



Universidad Central de Venezuela

Facultad de Ciencias

Postgrado en Física

**ALGUNOS ASPECTOS SOBRE LA
T-DUALIDAD EN LA TEORÍA DE
SUPERMEMBRANAS Y TEORÍA DE CAMPO
DOBLE.**

Lic. Camilo las Heras G.

Dra. María Pilar García del Moral, Tutora

Dra. Joselen Peña, Tutora

Caracas, 12 de septiembre del año 2017

**Algunos aspectos sobre la T-dualidad en la Teoría de Supermembranas y
Teoría de Campo Doble.**

Copyright © 2017

Universidad Central de Venezuela
Camilo las Heras G.



**UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
COMISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO**

Comisión de Estudios de
Postgrado



VEREDICTO

Quienes suscriben, miembros del jurado designado por el Consejo de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, para examinar el Trabajo de Grado presentado por: **CAMILO LAS HERAS GVERNEUR**, Cédula de identidad N.º 19.242.900, bajo el título "ALGUNOS ASPECTOS SOBRE LA T-DUALIDAD EN LA TEORÍA DE SUPERMEMBRANAS Y TEORÍA DE CAMPO DOBLE", a fin de cumplir con el requisito legal para optar al grado académico de **MAGISTER SCIENTIARUM, MENCIÓN FÍSICA**, dejan constancia de lo siguiente:

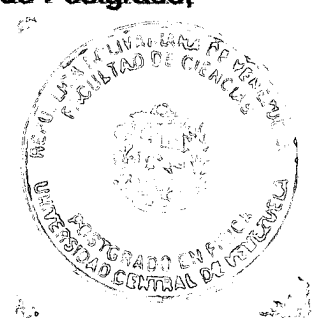
1.- Leído como fue dicho trabajo por cada uno de los miembros del jurado, se fijó el día 7 de Julio de 2017 a las 10:00 A.M, para que el autor lo defendiera en forma pública, lo que éste hizo en la Sala Guillermo Ruggeri, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual respondió satisfactoriamente a las preguntas que le fueron formuladas por el jurado, todo ello conforme con lo dispuesto en el Reglamento de Estudios de Postgrado.

2.- Finalizada la defensa del trabajo, el jurado decidió aprobarlo, por considerar, sin hacerse solidario con la ideas expuestas por el autor, que se ajusta a lo dispuesto y exigido en el Reglamento de Estudios de Postgrado.

Para dar este veredicto, el jurado estimó que el trabajo examinado presenta un excelente nivel de acuerdo a lo esperado en una tesis de magister, se pudo comprobar que el estudiante pudo completar los objetivos del proyecto en forma satisfactoria. La comparación cualitativa de la realización de la invariancia bajo T dualidad entre la teoría de la supermembrana y la teoría de campo doble supone un aporte novedoso que no ha sido tratado hasta el momento en la literatura y que ha generado un trabajo de investigación sometido a publicación.

El jurado por unanimidad decidió otorgar la calificación de **EXCELENTE** al presente trabajo por considerarlo de excepcional calidad para una tesis de magister, tanto en la presentación como en el documento escrito.

En fe de lo cual se levanta la presente ACTA, a los 7 días del mes de Julio del año 2017, conforme a lo dispuesto en el Reglamento de Estudios de Postgrado, actuó como Coordinadora del jurado la Dra. Joselen Peña.



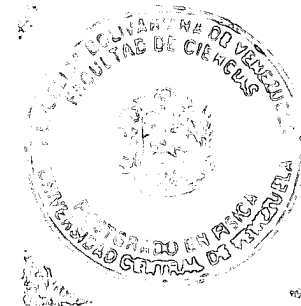
El presente trabajo fue realizado bajo la dirección de la **Dra. María del Pilar García del Moral** (Universidad de Antofagasta – Chile) y la **Dra. Joselen Peña**.

Dr. Nelson Bolívar / C.I. 13.568.312
Universidad Central de Venezuela

Dr. Jorge Bellorín / C.I. 13.222.148
Universidad de Antofagasta-Chile

Dra. Joselen Peña / C.I. 11.078.067
Universidad Central de Venezuela
Tutora

NB/JB/JP.- 7/7/2017



Para Tana Makeda

Agradecimientos

Agradezco profundamente a la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, por la formación y la acogida, ha sido y seguirá siendo un honor formar parte de ella.

Debo agradecer también a la Universidad de Antofagasta pues parte importante del trabajo fue realizada en esa institución que con mucha amabilidad me trató y recibió.

Debo mencionar que este trabajo no hubiese sido posible sin la guía de mis tutoras, a María Pilar García del Moral, no hay palabras suficientes para agradecer todo lo compartido, como profesional y persona es admirable su dedicación y vocación, me considero afortunado por haber podido trabajar bajo su tutoría. A Joselen Peña le debo agradecer la apertura de puertas, el empuje y el esfuerzo para que todo esto ocurriera. Sin ella, no hubiese sido posible.

A Álvaro Restuccia por sus conocimientos e ilustradas explicaciones.

Quiero agradecer también a la directora del Postgrado Nuri Hurtado por su gestión, y por la amabilidad y disposición manifestada en todo momento, a Mary Muñoz por su impecable diligencia y voluntad de ayudar. Gracias totales.

Debo agradecer a mi familia por el apoyo brindado en todo momento. A mi madre por siempre motivarme a ir hacia adelante, a mi esposa por el invaluable apoyo en los momentos duros y hermosos, a mi padre por estar. A mis tíos por siempre creer en mí y animarme a continuar. A María Cañadas por el amor incondicional.

Agradezco también a todos los amigos que forman parte de este logro directa e indirectamente, de la Facultad menciono a Daniel Bachour, Miguel García, Gabriel Abellán, Eudomar Henríquez, Pablo León entre otros, con quienes mantuve discusiones tanto académicas como fortuitas que hicieron aún más ameno el trabajo.

Finalmente agradezco a los grandes profesores de los que tuve la oportunidad de aprender en el Postgrado, a Anamaría Font, Abraham Lozada, Salvatore De Vincenzo, Ernesto Medina, Nuri Hurtado, Lorenzo Leal, Ernesto Contreras, Ernesto Fuenmayor, José Antonio López, muchas gracias por formar parte de la ilustre Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela y dedicar tiempo a la generación de relevo.

Resumen

Algunos aspectos sobre la T-dualidad en la Teoría de Supermembranas y Teoría de Campo Doble.

Camilo las Heras G.

Dra. María Pilar García del Moral, Tutora

Dra. Joselen Peña, Tutora

Universidad Central de Venezuela

En este trabajo se realiza una revisión bibliográfica de dos teorías invariantes bajo T-dualidad como la Teoría de la Supermembrana con cargas centrales que describe un sector de la teoría M y la Teoría de Campo Doble, que es una reformulación de la supergravedad, para realizar una comparación cualitativa de las formulaciones globales de ambas teorías en términos de fibrados toroidales.

Resultados parciales de esta tesis fueron reportados en la publicación [1]

"*On Global aspects of duality invariant theories: M2-brane vs DFT*"(2017) Abellán G, García del Moral M.P, las Heras C, Peña J & Restuccia A. *J. Phys. Conf. IOP*

Dra. María Pilar García del Moral
Tutora

Dra. Joselen Peña
Tutora

ÍNDICE GENERAL

Índice General	ix
Introducción	1
1. Teoría de cuerdas bosónicas y supercuerdas	9
1.1. Ideas Básicas	9
1.2. Cuerdas Bosónicas.	15
1.2.1. Cuerdas cerradas.	18
1.2.2. Cuerdas abiertas	22
1.2.3. Compactificación circular de cuerdas bosónicas cerradas.	25
1.3. Cuerdas supersimétricas.	28
1.3.1. Sector NS	30
1.3.2. Sector R	31
1.3.3. Compactificación circular de supercuerdas tipo II.	33

2. T-Dualidad en teorías de cuerdas	34
2.1. Cuerdas bosónicas cerradas	36
2.2. Supercuerdas tipo II	37
2.3. Cuerdas abiertas	38
2.4. T-dualidad y S-dualidad.	39
3. Supergravedad.	41
4. Teoría de Campo Doble	45
4.1. Grupo de simetría T-dualidad	45
4.2. Formulación de la Teoría de Campo Doble	51
4.3. Algunas nociones de la formulación global	56
4.3.1. Caso $n=1$	58
5. Teoría de Supermembranas	60
5.1. Nociones fundamentales	61
5.2. Calibre del cono de luz	64
5.3. Supermembrana con cargas centrales.	67
5.4. Fibrado toroidal simpléctico	72
6. T-dualidad en la Teoría de la Supermembrana	74
6.1. T-dualidad local	75
6.2. T-dualidad global	78
Conclusiones	82

A. Fibrados	88
A.1. Acción por la derecha del grupo de estructura en un fibrado principal.	91
A.2. Mapas de fibrados	92
A.3. Fibrados Asociados	93
A.4. Secciones	93
 Bibliografía	 95

INTRODUCCIÓN

El objetivo principal de la física de altas energías es la descripción de la estructura fundamental de la materia. Para lograrlo se buscan las partículas elementales, constituyentes de la materia en la escala más pequeña y las interacciones que actúan entre ellas. La historia demuestra como, a medida que se desarrollan nuevas tecnologías, partículas que una vez se consideraron elementales, se interpretaron posteriormente como objetos con determinada estructura conformados por elementos más fundamentales.

El surgimiento del Modelo Estándar de Partículas, en la segunda mitad del siglo XX, caracterizó las partículas que conforman la materia en dos familias fundamentales, los quarks (top, down, up, bottom, strange y charm) y los leptones (electrón, taón, muón y sus respectivos neutrinos), todas estas partículas de espín semientero se conocen como fermiones.

También sabemos que todas las interacciones presentes en el universo pueden ser clasificadas en cuatro grupos: interacción gravitacional, interacción electromagnética, interacción nuclear fuerte e interacción nuclear débil. Las dos primeras son fuerzas de largo alcance, y en consecuencia son las que percibimos en nuestra vida cotidiana, pese a ser la gravitatoria la interacción más débil de las cuatro, mientras que las dos

últimas son fuerzas de corto alcance y se hacen evidentes a escalas de $10^{-15}m$ y $10^{-18}m$ respectivamente. Estas cuatro interacciones fundamentales representan las posibles interacciones entre las partículas elementales que conforman la materia, y dependiendo del tipo de partícula y la distancia que las separe, será una u otra interacción la predominante.

El Modelo Estándar como una teoría cuántica de campos, ha logrado describir con asombrosa precisión todas las interacciones entre las partículas fundamentales excepto la interacción gravitatoria, incorporando además de los fermiones unas partículas de espín entero mediadoras de la interacción ó portadoras de la fuerza, los bosones. El fotón aparece como partícula mediadora de la interacción electromagnética, los gluones de la interacción fuertes, y en la interacción débil las partículas mediadoras son los bosones W^\pm y Z . Entonces el Modelo Estándar describe tres de las cuatro interacciones mediante una teoría de calibre no abeliana formada por la teoría electrodébil, que unifica las fuerzas débil y electromagnética y la cromodinámica cuántica, teoría asociada a la interacción nuclear fuerte. Además reproduce todos los resultados experimentales obtenidos en determinado rango de energía.

Si bien las tres interacciones que considera esta teoría pueden ser descritas consistentemente a nivel cuántico, la descripción cuántica de la interacción gravitatoria no ha sido encontrada. Pero ya que la unificación de conceptos ha sido un pilar en el entendimiento del universo tal cual lo conocemos, es natural considerar la posibilidad de interpretar las cuatro fuerzas fundamentales como diferentes aspectos de una única interacción.

La idea de que las diferentes partículas elementales que conforman la materia pueden asociarse a estados de oscilación de una membrana bidimensional, nació a partir de un trabajo de Dirac en 1962 [2], donde propuso que el electrón debería ser considerado clásicamente como una superficie conductora cargada con simetría esférica que podía vibrar. Sin embargo la teoría fue abandonada debido a que no considera el

espín del electrón, y por ende no guarda relación con la teoría conocida entonces y los resultados experimentales.

Poco después, a finales de la década de los 60 aparece una teoría para describir interacciones cuánticas hadrónicas [3], que un poco después en [4, 5, 6] se interpretaría como teoría de cuerdas. La teoría de cuerdas es una teoría matemática que provee una consistente representación de la gravedad a nivel cuántico, y establece que en lugar de partículas puntuales, los elementos fundamentales son objetos extendidos unidimensionales que pueden vibrar, y sus diferentes modos de oscilación se relacionan con distintas partículas. Inicialmente se formuló esta teoría considerando únicamente grados de libertad bosónicos, pero resultó inestable debido a la existencia de partículas de masa negativa, denominadas taquiones. Si el propósito es describir el universo conocido, es necesario considerar grados de libertad fermiónicos en la teoría, ello lo logramos haciendo la teoría supersimétrica. Si en la teoría de cuerdas bosónicas los modos de oscilación representan bosones ó partículas mediadoras en un espacio-tiempo de 26 dimensiones, las teorías de supercuerdas contienen en su espectro tanto bosones como fermiones en un espacio-tiempo de 10 dimensiones.

A mediados de la década de los 80, se conocían 5 teorías de supercuerdas, las de tipo *I*, tipo *IIA*, tipo *IIB*, las heteróticas $E_8 \times E_8$ y las $SO(32)$. La primera considera cuerdas abiertas y cerradas, mientras que las restantes contienen únicamente cuerdas cerradas. Posteriormente, se demostró que estas teorías no son independientes, sino que están relacionadas entre sí mediante transformaciones de dualidad (S-dualidad y T-dualidad), razón por la cual se les considera distintos límites de una misma teoría en 11 dimensiones llamada teoría M, por lo tanto las dualidades de teorías de cuerdas deben ser simetrías de la teoría en 11 dimensiones [7].

La S-dualidad relaciona una teoría en régimen de acoplo fuerte con una teoría en régimen de acoplo débil [8]. La T-dualidad relaciona dos teorías formuladas en espacios geométricos diferentes, requiere que objetos extendidos se enrollen alrededor

de direcciones compactificadas, permitiendo la aparición de los modos de enrollamiento y propagación a lo largo de la dirección compactificada. La T-dualidad [9] permite que teorías compactificadas en variedades con moduli diferente sean equivalente, siempre y cuando se intercambie los modos de winding (asociado al enrollamiento) con las cargas de Kaluza Klein (KK)(asociadas al momentum cuantizado de la cuerda). En particular, las teorías de supercuerdas Tipo *I* y las heteróticas $SO(32)$ están relacionadas mediante la S-dualidad, también las de Tipo IIB son S-duales a ellas mismas, mientras que las teorías de tipo *II*(*IIA* y *IIB*) y las heteróticas ($E_8 \times E_8$ y $SO(32)$) están relacionadas mediante transformaciones de T-dualidad. El darse cuenta de estas dualidades llevó a postular la existencia de la teoría M ([10, 11, 12])

Debido a que en la teoría de cuerdas se consideran objetos extendidos unidimensionales, la generalización de esta idea conduce a pensar en objetos extendidos con dos o más dimensiones espaciales, estos objetos son conocidos como Dp-branas. Sin embargo el interés por la supermembrana surge pues es la fuente de la supergravedad en 11 dimensiones [13]. En 1976 se estudia por primera vez la dinámica de una membrana bosónica [14], sin embargo, al igual que en teorías de cuerdas, no es una teoría realista pues no considera fermiones en su descripción, para hacerlo necesitamos hacer la teoría supersimétrica, esto se puede lograr introduciendo la supersimetría en el volumen de mundo, embebiendo la membrana en un super espacio (target-space supersimétrico) o una combinación de ambas. Así nace entonces la teoría de supermembranas [15] a mediados de los 80's, la cual también fija la dimensión del espacio-tiempo pero en 11 dimensiones [16].

Dado que la supersimetría relaciona bosones y fermiones, es necesario que el número de grados de libertad fermiónicos coincidan con los bosónicos, para ello se considera una simetría fermiónica llamada simetría Kappa [17].

Ya vimos que el acoplo fuerte de las teorías de cuerdas es una teoría en 11 dimensiones, en principio más fundamental, llamada teoría M [10],[11],[12]. Esta teoría

consta de M2-branas (supermembranas) y su dual solitónico la 5-brana, y su límite a bajas energías es la única y maximal supergravedad en 11 dimensiones, a partir de la cual se pueden obtener, mediante reducciones dimensionales, todas las otras supergravedades existentes. Además se pueden obtener las teorías de supercuerdas *IIA* y *SO(32)* mediante reducciones dimensionales de Scherk-Schwarz y Kaluza-Klein respectivamente. La supergravedad es una teoría de campos gravitatoria que considera la supersimetría como una simetría local y guarda una estrecha relación con las teorías de cuerdas, pues es una teoría efectiva del sector no masivo de las mismas. Además, contiene un campo de espín 2 (gravitón) y su respectivo compañero supersimétrico de espín $\frac{3}{2}$ (gravitino).

Las teorías de supercuerdas en 10 dimensiones y la teoría M en 11 dimensiones requieren la introducción de dimensiones extra, pero como en la naturaleza hasta el momento no se han observado más dimensiones que las 4 conocidas (3 dimensiones espaciales y una temporal), se cree que las dimensiones extras están compactificadas en variedades de volumen tan pequeño que no pueden ser detectadas por los experimentos realizados hasta la fecha. De forma similar a lo que ocurre en teoría de cuerdas, se esperaba que la supermembrana fuese el objeto extendido fundamental de la teoría M, pero la idea de que ésta describiera los grados de libertad microscópicos de la teoría está en discusión debido a que su espectro es continuo. Sin embargo se puede interpretar un sector de la teoría de la supermembrana, llamada como supermembrana con cargas centrales como objeto fundamental de un sector de la teoría M en el sentido que describe parte de los grados de libertad microscópicos de la teoría.

Al compactificar la supermembrana en un target space $M_9 \times T^2$, es posible imponer una condición topológica asociada a un enrollamiento irreducible de la supermembrana en el 2-toro del target y obtener así la llamada supermembrana con cargas centrales [18], que también puede ser interpretada como la aparición de un fibrado principal $U(1)$ con la primera clase de Chern distinta de cero, sobre el volumen de mundo que implica la existencia de una condición de monopolos de Dirac generalizados en el mis-

mo. La particularidad que tiene este sector topológico de la teoría es que tiene espectro discreto, por lo tanto sí puede ser considerada como un objeto cuántico bien definido, es decir como elemento fundamental de un sector de la teoría M. En este caso, se puede formular la teoría en términos de fibrados toroidales simplécticos con monodromía $SL(2, \mathbb{Z})$ [19], encontrando así cuatro clases inequivalentes: elípticas, parabólicas e hiperbólicas, asociadas a los subgrupos abelianos de $SL(2, \mathbb{Z})$ y su realización no lineal llamada trombón. Además, su límite a bajas energías corresponde con las supergravidades calibradas de tipo II en 9 dimensiones, mientras que si la condición de carga central no se impone, entonces corresponde la formulación en fibrados toroidales simplécticos triviales asociados a la supergravedad maximal en 9 dimensiones. En ambos casos, los fibrados toroidales simplécticos son clasificados por los grupos de coinvariantes de la base y la fibra, para una clase determinada monodromía.

La S-dualidad y la T-dualidad que relacionan las diferentes teorías de cuerdas supersimétricas, pueden ser unificadas en la llamada U-dualidad o dualidad de unificación, la cual debe ser una simetría de la Teoría M como se mencionó anteriormente, y por lo tanto debe ser manifiesta en la teoría de supermembranas. Las transformaciones entre marcos equivalentes describen generalmente un grupo discreto de simetría. El grupo de simetría asociado a la U-dualidad en 9D no compactas es $SL(2, \mathbb{Z}) \times Z_2$, donde el primero está asociado a la S-dualidad mientras que el segundo, que es isomorfo al grupo cíclico, está relacionado con T-dualidad, puesto que intercambia los modos de enrollamiento asociados al toro del target con las cargas de KK relacionadas con el toro del target en la supermembrana compactificada en $M_9 \times T^2$ vinculando diferentes teorías. Entonces, se encuentra que esta supermembrana compactificada es invariante bajo T-dualidad localmente [20], demostrándose en el hamiltoniano y el operador de masa mientras que globalmente sólo es invariante cuando la monodromía es parabólica, preservando además la clase del fibrado [21]. También se puede ver que en el límite de teoría de cuerdas, la transformación de T-dualidad de la supermembrana se reduce a la transformación de una supercuerda cerrada compactificada en una circun-

ferencia S^1 . Para la supermembrana con cargas centrales, se tiene que el Hamiltoniano permanece invariante bajo transformaciones de tipo $SL(2, \mathbb{Z})$ asociada al toro de la base, bajo transformaciones $SL(2, \mathbb{Z})$ relacionadas con el toro del target-space, y una simetría Z_2 . En el caso de la supermembrana compactificada en un toro sin imponer la condición de carga central la simetría $SL(2, \mathbb{Z})$ asociada al toro de la base no se realiza a nivel de Hamiltoniano, así que no es una simetría de la teoría

Con el fin de avanzar en la caracterización de la teoría M, se construye una acción efectiva invariante bajo T-Dualidad en el contexto de la supergravedad, conocida como teoría de campo doble [22]. Por ser una teoría de campos y describir partículas puntuales, es necesario modificarla para poder asociarle una propiedad característica de objetos extendidos. Una propuesta viene dada por la compactificación toroidal de cuerdas, donde hay modos de momentum asociados a las coordenadas compactas, entonces se propone que los modos de enrollamiento son momentos canónicos conjugados de un nuevo conjunto de coordenadas duales, que debe ser considerado en la descripción de la teoría de campos. Por lo tanto se duplican los grados de libertad de la teoría para así modelar los efectos del enrollamiento. La razón por la que se duplica es que también se le asignan coordenadas duales en las direcciones no compactas por completitud, aunque nada depende de ellas. Luego se impone una ligadura que restringe los grados de libertad a los grados de libertad físicos de la teoría. La teoría de la supermembrana y la teoría de campo doble, son dos frentes de cuyo estudio se espera, contribuya a comprender mejor la teoría M como teoría de unificación.

En este trabajo se estudian nociones básicas de teorías de cuerdas para entender la T-dualidad en el contexto más simple, que es el de cuerdas bosónicas y supersimétricas compactificadas en una circunferencia S^1 . Luego se revisa la teoría de supergravedad y cómo actúa la T-dualidad en el marco de una teoría de campos invariante bajo T-dualidad (DFT) con intención de comprender mejor la teoría M. Con el mismo fin, se estudia la teoría de la supermembrana que es parte de la Teoría M y los grupos de simetría presentes en dicha teoría para luego comparar cualitativamente ambos enfo-

ques, y su formulación sobre los aspectos globales de la T-dualidad. Cabe destacar que se han realizado estudios previos sobre la comparación de la teoría de campo doble con la geometría generalizada, la relación entre la teoría de campo doble y las supergravidades calibradas pero no existía trabajo alguno que vincule a la supermembrana con la teoría de campo doble.

CAPÍTULO 1

TEORÍA DE CUERDAS BOSÓNICAS Y SUPERCUERDAS

En este capítulo se realiza una revisión bibliográfica de [23],[24],[25],[26], con el fin de comprender los fundamentos de las teorías de cuerdas bosónicas y supercuerdas, cuya diferencia principal consiste en la consideración de grados de libertad fermiónicos en la teoría, hecho que se relaciona con el espectro de partículas obtenido en cada caso.

1.1. Ideas Básicas

La teoría de cuerdas describe los elementos fundamentales que conforman la materia en términos de objetos extendidos, microscópicos y unidimensionales que pueden vibrar, y sus diferentes modos de oscilación son asociados con diferentes partículas [23]. La masa de estas partículas, asociada al modo de oscilación, aumenta con el número de osciladores excitados, razón por la cual a bajas energías, el sector presente en el espectro es el no masivo. La relación de esta torre de partículas de diferente masa con el mundo físico, dependerá de la teoría de cuerdas y el background geométrico que consideremos.

Las cuerdas bosónicas contienen taquiones (partículas de masa negativa) por lo que no se consideran consistentes, mientras que las supercuerdas, al considerar grados de libertad fermiónicos en la teoría no poseen taquiones. Las primeras evolucionan en un espacio-tiempo de 26 dimensiones y las segundas en uno de 10 dimensiones. Además, las cuerdas pueden ser cerradas o abiertas, y a bajas energías se puede recuperar la física usual de partículas puntuales mediante una descripción efectiva.

Sabemos que una partícula puntual propagándose en el espacio-tiempo describe una trayectoria llamada la línea de mundo (*worldline*) Λ . Cualquier punto de la misma puede ser etiquetado unívocamente mediante un parámetro τ , entonces, las coordenadas en un espacio de Minkowski d dimensional M_d (*target space*), de los puntos correspondientes a la línea de mundo vienen dadas por

$$\begin{aligned} z^\mu(\tau) : \Lambda &\rightarrow M_d, \\ \tau &\rightarrow z^\mu(\tau), \end{aligned} \tag{1.1}$$

con $\mu = 0, \dots, d-1$. Similarmente cuando una cuerda evoluciona en el tiempo, barre una superficie bidimensional en el espacio tiempo conocida como la hoja de mundo (*worldsheet*), Σ , y cada punto puede ser etiquetado mediante dos coordenadas: una espacial σ que parametriza la cuerda desde cero hasta la longitud de la misma, y un parámetro de evolución τ . Por lo tanto, las funciones $X^\mu(\sigma, \tau)$ proveen un mapa de la hoja de mundo parametrizada por (σ, τ) al target space.

$$\begin{aligned} X^\mu(\sigma, \tau) : \Sigma &\rightarrow M_d, \\ (\sigma, \tau) &\rightarrow X^\mu(\sigma, \tau). \end{aligned} \tag{1.2}$$

La hoja de mundo tiene la topología de una cinta para cuerdas abiertas y de un cilindro para cuerdas cerradas [24] Los extremos de la cuerda debe satisfacer diferentes condiciones de frontera según se trate de cuerdas cerradas o abiertas. En la teoría de cuerdas cerradas, los campos bosónicos deben satisfacer condiciones de borde periódicas en ambos extremos, mientras que en la teoría de cuerdas abiertas, deben satisfacer condiciones de Neumann.

