

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO EN MODELOS ALEATORIOS



***“REGÍMENES DE VOLATILIDAD EN LOS PRECIOS DEL CRUDO
VENEZOLANO ENTRE LOS AÑOS 2000-2016”***

Trabajo de Grado de Maestría presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el Economista Jorge A. Vinseiro Moure, para optar al título de Magister Scientiarum, Mención Modelos Aleatorios.

Tutor: Dr. Daniel Barráez Guzmán

Caracas – Venezuela
Julio, 2017



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
COMISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



Comisión de Estudios
de Postgrado

VEREDICTO

Quienes suscriben, miembros del jurado designado por el Consejo de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, para examinar el **Trabajo de Grado** presentado por: **Jorge Alejandro Vinseiro Moure**, Cédula de identidad **13.405.529**, bajo el título **“REGIMENES DE VOLATILIDAD EN LOS PRECIOS DEL CRUDO VENEZOLANO EN LOS AÑOS 2000-2016”**, a fin de cumplir con el requisito legal para optar al grado académico de **MAGÍSTER SCIENTIARUM, MENCIÓN MODELOS ALEATORIOS**, dejan constancia de lo siguiente:

1.- Leído como fue dicho trabajo por cada uno de los miembros del jurado, se fijó el día 11 de julio de 2017 a las 08:00 AM., para que el autor lo defendiera en forma pública, lo que éste hizo en la Sala Raimundo Chela, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual respondió satisfactoriamente a las preguntas que le fueron formuladas por el jurado, todo ello conforme con lo dispuesto en el Reglamento de Estudios de Postgrado.

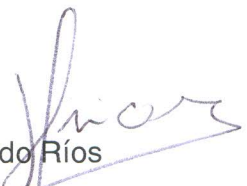
2.- Finalizada la defensa del trabajo, el jurado decidió **aprobarlo** por considerar, sin hacerse solidario con la ideas expuestas por el autor, que se ajusta a lo dispuesto y exigido en el Reglamento de Estudios de Postgrado.

Para dar este veredicto, el jurado estimó que el trabajo es un aporte relevante al estudio de la dinámica de los precios de petróleo, donde se presenta evidencia estadística significativa de dos regímenes diferenciados de la volatilidad de dichos precios. Estos regímenes encontrados en el trabajo, no son evidentes y tienen importantes implicaciones económicas.

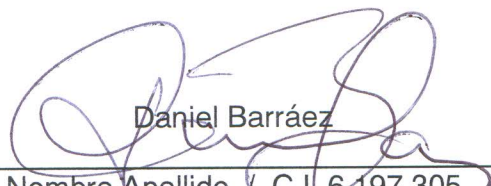
En fe de lo cual se levanta la presente ACTA, a los 11 días del mes de julio del año 2017, conforme a lo dispuesto en el Reglamento de Estudios de Postgrado, actuó como Coordinador del jurado Daniel Barráez.


Mairén Colina

Nombre Apellido / C.I. 12.761.954
Institución (UCV)


Ricardo Ríos

Nombre Apellido / C.I. 3.949.476
Institución (UCV)


Daniel Barráez
Nombre Apellido / C.I. 6.197.305
Institución (UCV)
Tutor



Resumen

La dinámica de la volatilidad de los precios del crudo ha devenido en un tema de creciente interés académico y práctico, al mismo tiempo que la evidencia sugiere que cambios en su magnitud pueden tener efectos económicos y financieros relevantes. En el ámbito venezolano, caracterizar adecuadamente la dinámica de la volatilidad de los precios del crudo se convierte en un problema de particular relevancia, teniendo en cuenta en este caso la alta exposición que todavía sigue manteniendo su Economía a las fluctuaciones que experimentan los precios del crudo en los mercados internacionales. Siguiendo esta idea, el propósito de la presente investigación consiste en identificar cambios de régimen en la dinámica de la volatilidad de los precios del crudo venezolano entre los años 2000-2016. Con tal propósito, la aproximación metodológica propuesta se basa en la estimación del modelo de Volatilidad Estocástica con Cambios de Régimen Markovianos (MSSV), mediante técnicas de inferencia bayesianas y de simulación MCMC. Los resultados alcanzados a partir del modelo anterior permiten en principio argumentar que el periodo bajo observación estuvo caracterizado principalmente por la presencia de altos niveles relativos de volatilidad en los precios del crudo venezolano. Tal vez más importante a fines prácticos, los mismos resultados sugieren también que la volatilidad de los precios del crudo venezolano pudieron haber estado caracterizados por niveles más bajos de persistencia que, aquellos que pueden serle atribuidos mediante el uso de modelos más tradicionales de volatilidad, permitiendo de esta manera cuestionar la capacidad efectiva que tienen esta última clase de modelos para reflejar adecuadamente su dinámica.

