un "sin sentido abstracto", mirar desde el punto de vista de una ave patrones entre distintas estructuras matemáticas, que desde la perspectiva del suelo raso serían imposible identificar. El origen de esta teoría se remonta a los trabajos algebraicos de Emmy Noether, quien consideró que el estudio de las estructuras matemáticas debe pasar por comprender las funciones o procesos que preservan estas estructuras. Poco después, Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane (este último estudiante de Noether) formalizan las nociónes de categoría, funtor y transformación natural entre 1942 y 1945. Desde entonces, la teoría de categorías se ha utilizado tanto en la fundación axiomática de las matemáticas, como en aplicaciones prácticas concernientes a los lenguajes de programación, bioinformática, teoría de juegos, entre otros.

De manera informal, una categoría consta simplemente de una clase de objetos, junto con una clase de flechas entre los objetos, satisfaciendo ciertos axiomas. Los objetos de una categoría pueden ser conjuntos, estructuras matemáticas (espacios vectoriales, espacios de Banach, grupos, etc), números, pares de elementos, n-tuplas, sistemas de ecuaciones o cualquier entidad en la cual se esté interesado en trabajar. Las flechas entre objetos describen la relación entre los objetos, y aunque el ejemplo prototipo de flecha sean las funciones, una flecha podría ser una relación conjuntista, una matriz, un conjunto, etc. Existe, por ejemplo, la categoría Vect, cuyos objetos son los espacios vectoriales, y las flechas entre objetos son transformaciones lineales; Ban es la categoría formada por los espacios de Banach, y las flechas son morfismos entre espacios de Banach (funciones lineales $\psi : X \to Y$, tales que $||\psi(x)|| \leq ||x||$, para todo $x \in X$); Set es la categoría de los conjuntos y funciones; $\mathsf{Set}^{\times}$ es la categoría de conjuntos y funciones biyectivas; $\mathsf{Mat}_{\mathbb{R}}$ es la categoría cuyos objetos son los números naturales, y para cada par de objetos m y n, el conjunto de flechas entre m y n es el conjunto de matrices $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$.

La integral de Lebesgue es una herramienta esencial del análisis moderno. A pesar de ello, su descripción suele no ser directa, y su definición depende de una serie de pasos preliminares. Primero se introducen las nociones de conjunto de medida 0 y de sucesión de funciones convergentes casi siempre; se define la integral para funciones simples, se extiende sucesivamente esta noción a toda función a valores positivos y por último a toda función medible.

Durante el congreso "83rd Peripatetic Seminar on Sheaves and Logic", dado en Glasgow, Escocia, en 2006, Tom Leinster presenta una descripción de la integral de Lebesgue desde la teoría de categorías, en donde se caracteriza el espacio $L^1[0,1]$ con una sencilla propiedad universal, evitando los pasos de la construcción clásica de la integral de Lebesgue, y utilizando solamente nociones básicas de espacios de Banach. La caracterización de Leinster es la siguiente:

Sea $\mathcal{C}$ la categoría formada por tripletas (X,u,ξ), donde:

- *X es un espacio de Banach;*
- *u es un elemento de X, de norma inferior o igual a 1;*
- *$\xi : X\oplus X\to X$ es un morfismo de espacios de Banach, tal que $\xi(u,u)=u$.*

El objeto inicial de la categoría $\mathcal{C}$ es $(L^1[0,1],\gamma,1)$, donde 1 es la función constantemente igual a 1 y γ es la función definida como

$$(\gamma(f,g))(t) := \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0\le t<1/2 \\ g(2t-1) & \text{si } 1/2<t\le 1 \end{cases}$$

Un objeto inicial en una categoría es un objeto del cual sale una única flecha a cada objeto de la categoría. No toda categoría posee objeto inicial, pero cuando existe, este es único (salvo isomorfismo). Así, el espacio $L^1[0,1]$ está completamente determinado por la categoría $\mathcal{C}$ (junto con las funciones ξ y 1). A partir de este resultado, las herramientas de la teoría de categorías permite deducir de manera muy sencilla el siguiente enunciado ya conocido, pero que caracteriza completamente a la integral de Lebesgue:

La integral de Lebesgue

$$\int_0^1 : L^1[0,1] \to \mathbb{R}$$

es el único funcional lineal acotado que satisface las siguientes propiedades:

(1) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx + \int_0^1 f\left(\frac{x+1}{2}\right)dx\right);$

(2) $\displaystyle\int_0^1 1dx = 1.$

Finalmente, la caracterización del espacio $L^1[0,1]$ desde el punto de vista categórico permite luego definir la integral sobre cualquier espacio medible. El propósito de este trabajo es el de comprender las herramientas básicas de la teoría de categorías y de teoría de la medida para estudiar los resultados de Leinster dados en [13], [14] y [15].

Capítulo 1

Teoría de categorías

1.1 Categorías

La nociones de categoría, funtor y transformación natural fueron formalizadas entre 1942 y 1945 por Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane ([2],[3],[4]), en sus trabajos sobre topología algebraica.

Para definir lo que es una categoría usaremos la noción de clase.Una *clase* es una familia de conjuntos, o bien una colección de objetos matemáticos que no necesariamente son conjunto. El concepto de clase aparece al intentar «agrupar» todos los conjuntos (u objetos) que comparten una cierta propiedad. Una clase esta determinada por una propiedad expresada a través de una fórmula $\phi(x)$ que nos permite escribir a una clase como una expresión de la forma $\{x : \phi(x)\}$. Los conjuntos son clases capaces de ser, ellas mismas, objetos de otras clases, mientras que las clases incapaces de ser objetos de otras clases no son conjuntos y son llamadas clases propias.

Definición 1.1.1. Una *categoría* $\mathcal{C}$ consiste de:

- una clase $Obj(\mathcal{C})$ de elementos, llamados *objetos* de $\mathcal{C}$,
- una clase $Hom(\mathcal{C})$ de elementos, llamados *flechas* de $\mathcal{C}$ (también llamados morfismos o aplicaciones de $\mathcal{C}$). Cada flecha tiene asignada un par de objetos, uno llamado la fuente (o dominio) y el otro el destino (o codominio) de la flecha. La notación $f : A \longrightarrow B$

significa que f es una flecha con fuente A y destino B. La clase de todas las flechas desde A a B es denotada por $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$. Así se tiene que

$$Hom(\mathcal{C}) = \bigcup_{A,B\in Obj(\mathcal{C})} Hom_{\mathcal{C}}(A,B),$$

- una flecha identidad $1_A : A \longrightarrow A$ para cada objeto A de la categoría,

- una operación binaria $\circ : Hom_{\mathcal{C}}(B,C) \times Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A,C)$ asociativa, para cada terna de objetos $A, B, C \in Obj(\mathcal{C})$, llamada composición de flechas. Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ son dos flechas, entonces $g \circ f : A \longrightarrow C$ es la flecha composición de f y g. Para $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ y $h : C \longrightarrow D$ se cumple que:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \qquad \text{y} \qquad f \circ 1_A = 1_B \circ f = f.$$

Observación 1.1.2. Si A es un objeto y f es una flecha de una categoría $\mathcal{C}$ se suele escribir $A \in \mathcal{C}$ en vez de $A \in Obj(\mathcal{C})$ y $f \in \mathcal{C}$ en vez de $f \in Hom(\mathcal{C})$.

Ejemplos 1.1.3.

1. La categoría **Set** que tiene a los conjuntos como objetos y a las funciones como flechas.

2. La categoría **Vect** que tiene a los espacios vectoriales como objetos y a las transformaciones lineales como flechas.

3. La categoría **Top** que tiene a los espacios topológicos como objetos y a las funciones continuas como flechas.

4. La categoría **Mon** que tiene a los monoides como objetos y a los homomorfismos de monoides como flechas.

5. La categoría **Grp** que tiene a los grupos como objetos y a los homomorfismos de grupos como flechas.

6. La categoría **Ring** que tiene a los anillos con unidad como objetos y a los homomorfismos de anillos que respetan la unidad como flechas.

7. La categoría **Field** que tiene a los cuerpos como objetos y a los homomorfismos de cuerpos como flechas.

8. La categoría **Meas** que tiene a los espacios medibles como objetos y a las funciones medibles como flechas.

9. La categoría $\mathbf{Met_c}$ que tiene a los espacios métricos como objetos y a las funciones continuas como flechas.

   Estos ejemplos que hemos visto son de categorías que tienen como objetos a conjuntos con una cierta estructura adicional y las flechas son funciones que respetan esa estructura. Veamos ahora ejemplos en los cuales los objetos no son necesariamente conjuntos con una estructura adicional, y donde las flechas no suelen ser funciones.

10. La categoría $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}$ que tiene a los números enteros positivos como objetos y las flechas entre dos enteros m y n son las matrices $n \times m$ con entradas reales, la flecha identidad $1_n : n \longrightarrow n$ es la matriz identidad $n \times n$ y para $A : n \longrightarrow s$, $B : m \longrightarrow n$ se define $A \circ B := AB$, donde AB denota el producto de matrices.

11. Para un conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}, \leq)$, se define la categoría $\mathbf{C}(\mathcal{P}, \leq)$ que tiene como objetos a los elementos de $\mathcal{P}$ y como flechas a los pares $(x, y) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ tales que $x \leq y$. La reflexividad y transitividad de $\leq$ nos aseguran que, para todo $x \in \mathcal{P}$, existe una flecha identidad dada por el par (x, x) y una composición de flechas definida como

$$(y, z) \circ (x, y) := (x, z).$$

12. Para un monoide $\mathbf{M}$ definimos la categoría $\mathbf{BM}$ que tiene un solo objeto y las flechas son los elementos de $\mathbf{M}$. La flecha identidad del único objeto de $\mathbf{BM}$ es el elemento neutro de $\mathbf{M}$ y la composición de flechas es el producto de $\mathbf{M}$.

13. Una categoría es *discreta* si las únicas flechas que tiene son las flechas identidades. Todo conjunto $\mathbf{C}$ puede ser considerado como una categoría discreta que tiene como objeto a los elementos de $\mathbf{C}$ y como flechas únicamente a las flechas identidades.

Definición 1.1.4. Una categoría $\mathcal{C}$ es *pequeña* si $Hom(\mathcal{C})$ es un conjunto.

Observación 1.1.5. Si $\mathcal{C}$ es pequeña, entonces la clase $Obj(\mathcal{C})$ también es un conjunto, ya que los objetos se corresponden uno a uno con las flechas identidades.

Definición 1.1.6. Una categoría $\mathcal{C}$ es *localmente pequeña* si para cualquier par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$ se cumple que $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ es un conjunto.

Definición 1.1.7. Una categoría $\mathcal{B}$ es una *subcategoría* de una categoría $\mathcal{A}$ si se cumple que:

1. $Obj(\mathcal{B}) \subset Obj(\mathcal{A})$,

2. para todo $A, B \in Obj(\mathcal{B})$, $Hom_{\mathcal{B}}(A, B) \subset Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$,

3. si $C \in Obj(\mathcal{B})$, entonces $1_C^{\mathcal{B}} = 1_C^{\mathcal{A}}$,

4. si $f \in Hom_{\mathcal{B}}(A, B)$ y $g \in Hom_{\mathcal{B}}(B, C)$, entonces $g \circ_{\mathcal{B}} f = g \circ_{\mathcal{A}} f$.

Para denotar que $\mathcal{B}$ es una subcategoría de $\mathcal{A}$ se escribe $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.
Una subcategoría $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ es plena si ocurre que $Hom_{\mathcal{B}}(A, B) = Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$ para todo $A, B \in Obj(\mathcal{B})$.

Tipos de flechas y tipos de objetos en una categoría

Dentro de una categoría existen flechas y objetos que cumplen ciertas propiedades y por lo tanto reciben un nombre especial.

Definición 1.1.8. Dada una categoría $\mathcal{C}$ y objetos $A, B \in \mathcal{C}$, se dice que:

1. una flecha $f : A \longrightarrow B$ es un *monomorfismo* si para todo objeto $X \in Obj(\mathcal{C})$ y flechas $g, h : X \longrightarrow A$, se tiene que $f \circ g = f \circ h$ implica que $g = h$;

2. una flecha $f : A \longrightarrow B$ es un *epimorfismo* si para todo objeto $X \in Obj(\mathcal{C})$ y flechas $g, h : B \longrightarrow X$, se tiene que $g \circ f = h \circ f$ implica que $g = h$;

3. una flecha $f : A \longrightarrow B$ es un *isomorfismo* si existe una flecha $g : B \longrightarrow A$ tal que $f \circ g = 1_B$ y $g \circ f = 1_A$. A la flecha g se le llama inversa de f y se escribe $g = f^{-1}$. Los objetos A y B son isomorfos si existe un isomorfismo entre ellos y en tal caso se escribe $A \cong B$;

4. una flecha f en $\mathcal{C}$ es un *endomorfismo* si su objeto fuente es igual a su objeto destino;

5. una flecha f en $\mathcal{C}$ es un *automorfismo* si es isomorfismo y endomorfismo.

Definición 1.1.9. Dada una categoría $\mathcal{C}$ y un objeto $A \in Obj(\mathcal{C})$, se dice que:

1. A es un *objeto inicial* si para cada $X \in Obj(\mathcal{C})$ existe una única flecha $f : A \longrightarrow X$;

2. A es un *objeto terminal* si para cada $X \in Obj(\mathcal{C})$ existe una única flecha $f : X \longrightarrow A$;

3. A es un *objeto cero* si es inicial y terminal.

El siguiente resultado garantiza la unicidad, salvo isomorfismo, de objetos iniciales y terminales (cuando estos existen).

Proposición 1.1.10. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Si X y X' son objetos iniciales o terminales de $\mathcal{C}$ entonces existe un único isomorfismo $X \xrightarrow{f} X'$. Es decir, los objetos iniciales y terminales de una categoría son únicos salvo isomorfismo.*

Demostración.
Sean X y X' objetos iniciales o terminales de $\mathcal{C}$, entonces los siguientes conjuntos solo tienen una única flecha:

- $Hom_{\mathcal{C}}(X, X) = \{1_X\}$

- $Hom_{\mathcal{C}}(X, X') = \{f\}$

- $Hom_{\mathcal{C}}(X', X) = \{g\}$

- $Hom_{\mathcal{C}}(X', X') = \{1_{X'}\}$.

Basta ver que la flecha $X \xrightarrow{f} X'$ es un isomorfismo. Como $g \circ f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, X)$ entonces $g \circ f = 1_X$ y como $f \circ g \in Hom_{\mathcal{C}}(X', X')$ entonces $f \circ g = 1_{X'}$, por lo tanto f es un isomorfismo. $\square$

Ejemplos 1.1.11.

1. En la categoría **Set** los monomorfismos son las funciones inyectivas, los epimorfismos son las funciones sobreyectivas y los isomorfismos son las funciones biyectivas. Hay un único objeto inicial que es el conjunto vacío $\emptyset$ y los objectos terminales son los conjuntos unitarios $\{x\}$.

2. En la categoría **Top** los monomorfismos son las funciones continuas inyectivas, los epimorfismos son las funciones continuas sobreyectivas y los isomorfismos son los homeomorfismos. El espacio topológico vacío es el único objeto inicial y los espacios topológico de un solo punto son los objetos terminales.

3. En la categoría **Grp** los monomorfismos son los homomorfismos de grupos inyectivos, los epimorfismos son los homomorfismos de grupos sobreyectivos y los isomorfismos son los homomorfismos de grupos biyectivos. Los objetos iniciales y terminales son los grupos triviales que solo tiene un elemento.