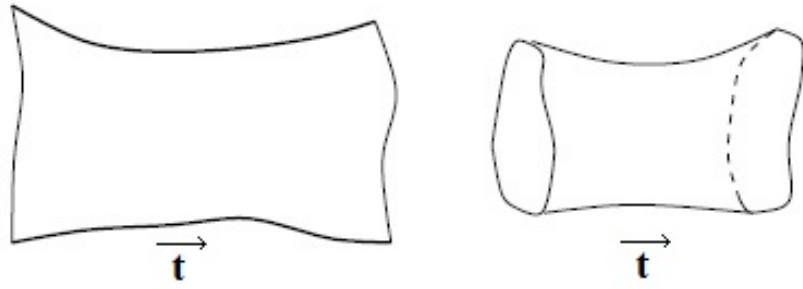


Figura 1.1: Hojas de mundo de cuerdas abiertas y cerradas[23]

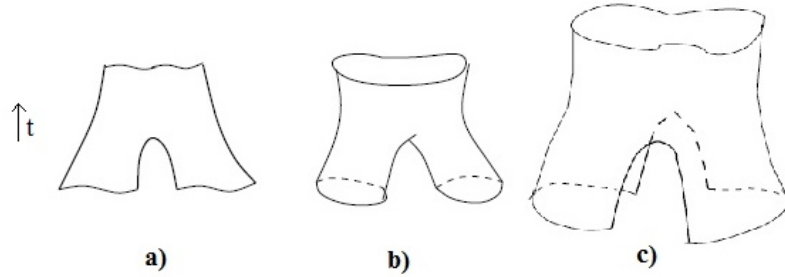


Figura 1.2: Vértices básicos de interacción entre: a) cuerdas abiertas , b) cuerdas cerradas, c) cuerdas abiertas que componen una cerrada [23]

En general si consideramos interacciones entre cuerdas se puede notar que en teorías de cuerdas abiertas, ambos extremos pueden pegarse y formar una cuerda cerrada, razón por la cual las teorías de cuerdas abiertas contienen a las cerradas. En estos casos, la hoja de mundo vendrá dada por una superficie de Riemann de genus arbitrario que representa la interacción entre las cuerdas.

Previo al estudio de la dinámica de una cuerda relativista, es útil revisar la dinámica de una partícula libre. En el caso no relativista, es conocido que la acción viene dada por la integral en el tiempo de la energía cinética, es decir

$$S_{nr} = \int L_{nr} dt = \int \frac{1}{2} m v^2(t) dt, \quad (1.3)$$

y las ecuaciones de movimiento, obtenidas mediante un principio variacional, vienen

dadas por

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = 0, \quad (1.4)$$

la partícula libre debe moverse con velocidad constante, acotada por la velocidad de la luz que, como sabemos, es la velocidad máxima de propagación de una partícula. Una razón que justifica la necesidad de considerar otra acción diferente para el caso relativista, es el hecho que no existe límite para la rapidez de la partícula. Una acción físicamente consistente para la partícula relativista debe conducir a ecuaciones de movimiento que sean invariantes de Lorentz, una manera de asegurar ésto, es imponiendo que la acción sea invariante bajo transformaciones de Lorentz (escalar de Lorentz), es decir, para cualquier línea de mundo de la partícula, el valor de la acción es el mismo para todos los observadores de Lorentz.

Para construir esta acción, consideremos los puntos inicial y final del movimiento de la partícula en un espacio-tiempo con una dimensión espacial por simplicidad, existen infinitas líneas de mundo que conectan estos dos puntos, denotemos con Λ una de las líneas de mundo. Se propone que Λ sea proporcional al tiempo propio τ asociado a la línea de mundo, puesto que todos los observadores de Lorentz coinciden con el tiempo que transcurre en un sistema de referencia en reposo respecto a la partícula. Entonces, consideremos el intervalo infinitesimal

$$ds^2 = c^2 dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.5)$$

expresado respecto a un sistema de referencia inercial. Ahora consideremos el mismo intervalo, expresado respecto a un sistema de referencia que se mueve con la partícula, esto es

$$ds^2 = c^2 d\tau^2, \quad (1.6)$$

donde la integral de $d\tau = \frac{ds}{c}$ es el tiempo propio asociado a Λ . Como el tiempo propio tiene dimensiones de tiempo, debemos agregar un factor invariante ante transformaciones de Lorentz con unidades de energía para obtener las unidades de acción, por lo

tanto

$$S = -mc \int_{\Lambda} ds, \quad (1.7)$$

$$= -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (1.8)$$

es la acción de la partícula libre relativista. Además, esta acción es invariante ante reparametrizaciones de la línea de mundo, en efecto

$$S = -mc \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} = -mc \int_{\tau'_1}^{\tau'_2} d\tau' \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau'} \frac{dx^\nu}{d\tau'}}. \quad (1.9)$$

La acción clásica de la cuerda es construida en analogía con la de la partícula relativista [25]

$$S_P = -mc \int_{\Lambda} ds \quad \Longrightarrow \quad S_C = -T \int_{\Sigma} dA \quad (1.10)$$

donde dA es un elemento de área invariante de la superficie de la hoja de mundo en las coordenadas del espacio-tiempo, si suponemos un espacio euclídeo de tres dimensiones M_3 , entonces de (1.2)

$$\begin{aligned} \vec{X}(\xi_1, \xi_2) : \Sigma &\rightarrow M_3, \\ (\xi_1, \xi_2) &\rightarrow \vec{X}(\xi_1, \xi_2) = (X^1, X^2, X^3). \end{aligned} \quad (1.11)$$

y los lados del elemento de área son

$$d\vec{v}_1 = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} d\xi^1, \quad (1.12)$$

$$d\vec{v}_2 = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2} d\xi^2, \quad (1.13)$$

con $d\xi^1$ y $d\xi^2$, los lados de un rectángulo infinitesimal en el espacio de parámetros (ξ^1, ξ^2) . Por lo tanto, podemos escribir el elemento de área como [25]

$$\begin{aligned} dA &= |d\vec{v}_1 \times d\vec{v}_2|, \\ &= \sqrt{(d\vec{v}_1)^2 (d\vec{v}_2)^2 - (d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_2)^2}, \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1}\right) \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2}\right) - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2}\right)^2} d\xi^1 d\xi^2, \\ &= \sqrt{h} d\xi^1 d\xi^2, \end{aligned} \quad (1.14)$$

con $h = \det h_{ij}(\xi)$, donde $h_{ij}(\xi)$, $i, j = 1, 2$ es la métrica inducida sobre la hoja de mundo de la cuerda, por estar embebida en el espacio euclídeo, viene dada por

$$h_{ij}(\sigma, \tau) = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^j}, \quad (1.15)$$

y transforma como una métrica

$$h_{ij}(\psi) = \tilde{h}_{pq}(\tilde{\xi}) \frac{\partial \tilde{\xi}^p}{\partial \xi^i} \frac{\partial \tilde{\xi}^q}{\partial \xi^j}, \quad (1.16)$$

donde \tilde{h}_{pq} con $p, q = 1, 2, 3$, es la métrica definida en el espacio donde se encuentra embebida la hoja de mundo, en este caso es un espacio euclídeo de 3 dimensiones. En consecuencia la acción de la cuerda, con el elemento de área dado por (1.14), se puede ver que es invariante ante reparametrizaciones.

La generalización a espacios d -dimensionales es directa, en efecto tenemos que $X^\mu(\sigma, \tau) : \Sigma \rightarrow M_d$, con $\sigma \in [0, l]$, y los lados del elemento de área en el target space son

$$dv_1^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} d\tau, \quad (1.17)$$

$$dv_2^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} d\sigma, \quad (1.18)$$

donde $d\sigma$ y $d\tau$ son los lados de un rectángulo en el espacio de parámetros de la hoja de mundo $(d\sigma, d\tau)$, entonces, el elemento de área invariante viene dado por

$$dA = \sqrt{\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau}\right) \left(\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\nu}{\partial \sigma}\right)} d\sigma d\tau, \quad (1.19)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2} d\sigma d\tau, \quad (1.20)$$

ya que en cada punto de la hoja de mundo hay un vector tipo espacio y uno tipo tiempo diferencia fundamental entre superficies espaciales y espacio-temporales. Con la métrica inducida definida como el pull-back de la métrica plana del espacio-tiempo (target space)

$$h_{ab} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b}, \quad (1.21)$$

donde $a, b = 1, 2$ y $\mu, \nu = 0, \dots, d - 1$, entonces podemos escribir la acción (1.10) de la cuerda relativista en un espacio-tiempo d -dimensional como

$$S_{NG} = -T \int_{\Sigma} d^2\xi \sqrt{-h}, \quad (1.22)$$

denominada acción de Nambu-Goto, donde h es el determinante de la métrica inducida en la hoja de mundo $h = h_{aa}h_{bb} - h_{ab}^2$. Esta descripción corresponde con la llamada cuerda bosónica, y la dimensión del target space en la que es consistente es $d = 26$.

1.2. Cuerdas Bosónicas.

Siguiendo a [23], es posible encontrar una acción clásicamente equivalente a la de Nambu-Goto, conocida como la acción de Polyakov, introduciendo un nuevo grado de libertad $g^{\alpha\beta}(\sigma, \tau)$

$$S_P = -\frac{T}{2} \int_{\Sigma} d\sigma d\tau \sqrt{-g} g^{\alpha\beta}(\sigma, \tau) \partial_{\alpha} X^{\mu} \partial_{\beta} X^{\nu} \eta_{\mu\nu}, \quad (1.23)$$

donde $g^{\alpha\beta}(\sigma, \tau)$ es la métrica de la hoja de mundo, y es diferente en principio, a la inducida. Para ver la equivalencia clásica con la acción de Nambu-Goto, es necesario realizar variaciones a la acción de Polyakov respecto a la métrica de la hoja de mundo g_{ab} y las ecuaciones de movimiento evidencian la relación entre ambas acciones.

La acción de Polyakov (1.23) describe entonces una teoría de campos bidimensional acoplada con gravedad en dos dimensiones. También presenta importantes simetrías tales como

- Invariancia de Weyl bidimensional.

$$\begin{aligned} X'^{\mu}(\xi') &= X^{\mu}(\xi), \\ g'_{ab}(\xi) &= \Omega(\xi) g_{ab}(\xi), \end{aligned} \quad (1.24)$$

esta simetría es característica de las cuerdas, pero no de objetos extendidos de dimensión $p > 1$ conocidos como p -branas.

- Invariancia frente a transformaciones de Poincaré D-dimensionales.

$$\begin{aligned} X'^{\mu}(\xi) &= \Lambda^{\mu}_{\nu} X^{\nu}(\xi) + a^{\mu}, \\ g'_{ab}(\xi) &= g_{ab}(\xi), \end{aligned} \quad (1.25)$$

- Invariancia ante reparametrizaciones de coordenadas de la hoja de mundo.

$$\begin{aligned} \xi'^a &= \xi'^a(\xi), \\ X'^{\mu}(\xi') &= X^{\mu}(\xi), \\ g'_{ab}(\xi') &= \frac{\partial \xi^c}{\partial \xi'^a} \frac{\partial \xi^d}{\partial \xi'^b} g_{cd}(\xi), \end{aligned} \quad (1.26)$$

En la cuantización de una teoría de campos es necesario fijar el calibre para eliminar grados de libertad no físicos. El calibre del cono de luz es conveniente para obtener el espectro de los estados físicos. Definimos entonces las coordenadas del cono de luz

$$X^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^1), \quad (1.27)$$

y así, los grados de libertad físicos se asocian a las coordenadas transversas X^j , con $j = 2, \dots, D - 1$. El producto escalar en las coordenadas del cono de luz viene dado por

$$A^{\mu} B_{\mu} = A \cdot B = -A^{+} B^{-} - A^{-} B^{+} + A^j B^j, \quad (1.28)$$

donde la métrica en este calibre se expresa como

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

y por lo tanto, notamos que $A^{+} = -A_{-}$, $A^{-} = -A_{+}$ y $A^j = A_j$. Para hacer la fijación de calibre asociamos una de las coordenadas a la dirección temporal

$$X^{+} = \tau, \quad (1.30)$$

y su momentum conjugado $P_+ = -P^-$ es proporcional a la energía de la hoja mundo.

Reescribiendo la acción de Polyakov (1.23) en las coordenadas del cono de luz, tenemos que $\alpha, \beta = \tau, \sigma$ y $\mu, \nu = +, -, 2, \dots, d-1$, por lo tanto, podemos escribir el Lagrangeano de Polyakov como

$$\begin{aligned} L_P &= \frac{-1}{4\pi\alpha'} \int_0^L d\sigma \left\{ g_{\sigma\sigma} (2\partial_\tau X^- - \partial_\tau X^j \partial_\tau X^j) - 2g_{\sigma\tau} (\partial_\sigma X^- - \partial_\sigma X^j \partial_\tau X^j) \right\} \\ &+ \frac{-1}{4\pi\alpha'} \int_0^L d\sigma \left\{ \frac{(1 - g_{\sigma\tau}^2)}{g_{\sigma\sigma}} \partial_\sigma X^j \partial_\sigma X^j \right\} \end{aligned} \quad (1.31)$$

donde $\alpha' = \frac{1}{2\pi T}$, con T la tensión de la cuerda. Ahora, expandiendo X^- como

$$X^-(\sigma, \tau) = x^-(\tau) + Y^-(\sigma, \tau), \quad (1.32)$$

donde $Y^-(\sigma, \tau)$ son las fluctuaciones alrededor del centro de masa $x^-(\tau)$ definido por

$$x^-(\tau) = \frac{1}{L} \int_0^L d\sigma X^-(\sigma, \tau), \quad (1.33)$$

podemos reescribir el lagrangeano de la siguiente manera

$$L_P = \left(\frac{-L}{2\pi\alpha'} \right) g_{\sigma\sigma}(t) \partial_t x^-(t) + \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^L d\sigma \left(g_{\sigma\sigma}(t) \partial_t X^j \partial_t X^j - g_{\sigma\sigma}^{-1}(t) \partial_\sigma X^j \partial_\sigma X^j \right) \quad (1.34)$$

y los momentos canónicos conjugados de $x^-(\tau)$ y $X^j(\sigma, \tau)$ son

$$p_- = -p^+ = \frac{\partial L_P}{\partial(\partial_\tau x^-)} = \frac{-L}{2\pi\alpha'} g_{\sigma\sigma}, \quad (1.35)$$

$$\Pi^j(\sigma, \tau) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\tau X^j)} = \frac{p^+}{L} \partial_t X^j(\sigma, t), \quad (1.36)$$

respectivamente. Es posible construir el Hamiltoniano H de la forma estándar, y a partir de él obtener las ecuaciones de movimiento para x^- , p_- , X^j y Π_j . En efecto

$$\begin{aligned} H &= p_- \partial_\tau x^j(\tau) + \int_0^L d\sigma \Pi^j(\sigma, \tau) \partial_\tau X^j(\sigma, \tau) - L_P, \\ &= \frac{L}{4\pi\alpha' p^+} \int_0^L d\sigma \left(2\pi\alpha' \Pi^j(\sigma, \tau) \Pi^j(\sigma, \tau) + \frac{1}{2\pi\alpha'} \partial_\sigma X^j \partial_\sigma X^j \right), \end{aligned} \quad (1.37)$$

expresión que describe bosones libres $(d-2)$ -dimensionales [26], y las ecuaciones de movimiento vienen dadas por

$$\frac{\partial H}{\partial p_-} = -\frac{\partial H}{\partial p^+} = \partial_\tau x^-(\tau) = \frac{H}{p^+}, \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x^-} = -\partial_\tau p_- = \partial_\tau p^+ = 0, \quad (1.39)$$

donde encontramos que p^+ es una variable conservada, además que x^- es lineal y tiene una dinámica trivial en el tiempo $x^-(\tau) = \frac{H}{p^+}\tau + C$, respecto a las otras ecuaciones de movimiento tenemos que

$$\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\Pi^j} = \partial_\tau X^j(\sigma, \tau) = 2\pi c\alpha'\Pi^j, \quad (1.40)$$

$$\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta X^j} = -\partial_\tau\Pi^j = -\frac{c}{2\pi\alpha'}\partial_\sigma^2 X_j, \quad (1.41)$$

donde $c = \frac{L}{2\pi\alpha'p^+}$, y además podemos notar que, los campos $X^j(\sigma, \tau)$, satisfacen una ecuación de ondas, en efecto

$$-\partial_\tau\Pi^j = -\partial_\tau\left(\frac{1}{2\pi c\alpha'}\partial_\tau X^j\right) = -\frac{c}{2\pi\alpha'}\partial_\sigma^2 X^j, \quad (1.42)$$

$$\implies \partial_\tau^2 X^j = c^2\partial_\sigma^2 X^j. \quad (1.43)$$

Luego, la solución general de esta ecuación viene dada por una superposición de ondas viajeras hacia derecha e izquierda

$$X^j(\sigma, \tau) = X_I^j(\sigma^+) + X_D^j(\sigma^-), \quad (1.44)$$

donde hemos usado que $\sigma^\pm = \sigma \pm \tau$.

Ya hemos mencionado que la cuerda bosónica puede ser cerrada o abierta y la diferencia radica en las condiciones de frontera que deben satisfacer los extremos de la cuerda. A continuación revisaremos aspectos fundamentales de cada caso.

1.2.1. Cuerdas cerradas.

Las cuerdas cerradas satisfacen periodicidad sobre los extremos de la cuerda, es decir

$$X^j(\sigma + L, \tau) = X^j(\sigma, \tau), \quad (1.45)$$

entonces, la forma general de X_I y X_D viene dada en términos de una serie de Fourier

$$X_I^j(\sigma + \tau) = \frac{x^j}{2} + \frac{p_j}{2p^+}(\tau + \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{\alpha_m^j}{m} e^{\frac{-2\pi i m(\sigma + \tau)}{L}}, \quad (1.46)$$

$$X_D^j(\sigma - \tau) = \frac{x^j}{2} + \frac{p_j}{2p^+}(\tau - \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{\tilde{\alpha}_m^j}{m} e^{\frac{2\pi i m(\sigma - \tau)}{L}}, \quad (1.47)$$

donde los coeficientes x^j , p_j se interpretan como las coordenadas de la posición del centro de masa y el momentum, respectivamente, y los dos conjuntos de infinitos coeficientes α_m^j y $\tilde{\alpha}_m^j$ representan las amplitudes del modo n -ésimo de los osciladores izquierdos y derechos respectivamente. Para cuantizar, se promueven los campos que representan los grados de libertad de la hoja de mundo y los osciladores a operadores, con las siguientes relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [x^-, p^+] &= -i, \\ [x^j, p_k] &= i\delta_k^j, \\ [\alpha_m^j, \alpha_n^k] &= [\tilde{\alpha}_m^j, \tilde{\alpha}_n^k] = m\delta_{jk}\delta_{m,-n}, \\ [\alpha_m^j, \tilde{\alpha}_n^k] &= 0. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Con ellas podemos escribir el hamiltoniano en términos de los osciladores

$$H = \frac{p_j p_j}{2p^+} + \frac{1}{\alpha' p^+} \sum_{m > 0} [\alpha_{-m}^j \alpha_m^j + \tilde{\alpha}_{-m}^j \tilde{\alpha}_m^j] + E_0 + \tilde{E}_0, \quad (1.49)$$

donde se ha ordenado normalmente los modos de creación y aniquilación, E_0 junto con \tilde{E}_0 corresponden a las constantes de ordenamiento normal, y vienen dadas por

$$E_0 = \tilde{E}_0 = (D - 2)E_0^j, \quad (1.50)$$

donde la contribución de cada coordenada transversa, $j = 1, \dots, D - 2$ será

$$E_0^j = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{2}, \quad (1.51)$$

al comparar esta expresión con la energía del estado fundamental de un oscilador armónico cuántico, también conocido como estado de vacío o energía del punto cero

$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$, podemos interpretar a E_0^j como la energía de vacío de los infinitos osciladores armónicos $m = 1, 2, \dots, \infty$ de frecuencia m .

Cada estado de oscilación de la cuerda se interpreta como una partícula desde el punto de vista del espacio-tiempo, cuya masa espacio temporal es igual a

$$M^2 = -p^2 = 2p^+p^- + p_j\tilde{p}_j, \quad (1.52)$$

de donde, definiendo $N = \sum_{m>0} \alpha_{-m}^j \alpha_m^j$ el operador número de osciladores izquierdos, y análogamente \tilde{N} para los derechos, entonces, se puede ver que la masa espacio-temporal de las partículas viene dada por

$$\alpha' M^2 = 2(N + \tilde{N} + E_0 + \tilde{E}_0), \quad (1.53)$$

de donde notamos que la masa de las partículas espacio-temporales aumenta con el número de osciladores.

El Hamiltoniano (1.49), es por construcción, el generador de las traslaciones en τ , de hecho, se puede ver que $[H, X^j] = -i\dot{X}^j$. En cuanto al generador de las traslaciones en σ , tenemos que [24]

$$P_\sigma = \int_0^L d\sigma \Pi^j \frac{\partial X^j}{\partial \sigma} = \frac{2\pi}{L}(N - \tilde{N}), \quad (1.54)$$

tal que $[P_\sigma, X^j] = -iX'^j$. Como la teoría debe ser invariante bajo traslaciones en σ , encontramos un vínculo importante llamado la ligadura de coincidencia de niveles (level matching constraint), esto es

$$N = \tilde{N}, \quad (1.55)$$

cabe destacar ésta es la única relación entre los osciladores izquierdos y derechos y el procedimiento de cuantización puede realizarse de manera independiente, puesto que su evolución es determinada por hamiltonianos también independientes.

Finalmente, respecto a la energías del punto cero tenemos que la suma (1.51) diverge, una manera de solventar esta situación es tomar el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ de la parte no singular de la función Zeta de Riemann dada por

$$Z(\epsilon) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} m e^{-m\epsilon}, \quad (1.56)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{d}{d\epsilon} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\epsilon} = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\epsilon} \left(\frac{1}{1 - e^{-\epsilon}} \right). \quad (1.57)$$

Expandiendo la función exponencial y reescribiendo obtenemos que

$$Z(\epsilon) = -\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{\epsilon^2} + \frac{1}{12} + \mathcal{O}(\epsilon) \right], \quad (1.58)$$

tomando el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$, y despreciando el término infinito, la energía de vacío para un bosón libre en 2 dimensiones es

$$E_0^j = \tilde{E}_0^j = -\frac{1}{24}, \quad (1.59)$$

pero como el índice j caracteriza las coordenadas transversas, para $D - 2$ tenemos que $E_0 = \tilde{E}_0 = \frac{-(D-2)}{24}$, por lo tanto

$$\alpha' M^2 = 2 \left(N + \tilde{N} - 2 \frac{(D-2)}{24} \right). \quad (1.60)$$

Las partículas más ligeras en el espectro de la cuerda, es decir, los estados con menos número de osciladores que podemos construir, y que satisfaga la condición de coincidencia de niveles son

$$\begin{aligned} N = \tilde{N} = 0 \quad |k\rangle & \quad \alpha' M^2 = \frac{-(D-2)}{6} \\ N = \tilde{N} = 1 \quad \alpha_{-1}^j \alpha_{-1}^k |k\rangle & \quad \alpha' M^2 = 4 \left(1 - \frac{(D-2)}{24} \right) \end{aligned}$$

donde se puede apreciar que en el estado fundamental de la cuerda bosónica cerrada, el cuadrado de la masa es negativo, dicha partícula se conoce como un taquión espacio temporal, señal de inestabilidad de la teoría. Este problema no ocurre al considerar grados de libertad fermiónicos y supersimetría en la hoja de mundo. El segundo estado

transforma como un tensor de dos índices asociados a las coordenadas transversas, con $(D - 2)^2$ componentes independientes, pero para recuperar la invariancia de Lorentz, oculta en la cuantización del cono de luz, los $(D - 2)^2$ estados deben ser no masivos, esto implica $E_0 = 1$ y por lo tanto, fija la dimensión del espacio-tiempo en $D = 26$. La existencia de modos taquiónicos en una teoría (que representan partículas que violan causalidad), es la razón por la que se vio que la descripción de las cuerdas bosónicas no es consistente. Para hacerla consistentes, se introduce una nueva simetría en la teoría llamada Supersimetría con la cual la teoría se convierte en supersimétrica [27].

1.2.2. Cuerdas abiertas

Como mencionamos anteriormente, las cuerdas bosónicas pueden ser cerradas o abiertas, la diferencia principal radica en las condiciones de frontera de la hoja de mundo, puesto que las cuerdas abiertas, tienen extremos. Las teorías con cuerdas abiertas necesariamente deben contener cuerdas cerradas, puesto que la principal interacción entre cuerdas abiertas es que dos extremos se peguen para formar una sola cuerda, entonces dos cuerdas abiertas pueden pegarse para formar una cerrada ó una abierta, al revés no es cierto, las teorías de cuerdas cerradas interaccionan formando cuerdas cerradas.

El hecho que las cuerdas abiertas estén acopladas a las cerradas, implica que la estructura local de la hoja de mundo para cuerdas abiertas es la misma que para cuerdas cerradas, razón por la que la dinámica local bidimensional de la hoja de mundo es idéntica en ambos casos, con diferentes condiciones de contorno para los campos bidimensionales.

Estudiaremos entonces una cuerda abierta, cuya dinámica de la hoja de mundo es descrita por 26 campos bosónicos bidimensionales $X^\mu(\sigma, \tau)$ y una métrica en 2 dimensiones $g_{ab}(\sigma, \tau)$, con la acción de Polyakov (1.23). El calibre del cono de luz para

esta teoría en 2d se fija de igual manera que para las cuerdas cerradas como ha sido expuesto previamente.