Dedicatoria

A la memoria de mi Padre:
Manuel Vinseiro Vázquez (1931 - 2016).

Agradecimiento

Ante todo, quisiera agradecer al Profesor Daniel Barrález por su motivación, orientación y tutoría, tanto en los diferentes cursos en los cuales tuvimos la oportunidad de compartir, así como durante la realización de este Trabajo de Grado.

A los Profesores Angie Pineda, Carene Ludeña y Ricardo Ríos por su paciencia y generosidad al compartir sus conocimientos y experiencia.

A mis compañeros del Programa de Modelos Aleatorios por su motivación a continuar y su constante apoyo durante a todo lo largo de éste.

Finalmente, a mi Madre y hermano por apoyarme durante todos estos años.

Índice general

Introducción	1
Capítulo 1. Marco Teórico	5
1. Introducción	5
2. Revisión de la literatura	5
3. El modelo de Volatilidad Estocástica estandar (SV-AR(1))	9
4. El Modelo de Cambios de Régimen Markovianos (MS)	11
5. Inferencia estadística a través de técnicas bayesianas	14
6. Métodos de Monte Carlo basados en Cadenas de Markov (MCMC)	19
Capítulo 2. El Modelo de Volatilidad Estocástica con Cambios de Régimen Markovianos (MSSV)	23
1. Introducción	23
2. Descripción del modelo	23
3. Estimación del modelo	25
Capítulo 3. Resultados	35
1. Introducción	35
2. Datos e implementación	35
3. Resultados	36
4. Regímenes de volatilidad en los precios del crudo venezolano	47
Capítulo 4. Conclusiones y recomendaciones	52
Bibliografía	55

Introducción

La dinámica de la volatilidad de los precios del crudo se ha revelado como un tema de creciente interés académico y práctico, al mismo tiempo que la evidencia sugiere cada vez con más fuerza que no solamente cambios puntuales en los precios del crudo, sino también en la propia variabilidad que éstos exhiben a través del tiempo, pueden traer consigo importantes efectos económicos y financieros. En general, una volatilidad más alta en los precios del crudo puede vincularse con una mayor incertidumbre sobre los costos futuros que deberán enfrentar los agentes que participan en la Economía y en tal sentido, es dable esperar entonces que variaciones en sus niveles puedan tener un impacto significativo para modificar los planes de gasto e inversión de los hogares y firmas, así como para limitar la capacidad efectiva que tienen los diseñadores de política para elaborar presupuestos nacionales más robustos desde el Gobierno Central (Rentschler, 2013).

En el ámbito financiero, las variaciones en la volatilidad de los precios del crudo tienen tal vez una influencia que termina siendo más evidente, por cuanto ésta representa una variable esencial para la valoración de una amplia variedad de instrumentos financieros que son negociados activamente en los mercados bursátiles. Por esta razón, cabe esperar que incluso pequeñas alzas o caídas en la volatilidad de los precios del crudo tengan un impacto notable aún en el corto plazo para afectar, por ejemplo; los precios de acciones y títulos de deuda emitidos por empresas del sector, los spreads de riesgo y costos de emisión de deuda que deben asumir los Gobiernos de países vinculados con la explotación de esta materia prima, los precios de activos derivados como contratos de futuros u opciones sobre los precios spot del crudo, o también los precios y niveles de volatilidad que registran otras materias primas y mercancías, tanto energéticas como no energéticas, debido en este caso a la existencia de efectos de derrame o *spill-over*, que tienen su origen en la estrecha relación que guardan entre sí los distintos mercados donde se negocian esta clase de bienes (Nwoko, I., Aye, G.,

Yildiz, F., y Asogwa, B., 2016).

En Venezuela, la dinámica de la volatilidad de los precios del crudo se plantea como un problema de singular relevancia. Buena parte de ello se desprende de la marcada dependencia que todavía mantiene su Economía sobre la explotación de crudo como principal fuente de ingresos para la Nación. Incluso en el año 2015, los ingresos provenientes de esta actividad alcanzaron a sumar el 95 % del total de ingresos obtenidos por concepto de exportaciones en el país, mientras que sus sectores de crudo y gas agregaron en conjunto hasta el 25 % de su Producto Interno Bruto (OPEP, 2016). La importancia vital que tiene el crudo para dinamizar la Economía venezolana, se refleja principalmente a través de una alta exposición a las fluctuaciones que registran sus precios en los mercados internacionales y, provoca además que los efectos negativos que se derivan sus movimientos, no sólo se limiten al contexto económico y financiero del país, sino que lleguen incluso en muchas oportunidades a transferirse hacia sus ámbitos político y social, con graves consecuencias para la estabilidad de la Nación.

