

Sincronización y Control de Autómatas Celulares No Lineales



MSc. Jhonny De Abreu
Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería

Trabajo de Ascenso para optar a la categoría de Agregado

Caracas 2018

Sincronización y Control de Autómatas Celulares No Lineales

© 2018, Jhonny De Abreu.

Número de Depósito Legal: MI2018000272

Todos los derechos reservados. Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida sin permiso del autor.

Resumen

En este trabajo se estudia un sistema dinámico conocido como autómata celular, el objetivo es introducir esquemas deterministas para la sincronización y control de autómatas celulares, en particular los que presentan un comportamiento de tipo caótico. Los esquemas que se van a desarrollar utilizan las propiedades de las funciones Booleanas y la definición de la derivada Booleana, para realizar aproximaciones de primer y segundo orden (desarrollo en serie de Taylor y Jacobiano) de las reglas de los autómatas.

Los resultados muestran que para la sincronización es suficiente la aproximación de primer orden, para diseñar una función de acoplamiento unidireccional entre el autómata maestro y esclavo, en la cual sólo se introduce parte de la información del maestro en el esclavo.

En el control se deben usar ambas aproximaciones para llevar a los autómatas al estado cero. Para lograr el control, se debe perturbar al autómata con clusters y con una frecuencia perturbación dada por una función determinista.

Palabras claves: *Sistemas caóticos, autómata celular, sincronización, control, funciones Booleanas, derivadas Booleanas, clusters.*

Esta tesis está dedicada a mi familia
y a la memoria de mi padre
João De Abreu

Agradecimientos

- Gracias a mi madre (María Dos Santos) y mis hermanos (Orlando De Abreu y Eduardo De Abreu), por todo el apoyo durante toda mi carrera profesional.
- Gracias al Dr. Pedro García tutor de esta tesis por todo su apoyo, dedicación y aporte de ideas, para llevar a buen término este trabajo.
- Gracias a la Dra. Rosa Mújica por ayudar a corregir el documento de la tesis y por sus ideas aportadas para una mejor estructura del texto.
- Gracias al Dr. Ernesto Contreras por corregir el documento de la tesis y por sus ideas aportadas para mejorar la finalización de los capítulos y de esta manera lograr un lectura más fluida del texto.
- Gracias al Lic. Gustavo Ramírez compañero de trabajo y excelente amigo, por las discusiones de ideas durante el desarrollo de este trabajo.
- Gracias al Dr. Luis Amorer y el Dr. Juan Jiménez miembros de mi comité doctoral, por el apoyo prestado.

Introducción

Cuando se estudian sistemas dinámicos ya sea en el área de la física, química, ingeniería, economía, informática, etc, siempre se tiene un gran interés en saber como controlarlos . Para poder controlar un sistema dinámico es esencial predecir como es la evolución de este para saber que tipo de estrategia se puede aplicar para hacer efectivo el control.

A la hora de controlar un sistema dinámico por lo general se acostumbra a llevarlo a un punto fijo o a un ciclo periódico, aunque esto no es estrictamente una ley, ya que puede ser conducido a cualquier estado que la dinámica del sistema en estudio lo permita. Por ejemplo se pueden tomar dos sistemas dinámicos (idénticos o no) y lograr que en un tiempo finito ambos hagan exactamente lo mismo, es decir controlar a uno de los sistemas en el estado instantáneo del otro, esta acción es la que conocemos como sincronización. Para lograr la sincronización de dos sistemas dinámicos ambos deben estar acoplados ya sea de manera unidireccional o bidireccional.

En este trabajo para estudiar el control y la sincronización se utilizará como sistema dinámico a los autómatas celulares unidimensionales, específicamente los elementales, los cuales presentan dos posibles estados, apagado o encendido (0 o 1), cada celda del autómatas se encuentra conectada solamente a sus vecinos más cercanos y posee condiciones de borde periódicas.

Aunque las reglas que rigen a los autómatas celulares elementales son sencillas, algunas de estas presentan comportamientos complejos. En particular se trabajará con los autómatas celulares Clase III (según la clasificación de

Wolfram) los cuales poseen reglas no lineales y tienen un comportamiento de tipo caótico, lo que dificulta su control y sincronización.

Cuando se quiere aplicar el control o la sincronización a un sistema dinámico se tiene interés en dos aspectos, la intensidad y la cantidad de sitios que se van a perturbar. En general lo que se busca es que la perturbación sea pequeña y en la menor cantidad de sitios posibles, como en este estudio se utilizará autómatas celulares elementales, vale la pena destacar que por la misma naturaleza binaria de estos, hablar de intensidad de la perturbación no tiene mucho sentido ya que esta es del mismo orden de magnitud que el estado del autómata.

En este trabajo nos enfocaremos en hallar el menor número de sitios que se necesitan perturbar para poder lograr el control y la sincronización de los autómatas celulares.

En trabajos previos ya se ha estudiado el control y la sincronización en autómatas celulares (casi exclusivamente para aquellos que presentan reglas lineales) pero las estrategias que se han implementado para perturbarlos han sido de tipo aleatoria, lo que ha conducido a que en un período corto de tiempo se termina perturbando todo el autómata.

En este trabajo se va a implementar una estrategia de tipo determinista para controlar y sincronizar a los autómatas celulares Clase III (no lineales), en la cual se buscará perturbar un número constante de sitios cumpliendo con dos condiciones, la primera es que la perturbación se aplique siempre en los mismos sitios y segundo que sea en la menor cantidad de sitios posible.

El trabajo se organiza de la siguiente manera, el capítulo 1 se define que es un sistema dinámico y como se clasifican, en el capítulo 2 se definen a los autómatas celulares y cual es la notación que se utilizará para estos en el trabajo, en el capítulo 3 se explica el álgebra y el cálculo relacionado con los números binarios (funciones booleanas).

En el capítulo 4 se presenta la estrategia para realizar la sincronización de los autómatas celulares y los resultados de la sincronización, en el capítulo 5 se muestran varias estrategias de control y sus resultados con el fin de ver cual de ellas arroja los mejores resultados, por último se tienen las conclusiones del trabajo.

Índice general

1. Sistemas dinámicos	1
1.1. Clasificación de los sistemas dinámicos	2
1.1.1. Sistemas dinámicos continuos	3
1.1.2. Sistemas dinámicos parcialmente discretos	3
1.1.3. Sistemas dinámicos totalmente discretos	5
1.2. Caos	5
2. Autómatas celulares	7
2.1. Notación de los autómatas celulares unidimensionales	8
2.2. Clasificación de los autómatas celulares	9
3. Funciones Booleanas y aproximación lineal de funciones	13
3.1. Representación algebraica y tipos funciones Booleanas	13
3.2. Teoremas de las funciones Booleanas y matrices Jacobianas	14
3.2.1. Matrices Jacobianas para autómatas celulares lineales y no lineales	16
3.3. Aproximación lineal de funciones continuas	16
3.4. Aproximación lineal de funciones discretas	17
4. Sincronización	20
4.1. Sincronización de autómatas lineales	20
4.2. Sincronización de autómatas no lineales	23
4.3. Otra estrategia de sincronización	33

5. Control	42
5.1. Estrategias de control	43
5.1.1. Control mediante la perturbación del parámetro	44
5.1.2. Control mediante la perturbación de las variables de estado	44
5.2. Control de autómatas celulares unidimensionales	45
5.2.1. Control de autómatas celulares lineales	45
5.2.1.1. Fallas del control de El Yacoubi	48
5.2.2. Control de autómatas celulares no lineales	50
5.2.2.1. Fallas del control de El Yacoubi para el caso no lineal	51
5.2.3. Nueva estrategia para controlar los autómatas celulares no lineales	52
5.3. Control con Clusters	66
Conclusión	78
Bibliografía	80

Índice de figuras

2.1. Autómata celular	8
2.2. Evolución de las ternas del autómata celular para la Regla 30	9
2.3. Autómata celular clase I	10
2.4. Autómata celular clase II	10
2.5. Autómata celular clase III	11
2.6. Autómata celular clase IV	11
4.1. Percolación.	27
4.2. Transición de Fase.	29
4.3. Error de sincronización en función del tiempo.	34
4.4. Error de sincronización en función del número de sitios acoplados todos los autómatas.	37
4.5. Matrices de acoplamiento y promedio de las densidades de la evolución de la parte no lineal de las reglas de los autómatas celulares.	39
4.6. Error de sincronización en función del número de sitios acoplados regla 126.	40
5.1. Condición inicial.	48
5.2. Evolución con control.	49
5.3. Evolución sin control.	49
5.4. Evolución con control en sitios simultáneos.	50
5.5. Evolución sin control.	50
5.6. Evolución con control.	52
5.7. Evolución con control.	52

5.8. Perturbación inicial del autómata.	56
5.9. Control perturbando en todo instante de tiempo, Regla 110.	56
5.10. Control sin perturbar en todo instante de tiempo, Regla 110.	57
5.11. Clusters.	66
5.12. Mapa Logístico.	68
5.13. Clusters y Control con Clusters Regla 18.	69
5.14. Clusters y Control con Clusters Regla 22.	70
5.15. Clusters y Control con Clusters Regla 30.	70
5.16. Clusters y Control con Clusters Regla 41.	71
5.17. Clusters y Control con Clusters Regla 45.	72
5.18. Clusters y Control con Clusters Regla 54.	73
5.19. Clusters y Control con Clusters Regla 106.	73
5.20. Clusters y Control con Clusters Regla 110.	74
5.21. Clusters y Control con Clusters Regla 122.	75
5.22. Clusters y Control con Clusters Regla 126.	75
5.23. Clusters y Control con Clusters Regla 146.	76

Índice de tablas

2.1. Ternas para los autómatas elementales	9
2.2. Autómatas celulares elementales clase III	12
3.1. Representación Booleana de los Autómatas Celulares	13
4.1. Sincronización reglas 18, 22, 30, 41	30
4.2. Sincronización reglas 45, 54, 106 110, 122, 126	31
4.3. Sincronización regla 146	32
4.4. Exponentes de la percolación dirigida.	33
4.5. Clasificación de Chua, P1, P2, P3, BS, CBS, HBS [46]	35
4.6. Clasificación de las reglas lineales y no lineales según Chua.	36
4.7. Matrices tridiagonales.	38
5.1. Derivadas 1 ^{er} orden.	55
5.2. Evolución de las 5-tuplas Regla 30, 1 ^{er} orden.	55
5.3. Control Primera Derivad, Reglas 18, 22, 30 41, 45, 54	58
5.4. Control Primera Derivada, Reglas 106, 110, 122 126, 146	59
5.5. Derivadas 2 ^{do} orden.	62
5.6. Evolución de las 5-tuplas Regla 30, 2 ^{do} orden.	62
5.7. Control Primera y Segunda Derivada, Reglas 18, 22, 30 41, 45, 54	64
5.8. Control Primera y Segunda Derivada, Reglas 106, 110, 122, 126, 146	65
5.9. Resultados del control.	76

Capítulo 1

Sistemas dinámicos

A lo largo de la historia de la humanidad los científicos han tratado de entender los diversos fenómenos que se presentan en distintas áreas mediante la construcción de modelos, un sistema dinámico puede ser visto como un mecanismo que evoluciona de manera determinista en el tiempo. El concepto de los sistemas dinámicos tiene su origen en la mecánica newtoniana así como en otras disciplinas de las ciencias naturales, como por ejemplo la biología, química e ingeniería. Por otro lado también se ha logrado aplicar la teoría de los sistemas dinámicos a sistemas económicos e informáticos.

Cuando se estudia un sistema dinámico se está interesado en aquellos donde las funciones que describen a los estados del sistema dependen del tiempo, el caso más simple de evolución es el estacionario, donde los estados son constantes en el tiempo, luego se tienen aquellos que se conocen como periódicos, en los cuales luego de un período exacto de tiempo el estado del sistema retorna de manera precisa a lo que ya ocurrió en un período previo. Las evoluciones estacionarias y periódicas se pueden predecir fácilmente, esto se puede realizar simplemente observando cuando el estado actual coincide con uno que ya haya ocurrido.

Aparte de este tipo de evoluciones existen sistemas dinámicos simples donde se pueden encontrar evoluciones que no son regulares y la evolución del mismo no puede ser predicha con facilidad, los sistemas que presentan estas características se conocen como caóticos.

1.1. Clasificación de los sistemas dinámicos

Los sistemas dinámicos pueden ser representados por una terna $(\mathcal{S}, \mathcal{T}, f^t)$ donde:

- \mathcal{S} es el espacio de estados.
- \mathcal{T} es un conjunto de números ordenados, que representa el tiempo.
- $f^t : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ es la regla dinámica que gobierna la evolución de los estados desde un tiempo t a un tiempo $t \in \mathcal{T}$.

El carácter determinista del operador de evolución es reflejado por las siguientes propiedades:

- $f^0 = I$.

Donde I es el operador identidad $I s = s \forall s \in \mathcal{S}$. Esta propiedad implica que el sistema no cambia espontáneamente su estado.

- $f^{t+\tau} = f^t \circ f^\tau$

Esto significa que $f^{t+\tau} s = f^t(f^\tau s) \forall s \in \mathcal{S}$. Esta última propiedad implica que el resultado de la evolución del sistema $t + \tau$ unidades de tiempo, a partir del estado s es la misma si el sistema evoluciona τ unidades de tiempo a partir del estado s y luego t unidades de tiempo a partir del estado $f^\tau s$, esto a su vez indica que la regla dinámica no cambia en el tiempo.

A los sistemas dinámicos los podemos separar en tres grupos, **continuos**, **parcialmente discretos** y **totalmente discretos**, los cuales a su vez se subdividen en **localizados** y **extendidos** en el espacio.

Los sistemas localizados son aquellos donde la evolución del estado no depende de las variables espaciales, mientras que en los sistemas extendidos se estudian las evoluciones temporales donde la evolución del estado si depende de las variables espaciales. En estos sistemas la extensión espacial del sistema es relevante ya que se puedan formar estructuras que presenten alta complejidad, mientras que los sistemas que poseen pequeñas extensiones generalmente presentan estructuras relativamente sencillas, las cuales son fáciles de predecir, sincronizar o controlar.

1.1.1. Sistemas dinámicos continuos

En estos sistemas el tiempo y el estado son continuos y se dividen en:

- **Localizados:** representados por ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Con este tipo de sistemas se pueden estudiar fenómenos en la física como por ejemplo, los osciladores amortiguados, forzados, el péndulo simple y doble [1], etc,

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right).$$

Estos sistemas pueden ser reducidos a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden uno de la forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

- **Extendidos:** Estos sistemas se representan mediante ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, en los cuales tanto el tiempo como el estado del sistema son continuos, como por ejemplo

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}.$$

Este tipo de sistemas permite estudiar en el área de la química el proceso de reacción y difusión, en el cual la reacción química convierte a una sustancia en otra y la difusión permite que las sustancias se esparzan por el espacio [2], otros sistemas que presentan fenómenos que pueden ser descritos mediante la reacción y difusión, son la formación de patrones en el pelaje de ciertos animales (leopardos), en las alas de las polillas, así como en la forma de pequeños protozoarios [3].

1.1.2. Sistemas dinámicos parcialmente discretos

Los sistemas parcialmente discretos son aquellos donde el tiempo es discreto, mientras que el estado del sistema es continuo. Estos sistemas representados por mapas, los cuales fueron estudiados por primera vez por H. Poincaré en 1890 [4], estos mapas pueden construirse para sistemas donde la evolución ocurre naturalmente a intervalos de tiempo

discretos o pueden ser obtenidos a partir de discretizaciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. Los mapas son utilizados para estudiar diversos fenómenos tanto en física, química, biología, etc, por ejemplo se han implementado estos para estudiar la interacción entre dos poblaciones y observar como es el crecimiento de estas de manera individual y cuando interactúan entre sí [5]. Estos sistemas se dividen en.

- **Localizados:** la evolución del sistema en cuestión queda expresada como una ecuación de recurrencia [6],

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n),$$

de forma que si, \mathbf{x}_n representa el estado del sistema en el tiempo n , el espacio de estados estará dado por \mathbb{R}^n y \mathbf{f} la regla dinámica. Esto es

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0),$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)),$$

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))),$$

$$= \quad \vdots,$$

$$\mathbf{x}_T = \mathbf{f}(\cdots \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))).$$

- **Extendidos:** Estos sistemas son representados por redes de mapas acoplados [7, 8].

Si s_n^i es el estado asociado al mapa i -ésimo en el tiempo n , entonces el estado futuro de cada mapa es determinado como

$$s_{n+1}^i = f(w_i, s_n^1, s_n^2, \dots, s_n^m),$$

donde $w_i = \{w_{i,j}\}_{j=1}^m$ es el conjunto de los parámetros asociados al mapa local f .

De esta forma, el estado global de la red puede ser representado como

$$\mathbf{s}_{n+1}^i = (f(w_1, s_n^1, s_n^2, \dots, s_n^m), \dots, f(w_m, s_n^1, s_n^2, \dots, s_n^m)),$$

o de forma resumida

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{f}(\Omega, \mathbf{s}_n),$$

donde Ω es una matriz $m \times m$ y $\mathbf{f}(\Omega, \cdot)$ es una regla que aplica $\mathbf{f}(w_i, \cdot)$ a cada sitio de la red.

1.1.3. Sistemas dinámicos totalmente discretos

Los sistemas totalmente discretos tienen la característica que tanto el tiempo como el estado del sistema son discretos, este tipo de sistema es representado por los autómatas celulares y pertenecen de forma natural al grupo de los sistemas extendidos. Una clase particular de estos son los elementales, los cuales fueron estudiados exhaustivamente por Wolfram [9],

$$x_i^{t+1} = f(\mathcal{N}(i)).$$

Los autómatas a pesar de la sencillez que presentan las reglas dinámicas que los rigen a la hora de implementarlos presentan comportamientos muy diversos, lo que permite utilizarlos para simular distintos fenómenos. Se han usado en modelos de tráfico con el fin de mejorar el desplazamiento vehicular en lugares donde no se puede ampliar las vías ya existentes, un mejor desplazamiento se puede lograr colocando semáforos en las intersecciones con el fin de controlar el flujo vehicular [10].

Otra aplicación que se les da a los autómatas celulares es a la hora de estudiar la dinámica de propagación de un incendio en un bosque [11], así como en el estudio de avalanchas con el fin de lograr predicciones de ocurrencia de las mismas [12].

1.2. Caos

En este estudio nos enfocaremos en sistemas dinámicos que posean un comportamiento caótico. Podemos definir a un sistema caótico como lo hace Devaney [13].

Se define una función caótica como una función continua $f^t : S \rightarrow S$ tal que:

1. Tiene un conjunto denso de órbitas.
2. Es topológicamente transitivo, el sistema dinámico $(\mathcal{S}, \mathcal{T}, f^t)$ es llamado topológicamente transitivo si se satisface que para todo par de conjuntos no vacíos U y V en \mathcal{S} existe un t no negativo en \mathcal{T} tal que $f^t(U) \cap V \neq \emptyset$.
3. Tiene sensibilidad a las condiciones iniciales.

De las tres características antes mencionadas se puede resaltar lo siguiente:

- La densidad de órbitas periódicas permite que se explore rápidamente una gran cantidad de valores.
- El concepto de transitividad topológica, se puede entender de la siguiente forma: Dadas dos zonas cualesquiera del espacio donde está definida la función, existe un punto en la primera zona cuya órbita visita, en algún momento, la segunda. Así, una función transitiva, aseguraría la existencia de puntos cuyas órbitas viajan de una parte arbitraria del espacio a otra parte igualmente arbitraria del mismo.
- La sensibilidad a las condiciones iniciales lo que nos indica es que si se evalúa la función en dos valores cuya diferencia es mínima, luego de transcurrida pocas iteraciones las órbitas que describen ambos estarán alejadas muy entre sí.

Debido a estas tres características que definió Devaney para los sistemas caóticos, se puede realizar sincronización y control sobre este tipo de sistemas aplicando pequeñas perturbaciones sobre el sistema.

De los sistemas dinámicos antes mencionados, se utilizarán los sistemas totalmente discretos, en particular los autómatas celulares, para realizar el estudio de la sincronización y control. En el capítulo 2 se dará una descripción detallada de los autómatas celulares.

Capítulo 2

Autómatas celulares

Un autómata celular es una idealización de un sistema físico en donde tanto el tiempo como el espacio son discretos y las cantidades físicas sólo pueden tomar valores finitos de un cierto conjunto de estados disponibles. El concepto de autómata celular fue introducido por primera vez por John Von Neumann [14] a finales de los años 40, con la idea de diseñar la primera computadora digital ya que estaba interesado en imitar el comportamiento del cerebro humano. Su idea era desarrollar una máquina con la complejidad del cerebro humano, la cual tuviese un mecanismo de control y reparación autónomo.

La evolución de muchos sistemas físicos se rigen por ecuaciones en derivadas parciales no lineales, debido a la no linealidad de las ecuaciones las soluciones de estos sistemas dinámicos pueden ser bastante complejas, en particular las soluciones que son sensibles a las condiciones iniciales ya que conducen a lo que se conoce como comportamiento caótico. Comportamientos similares pueden ocurrir en sistemas dinámicos discretos, por lo tanto sistemas basados en autómatas celulares presentan una alternativa para estudiar sistemas de este tipo.

Un sistema dinámico se puede representar mediante la construcción de un autómata que se ajuste lo mejor posible a la ecuación con la cual evoluciona el sistema, como es el caso del autómata celular para el modelado del tráfico vehicular [15, 16, 17], los incendios forestales [18, 19], partículas de una gas que colisionan [20, 21] y el sistema de reacción y difusión basada en la ecuación de Ginzburg-Landau [22, 23, 24].

2.1. Notación de los autómatas celulares unidimensionales

En esta sección se va a precisar cual va ser la notación que se utilizará para representar a los autómatas celulares en este trabajo. Formalmente describimos los autómatas celulares \mathcal{A}_c como una 4-tupla $(\mathcal{L}, \mathcal{S}, \mathcal{N}, f)$, donde \mathcal{L} es una red d-dimensional de celdas, \mathcal{S} corresponde al conjunto de estados posibles de una celda individual $\mathcal{S} = \{0, 1\}$, \mathcal{N} es una aplicación que define la vecindad de cada celda y f es una regla de transición local, que determina el estado de la i -ésima celda en el momento $t + 1$ dado los estado de su vecindad en el momento t ,

$$x_i^{t+1} = f(\mathcal{N}(i)). \quad (2.1)$$

El autómata celular más sencillo que se puede construir es un arreglo unidimensional binario de \mathcal{N} celdas con condiciones de borde periódicas, el estado global del autómata es representado como un vector $X^t = x_1^t, x_2^t, \dots, x_n^t$, donde x_i^t corresponde al bit de la i -ésima celda, el súper índice t indica la evolución temporal y el sub índice i nos indica cual es la posición de cada una de las celdas del autómata.

La evolución del autómata para el tiempo $t + 1$ se obtiene aplicando la regla de transición local f sobre el estado global del autómata $f(X^t)$ en el de tiempo t , es decir $X^{t+1} = f(x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t)$, la cual depende de sus dos vecinos más cercanos, siendo esta una vecindad de radio ($r = 3$) definido como elemental según Wolfram, esto quiere decir que hay ($2^3 = 8$) patrones para una vecindad. En la figura 2.1 se muestra un autómata celular unidimensional binario que posee condiciones de borde periódicas.



Figura 2.1: Autómata celular

Cuando el autómata presenta un 1 en una de sus celdas esta se colorea con negro, se dice que está encendida, pero si esta presenta un 0 en una de sus celdas se deja en blanco lo que significa que está apagada, la regla de evolución consiste en decidir si la

celda será un 0 o un 1 en la siguiente iteración. En la siguiente tabla se muestran los ocho posibles patrones (ternas) que se pueden formar para los autómatas elementales.

Terna	111	110	101	100	011	010	001	000
Patrón	■ ■ ■	■ ■ □	■ □ ■	■ □ □	□ ■ ■	□ ■ □	□ □ ■	□ □ □

Tabla 2.1: Ternas para los autómatas elementales

En estudios realizados por Wolfram logró clasificar los autómatas celulares elementales en 2^8 reglas de evolución, esto quiere decir que hay 256 autómatas celulares elementales diferentes, cuya nomenclatura estándar fue definida por Wolfram, a cada regla se le asigna un número que va del 0 al 255.

Veamos un ejemplo de lo antes mencionado, utilizando la nomenclatura de Wolfram tomamos el autómata al cual se le asignó el número 30. En la tabla se muestra como es la regla de evolución, en esta se tienen todas las ternas posibles y como evoluciona el estado (la celda del centro de la terna), para esta regla en particular.

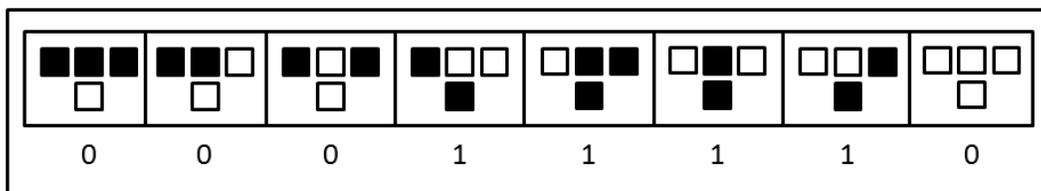


Figura 2.2: Evolución de las ternas del autómata celular para la Regla 30

Como se puede observar en la tabla anterior para conocer la evolución del estado, se necesita conocer el estado de esta celda y la de sus dos vecinos inmediatos, es decir para conocer la evolución de una sola celda se necesita una terna de estas, por lo tanto tenemos una función binaria que va de $\mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{B}^1$, en general la evolución de una celda es una función que va de $\mathbb{B}^N \rightarrow \mathbb{B}^{N-2}$.