Para encontrar las condiciones de frontera que se deben imponer en los extremos, $\sigma = 0, L$, hacemos variaciones a la acción de Polyakov respecto de los campos bosónicos, entonces

$$\delta S_p = \frac{-1}{2\pi\alpha'} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau (g^{\sigma\beta} \delta X^\mu \partial_\beta X_\mu)|_{\sigma=0}^{\sigma=L} + \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\xi \delta X^\mu \partial_\alpha (g^{\alpha\beta} \partial_\beta X_\mu), \quad (1.61)$$

por lo tanto, si no hay vínculos sobre δX^μ , con $\mu = +, -, j$, obtenemos las ecuaciones de movimiento para los campos bosónicos correspondientes al sector de cuerdas cerradas, en consecuencia, anulando el primer término

$$g^{\sigma\beta} \partial_\beta X^\mu(\sigma, \tau)|_{\sigma=0}^{\sigma=L} = 0, \quad (1.62)$$

pero como $\alpha, \beta = \sigma, \tau$, y para $X^+ = \tau$

$$g_{\sigma\tau} = 0, \text{ en } \sigma = 0, L, \quad (1.63)$$

entonces, para las coordenadas transversas tenemos que

$$g^{\sigma\sigma} \partial_\sigma X^j(\sigma, \tau)|_{\sigma=0}^{\sigma=L} = 0, \quad (1.64)$$

como no podemos pedir que $g_{\sigma\sigma} = 0$ en $\sigma = 0, L$, imponemos

$$\partial_\sigma X^j|_{\sigma=0, L} = 0, \quad (1.65)$$

que son condiciones de Neumann para los extremos de la cuerda, a este tipo de cuerdas abiertas se les denomina Neumann-Neumann (NN), porque ambos extremos $\sigma = 0$ y $\sigma = L$ satisfacen dicha condición.

El lagrangeano en el calibre del cono luz es el mismo que obtuvimos para cuerdas cerradas y a partir de él podemos obtener el mismo hamiltoniano anterior (1.49). A partir de esta expresión, mediante las ecuaciones de Hamilton obtenemos la ecuaciones de movimiento para los campos transversos y los campos bidimensionales satisfacen

la ecuación de onda (1.43), por lo tanto, la solución más general vendrá dada por una superposición de ondas viajeras moviéndose a derecha e izquierda, y la expansión de osciladores viene dada por

$$X_I^j(\sigma + \tau) = \frac{x^j}{2} + \frac{p_j}{2p^+}(\tau + \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{\nu} \frac{\alpha_{\nu}^j}{\nu} e^{\frac{-\pi i \nu(\sigma + \tau)}{L}}, \quad (1.66)$$

$$X_D^j(\sigma - \tau) = \frac{x^j}{2} + \frac{p_j}{2p^+}(\tau - \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{\nu} \frac{\tilde{\alpha}_{\nu}^j}{\nu} e^{\frac{\pi i \nu(\sigma - \tau)}{L}}, \quad (1.67)$$

con las siguientes condiciones de contorno

$$\partial_{\sigma} X_I^j + \partial_{\sigma} X_D^j = 0, \text{ para } \sigma = 0, L, \quad (1.68)$$

entonces

$$\partial_{\sigma} X_I^j + \partial_{\sigma} X_D^j = i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \frac{i\pi}{L} \sum_{\nu} \left[-\alpha_{\nu}^j e^{\frac{-i\pi\nu(\sigma+\tau)}{L}} + \tilde{\alpha}_{\nu}^j e^{\frac{i\pi\nu(\sigma-\tau)}{L}} \right] = 0, \quad (1.69)$$

al imponer la condición en $\sigma = 0$ obtenemos que

$$\alpha_{\nu}^j = \tilde{\alpha}_{\nu}^j, \quad (1.70)$$

notamos que, como esta expresión relaciona los osciladores derechos con los izquierdos, no son independientes, esto permite afirmar que el espacio de Hilbert para una cuerda abierta es exactamente igual a uno de los lados de la cuerda cerrada.

Imponiendo la condición de frontera para $\sigma = l$ obtenemos que

$$\alpha_{\nu}^j \sin(\pi\nu) = 0, \quad (1.71)$$

que implica $\nu \in \mathbb{Z}$. Entonces, si reescribimos el Hamiltoniano en término de los osciladores tenemos que

$$H = \frac{p_j p_j}{2p^+} + \frac{1}{2\alpha' p^+} \left[\sum_{m>0} \alpha_{-m}^j \alpha_m^j \right] + E_0, \quad (1.72)$$

con $E_0 = -1$, este hamiltoniano es exactamente igual al del sector izquierdo para cuerdas bosónicas cerradas, salvo un factor de 2 que proviene de la expansión de osciladores.

El espectro se obtiene de forma análoga al sector izquierdo de la cuerda cerrada, cuyo operador de masa espacio-temporal viene dada por

$$\alpha' M^2 = N_B - 1, \quad (1.73)$$

con $N_B = \sum_{m>0} \alpha_{-m}^j \alpha_m^j$. Definiendo el vacío por $\alpha_m^j |0\rangle = 0$ para $m > 0$, construimos el espacio de Hilbert aplicando operadores de creación sobre él. Los modos más ligeros son

Estado	$\alpha' m^2$	$SO(24)$
$ 0\rangle_0$	-1	1
$\alpha_{-1}^j 0\rangle_0$	0	24

donde recordemos que el índice $j = 1, \dots, 24$ está asociado a las coordenadas transversas y $SO(24)$ es el grupo de Lorentz en el calibre del cono de luz.

Notamos que el sector cuerda abierta también contiene taquiones. Para describir el espectro completo de las cuerdas bosónicas, debemos considerar la contribución de ambos sectores, tanto el abierto como el cerrado.

Pese a ser la teoría bosónica, como ya hemos mencionado, poco útil desde el punto de vista fenomenológico y la versión más simple de teoría de cuerdas, las mismas estrategias y técnicas utilizadas en esta teoría, en conjunto con algunas adicionales, son necesarias para hacer un análisis de una teoría más realista (pero hasta el día de hoy no verificada experimentalmente), la teoría de supercuerdas.

1.2.3. Compactificación circular de cuerdas bosónicas cerradas.

Sabemos que la consistencia de la teoría de cuerdas bosónicas requiere que la dimensión del espacio-tiempo sea $D = 26$, en particular, se está considerando un

espacio tiempo tipo Minkowski M_{26} . Al compactificar circularmente una dimensión, se va a obtener la acción de la hoja de mundo para una cuerda propagándose en $M_{25} \times S^1$.

La cuantización del cono de luz conduce un hamiltoniano (1.49) del mismo tipo que en la teoría sin compactificar, esto es

$$H = \frac{L}{4\pi\alpha'p^+} \int_0^L [2\pi\alpha'\Pi_i\Pi_i + \frac{1}{2\pi\alpha'}\partial_\sigma X^i\partial_\sigma X^i], \quad (1.74)$$

con $i = j, 25$. Al considerar las condiciones de frontera que satisfacen los campos bidimensionales, notamos que para las dimensiones no compactificadas tenemos

$$X^j(\sigma + L, \tau) = X^j(\sigma, \tau) \quad (1.75)$$

con $j = 1, \dots, 24$, mientras que, X^{25} parametriza una circunferencia de radio R , esto quiere decir que, como X^{25} representa el mismo punto que $X^{25} + 2\pi R$, entonces

$$X^{25}(\sigma + L, \tau) = X^{25}(\sigma, \tau) + 2\pi Rn, \quad (1.76)$$

donde $n \in \mathbb{Z}$ es llamado el número de enrollamiento (winding) y representa el número de veces que se enrolla el campo en la dirección compactificada.

Al imponer esta condición a la solución general de la ecuación de ondas encontramos que

$$X^{25}(\sigma, \tau) = x^{25} + \frac{p_{25}}{p^+}\tau + \frac{2\pi Rn}{L}\sigma + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}-0} \left[\frac{\alpha_m^j}{m} e^{-\frac{2\pi im(\sigma+\tau)}{L}} + \frac{\tilde{\alpha}_m^j}{m} e^{\frac{2\pi im(\sigma-\tau)}{L}} \right] \quad (1.77)$$

donde el momentum está cuantizado a lo largo de la dirección compactificada, $p_{25} = \frac{k}{R}$ con $k \in \mathbb{Z}$. Además, como $X^{25}(\sigma, \tau) = X_I^{25}(\sigma, \tau) + X_D^{25}(\sigma, \tau)$ entonces

$$X_I^{25}(\sigma, \tau) = \frac{x^{25}}{2} + \frac{p_L}{2p^+}(\tau + \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}-0} \frac{\alpha_m^j}{m} e^{-\frac{2\pi im(\sigma+\tau)}{L}}, \quad (1.78)$$

$$X_D^{25}(\sigma, \tau) = \frac{x^{25}}{2} + \frac{p_D}{2p^+}(\tau - \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}-0} \frac{\tilde{\alpha}_m^j}{m} e^{\frac{2\pi im(\sigma-\tau)}{L}}, \quad (1.79)$$

con

$$p_I = \frac{k}{R} + \frac{nR}{\alpha'}, \quad (1.80)$$

$$p_R = \frac{k}{R} - \frac{nR}{\alpha'}. \quad (1.81)$$

El hamiltoniano será el mismo que en el caso no compacto más los términos de enrollamiento y KK

$$H = \sum_{j=2}^{25} \frac{p_j^2}{2p^+} + \frac{(k/R)^2}{2p^+} + \frac{R^2 n^2}{2\alpha'^2 p^+} + \frac{1}{\alpha' p^+} (N + \tilde{N} - 2), \quad (1.82)$$

y la condición de coincidencia de niveles (level matching constraint) viene dada por

$$P = \int_0^L d\sigma \left[\Pi_j \partial_\sigma X^j + \Pi_{25} \partial_\sigma X^{25} \right] = \frac{2\pi}{L} (N - \tilde{N} + kn) = 0, \quad (1.83)$$

se puede notar que, haciendo $n, k = 0$, recuperamos la condición de coincidencia de niveles para cuerdas bosónicas cerradas sin compactificar.

Cada estado de oscilación corresponde a una partícula en el espacio-tiempo de 25 dimensiones, la masa del estado correspondiente viene dada por

$$M_{25d}^2 = 2p^+ H - \sum_{j=2}^{24} p_j^2 = \frac{k^2}{R^2} + \frac{R^2}{\alpha'^2} n^2 + \frac{2}{\alpha'} (N + \tilde{N} - 2). \quad (1.84)$$

Si separamos el Hamiltoniano y la masa espacio temporal en sectores derechos e izquierdos tenemos que $H = H_I + H_D$ y $M_{25}^2 = M_I^2 + M_D^2$ donde

$$H_I = \frac{1}{4p^+} \left[\sum_{j=1}^{24} p_j^2 + p_I^2 \right] + \frac{1}{\alpha' p^+} (N + E_0), \quad (1.85)$$

$$H_D = \frac{1}{4p^+} \left[\sum_{j=1}^{24} p_j^2 + p_D^2 \right] + \frac{1}{\alpha' p^+} (\tilde{N} + \tilde{E}_0), \quad (1.86)$$

y

$$M_I^2 = \frac{p_I^2}{2} + \frac{2}{\alpha'} (N - 1), \quad (1.87)$$

$$M_D^2 = \frac{p_D^2}{2} + \frac{2}{\alpha'} (\tilde{N} - 1), \quad (1.88)$$

notamos que, podemos realizar la cuantización para las coordenadas izquierdas y derechas independientemente, y finalmente combinarlas de manera tal que satisfaga la condición de coincidencia de niveles dada por

$$M_I^2 = M_D^2. \quad (1.89)$$

1.3. Cuerdas supersimétricas.

En esta sección realizamos una revisión bibliográfica de la teoría de cuerdas supersimétricas siguiendo a [23],[26],[27], [28].

Para obtener una teoría de cuerdas con posibilidades de describir el universo y unificar las partículas fundamentales, es necesario que la teoría sea consistente. Para ello es preciso eliminar inestabilidades de la teoría. En ([29, 30]), los autores descubrieron que introduciendo la supersimetría en la teoría se conseguía este objetivo. Hacer la teoría supersimétrica preserva la invarianza D -dimensional de Poincaré, y es agregar campos fermiónicos bidimensionales $\psi^\mu(\sigma, \tau)$, compañeros supersimétricos de los campos bosónicos $X^\mu(\sigma, \tau)$ Las teorías de supercuerdas son teorías de cuerdas cuyos espectro no masivos contiene fermiones en el espacio-tiempo.

Existen cinco teorías de supercuerdas que son supersimétricas en el espacio-tiempo, éstas son las supercuerdas tipo IIA, tipo IIB, las heteróticas $E_8 \times E_8$ y $SO(32)$, todas consideran supercuerdas cerradas y orientables, y la de tipo I que es una teoría de cuerdas abiertas no orientables.

Una particularidad de las teorías de cuerdas es que ellas fijan la dimensión del espacio-tiempo donde se encuentran. Por ejemplo, hemos visto que para las cuerdas bosónicas dicha dimensión debe ser 26, mientras que para la consistencia de las supercuerdas deben existir 10 dimensiones. Entonces tiene sentido preguntarse cómo comparar con la física en 4 dimensiones (3 espaciales y 1 temporal) a la que estamos acostumbrados. Una posibilidad es mediante la compactificación de las 6 dimensiones restante, formando variedades compactas en volúmenes muy pequeños.

Para fijar los grados de libertad físicos de la teoría se utiliza nuevamente el calibre del cono de luz, que además es conveniente para obtener el espectro. En este calibre los campos físicos están asociados a las coordenadas transversas, por lo tanto

1.3. *Cuerdas supersimétricas. Capítulo 1: Teoría de cuerdas bosónicas y supercuerdas*

Sector	Bosónico	Fermiónico
Campos Físicos	$X^j(\sigma, \tau)$	$\psi^j(\sigma, \tau)$
Cuerdas cerradas	$X_I^j(\sigma, \tau), X_D^j(\sigma, \tau)$	$\psi_I^j(\sigma, \tau), \psi_D^j(\sigma, \tau)$

donde $j = 2, \dots, 9$. Entonces, en las teorías de supercuerdas cerradas podemos realizar la cuantización independientemente para los grados de libertad derechos e izquierdos [23].

Análogo al estudio del sector bosónico, estudiaremos primero las supercuerdas cerradas en un espacio de Minkowski D -dimensional, entonces, los campos bosónicos bidimensionales deben ser periódicos en L

$$X_I^j(\sigma + \tau + L) = X_I^j(\sigma + \tau), \quad (1.90)$$

al imponer esta condición a la solución más general de la ecuación de onda, obtenemos la siguiente expansión de osciladores

$$X_I^j(\sigma + \tau) = \frac{x^j}{2} + \frac{p^j}{2p^+}(\tau + \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{\alpha_m^j}{m} e^{\frac{-2\pi i m(\sigma + \tau)}{L}}, \quad (1.91)$$

donde las coordenadas del centro de masa y los modos de oscilación satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [x^j, p_k] &= i\delta_{jk}, \\ [\alpha_m^j, \alpha_n^k] &= m\delta_{jk}\delta_{n,-m}, \end{aligned} \quad (1.92)$$

y el hamiltoniano, con la energía del punto cero para los grados de libertad izquierdos del sector bosónico vienen dados por

$$H_B = \frac{\sum_i p_j p_j}{4p^+} + \frac{1}{\alpha' p^+} \left[\sum_{m>0} \alpha_{-m}^j \alpha_m^j + E_0^B \right], \quad (1.93)$$

con la energía del punto cero dada por

$$E_0^B = -\frac{D-2}{24}, \quad (1.94)$$

donde se ordenaron normalmente los operadores de creación y aniquilación, y se utilizó un método de regularización análogo al caso de cuerdas cerradas bosónicas para encontrar la energía del punto cero [23].

Los fermiones, en la teoría de campos de la hoja de mundo bidimensional, como en cualquier teoría cuántica de campos, satisfacen que los observables son expresiones que van como el producto de dos campos fermiónicos, y por lo tanto las condiciones de frontera pueden ser periódicas o antiperiódicas.

$$\begin{array}{ll} \text{Neveu-Schwarz} & \text{NS} & \psi_I^j(\sigma + \tau + L) = -\psi_I^j(\sigma + \tau) \\ \text{Ramond} & \text{R} & \psi_I^j(\sigma + \tau + L) = \psi_I^j(\sigma + \tau) \end{array}$$

Estos pueden ser escogidos independientemente para los sectores derecho e izquierdo, por lo tanto tenemos cuatro tipos diferentes de supercuerdas cerradas: NS-NS, NS-R, R-NS, R-R.

1.3.1. Sector NS

Para condiciones de frontera antiperiódicas, el modo del oscilador debe ser semi-entero y satisface la siguiente expansión de osciladores

$$\psi_I^j(\sigma + t) = i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \psi_{s+\frac{1}{2}}^j e^{\frac{-2\pi i(s+1/2)(\sigma+t)}{L}}, \quad (1.95)$$

donde notamos que no hay modo cero en la expansión. Los osciladores satisfacen las siguientes relaciones de anticonmutación

$$\{\psi_{r+1/2}^j, \psi_{s+1/2}^k\} = \delta^{jk} \delta_{r+1/2, -(s+1/2)}, \quad (1.96)$$

y determinando los momentos canónicos conjugados, podemos encontrar el hamiltoniano para los grados de libertad fermiónicos

$$H_{F,NS} = \frac{1}{\alpha' p^+} \left[\sum_{s=0}^{\infty} \left(s + \frac{1}{2} \right) \psi_{-s-\frac{1}{2}}^j \psi_{s+\frac{1}{2}}^j + E_0^{F,NS} \right], \quad (1.97)$$

donde la energía de vacío para los osciladores viene dado por

$$E_0^{F,NS} = -\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(m + \frac{1}{2}\right), \quad (1.98)$$

y la evaluaremos mediante la regularización exponencial, usando la función Zeta para un valor general de $\beta > 0$

$$Z_\beta = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (m + \beta), \quad (1.99)$$

como la parte finita del límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ de

$$\begin{aligned} Z_\beta(\epsilon) &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (m + \beta) \exp\{-(m + \beta)\epsilon\}, \\ &= \frac{-1}{2} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \sum_{m=0}^{\infty} \exp\{-(m + \beta)\epsilon\} = \frac{-1}{2} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{e^{-\beta\epsilon}}{1 - e^{-\epsilon}} \right) \end{aligned} \quad (1.100)$$

desarrollando y despreciando el término infinito encontramos que

$$E_0^{F,NS} = -\frac{(D-2)}{48}. \quad (1.101)$$

El Hamiltoniano total, para la teoría en el sector Neveu-Schwarz es

$$H_I = \frac{\sum_i p_j p_j}{4p^+} + \frac{1}{\alpha' p^+} \left[\sum_{m>0} \alpha_{-m}^j \alpha_m^j + \sum_{s=0}^{\infty} \left(s + \frac{1}{2}\right) \psi_{-s-1/2}^j \psi_{s+1/2}^j - \frac{(D-2)}{16} \right] \quad (1.102)$$

en donde se han sumado las energías de vacío de cada sector. La contribución del sector izquierdo a la masa espacio-temporal es

$$\frac{\alpha' m_I^2}{2} = \sum_{m>0} \alpha_{-m}^j \alpha_m^j + \sum_{s=0}^{\infty} \left(s + \frac{1}{2}\right) \psi_{-s-\frac{1}{2}}^j \psi_{s+\frac{1}{2}}^j - \frac{(D-2)}{16}. \quad (1.103)$$

1.3.2. Sector R

Condiciones de frontera periódicas requieren modos enteros para los osciladores fermiónicos, por lo tanto tenemos la siguiente expansión de osciladores

$$\psi_1^j(\sigma + t) = i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \psi_s^j e^{\frac{-2\pi i(s)(\sigma+t)}{L}}, \quad (1.104)$$

1.3. *Cuerdas supersimétricas. Capítulo 1: Teoría de cuerdas bosónicas y supercuerdas*

donde, a diferencia del sector Neveu-Schwarz, notamos la existencia del modo cero en la expansión. Los osciladores satisfacen las siguientes relaciones de anticonmutación

$$\{\psi_m^j, \psi_n^k\} = \delta^{jk} \delta_{n,-m}, \quad (1.105)$$

y determinando los momentos canónicos conjugados, podemos encontrar el hamiltoniano para los grados de libertad fermiónicos

$$H_{F,R} = \frac{1}{\alpha' p^+} \left[\sum_{s=1}^{\infty} s \psi_{-s}^j \psi_s^j + E_0^{F,R} \right], \quad (1.106)$$

donde el punto de energía cero para los osciladores viene dado por

$$E_0^{F,R} = \frac{-(D-2)}{2} \sum_{s=1}^{\infty} s, \quad (1.107)$$

donde el término infinito se puede regularizar igual que en el caso bosónico y en consecuencia, obtenemos para $D = 10$ que $E_0^{F,R} = (-8) \left(\frac{-1}{24} \right) = \frac{1}{3}$. Entonces, comparando con 1.94 notamos que las contribuciones a la energía del punto cero del sector bosónico y fermiónico se anulan, y el Hamiltoniano total, para la teoría en 2d en el sector Ramond es

$$H_I = \frac{\sum_j p_j p_j}{4p^+} + \frac{1}{\alpha' p^+} \left[\sum_{m>0} \alpha_{-m}^j \alpha_m^j + \sum_{s=1}^{\infty} s \psi_{-s}^j \psi_s^j \right], \quad (1.108)$$

y la contribución a la masa espacio-temporal del sector izquierdo es

$$\frac{\alpha' m_L^2}{2} = \sum_{m>0} \alpha_{-m}^j \alpha_m^j + \sum_{s=0}^{\infty} s \psi_{-s}^j \psi_s^j, \quad (1.109)$$

La teoría de supercuerdas cumple que cuando se consideran los distintos sectores, la teoría no contiene taquiones en su espectro y es por lo tanto, consistente físicamente. En efecto, para formar estados físicos correspondientes a partículas en el espacio-tiempo se deben combinar estados derechos e izquierdos, cada uno en sector NS o R, de manera tal que obedezcan $m_I^2 = m_D^2$.

1.3.3. Compactificación circular de supercuerdas tipo II.

Consideraremos teorías de supercuerdas de tipo IIA y IIB compactificadas en un espacio $M_9 \times S^1$. Los efectos de la compactificación, en analogía con el caso bosónico, consisten en la posibilidad de que existan condiciones de contorno con número de enrollamiento distinto de cero para los campos bosónicos en la dirección compactificada

$$X^9(\sigma + L, t) = X^9(\sigma, t) + 2\pi Rn, \quad (1.110)$$

$$X^i(\sigma + L, t) = X^i(\sigma, t), \quad (1.111)$$

con $j = 2, \dots, 9$ los índices asociados a las coordenadas transversas, y condiciones de periodicidad característica de las cuerdas cerradas en las direcciones no compactas. Además el momentum a lo largo de la dirección compactificada, x^9 está cuantizado

$$p_9 = \frac{k}{R}, \quad (1.112)$$

$$p_j = 0, \quad (1.113)$$

y la expansión de modos viene dada por

$$X_I(\sigma + t) = \frac{x_0^9}{2} + \frac{p_{I,9}}{2p^+}(t + \sigma) + \frac{1}{\alpha' p^+} N_B, \quad (1.114)$$

$$X_D(\sigma - t) = \frac{x_0^9}{2} + \frac{p_{D,9}}{2p^+}(t - \sigma) + \frac{1}{\alpha' p^+} \bar{N}_B, \quad (1.115)$$

con

$$p_I = \frac{k}{R} + \frac{nR}{\alpha'} ; p_D = \frac{k}{R} - \frac{nR}{\alpha'}.$$

El operador de masa espacio-temporal queda expresado en términos de los operadores derechos e izquierdos como

$$M_I^2 = \frac{p_I^2}{2} + \frac{2}{\alpha'}(N_B + N_F + E_0), \quad (1.116)$$

$$M_D^2 = \frac{p_D^2}{2} + \frac{2}{\alpha'}(\bar{N}_B + \bar{N}_F + \bar{E}_0), \quad (1.117)$$

donde notamos que, para un radio genérico R , los únicos estados no masivos corresponden al sector con $k, n = 0$, y son los modos cero de la reducción KK de la teoría efectiva de modos no masivos en 10 dimensiones sin enrollamiento.

CAPÍTULO 2

T-DUALIDAD EN TEORÍAS DE CUERDAS

A continuación haremos una revisión de la T-dualidad [9] en teorías de cuerdas. Una dualidad es un mapa invertible entre dos teorías que preserve las interacciones, amplitudes y simetrías. Si una teoría es dual a otra, se puede interpretar como si ambas fuesen físicamente equivalentes [31]. Este concepto se encuentra presente en otras áreas de la física pues permite establecer una comparación y en consecuencia una relación, como por ejemplo la dualidad onda partícula y la dualidad electromagnética. Respecto a esta última, sabemos que las ecuaciones de Maxwell en el vacío son invariantes bajo transformaciones de Lorentz, pero además si hago la siguiente transformación $(\vec{E}, \vec{B}) \Rightarrow (\vec{B}, -\vec{E})$ conocida como la dualidad electromagnética, las ecuaciones de Maxwell también permanecen invariantes.

La T-dualidad (toroidal duality), cumple un papel relevante en la teoría de supercuerdas, donde junto con la S-dualidad (strong-weak duality), relacionan las 5 teorías de supercuerdas entre sí. Actúa sobre los bosones y fermiones de la hoja de mundo de manera no trivial, transformándolos en su correspondiente T-dual, y se puede ver que el T-dual de una teoría de cuerdas tipo IIB compactificada en un círculo de radio

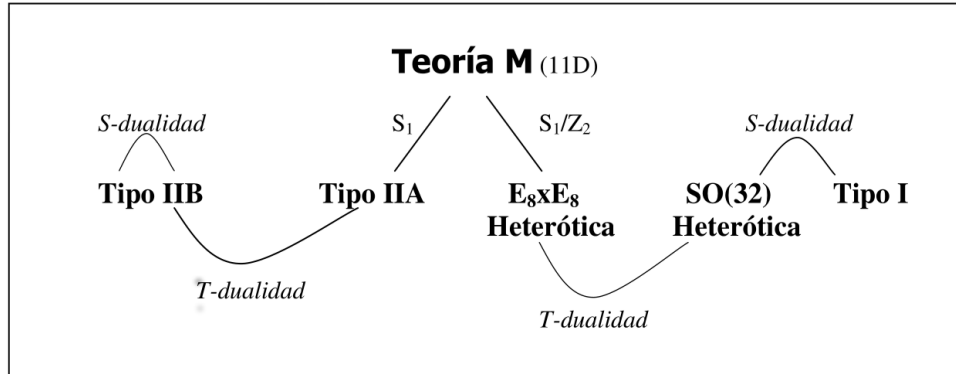


Figura 2.1: Dualidades entre teorías de Supercuerdas [32].