4. En la categoría **Ring** los monomorfismos son los homomorfismos de anillos inyectivos, los epimorfismos son los homomorfismos de anillos sobreyectivos y los isomorfismos son los homomorfismos de anillos biyectivos. El anillo $\mathbb{Z}$ es un objeto inicial y los anillos triviales que solo tienen un elemento son objetos terminales

5. En la categoría $\mathbf{C}(\mathcal{P}, \leq)$ todas las flechas son monomorfismos y epimorfismos, los isomorfismos son las flechas identidades. Si $\mathcal{P}$ tiene un elemento minimal ese es el objeto inicial y si tiene un elemento maximal ese es el objeto terminal.

Construcción de nuevas categorías

Veamos dos maneras de construir categorías nuevas a partir de categorías dadas.

I. Toda categoría $\mathcal{C}$ tiene una *categoría opuesta o dual* $\mathcal{C}^{op}$, tal que $Obj(\mathcal{C}^{op}) := Obj(\mathcal{C})$ y, para cada $A, B \in Obj(\mathcal{C})$, $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) := Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$. Las flechas identidades en $\mathcal{C}^{op}$ son las mismas que en $\mathcal{C}$ y la composición de flechas en $\mathcal{C}^{op}$ esta definida igual que en $\mathcal{C}$ pero con los argumentos invertidos, es decir que $f \circ_{op} g := g \circ f$.

II. Dadas dos categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, se define la *categoría producto* $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, donde:

(a) $Obj(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) := Obj(\mathcal{A}) \times Obj(\mathcal{B})$,

(b) $Hom_{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}((A,B),(A',B')) := Hom_{\mathcal{A}}(A,A') \times Hom_{\mathcal{B}}(B,B')$,

(c) la flecha identidad de un objeto (A,B) en $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ esta dada por $1_{(A,B)} := (1_A, 1_B)$,

(d) la composición de flechas en $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ se define coordenada a coordenada, es decir $(f',g') \circ (f,g) := (f' \circ f, g' \circ g)$.

1.2 Funtores

Las categorías pueden ser consideradas en sí mismas como objetos matemáticos, lo cual nos permite considerar una noción de morfismos entre categorías.

Definición 1.2.1. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Un *funtor*[1] $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es una aplicación que:

- a cada objeto A en $\mathcal{C}$ le asocia un objeto $F(A)$ en $\mathcal{D}$,
- a cada flecha $f : A \longrightarrow B$ en $\mathcal{C}$ le asocia una flecha $F(f) : F(A) \longrightarrow F(B)$ en $\mathcal{D}$ tal que las siguientes condiciones se cumplen:
  - ◇ $F(1_A) = 1_{F(A)}$ para cada objeto A en $\mathcal{C}$.
  - ◇ $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ para todas las flechas $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ en $\mathcal{C}$.

  Es decir, los funtores preservan las flechas identidades y la composición de flechas.

Ejemplos 1.2.2.

1. Para cualquier categoría $\mathcal{C}$ hay un funtor $I_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, llamado el *funtor identidad*, el cual a cada objeto A en $\mathcal{C}$ le asocia el objeto A, y a cada flecha f en $\mathcal{C}$ le asocia f.

2. El *funtor olvidadizo* $U : \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Set}$ es el funtor que se define asociándole a cada grupo $(G,+)$ su conjunto subyacente, es decir $U((G,+)) := G$, y a cada homomorfismo de grupo $f : (G_1, +_1) \longrightarrow (G_2, +_2)$ su función subyacente, es decir $U(f) : G_1 \longrightarrow G_2$.

[1] También se le llama funtor covariante.

3. En general dada una categoría $\mathcal{C}$ que tenga como objetos a conjuntos con alguna estructura y como flechas a funciones que respectan esa estructura, como por ejemplo las categorías **Grp**, **Vect**, **Ring** o **Top**, se puede definir un *funtor olvidadizo* $U : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$, el cual le asocia a cada objeto su conjunto subyacente y a cada flecha su función subyacente.

4. Dados dos monoides $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$, un funtor $F : \mathbf{BM} \longrightarrow \mathbf{BM}$ es un homomorfismo de monoides entre $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$.

5. Dados dos conjuntos parcialmente ordenados $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$, un funtor $F : (\mathcal{P}, \leq) \longrightarrow (\mathcal{Q}, \leq)$ es una funcion monotona no decreciente.

Definición 1.2.3. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Un *funtor contravariante* F entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ es un funtor $F : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{D}$ (o equivalentemente, un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}^{op}$). Explícitamente un funtor contravariante $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es una aplicación que:

- a cada objeto A en $\mathcal{C}$ le asocia un objeto $F(A)$ en $\mathcal{D}$,
- a cada flecha $f : A \longrightarrow B$ en $\mathcal{C}$ le asocia una flecha $F(f) : F(B) \longrightarrow F(A)$ en $\mathcal{D}$ tal que las siguientes condiciones se cumplen:
  - ◇ $F(1_A) = 1_{F(A)}$ para cada objeto A en $\mathcal{C}$.
  - ◇ $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ para todas las flechas $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ en $\mathcal{C}$.

  Es decir, los funtores contravariantes revierten la dirección de la composición.

Ejemplo 1.2.4.

Para un cuerpo $\mathbb{K}$ tenemos la categoría $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ de todos los espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y las transformaciones lineales entre ellos. Se define un funtor contravariante

$$(-)^* := \mathbf{Hom}(-, \mathbb{K}) : \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{op} \longrightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$$

de la siguiente manera:

(a) a cada espacio vectorial V se le asocia su espacio vectorial dual V^*, es decir

$$\mathbf{Hom}(V, \mathbb{K}) = V^* := \{\text{funciones lineales } V \longrightarrow \mathbb{K}\},$$

(b) a cada transformación lineal $f : V \longrightarrow W$ se le asocia la transformación lineal f^* definida como

$$f^* : \mathbf{Hom}(W, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbf{Hom}(V, \mathbb{K})$$

$$q \longmapsto q \circ f.$$

Definición 1.2.5. Dadas las categorías $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ y los funtores $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$, se define el *funtor composición* como el funtor $GF : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que:

- si $A \in Obj(\mathcal{A})$, entonces $GF(A) := G(F(A))$,
- si $f \in Hom(\mathcal{A})$, entonces $GF(f) := G(F(f))$.

Nota 1.2.6. Existe una categoría llamada *la categoría de categorías* que tiene como objetos a todas las categorías pequeñas y como flechas a los funtores. Esta categoría se denota como **Cat**.

Definición 1.2.7. Dadas las categoría $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ se tiene que:

1. un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es *fiel* si para cada par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$, la función

$$Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow Hom_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$$

$$f \longmapsto F(f)$$

   es inyectiva;

2. un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es *pleno* si para cada par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$, la función

$$Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow Hom_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$$

$$f \longmapsto F(f)$$

   es sobreyectiva;

3. un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es *plenamente fiel* si es fiel y pleno;

4. Un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es *esencialmente sobreyectivo en objetos* si para todo objeto $B \in \mathcal{D}$, existe un objeto $A \in \mathcal{C}$ tal que $F(A) \cong B$.

Proposición 1.2.8. *Todo funtor preserva isomorfismos, es decir si $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es un funtor y $f : A \longrightarrow B$ es un isomorfismo en $\mathcal{C}$, entonces $F(f) : F(A) \longrightarrow F(B)$ es un isomorfismo en $\mathcal{D}$ y se tiene que $(F(f))^{-1} = F(f^{-1})$.*

Demostración.
Consideremos un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ y un isomorfismo $f : A \longrightarrow B$ en $\mathcal{C}$ con inversa $f^{-1} : B \longrightarrow A$. Aplicando los dos axiomas de functorialidad se tiene que:

$$F(f^{-1}) \circ F(f) = F(f^{-1} \circ f) = F(1_A) = 1_{F(A)}.$$

$$F(f) \circ F(f^{-1}) = F(f \circ f^{-1}) = F(1_B) = 1_{F(B)}.$$

Así $F(f) : F(A) \longrightarrow F(B)$ es un isomorfismo y $(F(f))^{-1} = F(f^{-1})$. $\square$

Definición 1.2.9. Un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es un *isomorfismo de categorías* si existe un funtor $G : \mathcal{D} \longrightarrow C$ tal que $GF = 1_{\mathcal{C}}$ y $FG = 1_{\mathcal{D}}$. Cuando existe un isomorfismo de categorías $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ se dice que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son isomorfas, y se escribe $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$.

Definición 1.2.10. Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ categorías. Un *bifuntor* es un funtor que tiene como dominio a una categoría producto, es decir un funtor de la forma $F : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$.

1.3 Transformaciones naturales

Ya hemos visto como se relacionan los objetos de una categoría a través de las flechas y como se relacionan las categorías a través de los funtores. Ahora estudiaremos una nocion de morfismos entre funtores que nos va a permitir comprender como se relacionan funtores que tienen el mismo dominio y el mismo codominio.

Definición 1.3.1. Sean dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ y dos funtores $\mathcal{C} \overset{F}{\underset{G}{\rightrightarrows}} \mathcal{D}$. Una *transformación natural* $\alpha : F \Longrightarrow G$ es una aplicación que a cada objeto A en $\mathcal{C}$ le asocia una flecha $\alpha_A : F(A) \longrightarrow G(A)$ en $\mathcal{D}$, tal que para cada flecha $f : A \longrightarrow B$ en $\mathcal{C}$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & F(B) \arrow[d, "\alpha_B"] \\ G(A) \arrow[r, "G(f)"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

Es decir,

$$\alpha_B \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_A.$$

Las flechas α_A son llamadas las *componentes de α* y se escribe $\alpha = (\alpha_A)_{A \in \mathcal{C}}$. También se usa la notación $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$ para denotar a una transformación natural α entre los funtores F y G.

Ejemplos 1.3.2.

1. Definimos un funtor $(-)^{**} : \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ de la siguiente manera:

   - a cada espacio vectorial V se le asocia su espacio vectorial doble dual V^{**}, es decir

   $$(-)^{**}(V) = V^{**} := \{\text{funciones lineales } V^* \longrightarrow \mathbb{K}\},$$

   - a cada transformación lineal $f : V \longrightarrow W$ se le asocia la transformación lineal f^{**} definida como

   $$f^{**} : V^{**} \longrightarrow W^{**}$$

   $$h \longmapsto h \circ f^*.$$

   Existe una transformación natural $\mathrm{j} : I_{\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}} \Longrightarrow (-)^{**}$ que tiene como componentes a las flechas $\mathrm{j}_V : V \longrightarrow V^{**}$ tales que $\mathrm{j}_V(v) = \mathrm{ev}_v$, donde $\mathrm{ev}_v : V^* \longrightarrow \mathbb{K}$ es una transformación lineal definida como $\mathrm{ev}_v(f) = f(v)$.

   Para comprobar que $\mathrm{j} = (\mathrm{j}_V)_{V \in \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}}$ es una transformación natural basta con verificar que para toda transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\mathrm{j}_V"'] & W \arrow[d, "\mathrm{j}_W"] \\ V^{**} \arrow[r, "T^{**}"'] & W^{**} \end{tikzcd}$$

Si $v \in V$ y $f \in W^*$, entonces, recorriendo el diagrama en sentido horario y evaluando ocurre que:

$$\mathrm{j}_W(T(v))(f) = \mathrm{ev}_{T(v)}(f) = f(T(v)). \tag{1.1}$$

Recorriendo el diagrama en el otro sentido y evaluando ocurre que:

$$T^{**}(\mathrm{j}_V(v))(f) = T^{**}(\mathrm{ev}_v)(f) = (\mathrm{ev}_v \circ T^*)(f) = \mathrm{ev}_v(f \circ T) = f(T(v)). \tag{1.2}$$

Las igualdades (1.1) y (1.2) para todo $v \in V$ nos comprueba que j es una transformación natural.

2. Se define el *funtor potencia* $\mathbf{P} : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$ de la siguiente manera:

   - a un conjunto X se le asocia su conjunto potencia[2], es decir

   $$\mathbf{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\},$$

   - a cada función $f : X \longrightarrow Y$ se le asocia la función $\hat{f}$ definida como

   $$\hat{f} : \mathbf{P}(X) \longrightarrow \mathbf{P}(Y)$$

   $$A \longmapsto f(A).^{3}$$

   Hay una transformación natural $\alpha : I_{\mathbf{Set}} \Longrightarrow \mathbf{P}$ que tiene como componentes a las flechas $\alpha_X : X \longrightarrow \mathbf{P}(X)$ tales que $\alpha_X(x) = \{x\}$.

   Para probar que $\alpha = (\alpha_X)_{X \in \mathbf{Set}}$ es una transformación natural se tiene que verificar que

[2]El conjunto potencia también se denomina conjunto de las partes.

[3]$f(A)$ es la imagen directa del conjunto A a través de f, definida como $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$.

para toda función $f : X \longrightarrow Y$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_X"'] & Y \arrow[d, "\alpha_Y"] \\ \mathbf{P}(X) \arrow[r, "\hat{f}"'] & \mathbf{P}(Y) \end{tikzcd}$$

En efecto si $x \in X$, entonces, recorriendo el diagrama en sentido horario ocurre que:

$$\alpha_Y(f(x)) = \{f(x)\}. \tag{1.3}$$

Recorriendo el diagrama en el otro sentido ocurre que:

$$\hat{f}(\alpha_X(x)) = \hat{f}(\{x\}) = f(\{x\}) = \{f(x)\}. \tag{1.4}$$

Las igualdades (1.3) y (1.4) para todo $x \in X$ nos comprueba que α es una transformación natural.

3. Para cada funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ se tiene la transformación natural identidad $id_F : F \Longrightarrow F$ la cual tiene como componentes a las fechas $(id_F)_A = 1_{F(A)}$.

4. En este ejemplo vamos a ver como el determinante de una matriz $n \times n$ puede ser usado para definir una transformación natural.

   Consideremos la categoría **CRing** que tiene a los anillos conmutativos con unidad como objetos y a los homomorfismos de anillos que respetan la unidad como flechas.

   Sea $M_n : \mathbf{CRing} \longrightarrow \mathbf{Mon}$ el funtor que a cada anillo conmutativo R le asocia el monoide formado por las matrices $n \times n$ con entradas en R y la multiplicación de matrices, y a un homomorfismo de anillos $f : R \longrightarrow S$ le asocia el homomorfismo de monoides $M_n(f) : M_n(R) \longrightarrow M_n(S)$ definido como $M_n(f)((a_{ij})) := (f(a_{ij}))$.

   Sea $U : \mathbf{CRing} \longrightarrow \mathbf{Mon}$ el funtor que a cada anillo conmutativo R le asocia el monoide formado por el conjunto de elementos del anillo y su multiplicación, y a un homomorfismo de anillos $f : R \longrightarrow S$ le asocia el homomorfismo de monoides $U(f) : U(R) \longrightarrow U(S)$ definido como $U(f)(r) := f(r)$ para todo $r \in U(R)$.

Entonces se puede definir una transformación natural

$$\begin{tikzcd} \mathbf{CRing} \arrow[r, bend left, "\mathsf{M_n}"] \arrow[r, bend right, "\mathsf{U}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \det"] & \mathbf{Mon} \end{tikzcd},$$

la cual tiene como fechas componentes a las funciones determinantes

$$\det_R : M_n(R) \longrightarrow U(R).$$

Como las transformaciones naturales son un cierto tipo de aplicaciones, es posible definir una composición entre transformaciones naturales.

Definición 1.3.3. Sean F, G, H funtores y α, β transformaciones naturales tales que:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=60, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{B} \end{tikzcd}.$$

La transformación natural

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta\circ\alpha"] & \mathcal{B} \end{tikzcd},$$

llamada la *composición de α y β*, se define como $(\beta \circ \alpha)_A := \beta_A \circ \alpha_A$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

Nota 1.3.4. Para todo par de categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, existe una categoría que es llamada la *categoría de funtores* que tiene como objetos a los funtores $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ y como flechas a las transformaciones naturales entre estos funtores. Esta categoría se denota como $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ o $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$.