Distintas aproximaciones, entre las cuales destacan por ejemplo la estimación de modelos de tipo GARCH (Engle, 1982; Bolerslev, 1986) y de Volatilidad Estocástica (Taylor, 1986), han sido utilizadas extensamente en el pasado para estudiar la dinámica de la volatilidad de los precios del crudo. Vistos en conjunto, los resultados alcanzados sugieren que estos últimos muestran en principio propiedades que terminan siendo similares a las que pueden ser observadas también en otras series de tiempo financieras, como por ejemplo: agrupamiento, asimetría, colas gruesas y reversión a la media (Bina y Vo, 2007). Análogamente, ciertos estudios sobre el tema han dado más recientemente evidencia por cambios estructurales en la dinámica de la volatilidad de los precios del crudo (Wilson, Aggarwal e Inclan, 1996; Fong y See, 2002), destacando además en tales casos que no dar cuenta adecuadamente por su existencia, puede llevar erróneamente a la impresión de una alta persistencia en la volatilidad de los precios del crudo y una mayor predictibilidad de sus magnitudes futuras (Vo, 2009).

Tomando lo anterior como premisa, el objetivo central de la presente investigación consiste en identificar regímenes de alta y baja volatilidad en la evolución reciente de los precios del

crudo venezolano. Con esta finalidad, el enfoque metodológico propuesto se basa en estimar un modelo Volatilidad Estocástica con Cambios de Régimen Markovianos (MSSV) similar al planteado originalmente por So, Lam y Li (1998); usando para ello una muestra de datos compuesta por observaciones semanales de los precios del crudo tipo Merey durante los años 2000-2016 y, técnicas de inferencia bayesiana y de simulación de Monte Carlo basadas en Cadenas de Markov (MCMC).

En esencia, el modelo MSSV combina en un marco unificado los modelos de Volatilidad Estocástica (SV) y de Cambios de Régimen Markovianos (MS) de Hamilton (1989), permitiendo de esta manera la posibilidad de dar cuenta por saltos discretos en la media no condicionada del proceso que sigue la volatilidad de una variable de interés a través del tiempo, tomando como punto de partida para ello la idea de que tales cambios pueden ser vistos como consecuencia de un proceso no observado, cuya evolución se caracteriza a su vez en el caso más simple por seguir una Cadena de Markov homogénea e irreducible de primer orden. En comparación con otros modelos de cambio estructural que podrían ser usados con el mismo propósito, la principal ventaja del modelo MSSV se desprende sin embargo de que no requiere supuestos previos sobre los momentos en que se espera ocurran cambios estructurales en la evolución la volatilidad, ya que los mismos terminan siendo identificados directamente a partir de la propios datos observados (Kuan, 2002).

En principio, el objetivo propuesto para la presente investigación termina siendo relevante porque, hasta donde es posible saber, no existen a la fecha otros trabajos similares que hallan sido publicados, enfocados en analizar la presencia de regímenes de volatilidad en los precios del crudo venezolano. En este sentido, cabe esperar que los resultados alcanzados sean capaces de proporcionar nueva evidencia, que puede ser útil inicialmente a los fines de lograr una mejor comprensión de la dinámica que siguen tanto la volatilidad como los precios del crudo venezolano en los mercados internacionales. En este caso, cabe notar que el periodo de estudio considerado en la investigación da cierto valor adicional a los resultados que puedan obtenerse a través de ella, no solamente porque éste ha sido caracterizado por haber mostrado una creciente volatilidad en los precios del crudo, sino porque incluye también una serie de eventos políticos y económicos, tanto en el ámbito nacional

como internacional, que por su magnitud pudieron haber tenido una incidencia significativa en la dinámica de la volatilidad de los precios del crudo venezolano y, haber dado origen a cambios estructurales en su evolución que no han sido considerados anteriormente en la literatura sobre el tema. Finalmente, es dable argumentar que el presente estudio también puede tener una marcada utilidad práctica, tanto para instituciones del sector público como del sector privado de Venezuela, principalmente por introducir herramientas más novedosas a los fines de evaluar la dinámica de la volatilidad de los precios del crudo, las cuales pueden ser relevantes a los fines de producir estrategias de cobertura más eficientes para mitigar los efectos negativos que pueden derivarse de una mayor variabilidad en los precios del crudo.

En lo que respecta a su organización, el presente trabajo se estructura en cuatro Capítulos. A continuación, el Capítulo I ofrece una breve revisión de la literatura relacionada y presenta los principales elementos teóricos y prácticos que serán usados luego para lograr el objetivo propuesto. A su vez, el Capítulo II introduce formalmente el modelo MSSV y describe el procedimiento utilizado para su estimación mediante técnicas de inferencia bayesiana y de simulación MCMC. El Capítulo III discute los resultados observados y finalmente, el Capítulo IV finaliza con un apartado de conclusiones y recomendaciones para futuras investigaciones relacionadas.