R corresponde a una teoría IIA compactificada en un círculo de radio $R' = \frac{\alpha'}{R}$, vinculando 2 de las 5 teorías de cuerdas, también la T-dualidad relaciona las heteróticas $E_8 \times E_8$ con las $SO(32)$, y estas últimas, están relacionadas con las tipo I mediante una transformación de S-dualidad, es decir, partículas débilmente interactuantes en la teoría tipo I, pueden ser vistas como la descripción de partículas que interactúan fuertemente en la teoría heterótica.

La T-dualidad requiere que la teoría de cuerdas esté compactificada. Al considerar la compactificación circular de una dimensión en la teoría de supercuerdas, la hoja de mundo de la cuerda se propaga en un espacio-tiempo $M_9 \times S^1$, y la cuerda puede enrollarse un determinado número de veces alrededor de la dirección compactificada. A este número se le conoce como el número de enrollamiento. Además se encuentra que el momentum, a lo largo de esta dirección está cuantizado. [33].

En este sencillo ejemplo, la T-dualidad permite relacionar una teoría de cuerdas compactificada en una circunferencia de radio R con una de radio $R' = \frac{\alpha'}{R}$ identificando las cargas de KK con los modos de enrollamiento, haciendo imposible diferenciar el espectro y la física de una y otra.

Estudiaremos a continuación la T-dualidad en el caso más simple posible, la compactificación circular de cuerdas bosónicas y supercuerdas.

2.1. T-dualidad en teoría de cuerdas bosónicas cerradas

La existencia de los estados de enrollamiento en teoría de cuerdas conduce a un resultado sorprendente: el operador de masa asociado a la dirección compactificada (1.84) es invariante bajo una transformación de T-dualidad

$$R \rightarrow \frac{\alpha'}{R} ; k \leftrightarrow n, \quad (2.1)$$

en consecuencia el espectro completo de la teoría para un radio R es el mismo que para un radio $\frac{\alpha'}{R}$ intercambiando k por n , es decir, un observador en 25d que mide el espectro de estados, es incapaz de distinguir si proviene de una teoría de cuerdas compactificada en un círculo de radio R o $\frac{\alpha'}{R}$, intercambiando los modos de enrollamiento con los de KK. Ambas teorías son descritas por la misma teoría de la hoja de mundo y difieren en la geometría espacio temporal. Es conveniente describir la teoría de la hoja de mundo mediante dos conjuntos de campos bosónicos bidimensionales $X_I^j(\sigma + \tau)$ y $X_D^j(\sigma - \tau)$, con los que se pueden construir las coordenadas del espacio-tiempo de dos maneras distintas

$$X^j(\sigma, \tau) = X_I^j(\sigma + \tau) + X_D^j(\sigma - \tau), \quad (2.2)$$

$$X^{25}(\sigma, \tau) = X_I^{25}(\sigma + \tau) + X_D^{25}(\sigma - \tau), \quad (2.3)$$

y

$$X^j(\sigma, \tau) = X_I^j(\sigma + \tau) - X_D^j(\sigma - \tau), \quad (2.4)$$

$$X^{25}(\sigma, \tau) = X_I^{25}(\sigma + \tau) - X_D^{25}(\sigma - \tau), \quad (2.5)$$

donde $j = 2, \dots, 24$, también

$$p_I^{25} \rightarrow p_I^{25} ; p_D^{25} \rightarrow -p_D^{25}, \quad (2.6)$$

que es la transformación de T-dualidad. Aunque este es el caso más simple de compactificación, notamos la importancia de la hoja de mundo en las teorías de cuerdas, aspecto que será igual de relevante en compactificaciones más complejas.

2.2. T-dualidad en supercuerdas tipo II

En las teorías de supercuerdas, la T-dualidad actúa sobre los campos bosónicos

$$\begin{aligned} X^j(\sigma, t) &= X_I^j(\sigma + t) + X_D^j(\sigma - t) \text{ con } j = 2, \dots, 8 \\ X^9(\sigma, t) &= X_I^9(\sigma + t) \pm X_D^9(\sigma - t), \end{aligned} \quad (2.7)$$

y de forma análoga para los campos fermiónicos [34]

$$\begin{aligned} \psi^j(\sigma, t) &= \psi_I^j(\sigma + t) + \psi_D^j(\sigma - t) \text{ con } j = 2, \dots, 8 \\ \psi^9(\sigma, t) &= \psi_I^9(\sigma + t) \pm \psi_D^9(\sigma - t). \end{aligned} \quad (2.8)$$

El proceso de reducción dimensional de KK a 9 dimensiones manteniendo el modo cero, se reduce a realizar la descomposición de las representaciones del grupo $SO(8)$ en 10 dimensiones en representaciones de $SO(7)$ en 9. En el sector izquierdo tenemos

Sector	Estado	$SO(8)$	$SO(7)$
NS	$\psi_{-1/2}^j 0\rangle$	8_V	$7 + 1$
R	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	8_S	8
		8_C	8

entonces, para considerar ambos sectores (izquierdo y derecho), se realiza el producto tensorial entre las representaciones y se descompone en representaciones de $SO(7)$, o viceversa.

Para una teoría de tipo IIB, los campos no masivos en 10 dimensiones son la métrica G , la 2-forma B , el dilatón ϕ , un gravitino $\psi_{\mu\alpha}$, un campo de espín 1/2 ψ_α , el axión escalar a , una 2-forma \tilde{B} y una 4-forma autodual A_4^+ . Mientras que para una teoría de tipo IIA, los campos no masivos en 10 dimensiones son la métrica G , la 2-forma B y el dilatón ϕ , dos gravitinos $\psi_{\mu\alpha}, \psi_{\mu\dot{\alpha}}$ y dos campos de espín 1/2 $\psi_\alpha, \psi_{\dot{\alpha}}$, una 1-forma A_1 y una 3-forma C_3 [26].

2.3. T-dualidad en cuerdas abiertas

Hemos mencionado que las teorías de cuerdas abiertas contienen a las cerradas, pero no hemos considerado la T-dualidad en cuerdas abiertas. Sabemos que para una cuerda abierta

$$\sigma \in [0, \pi], \quad (2.9)$$

con $\sigma = cte$ en los bordes. Si consideramos una cuerda abierta propagándose en un espacio-tiempo donde hay direcciones compactificadas

$$\partial_\sigma X^\mu|_{(0,\pi)} = 0, \quad (2.10)$$

con $X^\mu = (X^r, X^j)$ y el índice $r = 0, \dots, p$ está asociado a las direcciones compactificadas. Los extremos de la cuerda satisfacen condiciones de Neumann (1.65), y en las direcciones transversas las coordenadas satisfacen condiciones de Dirichlet

$$\partial_\tau X^j|_{\sigma=cte} = 0 \text{ con } j = p+1, \dots, 9 \quad (2.11)$$

la T-dualidad en teoría de cuerdas supersimétricas abiertas, hace que las condiciones de frontera que satisfacen los extremos cambian de condiciones de Neumann a Dirichlet en las direcciones compactas, en efecto

$$\partial_\sigma X^9|_{0,\pi} = (\partial_\sigma X_L^9 + \partial_\sigma X_R^9)|_{0,\pi} = 0, \quad (2.12)$$

pero

$$\partial_\sigma X_L = \partial_\tau X_L ; \partial_\sigma X_R = -\partial_\tau X_R, \quad (2.13)$$

entonces

$$\partial_\tau X_L^9 - \partial_\tau X_R^9 = \partial_\tau (X_L^9 - X_R^9) = \partial_\tau \bar{X}^9|_{(0,\pi)} = 0, \quad (2.14)$$

y por lo tanto, los extremos de la cuerda se encuentran fijos en unos objetos $(p+1)$ dimensionales llamados branas de Dirichlet o D-branas, donde p es el número de direcciones no compactas. La T-dualidad en teoría de cuerdas abiertas implica la existencia

de estos hiperplanos dinámicos y una relación de T-dualidad entre cuerdas abiertas implica una relación de T-dualidad entre branas que debe ser considerada.

En general, en teorías de supercuerdas IIA, la T-dualidad establece un mapa entre las Dp-branas pares D_0, D_2, D_4, D_6, D_8 y las D-branas impares $D_{-1}, D_1, D_3, D_5, D_7$ de la teoría de cuerdas IIB. Además, los campos en ambas teorías se relacionan mediante T-dualidad como se muestra a continuación

$$\begin{array}{ccc}
 \text{IIA} & \text{T} & \text{IIB} \\
 G_{\mu\nu}, B_{\mu\nu} & \leftrightarrow & B_{\mu\nu}, G_{\mu\nu} \\
 A_9, A_\mu & \leftrightarrow & a, \tilde{B}_{9\mu} \\
 C_{9\mu\nu}, C_{\mu\nu\rho} & \leftrightarrow & \tilde{B}_{\mu\nu}, A_{9\mu\nu\rho}
 \end{array}$$

En consecuencia notamos que la T-dualidad forja un fuerte vínculo entre las teorías de supercuerdas de tipo IIA y IIB, permitiendo entender ambas como límites de una misma teoría.

2.4. T-dualidad y S-dualidad.

La S-dualidad [8] es una transformación que relaciona los regímenes de acoplamiento fuerte y débil, es decir, la física en una teoría con constante de acoplamiento fuerte es la misma que en una teoría S-dual con constante de acoplamiento débil. Esta dualidad es fundamental en teorías de cuerdas, pero también a nivel de teorías de calibre. Para una teoría de calibre abeliana en cuatro dimensiones, con constante de acoplamiento g , tenemos que, permanecerá invariante ante transformaciones de tipo

$$g \rightarrow \frac{1}{g} + \begin{cases} \vec{E} \rightarrow \vec{B} \\ \vec{B} \rightarrow -\vec{E} \end{cases} \quad (2.15)$$

En [8] se encuentra la extensión de esta dualidad a teorías de cuerdas, donde las transformaciones vienen dadas por

$$g_{st} \rightarrow \frac{1}{g_{st}} + \begin{cases} B_2 \rightarrow C_2 \\ C_2 \rightarrow -B_2 \end{cases} \quad (2.16)$$

donde B_2 son las componentes de una 2-forma de tipo NS-NS y C_2 las de una de tipo RR, los cuales podemos interpretar como tensores generalizados de Maxwell (índices antisimétricos).

Notamos en ambos casos que, si la constante de acomplamiento es fuerte (débil), en la teoría S-dual será débil (fuerte).

Ya vimos que existe una teoría en 11 dimensiones conocida como teoría M, a partir de la cual es posible producir las teorías de supercuerdas de tipo IIA y heteróticas $SO(32)$ mediante una reducción dimensional, a través de un S^1 y $\frac{S^1}{Z_2}$ respectivamente. Podemos obtener los otros tipos de cuerdas mediante dualidades S y dualidades T. Por lo tanto, los 5 tipos de supercuerdas son diferentes límites de una teoría en 11 dimensiones llamada la teoría M, cuya teoría efectiva es la única y maximal supergravedad en 11 dimensiones [13],[32]. Entonces las acciones de la teoría M bien definidas, deben contener a las dualidades S y T como simetrías de la teoría [7],[35].

CAPÍTULO 3

SUPERGRAVEDAD.

En este capítulo se estudian nociones básicas de la teoría de supergravedad tomando como referencia [32],[36], [37],[38],[39],[40] Y [41], haciendo énfasis en la familia de supergravedades existentes en 9 y 10 dimensiones, así como la única supergravedad maximal en 11 dimensiones.

La supergravedad es una teoría de gravedad que posee a supersimetría como una simetría local y considera tanto a la fuerza gravitatoria como a las otras fuerzas fundamentales. Fue propuesta inicialmente como una teoría de campos supersimétrica para la gravedad y se puede formular de forma consistente en diversas dimensiones, siendo 11 el máximo número de dimensiones posibles para formular una teoría supersimétrica consistente [36]. Ésta teoría contiene un campo de espín 2 (gravitón) y a su respectivo compañero supersimétrico de espín $\frac{3}{2}$ (gravitino) [37], y un campo de calibre de 3-formas de componentes C_{MNP} .

A nivel efectivo, cada una de las teorías de supercuerdas describe una teoría de supergravedad asociada. En el sector bosónico de teorías de supercuerdas de tipo II , el espectro no masivo consiste en el tensor métrico g_{ij} , la 2-forma de Kalb-Ramond b_{ij} y el dilatón ϕ que son los campos bosónicos de la supergravedad en 10 dimensiones.

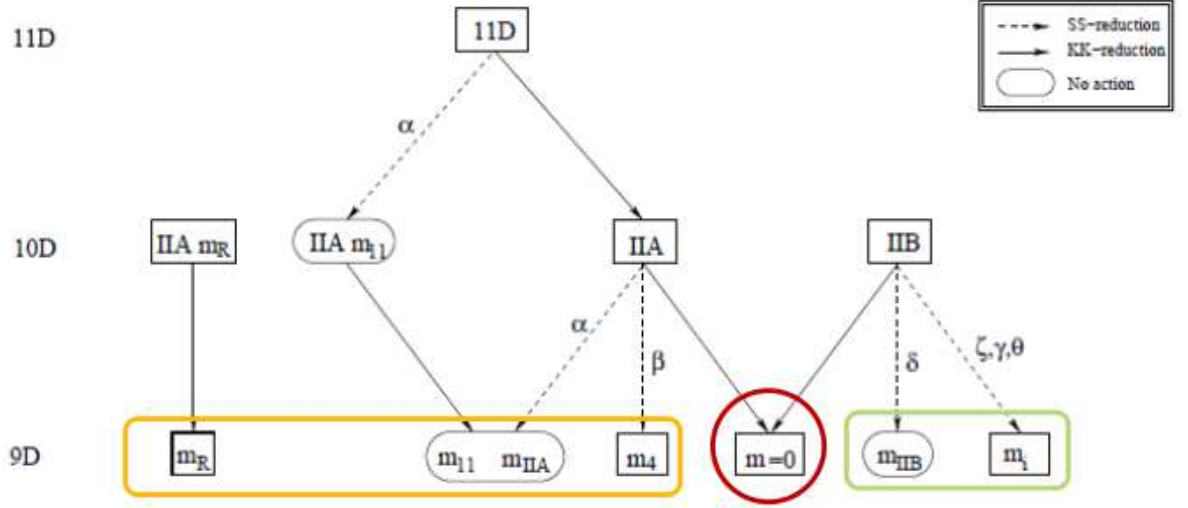


Figura 3.1: Supergravedades de tipo II en 9 y 10 dimensiones [38]

En 10 dimensiones, para $N = 2$, se tienen dos supergravedades maximales, asociadas con el límite a bajas energías de las teorías de cuerdas de tipo IIA y IIB. Además de las supergravedades maximales, existen sus deformaciones en $D < 11$ de tipo masiva o calibrada. La supergravedad de tipo IIA tiene dos deformaciones masivas en 10 dimensiones: la supergravedad masiva de Romans, y una supergravedad masiva calibrada (HLW) [39]. Esta última puede ser obtenida, al igual que la de tipo IIA, a partir de una única supergravedad en 11 dimensiones mediante reducciones dimensionales de tipo Scherk-Schwarz. En nueve dimensiones, las reducciones dimensionales de Kaluza Klein (KK) y de Scherk-Schwarz (SS) producen supergravedades de tipo maximales y calibradas respectivamente.

En la teoría de supercuerdas, los estados presentes en el espectro bosónico no masivo de las cuerdas, aparecen al considerar supercuerdas cerradas en el sector NS-NS. En este sector, la acción de supergravedad asociada toma la forma [45]

$$S = \int d^D x \sqrt{g} e^{-2\phi} \left(R + 4 \nabla_i \phi \nabla^i \phi - \frac{1}{12} H^{ijk} H_{ijk} \right), \quad (3.1)$$

donde D es la dimensión del espacio-tiempo, R es el escalar de Ricci y $H_{ijk} = 3\partial_{[i} b_{jk]}$

son las componentes de una 3-forma, tensor de fuerza también de la 2-forma de Kalb-Ramond b_{ij} que satisface la identidad de Bianchi $\partial_{[i}H_{ijk]} = 0$. Las ecuaciones de movimiento asociadas obtenidas mediante un principio variacional son

$$R_{ij} - \frac{1}{4}H_i^{mn}H_{jmn} + 2\nabla_i\nabla_j\phi = 0, \quad (3.2)$$

$$\nabla^m H_{mij} - 2(\nabla^m\phi)H_{mij} = 0, \quad (3.3)$$

$$R + 4(\nabla_i\nabla^i\phi - \nabla_i\phi\nabla^i\phi) - \frac{1}{12}H_{ijk}H^{ijk} = 0, \quad (3.4)$$

Se puede ver que la acción bosónica (3.1) es invariante ante transformaciones locales como difeomorfismos

$$\delta g_{ij} = L_\lambda g_{ij} = \lambda^k \partial_k g_{ij} + g_{kj} \partial_i \lambda^k + g_{ik} \partial_j \lambda^k, \quad (3.5)$$

$$\delta b_{ij} = L_\lambda b_{ij} = \lambda^k \partial_k b_{ij} + b_{kj} \partial_i \lambda^k + b_{ik} \partial_j \lambda^k, \quad (3.6)$$

$$\delta \phi = L_\lambda \phi = \lambda^k \partial_k \phi, \quad (3.7)$$

y transformaciones de calibre de la 2-forma de Kalb-Rammond

$$\delta b_{ij} = \partial_i \tilde{\lambda}_j + \partial_j \tilde{\lambda}_i, \quad (3.8)$$

Para dimensiones iguales o menores a 9, las supergravedades maximales son únicas y pueden ser obtenidas mediante reducciones dimensionales de tipo KK de supergravedades en dimensiones mayores. Las supergravedades de tipo IIA y IIB en 10 dimensiones se reducen vía KK a la supergravedad maximal en 9 dimensiones, sin embargo mediante reducciones KK de las supergravedades masivas o SS de las calibradas en 10 dimensiones se obtienen cuatro deformaciones masivas de tipo IIA y otras 4 de tipo IIB en 9 dimensiones [40, 41].

Hasta el momento hemos hablado de la T-dualidad en el contexto de teorías de cuerdas que se propagan en un espacio tiempo compactificado circularmente, es posible generalizar estas ideas para entornos (*backgrounds*) más generales con una métrica g_{ij} y una 2-forma b_{ij} , siempre y cuando exista una isometría en una dirección k . La teoría

de supergravedad transforma bajo la acción de T-dualidad mediante

$$\tilde{g}_{kk} \rightarrow \frac{1}{g_{kk}}, \tilde{g}_{ki} \rightarrow -\frac{b_{ki}}{g_{kk}}, \tilde{g}_{ij} \rightarrow g_{ij} - \frac{g_{ki}g_{kj} - b_{ki}b_{kj}}{g_{kk}}, \quad (3.9)$$

$$\tilde{b}_{ki} \rightarrow -\frac{g_{ki}}{g_{kk}}, \tilde{b}_{ij} \rightarrow \frac{g_{ki}b_{kj} - b_{ki}g_{kj}}{g_{kk}}, \quad (3.10)$$

transformaciones conocidas como las reglas de Buscher, donde la tilde denota los campos en el espacio dual y vinculan la métrica y la 2-forma duales con las de la teoría original. Esta transformación sirve para relacionar las distintas teorías de supergravedad de manera análoga a como ocurre en las teorías de supercuerdas.

CAPÍTULO 4

TEORÍA DE CAMPO DOBLE

En este capítulo se revisará la bibliografía concerniente a una teoría invariante bajo T-dualidad como la Teoría de Campo Doble [42], [43],[44], siguiendo a [22, 45, 46, 47, 48, 49, 50], así como [52, 53, 54] para la descripción global.

La teoría de campo doble es una reformulación de la supergravedad construida de manera tal que incorpora la T-dualidad y hace explícito el grupo asociado a ella en la teoría [22, 46, 47, 45]. Hasta el momento, su desarrollo ha sido centrado en el sector bosónico de la teoría como una primera aproximación pues es el más simple para entender este problema. En este trabajo nos restringimos a dicho sector. Para poder introducir la T-dualidad en una teoría de campos, se duplican las coordenadas del espacio compacto, de manera que los campos dependan de ellas, y así poder modelar los efectos del enrollamiento.

4.1. Sobre el grupo de simetría asociado a la T-dualidad

Consideremos primero una teoría de cuerdas en D dimensiones con n direcciones compactificadas toroidalmente. La variedad del espacio-tiempo puede ser considerada

como $\mathbb{R}^{1,d-1} \times T^n$, donde $D = n + d$ y $D = 10, 26$ para la teoría supersimétrica y bosónica respectivamente. La acción de la cuerda viene dada por

$$S = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma \int d\tau \left(\sqrt{\gamma} \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^i \partial_\beta X^j G_{ij} + \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^i \partial_\beta X^j B_{ij} \right), \quad (4.1)$$

con $\gamma_{\alpha\beta}$ la métrica de la hoja de mundo, $\epsilon^{\alpha\beta}$ es un tensor antisimétrico con $\epsilon^{01} = -1$, G_{ij} es la métrica constante del espacio-tiempo y B_{ij} son las componentes de una 2-forma también asociada al espacio-tiempo.

Ahora, las coordenadas de la cuerda X^i , son separadas en $(d - 1)$ coordenadas espaciales no compactas y en n compactas

$$X^i = \{Y^m, X^\mu\}, \quad (4.2)$$

donde $\mu = 0, 1, \dots, d - 1$ y $m = 1, \dots, n$. Reescribiendo la métrica G_{ij} y la 2-forma B_{ij} del target

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} G_{mn} & 0 \\ 0 & \eta_{\mu\nu} \end{bmatrix}, \text{ tal que } G^{ij} G_{jk} = \delta_k^i, \quad (4.3)$$

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} B_{mn} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

donde G_{mn} es una métrica plana sobre el n -toro T^n , $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski para las coordenadas no compactas del espacio tiempo y B_{mn} son las componentes de la 2-forma de Kalb-Ramond sobre el toro. Se puede definir una matriz llamada Matriz de Fondo E_{ij}

$$E_{ij} \equiv G_{ij} + B_{ij} = \begin{bmatrix} E_{mn} & 0 \\ 0 & \eta_{\mu\nu} \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

con $E_{mn} = G_{mn} + B_{mn}$. Para caracterizar la teoría, si nos restringimos a una teoría de cuerdas cerradas, las condiciones de fronteras en direcciones compactas y no compactas vienen dadas por

$$Y^m(\sigma + 2\pi) = Y^m(\sigma) + 2\pi\omega^m, \quad (4.6)$$

$$X^\mu(\sigma + 2\pi) = X^\mu(\sigma), \quad (4.7)$$

respectivamente, donde $\omega^m \in \mathbb{Z}$ representa el número de winding y se interpreta como el número de veces que la cuerda de enrolla en la dirección Y^m . Escogiendo que la métrica de la hoja de mundo sea Minkowski en dos dimensiones, es decir $\gamma_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$, entonces la acción (4.1) se puede escribir como

$$S = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma \int d\tau \left(-\dot{X}^i \dot{X}^j G_{ij} + X'^i X'^j G_{ij} - 2\dot{X}^i X'^j B_{ij} \right) \quad (4.8)$$

y el momento canónico conjugado asociado a la densidad lagrangeana es

$$P_i = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{X}^i} = \frac{1}{2\pi} \left(G_{ij} \dot{X}^j(\sigma, \tau) + B_{ij} X'^j(\sigma, \tau) \right). \quad (4.9)$$

La expansión en modos del campo X^i viene dada por

$$X^i(\sigma, \tau) = x^i + \omega^i \sigma + \tau G^{ij} (p_j - B_{jk} \omega^k) + \frac{i}{\sqrt{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\tilde{\alpha}_n^i e^{-in(\sigma^+)} + \alpha_n^i e^{-in(\sigma^-)}) \quad (4.10)$$

con

$$\sigma^+ = \tau + \sigma, \quad (4.11)$$

$$\sigma^- = \tau - \sigma, \quad (4.12)$$

donde x^i es la coordenada del centro de masa de la cuerda, $p_i = \int_0^{2\pi} d\sigma P_i$ es una excitación del momento canónico y está cuantizado a lo largo de la dirección compactificada, el enrollamiento $\omega^i = \{\omega^m, 0\}$ es únicamente en las direcciones compactas, y $\alpha_n^i, \tilde{\alpha}_n^i$ son los osciladores en el modo n -ésimo derechos e izquierdos. Entonces, se puede reescribir el momento conjugado como

$$2\pi P_i = p_i + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \neq 0} (E_{ij} \tilde{\alpha}_n^j e^{-in(\sigma^+)} + E_{ij}^T \alpha_n^j e^{-in(\sigma^-)}), \quad (4.13)$$

el Hamiltoniano

$$H = \int_0^{2\pi} d\sigma \mathcal{H}(\sigma, \tau), \quad (4.14)$$

con \mathcal{H} la densidad hamiltoniana de la hoja de mundo que se puede escribir como

$$\mathcal{H}(\sigma, \tau) = P_i \dot{X}^i + \frac{1}{4\pi} \left(-\dot{X}^i \dot{X}^j G_{ij} + X'^i X'^j G_{ij} - 2\dot{X}^i X'^j B_{ij} \right), \quad (4.15)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} X' & 2\pi P \end{pmatrix} \mathcal{H}_G(E) \begin{pmatrix} X' \\ 2\pi P \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

donde $\mathcal{H}_G(E)$ es conocida como la métrica generalizada, y es una matriz simétrica $2D \times 2D$ construida a partir de la métrica y la 2-forma del target space [45]. En efecto

$$\mathcal{H}_G(E) = \begin{bmatrix} G_{ij} - B_{ik}G^{kl}B_{lj} & B_{ik}G^{kj} \\ -G^{ik}B_{kj} & G^{ij} \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Entonces podemos calcular el hamiltoniano haciendo

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}Z^T \mathcal{H}_G(E)Z + N + \bar{N}, \quad (4.18)$$

donde $N = \sum_{n>0} (\alpha_{-n}^i G_{ij} \alpha_n^j)$ y $\bar{N} = \sum_{n>0} (\bar{\alpha}_{-n}^i G_{ij} \bar{\alpha}_n^j)$ son los operadores número asociados a los osciladores derechos e izquierdos respectivamente, y $Z = \begin{pmatrix} \omega^i \\ p_i \end{pmatrix}$ es un momentum generalizado que agrupa las excitaciones del momentum y los modos de enrollamiento una vez que se ha usado la expansión (4.10). Al imponer la condición de coincidencia de niveles tenemos que

$$N - \bar{N} = p_i \omega^i = \frac{1}{2}Z^T \eta Z, \quad (4.19)$$

con

$$\eta = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I}_{\mathbb{D} \times \mathbb{D}} \\ \mathbb{I}_{\mathbb{D} \times \mathbb{D}} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

donde η una matriz $2D \times 2D$.