Definición 1.3.5. Sean $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, $G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ funtores. Un *isomorfismo natural* entre los funtores F y G es una transformación natural $\alpha : F \Longrightarrow G$ que es un isomorfismo en la categoría $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$. Si existe un isomorfismo natural entre los funtores F y G se dice que son *naturalmente isomorfos* y se escribe $F \cong G$.

Lema 1.3.6. *Si $\alpha : F \longrightarrow G$ es una transformación natural, entonces α es un isomorfismo natural si y solo si sus flechas componentes $\alpha_A : F(A) \longrightarrow G(A)$ son isomorfismo para todo $A \in \mathcal{A}$.*

Definición 1.3.7. Dados los funtores $\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathcal{B}$, se dice que $F(A) \cong G(A)$ naturalmente en A si F y G son naturalmente isomorfos.

Definición 1.3.8. Una *equivalencia entre categorías* $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ consiste de un par de funtores $\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$ junto con isomorfismos naturales $\eta : I_{\mathcal{A}} \longrightarrow GF$, $\varepsilon : FG \longrightarrow I_{\mathcal{B}}$. A los funtores F y G se les llama *equivalencias*. Si existe una equivalencia entre las categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ se dice que son equivalentes y se escribe $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Proposición 1.3.9. *Un funtor es una equivalencia si y sólo si es fiel, pleno y esencialmente sobreyectivo en objetos.*

1.4 Funtores representables y funtores adjuntos

En la teoría de categorías es muy importantes el estudio de los funtores representables y los funtores adjuntos, ya que estos son dos tipos de funtores a través de los cuales podemos estudiar la noción de propiedad universal. En esta sección vamos a ver las definiciones, algunos ejemplos y propiedades de estos funtores.

Representables

Definición 1.4.1. Sea $\mathcal{A}$ una categoría localmente pequeña. Para cada $A \in \mathcal{A}$ se define un funtor,

$$H^A := Hom_{\mathcal{A}}(A, -) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

de la siguiente manera:

- para un objeto $B \in \mathcal{A}$ se tiene que $H^A(B) := Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$;
- para una fecha $B \xrightarrow{g} B'$ en $\mathcal{A}$ se tiene que

$$H^A(g) := Hom_{\mathcal{A}}(A, g) : Hom_{\mathcal{A}}(A, B) \longrightarrow Hom_{\mathcal{A}}(A, B')$$

$$p \longmapsto g \circ p$$

  para todo $p : A \longrightarrow B$.

Definición 1.4.2. Sea $\mathcal{A}$ una categoría localmente pequeña. Un funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Set}$ es *representable* si es naturalmente isomorfo a un funtor H^A, es decir $F \cong H^A$ para algún objeto $A \in \mathcal{A}$. Una *representación de F* es un par $(A,\ \phi : F \Longrightarrow H^A)$ tal que $A \in Obj(\mathcal{A})$ y $\phi : F \Longrightarrow H^A$ es un isomorfismo natural.

Observación 1.4.3. Todo funtor representable tiene como codominio a la categoría **Set**.

Ejemplos 1.4.4.

1. Consideremos al funtor $H^1 : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$, donde 1 es un conjunto con un solo elemento. Para cualquier conjunto A una función $f : 1 \longrightarrow A$ es equivalente a un elemento de A, por lo tanto se tiene que $H^1(A) \cong A$, y entonces podemos definir un isomorfismo natural $\phi : I_{\mathbf{Set}} \Longrightarrow H^1$. Así el funtor identidad $I_{\mathbf{Set}} : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$ es representable, y su representación es el par $(1,\ \phi : I_{\mathbf{Set}} \Longrightarrow H^1)$.

2. Consideremos al funtor $H^{\mathbb{Z}} : \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Set}$, donde $\mathbb{Z}$ es el grupo de los números enteros. Si $U : \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Set}$ es el funtor olvidadizo se tiene que para cualquier grupo G hay un isomorfismo $H^{\mathbb{Z}}(G) \cong U(G)$, por lo tanto podemos definir un isomorfismo natural $\alpha : U \Longrightarrow H^{\mathbb{Z}}$. Así se tiene que el funtor olvidadizo $U : \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Set}$ es representable, y su representación es el par $(\mathbb{Z},\ \alpha : U \Longrightarrow H^{\mathbb{Z}})$.

Definición 1.4.5. Dada una flecha $A' \xrightarrow{f} A$ en $\mathcal{A}$ se define la transformación natural

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "H^A"] \arrow[r, bend right, "H^{A'}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow H^f"] & \mathbf{Set} \end{tikzcd},$$

que tiene como componentes a las funciones

$$(H^f)_B : H^A(B) \longrightarrow H^{A'}(B)$$

$$p \longmapsto p \circ f.$$

Definición 1.4.6. Sea $\mathcal{A}$ una categoría localmente pequeña. El funtor

$$H^{\bullet} : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow [\mathcal{A}, \mathbf{Set}]$$

esta definido como $H^{\bullet}(A) := H^A$ para cada objeto $A \in \mathcal{A}^{op}$ y $H^{\bullet}(f) := H^f$ para cada flecha f en $\mathcal{A}^{op}$.

Todas las definiciones presentadas hasta ahora en esta sección pueden ser dualizadas. Primero veamos la dualización de la definición 1.4.1

Definición 1.4.7. Sea $\mathcal{A}$ una categoría localmente pequeña. Para cada $A \in \mathcal{A}$ se define un funtor,

$$H_A := Hom_{\mathcal{A}}(-, A) : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

de la siguiente manera:

- para un objeto $B \in \mathcal{A}$, se tiene que $H_A(B) := Hom_{\mathcal{A}}(B, A)$;
- para una fecha $B' \xrightarrow{g} B$ en $\mathcal{A}$, se tiene que

$$H_A(g) := Hom_{\mathcal{A}}(g, A) : Hom_{\mathcal{A}}(B, A) \longrightarrow Hom_{\mathcal{A}}(B', A)$$

$$p \longmapsto p \circ g$$

para todo $p : B \longrightarrow A$.

Ahora veamos la definición de representabilidad para funtores contravariantes.

Definición 1.4.8. Sea $\mathcal{A}$ una categoría localmente pequeña. Un funtor $F : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$ es *representable* si es naturalmente isomorfo a un funtor H_A, es decir $F \cong H_A$ para algún objeto $A \in \mathcal{A}$. Una representación de F es un par (A, ϕ) tal que $A \in Obj(\mathcal{A})$ y $\phi : F \Longrightarrow H_A$ es un isomorfismo natural.

Ejemplo 1.4.9. El funtor potencia contravariante $\mathbf{P} : \mathbf{Set}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$ esta definido de la siguiente manera:

- a un conjunto X se le asocia su conjunto potencia, es decir

$$\mathbf{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\},$$

- a cada función $f : X \longrightarrow Y$ se le asocia la función $\hat{f}$ definida como

$$\hat{f} : \mathbf{P}(Y) \longrightarrow \mathbf{P}(X)$$

$$B \longmapsto f^{-1}(B).$$ [4]

[4] $f(B)$ es la imagen inversa del conjunto B a través de f, definida como $f^{-1}(B) = \{a \in X \mid f(a) \in B\}$.

Como todo subconjunto A se puede identificar con su función característica $X \xrightarrow{\chi_A} 2$, donde $2 = \{0, 1\}$, se tiene que $\mathbf{P}(X) \cong H_2(X)$, por lo tanto podemos definir un isomorfismo natural $\phi : P \Longrightarrow H_2$. Entonces se tiene que el funtor P es representable, y su representación es el par $(2,\ \phi : P \Longrightarrow H_2)$.

Ya hemos visto como usar a los funtores representables covariantes H^A para definir un nuevo funtor $H^\bullet$, ahora vamos a ver como usar a los funtores representables contravariantes H_A para definir un nuevo funtor $H_\bullet$.

Definición 1.4.10. Dada una flecha $A \xrightarrow{f} A'$ en $\mathcal{A}$ se define la transformación natural

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^{op} \arrow[r, bend left, "H^A"{name=U}] \arrow[r, bend right, "H^{A'}"'{name=D}] & \mathbf{Set} \arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow H_f"] \end{tikzcd},$$

que tiene como componentes a las funciones

$$(H_f)_B : H_A(B) \longrightarrow H_{A'}(B)$$
$$p \longmapsto f \circ p.$$

Definición 1.4.11. Sea $\mathcal{A}$ una categoría localmente pequeña. El *embebimiento de Yoneda* de la categoría $\mathcal{A}$ es el funtor

$$H_\bullet : \mathcal{A} \longrightarrow [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$$

que esta definido como $H_\bullet(A) := H_A$ para cada objeto $A \in \mathcal{A}^{op}$ y $H_\bullet(f) := H_f$ para cada flecha f en $\mathcal{A}^{op}$.

Teorema 1.4.12 (Yoneda). [5] *Sea $\mathcal{A}$ una categoría localmente pequeña. Entonces*

$$Hom_{[\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]}(H_A, X) \cong X(A)$$

naturalmente en $A \in \mathcal{A}$ y $X \in [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$.

Corolario 1.4.13. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría localmente pequeña y $F : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$ un funtor. Entonces una representación de F consiste de un objeto $A \in \mathcal{A}$ junto con un elemento $u \in F(A)$ tal que:*

para cada objeto $B \in \mathcal{A}$ y $x \in F(B)$, hay una única flecha $\overline{x} : B \longrightarrow A$ tal que $F(\overline{x})(u) = x$.

[5] Este teorema es conocido como el lema de Yoneda.

Adjuntos

Definición 1.4.14. Una *adjunción* consiste de un par de funtores $\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$ junto con un isomorfismo natural

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{B} \arrow[rr, bend left, "Hom_{\mathcal{A}}(-,G(-))"] \arrow[rr, bend right, "Hom_{\mathcal{B}}(F(-),-)"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\tau"] & & \mathbf{Set} \end{tikzcd},$$

es decir que

$$Hom_{\mathcal{B}}(F(A), B) \cong Hom_{\mathcal{A}}(A, G(B)) \tag{1.5}$$

naturalmente para cada $A \in \mathcal{A}$ y para cada $B \in \mathcal{B}$. Al par F, G se le llama un par de funtores adjuntos, se dice que F es *adjunto izquierdo* de G y que G es *adjunto derecho* de F, y se escribe $F \dashv G$.

Dados los objetos $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$, a la flecha $A \xrightarrow{\overline{f}} G(B)$ que se corresponde con la flecha $F(A) \xrightarrow{f} B$ a través del isomorfismo (1.5) se le llamada la transpuesta de f y a la flecha f se le llama la transpuesta de $\overline{f}$.

Ejemplos 1.4.15.

1. Si $F : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ es el funtor libre que a cada conjunto X le asigna el espacio vectorial generado por X, y si $U : \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ es el funtor olvidadizo, entonces F, U son un par de funtores adjuntos, y se escriben como

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Set} \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \arrow[l, shift left, "U"] \end{tikzcd}$$

para denotar que F es adjunto izquierdo de U y que U es adjunto derecho de F.

2. Dados dos conjuntos A y B podemos formar su producto cartesiano $A \times B$ y también podemos formar el conjunto B^A de todos las funciones desde A a B. Para un conjunto B fijo se definen los siguientes funtores,

   (a) el funtor

$$(- \times B) : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

   definido en objetos como

$$A \longmapsto A \times B,$$

y definido en flechas como

$$(f : A_1 \longrightarrow A_2) \longmapsto (f \times 1_B : A_1 \times B \longrightarrow A_2 \times B)$$

$$(a, b) \longmapsto (f(a), b),$$

(b) el funtor

$$(-)^B : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

definido en objetos como

$$C \longmapsto C^B,$$

y definido en flechas como

$$(g : C_1 \longrightarrow C_2) \longmapsto (g^B : C_1^B \longrightarrow C_2^B)$$

$$f \longmapsto g \circ f.$$

Hay una biyección

$$Hom_{\mathbf{Set}}(A \times B, C) \cong Hom_{\mathbf{Set}}(A, C^B)$$

para cualquier conjunto A y C. Por lo tanto $(-\times B)$, $(-)^B$ son un par de funtores adjuntos,

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Set} \arrow[r, shift left, "(-)^B"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Set} \arrow[l, shift left, "(-\times B)"] \end{tikzcd}$$

tal que $(-)^B$ es adjunto izquierdo de $(- \times B)$ y $(- \times B)$ es adjunto derecho de $(-)^B$.

Observación 1.4.16. Dados dos pares de funtores adjuntos

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{A}' \arrow[l, shift left, "G"] \arrow[r, shift left, "F'"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{A}'' \arrow[l, shift left, "G'"] \end{tikzcd},$$

podemos componerlos y obtener un nuevo par de funtores adjuntos

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, shift left, "F'\circ F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{A}'' \arrow[l, shift left, "G\circ G'"] \end{tikzcd}.$$

Cada par de funtores adjuntos define una unidad y una counidad.

Definición 1.4.17. Dada una adjunción

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{B} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd},$$

hay una transformación natural $\eta : I_{\mathcal{A}} \Longrightarrow G \circ F$, llamada la *unidad* de la adjunción, que tiene como componentes a la flechas $\eta_A : A \longrightarrow G(F(A))$ que son las transpuestas de las flechas identidades $1_{F(A)}$ para cada $A \in \mathcal{A}$. Y también hay una transformación natural $\epsilon : F \circ G \Longrightarrow I_{\mathcal{B}}$, llamada la *counidad* de la adjunción, que tiene como componentes a las fechas $\epsilon_B : F(G(B)) \longrightarrow B$ que son las transpuestas de las flechas identidades $1_{G(B)}$ para cada $B \in \mathcal{B}$.

Definición 1.4.18. Dadas las categorías y los funtores

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[d, "Q"] \\ \mathcal{A} \arrow[r, "P"'] & \mathcal{C}, \end{tikzcd}$$

la *categoría coma* $(P \Longrightarrow Q)$ (también se escribe como $(P \downarrow Q)$) es la categoría definida de la siguiente manera:

- los objetos son ternas (A, h, B) con $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ y $h : P(A) \longrightarrow Q(B)$ en $\mathcal{C}$;
- las flechas $(A, h, B) \longrightarrow (A', h', B')$ son pares $(f : A \longrightarrow A', g : B \longrightarrow B')$ de flechas tales que el cuadro

$$\begin{tikzcd} P(A) \arrow[r, "P(f)"] \arrow[d, "h"'] & P(A') \arrow[d, "h'"] \\ Q(B) \arrow[r, "Q(g)"'] & Q(B') \end{tikzcd}$$

conmuta.

Ejemplo 1.4.19. Sea $\mathcal{A}$ una categoría y $A \in \mathcal{A}$. La *categoría slice* de $\mathcal{A}$ sobre A, denotada como $\mathcal{A}/A$, es la categoría cuyos objetos son pares (X, h) con $X \in \mathcal{A}$ y $h : X \longrightarrow A$ en $\mathcal{A}$, y cuyas flechas $(X, h) \longrightarrow (X', h')$ son flechas $f : X \longrightarrow X'$ en $\mathcal{A}$ que hacen que el triángulo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & X' \arrow[dl, "h'"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

conmute.