Capítulo 1

Marco Teórico

1. Introducción

Este Capítulo introduce los principales elementos teóricos y prácticos que serán utilizados luego en el desarrollo de la presente investigación. A continuación se ofrece una breve revisión de la literatura existente sobre volatilidad de series de tiempo financieras y en particular, aquella relacionada con analizar la volatilidad de los precios del crudo. Seguidamente, se introducen los modelos de Volatilidad Estocástica y de Cambios de Régimen Markovianos, para continuar después con los métodos de inferencia bayesiana y de simulación de Monte Carlo basadas en Cadenas de Markov (MCMC).

2. Revisión de la literatura

Debido a su importancia económica y financiera, cierto número de estudios han enfocado su atención en caracterizar el comportamiento de la volatilidad de los precios del crudo. En general, la principal herramienta usada con este fin ha sido los modelos de volatilidad condicional heterocedástica tipo GARCH. De esta manera, buena parte de la literatura se ha concentrado en hallar cual de los modelos de esta familia describe con mayor precisión la dinámica de la volatilidad de los precios del crudo. La evidencia hallada todavía parece sin embargo lejos de un acuerdo sobre cual de ellos podría ser el mejor. Así, por ejemplo, Kang, Kang y Yoon (2009) hallan evidencia en favor del modelo tipo FIGARCH¹, sugiriendo de esta manera la existencia de un proceso de memoria larga en la volatilidad de los precios del crudo. A su vez, Cheong (2009) señala que los modelos GARCH (1,1) y FIAPARCH²

¹Fractionally Integrated GARH.

²Fractionally Integrated APARCH.

podrían ser mejores para reflejar la volatilidad de los precios del crudo y, Mohammadi y Su (2010) concluyen que el modelo APARCH³ termina siendo superior a otros modelos, al permitir dar cuenta en este caso por la existencia de asimetrías en la distribución de los retornos del precio del crudo.

El interés por estudiar la existencia de cambios estructurales en la volatilidad de series de tiempo financieras encuentra su origen con Diebold (1986) y Lamoreaux y Lastrapes (1990), quienes sostienen que la alta persistencia usualmente observada en la volatilidad de esta clase de series puede ser resultado en realidad de la incapacidad de los modelos tradicionales para dar cuenta por tales cambios. Partiendo de esta premisa, Cai (1994) y Hamilton y Susmel (1994) incluyen entonces Cambios de Régimen Markovianos (Hamilton, 1989) en el modelo básico GARCH. El modelo MRS-GARCH⁴ resultante, ha sido usado entre otros por Zhang, Yao y He (2015) para analizar específicamente la volatilidad de los precios del crudo WTI. En particular, los autores contrastan los resultados este modelo contra los obtenidos a través del modelo GARCH estándar y ciertos modelos no lineales de la misma familia, como el GRJ-GACRH⁵ y EGARCH⁶, concluyendo que éste ofrece generalmente un mejor ajuste a los datos, aunque notan también que su superioridad declina rápidamente al reducir la frecuencia temporal de los datos usados en el análisis.

Relacionado al anterior, Lux, Segnon y Gupta (2015) constatan la capacidad predictiva de los modelos: GARCH, IGARCH⁷, GJR-GARCH, EGARCH, APARCH, FIGARCH, HYGARCH⁸, FIAPARCH y MSM⁹, usando información para los precios del crudo WTI durante varios subperiodos entre los años 1875-2014. Con base en los resultados obtenidos, ellos concluyen que ninguno de los modelos anteriores termina demostrando realmente una clara superioridad sobre los otros, aún cuando hallan que el modelo MSM es aquel que exhibe un

³Asymmetric Power ARCH.

⁴Markov Regime Switching GARCH.

⁵Glosten/Jagannathan/Runkle GARCH.

⁶Exponential GARCH.

⁷Integrated GARCH.

⁸Hyperbolic GARCH.

⁹Markov Switching Multifractal.

menor número de casos en los cuales es superado. Los autores anteriores también sugieren que en general, aquellos modelos que dan cuenta por la existencia de memoria larga en la dinámica de la volatilidad parecieran en principio reportar resultados más ajustados a los datos.

Paralelamente con el empleo de modelos de la familia GARCH para describir la dinámica de la volatilidad de series financieras, otra clase de modelos que ha sido utilizada para ellos son aquellos que se desprenden de la familia de modelos de Volatilidad Estocástica (SV). El interés por esta clase de modelos fue introducida en la literatura financiera por Clark (1973), aún cuando suele ser a Taylor (1982) a quien se le atribuye usualmente su presentación matemática básica. En este caso, la propiedad central que distingue al modelo SV se desprende del supuesto de que la volatilidad condicional de una serie de tiempo puede ser vista como un proceso latente. Aunque esta característica hace que el modelo SV sea más flexible en su implementación, también dificulta considerablemente su estimación en comparación con el modelo GARCH.