Consideremos a continuación la siguiente transformación de simetría para el momentum generalizado

$$Z = h^T Z', \quad (4.21)$$

donde h es una matriz de transformación que mezcla los ω^m y los p_m . Si pedimos que esta transformación preserve la condición de coincidencia de niveles y el Hamiltoniano, entonces tenemos que

$$N - \bar{N} = \frac{1}{2}Z'^T \eta Z' = \frac{1}{2}Z^T \eta Z = \frac{1}{2}Z'^T h \eta h^T Z', \quad (4.22)$$

y por lo tanto $h\eta h^T = \eta$, la matriz de transformación h debe preservar η . Si llamamos a h un elemento de $O(D, D, \mathbb{R})$ y a η una métrica invariante $O(D, D, \mathbb{R})$, entonces

$$O(D, D, \mathbb{R}) = \{h \in GL(2D, \mathbb{R}) : h\eta h^T = \eta\}. \quad (4.23)$$

Representemos a h en términos de cuatro matrices $D \times D$ a, b, c y d

$$h = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

e imponiendo que h preserve η se obtienen condiciones para a, b, c y d , esto es

$$a^T c + c^T a = b^T d + d^T b = 0, \quad (4.25)$$

$$a^T d + c^T d = \mathbb{I}. \quad (4.26)$$

Consideremos ahora el Hamiltoniano (4.18) [45, 47]

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + N + \bar{N} = \frac{1}{2} Z^T \mathcal{H}_G(E) Z + N + \bar{N}, \quad (4.27)$$

el hecho que \mathcal{H}_0 sea invariante $O(D, D, \mathbb{R})$ induce una propiedad de transformación sobre $\mathcal{H}_G(E)$

$$\mathcal{H}_G(E') = h \mathcal{H}_G(E) h^T, \quad (4.28)$$

y encontraremos una transformación para E formulando primero, la métrica generalizada en términos de un vielbein $h_E \in O(D, D, \mathbb{R})$

$$\mathcal{H}_G(E) = h_E h_E^T, \quad (4.29)$$

con

$$h_E \equiv \begin{bmatrix} e & B(e^T)^{-1} \\ 0 & (e^T)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

donde B es la 2-forma de Kalb-Rammond y e es el supervielbein mediante el cual es posible obtener la métrica inducida.

Ahora, sea $h \in O(D, D, \mathbb{R})$ y F una matriz $D \times D$, entonces la acción de h sobre F está definida por

$$h(F) = (aF + b)(cF + d)^{-1}, \quad (4.31)$$

de donde obtenemos que la matriz E es

$$E = h_E(\mathbb{I}), \quad (4.32)$$

pero como

$$h_{E'} = hh_E, \quad (4.33)$$

podemos obtener la regla de transformación para E

$$E' = h_{E'}(\mathbb{I}) = hh_E(\mathbb{I}) = h(E) = (aE + b)(cE + d)^{-1}. \quad (4.34)$$

Para que el Hamiltoniano total sea invariante bajo $O(D, D, \mathbb{R})$ es necesario que los operadores número sean invariantes ante esta transformación $N' = N$ y $\bar{N}' = \bar{N}$, esto implica que

$$\alpha_n(E) = (d - cE^T)^{-1} \alpha_n(E'), \quad (4.35)$$

$$\bar{\alpha}_n(E) = (d - cE)^{-1} \bar{\alpha}_n(E'), \quad (4.36)$$

sabiendo que, de la transformación de E , podemos obtener la transformación para G

$$G = (d + cE)^T G' (d + cE) = (d - cE^T)^T G' (d - cE^T), \quad (4.37)$$

y conociendo las reglas de conmutación

$$[\alpha_m^i(E), \alpha_n^j(E)] = [\bar{\alpha}_m^i(E), \bar{\alpha}_n^j(E)] = mG^{ij} \delta_{m+n,0}, \quad (4.38)$$

La restricción que ω^m y p_m tomen valores discretos debido a las condiciones de contorno en el espacio compactificado toroidalmente n -dimensional, implica que el grupo de simetría debe ser restringido a $O(n, n, \mathbb{Z}) \subset O(D, D, \mathbb{R})$. Este grupo $O(n, n, \mathbb{Z}) \approx \frac{SL(n, \mathbb{Z}) \times SL(n, \mathbb{Z})}{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}$ es conocido en teoría de cuerdas como el grupo de T-dualidad y un elemento $h \in O(n, n, \mathbb{Z})$ puede ser expresado en términos de la representación $O(D, D)$.

4.2. Formulación de la Teoría de Campo Doble

La teoría de campo doble permite pensar acerca de una teoría invariante ante T-dualidad al nivel de la supergravedad. Puesto que el grupo de T-dualidad está contenido en $O(D, D)$ ($O(n, n, \mathbb{Z}) \subset O(D, D, \mathbb{R})$), consideraremos a este último como el grupo global de T-dualidad.

Si queremos construir un tensor $O(D, D)$ en términos de los campos de la supergravedad, que son la métrica g_{ij} , la 2-forma de Kalb-Ramond b_{ij} y el dilatón ϕ , partimos de la métrica generalizada que construimos anteriormente (4.17). Entonces construiremos una métrica generalizada \mathcal{H}_{MN}

$$\mathcal{H}_{MN} = \begin{bmatrix} g_{ij} - b_{ik}g^{kl}b_{lj} & b_{ik}g^{kj} \\ -g^{ik}b_{kj} & g^{ij} \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

con $M, N = 1, \dots, 2D$ llamados índices curvos y la métrica invariante $O(D, D)$ está definida por

$$\eta_{MN} = \begin{bmatrix} 0 & \delta_i^j \\ \delta^i_j & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.40)$$

con $\eta^{MN} = (\eta_{MN})^{-1}$. Por lo tanto

$$\mathcal{H}^{MN} = \eta^{MP}\eta^{NQ}\mathcal{H}_{PQ}, \quad (4.41)$$

$$\mathcal{H}_{MP}\mathcal{H}^{PN} = \delta_M^N, \quad (4.42)$$

además, el dilatón se puede combinar con el determinante de la métrica para formar un singlete $O(D, D)$ dado por

$$e^{-2d} = \sqrt{g}e^{-2\phi}. \quad (4.43)$$

Después de escribir los campos en términos del tensor $O(D, D)$, procedemos a realizar lo mismo con las coordenadas x^i , sin embargo mientras que las dimensión de las coordenadas es D , la del grupo de simetría de $2D$, entonces se introduce un nuevo

conjunto de coordenadas \tilde{x}_i , duales a los modos de winding ω^i y se definen unas nuevas coordenadas generalizadas X^M como

$$\tilde{X}^M = (\tilde{x}_i, x^i), \quad (4.44)$$

y unas nuevas derivadas generalizadas inducidas por las coordenadas

$$\tilde{\partial}_M = \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right), \quad (4.45)$$

por lo tanto, los campos en la teoría de campo doble deben depender de estas coordenadas generalizadas

$$\mathcal{H}_{MN}(X), d(X). \quad (4.46)$$

Debido a que las coordenadas generalizadas están en la representación fundamental $O(D, D)$, las mismas transforman como

$$X^M \Rightarrow h^M_N X^N, \quad (4.47)$$

donde $h^M_N \in O(D, D)$ y la transformación mezcla las coordenadas originales con las duales. Los campos generalizados transforman bajo $O(D, D)$ así

$$\mathcal{H}_{MN}(X^k) \rightarrow h_M^P h_N^Q \mathcal{H}_{PQ}(h^K_L X^L), \quad (4.48)$$

$$d(X^k) \rightarrow d(h^K_L X^L). \quad (4.49)$$

Esta expresión considera transformaciones de T-dualidad tanto en la dirección de isometría como en la no isométrica, en el primer caso se reduce a las reglas de Buscher (3.9) y (3.10) características de supergravedad mientras que las asociadas al segundo caso, no aparecen en supergravedad pero sí son consistentes en el marco de DFT debido a que las coordenadas duales están bien definidas.

Finalmente, podemos construir la acción de la teoría de campo doble invariante $O(D, D)$, en términos de la métrica, el escalar y la derivada generalizada [45]

$$S = \int d^{2D} X e^{-2d} \mathcal{R}, \quad (4.50)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= 4\mathcal{H}^{MN}\partial_M\partial_N d - \partial_M\partial_N\mathcal{H}^{MN} - 4\mathcal{H}^{MN}\partial_M d\partial_N d + 4\partial_M\mathcal{H}^{MN}\delta_N d, \\ &+ \frac{1}{8}\mathcal{H}^{MN}\partial_M\mathcal{H}^{KL}\partial_N\mathcal{H}_{KL} - \frac{1}{2}\mathcal{H}^{MN}\partial_M\mathcal{H}^{KL}\partial_K\mathcal{H}_{NL}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

es conocido como el escalar de curvatura generalizado.

La condición de coincidencia de niveles (4.19) implica que los campos de la teoría de campo doble deben satisfacer la ligadura

$$\eta^{MN}\partial_M\partial_N(A) = 0, \quad (4.52)$$

conocida como la ligadura débil, donde A es un campo cualquiera de la teoría. Sin embargo, el álgebra de calibre de la derivada de Lie generalizada es cerrada si para campos A y B cualesquiera se cumple que

$$\eta^{MN}\partial_M(A)\partial_N(B) = 0, \quad (4.53)$$

denominada la ligadura fuerte. Como consecuencia de esta ligadura, la configuración de los campos depende sólo de las coordenadas del subespacio D -dimensional, que pueden ser en general combinaciones lineales de las coordenadas x^i y sus duales \tilde{x}_i . Cuando se tienen únicamente las coordenadas x^i se dice que se está en el marco de supergravedad.

Sabemos que los campos de supergravedad en el sector NS-NS, la métrica g_{ij} y las 2-forma de Kalb-Ramond b_{ij} transforman bajo diffeomorfismo (3.5),(3.6) y bajo las transformación de calibre de la 2-forma (3.8). La acción de supergravedad es invariante ante estas transformaciones. Ya que en la teoría de campo doble, la métrica y la 2-forma están unificadas en la métrica generalizada \mathcal{H}_{MN} , los diffeomorfismos y la transformación de calibre de la 2-forma deberían ser combinadas en una transformación de calibre generalizada.

Los diffeomorfismos y la transformación de calibre de la 2-forma son generadas por un vector λ^i y una 1-forma $\tilde{\lambda}_i$ respectivamente. Estos parámetros pueden de hecho

ser combinados en un vector $O(D, D)$ llamado parámetro de calibre generalizado

$$\Xi^M = (\tilde{\xi}_i, \xi^i). \quad (4.54)$$

En la literatura, hay una manera natural para formar la transformación de calibre generalizada con parámetros Ξ^M , a esta transformación se la conoce como derivada de Lie generalizada y se define como

$$\mathcal{L}_\Xi A_M \equiv \Xi^P \partial_P A_M + (\partial_M \Xi^P - \partial^P \Xi_M) A_P, \quad (4.55)$$

$$\mathcal{L}_\Xi B^M \equiv \Xi^P \partial_P B^M + (\partial^M \Xi_P - \partial_P \Xi^M) B^P, \quad (4.56)$$

donde $A_M = (\tilde{A}_i, A_i)$ y $B^M = (\tilde{B}^i, B^i)$ son vectores generalizados y los índices superior e inferior son tratados simétricamente. A partir de ésta definición, la derivada de Lie generalizada de la métrica generalizada \mathcal{H}_{MN} y del singlete $O(D, D)$ e^{-2d} están dadas por

$$\mathcal{L}_\Xi \mathcal{H}_{MN} = \Xi^P \partial_P \mathcal{H}_{MN} + (\partial_M \Xi^P - \delta^P \Xi_M) \mathcal{H}_{PN} + (\partial_N \Xi^P - \delta^P \Xi_N) \mathcal{H}_{MP} \quad (4.57)$$

$$\mathcal{L}_\Xi (e^{-2d}) = \partial_M (\Xi^M e^{-2d}), \quad (4.58)$$

de aquí notamos que e^{-2d} transforma como una densidad, razón por la cual se le llama la densidad generalizada. Además, cuando la ligadura fuerte es impuesta en el marco de supergravedad, la transformación (4.57) reproduce la transformación de la métrica y la 2-forma como

$$\mathcal{L}_\Xi g_{ij} = L_\xi g_{ij} \quad (4.59)$$

$$\mathcal{L}_\Xi b_{ij} = L_\xi b_{ij} + (\partial_i \tilde{\xi}_j - \partial_j \tilde{\xi}_i), \quad (4.60)$$

donde L_λ es una derivada de Lie ordinaria con parámetro ξ^i , e implica que la derivada de Lie generalizada ha unificado la derivada de Lie con la transformación de calibre de la 2-forma. La derivada de Lie generalizada de η_{MN}

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Xi \eta_{MN} &= \Xi^P \partial_P \eta_{MN} + (\partial_M \Xi^P - \delta^P \Xi_M) \eta_{PN} + (\partial_N \Xi^P - \delta^P \Xi_N) \eta_{MP} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4.61)$$

por lo tanto, la derivada de Lie generalizada preserva la métrica invariante $O(D, D)$.

Adicionalmente, en la teoría de campo doble, existe una transformación trivial, generada por la derivada generalizada de alguna función χ , tal que

$$\Xi^M = \partial^M \chi = (\tilde{\partial}_i \chi, \partial^i \chi) \quad (4.62)$$

para este parámetro de calibre, las derivadas de Lie generalizadas definidas anteriormente son

$$\mathcal{L}_{\Xi=\partial\chi} A_M = \partial^P \chi \partial_P A_M + (\partial_M \partial^P \chi - \partial^P \partial_M \chi) A_P = 0, \quad (4.63)$$

$$\mathcal{L}_{\Xi=\partial\chi} B^N = \partial^P \chi \partial_P B^N + (\partial^N \partial_P \chi - \partial_P \partial^N \chi) B^P = 0, \quad (4.64)$$

donde el primer término de ambas expresiones se anula debido a la ligadura fuerte. También, si uno considera la derivada de Lie generalizada del escalar de curvatura \mathcal{R} , transforma como un escalar

$$\mathcal{L}_\xi \mathcal{R} = \Xi^M \partial_M \mathcal{R}. \quad (4.65)$$

De la forma del escalar de curvatura (4.51), cada uno de los términos es invariante $O(D, D)$, sin embargo sólo la total combinación de todos los términos es un escalar generalizado, por lo tanto la acción de la teoría de campo doble (4.50) es invariante ante difeomorfismos generalizados.

La relación de conmutación entre derivadas generalizadas viene dada por

$$[\mathcal{L}_{\Xi_1}, \mathcal{L}_{\Xi_2}] = \mathcal{L}_{[\Xi_1, \Xi_2]_C}, \quad (4.66)$$

con el C-corchete definido por

$$[\Xi_1, \Xi_2]_C^M \equiv \Xi_1^N \partial_N \Xi_2^M - \frac{1}{2} \Xi_{1N} \partial^M \Xi_2^M - (1 \leftrightarrow 2). \quad (4.67)$$

Cuando la ligadura fuerte es impuesta en el marco de supergravedad, el corchete-C se convierte en un corchete de Courant. A partir de (4.67), se puede ver que

$$[\Xi_1, \Xi_2]_C^M = \frac{1}{2} (\mathcal{L}_{\Xi_1} \Xi_2^M - \mathcal{L}_{\Xi_2} \Xi_1^M). \quad (4.68)$$

Por lo tanto, hemos visto como emerge el grupo $O(n, n, \mathbb{Z})$ asociado a la T-dualidad en teoría de cuerdas, cuando n dimensiones son compactificadas toroidalmente. Dado que este grupo está contenido en una más grande $O(D, D)$, se introdujeron un nuevo conjunto de coordenadas duales a los modos de winding y se reescribieron los campos y las derivadas para poder obtener así, una acción invariante ante transformaciones de tipo $O(D, D)$, la acción de la teoría de campo doble.

4.3. Algunas nociones de la formulación global

Las teorías de cuerdas pueden ser consistentemente definidas en entornos geométricos, en los cuales las funciones de transición entre las cartas vienen dadas por los difeomorfismos grandes que son elementos de $GL(n, \mathbb{Z}) = SL(n, \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}_2 \in O(n, n, \mathbb{Z})$, y también pueden ser definidas en entornos no geométricos, que son aquellos en los cuales las funciones de transición entre las cartas no sólo consideran difeomorfismos y transformaciones de calibre sino también transformaciones de T-dualidad. Entender cómo la geometría convencional debe ser generalizada nos podría dar ideas sobre la naturaleza de la teoría M. Esto es debido a que en esta teoría, son simetrías las dualidades de Cuerdas, entonces por ser la Teoría de Campo Doble su versión efectiva, es coherente pensar que las funciones de transición pertenezcan a $O(D, D, \mathbb{Z})$.

En el entorno geométrico, (M, G, B, ϕ) donde M es una variedad espacio-temporal que localmente puede considerarse como un fibrado toroidal de base una variedad N arbitraria y fibra T^D , con una métrica G , un campo de 2-formas de calibre B y un campo escalar ϕ conocido como el dilatón y se define un campo de formas sobre la variedad $H = dB$ tal que H es una 3-forma. Sin embargo este no es el entorno más general puesto que en teoría de cuerdas la T-dualidad mapea las funciones de transición $S \in GL(n, \mathbb{Z})$ en $S' = gSg^{-1}$ donde $g \in O(n, n, \mathbb{Z})$ y en general $S' \in O(n, n, \mathbb{Z})$, característica de un entorno no-geométrico.

Sabemos que en la teoría de campo doble, se duplican los grados de libertad de la teoría donde se asume que los winding son momentos canónicos conjugados de las coordenadas duales. La extensión de la formulación global de la Teoría de Campo Doble ocurre al considerar otro toro T^D en la fibra dual al original, ambos subespacios de un toro doble T^{2D} que junto con la variedad base N forma ahora un target-space extendido \tilde{M} , que podría ser interpretado como un fibrado toroidal donde la fibra es el toro doble T^{2D} con un grupo de monodromía bien definida en $O(D, D, \mathbb{Z}) \in GL(2D, \mathbb{Z})$, puesto que está contenida en el grupo de difeomorfismos grande del toro doble T^{2n} . Tanto el toro original como el dual presentan una invarianza de tipo $SL(2, \mathbb{Z})$.

Si consideramos una monodromía $O(D, D, \mathbb{Z})$ en un entorno geométrico M , entonces tenemos una fibrición de \tilde{M} sobre M , en este caso no hay una geometría global del espacio-tiempo bien definida, localmente sí porque es el producto de un D -toro embebido en T^{2D} y un sector de la variedad base N , con la métrica G y la 2-forma B bien definidas en el toro interno. A este tipo de fibriciones de toro sobre toro, donde el toro de la fibra experimenta una monodromía que pertenece al grupo de T-dualidad son llamados monodrofolds o T-folds. Para ello la monodromía relativa debe estar contenida en $GL(D, \mathbb{Z})$.

El análogo de la ligadura fuerte en la descripción local se llama la polarización en la formulación global, que consiste en la elección del subespacio del toro doble que será considerado como espacio físico para cada punto de la variedad base N . La acción de la T-dualidad es el cambio de este subespacio físico, para cada carta de $U \in N$, existe una carta espacio-temporal local $U \times T^n$ embebida en el espacio doble $U \times T^{2n}$. Estos parches locales no son variedades espacio-temporales en el caso de los T-folds.

4.3.1. Caso $n=1$

El caso más simple consiste en considerar la fibra una circunferencia S^1 [51]. En este caso $i, j = 1$ y por lo tanto

$$B_{ij} = 0, \quad (4.69)$$

$$G_{ij} = R^2, \quad (4.70)$$

donde $R := R(Y)$ es el radio de la fibra de coordenada $X^1 = X^1 + 2\pi$ y Y es la coordenada con la que se parametriza la variedad base N . Notamos entonces que el radio del S^1 de la fibra depende del punto de la variedad, por lo tanto es una fibrición ya que la fibra depende del punto de la variedad base. La métrica generalizada en el doble toro, que para el caso $n = 1$ es un $T^2 = S^1 \times S^1$, viene dada por

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^{-2} \end{bmatrix}. \quad (4.71)$$

Entonces, en cada punto de la variedad base $Y \in N$ hay un toro T^2 que consiste en una circunferencia S^1 de coordenada X y radio R y una dual \tilde{S}^1 de coordenada \tilde{X} y radio $\tilde{R} = \frac{1}{R}$, la escogencia de la polarización consiste que cuál de los 1-ciclos es parte del espacio-tiempo y cuál es el dual. La T-dualidad actúa haciendo $R \rightarrow \frac{1}{R}$ de manera tal que el espacio físico es tiene ahora radio $\frac{1}{R}$. Existe también una manera alternativa de interpretar la T-dualidad, es decir que el radio se mantiene fijo y ahora es el \tilde{S}^1 parte del espacio-tiempo físico. Entonces se puede ver la T-dualidad como una transformación activa que cambia la geometría del espacio doblado, o como una transformación pasiva donde se cambia la polarización. En ambos casos el espacio tiempo cambia de una circunferencia con radio R a una con radio $\frac{1}{R}$, pero la física no varía ya que la teoría de campo conforme es la misma, lo que cambian son las variables que la describen.

Si consideramos el caso en el que el espacio-tiempo es un fibrado trivial, el espacio físico es $S^1 \times N$, está embebido en $T^2 \times N$ y la T-dualidad actúa rotando el S^1 dentro

del $T^2 = S_R^1 \times S_{\frac{1}{R}}^1$ desde el S_R^1 hasta el $S_{\frac{1}{R}}^1$. En el caso en que la función de transición es no trivial, consideramos dos cartas sobre la variedad base U, U' con intersección no trivial, de manera tal que los parches en la variedad M vienen dados por $U \times S_{R(Y)}^1$ y $U' \times S_{R'(Y')}^1$ con $Y \in U$ y $Y' \in U'$. En la intersección de las cartas, éstas pueden ser pegadas para formar una subvariedad si $R(Y) = R'(Y)$ para $Y \in U \cap U'$. Pero también podrían ser pegadas mediante una función de transición para formar pedazo de un T-fold si $R'(Y) = \frac{1}{R(Y)}$ para $Y \in U \cap U'$. En este caso el entorno es no geométrico puesto que un punto de la intersección tiene en el espacio físico fibras de radios inversos, en este caso no se puede construir un espacio suave pero desde el punto de vista de la teoría de campo conforme tenemos la misma física sobre ambas cartas ya que el operador de masa hace distinción entre una y otra, la transición está relacionada con un cambio de las variables utilizadas para parametrizar la teoría.

En el formalismo doble, las dos cartas a pegar son $U \times S_R^1 \times S_{\frac{1}{R}}^1$ y $U' \times S_{R'}^1 \times S_{\frac{1}{R'}}^1$. En el caso en que $R = R'$, estas cartas pueden ser pegadas de manera natural, pegando el S_R^1 con el $S_{R'}^1$ y el $S_{\frac{1}{R}}^1$ con el $S_{\frac{1}{R'}}^1$ formando una variedad. En el caso del T-fold $R = \frac{1}{R'}$ podemos pegar el S_R^1 con el $S_{\frac{1}{R'}}^1$ ambos con radio R y el $S_{\frac{1}{R}}^1$ con el $S_{R'}^1$ ambos con radio $\frac{1}{R}$. Este pegado forma una variedad $(U \cup U') \times T^2$ en el espacio doblado, sin embargo las cartas asociadas al espacio físico no forman una subvariedad del espacio doblado pues necesitamos pegar una carta $U \times S_R^1$ con una $U' \times S_{R'}^1$. Entonces la polarización cambia debido a la T-dualidad al moverse de U a U' . Existe un espacio tiempo doblado bien definido globalmente, pero el subespacio físico está definido sólo localmente.

Es posible generalizar estas ideas para $n > 1$, la T-dualidad actúa cambiando la polarización, es decir cambiando el subespacio físico $T^n \subset T^{2n}$ y para cada abierto U de la variedad N , hay una carta local del espacio tiempo $U \times T^n$ embebida en el espacio doblado $U \times T^{2n}$, mientras que para T-folds no forman localmente una variedad espacio-temporal pese a que el espacio doblado completo si forma una variedad al ser un fibrado T^{2n} sobre la base N .

CAPÍTULO 5

TEORÍA DE SUPERMEMBRANAS

La supermembrana es un objeto extendido bidimensional que al evolucionar en el tiempo produce un volumen de mundo (*worldvolume*) $2 + 1$ dimensional en un Espacio tiempo de 11 dimensiones, y se acopla a la supergravedad en 11 dimensiones. Inicialmente se consideró un objeto microscópico de la teoría M, pero cuando se determinó que tenía espectro continuo la mayor parte de la comunidad científica abandonó esta posibilidad. Sin embargo, existe un sector topológico de la teoría llamado supermembrana con carga central, cuyo espectro sí es discreto, y en consecuencia puede ser interpretado como elemento fundamental de un sector de la teoría M, por ser una teoría de primera cuantización [19, 32, 20].

Se conoce que el límite a bajas energías de la supermembrana en 11 dimensiones es la supergravedad en 11 dimensiones. La supermembrana compactificada en un toro, es el origen en teoría M de todas las supergravedades en 9D, maximales y calibradas. La supermembrana con cargas centrales se demostró que está naturalmente asociada a supergravedades del tipo calibrada [32].