Las categorías slice son un caso especial de las categorías coma. Dada la categoría $\mathbf{1}$ que solo tiene un objeto y la flecha identidad y dado un objeto $A \in \mathcal{A}$, consideremos la categoría coma $(I_{\mathcal{A}} \Longrightarrow A)$, como en el diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{1} \arrow[d, "A"] \\ \mathcal{A} \arrow[r, "I_{\mathcal{A}}"'] & \mathcal{A}. \end{tikzcd}$$

Un objeto de $(I_{\mathcal{A}} \Longrightarrow A)$ es una terna (X, h, B) con $X \in \mathcal{A}$, $B \in \mathbf{1}$, y $h : X \longrightarrow A$ en $\mathcal{A}$, pero como la categoría $\mathbf{1}$ solo tiene un objeto B, entonces las ternas son solo pares (X, h). Así la categoría coma $(I_{\mathcal{A}} \Longrightarrow A)$ tiene los mismos objetos que la categoría slice $\mathcal{A}/A$ y también tiene las mismas flechas, por lo tanto se tiene que $\mathcal{A}/A \cong (I_{\mathcal{A}} \Longrightarrow A)$.
Dualmente (invirtiendo todas las flechas), se tiene una categoría llamada la *categoría coslice* $A/\mathcal{A} \cong (A \Longrightarrow I_{\mathcal{A}})$.

Ejemplo 1.4.20. Sea $G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ un funtor y sea $A \in \mathcal{A}$ un objeto. Podemos formar la categoría coma $(A \Longrightarrow G)$, como en el diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[d, "G"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, "A"'] & \mathcal{A}. \end{tikzcd}$$

Sus objetos son pares $(B \in \mathcal{B}, f : A \longrightarrow G(B))$. Una flecha $(B, f) \longrightarrow (B', f')$ en $(A \Longrightarrow G)$

es un flecha $q : B \longrightarrow B'$ en $\mathcal{B}$ que hacen que el triángulo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & G(B) \arrow[d, "G(q)"] \\ & G(B') \end{tikzcd}$$

conmute.

Se dice que $f : A \longrightarrow G(B)$ es un objeto de $(A \Longrightarrow G)$, cuando se tiene que el par (B, f) es un objeto de $(A \Longrightarrow G)$.

Ahora veamos la conexión entre categorías coma y adjunciones.

Lema 1.4.21. *Dada una adjunción* $\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{B} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$ *y un objeto* $A \in \mathcal{A}$. *Entonces la flecha unidad* $\eta_A : A \longrightarrow G(F(A))$ *es un objeto inicial de la categoría* $(A \Longrightarrow G)$.

Teorema 1.4.22. *Dadas las categorías y funtores* $\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathcal{B} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$. *Hay una correspondencia uno-a-uno entre:*

(a) adjunciones entre F *y* G *(con* F *a la izquierda y* G *a la derecha);*

(b) transformaciones naturales $\eta : I_{\mathcal{A}} \Longrightarrow G \circ F$ *tal que* $\eta_A : A \longrightarrow G(F(A))$ *es un objeto inicial de la categoría* $(A \Longrightarrow G)$ *para cada* $A \in \mathcal{A}$.

Corolario 1.4.23. *Sea* $G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ *un funtor. Entonces* G *tiene un adjunto izquierdo si y solo si para cada* $A \in \mathcal{A}$, *la categoría* $(A \Longrightarrow G)$ *tiene un objeto inicial.*

Las adjunciones dan lugar a funtores representables de la siguiente manera.

Lema 1.4.24. *Sea* $\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{B} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$ *una adjunción con categorías localmente pequeñas, y sea* $A \in \mathcal{A}$. *Entonces el funtor*

$$Hom_{\mathcal{A}}(A, G(-)) : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

(es decir, la composición $\mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{A} \xrightarrow{H^A} \mathbf{Set}$*) es representable.*

1.5 Límites y colímites

En teoría de categorías el concepto de límite unifica muchas construcciones familiares en matemáticas y captura las propiedades esenciales de las construcciones universales tales como productos y límites inversos.

La noción dual de colímite generaliza construcciones tales como uniones disjuntas, sumas directas, coproductos, pushouts y límites directos.

Cada vez que encuentre un método para tomar algunos objetos y flechas en una categoría y construir un nuevo objeto a partir de ellos, existe una buena posibilidad de que esté viendo un límite o un colímite. Por ejemplo, en la teoría de grupos, podemos tomar un homomorfismo entre dos grupos y formar su núcleo, que es un nuevo grupo. Esta construcción es un ejemplo de un límite en la categoría de grupos. O bien, podríamos tomar dos números naturales y formar su mínimo común múltiplo. Este es un ejemplo de un colímite en el poset de números naturales, ordenado por divisibilidad.

Los límites y colímites, como las nociones fuertemente relacionadas con propiedades universales y funtores adjuntos, existen a un gran nivel de abstracción. De manera que, para entenderlos, es útil estudiar primero los ejemplos específicos de esos conceptos que serán luego objeto de generalización.

Productos

Definición 1.5.1. Sea $\mathcal{A}$ una categoría y X, Y objetos en $\mathcal{A}$. Un *producto* de X y Y consiste de un objeto $P \in \mathcal{A}$ junto con las flechas $p_1 : P \longrightarrow X$ y $p_2 : P \longrightarrow Y$, con la propiedad que para cualquier objeto $Z \in \mathcal{A}$ y flechas $f_1 : Z \longrightarrow X$ y $f_2 : Z \longrightarrow Y$, existe una única flecha $f : Z \longrightarrow P$ tal que $p_1 \circ f = f_1$ y $p_2 \circ f = f_2$. Es decir que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[ddl, "f_1"'] \arrow[d, dotted, "f"] \arrow[ddr, "f_2"] & \\
 & P \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

conmuta. Las flechas p_1 y p_2 son llamadas *las proyecciones*.

Ejemplos 1.5.2.

1. En la categoría **Set** el producto de dos objetos es el producto cartesiano.

2. En la categoría **Grp** el producto de dos objetos es el producto directo de grupos.

3. En la categoría **Top** el producto de dos objetos es el producto cartesiano de espacios topológicos con la topología producto.

El producto que hemos definido entre dos objetos es llamado producto binario. También se puede definir un producto entre más de dos objetos de la siguiente manera:

Definición 1.5.3. Sea $\mathcal{A}$ una categoría, I un conjunto, y $(X_i)_{i\in I}$ una familia de objetos de $\mathcal{A}$. Un *producto* de $(X_i)_{i\in I}$ consiste de un objeto $P \in \mathcal{A}$ y una familia de flechas $(P \xrightarrow{p_i} X_i)_{i\in I}$ con la propiedad que para todo objeto $A \in \mathcal{A}$ y una familia de flechas $(A \xrightarrow{f_i} X_i)_{i\in I}$ existe una única flecha $f : A \longrightarrow P$ tal que $p_i \circ f = f_i$ para todo $i \in I$. Al objeto P lo denotamos como $\prod_{i\in I} X_i$.

Ecualizadores

Un *tenedor* en una categoría consiste de objetos y flechas

$$A \xrightarrow{f} X \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} Y$$

tales que $g \circ f = h \circ f$.

Definición 1.5.4. Sea $\mathcal{A}$ una categoría y sean $X \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} Y$ objetos y flechas en $\mathcal{A}$. Un *ecualizador* de las flechas g y h es un objeto $E \in \mathcal{A}$ junto con una flecha $i : E \longrightarrow X$ tal que

$$E \xrightarrow{i} X \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} Y$$

es un tenedor, con la propiedad que para cualquier tenedor

$$A \xrightarrow{f} X \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} Y\ ,$$

existe una única flecha $u : A \longrightarrow E$ tal que $f = i \circ u$. Es decir que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, dotted, "u"'] \arrow[dr, "f"] & & \\ E \arrow[r, "i"'] & X \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

conmuta.

Ejemplos 1.5.5.

1. En la categoría **Set** el ecualizador de $X \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} Y$ es $E = \{x \in X : g(x) = h(x)\}$ con la flecha inclusión $i : E \longrightarrow X$.

2. En la categoría **Grp** el ecualizador de un homomorfismo de grupos $\theta : G \longrightarrow H$, y el homomorfismo de grupos trivial $\varepsilon : G \longrightarrow H$ que envia a todos los elementos de G al elemento neutro de H, es el $\ker(\theta)$ con la flecha inclusión $\jmath : \ker(\theta) \hookrightarrow G$.

$$\ker(\theta) \overset{\jmath}{\hookrightarrow} G \underset{\varepsilon}{\overset{\theta}{\rightrightarrows}} H$$

   Por lo tanto, los kerneles son un caso especial de ecualizadores.

3. Sean $V \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} W$ dos transformaciones lineales entre espacios vectoriales. Hay una transformación lineal $g - h : V \longrightarrow W$, y el ecualizador de g y h en la categoría **Vect** es el subespacio $E = \{v \in V : g(v) = h(v)\} = \ker(g - h) \subset V$ junto con la flecha inclusión $\iota : \ker(g - h) \hookrightarrow V$.

Pullbacks

Definición 1.5.6. Sea $\mathcal{A}$ una categoría, X, Y y Z objetos de $\mathcal{A}$ y $g : Y \longrightarrow Z$, $h : X \longrightarrow Z$ flechas en $\mathcal{A}$. Un *pullback* de las flechas g y h consiste de un objeto $P \in \mathcal{A}$ junto con dos flechas $p_1 : P \longrightarrow X$ y $p_2 : P \longrightarrow Y$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "h"'] & Z \end{tikzcd}$$

llamado cuadro pullback conmuta, y tiene la propiedad que para cualquier cuadro conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "h"'] & Z \end{tikzcd}$$

en $\mathcal{A}$ existe una única flecha $f : A \longrightarrow P$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, dotted, "f"] \arrow[drr, bend left, "f_2"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & & \\ & P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & X \arrow[r, "h"'] & Z \end{tikzcd}$$

conmuta. Es decir que $p_1 \circ f = f_1$ y $p_2 \circ f = f_2$.

Otro nombre para pullback es producto de fibra. Este nombre se explica parcialmente por el siguiente hecho: cuando Z es un objeto terminal (por lo tanto h y g son las únicas flechas que existen entre X y Z y entre Y y Z), un pullback es simplemente un producto de X y Y.

Ejemplo 1.5.7. En la categoría **Set** el pullback de las funciones $g : Y \longrightarrow Z$, $h : X \longrightarrow Z$ es el subconjunto del producto cartesiano $X \times Y$ dado por

$$P = \{(x, y) \in X \times Y : h(x) = g(y)\}$$

con las proyecciones p_1 y p_2 dadas por $p_1(x, y) = x$ y $p_2(x, y) = y$.

Veamos dos ejemplos particulares de pullback en la categoría **Set**.

(a) Sean X, Y y $\overline{Y}$ conjuntos, tal que $\overline{Y} \subset Y$. Entonces el pullback de las funciones $f : X \longrightarrow Y$, $j : \overline{Y} \hookrightarrow Y$ es el subconjunto

$$f^{-1}(\overline{Y}) = \{x \in X : f(x) \in \overline{Y}\} \subset X$$

con las proyecciones $i : f^{-1}(\overline{Y}) \hookrightarrow X$ y $\overline{f} : f^{-1}(\overline{Y}) \longrightarrow \overline{Y}$ dadas por $i(x) = x$ y $\overline{f}(x) = f(x)$.

Así tenemos el siguiente cuadro pullback

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(\overline{Y}) \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, hook, "i"'] & \overline{Y} \arrow[d, hook, "j"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

(b) La intersección de subconjuntos nos permite dar otro ejemplo de pullback en la categoría **Set**. Sean X y Y subconjuntos de un conjunto Z. Entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \cap Y \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & Y \arrow[d, hook] \\
X \arrow[r, hook] & Z
\end{tikzcd}$$

es un cuadro pullback, donde todas las flechas son inclusiones de subconjuntos.

Observación 1.5.8. Los productos, los ecualizadores y los pullbacks en una categoría no siempre existen. Pero cuando existen son únicos salvo isomorfismo.

La definición de límite y ejemplos

Definición 1.5.9. Sea $\mathcal{A}$ una categoría y $\mathbf{I}$ una categoría pequeña. Un *diagrama* de forma $\mathbf{I}$ en $\mathcal{A}$ es un funtor $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathcal{A}$. A la categoría $\mathbf{I}$ se le llama la categoría de índices del diagrama.

Definición 1.5.10. Sea $\mathcal{A}$ una categoría y $\mathbf{I}$ una categoría pequeña, $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathcal{A}$ un diagrama en $\mathcal{A}$. Un *cono* del diagrama D es un par $(A, (f_X)_{X\in\mathbf{I}})$ formado por un objeto $A \in \mathcal{A}$ (el vértice del cono) y una familia $(A \xrightarrow{f_X} D(X))_{X\in\mathbf{I}}$ de flechas en $\mathcal{A}$ tal que para toda flecha $X \xrightarrow{u} Y$ en $\mathbf{I}$, el triángulo

$$\begin{tikzcd}
& D(X) \arrow[dd, "D(u)"] \\
A \arrow[ur, "f_X"] \arrow[dr, "f_Y"'] & \\
& D(Y)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Sea $(A, (f_X)_{X\in\mathbf{I}})$ y $(A', (g_X)_{X\in\mathbf{I}})$ dos conos del diagrama D. Una flecha de conos

$$h : (A, (f_X)_{X\in\mathbf{I}}) \longrightarrow (A', (g_X)_{X\in\mathbf{I}})$$

es una flecha $h : A \longrightarrow A'$ tal que el siguiente diagrama conmuta para todo $X \in I$:

$$\begin{tikzcd}
& D(X) \\
A \arrow[ur, "f_X"] \arrow[r, "h"'] & A' \arrow[u, "g_X"']
\end{tikzcd}$$

De esta forma se tiene que los conos de un diagrama D conforman una categoría.

Definición 1.5.11. Sea $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathcal{A}$ un diagrama en $\mathcal{A}$. Un *límite* de el diagrama D es un objeto terminal en la categoría de conos del diagrama D. Explícitamente, un límite del diagrama D es un cono $(L, (p_X)_{X\in\mathbf{I}})$ con la propiedad que para cualquier otro cono $(A, (f_X)_{X\in\mathbf{I}})$ del diagrama D existe una única flecha $f : A \longrightarrow L$ tal que $P_X \circ f = f_X$ para todo $X \in \mathbf{I}$, es decir que para toda flecha $X \xrightarrow{u} Y$ en $\mathbf{I}$ el siguiente diagrama conmutar:

$$\begin{tikzcd}
 & & D(X) \arrow[dd, "D(u)"] \\
A \arrow[urr, "f_X"] \arrow[r, dotted, "f"] \arrow[drr, "f_Y"'] & L \arrow[ur, "p_X"] \arrow[dr, "p_Y"'] & \\
 & & D(Y)
\end{tikzcd}$$

Las flechas p_X son llamadas las *proyecciones del límite*.

Observación 1.5.12. El límite de un diagrama no siempre existe, pero por la unicidad de los objetos terminales en una categoría se tiene que el límite de un diagrama, cuando existe, es único salvo isomorfismo. Si el cono $(L, (p_X)_{X\in\mathbf{I}})$ es el límite de un diagrama D podemos llamarlo cono límite y referirnos al límite de D simplemente como el vértice L y escribirlo como $L = \varprojlim_{\mathbf{I}} D$.

Ejemplos 1.5.13.

1. Veamos que los productos, ecualizadores y pullbacks en una categoría $\mathcal{A}$ son los límites de algún diagrama en esa categoría.

   (a) Sea $\mathbf{T}$ la categoría discreta de dos objetos. Un diagrama $D : \mathbf{T} \longrightarrow \mathcal{A}$ consiste de un par de objetos $X, Y \in \mathcal{A}$. Un cono del diagrama D es un objeto $A \in \mathcal{A}$ junto con dos flechas $f_1 : A \longrightarrow X$ y $f_2 : A \longrightarrow Y$ y se tiene que el límite de D es el producto de X y Y.