2.2. Clasificación de los autómatas celulares

Los autómatas celulares pueden ser clasificados dependiendo de su comportamiento, una de las primeras y más conocida clasificación fue la que realizó Wolfram para

autómatas binarios unidimensionales, esta fue realizada de manera cualitativa mediante la observación de la evolución de los autómatas.

Dicha clasificación consta de cuatro clases:

- **Clase I:** Este tipo de autómatas celulares evolucionan en un tiempo muy corto a estados homogéneos donde todos los sitios poseen el mismo valor, esto independientemente de cual sea la condición inicial.

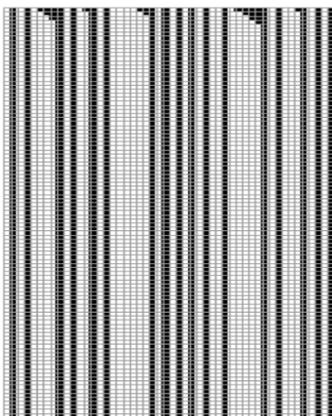


Figura 2.3: Autómata celular clase I

- **Clase II:** La evolución conduce a conjuntos estables o estructuras periódicas simples con períodos cortos, esto para casi todas las condiciones iniciales. La evolución de estos autómatas es análogo a algunos sistemas dinámicos que presentan ciclos límites.

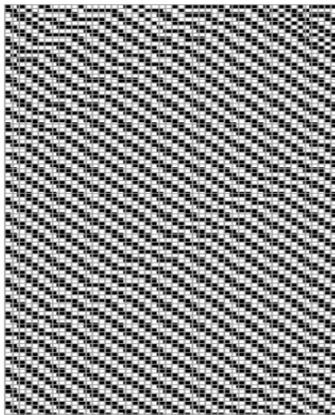


Figura 2.4: Autómata celular clase II

- **Clase III:** En este grupo de autómatas para casi todas las condiciones iniciales se tiene un comportamiento caótico, pequeñas perturbaciones en la condiciones iniciales tiene como resultado grandes cambios en la evolución del mismo. La evolución de estos autómatas es análoga a la evolución de algunos sistemas dinámicos continuos que presentan atractores extraños.

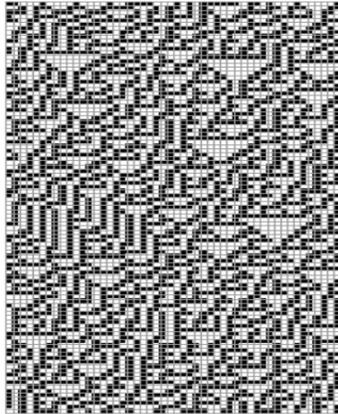


Figura 2.5: Autómata celular clase III

- **Clase IV:** Para este tipo de autómatas se tienen estructuras complejas las cuales presentan ciclos periódicos aislados.

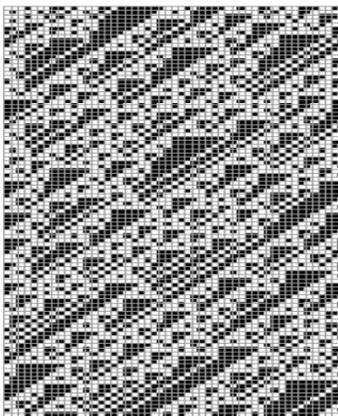


Figura 2.6: Autómata celular clase IV

En la siguiente tabla se muestran todos los autómatas elementales clase III.

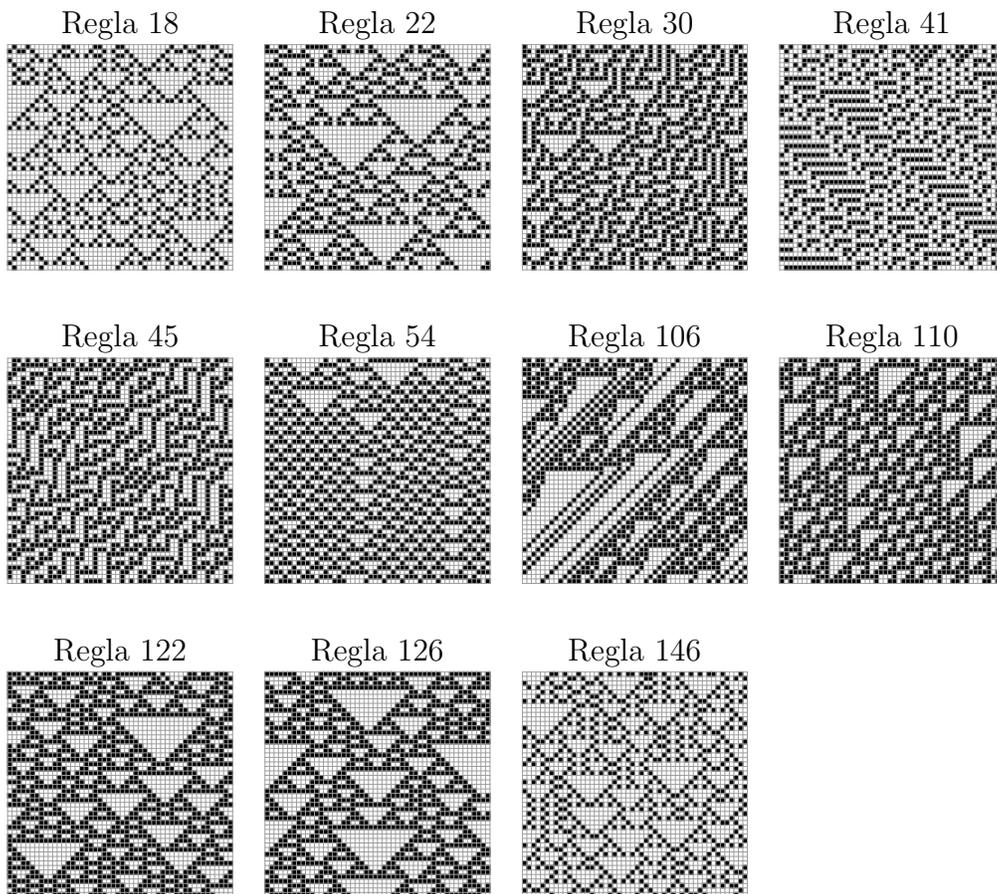


Tabla 2.2: Autómatas celulares elementales clase III

En este estudio nos centraremos en los autómatas celulares elementales clase III, los cuales son sistemas dinámicos extendidos totalmente discretos que poseen un comportamiento caótico.

Debido a la naturaleza binaria de los autómatas celulares elementales, es necesario explicar las funciones Booleanas y algunas de sus propiedades, las cuales serán de útiles para lograr la sincronización y control de los autómatas. En capítulo 3 se estudian las funciones Booleanas y las aproximaciones que se pueden realizar a estas.

Capítulo 3

Funciones Booleanas y aproximación lineal de funciones

3.1. Representación algebraica y tipos funciones Booleanas

Las funciones Booleanas pueden ser escritas mediante el uso de los operados \oplus OR exclusivo que denota la suma módulo 2 y \odot AND que corresponde a la multiplicación módulo 2. En la siguiente tabla se muestra como se escribe en la notación Booleana las reglas de evolución para los autómatas celulares elementales que se van a utilizar en este trabajo.

Regla	Función
18	$(1 \oplus x_i) \odot (x_{i-1} \oplus x_{i+1})$
22	$x_{i-1} \oplus x_i \oplus x_{i+1} \oplus x_{i-1} \odot x_i \odot x_{i+1}$
30	$x_{i-1} \oplus x_i \oplus x_{i+1} \oplus x_i \odot x_{i+1}$
41	$1 \oplus x_{i-1} \oplus x_i \oplus x_{i-1} \odot x_i \oplus x_{i+1} \oplus x_{i-1} \odot x_i \odot x_{i+1}$
45	$1 \oplus x_{i-1} \oplus x_{i+1} \oplus x_i \odot x_{i+1}$
54	$x_{i-1} \oplus x_i \oplus x_{i+1} \oplus x_{i-1} \odot x_{i+1}$
106	$x_{i-1} \odot x_i \oplus x_{i+1}$
110	$x_i \oplus x_{i+1} \oplus x_i \odot x_{i+1} \oplus x_{i-1} \odot x_i \odot x_{i+1}$
122	$x_{i-1} \oplus x_{i+1} \oplus x_{i-1} \odot x_{i+1} \oplus x_{i-1} \odot x_i \odot x_{i+1}$
126	$x_{i-1} \oplus x_i \oplus x_{i-1} \odot x_i \oplus x_{i+1} \oplus x_{i-1} \odot x_{i+1} \oplus x_i \odot x_{i+1}$
146	$x_{i-1} \oplus x_{i-1} \odot x_i \oplus x_{i+1} \oplus x_i \odot x_{i+1} \oplus x_{i-1} \odot x_i \odot x_{i+1}$

Tabla 3.1: Representación Booleana de los Autómatas Celulares

Una función Booleana algebraica que sea al menos de grado uno se llama función

Booleana afín, la forma general para n variables viene dada por

$$f_{\text{afin}}(X) = k_n x_n \oplus k_{n-1} x_{n-1} \oplus \cdots \oplus k_2 x_2 \oplus k_1 x_1 \oplus k_0 \quad \text{donde } k_i \in \mathcal{S} \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

Si el término constante de la función afín es cero $k_0 = 0$, entonces la función es llamada función Booleana lineal. Sí $k_0 = 1$ entonces la función afín tiene la forma $f_{\text{afin}}(X) = f_{\text{lineal}}(X) \oplus 1$, la cual es el complemento de alguna regla lineal, por lo tanto la función Booleana afín con cualquier número de variables son reglas lineales o sus complementos.

3.2. Teoremas de las funciones Booleanas y matrices Jacobianas

La forma general de escribir cualquier función Booleana f de p variables independientes $y_1, y_2, y_3, \dots, y_p$ es de la siguiente forma [25],

$$f(Y) = k_0 \oplus \sum_{i=1}^p k_i y_i \oplus \sum_{i=1}^p \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^p k_{ij} y_i y_j \oplus \sum_{i=1}^p \sum_{\substack{j=1 \\ i < j < k}}^p \sum_{k=1}^p k_{ijk} y_i y_j y_k \oplus \cdots \oplus k_{ijk\dots p} y_1 y_2 \cdots y_p, \quad (3.1)$$

donde cada coeficiente $k_0, k_1, k_2, \dots, k_{12}, k_{13} \dots k_{123} \dots k_{123\dots p}$, puede tomar el valor de 0 o 1, $Y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_p)$, es un vector fila de dimensión $1 \times p$ y \sum es una suma “módulo 2”.

La función $f(Y)$ se puede escribir de la siguiente manera

$$f(Y) = \nabla f \odot Y^T, \quad (3.2)$$

donde ∇ es el gradiente de f , el símbolo \cdot denota la multiplicación matricial módulo 2 y Y^T es la transpuesta de Y , la cual se escribe como un vector columna $p \times 1$, esta relación se satisface sí y sólo sí, $k_0 = k_{12} = k_{13} = \cdots = k_{1234} = \cdots = 0$. En otras palabras, son todas aquellas funciones Booleanas que contengan productos impares en sus variables independientes.

Tomemos una función elemental impar arbitraria cualquiera $f_3 = y_i y_j y_k$ donde $i, j, k \in \{1, 2, 3, \dots, p\}, i \neq j \neq k$. Se puede ver fácilmente que

$$\frac{\partial f_3}{\partial y_r} = \begin{cases} y_j y_k & \text{si } r = i, \\ y_k y_i & \text{si } r = j, \\ y_i y_j & \text{si } r = k, \\ 0 & \text{de otra manera,} \end{cases} \quad r \in \{1, 2, \dots, p\}$$

obteniendo para este caso,

$$\begin{aligned} \nabla f_3 &= y_i \odot \left(\frac{\partial f_3}{\partial y_i} \right) \oplus y_j \odot \left(\frac{\partial f_3}{\partial y_j} \right) \oplus y_k \odot \left(\frac{\partial f_3}{\partial y_k} \right), \quad \text{los otros términos son cero,} \\ &= y_i y_j y_k \oplus y_j y_k y_i \oplus y_k y_i y_j = (y_i y_j y_k \oplus y_i y_j y_k) \oplus y_i y_j y_k, \\ &= 0 \oplus y_i y_j y_k = y_i y_j y_k, \\ &= f_3(Y). \end{aligned}$$

Más aún la relación $f(Y) = \nabla f \odot Y^T$ también se satisface para cualquier combinación lineal de funciones elementales que sean impares.

Supongamos que $f(Y) = y_1 \oplus y_1 y_2 y_3$, entonces $f_1(Y) = y_1$, $f_3(Y) = y_1 y_2 y_3$.

$$\begin{aligned} \text{Entonces } f(Y) &= f_1(Y) \oplus f_3(Y), \\ \therefore \nabla f &= \nabla(f_1 \oplus f_3) = \nabla f_1 \oplus \nabla f_3, \\ \therefore \nabla f \odot Y^T &= (\nabla f_1 \oplus \nabla f_3) \odot Y^T, \\ &= \nabla f_1 \odot Y^T \oplus \nabla f_3 \odot Y^T, \\ &= f_1(Y) \oplus f_3(Y), \quad \text{Ambas son funciones elementales impares,} \\ &= f(Y). \end{aligned}$$

Por lo visto anteriormente la relación $f(Y) = \nabla f \odot Y^T$ se satisface sí y sólo sí $f(Y)$ es una combinación lineal de funciones elementales impares. Ahora bien si se tiene una función elemental par se puede escribir de la siguiente manera

$$f(Y) = \nabla f \odot Y^T \oplus \mathcal{E}(Y). \quad (3.3)$$

Donde $\mathcal{E}(Y)$ se le denomina la función de error o el error de $f(Y)$ la cual es una suma módulo 2 de variables independientes al igual que los presentes en $f(Y)$, por ejemplo,

$$\begin{aligned} f(Y) &= y_1 y_2 y_3 \oplus y_2 y_3 \oplus y_1 \oplus 1, \\ \mathcal{E}(Y) &= y_2 y_3 \oplus 1. \end{aligned}$$

3.2.1. Matrices Jacobianas para autómatas celulares lineales y no lineales

La matriz Jacobiana es una matriz formada por las derivadas parciales de primer orden de una función, una de las aplicaciones más interesantes de esta matriz es la posibilidad de aproximar linealmente a la función en un punto, en este sentido, el Jacobiano representa la derivada de una función multivariable.

La evolución de los autómatas celulares para cualquier instante de tiempo se puede escribir de la siguiente forma $X^{t+1} = F(X^t)$. Cuando se tienen autómatas lineales esta relación se puede reescribir de la siguiente manera

$$X^{t+1} = F(X^t) = \mathbf{J} \odot X^t, \quad (3.4)$$

donde \mathbf{J} es conocida como la matriz Jacobiana la cual es binaria. La evolución de los autómatas celulares puede ser escrita de esta forma, ya que \mathbf{J} es constante para los autómatas celulares lineales, por lo tanto la evolución de estos no es más que aplicar la matriz Jacobiana sucesivas veces para así obtener un mapa de la evolución de los autómatas.

Para el caso de autómatas celulares no lineales la relación

$$X^{t+1} \neq \mathbf{J} \odot X^t, \quad (3.5)$$

no es válida debido a que el Jacobiano \mathbf{J} es una función del estado X^t , por lo tanto esta matriz no es constante y cambia dependiendo del valor que tenga el estado X^t en el tiempo t .

3.3. Aproximación lineal de funciones continuas

Un método para aproximar funciones continuas es el desarrollo en serie de Taylor, si se considera una función $f(x)$ que es continuamente diferenciable en el intervalo (a, b) , sea $x_0 \in (a, b)$ y suponga que deseamos conocer aproximadamente el valor de la función $f(x)$ en un punto $x \in (a, b)$ y cercano a x_0 en términos del valor de la función y sus derivadas en x_0 .

La aproximación puede realizarse mediante una serie de potencias cuya variable sea $(x - x_0)$, es decir,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots, \quad (3.6)$$

que puede ser escrito de una manera más compacta como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (3.7)$$

3.4. Aproximación lineal de funciones discretas

Una vez conocido como se aproximan funciones continuas, se puede extrapolar al caso de funciones discretas, particularmente a las funciones binarias, como es el caso de los autómatas celulares, en los cuales se pueden utilizar las funciones Booleanas y sus propiedades para realizar aproximaciones en dichos autómatas. Según Vichniac [26] se puede definir la derivada Booleana \mathcal{F}' de \mathcal{F} como una matriz Jacobiana $N \times N$ en términos de las derivadas parciales de f cuyos elementos son

$$\mathcal{F}'_{i,j} = \frac{\partial x_i^{t+1}}{\partial x_j^t}, \quad (3.8)$$

donde x_i^{t+1} viene dada por la la regla local $f(x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t)$. La derivada parcial de esta expresión se define como

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = f(x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \oplus f(x_i, \dots, \bar{x}_j, \dots, x_n), \quad (3.9)$$

donde $f(x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$ es la evolución del autómata y $f(x_i, \dots, \bar{x}_j, \dots, x_n)$ es la evolución del autómata con la j -ésima celda conjugada. El símbolo \oplus es la operación Booleana OR exclusivo y $\bar{x}_j = x_j \oplus 1$ es el complemento binario de x_j .

Para ver como se aplica lo antes mencionado tomemos la regla 30 de los autómatas elementales, la cual posee la siguiente regla de evolución,

$$f_{(30)} = x_{i-1} \oplus x_i \oplus x_{i+1} \oplus x_i x_{i+1}, \quad (3.10)$$

orden, obteniendo de esta manera el Jacobiano aproximado que es constante y la matriz Jacobiana para la regla 30 vendrá dada por.

$$\mathcal{F}'_{(30)} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & & & & \\ & 1 & 1 & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & & & & & 1 & 1 & \end{pmatrix}$$

Las definiciones de las funciones Booleanas y sus aproximaciones explicadas en este capítulo, se aplicarán en los capítulos 4 y 5, para estudiar la sincronización y el control de los autómatas celulares.

Capítulo 4

Sincronización

La sincronización consiste en que dos sistemas dinámicos logren seguir la misma trayectoria en un tiempo finito, esto se puede lograr con dos sistemas que evolucionan de manera independiente bajo la acción de una misma regla dinámica pero que se encuentran acoplados de alguna forma, ya sea bidireccional o unidireccional,

$$\begin{aligned}x' &= F(x) + \alpha(y - x), \\y' &= F(y) + \alpha(x - y).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Se llama **maestro** al sistema que se encarga de enviar la información y **esclavo** al sistema que va imitar al maestro mediante la información que recibe del maestro a través del acoplamiento que existe entre ambos. En este estudio se va a utilizar un acoplamiento unidireccional, de esta manera la información se transmitirá desde el maestro hacia el esclavo exclusivamente.

4.1. Sincronización de autómatas lineales

Como se mencionó anteriormente dos sistemas dinámicos se sincronizan si luego de haber transcurrido un largo período de tiempo el comportamiento de estos es el mismo, esta similitud en su comportamiento asintótico, es debido a la información que se envía desde el maestro hacia el esclavo.

En este modelo consideremos un autómata celular elemental \mathcal{A}_c , el cual está definido como una 4-tupla $(\mathcal{L}, \mathcal{S}, \mathcal{N}, f)$, que se rige por una regla de evolución local que viene dada por $X^{t+1} = f(x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t)$, de tamaño N con una vecindad de radio $r = 3$, en

donde cada celda puede adoptar uno de los dos posibles estados $\mathcal{S} = \{0,1\}$ y el estado del autómata en el tiempo t es $X^t = \{x_1^t, x_2^t, \dots, x_N^t\}$.

En general para los autómatas lineales la regla de evolución se puede escribir como

$$f(x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t) = \sum_{j=i-1}^{i+1} a_j x_j^t \pmod{2} \quad a_j \in \{0, 1\}. \quad (4.2)$$

Si se define el estado del autómata maestro como $X^t = \{x_1^t, x_2^t, \dots, x_N^t\}$, la evolución del sistema viene dada por

$$X^{t+1} = F(X^t). \quad (4.3)$$

El estado del autómata esclavo se define como $\tilde{X}^t = \{\tilde{x}_1^t, \tilde{x}_n^t, \dots, \tilde{x}_N^t\}$, entonces la evolución de este sistema se puede escribir de la siguiente manera

$$\tilde{X}^{t+1} = [\mathbf{1} \oplus \boldsymbol{\kappa}] \odot F(\tilde{X}^t) \oplus \boldsymbol{\kappa} \odot F(X^t), \quad (4.4)$$

donde $\boldsymbol{\kappa}$ es el vector de acoplamiento $(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_N)$, que está conformado por ceros y unos. Por otro lado $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$ es un vector de tamaño N .

Cuando se hace la diferencia entre ambos autómatas $\Delta^{t+1} = X^{t+1} \oplus \tilde{X}^{t+1}$,

$$\begin{aligned} \Delta^{t+1} &= F(X^t) \oplus [\mathbf{1} \oplus \boldsymbol{\kappa}] \odot F(\tilde{X}^t) \oplus \boldsymbol{\kappa} \odot F(X^t), \\ &= [\mathbf{1} \oplus \boldsymbol{\kappa}] \odot F(X^t) \oplus [\mathbf{1} \oplus \boldsymbol{\kappa}] \odot F(\tilde{X}^t), \\ &= [\mathbf{1} \oplus \boldsymbol{\kappa}] \odot F^0(X^t \oplus \tilde{X}^t), \\ &= [\mathbf{1} \oplus \boldsymbol{\kappa}] \odot F^0(\Delta^t). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Cuando $\mathbf{1} = \boldsymbol{\kappa}$, la diferencia entre los autómatas converge a cero, entonces el sistema maestro-esclavo se sincroniza, a $F^0 = F(X^t) \oplus F(\tilde{X}^t)$ se le llama la parte aditiva de F y su operador de evolución lineal se rige por la regla local

$$f(x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t) = c_{i-1} x_{i-1}^t, c_i x_i^t, c_{i+1} x_{i+1}^t. \quad (4.6)$$

La evolución de la diferencia Δ^{t+1} depende de un operador el cual está compuesto por dos acciones. Primero se le aplica a Δ^t el operador F^0 que difiere de F sólo en la constante c y luego se multiplica a $F^0(\Delta^t)$ por la secuencia $[\mathbf{1} \oplus \boldsymbol{\kappa}]$. Esta última

operación lo que hace es reemplazar con algunos 0 ciertas coordenadas de $F^0(\Delta^t)$, es decir las coordenadas donde κ es 1.

Como los autómatas que se tienen son lineales podemos escribir el operador evolución del sistema como una matriz \mathbf{M} de tamaño $N \times N$ [28], de modo que el sistema evolucionará de la siguiente forma

$$\Delta^{t+1} = \mathbf{M}(\Delta^t), \quad (4.7)$$

la doble acción antes mencionada está resumida en el operador lineal \mathbf{M} , en términos de \mathbf{M} , la condición de sincronización para un tiempo muy grande es que $\mathbf{M}(\Delta^t) = \mathbf{0}$.

La parte aditiva F^0 de F es un operador lineal representado por una matriz tridiagonal excepto por dos elementos en las esquinas que están fuera de la diagonal, debido a las condiciones de borde periódicas. Los valores de esta son tomados de la regla local de la siguiente manera

$$[F^0]_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{para } |i - j| > 1, \\ c_{i-j} & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

La matriz \mathbf{M} se obtiene a partir de $[F^0]$ como se muestra

$$\mathbf{M}_{i,j} = \begin{cases} [F^0]_{i,j} & \text{si } \kappa_i = 0 \text{ o } \kappa_j = 0, \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Por lo tanto \mathbf{M} se obtiene de $[F^0]$ colocando ceros en las filas y columnas, en las coordenadas donde κ es 1, al hacer esto se obtienen bloques de submatrices, por lo que el problema de sincronización se reduce a la pregunta si \mathbf{M} es o no nilpotente. Una matriz \mathbf{M} es nilpotente si existe un entero k tal que $\mathbf{M}^k = \bar{\mathbf{0}}$, donde $\bar{\mathbf{0}}$ es una matriz con las mismas dimensiones que \mathbf{M} con todos sus elementos igual a 0.

Ya que \mathbf{M} consiste de un conjunto de submatrices, que son tridiagonales similares a $[F^0]$ pero con una dimensión más pequeña, el problema de sincronización se reduce a determinar si cada una de estas submatrices independientes de \mathbf{M} son nilpotentes [29, 30].

4.2. Sincronización de autómatas no lineales

Como se describió en la sección anterior, es posible realizar sincronización en autómatas celulares lineales de una forma bastante simple, el paso a seguir es ver como se puede realizar ahora la sincronización de autómatas celulares no lineales idénticos [31].