Una descripción de las técnicas iniciales usadas para ajustar el modelo SV es provista por: Taylor (1982); Melino y Turbull (1990); Harvey, Ruiz y Shepard (1994) y Ruiz (1994). Alternativamente, Jaquier, Polson y Rossi (1994); Kim, Shepard y Chib (1998); Jaquier, Polson y Rossi (2004) y Carvalho y López (2007), discuten el uso de métodos de inferencia bayesiana y técnicas de simulación basadas en Cadenas de Markov (MCMC) para estimar el modelo SV. Las principales extensiones del modelo SV y repercusiones prácticas, han sido desarrolladas por: Harvey y Shepard (1996); Krichene (2003); Jaquier et al. (2004); Yu (2005) y Shepard y Andersen (2008), entre otros.

En su aplicación para estudiar la dinámica de la volatilidad de los precios del crudo, Larson y Nossman (2011) hallan evidencia a favor del modelo SV con saltos en los retornos y volatilidad para los precios spot diarios del crudo WTI durante el periodo 1989-2000. Por su parte, Chan y Grant (2015) comparan siete modelos tipo GARCH contra sus equivalentes SV para describir la volatilidad de los precios diarios del crudo WTI y Brent, encontrando que en

todos los casos, los segundos terminan ofreciendo resultados que se ajustan mejor a los datos.

El modelo SV con Cambios de Régimen Markovianos (MSSV) fue desarrollado por So, Li y Lam (1998), quienes lo proponen como una aproximación novedosa de explicar las fluctuaciones en la volatilidad de series financieras debidas únicamente a fuerzas de tipo económico. A fin de comprobar la viabilidad del nuevo modelo MSSV, los autores emplean datos semanales del índice SP500 entre los años 1990-1999 y, encuentran en este caso evidencia positiva para la existencia de cambios estructurales en la evolución de la volatilidad de este índice.

Otros estudios similares al de So et al. (1998) empleando el modelo MSSV han sido llevados a cabo también por: Kalimipanelli y Susmel (2004), empleando datos para las tasas de interés de los Estados Unidos, Hwang et al. (2007), para el índice bursátil SP500, Shibata y Watanabe (2006), en el caso del índice bursátil de la bolsa de Tokyo, Carvalho y López (2006), para el índice IBOVESPA en Brasil, Kwiatkowski (2010), para el índice bursátil de Varsovia (WIG) y, más recientemente, Qi y Pan (2013), usando información del índice bursátil SP500 durante la crisis subprime en 2008. Con excepción de este último, el resto de los autores anteriores corroboran en principio las conclusiones iniciales de So et al. (1998), en cuanto a la posibilidad de encontrar diferentes regímenes para el comportamiento de la volatilidad, así como una caída significativa en el coeficiente de autocorrelación del modelo, la cual puede interpretarse como una disminución en la persistencia de la volatilidad. A fin de explicar la aparente contradicción que suponen sus hallazgos, Qi et al. (2013) argumentan sin embargo que la imposibilidad de ver diferencias importantes entre los resultados de los modelos SV y MSSV, podría ser una consecuencia de la propia amplitud que tuvo en su momento la crisis subprime, la cual produjo niveles extremadamente altos de persistencia en la volatilidad del índice SP500 que terminaron reflejandose en ambos modelos por igual.

En general, las aplicaciones del modelo MSSV a los precios del crudo ha sido mucho más reducida hasta ahora. El único ejemplo concreto se debe a Vo (2009), el cual emplea este modelo para estudiar la persistencia de la volatilidad del precio semanal del crudo WTI durante el periodo 1986-2008. El autor usa el algoritmo de Gibbs como técnica para estimar los parámetros del modelo y producir proyecciones de los niveles de volatilidad. De acuerdo a los

resultados alcanzados, existe una fuerte evidencia sobre la existencia de cambios de régimen en la volatilidad del crudo WTI, los cuales al no ser considerados pueden llevar a la falsa impresión de alta persistencia en la volatilidad en el mercado de crudo y en consecuencia, alta predictibilidad de éste. Más aún, el autor encuentra que el modelo estimado hace un buen trabajo en capturar los principales eventos que determinaron la evolución del mercado de crudo en el periodo analizado y favorece además la capacidad predictiva del modelo SV estándar.