   Más generalmente, sea I un conjunto y consideremos una categoría discreta $\mathbf{I}$ formada por los elementos de I y las flechas identidades. Un diagrama $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathcal{A}$ es una familia indexada $(X_i)_{i\in I}$ de objetos de $\mathcal{A}$, y el límite de D es el producto de la familia $(X_i)_{i\in I}$.

   En particular, el límite del único diagrama $D : \emptyset \longrightarrow \mathcal{A}$ es el objeto terminal de $\mathcal{A}$, donde $\emptyset$ denota la categoría vacía que no tiene objetos ni flechas.

(b) Consideremos una categoría $\mathbf{E}$ que consta de dos objetos $\{\bullet, \star\}$ y dos flechas $\bullet \rightrightarrows \star$, además de las identidades. Un diagrama $D : \mathbf{E} \longrightarrow \mathcal{A}$ consiste de un par de flechas $X \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} Y$ en la categoría $\mathcal{A}$. Un cono del diagrama D consta de un objeto $A \in \mathcal{A}$ junto con dos flechas $f : A \longrightarrow X$ y $g : A \longrightarrow Y$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[rr, shift left, "s"] \arrow[rr, shift right, "t"'] & & Y \end{tikzcd}$$

tal que $s \circ f = g$ y $t \circ f = g$. Pero como g está determinado por f, es equivalente a decir que un cono en D consiste en un objeto $A \in \mathcal{A}$ y una flecha $f : A \longrightarrow X$ tal que

$$A \xrightarrow{f} X \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} Y$$

es un tenedor. Un límite de D es un tenedor de s y t, es decir, un ecualizador de s y t.

(c) Consideremos una categoría $\mathbf{P}$ formado por tres objetos $\{\star, \bullet, \diamond\}$ y dos flechas $\star \longrightarrow \diamond \longleftarrow \bullet$, además de las identidades. Un diagrama $D : \mathbf{P} \longrightarrow \mathcal{A}$ consiste de objetos X, Y y Z en $\mathcal{A}$ y flechas f, g en $\mathcal{A}$ de la forma

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

Un cono del diagrama D consiste de un objeto $A \in \mathcal{A}$ y un par de flechas $f_1 : A \longrightarrow X$ y $f_2 : A \longrightarrow Y$ tal que el cuadro

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

es conmutativo. El límite de D es un pullback.

2. Consideremos la categoría $\mathbf{I} = (\mathbb{N}, \leq)^{op}$. Un diagrama $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathcal{A}$ consiste de objetos y flechas en $\mathcal{A}$ de la forma

$$\cdots \xrightarrow{s_3} X_2 \xrightarrow{s_2} X_1 \xrightarrow{s_1} X_0.$$

Por ejemplo, supongamos que tenemos un conjunto X_0 y una cadena de subconjuntos

$$\cdots \subseteq X_2 \subseteq X_1 \subseteq X_0.$$

Las funciones inclusión forman un diagrama en la categoría **Set** de este tipo, y su límite es $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} X_i$. Los límites de este tipo de diagramas son llamados *límites inversos*.

Definición 1.5.14.

(a) Sea $\mathbf{I}$ una categoría pequeña. Una categoría $\mathcal{A}$ tiene límites de forma $\mathbf{I}$ si para cada diagrama D de forma $\mathbf{I}$ en $\mathcal{A}$ existe el límite de D. En este caso se dice que la categoría $\mathcal{A}$ es $\mathbf{I}$-completa

(b) Una categoría $\mathcal{A}$ tiene todos los límites si tiene límites de forma $\mathbf{I}$ para todas las categorías pequeñas $\mathbf{I}$. En este caso dice que la categoría $\mathcal{A}$ es completa.

Una categoría tiene productos si tiene límites de forma $\mathbf{T}$, tiene ecualizadores si tiene límites de forma $\mathbf{E}$ y tiene pullback si tiene límites de forma $\mathbf{P}$.

Por definición, una categoría es finita si contiene solo un número finito de flechas (en cuyo caso también contiene solo un número finitos de objetos). Un límite finito es un límite de forma $\mathbf{I}$ para alguna categoría finita $\mathbf{I}$. Por ejemplo, productos binarios, objetos terminales, ecualizadores y pullback son todos límites finitos.

Proposición 1.5.15. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría.*

1. *Si $\mathcal{A}$ tiene todos los productos y ecualizadores, entonces $\mathcal{A}$ tiene todos los límites.*

2. *Si $\mathcal{A}$ tiene productos binarios, un objeto terminal y ecualizadores, entonces $\mathcal{A}$ tiene límites finitos.*

La definición de colímite y ejemplos

Ahora veamos el concepto dual de límite.

Definición 1.5.16. Sea $\mathcal{A}$ una categoría y $\mathbf{I}$ una categoría pequeña, $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathcal{A}$ un diagrama en $\mathcal{A}$. Un *cocono* del diagrama D es un par $(A, (f_X)_{X\in\mathbf{I}})$ formado por un objeto $A \in \mathcal{A}$ (el vértice del cocono) y una familia $(D(X) \xrightarrow{f_X} A)_{X\in\mathbf{I}}$ de flechas en $\mathcal{A}$ tal que para toda flecha $X \xrightarrow{u} Y$ en $\mathbf{I}$, el triángulo

$$\begin{tikzcd} D(X) \arrow[d, "D(u)"] \arrow[dr, "f_X"] & \\ D(Y) \arrow[r, "f_Y"'] & A \end{tikzcd}$$

conmuta.

Sea $(A, (f_X)_{X\in\mathbf{I}})$ y $(A', (g_X)_{X\in\mathbf{I}})$ dos coconos del diagrama D. Una flecha de coconos

$$h : (A, (f_X)_{X\in\mathbf{I}}) \longrightarrow (A', (g_X)_{X\in\mathbf{I}})$$

es una flecha $h : A \longrightarrow A'$ tal que el siguiente diagrama conmuta para todo $X \in I$:

$$\begin{tikzcd} D(X) \arrow[d, "f_X"] \arrow[dr, "g_X"] & \\ A \arrow[r, "h"'] & A' \end{tikzcd}$$

De esta forma se tiene que los coconos de un diagrama D conforman una categoría.

Definición 1.5.17. Sea $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathcal{A}$ un diagrama en $\mathcal{A}$. Un *colímite* de el diagrama D es un objeto inicial en la categoría de coconos del diagrama D. Explícitamente, un colímite del diagrama D es un cocono $(C, (p_X)_{X\in\mathbf{I}})$ con la propiedad que para cualquier otro cocono $(A, (f_X)_{X\in\mathbf{I}})$ del diagrama D existe una única flecha $f : C \longrightarrow A$ tal que $f \circ P_X = f_X$ para todo $X \in \mathbf{I}$, es decir que para toda flecha $X \xrightarrow{u} Y$ en $\mathbf{I}$ el siguiente diagrama conmutar:

$$\begin{tikzcd}
D(X) \arrow[dd, "D(u)"'] \arrow[dr, "p_X"] \arrow[drr, "f_X"] & & \\
& C \arrow[r, dotted, "f"] & A \\
D(Y) \arrow[ur, "p_Y"'] \arrow[urr, "f_Y"'] & &
\end{tikzcd}$$

Las flechas p_X son llamadas las coproyecciones del colímite.

Observación 1.5.18.

1. Sea $\mathcal{A}$ una categoría y $\mathbf{I}$ una categoría pequeña. Si $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathcal{A}$ es un diagrama, entonces un cocono de D es un cono del diagrama $D^{op} : \mathbf{I}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}^{op}$. Por lo tanto el colímite de D es el límite del diagrama D^{op}.

2. El colímite de un diagrama no siempre existe, pero por la unicidad de los objetos iniciales en una categoría se tiene que el colímite de un diagrama, cuando existe, es único salvo isomorfismo. Si el cocono $(C, (p_X)_{X\in\mathbf{I}})$ es el colímite de un diagrama D podemos llamarlo cocono límite y referirnos al colímite de D simplemente como el vértice C y escribirlo como $C = \lim\limits_{\to \mathbf{I}} D$.

Definición 1.5.19.

(a) Sea $\mathbf{I}$ una categoría pequeña. Una categoría $\mathcal{A}$ tiene colímites de forma $\mathbf{I}$ si para cada diagrama D de forma $\mathbf{I}$ en $\mathcal{A}$ existe el colímite de D. En este caso se dice que la categoría $\mathcal{A}$ es $\mathbf{I}$-cocompleta

(b) Una categoría $\mathcal{A}$ tiene todos los colímites si tiene colímites de forma $\mathbf{I}$ para todas las categorías pequeñas $\mathbf{I}$. En este caso dice que la categoría $\mathcal{A}$ es cocompleta.

Como ejemplos de colímites tenemos a los coproductos, los coecualizadores y los pushouts que son los conceptos duales de productos, ecualizadores y pullbacks.

Coproductos

Definición 1.5.20. Un *coproducto* en una categoría $\mathcal{A}$ es el colímite de un diagrama $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathcal{A}$, donde $\mathbf{I}$ es una categoría discreta.

Ejemplos 1.5.21.

1. En la categoría **Set** el coproducto de una familia de conjuntos es su unión disjunta con las inclusiones.
   Recordemos que si $\{X_i\}_{i\in\mathbf{I}}$ es una familia de conjuntos su unión disjunta $\bigsqcup_{i\in\mathbf{I}} X_i$ se define como
   $$\bigsqcup_{i\in\mathbf{I}} X_i := \bigcup_{i\in\mathbf{I}} X_i \times \{i\}$$
2. En la categoría **Vect** el coproducto de espacios vectoriales es la suma directa de espacios vectoriales con las inyecciones canónicas.

Coecualizadores

Definición 1.5.22. Consideremos la categoría $\mathbf{E}$ la cual consta de dos objetos $\{\bullet, \star\}$ y dos flechas $\bullet \rightrightarrows \star$, además de las identidades. Un *coecualizador* en una categoría $\mathcal{A}$ es un colímite de un diagrama $D : \mathbf{E} \longrightarrow \mathcal{A}$.

Ejemplos 1.5.23.

1. En la categoría **Set** el ecualizador de dos funciones $f, g : A \longrightarrow B$ es el conjunto cociente $C = B/\!\sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia generada por $f(a) \sim g(a)$ para todo $a \in A$, con la función $h : B \longrightarrow C$ que envía los elementos de B en su clase de equivalencia.

2. En la categoría **Vect** el ecualizador de dos homomorfismos de espacios vectoriales $f, g : V \longrightarrow W$ es el espacio cociente $C = W/\mathrm{im}(f - g)$ con el homomorfismo canónico $W \longrightarrow W/\mathrm{im}(f - g)$.

Pushouts

Definición 1.5.24. Consideremos la categoría $\mathbf{P}^{op}$ formado por tres objetos $\{\star, \bullet, \diamond\}$ y dos flechas $\star \longleftarrow \diamond \longrightarrow \bullet$, además de las identidades. Un diagrama $D : \mathbf{P}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}$ consiste de objetos X, Y y Z en $\mathcal{A}$ y flechas f, g en $\mathcal{A}$ de la forma

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \\ X & \end{tikzcd}$$

Un *pushout* en una categoría $\mathcal{A}$ es un colímite de un diagrama $D : \mathbf{P}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}$.

Ejemplos 1.5.25.

1. En la categoría **Set** el pushout de las funciones $g : Z \longrightarrow Y$, $f : Z \longrightarrow X$ es el conjunto cociente $P = (X \sqcup Y)/\!\sim$ de la unión disjunta con la relación de equivalencia $\sim$ generada por $(f(z), 0) \sim (g(z), 1)$ para $z \in Z$. La coproyección $Y \longrightarrow P$ envía a $y \in Y$ a su clase de equivalencia en P, y similarmente la coproyección $X \longrightarrow P$ envía a $x \in X$ a su clase de equivalencia en P.

2. Si $\mathcal{A}$ es una categoría con un objecto inicial 0, y si $X, Y \in \mathcal{A}$, entonces el pushout del único diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & Y \\ X & \end{tikzcd}$$

es el coproducto de X y Y.

Nota 1.5.26. Consideremos la categoría $(\mathbb{N}, \leq)$. Un diagrama $D : (\mathbb{N}, \leq) \longrightarrow \mathcal{A}$ consiste de objetos y flechas en $\mathcal{A}$ de la forma

$$X_0 \xrightarrow{s_1} X_1 \xrightarrow{s_2} X_2 \xrightarrow{s_3} \cdots$$

Los colímites de este tipo de diagramas son llamados *límites directos*.

Interacciones entre funtores y límites.

Definición 1.5.27.

(a) Sea $\mathbf{I}$ una categoría pequeña. Un funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ *preserva límites de forma* $\mathbf{I}$ si para todo diagrama $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathcal{A}$ con un cono límite $(L, (p_X)_{X\in\mathbf{I}})$ en $\mathcal{A}$ se tiene que $(F(L), (F(p_X))_{X\in\mathbf{I}})$ es un cono límite en $\mathcal{B}$ del diagrama $F \circ D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathcal{B}$.

(b) Un funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ *preserva límites* si preserva límites de forma $\mathbf{I}$ para toda categoría pequeña $\mathbf{I}$.

Definición 1.5.28.

(a) Sea $\mathbf{I}$ una categoría pequeña. Un funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ *refleja límites de forma* $\mathbf{I}$ si para todo diagrama $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathcal{A}$ con un cono $(L, (p_X)_{X\in\mathbf{I}})$ en $\mathcal{A}$ tal que $(F(L), (F(p_X))_{X\in\mathbf{I}})$ es un cono límite en $\mathcal{B}$ del diagrama $F \circ D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathcal{B}$ se tiene que $(L, (p_X)_{X\in\mathbf{I}})$ es un cono límite del diagrama D.

(b) Un funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ *refleja límites* si refleja límites de forma $\mathbf{I}$ para toda categoría pequeña $\mathbf{I}$.

Definición 1.5.29.

(a) Sea $\mathbf{I}$ una categoría pequeña. Un funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ *crea límites de forma* $\mathbf{I}$ si para todo diagrama $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que el diagrama $F \circ D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathcal{B}$ tiene cono límite existe un único cono $(L, (p_X)_{X\in\mathbf{I}})$ de D tal que $(F(L), (F(p_X))_{X\in\mathbf{I}})$ es el cono límite de $F \circ D$, y además $(L, (p_X)_{X\in\mathbf{I}})$ es un cono límite de D.

(b) Un funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ *crea límites* si crea límites de forma $\mathbf{I}$ para toda categoría pequeña $\mathbf{I}$.

De manera dual se definen los conceptos de preserva, reflejar y crear colímites.

Lema 1.5.30. *Sea $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un funtor y $\mathbf{I}$ una categoría pequeña. Supongamos que $\mathcal{B}$ tiene límites de forma $\mathbf{I}$ y que F crea límites de forma $\mathbf{I}$. Entonces $\mathcal{A}$ tiene límites de forma $\mathbf{I}$, y F preserva límites de forma $\mathbf{I}$.*

Capítulo 2

Nociones de teoría de la medida y espacios de Banach

2.1 Medibilidad y medidas

La noción de medida es una generalización de las ideas de longitud, área o volumen. En este sentido la teoría de la medida se ocupa de asignar una medida a diversas clases de conjuntos abstractos y estudia las integrales, bajo condiciones muy generales, de una gran cantidad de funciones.

Clases de conjuntos

Consideremos a un conjunto X. A la clase de todos los subconjuntos de X la llamamos partes de X, y la denotamos como $\wp(X)$.

Definición 2.1.1. Sea X un conjunto. Una clase de subconjuntos $\mathcal{A} \subseteq \wp(X)$ se llama *σ-álgebra* de X si satisface las siguientes condiciones:

1. $X \in \mathcal{A}$,
2. si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$,

3. si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos en $\mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Al par $(X, \mathcal{A})$, donde $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra de X, se le llama *espacio medible* y a los elementos de $\mathcal{A}$, *conjuntos medibles*.