Consideremos el autómata descrito por la 4-tupla $(\mathcal{L}, \mathcal{S}, \mathcal{N}, f)$, donde $X^{t+1} = F(X^t)$ (sistema maestro) y $\tilde{X}^{t+1} = F(\tilde{X}^t)$ (el sistema esclavo), ambos con condiciones de borde periódica y diferentes condiciones iniciales X^0 y \tilde{X}^0 . El sistema logra la sincronización sí $(X^0 \oplus \tilde{X}^0 \rightarrow 0)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para lograr la sincronización conectamos a los sistemas con un acoplamiento lineal unidireccional que penaliza la separación entre los estados de los sistemas maestro y esclavo [32],

$$\begin{aligned} X^{t+1} &= F(X^t), \\ \tilde{X}^{t+1} &= F(\tilde{X}^t) \oplus \mathbf{K} \odot (X^t \oplus \tilde{X}^t). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Donde \mathbf{K} es la matriz que define el acoplamiento y determina el número y posición de los sitios donde el sistema maestro perturba al sistema esclavo y a estos sitios los llamaremos sitios de acoplamiento.

La evolución de la diferencia entre los autómatas se define como $\Delta^{t+1} = X^{t+1} \oplus \tilde{X}^{t+1}$ y viene dada por

$$\Delta^{t+1} = F(X^t) \oplus F(\tilde{X}^t) \oplus \mathbf{K} \odot (X^t \oplus \tilde{X}^t), \quad (4.9)$$

donde la aproximación de primer orden de $F(\tilde{X}^t)$ viene dada por la ecuación (3.11), pero evaluada en el estado instantáneo de la dinámica,

$$F(\tilde{X}^t) \approx F(X^t) \oplus \mathbf{J}(X^t) \odot (X^t \oplus \tilde{X}^t). \quad (4.10)$$

Usando (4.9) y (4.10) y el hecho de que $F(X^t) \oplus F(X^t) = 0$,

$$\begin{aligned} \Delta^{t+1} &\approx F(X^t) \oplus F(X^t) \oplus \mathbf{J}(X^t) \odot (X^t \oplus \tilde{X}^t) \oplus \mathbf{K} \odot (X^t \oplus \tilde{X}^t), \\ &\approx [\mathbf{J}(X^t) \oplus \mathbf{K}] \odot \Delta^t, \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde $\mathbf{J}(X^t)$ es la matriz Jacobiana de $F(X^t)$ y se define [26] como

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_j} \right|_x = f(x_i, \dots, x_j \dots, x_n) \oplus f(x_i, \dots, \bar{x}_j, \dots, x_n). \quad (4.12)$$

El i -ésimo elemento de la matriz lo podemos escribir de la siguiente manera

$$\left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_x = f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \oplus f((x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \oplus \delta_j), \quad (4.13)$$

donde $\delta_j \in \mathbb{B}^3$ con $j = (i-1, i, i+1)$, el cual es un vector de estados, con 1 en el sitio j y 0 en cualquier otro sitio.

Vale la pena señalar que el Jacobiano es una matriz tridiagonal excepto por dos elementos en las esquinas que están fuera de la diagonal, debido a las condiciones de borde periódicas. Esta estructura puede ser explicada de la siguiente forma: cada elemento en la diagonal principal representa una celda, un 1 en esta diagonal indica que este sitio es afectado en el futuro por un cambio en el presente; un 1 en la columna indica que este sitio es afectado en el futuro por cambios actuales en sus vecinos y un 1 en la fila indica que los cambios en este sitio afectan en el futuro a sus vecinos.

De (4.9) queda claro que si $\mathbf{K} = \mathbf{J}(X^t)$ la diferencia entre los autómatas converge y el sistema maestro-esclavo se sincroniza (4.8), si la aproximación (4.10) es lo suficientemente buena. Esta función de acople genera una perturbación al sistema esclavo que varía en el tiempo y afecta a todos los sitios del sistema.

Con el fin de hacer “pequeña” la perturbación o más bien perturbar de manera constante una cantidad fija de sitios del autómata menor que \mathbf{N} , en un instante dado, se simplificará el acople suprimiendo la variación en el tiempo de $\mathbf{J}(X^t)$ aproximándola por una matriz constante definida como

$$\mathbf{J}(q) = H \left(\frac{1}{m} \sum_{t=1}^m \mathbf{J}(X^t) - \mathbf{Q}(q) \right). \quad (4.14)$$

Donde m es un tiempo de observación de un orden de magnitud menor que el tiempo T , que es cuando se mide la sincronización, $\frac{1}{m} \sum_{t=1}^m \mathbf{J}(X^t)$ es el Jacobiano promedio de

m condiciones iniciales, cuyos elementos se calculan mediante (4.13), $\mathbf{Q}(q)$ es una matriz tridiagonal donde todos los elementos son iguales a q excepto por dos elementos en las esquinas que están fuera de la diagonal, con $q \in [\frac{1}{2}, 1]$.

$$\mathbf{Q}(q) = \begin{pmatrix} q & q & & & & & q \\ q & q & q & & & & \\ & q & q & q & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & q & q & q \\ q & & & & q & q & \end{pmatrix}$$

El valor de q es una suerte de tolerancia en la aproximación de la matriz Jacobiana, que varia de 0,5 hasta 1 con un incremento δq , con el propósito de ir eliminando sitios de perturbación para así obtener el número mínimo de sitios acoplados donde el sistema maestro-esclavo sincroniza. H es la función de Heaviside aplicada componente a componente en toda la matriz, para de esta manera convertir al Jacobiano $\mathbf{J}(q)$ en binario,

$$H = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{P} \geq 0,5, \\ 0 & \text{si } \mathbf{P} < 0,5, \end{cases} \quad (4.15)$$

si se define $\mathbf{P} = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m \mathbf{J}(X^t) - \mathbf{Q}(q)$.

Tomando en cuenta el hecho de que el número de unos en las filas y columnas de la matriz Jacobiana indica como el sitio particular difunde perturbaciones (mide la sensibilidad del sitio a perturbaciones vecinas), es posible escoger la matriz de acople como

$$\mathbf{K}_{c,i} = \begin{cases} \mathbf{J}_{c,i}(q) & \text{si } h \geq 2, \\ 0 & \text{si } h < 2, \end{cases} \quad (4.16)$$

donde h es la suma de los elementos de la tridiagonal para cada fila y se calcula de la siguiente manera

$$h = \sum_{n=-1}^1 \mathbf{J}_{c+n,n}(q). \quad (4.17)$$

En [25] se prueba que la aproximación lineal (4.10) es exacta si $F(\tilde{X}^t)$ posee términos con potencias impares es decir, primer, tercer orden, etc, por lo tanto podemos escribir $X^{t+1} = \mathbf{J}(X^t) \odot X^t$. Pero si $F(\tilde{X}^t)$ contiene términos de segundo orden tenemos que $X^{t+1} \neq \mathbf{J}(X^t) \odot X^t$ y el error de aproximación dependerá de estos términos de segundo orden, sin embargo la mayoría de los casos la aplicación reiterativa de la perturbación sobre el sistema esclavo lo conduce a un estado muy cercano del maestro.

Para cuantificar que tan buena es la sincronización entre dos autómatas se puede medir la distancia de Hamming normalizada entre el maestro y el esclavo,

$$\rho(\mathbf{X}^T, \tilde{\mathbf{X}}^T) = \frac{1}{\mathbb{N}} \sum_i^{\mathbb{N}} |X_i^T - \tilde{X}_i^T|, \quad (4.18)$$

y la fracción de sitios perturbados N promediada sobre \mathbb{N} condiciones iniciales,

$$N = \frac{\text{número de sitios perturbados}}{\mathbb{N}}. \quad (4.19)$$

Los resultados que se muestran a continuación son de la sincronización de dos autómatas celulares idénticos Clase III, donde el maestro y el esclavo se encuentran acoplados de forma unidireccional. En todos los casos que se presentan hay una transición rápida desde un error de sincronización pequeño hasta un error de sincronización grande (desde un número grande de sitios acoplados hasta sitios desacoplados) como se ha observado en estudios previos [33, 34, 35], esta es una transición de fase en el no equilibrio, la cual pertenece a la clase universal conocida como percolación dirigida.

En 1957 Broadbent y Hammersley [36] formularon el problema matemático de la percolación como la base de diferentes problemas, como por ejemplo el de un medio poroso por el cual circula una cierta cantidad de agua, como se esparce una infección y la andanza en un laberinto.

La percolación dirigida es fácilmente conceptualizada como una generalización de la percolación isotrópica [37, 38] la cual se definió originalmente como un modelo geométrico para la conductividad en un medio conectado al azar. Las conexiones entre los sitios de una red se les da una dirección definida, por lo tanto el flujo sólo puede ocurrir entre los

sitios de la red que están conectados y conectados en la orientación correcta. Los enlaces se asignan en base a un parámetro p de todo el sistema.

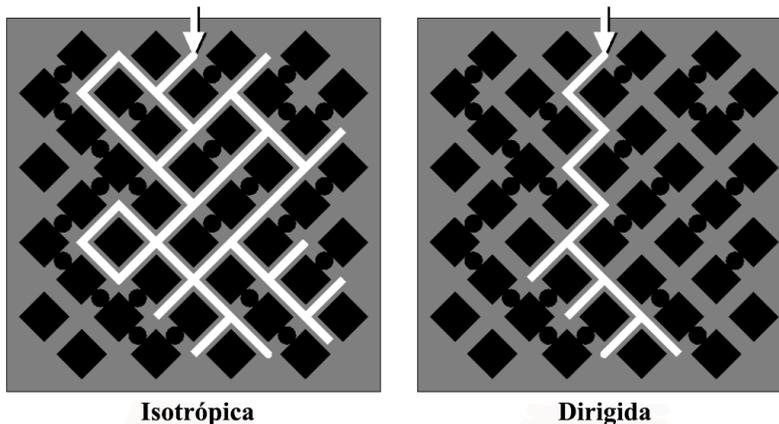


Figura 4.1: Percolación.

Esto se ve fácilmente en la figura 4.1, que muestra la misma configuración de los enlaces bajo la percolación isotrópica y percolación dirigida. En el caso de percolación isotrópica, la difusión ocurre en todas las direcciones, mientras que en la percolación dirigida la difusión sólo puede ocurrir a lo largo de una dirección determinada.

Hay que tener en cuenta que el grupo de sitios conectados en percolación dirigida es un subconjunto de la agrupación en el caso isotrópico. Se puede pensar en la difusión del agua en una hoja de papel sobre una superficie plana como un ejemplo de percolación isotrópica, pero si uno voltea el papel verticalmente (ignorando la acción capilar) la acción de la gravedad cambia el comportamiento a percolación dirigida.

Al igual que en el equilibrio, también se espera que en el no equilibrio los fenómenos críticos exhiban leyes de escala con exponentes críticos. Sin embargo en la percolación dirigida la dimensión temporal en general no es equivalente a la dimensión espacial.

Por lo tanto se requiere de un nuevo conjunto de exponentes asociados a esta dimensión única, si se tomara en cuenta un campo externo y los efectos de tamaño finito, estos también introducirían más exponentes críticos y sería una tarea bastante tediosa e innecesaria explicar en detalle todos los exponentes críticos y las relaciones de escala, así que se va a explorar sólo algunos de los más interesantes e importantes en esta sección.

En los casos más simples de clase universal con transiciones de fase en los que se tienen estados absorbentes se pueden caracterizar por cuatro exponentes críticos: $\beta, \beta', v_{\parallel}, v_{\perp}$ [39]. Fuera de la fase de absorción, la densidad de sitios activos eventualmente se estabiliza a un valor estacionario. Naturalmente, este valor debe ser cero en el estado absorbente y cerca de la transición de densidad estacionaria decae como una ley de potencias con exponente β .

Un parámetro relacionado con la densidad estacionaria de sitios activos es esencialmente una probabilidad P_{∞} , elegida al azar que decide que sitios estarán activos indefinidamente. Este valor también debe ir a cero por debajo de la transición y lo hace con el exponente β' . Se puede demostrar que debido a la simetría de la inversión temporal de la percolación dirigida existe una relación de escala $\beta = \beta'$.

La primera consecuencia de la falta de equivalencia de las dimensiones temporales y espaciales en la percolación dirigida es que dos longitudes de correlación independientes divergen cuando se acercan al punto crítico. La razón para dos diferentes longitudes de correlación se ve fácilmente si se observa la figura 4.1. Por definición, en el caso isótropo no hay dirección preferida por lo que las longitudes de correlación temporales (horizontales) y espaciales (verticales) deben ser iguales por simetría.

En el caso dirigido la simetría se rompe porque las direcciones son diferentes. La asociación de la dirección preferida con el tiempo conduce a una longitud de correlación temporal con exponente crítico v_{\parallel} y una longitud de correlación espacial con exponente v_{\perp} .

En segundo lugar, también hay que tener en cuenta la escala como función del tiempo. Una función importante que captura la dinámica tanto de la creación del sitio activo y la destrucción es la función de par-conectividad, que se define como la probabilidad de que dos sitios activos en diferentes lugares y tiempos pueden ser conectados por un camino dirigido de los enlaces abiertos.

Parte de la forma de escalamiento de esta función es el exponente crítico θ , llamado el exponente de deslizamiento inicial crítico, en la figura 4.2 se observa como es el cambio del exponente θ , en la cual se puede observar que existe una transición de fase.

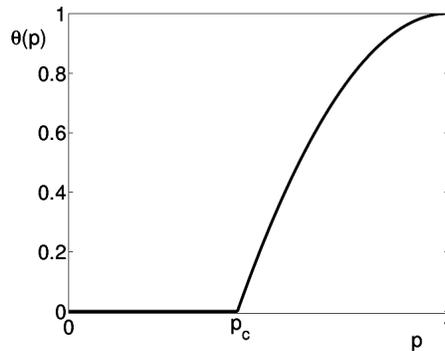


Figura 4.2: Transición de Fase.

Para tiempos pequeños, θ describe el crecimiento de ley de potencia del número medio de sitios activos,

$$\theta(p) = cp^k.$$

El estudio se realizó sobre un autómata celular de 100 celdas, con 500 condiciones iniciales escogidas de manera aleatoria, en todos los experimentos el tiempo de observación $m = 500$ y el tiempo total de la evolución $T = 5 \times 10^3$. En los gráficos que se van a presentar a continuación la línea roja (diamantes) y azul (círculos) representan los errores de sincronización $\rho(\mathbf{X}^T, \tilde{\mathbf{X}}^T)$. La primera utilizando el Jacobiano determinista y la segunda utilizando el Jacobiano aleatorio, la línea morada (cuadrados) es la fracción de sitios perturbados N y q el valor del parámetro que indica como se disminuyen los sitios de perturbación.

Para el error aparece una transición de fase (primer orden), que trae como consecuencia la aparición de una ley de potencias y para calcular el valor del exponente crítico se utiliza la siguiente ecuación

$$\rho(\mathbf{X}^T, \tilde{\mathbf{X}}^T) = C(q - q_c)^\beta, \quad (4.20)$$

en el recuadro, la línea punteada es la gráfica de la ecuación (4.20) en escala logarítmica. Los valores utilizados para construir esta gráfica son aquellos que se encuentran en la región donde ocurre la transición de fase, con el fin de determinar el valor del parámetro β (exponente crítico), para algún q_c (valor crítico donde ocurre la transición) y C (constante de proporcionalidad). En la percolación dirigida el valor de $\beta = 0,276486 \pm 0,000008$ [39].

En el estudio se tomarán cuatro cifras significativas, donde se considerará la diferencia con el valor reportado para la percolación dirigida en la cuarta cifra significativa, la cual se colocará entre paréntesis.

Para las reglas 18, 22, 30, 41, 45 y 54, el parámetro y el exponente crítico son $q_c = 0,760$ y $\beta = 0,276(4)$ regla 18, $q_c = 0,821$, $\beta = 0,274(7)$ regla 22, $q_c = 0,522$, $\beta = 0,276(7)$ regla 30, $q_c = 0,815$, $\beta = 0,276(4)$ regla 41 respectivamente.

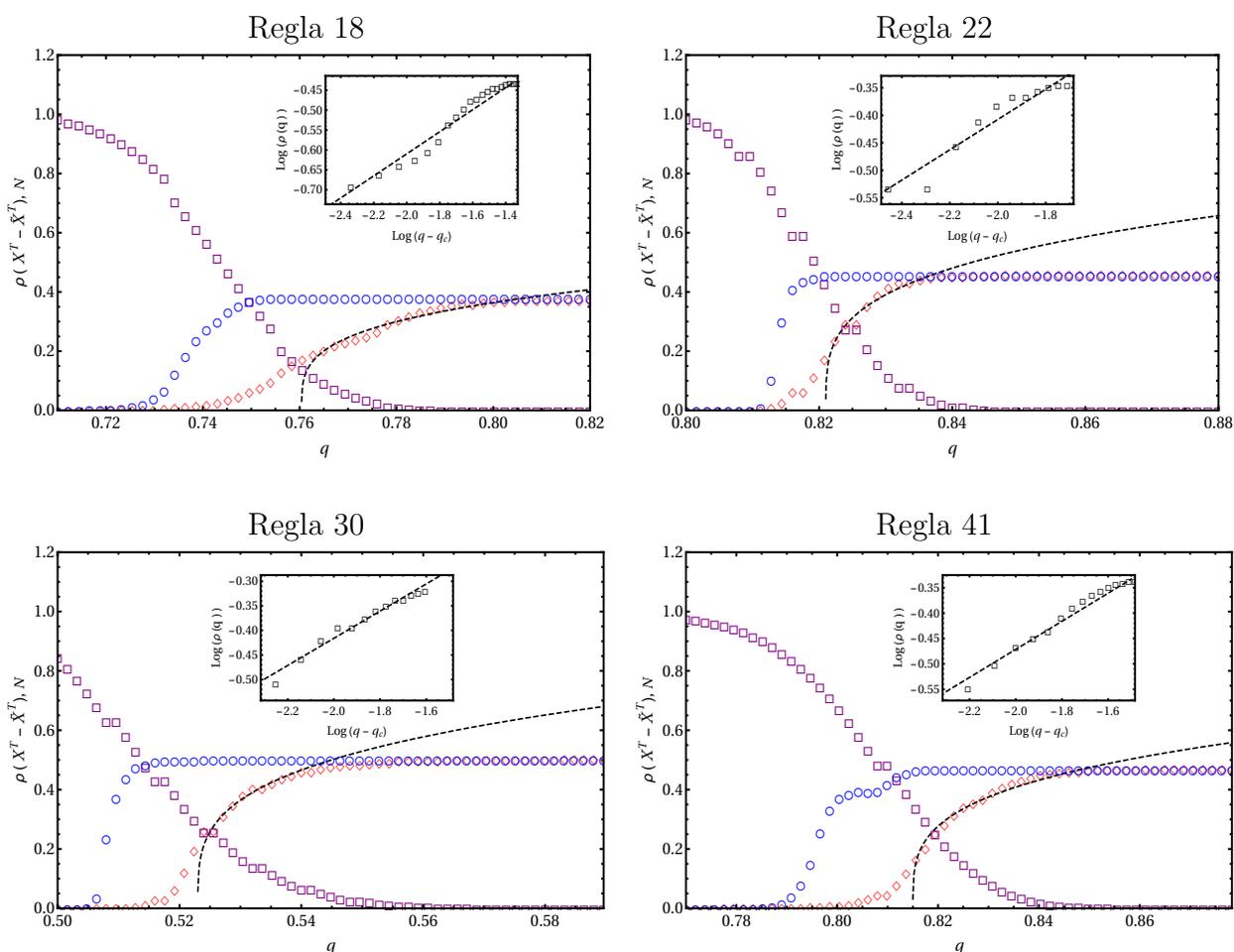


Tabla 4.1: Sincronización reglas 18, 22, 30, 41

Para las reglas 45, 54, 106, 110, 122, 126 y 146, el parámetro y el exponente crítico son: $q_c = 0,529$ y $\beta = 0,276(2)$ regla 45 $q_c = 0,543$, $\beta = 0,276(4)$ regla 54, $q_c = 0,554$, $\beta = 0,275(5)$ regla 106, $q_c = 0,736$, $\beta = 0,276(6)$ regla 110, $q_c = 0,868$, $\beta = 0,275(5)$

regla 122, $q_c = 0,737$, $\beta = 0,276(5)$ regla 126 respectivamente.

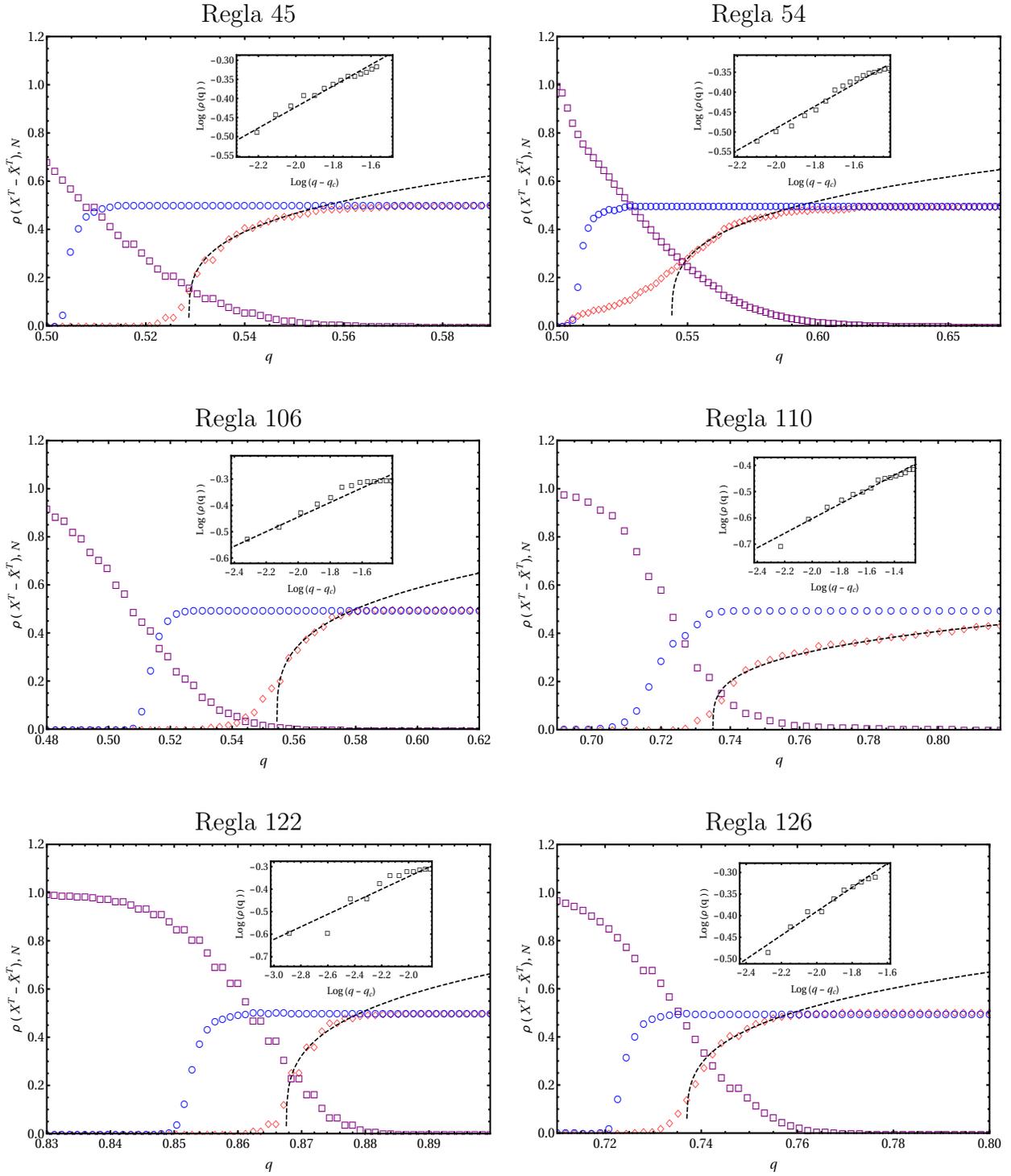


Tabla 4.2: Sincronización reglas 45, 54, 106 110, 122, 126

Para las regla 146, el parámetro y el exponente crítico es: $q_c = 0,761$, $\beta = 0,276(5)$

regla 146.

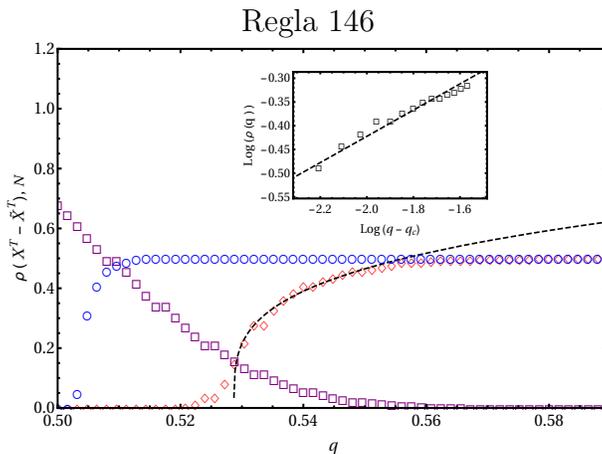


Tabla 4.3: Sincronización regla 146

En todos los gráficos lo primero que se puede apreciar es que si se escoge el Jacobiano de manera aleatoria el sistema sincroniza peor que en el caso del Jacobiano determinista, en otras palabras $q_{cD} > q_{cA}$ para todas las reglas, es decir el valor crítico de q para el cual el sistema deja de sincronizar es menor en el caso del Jacobiano aleatorio que en el determinista, lo que significa que se necesitan menos sitios para la sincronización si se utiliza el Jacobiano determinista.