Con intenciones de obtener descripciones globales, y teniendo la teoría de campo doble una interpretación en términos de fibrados, es útil comprender la teoría de

supermembranas en términos de fibrados siguiendo a [19], donde se encontró una formulación explícita de la supermembrana en 11 dimensiones con cargas centrales, en términos de un fibrado toroidal simpléctico con monodromía no trivial en $SL(2, \mathbb{Z})$. La compactificación se interpreta en términos de un fibrado toroidal donde la base es la parte espacial resultante de la foliación del volumen de mundo, y la fibra es el espacio-tiempo $M_9 \times T^2$, el grupo de estructura es el grupo de simplectomorfismos que preservan la 2-forma simpléctica natural de la teoría, los campos son secciones del fibrado toroidal simpléctico no trivial. Si la condición de carga central desaparece, este corresponde globalmente a un fibrado toroidalmente simpléctico trivial sobre la base.

5.1. Nociones fundamentales

En este capítulo se resumen algunos aspectos del trabajo de [55, 56], manteniendo la notación con ligeras sustituciones.

La acción de la supermembrana acoplada con supergravedad en $d = 11$ en un target-space general fue propuesta en [13]

$$S = T \int d^3\xi \left(\frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{ij} E_i^{\hat{a}} E_j^{\hat{b}} \eta_{\hat{a}\hat{b}} - \frac{1}{2} \sqrt{-g} + \frac{1}{6} \epsilon^{ijk} E_i^{\hat{A}} E_j^{\hat{B}} E_k^{\hat{C}} C_{\hat{C}\hat{B}\hat{A}} \right) \quad (5.1)$$

donde T es la tensión de la supermembrana, $i, j = 0, 1, 2$ son los índices asociados a las coordenadas del volumen de mundo, cuya métrica inducida es g_{ij} , los índices con acento circunflejo están relacionados con el espacio tangente a la variedad, $C_{\hat{C}\hat{B}\hat{A}}$ son las componentes de una 3-forma de tipo Kalb-Ramond, asociada a la supergravedad en 11 dimensiones, que se acopla a la supermembrana vía un término de Wess-Zumino, $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ son los índices asociados al target space de métrica $\eta_{\hat{a}\hat{b}}$, que se define en cada punto de la variedad, A, B, C son los índices del superspacio (superíndices) y $E_i^{\hat{A}}$ es el arrastre (*pullback*) del supervielbein $E_M^{\hat{A}}(Z)$ al volumen de mundo, definido por

$$E_i^{\hat{A}} = (\partial_i Z^M) E_M^{\hat{A}}, \quad (5.2)$$

donde $Z^M(\xi) = (X^\mu(\xi), \theta^\alpha(\xi))$ son las coordenadas del superespacio y $M = (\mu, \alpha)$ son los superíndices, que consideran tanto la contribución bosónica con $\mu = 0, \dots, 10$, como la fermiónica con $\alpha = 1, \dots, 32$, donde θ es un fermión de Majorana (espín $\frac{1}{2}$). Por lo tanto, de (5.2)

$$E_i^{\hat{A}} = \partial_i X^\mu E_\mu^{\hat{A}} + \partial_i \theta^\alpha E_\alpha^{\hat{A}}. \quad (5.3)$$

Además, sabiendo que la acción (5.1) es completamente general, podemos estudiar el caso particular en que el espacio-tiempo es plano con una métrica tipo Minkowski, entonces, las componentes de los supervielbein $E_M^{\hat{A}}$ y de la 3-forma C_{MNP} , en el formalismo del superespacio plano se reducen a

$$\begin{aligned} E_\mu^{\hat{a}}(X, \theta) &= \delta_\mu^{\hat{a}}, \\ E_\mu^{\hat{\alpha}}(X, \theta) &= 0, \\ E_\alpha^{\hat{a}}(X, \theta) &= -(\bar{\theta}\Gamma^{\hat{a}})_\alpha, \\ E_\alpha^{\hat{\alpha}}(X, \theta) &= \delta_\alpha^{\hat{\alpha}}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

y

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu\rho} &= 0, \\ C_{\mu\nu\alpha} &= (\bar{\theta}\Gamma_{\mu\nu})_\alpha, \\ C_{\mu\alpha\beta} &= (\bar{\theta}\Gamma_{\mu\nu})_{(\alpha}(\bar{\theta}\Gamma^\nu)_{\beta)}, \\ C_{\alpha,\beta,\gamma} &= (\bar{\theta}\Gamma_{\mu\nu})_{(\alpha}(\bar{\theta}\Gamma^\mu)_{\beta}(\bar{\theta}\Gamma^\nu)_{\gamma)}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

en consecuencia, la acción de la supermembrana en un espacio plano de 11 dimensiones viene dada por

$$S = \int d^3\xi \left\{ -\sqrt{-g} - \epsilon^{ijk} \left[\frac{1}{2} \partial_i X^\mu E_j^\nu + \frac{1}{6} \bar{\theta}\Gamma^\mu \partial_i \theta \bar{\theta}\Gamma^\nu \partial_j \theta \right] \bar{\theta}\Gamma_{\mu\nu} \partial_k \theta \right\} \quad (5.6)$$

donde Γ^ν es una matriz 32×32 que genera un álgebra de Clifford

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}, \quad (5.7)$$

las matrices Gamma con más de un índice $\Gamma^{\mu\nu}$, son productos antisimetrizados de matrices de Dirac, y E_i^m son las componentes de un vielbein definido por

$$E_i^\mu = \partial_i X^\mu + \bar{\theta} \Gamma^\mu \partial_i \theta. \quad (5.8)$$

La acción (5.6), se puede ver que es una generalización de la acción de Green-Schwarz para la supercuerda. Las ecuaciones de movimiento obtenidas a partir de ella mediante un principio variacional, vienen dadas por [55]

$$\partial_i(\sqrt{-g}g^{ij}E_j^\mu) - \epsilon^{ijk}E_i^\nu \partial_j \bar{\theta} \Gamma_\nu^\mu \partial_k \theta = 0, \quad (5.9)$$

$$(\mathbb{I} + \Gamma)g^{ij}/E_i \partial_j \theta = 0, \quad (5.10)$$

donde $g_{ij}(X, \theta)$ es la métrica inducida en la hoja de mundo obtenida después de realizar un arrastre (*pullback*) de la métrica plana del target space

$$g_{ij} = E_i^m E_j^n \eta_{mn}, \quad (5.11)$$

y Γ está definida por

$$\Gamma = \frac{\epsilon^{ijk}}{6\sqrt{-g}} E_i^m E_j^n E_k^p \Gamma_{mnp}. \quad (5.12)$$

Las simetrías asociadas a la acción (5.6) para la supermembrana en un superespacio plano de 11 dimensiones son: la invariancia ante transformaciones de calibre globales ó supersimetría espacio-temporal

$$\delta X^m = \bar{\epsilon} \Gamma^m \theta, \quad (5.13)$$

$$\delta \theta = \epsilon, \quad (5.14)$$

y las transformaciones locales, vinculadas a la invariancia bajo reparametrizaciones de las coordenadas de la hoja de mundo a lo largo del campo vectorial ξ y la simetría- κ fermiónica, es decir

$$\delta X^m = \xi^i \partial_i X^m + \bar{\kappa} (\mathbb{I} - \Gamma) \Gamma^m \theta, \quad (5.15)$$

$$\delta \theta = \xi^i \partial_i \theta + (\mathbb{I} - \Gamma) \kappa, \quad (5.16)$$

donde κ es un espinor de Majorana de 32 componentes. La combinación $(\mathbb{I} - \Gamma)$ elimina la mitad de las componentes de κ . Por lo tanto la simetría- κ divide entre dos las componentes físicas del espinor.

5.2. La supermembrana en el calibre del cono de luz.

Siguiendo el desarrollo de [55, 56], para la formulación en el cono de luz de la supermembrana, partimos de la densidad lagrangeana asociadas con la acción (5.6)

$$\mathcal{L} = -\sqrt{-g(X, \theta)} - \epsilon^{ijk} \left[\frac{1}{2} \partial_i X^m (\partial_j X^n + \bar{\theta} \Gamma^n \partial_j \theta) + \frac{1}{6} \bar{\theta} \Gamma^m \partial_i \theta \bar{\theta} \Gamma^n \partial_j \theta \right] \bar{\theta} \Gamma_{mn} \partial_k \theta, \quad (5.17)$$

si consideramos supermembranas cerradas, entonces $g_{ij}(X, \theta)$ es la métrica inducida en la hoja de mundo tubular (*worldtube*). Introduciendo las coordenadas del cono de luz estándar

$$X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (X^{10} \pm X^0), \quad (5.18)$$

tal que $\partial_i X^+ = \delta_{i0}$, entonces $X^m = (X^+, X^-, X^l)$ con $l = 1, \dots, 9$, donde $X^l(\xi)$ son las coordenadas transversas, por lo tanto, se redujo el número de coordenadas bosónicas de 11 a 9. De manera análoga, se define

$$\Gamma^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Gamma^{10} \pm \Gamma^0), \quad (5.19)$$

donde

$$\Gamma^+ = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_{16 \times 16} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.20)$$

$$\Gamma^- = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\mathbb{I}_{16 \times 16} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.21)$$

$$\Gamma^a = \begin{pmatrix} -\gamma^a & 0 \\ 0 & \gamma^a \end{pmatrix}, \quad (5.22)$$

e imponiendo la simetría kappa en el calibre del cono de luz $\Gamma^+ \theta = 0$ para eliminar 16 de las 32 coordenadas fermiónicas.

Entonces, con estas sustituciones, se puede ver que las componentes de la métrica inducida en la hoja de mundo vienen dadas por

$$g_{rs} = \partial_r X^l \partial_s X^l, \quad (5.23)$$

$$g_{0r} = \partial_r X^- + \partial_0 X^l \partial_r X^l + \bar{\theta} \Gamma^- \partial_r \theta, \quad (5.24)$$

$$g_{00} = 2\partial_0 X^- + \partial_0 X^l \partial_0 X^l + 2\bar{\theta} \Gamma^- \partial_0 \theta, \quad (5.25)$$

la densidad lagrangeana en consecuencia será

$$\mathcal{L} = -\sqrt{\bar{g}} \Delta + \epsilon^{rs} \partial_r X^l \theta \Gamma^- \bar{\Gamma}_l \partial_s \theta, \quad (5.26)$$

donde $\bar{g} \equiv \det g_{rs}$ y $\Delta \equiv -g_{00} + g_{0r} \bar{g}^{rs} g_{0s}$. Los momentos canónicos conjugados, asociados a las variables dinámicas X^a , X^- y θ son

$$P_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 X^a)} = \sqrt{\frac{\bar{g}}{\Delta}} (\partial_0 X^a - g_{0r} \bar{g}^{rs} \partial_s X^a), \quad (5.27)$$

$$P^+ = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 X^-)} = \sqrt{\frac{\bar{g}}{\Delta}}, \quad (5.28)$$

$$\bar{S} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \theta)} = \sqrt{\frac{\bar{g}}{\Delta}} \bar{\theta} \Gamma^-; \quad \left(S = -\sqrt{\frac{\bar{g}}{\Delta}} \Gamma^- \theta \right) \quad (5.29)$$

respectivamente y por lo tanto, la densidad hamiltoniana en el calibre del cono de luz, en un espacio plano de 11 dimensiones, se puede escribir como

$$\mathcal{H} = \frac{\vec{P}^2 + \bar{g}}{2p^+} - \epsilon^{rs} \partial_r X^a \bar{\theta} \Gamma^- \Gamma_a \partial_s \theta \quad (5.30)$$

se puede ver existen únicamente dos vínculos primarios obtenidos a partir de la definición de los momentos canónicos conjugados

$$\phi_r = \vec{P} \cdot \partial_r \vec{X} + P^+ \partial_r X^- + \bar{S} \partial_r \theta \approx 0, \quad (5.31)$$

$$\varphi = S + P^+ \gamma_- \theta \approx 0, \quad (5.32)$$

donde el símbolo "débilmente cero" (\approx) indica que en las ligaduras reside parte de la dinámica pues no todas tienen corchete de Poisson cero con las variable canónicas.

La evolución temporal en el espacio de fase, viene dada por el hamiltoniano

$$H_T = \int d^2 \sigma \left\{ \mathcal{H} + c^r \phi_r + \bar{\lambda} \varphi \right\}, \quad (5.33)$$

donde c^r y λ son multiplicadores de Lagrange. Se puede imponer como condición de calibre que g^{0r} y obtener que la masa de la supermembrana viene dada por

$$\mathcal{M}^2 = \int d^2\sigma \left[\frac{(\vec{P}^2)' + \bar{g}}{\sqrt{\omega(\sigma)}} - 2P^+ \epsilon^{rs} \partial_r X^a \bar{\theta} \Gamma^- \Gamma_a \partial_s \theta \right] \quad (5.34)$$

donde la prima indica que se excluye el modo cero en la integral, y se encuentra a partir de la condición de calibre, una invariancia ante reparametrizaciones residual, consistente en transformaciones independientes del tiempo que preservan el área.

Existe una formulación alternativa de la teoría de la supermembrana que enfatiza las reparametrizaciones que preservan el area. Las transformaciones que preservan el área pueden ser escritas localmente como

$$\xi^r(\sigma) = \frac{\epsilon^{rs}}{w(\sigma)} \partial_s \xi(\sigma), \quad (5.35)$$

nos restringiremos al subgrupo de funciones $\xi(\sigma)$ que están globalmente definidas en la supermembrana, pues si ésta última es topológicamente no trivial, podría no estar definida globalmente. Definiendo el bracket de Lie entre dos funciones $A(\sigma)$ y $B(\sigma)$ como

$$\{A, B\} \equiv \frac{\epsilon^{rs}}{w(\sigma)} \partial_r A(\sigma) \partial_s B(\sigma), \quad (5.36)$$

que es antisimétrico en A y B y satisface la identidad de Jacobi. Entonces, las reparametrizaciones infinitesimales que preservan el área actúan de la siguiente manera sobre las variables bosónicas y fermiónicas

$$\delta X^a = \{\xi, X^a\}, \quad (5.37)$$

$$\delta \theta = \{\xi, \theta\}. \quad (5.38)$$

Si se introduce un campo de calibre Ω , asociado a reparametrizaciones dependientes del tiempo, que transforman como

$$\delta \Omega = \partial_0 \xi + \{\xi, \Omega\} \quad (5.39)$$

y las correspondientes derivadas covariantes

$$D_0 X^a = \partial_0 X^a - \{\Omega, X^a\}, \quad (5.40)$$

$$D_0 \theta = \partial_0 \theta - \{\Omega, \theta\}. \quad (5.41)$$

se encuentra que la densidad lagrangeana

$$w^{-1} \mathcal{L} = \frac{1}{2} (D_0 \vec{X})^2 + \bar{\theta} \gamma_- D_0 \theta - \frac{1}{4} \{X^a, X^b\}^2 + \bar{\theta} \gamma_- \gamma_a \{X^a, \theta\}, \quad (5.42)$$

es invariante ante las transformaciones indicadas anteriormente. Se definen los momentos canónicos conjugados \vec{P} y S asociados a \vec{X} y θ

$$\vec{P} = w \partial_0 \vec{X}, \quad (5.43)$$

$$S = -w \gamma_- \theta, \quad (5.44)$$

e implementa el calibre $\omega = 0$ y se obtiene

$$H = \frac{1}{2} \int d^2 \sigma \left\{ w^{-1} \vec{P}^2 + \frac{1}{2} w \left(\{X^a, X^b\} \right)^2 - 2w \bar{\theta} \gamma_- \gamma_a \{X^a, \theta\} \right\}, \quad (5.45)$$

de manera tal que, descartando los modos cero \vec{P}_0 , $2H$ coincide con la masa de la supermembrana obtenida anteriormente, utilizando el hecho que $(\{X^a, X^b\})^2 = 2w^{-2} \bar{g}$.

5.3. Supermembrana con cargas centrales.

A continuación consideraremos una supermembrana en 11 dimensiones, restringida con una condición topológica específica que puede ser interpretada de varias maneras, pero cuya principal propiedad es que el hamiltoniano tiene espectro discreto, y por lo tanto permite un análisis directo de sus simetrías a un nivel cuántico.

Describiremos a la supermembrana en 11 dimensiones en términos de unos mapas que van de la variedad base, asociada con el volumen de mundo al target space, el cual consideramos plano de tipo Minkowski

$$X^{\mathbb{M}} : \Sigma \times \mathbb{R} \longrightarrow M_{11}, \quad X^{\mathbb{M}} = (X^+, X^-, X^M) \quad (5.46)$$

donde X^+ y X^- son las coordenadas del cono de luz, X^M con $M = 1, \dots, 9$ son las coordenadas transversas y se ha realizado una foliación de del volumen de mundo $R \times \Sigma$, permitiendo separar las coordenadas temporales de las espaciales, formando estas últimas una superficie de Riemann compacta Σ de genus arbitrario.

Sabemos de (5.45) que el hamiltoniano de la supermembrana en un espacio plano de 11 dimensiones puede ser escrito como

$$H = T^{\frac{2}{3}} \int_{\Sigma} \sqrt{W} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{P_M}{\sqrt{W}} \right)^2 + \frac{T^2}{4} \{X^M, X^N\}^2 + \sqrt{W} \theta \Gamma_- \Gamma_m \{X^M, \theta\} \right]. \quad (5.47)$$

Si compactificamos el target space de la supermembrana en el calibre del cono de luz en un toro plano T^2 , entonces

$$X^M : \Sigma \times \mathbb{R} \longrightarrow M_9 \times T^2, \quad (5.48)$$

de los nueve campos bosónicos que trazan un mapa de la variedad del volumen de mundo a las coordenadas transversas del espacio-tiempo, 7 van a al espacio plano y 2 al Toro del target-space, esto es $X^M = \{X^m, X^r\}$ con $m = 3, \dots, 9$ y $r = 1, 2$ tal que

$$X^m : \Sigma \times \mathbb{R} \longrightarrow M_9^{LCG}, \quad (5.49)$$

$$X^r : \Sigma \times \mathbb{R} \longrightarrow T^2. \quad (5.50)$$

Dado que la derivada exterior de una 0-forma es una 1-forma, la condición de enrollamiento que deben cumplir los mapas X^m es

$$\oint_{\mathcal{C}_S} dX^m = 0, \quad (5.51)$$

donde dX^m es una 1-forma exacta para cada valor de m , mientras que la condición de enrollamiento necesaria para poder definir el mapa al toro T^2 del target space es [19]

$$\oint_{\mathcal{C}_S} dX = 2\pi R(l_S + m_S \tau), \quad (5.52)$$

con dX^r una 1-forma cerrada asociada al sector compacto, $l_S, m_S \in \mathbb{Z}$ representan los números de enrollamiento a lo largo del toro dado en coordenadas complejas y \mathcal{C}_S es

la base de homología para una superficie de Riemann de genus $g = 1$. Además R es un moduli real $R > 0$ y τ es uno complejo $\tau = \text{Re}(\tau) + i\text{Im}(\tau)$ conocido como parámetro de Teichmuller, y son parámetros asociados al toro del target space.

De acuerdo al teorema de descomposición de Hodge, podemos descomponer la 1-forma cerrada en 1-formas exactas y armónicas, esto es

$$dX^r = M_s^r d\hat{X}^s + dA^r, \quad (5.53)$$

donde $r = 1, 2$, $d\hat{X}^s$, $s = 1, 2$ la base de 1-formas armónicas y $d\hat{X}^r$ la base normalizada de 1-formas sobre la superficie Riemanniana Σ tal que

$$\oint_{C_s} d\hat{X}^r = \delta_r^s, \quad (5.54)$$

dA^r representa las 1-formas exactas y M_s^r unos coeficientes constantes. También podemos reescribir ambas 1-formas en coordenadas complejas

$$dX = dX^1 + idX^2, \quad (5.55)$$

$$dA = dA^1 + idA^2, \quad (5.56)$$

entonces, (5.52) implica que

$$M_s^1 + iM_s^2 = 2\pi R(l_s + m_s\tau), \quad (5.57)$$

por lo tanto, podemos reescribir (5.53) como

$$dX = 2\pi R(l_S + m_S\tau)d\hat{X}^S + dA. \quad (5.58)$$

Partiendo de (5.47), el Hamiltoniano físico en el calibre del cono de luz para la supermembrana que evoluciona en $M_9 \times T^2$ viene dado entonces por

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \int_{\Sigma} d^2\sigma T_{11}^{-2/3} \sqrt{W} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{P_m}{\sqrt{W}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{P_r}{\sqrt{W}} \right)^2 + \frac{T_{11}^2}{2} \{X^r, X^m\}^2 + \frac{T_{11}^2}{4} \{X^r, X^s\}^2 \right], \\ & + \int_{\Sigma} d^2\sigma T_{11}^{-2/3} \sqrt{W} \left[\frac{T_{11}^2}{4} \{X^m, X^n\}^2 - \bar{\theta} \Gamma_- \Gamma_m \{X^m, \theta\} - \bar{\theta} \Gamma_- \Gamma_r \{X^r, \theta\} \right], \quad (5.59) \end{aligned}$$

sujeto a las ligaduras

$$\phi_1 := d\left(\frac{P_m}{\sqrt{W}}dX^m + \frac{P_r}{\sqrt{W}}dX^r - \bar{\theta}\Gamma_-d\theta\right) = 0, \quad (5.60)$$

$$\phi_2 := \oint_{C_S} \left(\frac{P_m}{\sqrt{W}}dX^M + \frac{P_r}{\sqrt{W}}dX^r - \bar{\theta}\Gamma_-d\theta\right) = 0, \quad (5.61)$$

asociadas con una simetría residual de la teoría, el grupo de simplectomorfismos que preservan la forma simpléctica, que en nuestro caso coincide con el grupo infinito de difeomorfismos que preservan el área del de la superficie Riemanniana formada por las coordenadas espaciales del worldvolume.

Se procede a imponer una restricción topológica en los mapas de winding

$$\int_{\Sigma} dX^r \wedge dX^s = n\epsilon^{rs} Area(T^2), \text{ con } r, s = 1, 2 \text{ y } n \in \mathbb{Z} \quad (5.62)$$

denominada condición de carga central ó ligadura de enrollamiento irreducible, encontrada en [18] por los autores y asociada a un pegado no trivial del fibrado a la variedad de la base. Además $Area(T^2) = (2\pi R)^2 Im\tau$ y

$$Area(T^2) = (2\pi R)^2 Im\tau, \quad (5.63)$$

$$n = \det \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}, \quad (5.64)$$

conocida como matriz de enrollamiento.

Esta restricción topológica tiene varias interpretaciones: está asociada a la condición de carga central del álgebra supersimétrica encontrada por ([57]), está relacionada con un enrollamiento irreducible de la supermembrana en la variedad de compactificación que es el 2-toro del target-space, también implica la existencia de un fibrado principal $U(1)$ no trivial con primer número de Chern distinto de cero $C_1 = n \neq 0$ sobre el volumen de mundo de la supermembrana, este fibrado hace que el pegado del toro de target a la variedad base sea no trivial e implica una condición de monopolo de Dirac generalizado sobre el volumen de mundo, por último, la restricción topológica considerada implica una condición de flujo sobre el volumen de mundo.

La supermembrana con cargas centrales no triviales es invariante bajo difeomorfismos que prevean el área homotópicos a la identidad, en particular bajo mapas que dejen invariante la base de homología en Σ , en efecto $d\hat{X}^r$ permanece invariante y en consecuencia la 2-forma simpléctica en Σ . Pero la supermembrana con cargas centrales también es invariante bajo difeomorfismos no homotópicos a la identidad que actúan en la base de Σ como transformaciones de $SL(2, Z)$. De hecho, si

$$d\hat{X}^r(\sigma) \rightarrow S_r^s d\hat{X}^r(\sigma), \quad (5.65)$$

con $[S_r^s] \in SL(2, Z)$, entonces la 2-forma simpléctica permanece invariante.

El hamiltoniano de la supermembrana con cargas centrales viene dado por

$$\begin{aligned} H &= \int_{\Sigma} \sqrt{W} d\sigma^1 \wedge d\sigma^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{P_m}{\sqrt{W}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{P_r}{\sqrt{W}} \right)^2 + \frac{1}{4} \{X^m, X^n\}^2 + \frac{1}{2} (\mathcal{D}_r X^m)^2 + \frac{1}{4} (\mathcal{F}_{rs})^2 \right], \\ &+ (n^2 Area_{T^2}^2) + \int_{\Sigma} \sqrt{W} d\sigma^1 \wedge d\sigma^2 \left[\Lambda \left(\mathcal{D}_r \left(\frac{P_r}{\sqrt{W}} \right) + \left\{ X^m, \frac{P_m}{\sqrt{W}} \right\} \right) \right] \\ &+ \int_{\Sigma} \sqrt{W} d\sigma^1 \wedge d\sigma^2 \left[-\bar{\theta} \Gamma_- \Gamma_r \mathcal{D}_r \theta - \bar{\theta} \Gamma_- \Gamma_m \{X^m, \theta\} - \Lambda \{ \bar{\theta} \Gamma_-, \theta \} \right], \end{aligned} \quad (5.66)$$

donde hemos definido a la derivada covariante simpléctica y la curvatura simpléctica de la variedad base como

$$\mathcal{D}_r X^m = D_r X^m + \{A_r, X^m\}, \quad (5.67)$$

$$\mathcal{F}_{rs} = D_r A_s - D_s A_r + \{A_r, A_s\}, \quad (5.68)$$

respectivamente, con D_r una nueva derivada covariante que viene dada por

$$D_r = 2\pi l_r \theta_r^l R \frac{\epsilon^{ab}}{\sqrt{W}} \partial_a \hat{X}^l \partial_b. \quad (5.69)$$

Cabe destacar que si en (5.57) n es igual a cero, tenemos un fibrado trivial con espectro continuo. El operador de masa para la supermembrana cerrada compactificada toroidalmente viene dado por

$$M^2 = T_{11}^2 [(2\pi R)^2 n \text{Im}\tau]^2 + \frac{1}{R^2} \left[m_1 + \left(\frac{m|q\tau - p|}{R} \right) \right] + T_{11}^{2/3} H \quad (5.70)$$

5.4. La supermembrana como un fibrado toroidal simpléctico.

Los fibrados toroidales simplécticos son fibrados (Σ, π, E) , donde E es el espacio total y Σ es la variedad base, la cual consideraremos una superficie de Riemann compacta y cerrada, la fibra es un 2-toro $F = T^2$ y el grupo de estructura es el grupo de simplectomorfismos que preserva la estructura simpléctica en T^2 [19]. En [58] se encontró la condición necesaria y suficiente para la existencia de una estructura simpléctica en los fibrados toroidales simplécticos.