Proposición 2.1.2. *Sea X un conjunto. Si $\mathcal{A} \subseteq \wp(X)$ es una σ-álgebra de X, entonces*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$.

2. *$\mathcal{A}$ es cerrada bajo uniones finitas. Si $n \in \mathbb{N}$ y $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, entonces*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}.$$

3. *$\mathcal{A}$ es cerrada bajo intersecciones finitas e infinitas numerables. Sea I un conjunto de índices numerables no vacío y $A_i \in \mathcal{A}, i \in I$, entonces*

$$\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}.$$

Ejemplos 2.1.3.

1. El conjunto $\wp(X)$ es una σ-álgebra de X; es la más grande σ-álgebra de X. También $\mathcal{T}(X) = \{\emptyset, X\}$ es una σ-álgebra de X, que es la más pequeña y se le llama σ-álgebra trivial.

2. Sea X un conjunto con infinitos elementos (numerable o no). La clase de subconjuntos $\mathcal{A} := \{A \subseteq X : A \text{ es numerable } \vee\ A^c \text{ es numerable }\}$ es una σ-álgebra de X.

Proposición 2.1.4. *Sea X un conjunto, entonces se tiene que :*

1. *La intersección de una familia arbitraria (numerable o no) de σ-álgebra de X es una σ-álgebra de X. Es decir que si I es un conjunto de índices no vacío, y $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ es una familia de σ-álgebras de X. Entonces*

$$\mathcal{A} := \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$$

es también una σ-álgebra de X.

2. *Para toda clase de subconjuntos $\mathcal{C} \subseteq \wp(X)$, existe una σ-álgebra $\sigma(\mathcal{C})$ que es la mínima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$. Esta σ-álgebra se llama σ-álgebra generada por $\mathcal{C}$ y se define como*

$$\sigma(\mathcal{C}) := \bigcap\{\mathcal{A} : \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \text{ y } \mathcal{A} \text{ es una } \sigma\text{-álgebra de } X\}.$$

Observaciones 2.1.5.

1. La unión de σ-álgebra no es necesariamente una σ-álgebra.
2. Si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son dos clases de subconjuntos de X, entonces

$$\mathcal{C}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{C}_2) \Longrightarrow \sigma(\mathcal{C}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{C}_2),$$

ya que $\sigma(\mathcal{C}_2)$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}_1$.

Definición 2.1.6. Sea X un conjunto. Una clase de subconjuntos $\mathcal{R} \subset \wp(X)$ se llama *σ-anillo* si satisface las siguientes condiciones:

1. $\emptyset \in \mathcal{R}$,
2. si $A, B \in \mathcal{R}$ y $A \subseteq B$ entonces $B - A \in \mathcal{R}$,
3. si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos en $\mathcal{R}$, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$.

Nótese que un σ-anillo es cerrado por complementos relativos y no por complementos absolutos. Por lo tanto, X no tiene que pertenecer a $\mathcal{R}$. De hecho, cuando esto ocurre, un σ-anillo es una σ-álgebra.

La intersección arbitraria de σ-anillos es un σ-anillo, y de manera análoga a como se definió la σ-álgebra generada por una clase $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X, se define el σ-anillo generado por una clase $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X. Es decir, el σ-anillo generado por $\mathcal{C}$ se define como

$$\mathcal{R}(\mathcal{C}) := \bigcap\{\mathcal{R} : \mathcal{C} \subseteq \mathcal{R} \text{ y } \mathcal{R} \text{ es un } \sigma\text{-anillo de X }\}.$$

En muchos casos para generar una σ-álgebra o un σ-anillo es conveniente partir de una clase particular $\mathcal{C}$ que cumpla algunas propiedades especiales. Por lo tanto se definen las siguientes clases de subconjuntos de X en la definición siguiente.

Definición 2.1.7. Sea $\mathcal{C}$ una clase de subconjuntos de X.

1. $\mathcal{C}$ es un *álgebra* si satisface las siguientes condiciones:
   (a) $\emptyset \in \mathcal{C}$,
   (b) si $A \in \mathcal{C}$, entonces $A^c \in \mathcal{C}$,
   (c) si $A, B \in \mathcal{C}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{C}$.
2. $\mathcal{C}$ es un *anillo* si satisface las siguientes condiciones:
   (a) $\emptyset \in \mathcal{C}$,
   (b) si $A, B \in \mathcal{C}$ y $B \subseteq A$ entonces $A - B \in \mathcal{C}$,
   (c) si $A, B \in \mathcal{C}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{C}$.
3. $\mathcal{C}$ es un *semi-álgebra* si satisface las siguientes condiciones:
   (a) $\emptyset \in \mathcal{C}$,
   (b) si $A \in \mathcal{C}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A^c = \cup_{i=1}^n A_i$, con $A_i \in \mathcal{C}$, $i = 1, \ldots, n$, disjuntos,
   (c) si $A, B \in \mathcal{C}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{C}$.
4. $\mathcal{C}$ es un *semi-anillo* si satisface las siguientes condiciones:
   (a) $\emptyset \in \mathcal{C}$,
   (b) si $A, B \in \mathcal{C}$ y $B \subseteq A$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A - B = \cup_{i=1}^n A_i$, con $A_i \in \mathcal{C}$, $i = 1, \ldots, n$, disjuntos,
   (c) si $A, B \in \mathcal{C}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{C}$.

Ejemplos 2.1.8.

1. Sea X un conjunto con infinitos elementos (numerable o no). La clase de subconjuntos $\mathcal{C} := \{A \subseteq X : A \text{ es finito } \vee \ A^c \text{ es finito } \}$ es un álgebra.
2. La clase $\mathcal{S}$ de todos los intervalos finitos semiabiertos del tipo $(a, b]$ o $[a, b)$ es un semi-anillo.

3. La clase $\mathcal{I} = \{I = \cup_{k=1}^{n} S_k : S_k \in \mathcal{S} \quad \wedge \quad S_i \cap S_j = \emptyset \text{ si } i \neq j\}$ es un anillo.

4. La clase $\mathcal{G}$ de todos los intervalos del tipo $(a, b]$ o $[a, b)$ con $a, b \in [0, 1]$ es una semi-álgebra.

La σ-álgebra generada por los conjuntos abiertos de un espacio topológico (X, τ), se llama *σ-álgebra de Borel* y se denota $\mathcal{B}(X)$. Los elementos de $\mathcal{B}(X)$ son llamados conjuntos borelianos.

Proposición 2.1.9.

1. *Sea $\mathcal{K}$ la clase de los conjuntos cerrados de un espacio topológico (X, τ). Entonces*

$$\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{K}).$$

2. *Sea $\mathcal{D}$ una base (o sub-base) numerable de la topología de X. Entonces*

$$\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{D}).$$

Clases monótonas

Definición 2.1.10. Sea X un conjunto. Una familia $\mathcal{M}$ de subconjuntos de X se llama *clase monótona* si satisface las siguientes condiciones:

1. para toda sucesión creciente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{M}$, se cumple que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$;

2. para toda sucesión decreciente $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{M}$, se cumple que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{M}$.

Una σ-álgebra es una clase monótona. La intersección arbitraria de clases monótonas es también una clase monótona, dada una clase cualquiera $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X, la clase monótona generada por $\mathcal{C}$ se define de la misma manera que para las σ-álgebras y se denota por $\mathcal{M}(\mathcal{C})$. Esto es,

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}) := \bigcap\{\mathcal{M} : \mathcal{C} \subseteq \mathcal{M} \text{ y } \mathcal{M} \text{ es una clase monótona }\}.$$

Además se tiene que $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ es la clase monótona más pequeña que contiene a $\mathcal{C}$.

Proposición 2.1.11. *Sea X un conjunto. Una clase $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X es una σ-álgebra si y sólo si es álgebra y clase monótona.*

Teorema 2.1.12 (Teorema de clase monótona). *Sea X un conjunto. Si una clase $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X es cerrada por intersecciones finitas, se tiene que*

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C}).$$

Definición de medida

Definición 2.1.13. Una función μ con valores en la recta real completada[1] $\overline{\mathbb{R}}$ y definida sobre una clase $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X se denomina *función de conjuntos*.

Definición 2.1.14. Una *medida* sobre un es espacio medible $(X, \mathcal{A})$ es una función de conjuntos

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

tal que:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.

2. μ es σ-aditiva, lo que significa que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{A}$ de conjuntos disjuntos, es decir $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

A la terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se le llama *espacio de medida*, y a $\mu(A)$ *medida* de A.

De la definición se deduce directamente la siguiente proposición.

Proposición 2.1.15. *Una medida μ en un espacio medible $(X, \mathcal{A})$ tiene las siguientes propiedades, para $A, B \in \mathcal{A}$:*

[1] La *recta real completada* $\overline{\mathbb{R}}$ se define como el conjunto $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ o bien $[-\infty, +\infty]$, con la relación de orden usual de $\mathbb{R}$ y tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $-\infty < x < +\infty$. Igualmente se definen los conjuntos $\overline{\mathbb{R}}_+$ y $\overline{\mathbb{R}}_-$ como $[-\infty, 0]$ y $[0, +\infty]$ respectivamente.

(a)

$$\mu(A) = \mu(A - B) + \mu(A \cap B).$$

(b) (aditividad)

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

(c) (sub-aditividad)

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

(d) (es creciente)

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow \mu(A) \leq \mu(B).$$

Proposición 2.1.16. *Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible. Una función de conjuntos*

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

es una medida si y solo si

1. $\mu(\emptyset) = 0$.

2. μ *es finitamente aditiva, es decir, si* $n \in \mathbb{N}$ *y* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ *es una sucesión finita de conjuntos disjuntos, entonces,*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

3. *Si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en* $\mathcal{A}$ *es una sucesión creciente de conjuntos, entonces*

$$\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Corolario 2.1.17 (Sub-σ-aditividad de las medidas). *Si μ es una medida en el espacio medible $(X, \mathcal{A})$, para toda sucesión de conjuntos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{A}$ se tiene que*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Definición 2.1.18. Una medida μ en un espacio medible $(X, \mathcal{A})$, se dice *acotada* o *finita* si $\mu(X) = \infty$. El número $\mu(X)$ se llama *masa total* de μ. Si $\mu(X) = 1$, se dice que la medida μ es una *probabilidad*. La medida μ es σ-finita si existe una sucesión de conjuntos medibles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $X = \bigcup_{n}^{\infty} X_n$ y $\mu(X_n) < \infty$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.1.19. *Sea $\mathcal{C}$ una clase de subconjuntos de X, cerrada por intersecciones finitas. Entonces,*

1. *dos medidas acotadas μ y ν que tienen la misma masa total y que son iguales en $\mathcal{C}$, coinciden en $\sigma(\mathcal{C})$,*

2. *dos medidas σ-finitas μ y ν que son iguales en $\mathcal{C}$ y tales que existe una sucesion $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos disjuntos en $\mathcal{C}$, tal que*
$$\bigcup X_n = X$$
y para la cual
$$\mu(X_n) = \nu(X_n) < \infty, \text{ para todo } n,$$
coinciden en $\sigma(\mathcal{C})$.

Ejemplos 2.1.20.

1. La *medida contadora* m en el espacio medible $(X, \wp(X))$ se define como:
$$m(A) = \begin{cases} |A| & \text{si A es finito;} \\ \infty & \text{si A es infinito.} \end{cases}$$

2. Sea $a \in X$ y $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible. La *medida delta de Dirac* se define como:
$$\delta_a = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A; \\ 0 & \text{si } a \notin A. \end{cases}$$

3. Sea (a_n) una sucesión de puntos de X y (p_n) una sucesión de números reales positivos. La función de conjuntos
$$\delta(A) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \delta_{a_n}(A)$$
es una medida. Las medidas que se definen de esta forma se llaman *medidas discretas*.

   En general si (μ_n) es una sucesión de medidas en un espacio medible $(X, \mathcal{A})$ y (p_n) es una sucesión de números reales positivos. La función de conjuntos
$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \mu_n(A)$$
es una medida.

4. Sea X un conjunto infinito no numerable y $\mathcal{C}$ la σ-álgebra de X formada por los subconjuntos de X que son numerables o cuyo complemento es numerable. Para $A \in \mathcal{C}$ se define la función de conjuntos

$$\pi(A) = \begin{cases} 0 & \text{si A es numerable;} \\ 1 & \text{si } A^c \text{ es numerable.} \end{cases}$$

π definida de esta manera es una medida de probabilidad en el espacio medible $(X, \mathcal{C})$.

Definición 2.1.21. Un conjunto medible A es llamado un *conjunto nulo* si $\mu(A) = 0$, y *conjunto despreciable* si está propiamente contenido en un conjunto nulo.

Definición 2.1.22. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. La medida μ es *completa* si para todo conjunto $B \subset A$ con $A \in \mathcal{A}$ y $\mu(A) = 0$, se cumple que $B \in \mathcal{A}$. Si la medida μ es completa al espacio $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se le llama *espacio de medida completo*.

Teorema 2.1.23. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Se define la clase $\overline{\mathcal{A}}$ como:*

$$\overline{\mathcal{A}} := \{E \cup F : E \in \mathcal{A} \text{ y } F \subset N \text{ con } N \in \mathcal{A} \text{ y } \mu(N) = 0\},$$

y se define la función de conjuntos $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{A}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ como:

$$\overline{\mu}(E \cup F) := \mu(E).$$

Entonces $\overline{\mathcal{A}}$ es una σ-álgebra[2] *que contiene a $\mathcal{A}$ y la función de conjuntos $\overline{\mu}$ es una medida completa en $\overline{\mathcal{A}}$ que extiende a la medida μ. Esta medida $\overline{\mu}$ se denomina la completación de μ.*

2.2 Funciones medibles

Definición 2.2.1. Sean $(X, \mathcal{A})$ y $(Y, \mathcal{B})$ dos espacios medibles. Una función $f : X \longrightarrow Y$ es *medible* (con respecto a las σ-álgebras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$) si y solo si la imagen inversa de todo conjunto medible en $\mathcal{B}$ es un conjunto medible en $\mathcal{A}$. Esto es:

$$f \text{ medible} \iff f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \text{ para todo } B \in \mathcal{B}.$$

[2] A esta σ-álgebra se le llama **σ-álgebra completada**.

La notación $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B})$ medible, signicará que $f : X \longrightarrow Y$ y que f es medible respecto a las σ-álgebras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$.

Lema 2.2.2. *Si $(X, \mathcal{A})$ Y $(Y, \mathcal{B})$ son espacios medibles y $\mathcal{C}$ es una clase que genera a $\mathcal{B}$, es decir $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$, entonces $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B})$ es medible si y solo si*

$$f^{-1}(C) \in \mathcal{A} \text{ para todo } C \in \mathcal{C}$$

Definición 2.2.3. Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y (Y, τ) un espacio topológico. Una función *Borel medible* es una función $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B}(Y))$ medible.

Proposición 2.2.4.

1. *Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y (Y, τ) un espacio topológico. Sea $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B}(Y))$. Entonces:*

$$f \text{ es Borel medible} \iff f^{-1}(O) \in \mathcal{A} \text{ para todo } O \in \tau.$$

2. *Sean (X, τ_1) y (Y, τ_2) dos espacios topológicos y $f : (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ una función continua. Entonces:*

$$f : (X, \mathcal{B}(X)) \longrightarrow (Y, \mathcal{B}(Y))$$

es Borel medible.