Una segunda observación que podemos hacer es que estos experimentos nos permitieron identificar tres tipos de comportamiento en la dinámica, caracterizada por el estado de la transición localizada alrededor de $q_c \approx 0,50$; $q_c \approx 0,70$ o $q_c \approx 0,80$, lo cual nos permitió clasificar a los autómatas en tres grupos: $\{30, 45, 54, 106, 110, 126\}$, $\{18, 122, 146\}$ y $\{41, 22\}$, dependiendo del valor de q_c , alrededor del cual ocurre la transición.

Para todas las reglas hay una rápida transición de un error pequeño de sincronización hasta un error grande de sincronización (desde un número grande de sitios acoplados hasta un estado desacoplado). En todos los casos encontramos evidencia numérica que sugiere que este esquema de acoplamiento permite tener una sincronización que pertenece a la misma clase de transición en el no equilibrio.

En los trabajos que se han realizado anteriormente [33, 34] se ha encontrado este comportamiento pero con un acople aleatorio, este tipo de acople trae como consecuencia

que en muy pocas iteraciones se perturben todos los sitios del autómata esclavo.

En nuestro caso la percolación aparece cuando se disminuye de manera constante la cantidad de sitios que se perturban (q). Para todas las reglas el valor de β se calculó utilizando la ecuación (4.17) y teniendo presente que $\beta = 0,276486 \approx 0,276(5)$, los resultados que se obtuvieron fueron los siguientes.

Regla	β
18	0,276(4)
22	0,274(7)
30	0,276(7)
41	0,276(4)
45	0,276(2)
54	0,276(4)
106	0,275(5)
110	0,276(6)
122	0,275(5)
126	0,276(5)
146	0,276(5)

Tabla 4.4: Exponentes de la percolación dirigida.

Para las reglas {18, 30, 41, 45, 54, 110, 126, 146} el exponente β fue igual a $0,276(n)$ donde el valor de n no fue necesariamente igual a 5, mientras que las reglas {22, 106, 122} presentaron valores de β iguales a {0,274(7) 0,275(5), 0,275(5)}, aunque no es el valor que caracteriza la **percolación dirigida** los mismos no se encuentran muy alejados de dicho valor.

4.3. Otra estrategia de sincronización

En la sección anterior se utilizó una estrategia de sincronización en la cual se utilizaba un Jacobiano el cual era el promedio de muchos Jacobianos calculados para distintas condiciones iniciales, esto con el fin de perturbar con un Jacobiano que no dependiese del tiempo. Al igual que antes se quiere utilizar un Jacobiano que no dependa del tiempo, para ello se aplicará una nueva estrategia. Todos los resultados que se muestran en esta sección es el promedio de 500 condiciones iniciales.

Según la ecuación (4.11) la diferencia entre el autómata maestro y el esclavo viene dada por

$$\begin{aligned}\Delta^{t+1} &\approx F(X^t) \oplus F(X^t) \oplus \mathbf{J}(X^t) \odot (X^t \oplus \tilde{X}^t), \\ &\approx (\mathbf{J}(X^t) \oplus \mathbf{K}) \odot \Delta^t,\end{aligned}$$

sí definimos que $D\mathbf{F}_{i,j} = \mathbf{J}(X^t)$, los elementos de la matriz vendrán dados por

$$D\mathbf{F}_{i,j} = \begin{cases} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} & \text{si } |i - j| < 3, \\ 0 & \text{si } |i - j| \geq 3, \end{cases} \quad (4.21)$$

donde los elementos $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ se calculan como en (4.13).

Como se sabe si $\mathbf{K} = D\mathbf{F}_{i,j}$ la diferencia entre los autómatas converge y el sistema maestro-esclavo se sincroniza (4.8). Si se calcula el error de sincronización (4.16) en función del tiempo para todas las reglas utilizando la idea anterior se obtiene el resultado que se muestra en la figura 4.3.

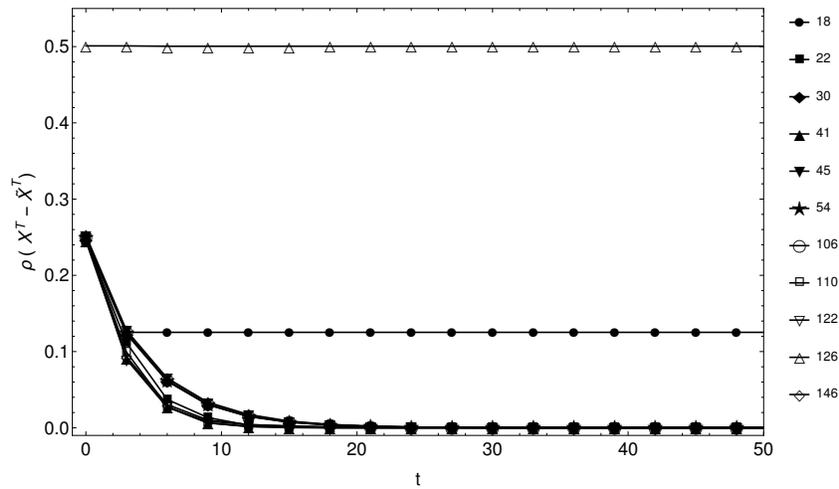


Figura 4.3: Error de sincronización en función del tiempo.

Como se puede observar si se deja que el sistema se sincronice con un Jacobiano variable, que se calcula con los estados presentes, no todas las reglas son capaces de lograr la sincronización. Las reglas $\{18,126\}$ son las que no se sincronizan y la regla 126 es la que presenta el peor error de sincronización.

La matriz de acople que se usó previamente depende del tiempo y produce una perturbación en todo el sistema esclavo. En el caso donde no se tiene acceso a todos los sitios o simplemente por economizar (no perturbar todos los sitios a la vez), es necesario tener un esquema de sincronización eficiente, en el sentido del número de sitios adecuados para tal perturbación.

Para hallar este tipo de acoplamiento, se puede comenzar haciendo una separación sin ningún tipo de aproximación de la dinámica no lineal de $\mathbf{F}(X^t)$, en una parte lineal y en otra no lineal [40],

$$\mathbf{F}(X^t) = \mathbf{F}_\ell(X^t) \oplus \mathbf{F}_{n\ell}(X^t), \quad (4.22)$$

donde $\mathbf{F}_\ell(X^t)$ representa la parte lineal y $\mathbf{F}_{n\ell}(X^t)$ la parte no lineal de la regla respectivamente. Obsérvese que si se dividen los autómatas en parte lineal y no lineal, todas los autómatas utilizados en este trabajo son una superposición de autómatas lineales caóticos [41] y un autómata no lineal con comportamiento asintótico de punto fijo en la clasificación de Wolfram o Chua [42, 43, 44, 45].

En el último esquema de clasificación Chua, las reglas de todos los autómatas elementales se agrupan según su complejidad en seis clases: Reglas de Período 1 (P1), Reglas de Período 2 (P2), Regla de Período 3 (P3), Bernoulli σ_τ -Shift (BS), Complejo Bernoulli-Shift (CBS) e Hiper Bernoulli-Shift (HBS).

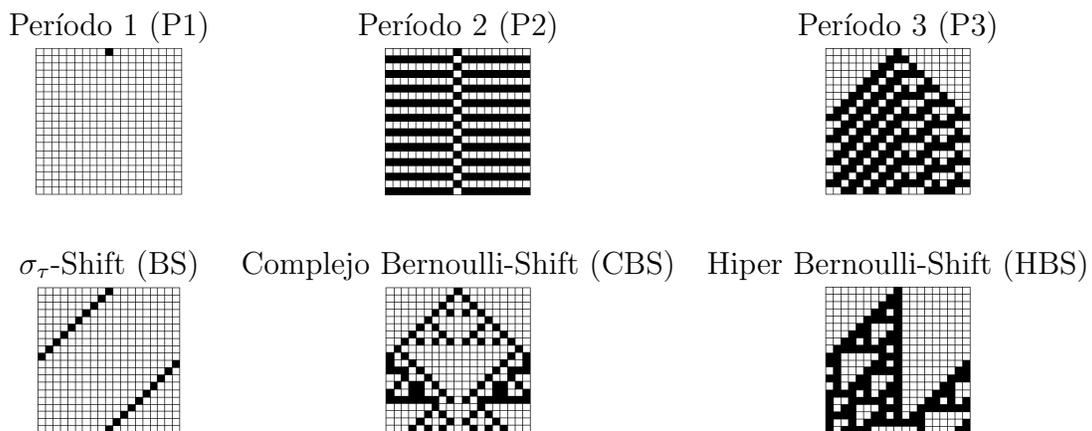


Tabla 4.5: Clasificación de Chua, P1, P2, P3, BS, CBS, HBS [46]

En la tabla 4.6 se muestra una forma de dividir las reglas de los autómatas en partes lineales y no lineales, y como estas partes se clasifican según las categorías de Chua. Se puede ver como en todos los casos, las partes lineales son los componentes complejos de la regla. El $\mathbf{1}$ en la tabla representa un vector de dimensión \mathbf{N} , con todas las componentes igual a 1.

Regla	\mathbf{f}_ℓ	Clase	$\mathbf{f}_{n\ell}$	Clase
\mathbf{f}_{18}	\mathbf{f}_{90}	CBS	\mathbf{f}_{72}	P1
\mathbf{f}_{22}	\mathbf{f}_{150}	CBS	\mathbf{f}_{128}	P1
\mathbf{f}_{30}	\mathbf{f}_{150}	CBS	\mathbf{f}_{136}	P1
\mathbf{f}_{41}	$\mathbf{f}_{150} \oplus \mathbf{1}$	CBS	\mathbf{f}_{64}	P1
\mathbf{f}_{45}	$\mathbf{f}_{90} \oplus \mathbf{1}$	CBS	\mathbf{f}_{136}	P1
\mathbf{f}_{54}	\mathbf{f}_{150}	CBS	\mathbf{f}_{160}	P1
\mathbf{f}_{106}	\mathbf{f}_{170}	CBS	\mathbf{f}_{192}	P1
\mathbf{f}_{110}	\mathbf{f}_{102}	HBS	\mathbf{f}_8	P1
\mathbf{f}_{122}	\mathbf{f}_{90}	CBS	\mathbf{f}_{32}	P1
\mathbf{f}_{126}	\mathbf{f}_{150}	CBS	\mathbf{f}_{232}	P1
\mathbf{f}_{146}	\mathbf{f}_{90}	CBS	\mathbf{f}_{200}	P1

Tabla 4.6: Clasificación de las reglas lineales y no lineales según Chua.

Esta última observación, sumada al hecho de que la regla de un autómata elemental lineal puede ser escrito como el producto módulo 2, entre una matriz constante tridiagonal \mathbf{M} y el estado real, por ejemplo $\mathbf{F}_\ell(X^t) = \mathbf{M} \odot X^t \oplus \mathbf{e}$, donde \mathbf{e} es un vector constante de $\mathbf{0}$ o $\mathbf{1}$, esto sugiere que la sincronización se puede lograr usando una constante en el tiempo, cuya función de acoplamiento es dada por la parte lineal de los autómatas.

Teniendo en cuenta las ideas anteriores, la matriz de acoplamiento puede escribirse como una matriz independiente del tiempo como el producto $\mathbf{K} = \mathbf{P} \odot \mathbf{M}$, donde \mathbf{P} es una matriz diagonal que contiene la información de donde se perturba el sistema esclavo.

Así, la ecuación (4.9) da como resultado

$$\begin{aligned}
\Delta^{t+1} &= \mathbf{F}_\ell(X^t) \oplus \mathbf{F}_{nl}(X^t) \oplus \mathbf{F}_\ell(\tilde{X}^t) \oplus \mathbf{F}_{nl}(\tilde{X}^t) \oplus \mathbf{K} \odot \Delta^t, \\
&= \mathbf{F}_\ell(X^t) \oplus \mathbf{F}_{nl}(X^t) \oplus \mathbf{F}_\ell(\tilde{X}^t) \oplus \mathbf{F}_{nl}(\tilde{X}^t) \oplus \mathbf{P} \odot \mathbf{M} \odot \Delta^t, \\
&= [\mathbf{I} \oplus \mathbf{P}] \odot \mathbf{M} \odot \Delta^t \oplus \mathbf{F}_{nl}(X^t) \oplus \mathbf{F}_{nl}(\tilde{X}^t).
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Por lo tanto, la evolución de los autómatas diferencia es una superposición de autómatas de diferencia lineal más la diferencia de componentes no lineales de los sistemas maestro y esclavo. De esta manera, si la parte no lineal puede considerarse como una pequeña perturbación y la matriz de acoplamiento se elige adecuadamente, es posible conseguir la sincronización. La intensidad de este acoplamiento se puede optimizar averiguando cuál es el mayor número de filas igual a cero, en esa matriz que permite la sincronización.

El resultado de la sincronización para todas las reglas usando las matrices de acoplamiento dadas en (4.23) se presenta en la siguiente figura 4.4. La matriz de acoplamiento se toma como la matriz tridiagonal asociada a la parte lineal.

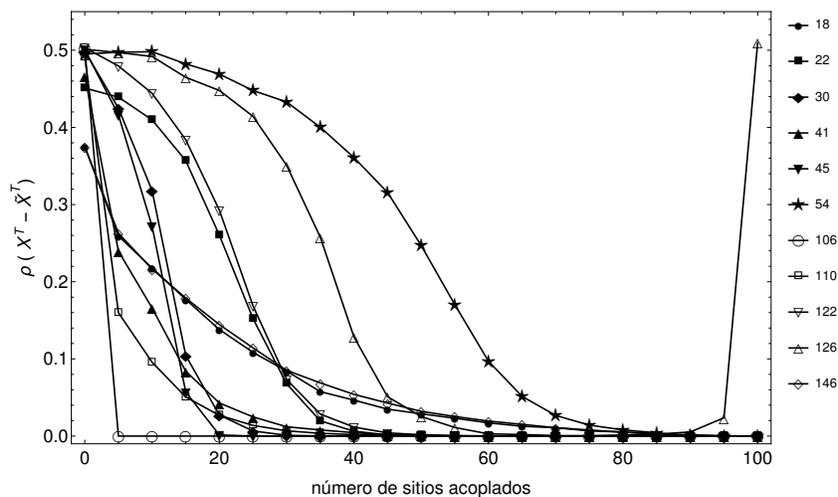


Figura 4.4: Error de sincronización en función del número de sitios acoplados todos los autómatas.

La ecuación (4.23) sugiere que la sincronización puede lograrse si la matriz de acoplamiento $[\mathbf{I} \oplus \mathbf{P}] \odot \mathbf{M}$ es una matriz nilpotente y la contribución de las partes no lineales pueden considerarse como una pequeña perturbación, por ejemplo el número medio de 1,

$\rho(\mathbf{M}_i)$, generada por la dinámica no lineal en un intervalo de tiempo dado T es pequeña comparada con $(N T)$,

$$\rho(\mathbf{M}_i) = \sum_t^T d(\mathbf{F}_\ell^{ij}(X^t), X^{t+1}), \quad (4.24)$$

donde $\mathbf{F}_\ell^{ij}(X^t) = \mathbf{M}_i \odot X^t \oplus \mathbf{e}_j$, $i = 1, \dots, 7$ y $j = 1, 2$, son las reglas afines construidas con las matrices tridiagonales,

\mathbf{M}_i	<i>Tridiagonales</i>
\mathbf{M}_1	<i>Tridiag{001}</i>
\mathbf{M}_2	<i>Tridiag{010}</i>
\mathbf{M}_3	<i>Tridiag{011}</i>
\mathbf{M}_4	<i>Tridiag{100}</i>
\mathbf{M}_5	<i>Tridiag{101}</i>
\mathbf{M}_6	<i>Tridiag{110}</i>
\mathbf{M}_7	<i>Tridiag{111}</i>

Tabla 4.7: Matrices tridiagonales.

y los vectores N -dimensionales $\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$ y $\mathbf{e}_2 = \mathbf{1}$.

Con esta idea es posible generar un criterio muy simple para la selección del acoplamiento matricial en el caso en que la regla de evolución de los autómatas sea desconocida.

Los resultados mostrados en la Figura 4.4 y tabla 4.7, sugieren que estas condiciones son suficientes para lograr la sincronización, si se elige a \mathbf{M} como \mathbf{M}_i tal que $\rho(\mathbf{M}_i)$ sea un mínimo para todo i y j .

Por último, para elegir una matriz \mathbf{P} óptima, se pueden utilizar los resultados de [29], donde los autores obtienen una caracterización para el número de sitios ℓ de acoplamiento consecutivos que permiten la sincronización entre autómatas celulares lineales.

Esta caracterización se basa en la nilpotencia de matrices cuadradas tridiagonales y establece que, para las matrices $N \times N$: \mathbf{M}_1 , \mathbf{M}_3 , \mathbf{M}_5 , \mathbf{M}_7 , correspondientes a los

autómatas lineales 170, 102, 90 y 150; los conjuntos de valores de ℓ , tales que la matriz es nilpotente, son: $\{\ell = k, k > 0\}$, \emptyset , $\{\ell = 2^k - 1, k > 0\}$ y $\{\ell = 2\}$, respectivamente.

En la figura 4.5 se muestran las matrices de acoplamiento y promedio de las densidades de la parte no lineal de las reglas de los autómatas celulares.

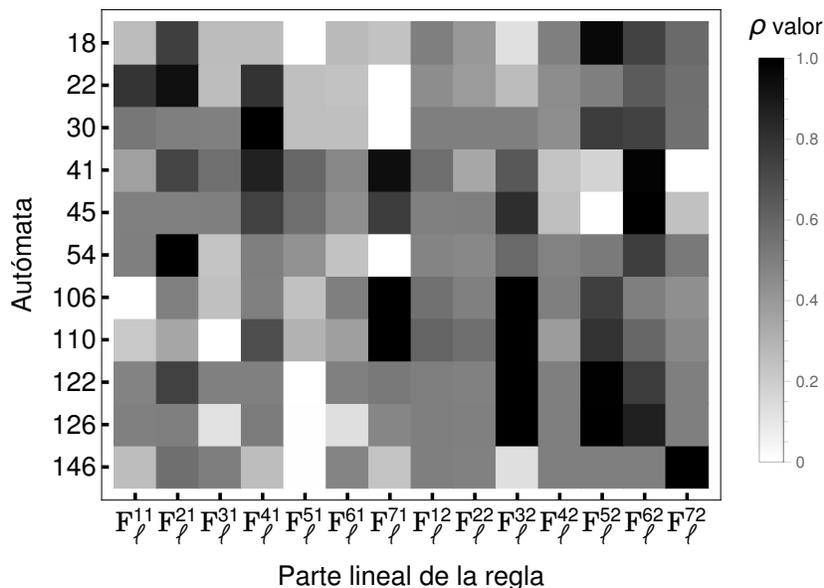


Figura 4.5: Matrices de acoplamiento y promedio de las densidades de la evolución de la parte no lineal de las reglas de los autómatas celulares.

Como puede verse en la figura 4.4, donde la matriz de acoplamiento está dada por la parte lineal del autómata celular, sólo la regla 126 no alcanza un estado sincronizado con una perturbación parcial.

En este caso, las dos condiciones de sincronización son adversas, por ejemplo el acoplamiento de matriz (\mathbf{M}_7) sólo se sincroniza usando pares consecutivos de sitios acoplados y la densidad mostrada en la Figura 4.5 es alta para esta matriz. Si se utiliza el criterio antes explicado, se obtiene el mínimo de la densidad media para la matriz (\mathbf{M}_5). Esta matriz, como se muestra en la Figura 4.5, minimiza la densidad y permite un mayor número de valores de ℓ que permite la sincronización.

Para el resto de los autómatas celulares el mínimo de la densidad media se obtiene usando, como matriz de acoplamiento, la matriz asociada a las partes lineales de las reglas dadas en la Tabla 4.6.

En la figura 4.6 se muestra el error de sincronización en función del número de sitios de acoplamiento, para el autómata 126. La matriz \mathbf{M}_i se toma igual a \mathbf{M}_7 y \mathbf{M}_5 , como en la Tabla 4.8 y de acuerdo con (4.22). La figura dentro de la gráfica muestra la evolución de la parte no lineal de este autómata, en los casos en que la parte lineal se elige como \mathbf{M}_7 y \mathbf{M}_5 . Como se puede ver claramente cuando se elige \mathbf{M}_5 como la parte lineal, la densidad de 1 es baja para la parte no lineal de la regla 126.

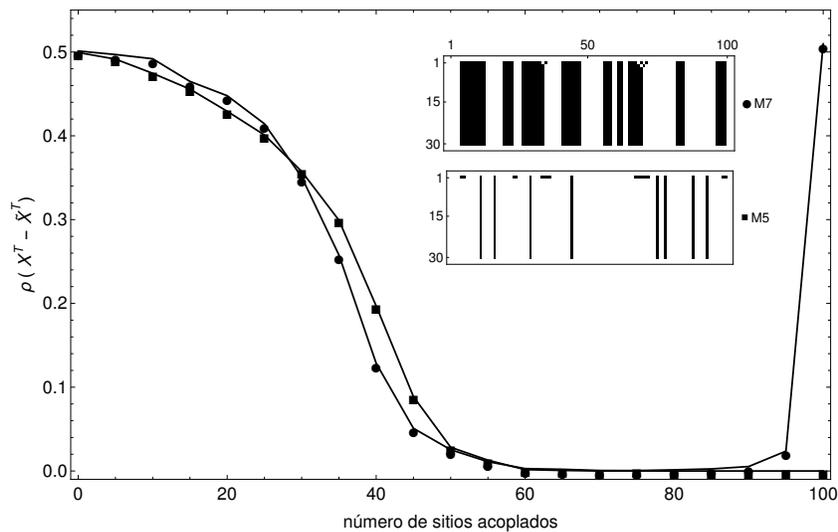


Figura 4.6: Error de sincronización en función del número de sitios acoplados regla 126.

En este capítulo se observó que si se realiza la aproximación lineal a las reglas de los autómatas celulares clase III, efectivamente se alcanza la sincronización de dos autómatas idénticos y también se observó el fenómeno de la percolación dirigida.

Por otro lado, las reglas de los autómatas se pueden escribir como la suma de la parte lineal de la regla más la parte no lineal de la misma, con esta estrategia se logró sincronizar todas las reglas utilizando como matriz de acople el Jacobiano asociado a la parte lineal de la regla, mientras que para la regla 126 se utilizó como matriz de acople, la evolución de la parte no lineal de la regla, donde la densidad de 1 fuese mínima.

Es importante mencionar que los resultados que se obtuvieron para la sincronización así como la percolación dirigida fue con autómatas celulares no lineales, en los trabajos previos [33, 34] se estudiaron autómatas celulares lineales. Otro aspecto a destacar es

que el esquema de perturbación aplicado es determinista, lo que permitió tener un mayor control a la hora de perturbar a los autómatas celulares.

Siguiendo este orden de ideas, en el capítulo 5 se implementará la aproximación lineal, para ver si es posible controlar a los autómatas celulares clase III sin tener que realizar aproximaciones de orden superior.

Capítulo 5

Control

El control es la acción responsable de la evolución en el tiempo de un proceso con el fin de alcanzar un objetivo dado. Este proceso puede estar relacionado con cualquier fenómeno de la naturaleza o cualquier campo de la actividad humana, tal como la contaminación del agua, tormentas, la vida socio económica de las personas, control de distintas máquinas, mecanismos u organismos particulares. La acción de controlar puede ser realizada por un ser humano, un dispositivo artificial, etc. Es importante tener en cuenta que la selección o interpretación del objetivo de control depende de una persona o de un grupo de personas.

Cualquier proceso de control requiere repuestas claras a las siguientes preguntas ¿Qué controlar? y ¿Por qué controlar? Una vez que se conocen las repuestas de las preguntas antes expuestas, se quiere saber como se llegará al objetivo deseado por lo tanto surge la siguiente pregunta ¿Cómo controlar? La teoría de control principalmente se basa en hallar repuestas a la última pregunta. El objeto estará definido por un operador que representa unas pocas variables en sus etapas de entrada y salida.

Por lo general en la física se tiene claro que sistema se quiere controlar, por lo tanto la primera pregunta planteada anteriormente se responde de manera sencilla, si el objetivo de control es planteado al inicio del problema la pregunta ¿Por qué controlar? se entiende fácilmente.

La base de la teoría de control descansa en tres conceptos: objeto (proceso o planta), objetivo de control (o costo del control) y estrategia del control (algoritmo de control

o ley del control). El proceso está caracterizado por sus entradas (variables de control y ruido en las señales), salidas (variables a ser controladas y variables de salida) y la relación entre la entrada y la salida.

La representación en la mayoría de los casos puede ser una función compleja, pero debe satisfacer relaciones causales como por ejemplo, la magnitud de la variable de salida en cualquier instante de tiempo no depende del valor de la variable de entrada en un tiempo futuro o cualquier variación en la variable de entrada conduce a una variación en la variable de salida.