3. El modelo de Volatilidad Estocástica estandar (SV-AR(1))

La clase de modelos SV suele ser presentada como la alternativa natural a la familia de modelos GARCH. Sean r_t los retornos centrados en torno a su media de la serie de tiempo que es objeto de interés y h_t el logaritmo de su varianza para cada momento $t = 1, \dots, T$; el modelo canónico SV-AR(1) en tiempo discreto, tal como fuera propuesto por Taylor (1986), puede ser especificado como:

$$(1.1) \quad r_t = \exp(h_t/2)\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, 1),$$

$$(1.2) \quad h_t = \mu + \phi(h_{t-1} - \mu) + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2),$$

$$(1.3) \quad \text{cov}(\varepsilon_t, \eta_t) = 0.$$

En esencia, el modelo SV-AR(1) representa un ejemplo de los modelos de espacio de estados⁹. En este caso, (1.1) representa la ecuación de observación, mientras (1.2) es la ecuación de medida. El proceso latente h_t puede ser interpretado intuitivamente como aquel que describe el arribo de nueva información al sistema. El mismo se asume que sigue un proceso autorregresivo gaussiano de primer orden. El parámetro η_t suele ser referido como la "volatilidad de la volatilidad". A fin de garantizar la estacionariedad de este proceso, la condición $|\phi| < 1$ debe ser impuesta. Siendo así, ϕ puede ser observado entonces como un parámetro de persistencia, que mide la velocidad a la cual h_t converge sobre su media. Esta última se puede encontrar viene dada por:

⁹State Space Models.

$$(1.4) \quad \mu_h = E(h_t) = \frac{\mu}{1 - \phi}.$$

De forma análoga, bajo las condiciones de estacionariedad impuestas, es dable hallar además que la varianza no condicionada de h_t es igual a:

$$(1.5) \quad \sigma_h^2 = Var(h_t) = \frac{\sigma_{\eta_t}^2}{1 - \phi^2}.$$

Para fines prácticos, las principales ventajas del modelo SV-AR(1) en comparación con los modelos de la familia GARCH se desprenden de la inclusión de un término de error adicional η_t , el cual provee la posibilidad de lograr un mejor ajuste más para el proceso h_t . La preferencia por el modelo SV-AR(1) en la literatura ha sido también justificada por su capacidad para dar cuenta de forma más natural por algunos de los principales hechos estilizados asociados a las series de retornos financieros. Buena parte de ello se debe al hecho de que los retornos ajustados se suponen son generados en (1.1) a partir de la convolución de dos variables aleatorias: ε_t y h_t . Debido a que la primera de éstas se define como un ruido blanco, se desprende que r_t será estacionaria si h_t también lo es. Por tanto, la condición $|\phi| < 1$ que garantiza la estacionariedad de h_t hace lo propio para r_t . Por la misma razón anterior y debido además a que ε_t se supone está distribuida con media igual a cero y es además independiente de η_t , se puede demostrar que r_t se ajusta a una martingala en diferencia:

$$(1.6) \quad E(r_t) = E(r_t | r_{t-1}, h_{t-1}) = 0.$$

Debido a que ε_t es simétrica en torno a su media, todos los momentos impares de r_t terminan siendo nulos. Sin embargo, debido a que $h_t \sim N(\mu_h, \sigma_h^2)$, es posible encontrar que $exp(h_t)$ sigue una distribución log-normal y por tanto, todos sus momentos pares y_t existen y están definidos para τ como (Platanoti et al.,2005):

$$(1.7) \quad E(y_t^\tau) = E[exp(h_t)^{\frac{\tau}{2}}]E[(\varepsilon_t)^2] = E[(\frac{\tau}{2}\mu_h + \frac{\tau^2}{8}\sigma_h^2)]\frac{\tau!}{2^{\frac{\tau}{2}}(\frac{\tau}{2})!}.$$

Tomando como punto de partida este resultado, es posible definir el segundo momento o varianza de r_t como:

$$(1.8) \quad \text{Var}(r_t) = E[(r_t)^2] = \exp(\mu_h + \frac{1}{2}\sigma_h^2).$$

De forma similar, el cuarto momento de r_t vendrá dado por:

$$(1.9) \quad E[(r_t)^4] = 3 \cdot \exp(2\mu_h + 2\sigma_h^2).$$

Con base en estos resultados es posible hallar ahora que la curtosis de r_t puede ser definida como:

$$(1.10) \quad \kappa = -3 + \frac{E[(r_t)^4]}{E[(r_t)^2]^2} = 3\exp(\sigma_h^2) - 1.$$

Ya que por definición $\sigma_h^2 > 0$, se tiene entonces que $\kappa > 0$ en todo momento. Por tanto, se tiene que el modelo SV-AR(1), la distribución de r_t no solamente tiende a ser simétrica en torno a cero, sino que también muestra exceso de curtosis en comparación con una distribución Normal, lo cual es una característica frecuentemente encontrada en la distribución de retornos de activos financieros.