Proposición 2.2.5. *Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible, $f, g : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ funciones medibles y $a \in \mathbb{R}$. Se tiene:*

1. *$h(x) = a$ es medible.*
2. *$f + g$ es medible.*
3. *af es medible.*
4. *f^2 es medible.*
5. *fg es medible.*
6. *$1/f$ (considerando $1/f(x) = \infty$ si $f(x) = 0$) es medible.*

7. *máx* $\{f, g\}$ *y mín* $\{f, g\}$ *son medibles.*

Corolario 2.2.6.

1. *Si* $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ *es medible, entonces también lo son su parte positiva* f^+ *y parte negativa* f^-*, que se definen como:*

$$f^+ = \text{máx}\,\{f, 0\} \qquad y \qquad f^- = \text{-mín}\,\{f, 0\}.$$

Estas funciones f^+ *y* f^- *cumplen con las siguientes propiedades:*

$$|f| = f^+ + f^-$$

$$f = f^+ - f^-.$$

2. *Si* A *es un conjunto medible, su función característica* $\mathcal{X}_A$ *definida como:*

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & si\ x \notin A \end{cases}$$

es medible.

3. *Si* $(A_i)_{i=1}^n$ *son conjuntos medibles y* $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$*, la función*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathcal{X}_{A_i}(x)$$

es medible. Una función de esta forma es una función simple[3]*. Si los conjuntos* A_i *son intervalos, se le llama función escalera.*

4. *Una combinacion lineal de funciones simples es una función simple. También el producto de funciones simples es una función simple.*

Proposición 2.2.7. *Sea* $\{f_n : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones medibles, entonces se tiene:*

1. $\sup_n f_n$ *y* $\inf_n f_n$ *son medibles.*

[3] Una función es simple si su rango es un conjunto finito.

2. $\limsup_n f_n$ *y* $\liminf_n f_n$ *son medibles.*

3. *Si* $f = \lim f_n$ *existe, entonces* f *es medible.*

Nota 2.2.8. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Se dice que *$f$ cumple una propiedad P casi siempre (c.s) o en casi todo punto (c.t.p)* si y solo si

$$\mu(\{x : f(x) \text{ no cumple } P\}) = 0.$$

Proposición 2.2.9. *Sean $f, g : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ funciones tales que f es Borel medible y $g = f$ en c.t.p, entonces g es Borel medible.*

Teorema 2.2.10 (Teorema de aproximación de funciones medibles). *Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función medible y positiva. Entonces existe una sucesión creciente de funciones simples $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tales que $h_n(x) \uparrow f(x)$, para todo $x \in X$. Además si f es acotada entonces la convergencia es uniforme.*

Corolario 2.2.11. *Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función medible. Entonces existe una sucesión de funciones simples $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tales que $h_n(x) \to f(x)$, para todo $x \in X$. Además si f es acotada entonces la convergencia es uniforme.*

Corolario 2.2.12. *Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible y acotada. Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe una función simple h, tal que*

$$|h(x) - f(x)| < \epsilon, \text{ para todo } x \in X.$$

2.3 Integral de Lebesgue

Medida de Lebesgue

Se denota por $\mathcal{I}_a$ al semianillo formado por la clase de intervalos acotados en $\mathbb{R}$ de cualquier tipo, es decir, intervalos abiertos, cerrados o semi-abiertos. Se define una función de conjuntos $\ell : \mathcal{I}_a \longrightarrow \mathbb{R}_+$, llamada la función longitud de intervalos, tal que para cualquier intervalo $I \in \mathcal{I}_a$ de la forma (a, b), $[a, b]$, $(a, b]$ o $[a, b)$ se tiene que $\ell(I) = b - a$.

Al anillo generado por el semianillo $\mathcal{I}_a$ se denota por $\mathcal{J}$. Este anillo está constituido por las uniones finitas de los mienbros de $\mathcal{I}$, esto es,

$$\mathcal{J} = \{J = \bigcup_{k=1}^{n} I_k : I_k \in \mathcal{I}\}.$$

La función ℓ puede ser extendida a una función $\overline{\ell} : \mathcal{J} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, tal que si $J = \cup_{j=1}^{n} I_j \in \mathcal{J}$ es una únion finita de intervalos acotados disjuntos, entonces

$$\overline{\ell}(J) = \sum_{j=1}^{n} \ell(I_j).$$

Proposición 2.3.1. *La función $\overline{\ell}$ está bien definida, es σ-aditiva, monótoma y σ-sub-aditiva en $\mathcal{J}$.*

Definición 2.3.2 (medida exterior de Lebesgue). Se define la medida exterior de Lebesgue como la función de conjuntos $m^* : \wp(\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, definida como

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\ell}(I_n) : (I_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{I}, A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\},$$

para todo $A \subseteq \mathbb{R}$.

Proposición 2.3.3. *m^* tiene las siguientes propiedades:*

1. $m^*(\emptyset) = 0$.
2. *Si $A \subseteq B$, entonces $m^*(A) \leq m^*(B)$ (monotonía).*
3. *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{R}$, entonces*
$$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) \qquad (\sigma\text{-sub-aditividad}).$$
4. *Si I es un intervalo acotado, entonces $m^*(I) = \overline{\ell}(I)$.*
5. *Para todo conjunto A y todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que*
$$m^*(A + x) = m^*(A) \qquad (\text{invariante por traslaciones}).$$

Observación 2.3.4. m^* no es finitamente aditiva en $\wp(\mathbb{R})$, ya que en general no es cierto que si A y B son conjuntos disjuntos, se tenga que $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$.

Definición 2.3.5. Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ se dice *m^*-medible* (o medible-Lebesgue) si y solo si para todo $A \subseteq \mathbb{R}$ se tiene que

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

Observaciones 2.3.6.

1. Si m^* fuese finitamente aditiva en $\wp(\mathbb{R})$, todo subconjunto de $\mathbb{R}$ sería m^*-medible.

2. Como m^* es σ-sub-aditiva, siempre se cumple que

   $$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c),$$

   por lo tanto en la definición basta considerar la desigualdad contraria.

3. como la definición es simétrica en E y E^c, entonces el conjunto E es m^*-medible si y solo si E^c es m^*-medible.

4. El conjunto vacío es m^*-medible y por lo tanto $\mathbb{R}$ también es m^*-medible.

5. Si $m^*(E) = 0$, entonces E es m^*-medible.

Definición 2.3.7. La *σ-álgebra de Lebesgue* en $\mathbb{R}$ es la σ-álgebra $\mathcal{M}$ formada por todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que son m^*-medibles, es decir

$$\mathcal{M} = \{E \subseteq \mathbb{R} : E \text{ es } m^*\text{-medible } \}.$$

Definición 2.3.8. La *medida de Lebesgue* en $\mathbb{R}$ es la medida m que se obtiene al restringir la medida exterior m^* a $\mathcal{M}$, es decir

$$m = m^*|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty].$$

Observaciones 2.3.9.

1. La medida de Lebesgue es una medida completa.

2. La σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ está contenida en $\mathcal{M}$ y además se tiene que la completación de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es $\mathcal{M}$.

Medida de Lebesgue-Stieltjes

Las medidas de Lebesgue-Stieltjes forman una clase de medidas definidas en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ que generalizan la medida de Lebesgue.

Definición 2.3.10. Una medida de Lebesgue-Stieltjes en $\mathbb{R}$ es una medida μ en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tal que $\mu(I) < \infty$ para todo conjunto medible acotado $I \subset \mathbb{R}$.

Definición 2.3.11. Una función $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una *función de Stieltjes* si es monótona creciente y continua por la derecha. Esto es, si cumple que:

1. $x \leq y \Longrightarrow F(x) \leq F(y)$.

2. $\lim\limits_{x \to a^+} F(x) = F(a)$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Si además la función F cumple con que $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$, entonces F se llama *función de distribución*.

Si F es una función de Stieltjes, entonces F tiene límite por la izquierda en todo punto, solo tiene discontinuidades de salto y el conjunto de discontinuidades es a lo sumo numerable.

Proposición 2.3.12. *Sea $\mathcal{S}$ la clase de los intervalos acotados de tipo $(a, b]$ y sea $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de Stieltjes. En $\mathcal{S}$ se define la función de conjuntos $m_F : \mathcal{S} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, de la siguiente manera:*

$$m_F((a, b]) = F(b) - F(a).$$

Entonces existe una única extensión de m_F a una medida μ_F de Lebesgue-Stieltjes en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Proposición 2.3.13. *Sea μ una medida de Lebesgue-Stieltjes en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Sea $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida por*

$$F(t) = \begin{cases} \mu((0, t]), & \text{si } t > 0 \\ 0, & \text{si } t = 0 \\ -\mu((t, 0]), & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Entonces F es una función de Stieltjes y se cumple que para todo conjunto $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mu_F(A) = \mu(A).$$

Integral de Lebesgue para funciones simples

Definición 2.3.14. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función simple positiva y medible Lebesgue. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos disjuntos medibles Lebesgue y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales, tal que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k 1_{A_k}(x).$$

Se define la *integral de Lebesgue* de f en $\mathbb{R}$ como:

$$\int f(x)\,dx := \sum_{k=1}^{n} a_k m(A_k).$$

Con la convención de que si $a_k = 0$ y $m(A_k) = \infty$, entonces $a_k m(A_k) = 0 \cdot \infty = 0$.

Esta suma siempre tiene sentido aunque puede valer ∞.

Observaciones 2.3.15. Si f es una función simple positiva se tiene que:

1. La anterior definición de integral no depende de la representación de f, es decir que si exixten dos representaciones

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k 1_{A_k}(x) = \sum_{i=1}^{m} b_i 1_{B_i}(x),$$

de f entonces se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k m(A_k) = \sum_{i=1}^{m} b_i m(B_i).$$

2. Si E es un conjunto medible la integral de Lebesgue de f en E se define como:

$$\int_E f(x)\,dx := \int f(x) \cdot 1_E\,dx.$$

3. Se dice que f es *integrable Lebesgue* si y solo si ocurre que $\int f(x)\,dx < \infty$.

Proposición 2.3.16. *Sean f, g funciones simples positivas y $\alpha \geq 0$. Se tiene:*

1. *(linealidad)*

$$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx.$$

$$\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

2. *(monotonía) Si $0 \leq f \leq g$ entonces*

$$\int f(x)\,dx \leq \int g(x)\,dx.$$

Integral de Lebesgue para funciones medibles positivas

Definición 2.3.17. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible Lebesgue positiva y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de funciones simples positivas tal que $f_n(x) \uparrow f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Se define la *integral de Lebesgue* de f en $\mathbb{R}$ como:

$$\int f(x)\,dx := \lim_{x\to\infty} \int f_n(x)\,dx.$$

Observe que

$$0 \leq \int f(x)\,dx \leq \infty.$$

Proposición 2.3.18. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones de funciones simples positivas tales que $f_n(x) \uparrow f(x)$ y $g_n(x) \uparrow f(x)$. Entonces se tiene que:*

$$\lim_{x\to\infty} \int f_n(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} \int g_n(x)\,dx.$$

Lema 2.3.19. *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones simples positivas y h una función simple positiva tal que $f = \lim f_n \geq h$. Entonces se tiene que:*

$$\lim_{x\to\infty} \int f_n(x)\,dx \geq \lim_{x\to\infty} \int h(x)\,dx.$$

Proposición 2.3.20. *Sean f, g funciones medibles Lebesgue positivas y $\alpha \geq 0$. Se tiene:*

1. *(linealidad)*
$$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx.$$
$$\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

2. *(monotonía) Si $0 \leq f \leq g$ entonces*
$$\int f(x)\,dx \leq \int g(x)\,dx.$$

Teorema 2.3.21 (Teorema de convergencia monótona [4]). *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles positivas. Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y sea*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

[4]Este teorema también es conocido como el teorema de Beppo-Levy.

Entonces

$$\int f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} \int f_n(x)\,dx.$$

Proposición 2.3.22 (Lema de Fatou). *Para toda sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones medibles positivas, se tiene que:*

$$\int (\liminf_n f_n)(x)\,dx \leq \liminf_n \int f_n(x)\,dx.$$

Observaciones 2.3.23. Sea f una función medible positiva, entonces se tiene que:

1. Si E es un conjunto medible la integral de Lebesgue de f en E se define como:

$$\int_E f(x)\,dx := \int f(x)\cdot 1_E\,dx.$$

2. Se dice que f es *integrable Lebesgue* si y solo si ocurre que $\int f(x)\,dx < \infty$.

3. Si f es integrable, entonces $f < \infty$ en c.t.p.

4. Si A en es un conjunto medible y $m(A) = 0$, entonces $\int_A f(x)\,dx = 0$.

Integral de Lebesgue para funciones medibles

Toda función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se puede escribir como

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x),$$

donde f^+ y f^- son la parte positiva y la parte negativa de f respectivamente. Si f es medible, también lo son f^+ y f^-.

Definición 2.3.24. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función medible Lebesgue. Se dice que f es *integrable* si y solo si f^+ y f^- son integrables y se define la *integral de Lebesgue* de f en $\mathbb{R}$ como:

$$\int f(x)\,dx := \int f^+(x)\,dx - \int f^-(x)\,dx.$$

Observe que para funciones medibles positivas la integral de Lebesgue está bien definida, aún cuando ésta pueda tomar valores infinitos. Para funciones medibles no positivas, la integral de Lebesgue sólo tiene sentido cuando es finita, es decir, cuando las integrales de su parte positiva y negativa sean ambas finitas.

Proposición 2.3.25. *Sean f, g funciones integrables y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se tiene que:*

1. *(linealidad) αf es integrable y*

$$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx.$$

   $f + g$ es integrable y

$$\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

2. *(monotonía) Si $f \leq g$ entonces*

$$\int f(x)\,dx \leq \int g(x)\,dx.$$

Proposición 2.3.26. *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible Lebesgue. Entonces f es integrable si y solo si $|f|$ es integrable y además se tiene que*

$$\left| \int f(x)\,dx \right| \leq \int |f(x)|\,dx.$$

Proposición 2.3.27. *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible Lebesgue. Entonces se tiene que:*

1. *Si A, B son conjuntos medibles Lebesgue y $A \cap B = \emptyset$ y f es integrable, entonces*

$$\int_{A \cup B} f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx.$$

2. *Si f es integrable, entonces $|f| < \infty$ en c.t.p.*

3. *Si A es un conjunto medible Lebesgue tal que $m(A) = 0$, entonces f es integrable en A y además $\int_A f(x)\,dx = 0$.*

4. *Si $f \geq 0$ y $\int f(x)\,dx = 0$, entonces $f = 0$ en c.t.p.*

5. *Si f es integrable y $f = g$ en c.t.p., entonces g es integrable y*

$$\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx.$$

6. *Si f es integrable, g es medible y $|g| \leq f$ en c.t.p., entonces g es integrable.*

7. *Si f y g son integrables,*

$$\text{máx}\left\{ \int f(x)\,dx, \int g(x)\,dx \right\} \geq \int \text{máx}\{f, g\}(x)\,dx.$$

2.4 Espacios de Banach

Definición 2.4.1. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una *norma* en X es una función $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, cumple que:

(i) $\|x\| \geq 0$;

(ii) $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$;

(iii) $\|\alpha x\| = \alpha\|x\|$;

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdad triangular).

Si X es un espacio vectorial con una norma $\|\cdot\|$, entonces al par $(X, \|\cdot\|)$ se le llama *espacio normado*.

Definición 2.4.2. Sea X un conjunto no vacío. Una *métrica* en X es una función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $x, y, z \in X$, cumple que:

(i) $d(x, y) \geq 0$;

(ii) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$;

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$;

(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Si X es un conjunto con una métrica d, entonces al par (X, d) se le llama *espacio métrico*. Al número $d(x, y)$ se le llama distancia entre x y y.

Proposición 2.4.3. *Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, entonces la función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como*

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

es una métrica en X, llamada la métrica definida por la norma.