El objetivo de control debe ser tal que la salida del proceso posea ciertas características dadas, el logro del objetivo del control es posible mediante la selección de las variables de control. Por último la estrategia de control viene dada por la formulación de un conjunto de pocas reglas conocidas como algoritmos, las cuales deben ser válidas, por ejemplo usar aquellas que estén relacionadas con el proceso y tener acceso a estas en cualquier momento. El problema de control consiste en determinar que clase de estrategias son permitidas y su solución se basa en la elección del tipo de estrategias que asegura el objetivo del control [47].

5.1. Estrategias de control

Controlar un sistema caótico se puede realizar de distintas maneras, en particular dos de las más utilizadas son el control mediante la perturbación del parámetro y control mediante la perturbación de las variables de estado. Estos tipos de control se pueden implementar sin retroalimentación o con retroalimentación.

El control sin retroalimentación, consiste en aplicar una señal externa al sistema dinámico de forma predeterminada, la cual es independiente del estado del sistema. El problema que este método presenta es que se debe conocer la dinámica que rige al sistema y una vez que el sistema se estabiliza no se puede utilizar la señal de control.

Otra manera de realizar control es con retroalimentación, la cual consiste en aplicar una señal de control al sistema dinámico que dependa del estado del sistema. Una de las ventajas que tiene este método es que no hace falta conocer la dinámica exacta del

sistema, ya que la señal de control que se utiliza depende de los datos experimentales del sistema.

5.1.1. Control mediante la perturbación del parámetro

El método más popular que perturba el parámetro con el fin de estabilizar el sistema en una órbita periódica inestable, es uno desarrollado por Ott, Grebogi y Yorke [48], conocido como OGY. Si la evolución del sistema viene dada por

$$x_{n+1} = f(x_n, r_n),$$

donde x_n es el estado del sistema y r_n el parámetro asociado a la dinámica. Si se quiere controlar el sistema se identifica la órbita periódica (o el punto de equilibrio) inestable sobre el que se desea estabilizar el sistema, se monitorea su evolución hasta que la órbita pasa a una distancia pequeña ϵ del objetivo. La idea es encontrar cual debe ser la perturbación sobre el parámetro (δ) [49, 50], para que el sistema se acerque al objetivo x^f ,

$$x_{n+1} = f(x_n + \epsilon, r_n + \delta).$$

5.1.2. Control mediante la perturbación de las variables de estado

Este tipo de control puede llevarse a cabo retroalimentando el sistema con una pequeña señal que penalice de manera adecuada la separación entre la órbita del sistema y el objetivo x^o del control,

$$x_{n+1} = f(x_n, r) + \gamma(x_n - x^o),$$

aquí, x^o puede representar un punto fijo inestable de la dinámica o un elemento de ciclo inestable.

Existen distintos esquemas de control mediante la perturbación de las variables de estado, como por ejemplo el de Pyragas [51], el Pinning Control implementado por primera vez por Qu y Hu [52] y luego mejorado por Grigoriev [53]. Este esquema consiste

en perturbar una fracción de los estados del sistema con el fin de llevarlo a un punto fijo o trayectoria deseada. Aunque inicialmente el Pinning Control fue utilizado para controlar redes de mapas acoplados, este también puede ser aplicado al caso de los autómatas celulares.

5.2. Control de autómatas celulares unidimensionales

Los autómatas celulares son sistemas autónomos que se rigen por reglas dinámicas de manera que su evolución temporal es independiente de cualquier perturbación externa. Un fenómeno interesante de estudio es lograr modificar el comportamiento de dicha evolución hasta llevar a los autómatas aun estado deseado, esto se puede lograr aplicando alguna estrategia de control.

Para poder realizar control se debe modificar el comportamiento del sistema, esto se logra colocando actuadores sobre el autómata, dichos actuadores deben tener una estructura espacial (número, localización y distribución). Las características que deben poseer los actuadores, corresponde con el esquema que se utiliza cuando se aplica el Pinning Control.

Como es conocido la dinámica de los autómatas celulares elementales depende exclusivamente de los estados del mismo, por lo tanto resulta natural que la estrategia de control que se tiene que aplicar en los mismos sea la de Pinning Control, la cual es una estrategia que corresponde al esquema de perturbación de las variables de estado. Como los autómatas celulares elementales son binarios la intensidad de la perturbación que los actuadores aplicarán a las celdas es del orden de magnitud de las mismas.

5.2.1. Control de autómatas celulares lineales

Consideremos un autómata celular elemental \mathcal{A}_c , el cual está definido como una 4-tupla $(\mathcal{L}, \mathcal{S}, \mathcal{F}, f)$. Sea ω una sub-región de \mathcal{L} y x_ω^t los estados del autómata que se encuentran en la sub-región ω , donde $\mathcal{S}^\omega = \{s: \omega \rightarrow \mathcal{S}\}$ es el conjunto de posibles estados en la sub-región ω del autómata celular. Se dice que el autómata celular \mathcal{A}_c es

controlable localmente si para un cierto x^d (estado deseado) tal que $x^d \in \mathcal{S}^\omega$ existe un control $u^t = (u_0^t \dots u_{i-1}^t)$ donde $u_i^t \in \mathcal{U}$, siendo \mathcal{U} el conjunto donde se encuentra los controles u_i^t , de tal forma que

$$x^T = x^d \quad \text{en } \omega, \quad (5.1)$$

donde x^T es el estado deseado en el tiempo T .

Supongamos que tenemos un autómata celular elemental que se rige por una regla de evolución local $X^{t+1} = f(x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t)$, que tiene tamaño N con una vecindad de radio $r = 3$, en donde cada una de sus celdas puede adoptar uno de los dos posibles estados en $\mathcal{S} = \{0,1\}$ y $X^t = \{x_1^t, x_2^t, \dots, x_N^t\}$ representa el estado del autómata en el tiempo t , se puede escribir la evolución de los autómatas celulares lineales de la siguiente manera [54],

$$X^{t+1} = \mathbf{M}X^t. \quad (5.2)$$

Donde \mathbf{M} es una matriz constante de tamaño $N \times N$, debido a que los autómatas son lineales se puede escribir la regla de evolución como la combinación lineal de los estados,

$$x_i^{t+1} = \sum_{-r \leq j \leq +r} a_j x_{i+j}^t \text{ mod}(2). \quad (5.3)$$

Donde los coeficientes a_j , $-r \leq j \leq +r$, son enteros, por lo tanto la matriz \mathbf{M} se puede construir de la siguiente manera

$$M_{i,j} = \begin{cases} a_{j-i} & \text{si } j \in [i - r, i + r], \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{cases} \quad (5.4)$$

Consideremos ahora el control local, como se mencionó antes tenemos la sub-región ω de \mathcal{L} donde se tienen n_ω celdas. Sea x^0 el estado del autómata para $t = 0$ y $x^T|_\omega$ el estado del autómata en la sub-región ω para el tiempo T es decir,

$$x^T|_\omega = (\mathbf{M}^T x^0)|_\omega. \quad (5.5)$$

Supongamos que el sistema sólo es excitado en una celda c_{i_p} , el control en el tiempo t es equivalente a sumarle al estado x^t un vector,

$$u^t = (0, \dots, u_{i_p}^t, 0, \dots, 0), \quad (5.6)$$

donde $u_{i_p}^t$ es el término de perturbación en la posición i_p , el cual puede tomar valores $\{0,1\}$, este término es el que permite guiar al autómata al objetivo deseado, por lo cual podemos escribir lo antes mencionado de la siguiente forma

$$x^{t+1} = \mathbf{M} x^t + u^t \text{ , mod}(2) \quad (5.7)$$

es fácil demostrar que T iterados después, el estado del sistema está dado por

$$x^T = \mathbf{M}^T x^0 + \sum_{i=0}^{T-1} \mathbf{M}^{T-i} u^i. \quad (5.8)$$

Probemos lo antes mencionado, sea x^0 el estado inicial del autómata, u^t el control el cual excita a todas las celdas c_{i_p} en el tiempo t , de modo que el estado más la perturbación la escribimos $d^t = x^t + u^t$, luego de una iteración el estado del autómata viene dado por

$$s^{t+1} = \mathbf{M}d^t = \mathbf{M}x^t + \mathbf{M}u^t = \mathbf{M}^2x^{t-1} + \mathbf{M}^2u^{t-1} + \mathbf{M}u^t.$$

Sucesivas aplicaciones del vector de control $u = (u^0 + u^1 \dots + u^{T-1})$ da como resultado final,

$$x^{t+1} = \mathbf{M}^T x^0 + \mathbf{M}^T u^0 + \mathbf{M}^{T-1} u^1 \dots + \mathbf{M} u^{t-1} = \mathbf{M}^T x^0 + \sum_{i=0}^{T-1} \mathbf{M}^{T-i} u^i.$$

Ahora bien, apliquemos la perturbación a la celda i_p , siendo x^d el estado deseado en la sub-región ω . Para poder realizar el control local se debe hallar el vector u^t , $t = 0, \dots, T-1$, tal que $x^T|_{\omega} = x^d$, o equivalente a,

$$\left(\sum_{i=0}^{T-1} \mathbf{M}^{T-i} u^i \right) \Big|_{\omega} = (x^d - \mathbf{M}^T x^0) \Big|_{\omega}. \quad (5.9)$$

Podemos formular este problema como un sistema de n_{ω} ecuaciones con T incógnitas denotadas como $(u_0, u_1, \dots, u_{T-1})$,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\alpha, i_p}^T u^1 + \mathbf{M}_{\alpha, i_p}^{T-1} u^2 + \dots + \mathbf{M}_{\alpha, i_p} u^{T-1} &= x^d(\alpha) - (\mathbf{M}^T x^0)_{\alpha}, \\ \mathbf{M}_{\alpha+1, i_p}^T u^1 + \mathbf{M}_{\alpha+1, i_p}^{T-1} u^2 + \dots + \mathbf{M}_{\alpha+1, i_p} u^{T-1} &= x^d(\alpha + 1) - (\mathbf{M}^T x^0)_{\alpha+1}, \\ &\vdots \\ \mathbf{M}_{\beta, i_p}^T u^1 + \mathbf{M}_{\beta, i_p}^{T-1} u^2 + \dots + \mathbf{M}_{\beta, i_p} u^{T-1} &= x^d(\beta) - (\mathbf{M}^T x^0)_{\beta}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

5.2.1.1. Fallas del control de El Yacoubi

El método propuesto por El Yacoubi, se basa esencialmente en resolver el sistema de ecuaciones (5.10), en el cual hay que realizar la inversión de una matriz. Observemos el siguiente ejemplo, consideremos el autómata 150 con una vecindad de radio $r = 3$, este se rige mediante la siguiente regla

$$f_{(150)} = x_{i-1} \oplus x_i \oplus x_{i+1}.$$

La figura 5.1 muestra un estado para la regla 150, el cual se tomará como la condición inicial.



Figura 5.1: Condición inicial.

Supongamos que se quiere controlar la celda 15 la cual está identificada en la figura por el recuadro azul y además se quiere controlar a sus dos vecinos más cercanos las celdas 14 y 16 (sub-región ω), es decir que sean cero cada una de ellas, aplicando el método propuesto por El Yacoubi para este grupo de celdas y considerando el estado al cual se desea llegar, el sistema de ecuaciones resultantes es el siguiente

$$0 + u^2 + 0 = 1,$$

$$u^1 + u^2 + u^3 = 1,$$

$$0 + u^2 + 0 = 1,$$

obteniendo como solución el vector de control

$$(u^1, u^2, u^3) = (0, 0, 1).$$

Lo que se busca con este vector de control es que luego que hayan transcurrido tres evoluciones temporales el autómata llegue al estado deseado, en las siguientes figuras se muestran la evolución del autómata cuando se aplica el control y cuando se deja evolucionar sin control.

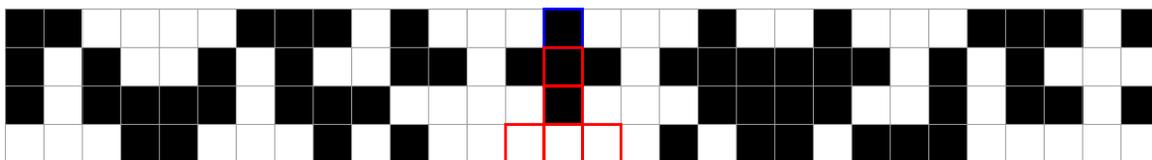


Figura 5.2: Evolución con control.

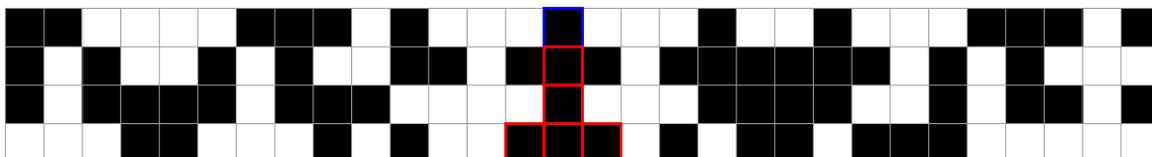


Figura 5.3: Evolución sin control.

Como se puede observar en la figura 5.2 una vez que se aplica el control, las celdas que se querían controlar son llevadas al objetivo deseado, el cual es que las tres sean cero, si observamos la figura 5.3 en la cual no se aplica el control se ve que efectivamente el sistema evoluciona de manera normal y las tres celdas llegan a una configuración totalmente distinta.

Este método presenta algunas fallas debido al tipo de sistema en estudio, como se sabe estos autómatas son binarios, una de las dificultades que se tiene para hallar la solución del sistema que produce el control, se presenta cuando hay que invertir la matriz que resuelve el sistema de ecuaciones. Como se está utilizando una vecindad $r = 3$ se tienen matrices 3×3 , por lo cual se tienen $2^9 = 512$ matrices posibles, de las cuales solamente se pueden invertir 174, que representa el 33,9% de todas las matrices posibles, lo que implica que no se va a poder realizar el control para todas las condiciones iniciales.

Otro problema que presenta esta metodología es cuando se quiere controlar simultáneamente en varios puntos del autómata, esto depende de la vecindad que se esté considerando, en nuestro caso particular como se sabe tenemos una vecindad de radio $r = 3$, por lo tanto la distancia entre cada perturbación debe ser como mínimo de 5 celdas entre una y otra, sino la información se solapa, esto tiene como consecuencia que aún obteniendo una solución al sistema de ecuaciones esta no permite realizar el control.

En la figura 5.4 se muestra el control aplicado en varios sitios de manera simultánea, mientras que la figura 5.5 es la evolución del sistema sin aplicar control.

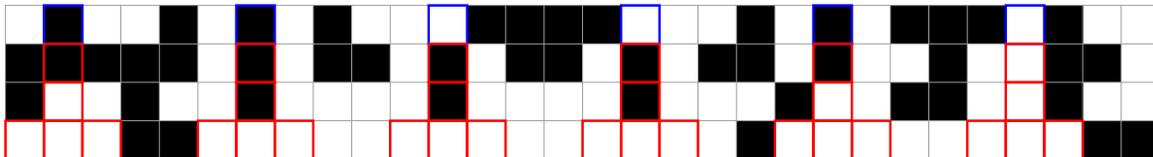


Figura 5.4: Evolución con control en sitios simultáneos.

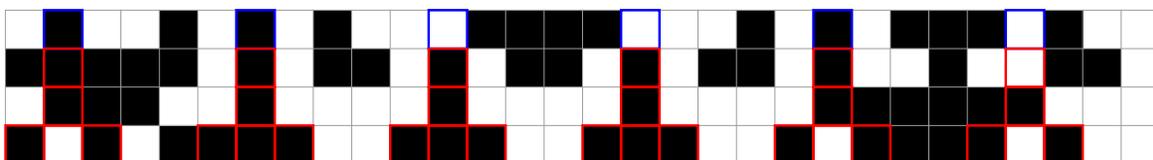


Figura 5.5: Evolución sin control.

5.2.2. Control de autómatas celulares no lineales

Como se pudo observar en la sección anterior la evolución de los autómatas lineales se pueden escribir simplemente como $X^{t+1} = \mathbf{M}X^t$ ya que la matriz \mathbf{M} es constante, en el caso de los autómatas no lineales esto no se puede hacer ya que la matriz \mathbf{M} no es constante debido a que esta varía en el tiempo, pero la evolución de los autómatas no lineales se puede escribir de la misma forma que los lineales si se halla una matriz Jacobiana que sea constante.

Esto se puede lograr utilizando la ecuación (3.11) en la cual se aproximan los autómatas no lineales como lineales haciendo uso del desarrollo en serie de Taylor de la regla dinámica de los autómatas no lineales y evaluando alrededor de cero. Como se quiere la aproximación lineal se trunca la serie en los términos de primer orden y haciendo uso de la definición de la derivada Booleana se tiene que

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = F(x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \oplus F(x_i, \dots, \bar{x}_j, \dots, x_n), \quad (5.11)$$

teniendo en cuenta que los elementos de la matriz Jacobiana son definidos como

$$J_{i,j} = \frac{\partial F}{\partial x_j}. \quad (5.12)$$

La evolución de los autómatas no lineales se puede escribir como los lineales si consideramos $\widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{J}(f)|_0$,

$$X^{t+1} = \widetilde{\mathbf{M}}X^t. \quad (5.13)$$

Esto permite extrapolar la estrategia antes expuesta para calcular u^t ,

$$x^{t+1} = \widetilde{\mathbf{M}}x^t + u^t. \text{ mod}(2) \quad (5.14)$$

5.2.2.1. Fallas del control de El Yacoubi para el caso no lineal

Al igual que en el caso del control para autómatas lineales, en los autómatas no lineales el método propuesto por El Yacoubi presenta fallas, además de los problemas ya mencionados para el caso lineal, se tienen otros adicionales cuando se está trabajando con autómatas no lineales.

En el caso no lineal el control se logra menos veces debido a que para poder aplicar el método propuesto por El Yacoubi hay que aproximar el autómata, para ello se utiliza la ecuación (3.11). Sí el estado del autómata no está cerca de cero la aproximación no es buena y por lo tanto no se logra el control.

Otra dificultad que se consigue es que el problema que no está bien planteado, entendiéndose por esto que el sistema de ecuaciones a resolver no es linealmente independiente, debido a que se trabaja con números binarios. Por lo que se puede tener más de una solución para el mismo sistema de ecuaciones, de las cuales algunas de ellas logran controlar y otras no.

Por lo tanto para el caso de autómatas no lineales se ve reducido el número de veces que se puede realizar el control, primero debido a que la aproximación lineal no siempre es buena y segundo aunque se logre realizar la inversión de las matrices que resultan del sistema de ecuaciones, la solución que se obtiene no necesariamente controle al sistema debido a que se tiene el problema de que está mal planteado.

Como ejemplo usaremos el autómata 30 con una vecindad de radio $r = 3$, el cual se rige mediante la siguiente regla

$$f_{(30)} = x_{i-1} \oplus x_i \oplus x_{i+1} \oplus x_i \odot x_{i+1},$$

una vez realizada la aproximación, el sistema evoluciona mediante la ecuación (5.13). En la figura 5.6 se muestra la evolución del autómata aplicando el control, al igual que el caso lineal se quiere controlar la celda 15 y sus dos vecinos más cercanos las celdas 13 y 14.

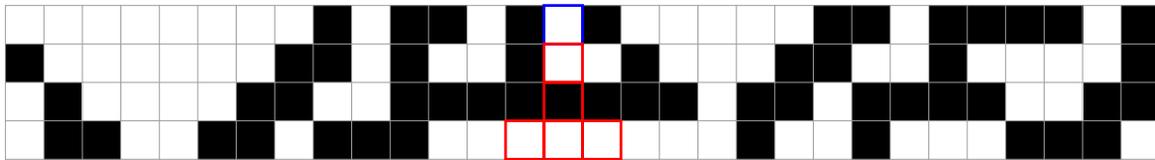


Figura 5.6: Evolución con control.

Como se puede observar efectivamente se puede realizar el control sobre el sistema. En la figura 5.7 se muestra la evolución de otro sistema para el caso donde se logra encontrar una solución pero la cual no logra controlar a dicho sistema.

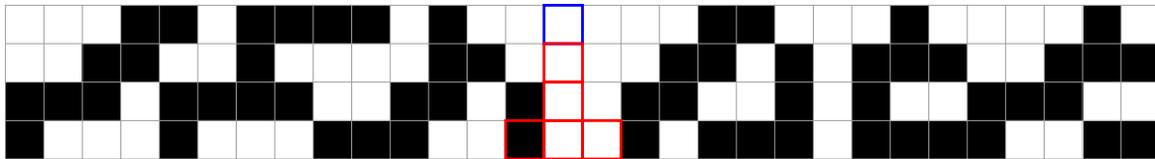


Figura 5.7: Evolución con control.

5.2.3. Nueva estrategia para controlar los autómatas celulares no lineales

Debido a todas las fallas que presenta el método planteado por El Yacoubi, se va a establecer una estrategia que permita solucionar los problemas antes mencionados, el principal inconveniente que se tiene a la hora de realizar el control sobre los autómatas celulares no lineales, es la perturbación que se debe implementar para llevar al sistema

al estado deseado, en nuestro caso particular queremos llevar a los autómatas al estado cero, el cual está permitido por la dinámica de los autómatas celulares Clase III, pero con la particularidad que no para todas las condiciones iniciales, el sistema es capaz de llegar a dicho estado y las condiciones iniciales que si son capaces de llegar al estado cero les toma mucho tiempo, incluso pasar cerca de él.

El estado cero en los autómatas celulares no lineales tiene la característica de ser un estado absorbente, entiéndase por absorbente que una vez que el autómata llega a ese estado no puede salir de él, por lo tanto resulta interesante este estado como objetivo de control.

Para realizar el control se puede implementar la idea de control mediante la perturbación de las variables de estado ($X^{t+1} = F(X^t) \oplus U(X^T)$) para alcanzar el objetivo deseado. La evolución del estado del autómata celular viene dada por

$$X^{t+1} = F(X^t). \quad (5.15)$$

Como nuestro objetivo es controlar autómatas celulares no lineales como primer paso realizaremos la aproximación de primer orden para ver si es suficiente para controlar a los autómatas. La aproximación de primer orden para los autómatas se puede escribir de la siguiente manera

$$F(X^t) \approx F(X^t) \oplus \mathbf{J}(X^t) \odot (X^t \oplus \tilde{X}^t). \quad (5.16)$$

El sistema evolucionará de la siguiente forma

$$X^{t+1} = F(X^t) \oplus \mathbf{J}(X^t) \odot (X^t \oplus \tilde{X}^t), \quad (5.17)$$

donde $\mathbf{J}(X^t)$ es la matriz Jacobiana de F y como nuestro objetivo es el estado cero, el Jacobiano debe ser evaluado en cero $\mathbf{J}(X^t)|_0$ y $\tilde{X}^t = 0$.

La ecuación (5.17) la podemos escribir de la siguiente manera

$$X^{t+1} = F(X^t) \oplus \mathbf{J}_0(X^t) \odot X^t, \quad (5.18)$$

donde $\mathbf{J}_0(X^t) = \mathbf{J}(X^t)|_0$ y el término $(\mathbf{J}_0(X^t) \odot X^t)$ corresponde a la perturbación $U(X^T)$ que se va aplicar a los estados del autómata, por lo tanto $U(X^T) = \mathbf{J}_0(X^t) \odot X^t$,

$$X^{t+1} = F(X^t) \oplus U(X^T).$$

Como se puede observar en la ecuación (5.18) se necesita conocer el valor del Jacobiano evaluado en cero para poder aplicar el control. Una manera de calcularlo es conociendo la dinámica del sistema, es decir aplicando la ecuación,

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_j} \right|_{0,0,0} = f(x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \oplus f(x_i, \dots, \bar{x}_j, \dots, x_n), \quad (5.19)$$

donde $f(x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$ representa la evolución del estado del autómata.

Como no se conoce cual es la dinámica del sistema debemos calcularla de otra forma, para ello utilizaremos el estado del autómata celular. Como se sabe el Jacobiano es una matriz tridiagonal excepto por dos elementos en las esquinas que están fuera de la diagonal debido a las condiciones de borde periódicas, supongamos que queremos conocer el j -ésimo elemento del Jacobiano, primero nos ubicamos en el estado del autómata donde se encuentra la celda j -ésima,

$$X^t = x_1^t, x_2^t, \dots, x_j^t, \dots, x_n^t.$$

Para calcular el elemento j -ésimo del Jacobiano se necesita conocer los valores de $(x_{j-1}^t, x_j^t, x_{j+1}^t)$, por lo tanto se escoge la 5-tupla $(x_{j-2}^t, x_{j-1}^t, x_j^t, x_{j+1}^t, x_{j+2}^t)$, se hace de esta manera ya que los autómatas celulares son funciones que van $\mathbb{B}^N \rightarrow \mathbb{B}^{N-2}$ como se vio en el capítulo 1, en nuestro caso queremos una función que vaya de $\mathbb{B}^5 \rightarrow \mathbb{B}^3$.

Como se quiere el Jacobiano evaluado en cero primero se debe ubicar la 5-tupla $(0,0,0,0,0)$, luego se busca esta 5-tupla pero con la celda del medio conjugada es decir $(0,0,1,0,0)$. Como se puede observar en la ecuación (5.19) para calcular el elemento del Jacobiano de la j -ésima celda se debe conocer cuales son las evoluciones de las dos 5-tuplas antes mencionadas.

Derivadas	Evolución de los Estados
$\frac{\partial f}{\partial x_j}$	$f(0, 0, 0, 0, 0) \oplus f(0, 0, 1, 0, 0)$

Tabla 5.1: Derivadas 1^{er} orden.