Este fibrado es coherente con la formulación de la supermembrana en el calibre del cono de luz, ya que es invariante bajo difeomorfismos que preservan el área, que son simplectomorfismos que preservan la estructura simpléctica, los cuales están definidos en la variedad base Σ . En la supermembrana con cargas centrales corresponden al pull-back de los simplectomorfismos de la fibra. Para describir aspectos globales de la supermembrana se introduce la monodromía y el Z -módulo asociado.

La acción del grupo de estructura en la fibra T^2 produce la acción del grupo cero de homotopía π_0 del grupo de estructura sobre los grupos de homología y cohomología del toro T^2 . El homomorfismo $\pi_1(\Sigma) \rightarrow \pi_0(G)$ le otorga a los grupos de homología y cohomología de la fibra la estructura de $Z[\pi_1(\Sigma)]$ -módulo, donde $\pi_1(\Sigma)$ es el grupo fundamental del toro de la base, que consiste en el conjunto de las clases de homotopía de lazos basados en un punto Σ que es arcoconectado. El grupo cero de homotopía π_0 , en nuestro caso, $G = \text{Sym}(T^2)$ es el grupo $SL(2, \mathbb{Z})$, y su acción sobre el primer grupo de Homología de la fibra $H_1(T^2)$ se puede identificar con la acción de $SL(2, \mathbb{Z})$ sobre Z^2 . Dada una representación $\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow SL(2, Z)$, denotamos como Z_ρ^2 el correspondiente $Z[\pi_1(\Sigma)]$ -módulo.

Existe un teorema, ver ([58]) que asegura la existencia de una correspondencia biyectiva entre las clases de equivalencia de los fibrados toroidales simplécticos con una representación ρ induciendo la estructura de módulo Z_ρ^2 en $H_1(T^2)$ y los elementos de

$H^2(\Sigma, Z_\rho^2)$, el segundo grupo de cohomología de la base Σ con coeficientes locales Z_ρ^2 . Este teorema clasifica los fibrados toroidales simplécticos con una representación particular en clases de equivalencia.

El Hamiltoniano de la supermembrana viene dado por (5.59), donde X^r son secciones de un fibrado toroidal simpléctico con grupo de estructura G , los simplectomorfismos que preservan la 2-forma simpléctica en el 2-toro de la fibra, P_r es el momentum conjugado a X^r . Los elementos del integrando que contienen a X^r pueden ser reescritos en términos de (5.55) como

$$\frac{1}{2} \{X, X^m\} \{\bar{X}, X^m\} + \frac{1}{8} \{X, \bar{X}\} \{\bar{X}, X\} \quad (5.71)$$

donde dX viene dado por (5.52). El Hamiltoniano es un funcional bien definido sobre el fibrado toroidal simpléctico con monodromía ρ . De hecho, es invariante bajo la siguiente transformación $Sp(2, \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z})$ sobre el 2-toro de la fibra

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad (5.72)$$

$$R \rightarrow R|c\tau + d|, \quad (5.73)$$

$$A \rightarrow Ae^{i\phi_\tau}, \quad (5.74)$$

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}, \quad (5.75)$$

donde $c\tau + d = |c\tau + d|e^{-i\phi_\tau}$ y $\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \in Sp(2, \mathbb{Z})$ [59]. Además del hamiltoniano, el área del toro de la fibra también es invariante ante esta transformación de tipo $SL(2, \mathbb{Z})$ asociada a la S-dualidad.

Sin embargo, el Hamiltoniano (5.59) además de ser invariante bajo la simetría residual de los difeomorfismos que preservan el área, existe otra simetría $SL(2, \mathbb{Z})$ asociadas al cambio de base de las 1-formas armónicas y windings definidos en la variedad base Σ , esto es

$$d\hat{X} \rightarrow Sd\hat{X}, \quad (5.76)$$

$$\mathbb{W} \rightarrow S^{-1}\mathbb{W} \quad (5.77)$$

CAPÍTULO 6

T-DUALIDAD EN LA TEORÍA DE LA SUPERMEMBRANA

La transformación de T-dualidad en la teoría de la supermembrana [20] se entiende como una generalización de la dualidad en teoría de cuerdas, se caracteriza por la manera en que actúa sobre los moduli y sobre las cargas. En general, los moduli son campos escalares complejos cuyo valor esperado en el vacío parametriza la teoría y su parte real está asociada con la geometría, en nuestro caso los moduli son el radio del toro del target R y el parámetro de Teichmuller τ puesto que parametrizan la variedad de compactificación que es un 2-toro. Entonces podemos caracterizar los moduli como

- Moduli Kahler: que es proporcional al volumen de la variedad en teoría de cuerdas, en nuestro caso al área del toro del target space.
- Moduli de estructura compleja: que establece una relación entre los radios del toro y se puede particularizar al parámetro de Teichmuller.
- Axióon dilatón: presenta en la teoría de cuerdas tipo IIB , está relacionado con el parámetro de Teichmuller y viene dado por

$$\tau_{IIB} = a_0 + ie^{-\phi} \tag{6.1}$$

donde ϕ es el dilatón.

Los dos primeros representan la parte geométrica de los moduli que caracterizan un toro y por lo tanto su parte real. Se acopla con una parte compleja. Una diferencia importante entre los moduli en teoría de cuerdas y en teoría de supermembranas es que en la primera, los moduli son campos cuyo valor esperado en el vacío parametriza la teoría, mientras que en la segunda no son campos sino parámetros de la teoría.

6.1. T-dualidad en el Hamiltoniano y operador de masa

Las cargas presentes en la teoría son las de winding, asociadas al enrollamiento, representadas por un número entero que indica, al igual que en la compactificación circular en teoría de cuerdas el número de veces que se enrolla la supermembrana en la variedad de compactificación y las asociadas al momentum cuantizado de KK, es decir a la propagación a lo largo de la dirección compacta. Sin embargo, al compactificar la supermembrana en un 2-toro ($T^2 = S^1 \times S^1$), las dos coordenadas espaciales del toro de la base pueden enrollarse alrededor de cualquiera de las dos circunferencias isomorfas al Toro del target space, por lo tanto tenemos una matriz de enrollamiento de 4 elementos cuyo determinante es lo que denotaremos como el número de enrollamiento n que es un invariante topológico, ya que como demostraron los autores [18] está asociado a la existencia de un fibrado principal sobre la membrana cuya primera clase de Chern es $C_1 = n$. Cuando este número de enrollamiento es distinto de cero tenemos una supermembrana con cargas centrales, mientras que las cargas de Kaluza Klein vienen dadas por dos enteros que indican la propagación a lo largo de cualquiera de las dos direcciones compactas. Además en este caso, se puede realizar una identificación entre el τ que parametriza el toro sobre el que se enrolla la supermembrana con el axión dilatón en teoría de cuerdas

La transformación de T-dualidad que consideraremos es un mapa no lineal que

intercambia los modos de enrollamiento $\mathbb{W} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}$, ó basta definir $\mathbb{W} = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$ [21], asociados geoméricamente a la cohomología de la variedad base $\Pi^1(\Sigma)$, con las cargas KK, $Q = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ relacionadas con la geometría mediante la homología de toro del target space $\Pi^0(T^2)$, junto con transformaciones del moduli real $R \rightarrow \tilde{R}\alpha^{\frac{1}{R}}$ y del moduli complejo $\tau \rightarrow \tilde{\tau}$, ambas no triviales.

Para ello introducimos las siguientes variables adimensionales

$$\mathcal{Z} \equiv T_{11}A\tilde{Y} ; \tilde{\mathcal{Z}} \equiv T_{11}\tilde{A}Y, \quad (6.2)$$

donde T_{11} es la tensión de la supermembrana, $A = (2\pi R)^2 \text{Im}\tau$ es el área del toro del target space y $Y = \frac{R \text{Im}\tau}{|q\tau - p|}$. Las variables con tilde son cantidades transformadas bajo T-dualidad. La transformaciones de T-dualidad para la supermembrana

$$\text{Moduli} : \quad \mathcal{Z}\tilde{\mathcal{Z}} = 1 \quad , \quad \tilde{\tau} = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \alpha}, \quad (6.3)$$

$$\text{Cargas} : \quad \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{q} \end{pmatrix} = \mathcal{T} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} \tilde{l}_1 \\ \tilde{m}_1 \end{pmatrix} = \mathcal{T}^{-1} \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

entonces la transformación de T-dualidad no cambia los toros, sino que intercambia las cargas y modifica los moduli asociados, de acuerdo a una matriz de T-dualidad $\mathcal{T} \in SL(2, Z)$ con iguales elementos en la diagonal

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} \in SL(2, Z). \quad (6.5)$$

La supermembrana presenta tres invarianzas $SL(2, Z)$, una asociada al toro de la base, otra asociada al toro del target space, y una tercera que intercambia las propiedades de los toros. Entonces la supermembrana T-dual corresponde a una nueva

supermembrana donde los modos de enrollamiento se intercambian con los de Kaluza Klein

$$\tilde{W} = \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{q} \end{pmatrix} = \mathcal{T}Q, \quad (6.6)$$

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{l}_1 \\ \tilde{l}_2 \end{pmatrix} = \mathcal{T}^{-1}W, \quad (6.7)$$

donde hemos definido un nuevo vector de winding y la transformación explícita de los moduli obtenida a partir de la transformación de T-dualidad es

$$\tilde{R} = \frac{|\gamma\tau + \alpha||q\tau - p|^{2/3}}{T_{11}^{2/3}(Im\tau)^{4/3}(2\pi)^{4/3}}, \quad (6.8)$$

$$\tilde{\tau} = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \alpha}, \quad (6.9)$$

$$\tilde{\mathcal{Z}}^3 = \frac{T_{11}R^3(Im\tau)^2}{|q\tau - p|}. \quad (6.10)$$

donde

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \quad (6.11)$$

Se puede ver que los modos de enrollamiento y las cargas de Kaluza-Klein, contribuyen en la transformación del operador de masa de la siguiente manera

$$T_{11}^2 n^2 A^2 = \frac{n^2}{\tilde{Y}^2} \mathcal{Z}^2, \quad (6.12)$$

$$\frac{m^2}{Y^2} = T_{11}^2 m^2 \tilde{A}^2 \mathcal{Z}^2. \quad (6.13)$$

Para ver como transforma el Hamiltoniano es importante ver como transforman los campos

$$dX^m = u d\tilde{X}^m, \quad (6.14)$$

$$d\tilde{X} = u e^{i\phi} dX, \quad (6.15)$$

$$A = u e^{i\phi} \tilde{A}, \quad (6.16)$$

$$\theta = u^{3/2} \tilde{\theta}, \quad (6.17)$$

$$\bar{\theta} = u^{3/2} \tilde{\bar{\theta}}, \quad (6.18)$$

donde ϕ representa una fase, y u viene dada por

$$u = \mathcal{Z}^2 = \frac{R|\gamma\tau + \alpha|}{\tilde{R}}, \quad (6.19)$$

además

$$dX = dX^1 + idX^2, \quad (6.20)$$

y su dual viene dado por

$$d\tilde{X} = 2\pi\tilde{R}[(\tilde{m}_1\tilde{\tau} + \tilde{l}_1)d\hat{X}^1 + (\tilde{m}_2\tilde{\tau} + \tilde{l}_2)d\hat{X}^2]. \quad (6.21)$$

La transformación del Hamiltoniano bajo T-dualidad es entonces

$$H = \frac{1}{\tilde{\mathcal{Z}}^8} \tilde{H} = \mathcal{Z}^8 \tilde{H}, \quad (6.22)$$

y por lo tanto encontramos la siguiente identidad concerniente al operador de masa de la supermembrana.

$$M^2 = T_{11}n^2A^2 + \frac{m^2}{Y^2} + T_{11}^{2/3}H = \frac{1}{\tilde{\mathcal{Z}}^2} \left(\frac{n^2}{\tilde{Y}^2} + T_{11}^2 m^2 \tilde{A}^2 \right) + \frac{T_{11}^{2/3}}{\tilde{\mathcal{Z}}^8} \tilde{H}. \quad (6.23)$$

Notamos que el operador de masa de la teoría dual será igual si $\mathcal{Z} = \tilde{\mathcal{Z}} = 1$ (tenemos relación entre la tensión de la supermembrana, las cargas de KK y el moduli) e intercambiamos los modos de enrollamiento con las cargas de Kaluza-Klein.

6.2. T-dualidad en fibrados toroidales simplécticos

La T-dualidad no actúa únicamente a nivel local en la supermembrana, también lo hace globalmente, relaciona la cohomología de la base con la homología del toro del target-space y lo hace actuando sobre los coinvariantes. Sabemos que en teoría de cuerdas las cargas de KK de la teoría dual son los modos de enrollamiento de la original y los modos de enrollamiento de la teoría dual son las cargas de KK de la original. Sin embargo en la transformación de las cargas bajo T-dualidad en la supermembrana

es suficiente el hecho que en la teoría dual, las cargas de winding y KK estén en la misma clase de equivalencia que en la teoría original. En las supermembranas sin carga central, la T-dualidad siempre se presenta ya que el fibrado toroidal es trivial.

La no trivialidad del pegado del Toro del target space a la variedad base implica una monodromía del grupo de cohomología de la base al grupo fundamental de la fibra

$$M_\rho = \Pi^1(\Sigma) \rightarrow \Pi^0(F), \quad (6.24)$$

que es el grupo de simplectomorfismos (que caracteriza los fibrados toroidales) asociados al toro del target space, en consecuencia

$$M_\rho = \Pi^1(\Sigma) \rightarrow SL(2, \mathbb{Z}), \quad (6.25)$$

y tenemos varias clases de monodromía relacionadas con los subgrupos invariantes de $SL(2, \mathbb{Z})$, la monodromía M_ρ será: Hiperbólica si $\text{Tr}\mathcal{T} > 2$, Parabólica si $\text{Tr}\mathcal{T} = 2$ y Elíptica si $\text{Tr}\mathcal{T} < 2$. La T-dualidad transforma la monodromía M_ρ en una monodromía dual $M_{*\rho}$ en la misma clase de equivalencia.

Es posible caracterizar las clases inequivalentes de fibrados, cada una con distintas implicaciones físicas, mediante el segundo grupo de homología sobre la base $H^2(\Sigma, \mathbb{Z}_M^2)$ donde \mathbb{Z}_M^2 son los enteros asociados a los momentos de KK y los modos de enrollamiento de la supermembrana, pero también es posible hacerlo mediante el grupo de coinvariantes definidos para la fibra y la base como

$$C_F = \{Q_0 + (M_G - \mathbb{I})\hat{Q}\}, \quad (6.26)$$

$$C_B = \{W + (M_G * -\mathbb{I})\hat{W}\}, \quad (6.27)$$

respectivamente, y están relacionados con el grupo de monodromía M_G , \hat{Q} y \hat{W} son cargas arbitrarias y $M_{G*} = \Omega M_G \Omega^{-1}$ con $\Omega = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, es una monodromía inducida en la variedad base y reside en la misma clase de conjugación de M_G . M_{G*} actúa sobre los campos, que son secciones del fibrado toroidal simpléctico mediante

una matriz θ que aparece en la derivada covariante simpléctica \mathcal{D}_r del hamiltoniano H . Por lo tanto podemos clasificar a los fibrados toroidales simplécticos asociados a las supermembrana mediante los siguientes invariantes (M_G, C_F) o equivalentemente (M_{G^*}, C_B) .

La transformación de T-dualidad en la supermembrana, además de actuar sobre el hamiltoniano H y el operador de masa M^2 , actúa también sobre los invariantes topológicos del fibrado toroidal con monodromía $SL(2, \mathbb{Z})$ que describen la teoría. Globalmente, transforma un fibrado toroidal simpléctico en su dual, intercambiando las cargas de cohomología del toro de la base (Σ) con las cargas de homología del toro de la fibra (T^2) y transformando los moduli que parametrizan la variedad, pero también intercambia las clases de coinvariantes de la base y la fibra en el fibrado T-dual

$$(C_F, C_B) = (\tilde{C}_B, \tilde{C}_F). \quad (6.28)$$

Si la monodromía es trivial, $M_G = \mathbb{I}$, las clases de coinvariantes, que clasifican fibrados toroidales inequivalentes, tienen solo un elemento \mathcal{Q} en el sector de Kaluza Klein y un elemento en el sector de Winding. La transformación de T-dualidad está definida en términos de una matriz \mathcal{T} de $SL(2, \mathbb{Z})$ con iguales elementos en la diagonal, definida anteriormente.

$$W = \mathcal{T}Q \quad (6.29)$$

Se considera ahora el caso en que el grupo de monodromía es no trivial, en particular, un subgrupo abeliano de $SL(2, \mathbb{Z})$. La transformación de T-dualidad mapea clases de coinvariantes del sector Kaluza Klein en clases de coinvariantes del sector de Winding, es decir que no necesariamente presenta dichas clases ya que el operador de T-dualidad no necesariamente conmuta con la monodromía.

$$[Q] \rightarrow [\tilde{Q}] = [W], \quad (6.30)$$

$$[W] \rightarrow [\tilde{W}] = [Q], \quad (6.31)$$

si bien el generador de la monodromía puede ser hiperbólico, parabólico o elíptico, se encuentra que la monodromía parabólica es la única que preserva las clases de coinvariantes. Con la única excepción de la supermembrana con cargas centrales y $n = 1$, en ese caso todas las transformaciones de T-dualidad son permitidas.

Entonces la T-dualidad, además de la transformación de los moduli de la teoría R y τ , mapea las estructura geométricas de los toros pero no intercambia los toros entre sí, por ejemplo no intercambia curvaturas.

CONCLUSIONES

En este trabajo se realizó una revisión bibliográfica de dos teorías invariantes bajo T-dualidad como la teoría de campo doble y la supermembrana para estudiar y comprender sus formulaciones, con el fin de obtener información sobre la denominada Teoría M. Además de realizar una comparación cualitativa de los aspectos globales de ambas teorías.

Las dualidades son muy importantes en teorías de cuerdas pues relacionan las 5 teorías de supercuerdas conocidas entre sí y permite que se interpreten como distintos límites de una única teoría en 11 dimensiones, la mencionada teoría M. En particular la T-dualidad requiere que objetos extendidos se enrollen en dimensiones compactificadas del espacio-tiempo. Es conocido que la teoría efectiva de la teoría M es la supergravedad en 11 dimensiones, la cuál es única y maximal, y que mediante reducciones dimensionales se pueden obtener las diferentes supergravedades existentes en 10 dimensiones, relacionadas con el límite efectivo de cada teoría de cuerdas, además de algunas deformaciones masivas o calibradas en el sector tipo II. Debido a que la T-dualidad requiere que al menos una dirección esté compactificada, se puede demostrar que en 9 dimensiones existe una única supergravedad maximal y 8 deformaciones masivas o calibradas si nos restringimos al sector de tipo II.

La supergravedad es una teoría de campos gravitatoria supersimétrica que transforma bajo T-dualidad. La teoría de campo doble es una reformulación de la supergravedad invariante bajo T-dualidad. Para ello, se duplican los grados de libertad de la teoría para lograr modelar los efectos de una propiedad característica de objetos extendidos en una teoría de partículas puntuales. En uno de los casos más simples, como la compactificación toroidal de n dimensiones en una teoría de cuerdas bosónica, se hace explícito el grupo asociado a la T-dualidad $O(n, n, \mathbb{Z}) \in O(D, D, \mathbb{R})$, donde D son las dimensiones del espacio-tiempo y n son el número de direcciones compactificadas. Se encuentra por lo tanto que hay un número de enrollamiento asociado a las direcciones compactas y que el momentum a lo largo de la dirección de compactificación está cuantizado. Entonces, se plantea que existen unas coordenadas duales cuyo momento canónico conjugado es el número de enrollamiento mediante las coordenadas generalizadas (4.44) que consideran coordenadas duales a las direcciones no compactas por completitud, posteriormente se construye una acción de tipo Einstein-Hilbert invariante bajo transformaciones de tipo $O(D, D)$ y en consecuencia, invariante bajo T-dualidad. Finalmente, se impone una restricción conocida como la ligadura fuerte la cual permite que la teoría de campo doble contenga los grados de libertad físicos pese a la introducción de coordenadas extra. En general los campos de la teoría dependerán de las coordenadas del subespacio D-dimensional que será una combinación lineal de las coordenadas originales y sus duales. Cuando las coordenadas resultantes son únicamente las originales, se dice que el marco resultante es la supergravedad.

La formulación global de la teoría de campo doble viene dada en términos de fibrados toroidales, donde el espacio-tiempo N , en principio no compacto, es la variedad base, y la fibra consiste en un toro $T^{2D} = T^D \times \tilde{T}^D$ donde D es la dimensión del espacio total, por lo tanto el toro de la fibra está formado por las D dimensiones originales y las D duales. Se considera como espacio físico M un D -toro fibrado sobre N y se denota como \tilde{M} al toro T^{2D} fibrado sobre N y formado por el D -toro asociado al espacio físico y uno asociado a las coordenadas duales. Las funciones de transición entre las

cartas pertenecen en general al grupo de los difeomorfismos grandes $GL(2D, \mathbb{Z})$ y cada toro está parametrizado con un R y un parámetro de Teichmüller τ , (\tilde{R} y $\tilde{\tau}$ para el toro dual), en este caso se dice que la formulación es geométrica. En este caso las monodromías de cada toro son diferentes pero pertenecen ambas a $GL(D, \mathbb{Z})$. En el caso en el que se consideran funciones de transición que pertenezcan al grupo de T-dualidad $O(D, D, \mathbb{Z}) \in GL(2D, \mathbb{Z})$, se dice que el fibrado toroidal tiene monodromía $O(D, D, \mathbb{Z})$ no trivial pues pertenece al grupo de los difeomorfismos grandes. Entonces existe una fibración de \tilde{M} sobre M , es decir una fibración de toro sobre toro y la formulación es no geométrica. Bajo la acción de la T-dualidad se intercambian los toros, geoméricamente los moduli y las coordenadas, y también la monodromía. El análogo de la ligadura fuerte en la descripción local es la polarización, que fija los grados de libertad de la teoría mediante la elección del subespacio físico D-dimensional de T^{2D} , en general puede ser una combinación del toro original y el dual, pero en el caso particular en que el espacio físico sea el toro original se dice, al igual que en el caso local, estamos en el marco de supergravedad.

La Teoría de la supermembrana representa un sector de la teoría M , además la M2-brana es la fuente de la supergravedad en 11 dimensiones y se pueden obtener a partir de su acción todas las teorías de cuerdas. Si se impone una restricción topológica conocida como la condición de carga central, asociada al enrollamiento irreducible de la supermembrana en la variedad de compactificación, entonces se encontró que tiene espectro discreto y en consecuencia puede representar los grados de libertad microscópicos de la teoría. Al compactificar la supermembrana en $M_9 \times T^2$, se verifica a nivel local la invariancia bajo T-dualidad en el Hamiltoniano y el operador de masa de la teoría si $\mathcal{Z} = 1$ (6.23), es decir estableciendo una relación particular entre la tensión de la supermembrana, las cargas de KK y los moduli geométricos, además de intercambiar los modos de enrollamiento con las cargas de KK. La formulación global de toda la supermembrana compactificada en un background tipo $M_9 \times T^2$ está naturalmente descrita en términos de fibrados toroidales simplécticos. Esta formulación

es totalmente geométrica y se plantea desde el punto de vista del volumen de mundo, por lo tanto la variedad base es la superficie de Riemann compacta asociada a las coordenadas espaciales del volumen de mundo σ_1, σ_2 , que elegimos que tenga genus igual a uno y denotamos como Toro de la base, y los campos dependen de estas coordenadas, la fibra es $M_9 \times T^2$, donde el 2-toro de la fibra es un toro plano a diferencia del toro de la base. Las funciones de transición entre las cartas vienen dadas por el grupo de simplectomorfismos que preservan la 2-forma simpléctica, que en este caso es el grupo de difeomorfismos que preservan el área y el fibrado puede considerarse como un fibrado simpléctico trivial de un toro sobre toro en el caso de la supermembrana sin carga central. Cuando la carga central es distinta de cero, condición que se asocia a un enrollamiento irreducible de la supermembrana alrededor de la variedad de compactificación, se puede considerar como un fibrado toroidal simpléctico no trivial sobre un toro, donde ambos toro poseen una monodromía en $SL(2, \mathbb{Z})$, subgrupo de $GL(2, \mathbb{Z})$. Los fibrados toroidales simplécticos pueden ser clasificados en clases inequivalentes mediante las clases de coinvariantes, por lo tanto la descripción global de la M2-brana puede especificarse mediante los coinvariantes (C_B, C_F) que están definidos en términos de dos monodromías diferentes (M_B, M_F) , las cuales pueden ser triviales ó pertenecer a una de las clases relacionadas con los subgrupos invariantes de $SL(2, \mathbb{Z})$. Los índices B y F están asociados a la base y la fibra respectivamente. La acción global de la T-dualidad mapea clases equivalentes de fibrados en sus duales, intercambiando las cargas de KK asociadas a la homología del toro de la fibra con la cohomología del toro de la base asociada a los números de enrollamiento y la geometría del toro de la fibra en su dual y se modifican los moduli asociados mediante una matriz de T-dualidad. La geometría de los toros no se ve afectada bajo una transformación de T-dualidad. Globalmente la invariancia ocurre únicamente cuando hay monodromía parabólica pues preserva las clases de fibrados. Aunque las monodromías de la fibra y de la base también se intercambian, la monodromía dual reside en la misma clase de conjugación que la original, pero en general, no se preservan los coinvariantes que definen clases inequivalentes de fibrados. La estructura global está siempre bien

definida pues el pegado de las cartas es siempre geométrico. En la supermembrana, vimos que hay una invariancia de tipo $SL(2, \mathbb{Z})$ intrínsecas a los toros, por lo tanto globalmente se tiene que una simetría de tipo $SL(2, \mathbb{Z})_{\Sigma} \times SL(2, \mathbb{Z})_{T^2} \times Z_2$ en el fibrado de la M2-brana, donde Z_2 está asociado a una transformación discreta que representa el intercambio de las cargas de KK con los modos de enrollamiento.