Definición 2.4.4. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio métrico (X, d) es convergente a un punto $x \in X$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces $d(x_n, x) < \epsilon$. En este caso se escribe que

$$\lim_{x\to\infty} x_n = x.$$

Definición 2.4.5. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio métrico (X,d) es una *sucesión de Cauchy* si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$ entonces $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Proposición 2.4.6. *Toda sucesión convergente es de Cauchy.*[5]

Proposición 2.4.7. *Toda sucesión de Cauchy que tenga una subsucesión convergente es convergente. Además el límite de la sucesión coincide con el límite de la subsucesión.*

Definición 2.4.8. Un espacio métrico (X,d) es *completo* si toda sucesión de Cauchy en (X,d) es convergente. Más aún, un conjunto $A \subset X$ es completo en (X,d) si toda sucesión de Cauchy en A converge a un elemento de A.

Definición 2.4.9. Un *espacio de Banach* es un espacio vectorial normado y completo con la métrica definida por su norma.

Ejemplos 2.4.10. Los siguientes son ejemplos de espacios son de Banach

1. El espacio de los números reales $\mathbb{R}$ con la norma dada por el valor absoluto.

2. El espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ con la norma dada por

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

   si $1 \leq p < \infty$.

   Para $p = \infty$ la norma está dada por

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_\infty = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}.$$

3. El espacios $l_p(\mathbb{N}) = \{(x_n)_{n\geq 1} : x_n \in \mathbb{R} \;\wedge\; \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\}$ con la norma dada por

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

   para $x = (x_n)_{n\geq 1}$ con $1 \leq p < \infty$.

4. El espacio $C[a,b] = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua } \}$ con la norma dada por

$$\|f\|_\infty = \text{máx}\{|f(x)| : x \in [a,b]\}.$$

[5] El recíproco de esta proposición no es cierto.

Definición 2.4.11. Un espacio métrico (Y, ρ) es una *completación* de un espacio métrico (X, d) si (Y, ρ) es completo y existe una isometría $i : X \longrightarrow Y$, tal que $i(X)$ es un subconjunto denso de Y.

Ejemplo 2.4.12. El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, es una completación del conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales, ya que $\mathbb{R}$ es completo y $\mathbb{Q}$ es un subconjunto denso de $\mathbb{R}$.

Teorema 2.4.13. *Todo espacio métrico (X, d) tiene una única completación (Y, ρ) , salvo isometrías, es decir si (Y^*, ρ^*) es otra completacion de (X, d) entonces existe una única isometría $i : Y \longrightarrow Y^*$.*

2.5 Aplicaciones lineales

Definición 2.5.1. Una *aplicación lineal* T entre espacios normados reales X, Y es una función $T : X \longrightarrow Y$ tal que:

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$$

para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $x, y \in X$

Ejemplos 2.5.2.

- La función $T : C^1[a, b] \longrightarrow C[a, b]$ definida como $T(f) = f'$, es una aplicación lineal.
- La función $T : C[a, b] \longrightarrow C[a, b]$ definida como $T(f)(t) = \int_0^t f(s)ds$, es una aplicación lineal.

Definición 2.5.3. Sea X y Y espacios normados. Una aplicación lineal $T : X \longrightarrow Y$ es acotada si existe una constante $M \geq 0$ tal que

$$\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X \text{ para todo } x \in X.$$

Definición 2.5.4. Si una aplicación lineal $T : X \longrightarrow Y$ es acotada, se define la norma $\|T\|$ de T como

$$\|T\| = \text{ínf}\{M : \|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X \text{ para todo } x \in X.\}$$

Definición 2.5.5. Sea X un espacio normado sobre el cuerpo de los reales $\mathbb{R}$. Un funcional lineal en X es una aplicación lineal $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Teorema 2.5.6. *Supongamos que T es una aplicaión lineal acotada desde un espacio normado $(X_1, \|\cdot\|_1)$ a un espacio normado y completo $(X_2, \|\cdot\|_2)$. Entonces T puede ser extendida de manera única a una aplicación lineal acotada (con la misma cota que T) $\overline{T}$ desde la completacion de X_1 a X_2.*

Capítulo 3

Una caracterización universal de la integral de Lebesgue

En este capítulo se presenta una construcción alternativa de la integral de Lebesgue, diferente a la construcción clásica presentada en el capítulo anterior. La idea es caracterizar a la integral de Lebesgue, a partir del espacio $L^1[0,1]$ (definiéndolo como completación del espacio de las funciones contínuas, sin utilizar la noción de integral de Lebesgue), como cierto funcional acotado $L^1[0,1] \to \mathbb{R}$. Luego, se demuestra que esta caracterización es una consecuencia natural de la teoría de categorías: el espacio $L^1[0,1]$ es un objeto inicial de cierta categoría, y la integral de Lebesgue es la única flecha de este objeto a $\mathbb{R}$.

Recordemos que $L^1[0,1]$ es la completación del espacio $C[0,1]$ de las funciones de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ contínuas y acotadas, con la norma

$$\|f\| := \int_0^1 |f(x)|dx,$$

donde la integral del lado derecho de la igualdad es la integral de Riemann, la cula sabemos que existe para toda función contínua a soporte compacto definida en $\mathbb{R}$. Además. la integral de Riemann $\int$ es un funcional uniformemente contínuo con respecto a la norma $\| \ \|$, la cual es densa en $L^1[0,1]$. Así, el operador $\int$ tiene una única extensión a todo $L^1[0,1]$, la cual es precisamente la integral de Lebesgue. La siguiente sección presenta una manera distinta de definir la integral de Lebesgue a partir de $L^1[0,1]$.

3.1 Una caracterización axiomática de la integral de Lebesgue

Esta axiomatización de la integral de Lebesgue aparece en los trabajos de Tom Leinster (ver, por ejemplo, [14] y [15]). Leinster menciona que la siguiente caracterización de la integral de Lebesgue ya era conocida en la literatura, haciendo referencia por ejemplo al libro "Calculus", de Gillman, L. y McDowell, R., en donde la integral de Riemann es presentada bajo axiomas similares. Los libros de texto

Teorema 3.1.1. *La integral de Lebesgue*

$$\int_0^1 : L^1[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

es el único funcional lineal acotado que satisface las siguientes propiedades:

(1) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx + \int_0^1 f\left(\frac{x+1}{2}\right)dx\right);$

(2) $\displaystyle\int_0^1 I_{[0,1]}dx = I_{[0,1]}.$

En el artículo "An axiomatic approach to the integral", de L. Gillman (ver [5]), se menciona al libro "Set functions" (ver [7]) como uno de los primeros textos en definir la integral de Riemann bajo una axiomática similar. Es de notar que el Serge Lang, en su libro "A first course in calculus" (ver [10]), también introduce la integral de Riemann según una serie de axiomas.

Agradecemos al profesor Ramón Bruzual por su ayuda en la comprehensión de este teorema, asi como en su prueba.

Demostración. Sea $\Gamma : L^1[0,1] \to \mathbb{R}$ un funcional lineal que satisface las condiciones (1) y (2) del teorema. Demostraremos que este funcional y la integral de Lebesgue coinciden en las funciones características con extremos racionales diadicos. Como combinaciones lineales de estas funciones características son densas, por cointinuidad se obtiene el resultado.

Consideremos la función característica

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,b], \\ 0 & \text{en otro caso .} \end{cases}$$

Nótese que, si $r \in [0,1]$, entonces $\chi_{\{r\}}$ es un representante para el elemento neutro de $L^1[0,1]$ (recordando que se mira a los elementos del espacio $L^1[0,1]$ como clases de equivalencias), ya que $\chi_{\{r\}}$ tiene norma cero en $L^1[0,1]$. De allí que

$$\Gamma(\chi_{\{r\}}) = 0.$$

Como

$$\chi_{[a,b]} = \chi_{(a,b]} + \chi_{\{a\}} = \chi_{(a,b)} + \chi_{\{a\}} + \chi_{\{b\}},$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene que el funcional Γ evaluado en la función característica de un intervalo depende únicamente de los extremos del intervalo.

Para $x \in [0,1]$, se tiene que:

(a) $\chi_{[0,\frac{1}{2}]}\left(\frac{x}{2}\right) = \chi_{[0,1]}(x)$,

(b) $\chi_{[0,\frac{1}{2})}\left(\frac{x+1}{2}\right) = 0$.

Por lo tanto, aplicando la condición (1) a la función $\chi_{[0,\frac{1}{2}]}$, se obtiene

$$\Gamma(\chi_{[0,\frac{1}{2}]}) = \frac{1}{2}\Gamma(\chi_{[0,1]}),$$

mientras que de la condición (2) del teorema resulta

$$\Gamma(\chi_{[0,\frac{1}{2}]}) = \frac{1}{2}.$$

Como $\chi_{[0,\frac{1}{2}]} + \chi_{(\frac{1}{2},1]]} = \chi_{[0,1]}$, se tiene que

$$\Gamma(\chi_{(\frac{1}{2},1]}) = \frac{1}{2}.$$

Luego, por inducción, se demuestra que el valor de Γ aplicado a una función característica de un intervalo con extremos $\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}$, con $0 \leq p \leq 2^n$ y $n \in \mathbb{N}$, es igual a $\frac{1}{2^n}$, el cual es el valor de la integral de Lebesgue aplicado a la misma función, sobre el mismo intervalo. $\square$

3.2 Definición categórica de la integral de Lebesgue

En esta sección se tendrá que:

- ▶ Una aplicación $\alpha : X \longrightarrow Y$ de espacios de Banach es una aplicación lineal que es contractiva, es decir que $\|\alpha(x)\| \leq \|x\|$ para todo $x \in X$.
- ▶ $X \oplus Y$ es la suma directa con la norma $\|(x, y)\| = \dfrac{1}{2}(\|x\| + \|y\|)$.

Sea $\mathcal{C}$ la categoría que tiene como objetos a las ternas (X, u, ξ) donde:

- X es un espacio de Banach;
- $u \in X$, con $\|u\| \leq 1$ (o equivalentemente, $u : \mathbb{R} \longrightarrow X$);
- $\xi : X \oplus X \longrightarrow X$ es una aplicación de espacios de Banach, tal que $\xi(u, u) = u$.

Una flecha en $\mathcal{C}$ entre dos ternas (X_1, u_1, ξ_1) y (X_2, u_2, ξ_2) es una aplicación de espacios de Banach $f : X_1 \longrightarrow X_2$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X_1 \oplus X_1 \arrow[r, "\xi_1"] \arrow[d, "f\oplus f"'] & X_1 \arrow[d, "f"] & \mathbb{R} \arrow[l, "u_1"'] \arrow[d, equal] \\
X_2 \oplus X_2 \arrow[r, "\xi_2"'] & X_2 & \mathbb{R} \arrow[l, "u_2"]
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Si X es un $\mathbb{R}$-espacio de Banach, todo elemento $u \in X$ determina binuívocamente una función $h_u : \mathbb{R} \to X$ definida como

$$h_u(1) := u.$$

Luego, si $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$h_u(\lambda) = h_u(\lambda \cdot 1) = \lambda h_u(1) = \lambda u.$$

Teorema 3.2.1. *El objeto inicial de la categoría $\mathcal{C}$ es $(L^1[0,1], I_{[0,1]}, \gamma)$, donde $I_{[0,1]}$ es la función constantemente igual a 1 y*

$$\gamma : L^1[0,1] \oplus L^1[0,1] \longrightarrow L^1[0,1]$$

es la función definida como

$$(\gamma(f,g))(t) := \begin{cases} f(2t) & si\ 0 \leq t < 1/2 \\ g(2t-1) & si\ 1/2 < t \leq 1 \end{cases}$$

Demostración.

Sea $(X, h_u.\xi)$ un objeto de la categoría $\mathcal{C}$. Se debe definir $\theta : L^1[0,1] \to X$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} L^1[0,1] \oplus L^1[0,1] \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\theta\oplus\theta"'] & L^1[0,1] \arrow[d, "\theta"] & \mathbb{R} \arrow[l, "h_{I_{[0,1]}}"'] \arrow[d, equal] \\ X \oplus X \arrow[r, "\xi"'] & X & \mathbb{R} \arrow[l, "h_u"] \end{tikzcd}$$

- El diagrama de la derecha determina θ en la función constantemente igual a 1, y luego en toda función constante.

- El diagrama izquierdo determina θ en todas las funciones que son constantes c.s. en cada mitad del intervalo. Aplicando inducción, se determina θ sobre las funciones constantes definidas en intervalos a extremos diádicos. Luego, por continuidad, θ se define sobre todo $L^1[0,1]$.

$\square$

Sea med : $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $\text{med}(a,b) := \frac{a+b}{2}$.

Corolario 3.2.2. *En la categoría $\mathcal{C}$, la única flecha partiendo del objeto inicial $(L^1[0,1], I_{[0,1]}, \gamma)$ hacia el objeto $(\mathbb{R}, 1, med)$ es la integral de Lebesgue $\int_0^1$. Es decir, la integral de Lebesgue*

$$\int_0^1 : L^1[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

es el único funcional lineal acotado que satisface las siguientes propiedades:

(1) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx + \int_0^1 f\left(\frac{x+1}{2}\right)dx\right);$

(2) $\displaystyle\int_0^1 I_{[0,1]}dx = I_{[0,1]}.$

Bibliografía

[1] Awodey, S., *Category Theory*, Colección Oxford Logic Guides, Oxford University Press, Oxford, segunda edición, 2010.

[2] Eilenberg, S. y Mac Lane, S., *Group extensions and homology*, Ann. of Math. (2), 43 (757-831), 1942.

[3] Eilenberg, S. y Mac Lane, S., *Natural isomorphisms in group theory*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 28:537-543, 1942.

[4] Eilenberg, S. y Mac Lane, S., *General theory of natural equivalences*, Trans. Amer. Math. Soc., 58:231-294, 1945.

[5] Gillman, L., *An axiomatic approach to the integral*, The American Mathematical Monthly, vol. 100, 1993, pp. 16-25.

[6] Gillman, L. y McDowell, R., *Çalculus"*, W.W. Norton & Co., New York, 1978.

[7] Hahn, H. y Rosenthal, A., *"Set functions"*, The University of New Mexico Press, Albuquerque, 1948.

[8] Iribarren, I., *Introducción a la teoría de la medida*, Universidad Central de Venezuela - Consejo de Desarrollo Cientifico y Humanistico, 2006.

[9] Jones, F., *Lebesgue Integration on Euclidean Space*, Jones and Bartlett books in mathematics, 2001.

[10] Lang, S., *.A first course in calculus"*, Addison Wesley, Reading, Mass., 1968.

[11] Levi, H., *"Polynomials, Power Series and Calculus"*, Van Nostrand, Princeton, 1968.

[12] Lawvere, F.W. y Schanuel, S.H., *Conceptual Mathematics: A First Introduction to Categories*, Cambridge University Press, 1997.

[13] Leinster, T., *Basic category theory*, Cambridge studies in Advances Mathematics, 143, 2014.

[14] Leinster, T., "A universal Banach space", *83rd Peripatetic Seminar on Sheaves and Logic, Glasgow, 2006*, http://www.maths.ed.ac.uk/~tl/glasgowpssl/.

[15] Leinster, T., "The categorical origins of Lebesgue integration", *Category Theory 2014, University of Cambridge, 2014*, http://www.maths.ed.ac.uk/~tl/cambridge_ct14/.

[16] Mac Lane, S., *Categories for the Working Mathematician*, Springer, second edition, 1998.

[17] Ovchinnikov, O., *Measure, Integral, Derivative. A Course on Lebesgueâ€™s Theory*, Springer-Verlag, 2013.

[18] Riehl, E., *Category theory in context*, Dover publication, 2016.

[19] Rudin, W., *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Book Company, third edition, 1986.