La evolución depende de la regla que se esté controlando. Por ejemplo si consideramos la regla 30 según la clasificación de Wolfrang, los estados posibles a los que pueden evolucionar las dos 5-tuplas anteriores son,

5-tupla	Evoluciones Posibles
(0,0,0,0,0)	(1,0,0,0,1)
	(1,0,0,0,0)
	(0,0,0,0,1)
(0,0,1,0,0)	(1,1,1,1,1)
	(1,1,1,1,0)
	(0,1,1,1,1)

Tabla 5.2: Evolución de las 5-tuplas Regla 30, 1^{er} orden.

una vez conocida la evolución de ambas 5-tuplas se procede a realizar la suma módulo dos de estas. Como se puede observar independientemente de cual sea la evolución que se tome, los elementos de matriz $(x_{j-1}^t, x_j^t, x_{j+1}^t)$ resultante siempre es el mismo (1,1,1), observemos un par de ejemplos,

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = (1,0,0,0,1) \oplus (1,1,1,1,1) = (0,1,1,1,0),$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = (1,0,0,0,0) \oplus (1,1,1,1,0) = (0,1,1,1,1).$$

El Jacobiano evaluado en cero para la regla 30 viene dado por,

$$\mathbf{J}_0^{(30)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

el cual es constante. Para cada una de las reglas que se consideran en este estudio se obtendrá una matriz Jacobiana que es constante, pero que es distinta para cada una de las reglas.

Lo que se busca con esta estrategia es controlar el autómata sin perturbar el 100% de los sitios. Cuando se aplica la perturbación en los sitios seleccionados (de manera aleatoria), van a quedar algunos sitios que están sin ningún tipo de control como se muestra en la figura 5.8.



Figura 5.8: Perturbación inicial del autómata.

Lo que se espera es que la dinámica del autómata lleve a cero los sitios donde no se esté perturbando.

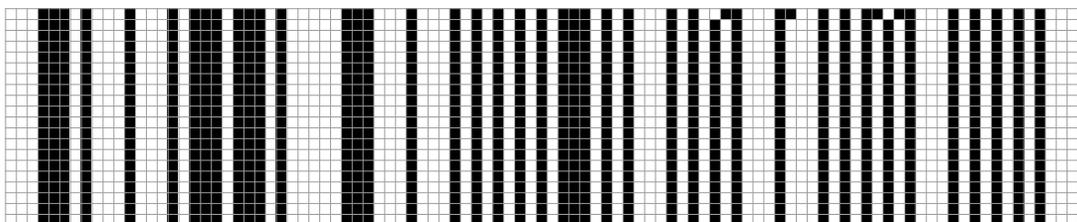


Figura 5.9: Control perturbando en todo instante de tiempo, Regla 110.

En la figura 5.9 se muestra la evolución de la Regla 110, cuando se aplica el control en todo instante de tiempo, el autómata llega a un punto fijo, esto se debe a que la dinámica del autómata no es capaz de llevar a este conjunto de sitios a cero, aunque dependiendo del número de sitios y donde se perturbe se podría llegar a un estado periódico y no del tipo de punto fijo. Este mismo procedimiento se aplicó para todas las reglas y el resultado que se obtuvo fue el mismo que para regla 110, o se llegaba a punto fijo o a un ciclo periódico.

La pregunta es ¿Por qué se forman estos puntos fijos o ciclos? Lo que ocurre es que los sitios donde no se aplica el control, se tienen sub-conjuntos de autómatas celulares

de dimensión más pequeña (a medida que se aumentan los sitios que se perturban estos sub-conjuntos de autómatas disminuyen su dimensión) pero con la particularidad que las condiciones de frontera no son periódicas sino cero (Dirichlet). Lo que trae como consecuencia que los estados que se originan no pertenecen a la dinámica del autómata original y estos estados nuevos pueden evolucionar en puntos fijos o ciclos periódicos.

Una manera de seleccionar la frecuencia temporal con la cual se puede realizar la perturbación es de forma aleatoria. Como se puede observar en la figura 5.10 se logra controlar el autómata 110 si se aplica la perturbación de manera aleatoria, lo mismo ocurre para todas las reglas.

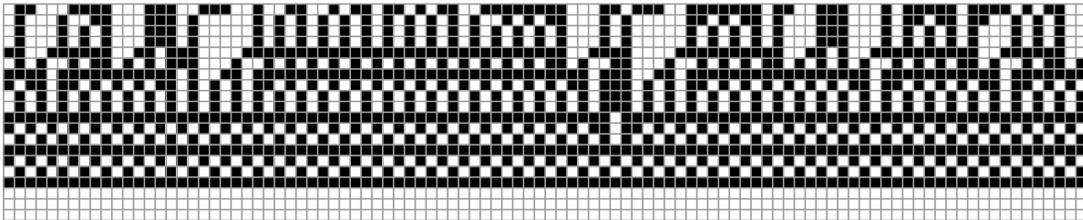


Figura 5.10: Control sin perturbar en todo instante de tiempo, Regla 110.

Para cuantificar que tan buena es la aproximación de primer orden a la hora de controlar los autómatas celulares Clase III se puede calcular la diferencia normalizada módulo dos entre la evolución del autómata y la aproximación de primer orden,

$$\rho(F(X^T), U(X^T)) = \frac{1}{N} \sum_i^N |F(X_i^T) \oplus (\mathbf{J}_0(X_i^T) \odot X_i^T)|, \quad (5.20)$$

en las gráficas llamaremos a $\rho(F(X^T), U(X^T))$ simplemente **Error**.

Los resultados que se muestran es para el control de los autómatas celulares aplicando la aproximación de primer orden, para ello se tomó un autómata celular de 100 celdas (como se tienen 100 celdas, $\% \text{Sitios perturbados} = \# \text{Sitios perturbados}$), en las gráficas se muestran el resultado de promediar 500 condiciones iniciales con un tiempo de evolución $T = 5 \times 10^3$.

En la siguiente figura se muestra el control para las reglas 18, 22, 30, 41, 45 y 54.

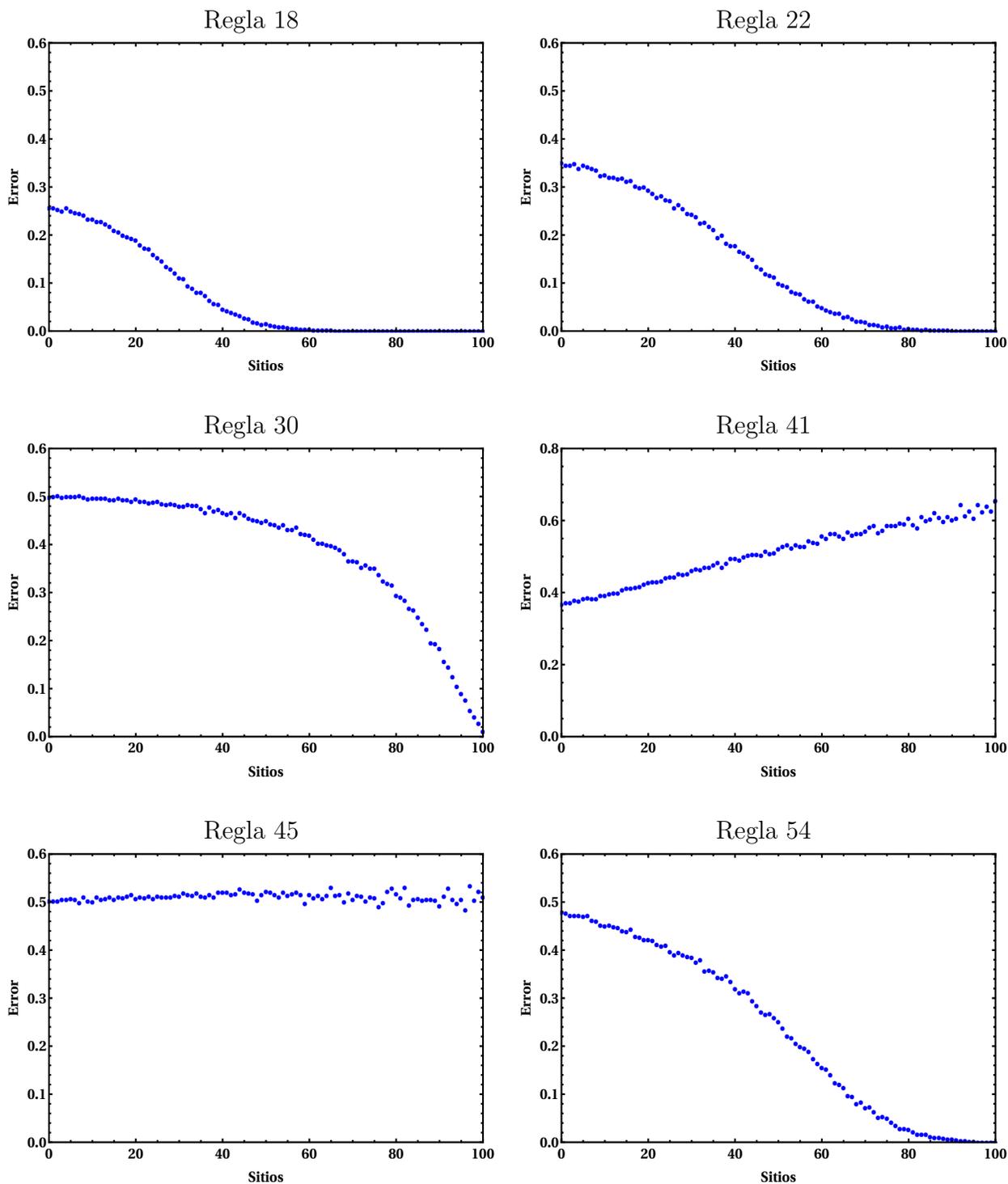


Tabla 5.3: Control Primera Derivad, Reglas 18, 22, 30 41, 45, 54

Como se puede observar el control se logra solamente para tres reglas, la 18, 22 y 54 perturbando por arriba del 60 % de los sitios, mientras que las reglas 30, 41 y 45 no se

logró el control.

En la siguiente figura se muestra el control para las reglas 106, 110, 122, 126, y 146.

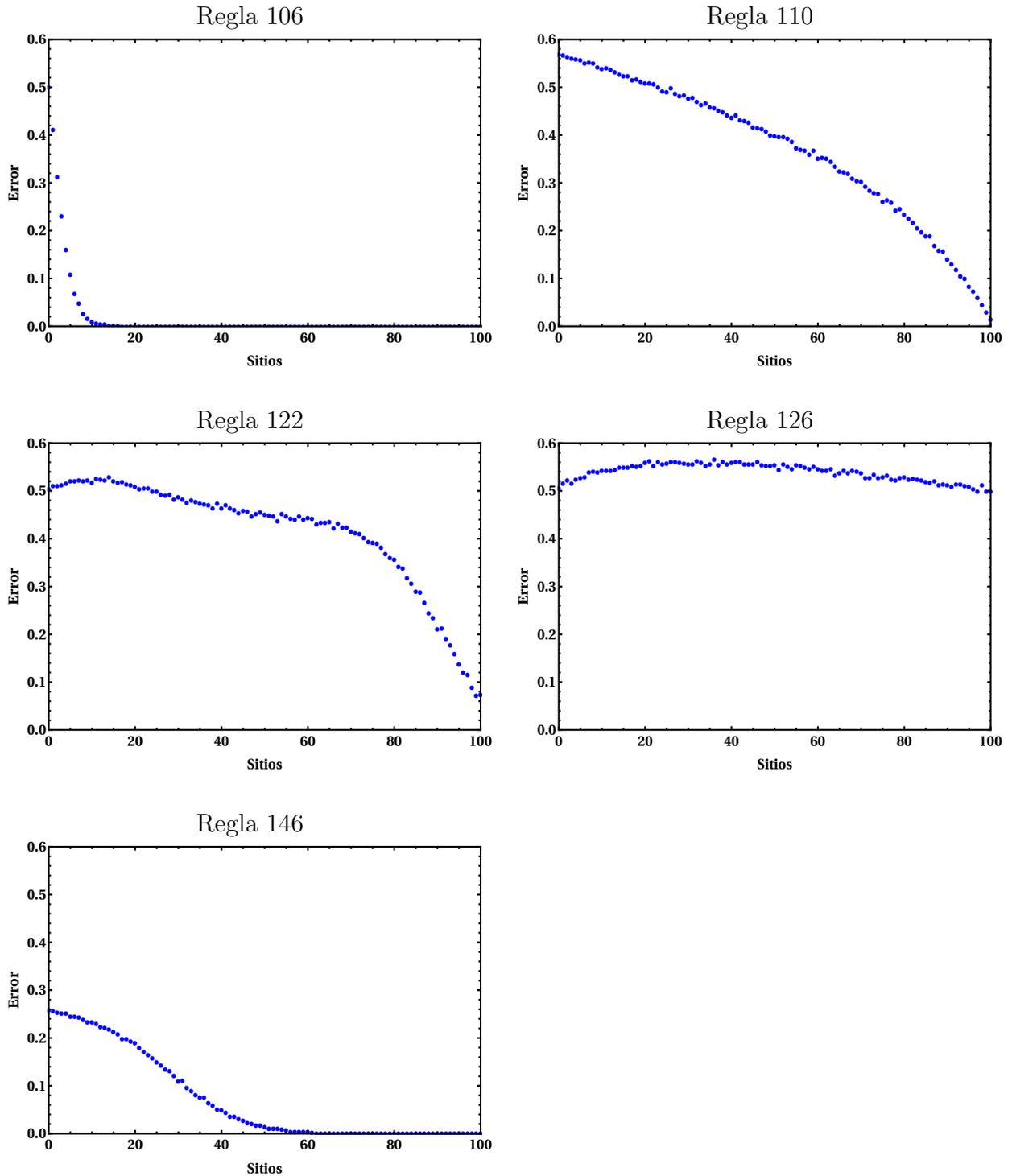


Tabla 5.4: Control Primera Derivada, Reglas 106, 110, 122, 126, 146

Como se puede observar el control se logra solamente para dos reglas 106 perturbando el 15 % de los sitios, mientras que la regla 146 se controla perturbando el 65 % de los sitios. Mientras que las reglas 110, 122 y 126 no se logró el control.

Cuando se aplica la aproximación de primer orden no se logra controlar todas las reglas, de los 11 autómatas celulares estudiados sólo se logra controlar 5 de estos, de los cuales en 4, $\{18, 22, 54, 146\}$, hay que aplica el control en más del 60 % de los sitios. Sólo para la regla 106 el número de sitios perturbados en el autómata es menor al 20 %.

En el grupo de autómatas donde no se logró el control se pueden observar varias similitudes. En las reglas $\{45, 126\}$ sólo se puede controlar alrededor del 50 % de los sitios del autómata independientemente de la cantidad de sitios que se esté perturbando. Mientras que en las reglas $\{30, 110, 122\}$ a medida que se aumenta el número de sitios perturbados se puede controlar más sitios, pero no se logra el control total aún cuando se perturba el 100 %.

Basado en los resultados se puede observar que cuando se utiliza la aproximación de primer orden, algunas reglas se logran controlar perturbando una gran cantidad de sitios, mientras que otras no se logran controlar incluso perturbando el 100 % de los sitios.

Para ver si puede mejorar el control procedemos a considerar no sólo la aproximación de primer orden sino también la de segundo orden, aunque este sea un modelo exacto de la dinámica, la idea es aplicar esta perturbación en un número de sitios mucho menor al 100 %. Para implementar lo antes mencionado lo que hacemos es tomar la ecuación (5.18) y agregarle el término correspondiente a la aproximación de segundo orden. La ecuación con la perturbación de segundo orden entonces la reescribimos como

$$X^{t+1} = F(X^t) \oplus (\mathbf{J}_0(X^t) \oplus \mathbf{B}_0(X^t) \odot X^t) \odot X^t, \quad (5.21)$$

donde $\mathbf{B}_0(X^t)$ es una matriz tridiagonal excepto por dos elementos en las esquinas que están fuera de la diagonal debido a las condiciones de borde periódicas. Esta matriz se puede calcular utilizando la dinámica del sistema, aplicando la ecuación propuesta en el trabajo de Franco Bagnoli [27], para derivadas de orden superior,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right|_{0,0,0} &= f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \oplus f(x_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \oplus \\ &\quad f(x_1, \dots, x_i, \dots, \bar{x}_j, \dots, x_n) \oplus f(x_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_j, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (5.22)$$

donde $F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$ representa la evolución del estado del autómata.

Como no conocemos la dinámica del sistema, debemos aplicar la misma estrategia que se utilizó para calcular el Jacobiano, que es utilizando el estado del autómata. Al igual que el Jacobiano nos interesa hallar la matriz $\mathbf{B}_0(X^t)$ evaluada en cero. Para obtenerla primero se debe ubicar la 5-tupla $(0,0,0,0,0)$. Ahora definamos a los tres términos del centro de la 5-tupla como $(0,p,q,r,0)$. Lo que nos interesa hallar son las siguientes derivadas,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial r} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial r},$$

en otras palabras,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} \right|_{0,0,0} &= f(x_1, \dots, p, \dots, q, \dots, r, \dots, x_j) \oplus f(x_1, \dots, p, \dots, \bar{q}, \dots, r, \dots, x_j) \oplus \\ &\quad f(x_1, \dots, \bar{p}, \dots, q, \dots, r, \dots, x_j) \oplus f(x_1, \dots, \bar{p}, \dots, \bar{q}, \dots, r, \dots, x_n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial r} \right|_{0,0,0} &= f(x_1, \dots, p, \dots, q, \dots, r, \dots, x_j) \oplus f(x_1, \dots, \bar{p}, \dots, q, \dots, r, \dots, x_j) \oplus \\ &\quad f(x_1, \dots, p, \dots, q, \dots, \bar{r}, \dots, x_j) \oplus f(x_1, \dots, \bar{p}, \dots, q, \dots, \bar{r}, \dots, x_n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial r} \right|_{0,0,0} &= f(x_1, \dots, p, \dots, q, \dots, r, \dots, x_j) \oplus f(x_1, \dots, p, \dots, \bar{q}, \dots, r, \dots, x_j) \oplus \\ &\quad f(x_1, \dots, p, \dots, q, \dots, \bar{r}, \dots, x_j) \oplus f(x_1, \dots, p, \dots, \bar{q}, \dots, \bar{r}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Entonces para poder hallar la matriz $\mathbf{B}_0(X^t)$ debemos tener la evolución de la 5-tupla $(0,0,0,0,0)$ y las evoluciones de las conjugadas de la 5-tupla $(0,0,0,0,0)$, para cada uno de los casos correspondientes. En la siguiente tabla se muestran cada uno de ellos.

Derivadas	Evolución de los Estados
$\frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q}$	$f(0, 0, 0, 0, 0) \oplus f(0, 0, 1, 0, 0) \oplus f(0, 1, 0, 0, 0) \oplus f(0, 1, 1, 0, 0)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial p \partial r}$	$f(0, 0, 0, 0, 0) \oplus f(0, 1, 0, 0, 0) \oplus f(0, 0, 0, 1, 0) \oplus f(0, 1, 0, 1, 0)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial q \partial r}$	$f(0, 0, 0, 0, 0) \oplus f(0, 0, 1, 0, 0) \oplus f(0, 0, 0, 1, 0) \oplus f(0, 0, 1, 1, 0)$

Tabla 5.5: Derivadas 2^{do} orden.

La evolución depende de la regla que se esté controlando. Por ejemplo si se considera nuevamente la regla 30, los estados posibles a los que pueden evolucionar las 5-tuplas anteriores son.

5-tupla	Evoluciones Posibles
(0,0,0,0,0)	(1,0,0,0,1) (1,0,0,0,0) (0,0,0,0,1)
(0,0,1,0,0)	(1,1,1,1,1) (1,1,1,1,0) (0,1,1,1,1)
(0,0,0,1,0)	(1,0,1,1,0) (0,0,1,1,1) (0,0,1,1,0)
(0,0,1,1,0)	(0,1,1,0,0) (0,1,1,0,1) (1,1,1,0,0)
(0,1,0,1,0)	(0,1,0,1,1) (1,1,0,1,0) (1,1,0,1,1)
(0,1,0,0,0)	(1,1,1,0,0) (1,1,1,0,1) (0,1,1,0,0)
(0,1,1,0,0)	(1,1,0,1,1) (1,1,0,1,0) (0,1,0,1,0)

Tabla 5.6: Evolución de las 5-tuplas Regla 30, 2^{do} orden.

Veamos continuación un ejemplo de como se aplica lo antes mencionado, para así poder obtener los elementos de matriz (p, q, r) de la regla 30. Todas las sumas realizadas son módulo dos,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} &= (1,0,0,0,1) \oplus (1,1,1,1,1) \oplus (1,1,1,0,0) \oplus (1,1,0,1,1) = (0,1,\mathbf{0},0,1), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial r} &= (1,0,0,0,1) \oplus (1,1,1,0,0) \oplus (1,0,1,1,0) \oplus (1,1,0,1,1) = (0,0,\mathbf{0},0,0), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial r} &= (1,0,0,0,1) \oplus (1,1,1,1,1) \oplus (1,0,1,1,0) \oplus (0,1,1,0,0) = (1,0,\mathbf{1},0,0).\end{aligned}$$

El elemento del centro de la 5-tupla resultante corresponde a cada una de las derivadas parciales, por lo tanto los elementos de la matriz $\mathbf{B}_0(X^t)$ evaluada en cero serán $(0,0,1)$, este resultado siempre es el mismo ya que la matriz $\mathbf{B}_0(X^t)$ evaluada en cero es constante.

Por lo cual la matriz $\mathbf{B}_0(X^t)$ para la regla 30 evaluada en cero posee la siguiente forma.

$$\mathbf{B}_0^{(30)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Al igual que para la regla 30, las matrices $\mathbf{B}_0(X^t)$ son constantes para las demás reglas, pero con la particularidad que todas son distintas entre sí.

Para cuantificar que tan buena es la aproximación de primer y segundo orden a la hora de controlar los autómatas celulares Clase III se puede calcular la diferencia módulo dos normalizada entre la evolución del autómata y la aproximación de primer y segundo orden,

$$\rho(F(X^T), U(X^T)) = \frac{1}{\mathbb{N}} \sum_i^{\mathbb{N}} |F(X_i^T) \oplus (\mathbf{J}_0(X_i^T) \oplus \mathbf{B}_0(X_i^T) \odot X_i^T) \odot X_i^T|, \quad (5.23)$$

en las gráficas llamaremos a $\rho(F(X^T), U(X^T))$ simplemente **Error**. Los resultados que se muestran es para un autómata celular de 100 celdas (*como se tienen 100 celdas, %Sitios*

perturbados = *#Sitios perturbados*) promediando 500 condiciones iniciales con un tiempo de evolución $T = 5 \times 10^3$.

En la figura se muestra el resultado para las regla 18, 22, 30, 41, 45 y 54.

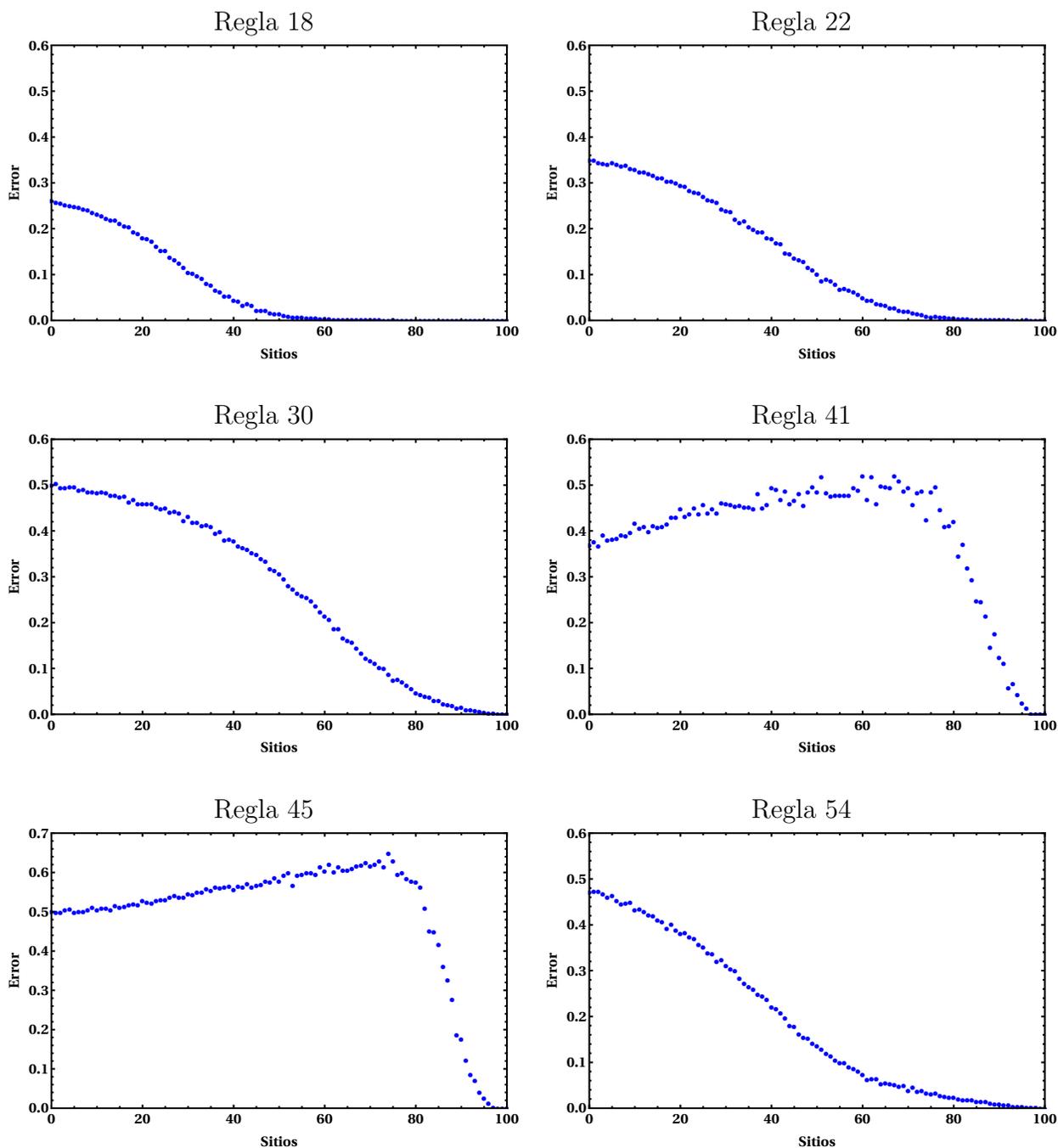


Tabla 5.7: Control Primera y Segunda Derivada, Reglas 18, 22, 30 41, 45, 54

Como se puede observar se logra controlar todas las reglas pero perturbando sobre

el 60% de los sitios.