Aunque el caso más simple de entender es aquel en que la fibra asociada a la formulación global de la teoría de campo doble está formada por un $T^2 = S^1 \times S^1$, para poder realizar una comparación entre ambas formulaciones, revisemos el caso particular en que la teoría de campo doble es descrita globalmente mediante un fibrado toroidal $T^4 = T^2 \times T^2$ con monodromía $O(2, 2, \mathbb{Z})$, el grupo de T-dualidad de la teoría puede descomponerse en $SL(2, \mathbb{Z})_{\tau} \times SL(2, \mathbb{Z})_{\rho} \times Z_2 \times Z_2$, donde τ es el parámetro de Teichmüller asociado al T^2 de la fibra y ρ es el parámetro complejo de Kahler que parametriza el toro dual \tilde{T}^2 y Z_2 son simetrías discretas que actúan en ambos parámetros de la siguiente manera [53]

$$\tau \leftrightarrow \rho \text{ y } (\tau, \rho) \rightarrow (-\bar{\tau}, -\bar{\rho})$$

En consecuencia, en ambas teorías tenemos simetrías $SL(2, \mathbb{Z})$ intrínsecas a los toros y la transformación de las variables que los parametrizan, puesto que en la supermembrana, existe una invarianza del fibrado toroidal bajo $SL(2, \mathbb{Z})_{\Sigma} \times SL(2, \mathbb{Z})_{T^2} \times Z_2$ donde la acción de Z_2 está relacionada con el intercambio de las estructuras globales e invariantes topológicos mencionados anteriormente.

Pese a las diferencias entre ambas teorías, notamos existen semejanzas muy relevantes en las formulaciones globales de ambas, posiblemente debido a que la teoría de campo doble es una teoría efectiva que tiene un origen en las teorías de cuerdas, y el acoplo fuerte de estas es la teoría M, descrita por la teoría de supermembranas. Las dos teorías manifiestan simetrías similares realizadas de maneras diferentes, las cargas asociadas al enrollamiento están presentes en el volumen de mundo asociado

al toro de la base en la supermembrana, y al toro dual en la teoría de campo doble. En las dos formulaciones globales están presentes dos toros, uno asociado a los modos de enrollamiento y otro asociado al target-space, en el caso de la supermembrana el toro asociado a los modos de enrollamiento es la base del fibrado toroidal simpléctico formado por las coordenadas espaciales de las supermembrana, mientras que en la teoría de campo doble es el toro formado por las coordenadas duales. Bajo la acción de la T-dualidad en la supermembrana sólo son intercambiadas las cargas mientras que la geometría permanece invariante, mientras que en la teoría de campo doble los dos toros son intercambiados. En ambos casos las monodromías asociadas con cada toro se intercambian bajo la T-dualidad, aunque en el caso de la supermembrana reside en la misma clase de equivalencia. Las dos teorías presentan una simetría de tipo $O(2, 2, \mathbb{Z})$. En general, la teoría de campo doble está relacionada con entornos no geométricos, mientras que la descripción de la supermembrana es siempre geométrica y está bien definida globalmente.

Se puede inferir de este análisis cualitativo una más profunda relación entre estas teorías y mediante la comparación de las formulaciones globales, se puede plantear la posibilidad que la teoría de campo doble (reformulación del límite a bajas energías de las teorías de cuerdas invariante bajo T-dualidad), sea la versión efectiva de la teoría de la supermembrana, fuente de la supergravedad en 11 dimensiones y relacionada con un sector de la teoría M.

APÉNDICE A

FIBRADOS

Sea $A = \{X, \Theta, \chi\}$ una variedad diferenciable n -dimensional donde X es un conjunto no vacío, Θ es una topología de X y χ es una estructura diferencial de clase c^l sobre X [60].

Para describir un fibrado [61] necesitamos las siguientes variedades diferenciables

- $M \longrightarrow$ Espacio base.
- $B \longrightarrow$ Espacio total.
- $F \longrightarrow$ Fibra.
- $G \longrightarrow$ Grupo de estructura.

Dado que el grupo de estructura G está representado efectivamente en la fibra F , para cada $g \in G$ tenemos un difeomorfismo

$$\rho_g : F \rightarrow F, \tag{A.1}$$

permitiendo así identificar g con ρ_g . Además necesitamos un mapa (diferenciable) sobreyectivo tal que cumpla

$$\pi : B \rightarrow M \mid \pi^{-1}(x) = F_x \cong F, \forall x \in M, \quad (\text{A.2})$$

al cual denominaremos proyección, tal que la fibra sobre x , es diffeomorfa a F para todo $x \in M$. Exigimos además que el fibrado sea localmente trivial, esto es

$$\exists \{U_r\} \subset M \mid \pi^{-1}(U_r) \cong U_r \times F, \quad (\text{A.3})$$

vía el diffeomorfismo

$$\phi_r^{-1} : \pi^{-1}(U_r) \rightarrow U_r \times F, \quad (\text{A.4})$$

$$p(p \in B) \rightarrow (\pi(p), f_r(p)), \quad (\text{A.5})$$

donde

$$f_r : \pi^{-1}(U_r) \rightarrow F, \quad (\text{A.6})$$

por lo tanto, la fibra sobre el abierto de la base, $\pi^{-1}(U_r)$ puede ser identificado con el producto cartesiano $U_r \times F$. Al diffeomorfismo (5.4) se le denomina trivialización local y al abierto U_r vecindad trivializadora.

Restringiendo el mapa f_r a la fibra sobre $x \in M$, obtenemos el siguiente diffeomorfismo

$$f_{r,x} : \pi^{-1}(x) \rightarrow F, \quad (\text{A.7})$$

identificando $\pi^{-1}(x)$ con la fibra estándar. Notamos que esta identificación es no canónica, pues para $x \in U_r \cap U_s$, tenemos dos identificaciones diferentes relacionadas por el diffeomorfismo

$$f_{s,x} \circ f_{r,x}^{-1} : F \rightarrow F, \quad (\text{A.8})$$

que se requiere corresponda a un elemento de $g_{sr}(x)$ del grupo de estructura G vía la representación ρ . Las funciones de transición se definen entonces como

$$g_{sr} : U_r \cap U_s \rightarrow G, \quad (\text{A.9})$$

$$x \rightarrow g_{sr}(x), \quad (\text{A.10})$$

donde

$$\rho(g_{sr}(x)) = f_{s,x} \circ f_{r,x}^{-1} \quad \text{ó} \quad \rho(g_{sr}(x))f_{r,x}(p) = f_{s,x}(p), \quad (\text{A.11})$$

para $p \in \pi^{-1}(x)$. Los mapas g_{sr} deben ser suaves e indicar como los espacios $U_r \times F$ y $U_s \times F$, (identificados como una parte del fibrado) deben ser pegados. Además satisfacen la llamada condición de cociclos

$$g_{sr}(x)g_{rt}(x) = g_{st}(x), \quad (\text{A.12})$$

para $x \in U_r \cap U_s \cap U_t$.

Denotaremos al fibrado que acabamos de describir mediante (M, π, B) , y será llamado un fibrado trivial si M es una vecindad trivializadora, entonces puede ser identificado con el producto cartesiano $M \times F$. Existen muchos tipos diferentes de fibrados. Mencionaremos dos casos importantes.

- Fibrados vectoriales: Las fibras son espacios vectoriales, el grupo de estructura es un subgrupo de $GL(F)$, y los diffeomorfismos $f_{r,x}$ son isomorfismos del espacio vectorial.
- Fibrados principales: En este caso la fibra es el grupo de estructura $F = G$, y G debe ser representado en sí mismo por la translación izquierda $\rho_g = L_g$.
- Fibrados toroidales simplécticos [19]: La fibra es un 2-toro T^2 y el grupo de estructura es el grupo de simplectomorfismos que preservan la forma simpléctica en T^2 .

A.1. Acción por la derecha del grupo de estructura en un fibrado principal.

En un fibrado principal tenemos una acción natural del grupo de estructura G por la derecha, denotada por

$$\tilde{R}_g : P \rightarrow P, \quad g \in G, \quad (\text{A.13})$$

y definida de la siguiente forma. Sea U_r un cubrimiento de abiertos de M consistente en vecindades trivializadoras. Para $p \in \pi^{-1}(x)$ con $x \in U_r$ y $g_r = f_{r,x}(p) \in G$, entonces se define

$$(\tilde{R}_g)_r := f_{r,x}^{-1}(R_g g_r) = f_{r,x}^{-1}(g_r g), \quad (\text{A.14})$$

esto es, bajo una trivialización local, identificando la fibra sobre x con G , la acción derecha \tilde{R} corresponde a la traslación derecha.

Hemos agregado un subíndice r a \tilde{R}_g porque hemos usado una trivialización del fibrado sobre U_r . Para demostrar que es independiente de la trivialización escogida, tomamos $x \in U_r \cap U_s$ y $p \in \pi^{-1}(x)$, entonces bajo trivializaciones locales U_r y U_s , el punto p corresponde a g_r y g_s respectivamente

$$g_r = f_{r,x}(p) \text{ y } g_s = f_{s,x}(p), \quad (\text{A.15})$$

los elementos del grupo de estructura g_r y g_s representando el mismo $p \in P$ están relacionados por la función de transición g_{rs}

$$g_r = f_{r,x}(f_{s,x}^{-1}(g_s)) = g_{rs}(x)g_s, \quad (\text{A.16})$$

por lo tanto

$$(\tilde{R}_g p)_s = f_{s,x}^{-1}(g_s g) = f_{r,x}^{-1} \circ f_{r,x} \circ f_{s,x}^{-1}(g_s g), \quad (\text{A.17})$$

$$= f_{r,x}^{-1}(g_{rs}(x)g_s g) = f_{r,x}^{-1}(g_r g) = (\tilde{R}_g p)_r. \quad (\text{A.18})$$

Notamos como, que $\tilde{R}_g p$ sea independiente de la trivialización local, está conectado con el hecho que el grupo de estructura G está representado en la fibra estándar ($= G$) por la traslación izquierda. También, \tilde{R}_g traza un mapa de cada fibra en sí misma

$$\pi(\tilde{R}_g p) = \pi(p), \quad (\text{A.19})$$

y describe una acción libre y transitiva de G sobre $\pi^{-1}(x)$ para todo $x \in M$.

A.2. Mapas de fibrados

Sean (P, M, π) y (P', M', π') dos fibrados principales con grupos de estructura G, G' respectivamente. Un mapa de fibrados es un triplete de mapas (f_P, φ, f_M)

$$f_P : P \rightarrow P', \quad (\text{A.20})$$

$$\varphi : G \rightarrow G', \quad (\text{A.21})$$

$$f_M : M \rightarrow M', \quad (\text{A.22})$$

tal que

- φ es un homomorfismo de grupos.
- $f_M \circ \pi = \pi' \circ f_P$.
- $f_P \circ \tilde{R}_g = \tilde{R}_{\varphi(g)} \circ f_P, \forall g \in G$.

La segunda condición puede ser expresada mediante un diagrama de conmutación y significa que cada fibra de P es mapeada en una fibra de P' .

Sean (E, M, π) y (E', M', π') dos fibrados vectoriales. Definimos el mapa de fibrados como el par de mapas (f_E, f_M)

$$f_E : E \rightarrow E', \quad (\text{A.23})$$

$$f_M : M \rightarrow M', \quad (\text{A.24})$$

tal que las fibras son mapeadas en las fibras, y en consecuencia podemos tener un diagrama de conmutación análogo al anterior. Si los mapas que definen un mapa de fibrados son diffeomorfismos, es llamado un isomorfismo de fibrados.

A.3. Fibrados Asociados

Sea (M, π_B, B) un fibrado con fibra estándar F , y (P, M, π) un fibrado principal, ambos con el mismo espacio base M y el mismo grupo de estructura G . Entonces se dice que B está asociado a P , si existe un cubrimiento de abiertos $\{U_r\}$ de M que consiste en vecindades que trivializan tanto a P como a B tal que las funciones de transición correspondientes para P y B coincidan.

A.4. Secciones

Una sección de un fibrado es un mapa $\sigma : M \rightarrow B$ tal que $\pi \circ \sigma = id_M$, es decir, $x \in M$ es mapeado en un punto $\sigma(x)$ en la fibra sobre x . Si la fibra estándar de nuestro fibrado es F , entonces, bajo una trivialización local

$$\pi^{-1}(U_r) \rightarrow U_r \times F, \quad (\text{A.25})$$

$$p \rightarrow (\pi(p), f_r(p)), \quad (\text{A.26})$$

tenemos que, para $x \in U_r$

$$\sigma(x) \rightarrow (\pi(\sigma(x)), f_r(\sigma(x))) = (x, f_r \circ \sigma(x)). \quad (\text{A.27})$$

Así que, una sección puede ser descrita localmente por una función F -evaluada en el espacio base, $f_r \circ \sigma$. Estas funciones locales son pegadas mediante las funciones de transición. Para $x \in U_r \cap U_s$

$$(f_s \circ \sigma)(x) = f_{s,x}(\sigma(x)) = \rho(g_{sr}(x))f_{r,x}(\sigma(x)), \quad (\text{A.28})$$

$$= \rho(g_{sr}(x))(f_r \circ \sigma)(x), \quad (\text{A.29})$$

donde ρ es la representación de G en F .

Las secciones locales, definidas son en subconjuntos de M , existen siempre. Sea, por ejemplo, $h : U_r \rightarrow F$ un mapa arbitrario. Entonces

$$U_r \rightarrow \pi^{-1}(U_r), \quad (\text{A.30})$$

$$x \rightarrow f_{r,x}^{-1}(h(x)), \quad (\text{A.31})$$

es una sección sobre U_r . Secciones definidas en todo el espacio base no existen necesariamente. Sin embargo, cualquier fibrado vectorial (E, M, π) admite secciones. Sea, por ejemplo, $\{U_r\}$, un cubrimiento localmente finito de vecindades trivializadoras de M , $\{h_r\}$ una partición de la unidad subordinada a ese cubrimiento y $\{\sigma_r\}$ una familia de secciones locales

$$\sigma_r : U_r \rightarrow \pi^{-1}(U_r), \quad (\text{A.32})$$

entonces

$$\sigma(x) := \sum_r h_r(x) \sigma_r(x), \quad (\text{A.33})$$

define una sección de E . Notamos como la estructura de espacio vectorial de la fibra entra en la construcción. En particular tenemos la sección cero

$$x \rightarrow 0 \in \pi^{-1}(x), \quad (\text{A.34})$$

que está bien definido pues cero es invariante bajo la acción del grupo de estructura. Para fibrados principales la situación es diferente, pues por teorema, un fibrado principal (P, M, π) es trivial si y sólo si posee una sección.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Abellán G., García del Moral M.P., las Heras C., Peña J. & Restuccia A., (2017) *On Global aspects of duality invariant theories: M2-brane vs DFT* J. Phys. Conf. IOP, (hep-th/170600345).
- [2] Dirac P. A. M., (1962) *An Extensible Model of the Electron*. Proc. R Soc. **A268** 57, (DOI:10.1098/rspa.1962.0124).
- [3] Veneziano G., (1968) *Construction of a crossing-symmetric, Reggeon-behaved amplitude for linearly rising trajectories*. Il Nuovo Cimento, **A57**, 190-197, (DOI:10.1007/bf02824451).
- [4] Nambu, Y. (1970) *Quark model and the factorization of the Veneziano amplitude*. Proc. Int. Conf on Symmetries and quark models, ed R. Chand, New York, Gordon and Breach 269-277, (DOI:10.1142/9789812795823)
- [5] Nielsen, H. B. (1969) *An almost physical interpretation of the dual N point function*. Nordita (preprint; unpublished).
- [6] Susskind, L. (1969) *Structure of hadrons implied by duality*. Phys. Rev. D, 1(4), 1182-1186,(DOI:10.1103/physrevd.1.1182)

-
- [7] M. Abou-Zeid, B. de Wit, D. Lust & H. Nicolai, (1999) *Space-time supersymmetry, IIA/B Duality and M Theory* Phys. Lett. **B466** 144-152, (hep-th/9908169)
- [8] Font, A., Ibáñez, L. E., Lust, D., & Quevedo, F. (1990) *Strong-weak coupling duality and non-perturbative effects in string theory.* Phys. Lett. B, **249**(1), 35-43. (DOI:10.1016/0370-2693(90)90523-9)
- [9] A. Giveon, M. Porrati and E. Rabinovici, (1994) *Target Space Duality in String Theory* Phys. Rep. 244. (hep-th/9401139)
- [10] Witten E., (1995) *String Theory Dynamics In Various Dimensions*, Nuclear Physics **B443** 85-126. (hep-th/9503124)
- [11] Witten E., & Horava P, (1995) *Heterotic and type I string dynamics from eleven dimensions* (hep-th/9510209)
- [12] C.M. Hull., & P.K. Townsend, (1995) *Unity of superstring dualities*, Nucl. Phys. **B438** 109. (hep-th/9410167)
- [13] Bergshoeff E., Sezgin E. & Townsend P.K., (1987) *Supermembranes and Eleven-Dimensional Supergravity.* Phys. Lett. B **189**, 75-8. (DOI:10.1016/0370-2693(87)91272-x)
- [14] Collins P. A., & Tucker R.W., (1976) *Classical and Quantum Mechanics of Free Relativistic Membranes.* Nucl. Phys., B 112:150. (DOI:10.1016/0550-3213(76)90493-4)
- [15] J. Hughes, J. Liu & J. Polchinski , (1986) *Supermembranes* Phys. Lett. **B180** 370 (DOI: 10.1016/0370-2693(86)91204-9)
- [16] Bergshoeff, E., Sezgin, E., & Townsend, P. K. (1988) *Properties of the eleven-dimensional supermembrane theory.* Annals of Physics, **185**(2), 330-368. (DOI:10.1016/0003-4916(88)90050-4)

-
- [17] W. Siegel, (1983) *Hidden local supersymmetry* Phys. Lett. **B128** 397 (DOI: 10.1016/0370-2693(83)90924-3)
- [18] Martín I., Restuccia A. & Torrealba R., (1998) *On the stability of compactified $D = 11$ supermembranes: Global aspects of the bosonic sector*. Nuclear Physics B, **521**, 117-128,(hep-th/9706090).
- [19] García del Moral M.P., Martín I., Pena J.M. & Restuccia A. (2011) *$SL(2,Z)$ Symmetries, Supermembranes and Symplectic Torus Bundles*. JHEP 09 **068**[hep-th/1105.3181].
- [20] García del Moral M.P., Pena J.M. & Restuccia A.(2013) *T-Duality Invariance of the Supermembrane*. Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **10** 1360010,(hep.th 1211.2434).
- [21] García del Moral M, Pena J, Restuccia A (2016) *T-duality invariance, M2-brane bundles and type II classification of gauged supergravities* (hep-th/1604.02579)
- [22] Hull C. & Zwiebach B, (2009) *Double Field Theory*, JHEP 09 **099** [hep-th/0904.4664].
- [23] Uranga A., *Introduction to String Theory*, Graduate Course in String Theory. Recuperado de <http://members.ift.uam-csic.es/auranga/firstpage.html>.
- [24] Font A., *Introduction to Bosonic Strings*. Recuperado de <http://fisica.ciens.ucv.ve/~afont/afont.html>.
- [25] Zwiebach B., (2004) *A First Course in String Theory*. Cambridge University Press.
- [26] Ibanez E. L. & Uranga A., (2012) *String Theory and Particle Physics: An introduction to String Phenomenology*. Cambridge University Press.
- [27] Green, M.B., Schwarz, J.H., Witten, E., *Superstring theory* Volume 1 and 2, Cambridge monographs on mathematical physics, Cambridge University Press.

-
- [28] Polchinski J., (1998) *String Theory, Superstring Theory and Beyond*. Cambridge University Press, Volumen I y II.
- [29] Ramond P., (1971) *Dual Theory for Free Fermions*, Phys. Rev. **D3** 2415. (DOI: 10.1103/PhysRevD.3.2415)
- [30] Neveu A., Schwarz J. (1971) *Factorizable Dual Model of Pions*, Nucl. Phys. **B31**, 86, (DOI:10.1016/0550-3213(71)90448-2)
- [31] Hooft. Gerard't.,(2004) *Introduction to String Theory*. Utrecth University.
- [32] Pena J.M. & García del Moral M.P., (2013)*Sobre la Supermembrana con Cargas Centrales y la Supergravedad Calibrada*. Tesis Doctoral, Universidad Central de Venezuela.
- [33] Tong. David., (2009) *String Theory*. DAMTP Cambridge University.
- [34] Becker K., Becker M. & Schwarz J., (2007) *String Theory and M-Theory. A Modern Introduction*. Cambridge University Press.
- [35] García del Moral M. P.,(2012) *Dualities as symmetries of the Supermembrane Theory*, (hep-th/12116265).
- [36] Duff M. J., (1999) *The World in Eleven Dimensions*. University of Michigan, Volumen 1.
- [37] Tanii Y., (2014)*Introduction to Supergravity*. Springer.
- [38] Bergshoeff E., de Wit., Gran U., Linares R. & Roest D.,(2002) *(Non-)Abelian Gauged Supergravities in Nine Dimensions*. JHEP 0210 **061**. (hep-th/0209205).
- [39] Howe P.S., Lambert N.D. & West P.C., (1998) *A new massive type IIA supergravity from compactification*. Physics Letters B, 0370-2693. (hep-th/9707139)
- [40] Hull C.M., (2004) *Gauged $D = 9$ Supergravities and Scherk-Schwarz Reduction*. Class. Quant. Grav. 21 no.2, 509-516. (DOI:10.1088/0264-9381/21/2/014)

-
- [41] Berman D.S, Musaev E,T & Thompson D.C. (2012) *Duality invariant M-theory: Gauged Supergravities and Scherk-Schwarz reductions*. JHEP 10 **174**. (DOI:10.1007/jhep10(2012)174)
- [42] A. A. Tseytlin, (1990)*Duality Symmetric Formulation Of String World Sheet Dynamics* Phys. Lett. **B242**, 163. (DOI: 10.1016/0370-2693(90)91454)
- [43] A. A. Tseytlin, (1991)*Duality Symmetric Closed String Theory And Interacting Chiral Scalars* Nucl. Phys. **B350**, 395. (DOI:10.1016/0550-3213(91)90266)
- [44] Siegel W., (1993) *Superspace Duality in Low-Energy Superstrings* Phys.Rev. **D48** 2826-2837, (hep-th/9305073)
- [45] Chaemjurus N. & Hull C. (2014)*Non Geometric Flux and Double Field Theory*. Master Thesis, Imperial College, . London
- [46] Aldazábal G., Marqués D. & Nunez C., (2013) *Double Field Theory: A Pedagogical Review*, Class. Quant. Grav. 30 1630 01(hep-th/1305.1907).
- [47] Cheng H K. & Hull C, (2015) *Topics in String Theory and Double Field Theory*. Master Thesis, Imperial College London.
- [48] Ziogas V. & Hull C., (2013) *Generalized Geometry and Double Field Theory*. Master Thesis, Imperial College London.
- [49] HaBler F., *Double Field Theory on Group Manifolds*. PhD Thesis, (hep-th 1509.07153).
- [50] Thompson D., (2011) *Duality Invariance: From M-theory to Double Field Theory*, D.C. JHEP 08 **125** (hep-th/1106.4036).
- [51] C. M. Hull, (2005)*A geometry for non-geometric string backgrounds*. JHEP 0510:065. (hep-th/0406102).
- [52] A. Flournoy, B. Wecht, B. Williams, (2005) *Constructing non-geometric vacua in string theory*, Nuclear Physics B **706** 127-149, (hep-th/0404217)

-
- [53] Lust D, Massai S, Vall Camell V (2016) *The monodromy of T-folds and T-fects* JHEP 1609 **127** (hep-th/1508.01193)
- [54] Dabholkar A., & Hull C, (2002) *Duality Twists, Orbifolds, and Fluxes* JHEP 0309 **054** (hep-th/0210209)
- [55] Nicolai H. & Helling R., *Supermembranes and M(atrix) Theory*. (1998), Nonperturbative aspects of strings, branes and supersymmetry, 29-74 AEI-093, (hep-th/9809103).
- [56] de Wit B., Hoppe J. & Nicolai H., (1988) *On the Quantum Mechanics of Supermembranes*. Nuclear Physics B 305 **FS23**, 545-581.
- [57] de Wit B, Peeters K and Plefka J (1997) *Supermembranes with winding* Phys. Lett. B 409 117-123 (hep-th/9705225)
- [58] Kahn P., (2004) *Symplectic torus bundles and group extensions*. (hep-th/0405109).
- [59] García del Moral M.P., *Non perturbative $SL(2, Z)$ (p, q) -strings manifestly realized on the quantum $M2$* . (hep-th/0802.0573) .
- [60] Nakahara M., (2003) *Geometry, Topology and Physics*. Institute of Physics Publishing, 2nd Edition.
- [61] Goeckler M., & Schucker T. (1987) *Differential Geometry, Gauge Theories, and Gravity*. Cambridge University Press.
- [62] Martín I., Ovalle J. & Restuccia A., *Compactified $D=11$ Supermembranes and Symplectic Non-Commutative Gauge Theories*. Phys. REv. **D64** (hep-th/0101236)
- [63] Leppanen C., (2013) *Super-membranes, M(atrix) Theory and scattering. A (mostly) self contained introduction*. Master Thesis, University of Gothenburg,
- [64] García del Moral M, Pena J, Restuccia A (2012) *Supermembrane origin of type II gauged supergravities in 9D* JHEP 1209 **063** (hep-th/1203.2767)