4. El Modelo de Cambios de Régimen Markovianos (MS)

Intuitivamente, los modelos de *switching* o cambio de régimen usan múltiples ecuaciones o estructuras con el propósito de caracterizar el comportamiento de una variable. El modelo MS de Hamilton (1989) representa un ejemplo específico de esta clase de modelos y, al igual que como ocurre en el caso del modelo SV-AR(1), su construcción se basa también en la de un modelo de espacio de estados.

El elemento central que caracteriza al modelo MS es el supuesto de que el proceso latente que gobierna los cambios entre regímenes o estados para variable de interés sigue una Cadena de Markov irreducible y homogénea de primer orden. Por tanto, la probabilidad de

que ésta se encuentre en cierto estado en un momento dado, depende del estado en el que se encontraba en el momento anterior. Esta propiedad del modelo MS supone una diferencia importante por ejemplo con el modelo de cambios aleatorios de Quandt (1972)¹⁰, en el cual los eventos de cambio se suponen son independientes entre sí a lo largo del tiempo (Kuan, 2002).

En su presentación más simple, considerando únicamente dos regímenes o estados posibles, el modelo MS para la media de un proceso x_t puede ser representado a través del siguiente grupo de ecuaciones:

$$(1.11) \quad x_t = \mu_t + \phi x_{t-1} + \eta_t \quad \nu_t \sim N(0, \sigma_{\eta_t}^2),$$

$$(1.12) \quad \mu_{s_t} = s_{1t}\mu_1 + s_{2t}\mu_2 \quad \mu_1 < \mu_2,$$

$$(1.13) \quad s_{it} = 1 \text{ si } s_t = i \text{ y } s_{it} = 0 \text{ si } s_t \neq i, \quad i \in \{1, 2\},$$

$$(1.14) \quad P(s_t = i \mid s_{t-1} = j) = p_{ji},$$

$$(1.15) \quad \sum_{i=1}^2 p_{ji} = 1.$$

En este caso, s_t es la variable latente que denota el estado o régimen en el cual se encuentra el proceso x_t . Debido a que solamente se consideran dos regímenes, $i = 1, 2$, s_t puede ser igual a 1 ó 2 en cada momento $t \in N$. Asumiendo que $\gamma_2 \neq 0$ e imponiendo la condición $|\phi| < 1$, el modelo anterior admite entonces dos estructuras distintas para x_t . La primera es un proceso estacionario AR(1) con media igual a $\frac{\mu_1}{(1-\phi)}$ cuando x_t se encuentra en el primer régimen ($s_t = i$), mientras que la segunda es otro proceso similar con media ahora igual a $\frac{\mu_2}{(1-\phi)}$ cuando x_t se encuentra en el segundo régimen ($s_t = j$).

La probabilidad de cambiar del régimen $s_{t-1} = j$ al régimen $s_t = i$ vienen determinadas por p_{ji} . El supuesto de irreductibilidad implica no existe un estado absorbente, garantizando de esta manera que el proceso siempre puede cambiar entre estados. Dado que el proceso que gobierna los cambios entre regímenes se asume además homogéneo, este no depende del tiempo y las probabilidades p_{ji} terminan siendo constantes a lo largo de éste. La matriz de

¹⁰Random Switching

transición Q que sintetiza la evolución de la variable latente s_t puede ser escrita entonces como:

$$(1.16) \quad Q = \begin{bmatrix} P(s_t = 1 | s_{t-1} = 1) & P(s_t = 2 | s_{t-1} = 1) \\ P(s_t = 1 | s_{t-1} = 2) & P(s_t = 2 | s_{t-1} = 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}.$$

Por construcción, los elementos de la matriz Q satisfacen la condición $p_{ii} + p_{ij} = 1$ para todo $i, j \in \{1, 2\}$. Por tanto, se tiene:

$$(1.17) \quad p_{12} = 1 - p_{11},$$

$$(1.18) \quad p_{21} = 1 - p_{22}.$$

Partiendo de la matriz de transición Q es posible verificar que el proceso estocástico s_t termina siendo estrictamente estacionario y admite por tanto, una representación AR(1) (Kwiatowski, 2009):

$$(1.19) \quad s_t = 1 - p_{11} + (-1 + p_{11} + p_{22})s_{t-1} + \nu_t.$$

En esta última expresión, ν_t representa un termino de error con las características descritas por Hamilton (1989). Con el propósito de establecer las propiedades asintóticas o de largo plazo de s_t , es posible definir $\pi = p_{11} + p_{22} - 1$. Entonces, por inducción es dable encontrar que el paso t para la matriz de transición Q vendrá determinado por (Cristopeit y Cron, 1997):

$$(1.20) \quad Q^t = \frac{1}{1 - \pi} \begin{bmatrix} (1 - p_{22}) + (1 - p_{11})\pi^t & (1 - p_{11}) + (1 - \pi^t) \\ (1 - p_{22}) + (1 - \pi^t) & (1 - p_{22}) + (1 - p_{11})\pi^t \end{bmatrix}.$$