En la figura se muestra el resultado para las reglas 106, 110, 122, 126 y 146.

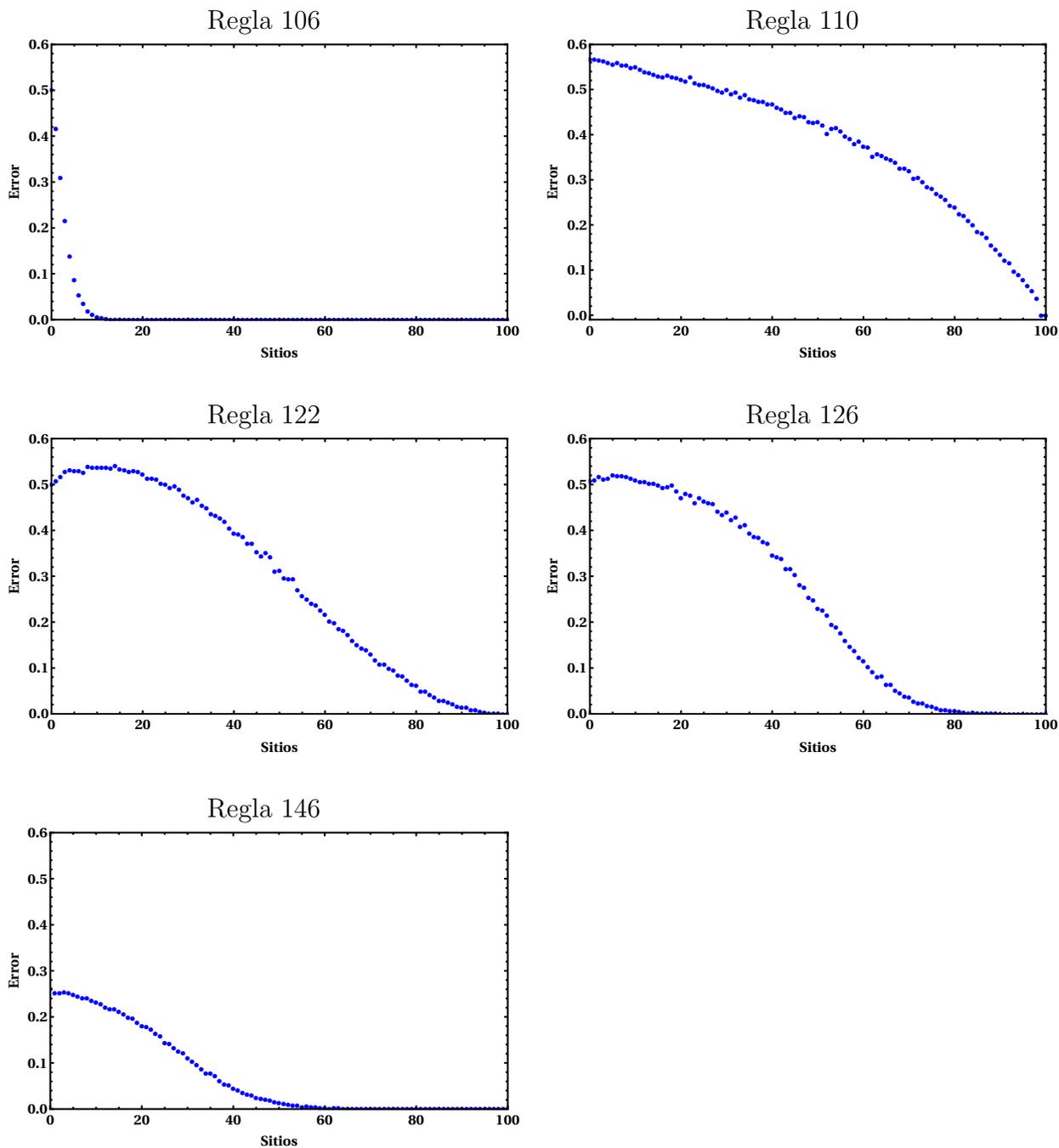


Tabla 5.8: Control Primera y Segunda Derivada, Reglas 106, 110, 122, 126, 146

Para este grupo de reglas también se logran controlar todas las reglas, pero perturbando una gran número de sitios, excepto la regla 106, que se controla sólo perturbando

el 10 % de los sitios.

Cuando se utilizó la aproximación de primer y segundo orden se puede observar que para las reglas {18, 22, 54, 106 y 146} la cantidad de sitios que hay que perturbar para lograr el control es muy similar a cuando se aplicó el control con la aproximación de primer orden, es decir sobre el 65 % de los sitios.

En las reglas donde antes no se logró el control se tienen distintos resultados. Para las reglas {30 41, 45 y 110} se logró el control pero se tuvo que perturbar el 100 % de los sitios. En las reglas {122 y 126} también se logró el control, para la regla 122 se perturbó alrededor del 95 % de los sitios, mientras que para la 126 se tuvo que perturbar un poco más del 80 % de los sitios.

5.3. Control con Clusters

Cuando se implementa la aproximación de primer y segundo orden se tienen que perturbar una gran cantidad de sitios para lograr el control en casi todas las reglas. Para ver si se pueden mejorar estos resultados, se aplicará nuevamente la aproximación de primer y segundo orden pero utilizando otra estrategia, la cual consiste en perturbar el autómata utilizando clusters.

Lo que se busca es aplicar una perturbación que esté distribuida espacialmente a lo largo del autómata, pero que actúe en grupos individuales los cuales se encuentran separados entre sí de cualquier manera, es decir un cluster representa un subconjunto de celdas del autómata que puede poseer cualquier tamaño y a su vez distribuidas a lo largo de este ya sea de manera uniforme o no.

En la figura 5.11 el conjunto de celdas azules representa uno de los tantos clusters que se puede generar, en este caso en particular se tienen tres clusters con cuatro celdas cada uno.



Figura 5.11: Clusters.

Una manera de generar los clusters es la que se presenta a continuación,

$$\text{Cluster 1} = \frac{N_c}{a} \quad , \quad \text{Cluster 2} = \frac{N_{cel} - N_c}{b}. \quad (5.24)$$

Donde N_{cel} representa el número de celdas del autómata, N_c es el tamaño máximo que puede tener uno de los clusters y la diferencia $N_{cel} - N_c$ el tamaño del otro cluster. Las variables a y b son números enteros que van desde 1 hasta N_c y sus valores deben ser tales que se cumpla que $\text{Cluster 1} + \text{Cluster 2} = N_{cel}$, por lo tanto Cluster 1 y Cluster 2 sólo pueden tomar valores enteros.

Se tomará los valores del Cluster 1 para los sitios que se van a perturbar, mientras que los del Cluster 2 los sitios que no se van a perturbar, aunque podría ser al contrario. Cuando se generan los clusters de esta manera se obtiene una distribución para el tamaño de los mismos muy diversa, lo que permite estudiar una gran variedad de casos para el control de los autómatas celulares y ver si se puede disminuir el número de sitios que se tienen que perturbar.

Cuando se aplicó el control con la aproximación de primer y segundo orden no se podía perturbar en todo momento ya que los autómatas o llegaban a puntos fijos o ciclos periódicos, por lo que la perturbación se realizó de forma aleatoria, para de esta manera variar la frecuencia de perturbación, cuando se perturba de esta forma no se tiene ningún tipo de control sobre la frecuencia con la cual se perturba y en promedio se perturba el 50 % de las veces mientras que el otro 50 % de las veces no, por lo tanto para tener un mayor control a la hora de realizar la perturbación se procederá a utilizar el mapa logístico para generar la frecuencia de perturbación. La ecuación de este mapa viene dada por

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n).$$

Se perturbará el autómata cuando $x \leq 0,5$ y no cuando $x > 0,5$, variando el parámetro λ en la ecuación del mapa logístico se puede cambiar la frecuencia de perturbación. Como se puede ver en la figura anterior para valores del parámetro λ que van desde 2,4 hasta 3,6 sólo se pueden generar frecuencias de perturbación que son constantes o

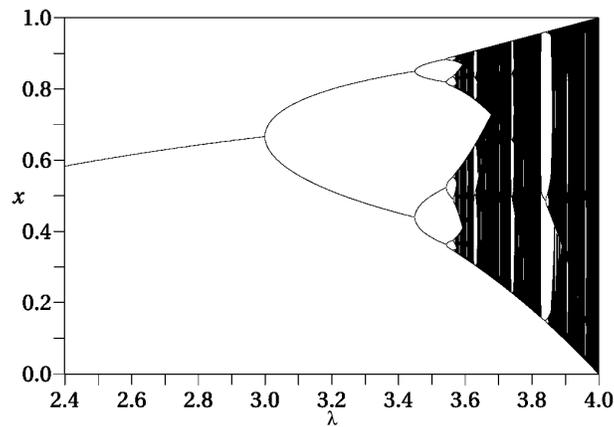


Figura 5.12: Mapa Logístico.

periódicas, mientras que para valores mayores a 3,6 se tiene un comportamiento caótico, el cual permite generar una frecuencia de perturbación que tiene una gran variación en el tiempo, salvo las ventanas de ciclos periódicos que se encuentran dentro de esta región.

Una pregunta que surge es ¿Cómo influye la frecuencia de perturbación en el control del autómatas? Por ejemplo cuando se perturba una vez sí y una no, los estados que puede visitar el autómatas son limitados ya que no evoluciona libremente durante mucho tiempo, lo que implica que el mismo tarda mucho tiempo en explorar distintos estados de la dinámica, lo que puede ser negativo a la hora de realizar el control ya que podría incluso no llegar a un estado que sea controlable.

Mientras si se tiene una frecuencia de perturbación que varíe mucho en el tiempo, el autómatas tiene la posibilidad de evolucionar libremente durante un período de tiempo mayor, permitiendo así que se exploren muchos más estados de la dinámica aumentando de esta manera la posibilidad de hallar un estado que se pueda controlar. Para ver como influye la frecuencia de perturbación a la hora de realizar el control se procederá a realizar un barrido sobre el parámetro λ desde 3,0 hasta 4,0.

En los resultados que se van a mostrar a continuación se tienen dos gráficos por cada regla, el primer gráfico muestra todos los clusters que logran controlar a la regla en estudio. Estos clusters se generan utilizando la ecuación (5.24) y cumpliendo con la condición que $\text{Cluster 1} + \text{Cluster 2} = N_{cel}$.

El segundo es un gráfico en tres dimensiones que muestra el: **Error**, **Sitios** que se perturban y el parámetro λ . El estudio se realizó para un autómata celular de 100 celdas (*como se tienen 100 celdas, %Sitios perturbados = #Sitios perturbados*), con 10 condiciones iniciales y un tiempo de observación de 10×10^3 .

En la figura 5.13 se observa todos los clusters que se pueden generar para la regla 18 y el resultado del control.

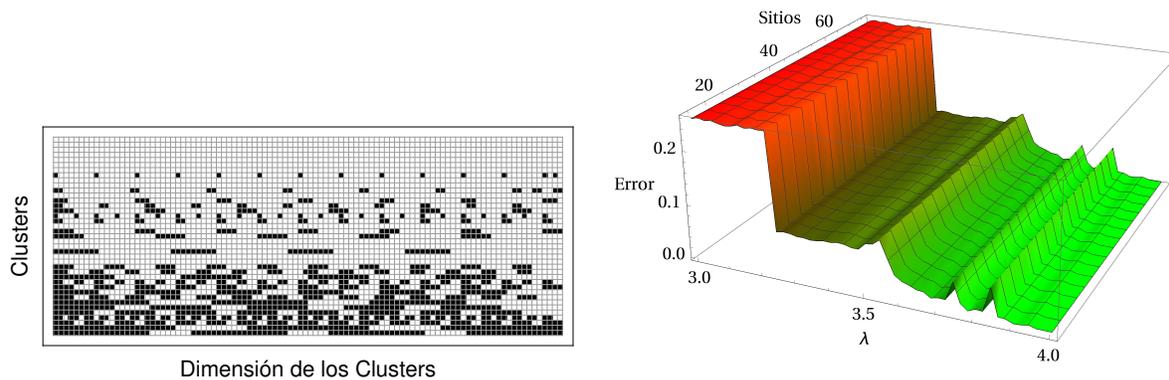


Figura 5.13: Clusters y Control con Clusters Regla 18.

Como se puede observar esta regla tiene una gran variedad de clusters con los cuales se puede controlar el autómata, esta regla se puede controlar tan sólo perturbando 14 % de los sitios lo cual es una mejora considerable con respecto al resultado que se obtuvo con la estrategia anterior que fue del 65 %. Por otro lado se puede ver como influye la frecuencia con la cual se perturba el autómata, cuando el valor del parámetro se encuentra entre 3,0 y 3,6 no se logra controlar, cuando λ entra en la región caótica el error disminuye salvo en las ventanas periódicas dentro de esta zona, cuando λ se encuentra entre 3,9 y 4,0 el autómata se logra controlar en su totalidad.

En la figura 5.14 se observa todos los clusters que se pueden generar para la regla 22 y el resultado del control.

Para esta regla también se puede observar que se tiene una gran cantidad de clusters que permiten realizar el control, lo mínimo que se deben perturbar es el 15 % de los sitios, lo que representa una gran mejoría con respecto a la estrategia anterior donde

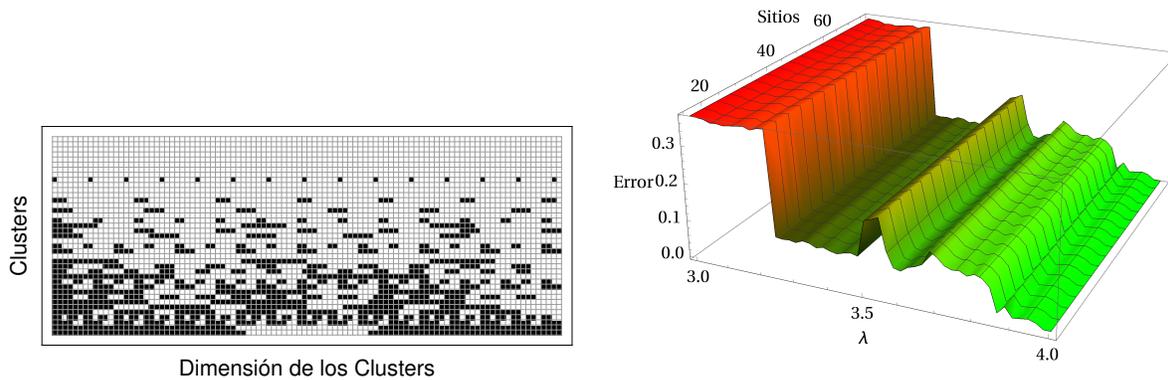


Figura 5.14: Clusters y Control con Clusters Regla 22.

se tenía que perturbar el 85 % de los sitios. Con respecto a la frecuencia con la cual se perturba, el control se logra sólo cuando λ es prácticamente 4,0 independientemente de la cantidad de sitios que se estén perturbando, lo que implica que se tiene que utilizar una perturbación que varíe rápidamente en el tiempo, es decir se debe perturbar con cierta regularidad pero también se debe permitir que el autómata evolucione por si sólo el tiempo suficiente para que el mismo se encuentre en un estado que si se pueda controlar.

En la figura 5.15 se observa todos los clusters que se pueden generar para la regla 30 y el resultado del control.

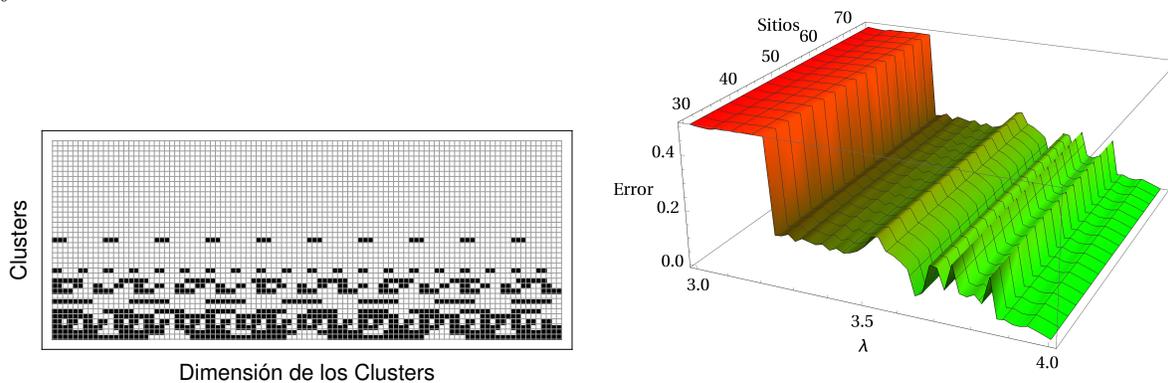


Figura 5.15: Clusters y Control con Clusters Regla 30.

Como se puede observar el número de clusters que logran controlar al autómata es menor que en los dos casos anteriores, pero al igual que los resultados previos el número de sitios que se deben perturbar es mucho menor a cuando se aplicó la estrategia anterior,

ya que antes para lograr el control se tenía que perturbar el 100% de los sitios, en cambio ahora sólo se necesita el 30% de estos para que se logre el control. El valor del parámetro λ debe ser prácticamente 4,0 para controlar el autómata independiente del número de sitios que se esté perturbando, lo que implica que se debe tener una frecuencia de perturbación que varíe rápidamente.

En la figura 5.16 se observa todos los clusters que se pueden generar para la regla 41 y el resultado del control.

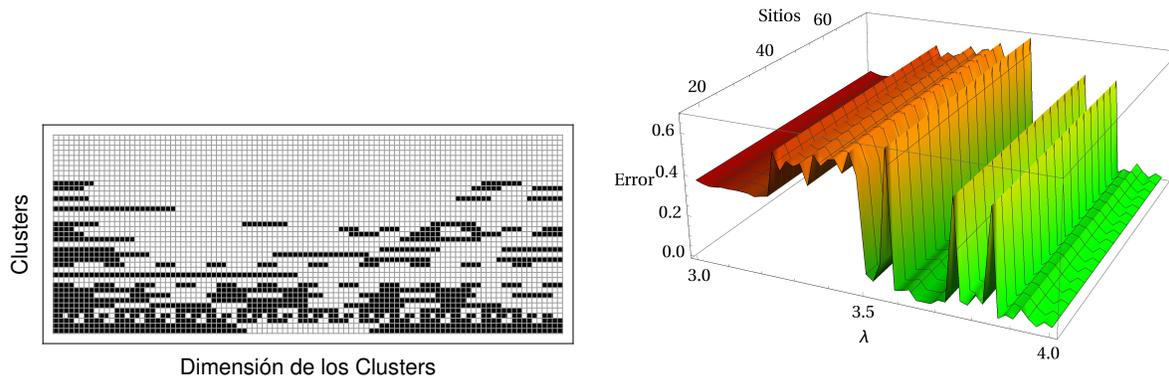


Figura 5.16: Clusters y Control con Clusters Regla 41.

Esta regla posee una cantidad considerable de clusters que permiten controlar el autómata. Cuando se utilizó la estrategia anterior se logró controlar esta regla perturbando el 100% de los sitios, en cambio cuando se utilizan los clusters se logra el control y sólo perturbando el 16% de los sitios. Como se puede observar esta regla tiene un comportamiento distinto al de las reglas anteriores, esto se debe a que la regla 41 posee un 1,

$$f_{(41)} = 1 \oplus x_{i-1} \oplus x_i \oplus x_{i+1} \oplus x_{i-1} \odot x_i \odot x_{i+1},$$

lo que dificulta el control de la misma ya que siempre se le está sumando un 1 a la dinámica del autómata, se puede ver claramente que el error aumenta en las ventanas donde se tiene un comportamiento periódico. Por otro lado se puede observar que el control se logra cuando λ varía desde 3,6 a 3,7 y también cuando se tiene un valor de $\lambda = 3,9$ y $\lambda = 4,0$.

En la figura 5.17 se observa todos los clusters que se pueden generar para la regla 45 y el resultado del control.

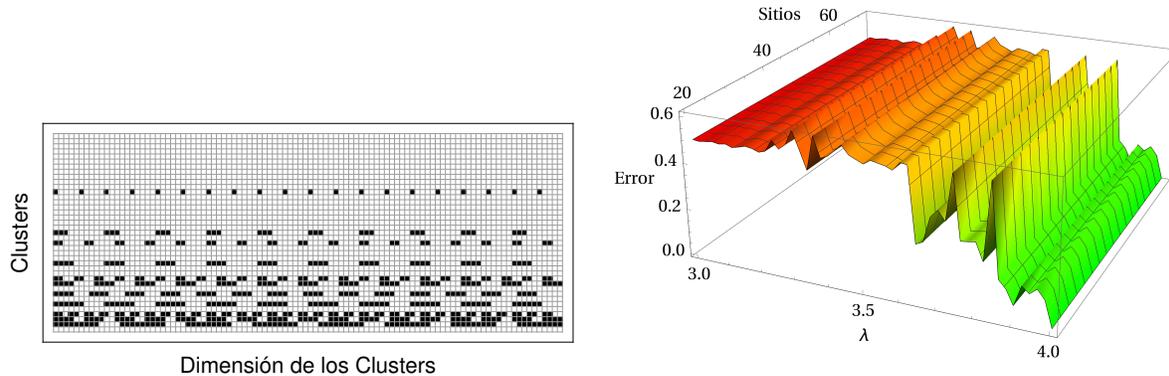


Figura 5.17: Clusters y Control con Clusters Regla 45.

Al igual que para las reglas anteriores se tienen varios clusters que permiten controlar el autómata, este se puede controlar tan sólo con el 20% de los sitios siendo una mejoría considerable con respecto al resultado anterior donde se tenía que perturbar el 100% de los sitios. Esta regla al igual que la 41 presenta un comportamiento distinto a las otras reglas y es debido en parte a que se tiene un 1 que siempre se le está sumando a la dinámica,

$$f_{(41)} = 1 \oplus x_{i-1} \oplus x_{i+1} \oplus x_i \odot x_{i+1},$$

esto dificulta el control del autómata al igual que en la regla 41.

Por otro lado se puede ver que esta regla el error se mantiene casi invariable cuando λ varía desde 3,0 hasta 3,6, luego el error comienza a disminuir menos en las ventanas periódicas que se tienen en esta región. El control se logra únicamente cuando el valor del parámetro $\lambda = 4,0$ y como se puede observar cae bruscamente una vez que se alcanza este valor y es independiente de la cantidad de sitios que se perturben.

En la figura 5.18 se observa todos los clusters que se pueden generar para la regla 54 y el resultado del control.

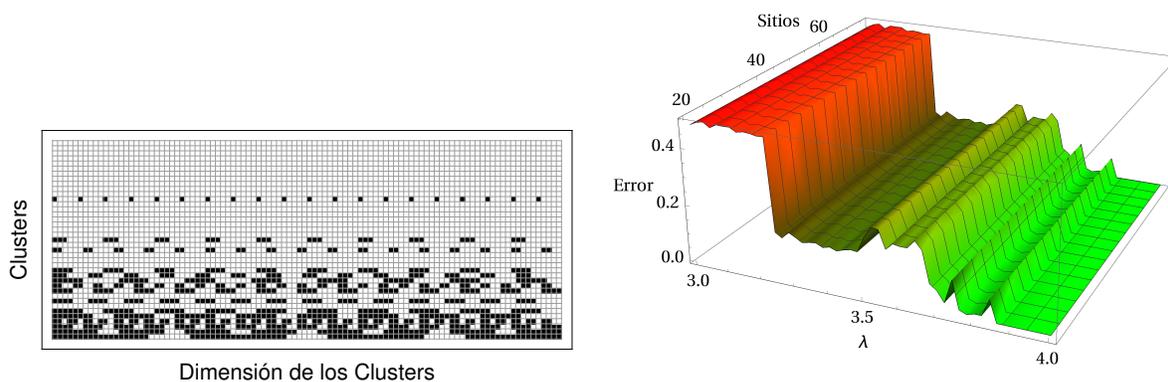


Figura 5.18: Clusters y Control con Clusters Regla 54.

Para esta regla también se tiene una cantidad considerable de clusters con los que se puede llegar a controlar el autómata, esta regla se controló con la estrategia anterior perturbando el 90 % de los sitios, mientras que utilizando los clusters se requiere solamente del 20 % de los mismos. El control se alcanza cuando el valor de λ se encuentra entre 3,9 y 4,0, al igual que otras reglas se necesita que la frecuencia con la que se perturbe varíe rápidamente

En la figura 5.19 se observa todos los clusters que se pueden generar para la regla 106 y el resultado del control.

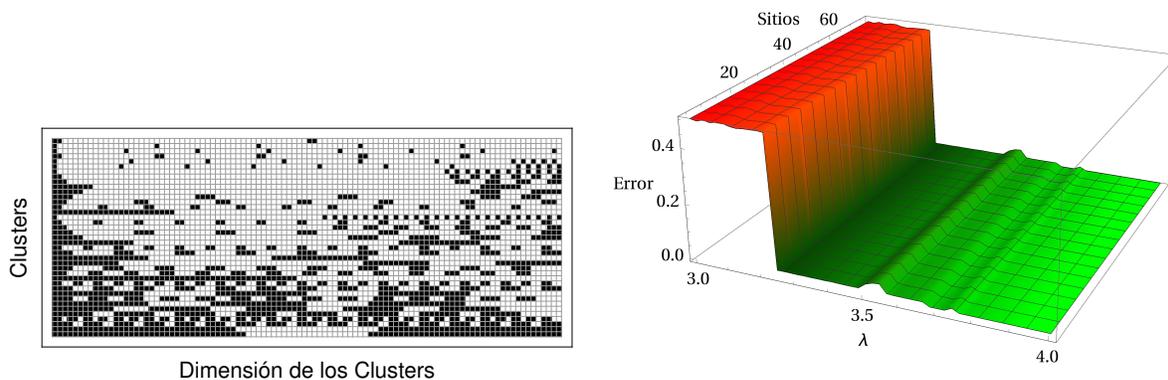


Figura 5.19: Clusters y Control con Clusters Regla 106.

La regla 106 fue donde se observó los mejores resultados cuando se aplicó la estrategia anterior, como se puede ver en el gráfico de los clusters se tiene una gran cantidad, de

hecho están todos los clusters que se pueden generar con nuestras ecuaciones. Con la estrategia anterior se requería un poco más del 10% de los sitios para controlar el autómata, pero con los clusters sólo se necesita el 4%.

Casi con cualquier valor de λ se puede controlar el autómata, en otras palabras casi cualquier frecuencia de perturbación, salvo cuando λ se encuentra entre 3,0 y 3,2 que corresponde a una perturbación constante y en las ventanas periódicas que se encuentran en la región caótica.

En la figura 5.20 se observa todos los clusters que se pueden generar para la regla 110 y el resultado del control.

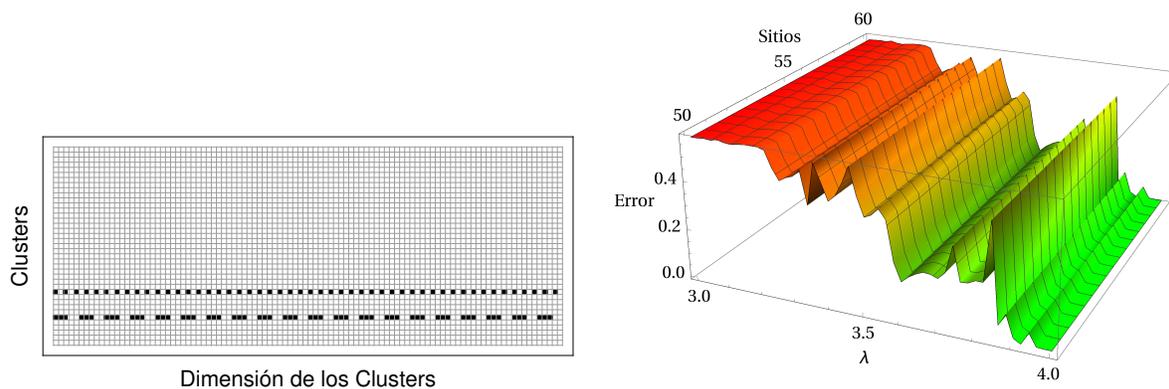


Figura 5.20: Clusters y Control con Clusters Regla 110.

Esta regla sólo se puede controlar con dos tipos de clusters lo que confirma que es una de las reglas más difíciles de controlar, al igual que las reglas 41, y 45, se tiene un comportamiento distinto a las otras reglas cuando se intenta controlarlo. El número de sitios que se perturbaron disminuyó del 100% al 50%, si se utiliza el segundo cluster se tiene que perturbar el 60% de los sitios. El valor de $\lambda \approx 4,0$ para poder controlar el autómata, por lo tanto se debe tener una frecuencia de perturbación que varíe rápidamente en el tiempo.

En la figura 5.21 se observa todos los clusters que se pueden generar para la regla 122 y el resultado del control.

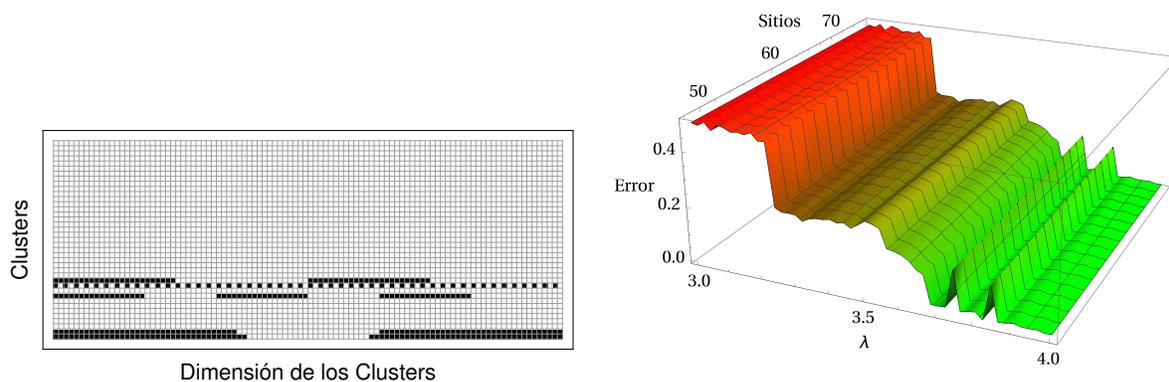


Figura 5.21: Clusters y Control con Clusters Regla 122.

Como se observa tienen sólo 5 clusters que permiten el control, al igual que la regla 110 es una regla que es difícil de controlar, pero aunque se tengan pocos clusters el número de sitios que se tienen que perturbar disminuyó de 95 % a 48 % con respecto a la estrategia anterior. Para esta regla λ debe estar entre 3,9 y 4,0 lo que implica que la frecuencia de perturbación debe variar rápidamente.

En la figura 5.22 se observa todos los clusters que se pueden generar para la regla 126 y el resultado del control.

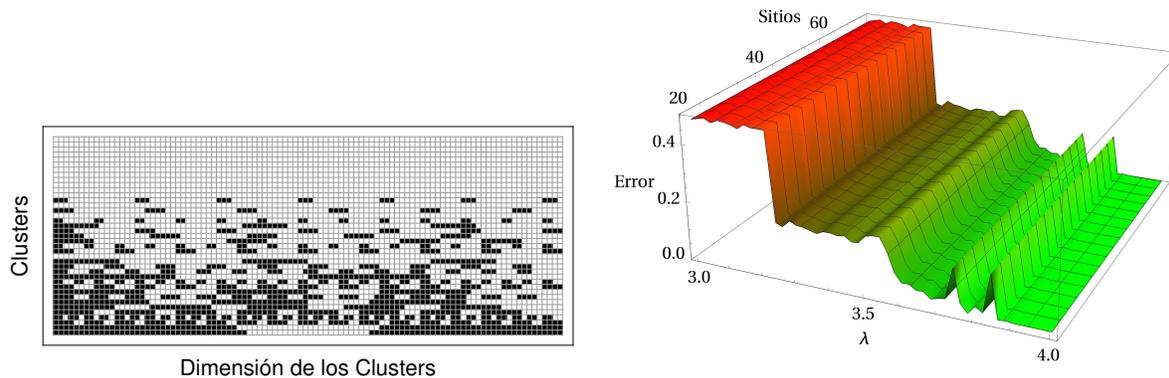


Figura 5.22: Clusters y Control con Clusters Regla 126.

Como se puede observar se tiene una gran cantidad de clusters con los que se puede controlar el autómata, la cantidad de sitios que se deben perturbar disminuyó del 85 % al 21 % y el valor del parámetro λ está entre 3,9 y 4,0 por lo tanto se requiere de una frecuencia de perturbación que varíe rápidamente.

En la figura 5.23 se observa todos los clusters que se pueden generar para la regla 146 y el resultado del control.

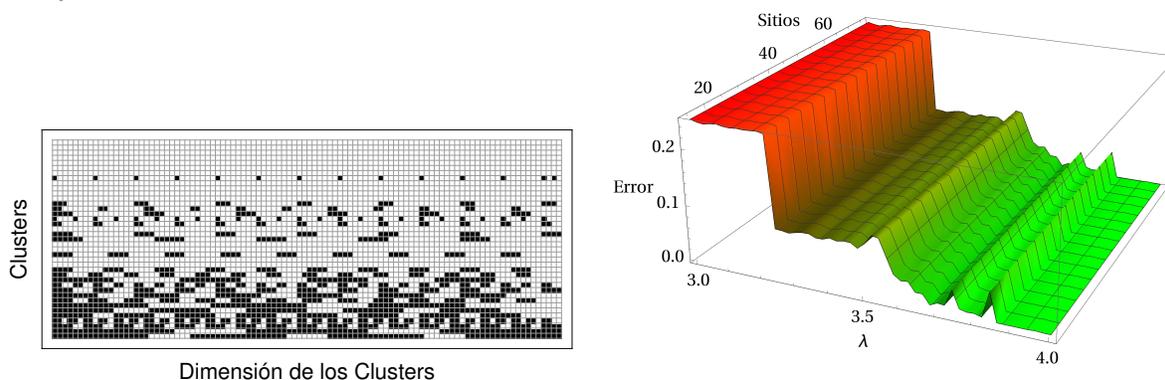


Figura 5.23: Clusters y Control con Clusters Regla 146.

Para esta regla se tiene una gran cantidad de cluster que controlan el autómata, se logró disminuir el número de sitios que se tienen que perturbar para lograr el control del autómata, la cantidad mínima de sitios que se tienen que perturbar es el 14 %, mientras que con la estrategia anterior se requería el 65 %, el parámetro λ se encuentra entre 3,9 y 4,0, lo que indica que se requiere de una alta variabilidad en la frecuencia de perturbación, esta regla tiene un comportamiento muy parecido a la regla 18.

A continuación se muestra una tabla comparativa del número de sitios que se tienen que perturbar para lograr el control entre las aproximaciones de primer orden, la de primero y segundo orden y los clusters.

Regla	Aproximación 1 ^{er}	Aproximación 1 ^{er} y 2 ^{do}	Clusters
18	65 %	65 %	14 %
22	85 %	85 %	15 %
30	No Controla	100 %	30 %
41	No Controla	100 %	16 %
45	No Controla	100 %	20 %
54	90 %	90 %	20 %
106	15 %	10 %	4 %
110	No Controla	100 %	50 %
122	No Controla	95 %	48 %
126	No Controla	85 %	21 %
146	65 %	65 %	14 %

Tabla 5.9: Resultados del control.

En la tabla podemos ver que al usar la aproximación de primer orden no se logran controlar todas las reglas, en cambio cuando se aplica la aproximación de primer y segundo orden se logra controlar todas las reglas pero la cantidad de sitios que se deben perturbar son muy altos, incluso para algunas reglas debe ser el 100 %. Cuando se utilizan los clusters el número de sitios que se deben perturbar disminuyen considerablemente para todas las reglas, pero teniendo en cuenta que se debe perturbar con una frecuencia específica a cada una de las reglas.

Por lo tanto la cantidad de sitios con la cual se perturba a los autómatas celulares para poder controlarlos no es tan relevante como la distribución de los mismos, ya que si comparamos a la aproximación de primer y segundo orden y los clusters, se puede observar cambios significativos aún cuando ambos se hayan aproximado de la misma manera, lo único que cambia es la distribución con la cual se realizó la perturbación.

Los resultados obtenidos en éste capítulo para el control fue con los autómatas celulares elementales clase III. Aparte de ser caóticos, son no lineales. En el estudio de El Yacoubi [54], uno de los primeros y de mayor impacto en el control de los autómatas celulares, se estudió el control de autómatas lineales y sólo se controló una pequeña región del autómata, en éste trabajo se encontró una estrategia que permitió controlar en su totalidad a los autómatas celulares clase III (no lineales).

Conclusiones

En este trabajo se alcanzó la sincronización y el control de los autómatas celulares elementales Clase III (no lineales). Lo que representa un avance en el estudio de los autómatas celulares, ya que en estudios previos sólo se había trabajado con autómatas celulares lineales. De manera exitosa, utilizando estrategias deterministas, se logró perturbar por debajo del 100 % de los sitios de los autómatas en estudio para lograr ambas acciones, a continuación se muestran los resultados obtenidos:

- Se logró sincronizar todos los autómatas celulares Clase III sólo aplicando la aproximación de primer orden.
- La sincronización se alcanza más rápido en los autómatas celulares si se utiliza el Jacobiano determinista en vez de un Jacobiano aleatorio.
- La dinámica de los autómatas celulares se puede caracterizar por el valor crítico donde ocurre la transición q_c .
- En el proceso de sincronización se logró observar el fenómeno de percolación dirigida donde el exponente crítico β tiene el valor $\beta = 0,276486 \approx 0,276(5)$.
- Se desarrollo otro esquema de acoplamiento maestro-esclavo determinista para lograr la sincronización en autómatas celulares clase III. Par alcanzar la sincronización con este esquema, se separó a la regla del autómata como la suma de la parte lineal de la regla, más la parte no lineal, se logró sincronizar a los autómatas teniendo en cuenta que la matriz de acoplamiento debe ser nilpotente y la densidad de unos que aporta la componente no lineal de la regla debe ser baja.

- Para lograr el control en los autómatas celulares ya sea usando la aproximación de primer o de segundo orden, no se puede aplicar una frecuencia de perturbación constante, ya que los autómatas entran en dos regímenes posibles, bien sea un punto fijo o un ciclo periódico. El control se alcanza si se utiliza una frecuencia de perturbación tipo aleatoria o bien usar una función que permita variar la frecuencia de perturbación, como por ejemplo el mapa logístico.
- Al aplicar la aproximación de primer orden sobre los autómatas, sólo se logró controlar a un grupo de los autómatas $\{18, 22, 54, 106, 146\}$. Mientras que los autómatas $\{30, 41, 45, 110, 122, 126\}$ no se logró controlar.
- Con la aplicación de la aproximación de primer y segundo orden se logró controlar todos los autómatas celulares Clase III, con la particularidad que en la mayoría de las reglas que no se controlaron con la aproximación de primer orden se tuvo que perturbar el 100 % de los sitios del autómata y las que si se controlaban por arriba del 65 % de los sitios.
- Se pudo observar que el número de sitios que se necesitan perturbar disminuye considerablemente utilizando la aproximación de primer y segundo orden pero usando clusters para perturbar. Para los autómatas $\{18, 22, 30, 41, 45, 54, 126, 146\}$ se redujo la cantidad de sitios a perturbar en más de un 50 %. Para los autómatas $\{110, 122\}$ disminuyó en un 50 % y la regla 106 pasó del 10 % al 4 % de los sitios a perturbar.
- La mayoría de los autómatas presentó un gran número de clusters con los cuales se pudo controlarlos, salvo los casos de particulares de las reglas $\{110, 122\}$ en los que se tuvo 2 y 5 clusters respectivamente. controlar.

Bibliografía

- [1] RB. Levien and SM. Tan. Double pendulum: An experiment in chaos. *American Journal of Physics*, 61(11):1038–1044, 1993.
- [2] P. Gray and SK. Scott. Sustained oscillations and other exotic patterns of behavior in isothermal reactions. *J. phys. Chem*, 89(1):22–32, 1985.
- [3] James D. Murray. *Mathematical Biology. II Spatial Models and Biomedical Applications {Interdisciplinary Applied Mathematics V. 18}*. Springer-Verlag New York Incorporated, 2001.
- [4] Henri Poincaré. Sur les équations de la dynamique et le probleme des trois corps. *Acta Math*, 13(1):270, 1890.
- [5] FE. Udawadia and N. Raju. Dynamics of coupled nonlinear maps and its application to ecological modeling. *Applied mathematics and computation*, 82(2):137–179, 1997.
- [6] Robert M. May. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261(5560):459–467, 1976.
- [7] Kunihiro Kaneko. Overview of coupled map lattices. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2(3):279–282, 1992.
- [8] R. Coutinho and Bastien Fernandez. Spatially extended monotone mappings. *Dynamics of Coupled Map Lattices and of Related Spatially Extended Systems*, pages 265–284, 2005.

-
- [9] Stephen Wolfram. Universality and complexity in cellular automata. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 10(1-2):1–35, 1984.
- [10] Bastien Chopard, Pascal O. Luthi, and Pierre-Antoine Queloz. Cellular automata model of car traffic in a two-dimensional street network. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 29(10):2325, 1996.
- [11] Joseph Quartieri, Nikos E. Mastorakis, Gerardo Iannone, and Claudio Guarnaccia. A cellular automata model for fire spreading prediction. *Latest Trends on Urban Planning and Transportation*, pages 173–178, 2010.
- [12] Per Bak, Chao Tang, and Kurt Wiesenfeld. Self-organized criticality: An explanation of the $1/f$ noise. *Physical review letters*, 59(4):381, 1987.
- [13] Robert L Devaney et al. *An introduction to chaotic dynamical systems*, volume 13046. Addison-Wesley Reading, 1989.
- [14] John Von Neumann, Arthur W. Burks, et al. Theory of self-reproducing automata. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 5(1):3–14, 1966.
- [15] Kai Nagel and Michael Schreckenberg. A cellular automaton model for freeway traffic. *Journal de physique I*, 2(12):2221–2229, 1992.
- [16] Jin Cheng-Jie, Wang Wei, and Jiang Rui. On the modeling of synchronized flow in cellular automaton models. *Chinese Physics B*, 23(2):024501, 2013.
- [17] Thorsten Chmura, Benedikt Herz, Florian Knorr, Thomas Pitz, and Michael Schreckenberg. A simple stochastic cellular automaton for synchronized traffic flow. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 405:332–337, 2014.
- [18] Giuseppe A. Trunfio. Predicting wildfire spreading through a hexagonal cellular automata model. In *International Conference on Cellular Automata*, pages 385–394. Springer, 2004.

-
- [19] Alex Alexandridis, D. Vakalis, Constantinos I. Siettos, and George V. Bafas. A cellular automata model for forest fire spread prediction: The case of the wildfire that swept through spetses island in 1990. *Applied Mathematics and Computation*, 204(1):191–201, 2008.
- [20] Gianluigi Zanetti. Hydrodynamics of lattice-gas automata. *Physical Review A*, 40(3):1539, 1989.
- [21] Leo P. Kadanoff, Guy R. McNamara, and Gianluigi Zanetti. From automata to fluid flow: comparisons of simulation and theory. *Physical Review A*, 40(8):4527, 1989.
- [22] Alexander E. Hramov, Alexey A. Koronovskii, and Pavel V. Popov. Generalized synchronization in coupled ginzburg-landau equations and mechanisms of its arising. *Physical Review E*, 72(3):037201, 2005.
- [23] Lutz Junge and Ulrich Parlitz. Synchronization and control of coupled ginzburg-landau equations using local coupling. *Physical Review E*, 61(4):3736, 2000.
- [24] Leesa M. Brieger and Ernesto Bonomi. A stochastic cellular automaton model of non-linear diffusion and diffusion with reaction. *Journal of Computational Physics*, 94(2):467–486, 1991.
- [25] Pabitra Pal Choudhury, Sudhakar Sahoo, Mithun Chakraborty, Subir Kumar Bhandari, and Amita Pal. Investigation of the global dynamics of cellular automata using boolean derivatives. *Computers & Mathematics with Applications*, 57(8):1337–1351, 2009.
- [26] Gérard Y. Vichniac. Boolean derivatives on cellular automata. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 45(1-3):63–74, 1990.
- [27] Franco Bagnoli. Boolean derivatives and computation of cellular automata. *International Journal of Modern Physics C*, 3(02):307–320, 1992.

-
- [28] Parimal Pal Chaudhuri. *Additive cellular automata: theory and applications*, volume 1. John Wiley & Sons, 1997.
- [29] Jesús Urías, Gelasio Salazar, and Edgardo Ugalde. Synchronization of cellular automaton pairs. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 8(4):814–818, 1998.
- [30] Gelasio Salazar, Edgardo Ugalde, and Jesús Urías. Master-slave synchronization of affine cellular automaton pairs. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 13(2):491, 2005.
- [31] Luis G. Morelli and Damian H. Zanette. Synchronization of stochastically coupled cellular automata. *Physical Review E*, 58(1):R8, 1998.
- [32] Jhonny De Abreu and García Pedro. Control de autómatas celulares de clase III basado en técnicas de sincronización. In *Memorias JIFI-EAI 2012 Facultad de Ingeniería UCV*.
- [33] Peter Grassberger. Synchronization of coupled systems with spatiotemporal chaos. *Physical Review E*, 59(3):R2520, 1999.
- [34] Jean-Baptiste Rouquier. An exhaustive experimental study of synchronization by forcing on elementary cellular automata. In *JAC 2008*, pages 250–261. , 2008.
- [35] Pedro García, José García, and Jhonny De Abreu. Sincronización y percolación dirigida en autómatas celulares no lineales. In *Memorias JIFI-EAI 2012 Facultad de Ingeniería UCV*. Universidad Central de Venezuela, 2012.
- [36] Simon R. Broadbent and John M. Hammersley. Percolation processes: I. crystals and mazes. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 53, pages 629–641. Cambridge University Press, 1957.
- [37] SP. Obukhov. The problem of directed percolation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 101(1):145–155, 1980.

-
- [38] P. Grassberger. Directed percolation in $2 + 1$ dimensions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 22(17):3673, 1989.
- [39] Haye Hinrichsen. Non-equilibrium critical phenomena and phase transitions into absorbing states. *Advances in physics*, 49(7):815–958, 2000.
- [40] J. De Abreu, P. García, and J. García. A deterministic approach to the synchronization of nonlinear cellular automata. *Advances in Complex Systems*, page 1750006, 2017.
- [41] Stephen Wolfram and M. Gad-el Hak. *A new kind of science*, 2003.
- [42] Leon O. Chua, Sook Yoon, and Radu Dogaru. A nonlinear dynamics perspective of wolfram’s new kind of science Part I: Threshold of complexity. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12(12):2655–2766, 2002.
- [43] Leon O. Chua, Valery I. Sbitnev, and Sook Yoon. A nonlinear dynamics perspective of wolfram’s new kind of science Part II: Universal neuron. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 13(09):2377–2491, 2003.
- [44] Leon O. Chua, Valery I. Sbitnev, and Sook Yoon. a nonlinear dynamics perspective of wolfram’s new kind of science Part III: Predicting the unpredictable. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 14(11):3689–3820, 2004.
- [45] Leon O. Chua, Junbiao Guan, Valery I. Sbitnev, and Jinwook Shin. a nonlinear dynamics perspective of wolfram’s new kind of science Part VII: Isles of eden. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 17(09):2839–3012, 2007.
- [46] Andrew Adamatzky. *Chaos, CNN, memristors and beyond: A festschrift for Leon Chua*. World Scientific, 2013.
- [47] Vladimir Nikolaevich Fomin. *Discrete linear control systems*, volume 67. Springer Science & Business Media, 2012.
- [48] E. Ott. C. grebogi, j. yorke. *Phys. Rev. Lett*, 64:1196, 1990.

-
- [49] Chyun-Chau Fuh. Optimal control of chaotic systems with input saturation using an input-state linearization scheme. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(8):3424–3431, 2009.
- [50] Ruslan L. Davidchack, Ying-Cheng Lai, Aaron Klebanoff, and Erik M. Bollt. Towards complete detection of unstable periodic orbits in chaotic systems. *Physics Letters A*, 287(1):99–104, 2001.
- [51] Kestutis Pyragas. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physics Letters A*, 170(6):421–428, 1992.
- [52] Hu Gang and Qu Zhilin. Controlling spatiotemporal chaos in coupled map lattice systems. *Physical Review Letters*, 72(1):68, 1994.
- [53] RO. Grigoriev, MC. Cross, and HG. Schuster. Pinning control of spatiotemporal chaos. *Physical Review Letters*, 79(15):2795, 1997.
- [54] S El Yacoubi. A mathematical method for control problems on cellular automata models. *International Journal of Systems Science*, 39(5):529–538, 2008.