De esta manera, cuando $t \rightarrow \infty$, se tiene:

$$(1.21) \quad Q^t = \frac{1}{1 - \pi} \begin{bmatrix} (1 - p_{22}) & (1 - p_{11}) \\ (1 - p_{22}) & (1 - p_{11}) \end{bmatrix}.$$

De lo anterior se desprende finalmente que:

$$(1.22) \quad p_{s_t=1} = \frac{1 - p_{22}}{1 - \pi} = \frac{1 - p_{22}}{2 - p_{11} - p_{22}},$$

$$(1.23) \quad p_{s_t=2} = \frac{1 - p_{11}}{1 - \pi} = 1 - p_{s_t=1}.$$

Respectivamente, (1.20) y (1.21) dan las probabilidades ergódicas de que el sistema se encuentre en el régimen $s_t = 1$ y $s_t = 2$. Vistas en conjunto, ellas definen la distribución estacionaria o de equilibrio a la cual converge el proceso s_t .

5. Inferencia estadística a través de técnicas bayesianas

Debido a que los modelos SV y MS incluyen variables latentes cuyos valores también deben ser hallados, su inferencia estadística no puede ser llevada a cabo mediante métodos tradicionales de maximización sin incurrir en dificultades prácticas importantes. El problema en este caso se desprende del hecho de que la función de verosimilitud de estos modelos suele tomar la forma de una integral multidimensional, cuya solución puede ser difícil de encontrar analítica o incluso numéricamente. Teniendo esto en cuenta, otras técnicas alternativas de inferencia suelen ser empleadas en estos casos. Específicamente, una aproximación que ha venido ganando popularidad en la literatura consiste en el uso de técnicas de inferencia basadas en el Teorema de Bayes, con las cuales es posible construir la distribución completa de los parámetros que integran un modelo matemático dado. En las siguientes sub-secciones introducimos primero el método de estimación por Máxima Verosimilitud a fin de proveer un marco de referencia, sobre la cual discutir luego los elementos específicos que definen la técnica de inferencia bayesiana.

5.1. Estimación por Máxima Verosimilitud (ML).

La estimación por ML puede ser vista como la aproximación tradicional a la inferencia estadística. Sea $Y = (y_1, \dots, y_T)$ un vector de observaciones para cierto fenómeno que se quiere estudiar y, sea además $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ un vector que contiene los parámetros del modelo que se piensa permite aproximar los datos observados; es posible entonces definir la probabilidad condicionada de ver los datos condicionada a los valores de los parámetros

como $P(Y | \Theta)$, de modo que el problema de estimar los valores de estos últimos se reduce entonces a resolver:

$$(1.24) \quad \hat{\Theta}_{MLE} = \underset{(\theta_1, \dots, \theta_N)}{\operatorname{arg\,m\acute{a}x}} \{P(Y | \Theta)\}.$$

De este modo, la estimación por ML involucra buscar en el espacio de los parámetros aquellos valores que maximizan la probabilidad de reproducir los datos observados. La probabilidad condicional $P(Y | \Theta)$ se denomina función de verosimilitud o proceso generador de los datos, estando representada como $L(Y | \Theta)$. Bajo el supuesto de que las observaciones (y_1, \dots, Y_T) son independientes, esta última es igual entonces a:

$$(1.25) \quad L(Y | \Theta) = P(Y | \theta_1, \dots, \theta_N) = \prod_{t=1}^T (y_t | \theta_1, \dots, \theta_N).$$

La estimación por ML representa un método versátil, lo cual no implica sin embargo que puede ser utilizado indiscriminadamente. En particular, la capacidad de este método para producir estimados adecuados de los parámetros de un modelo dado depende de la forma que toma $L(Y | \Theta)$. Si esta última es plana, por ejemplo, la estimación por ML puede llevar a no obtener ningún resultado viable. De igual modo, si $L(Y | \Theta)$ no es claramente unimodal, entonces este método puede llevar a obtener resultados sesgados para los parámetros del modelo.

5.2. Inferencia Bayesiana.

A diferencia del método ML, la inferencia bayesiana puede ser presentada como una técnica de estimación puramente estocástica. A diferencia de la primera, su principal característica se desprende del supuesto de que los parámetros del modelo pueden ser tratados ahora como variables aleatorias, sujetas por tanto a cierto grado de incertidumbre en torno

a sus verdaderos valores ¹¹. De esta manera, el técnica de inferencia bayesiana se distingue porque no es sólo un método para obtener los valores puntuales de los parámetros que permiten maximizar la probabilidad de ver los datos observados, sino que se trata de una aproximación para construir la distribución completa de todos sus valores probables.

Supongase un vector de observaciones $Y = (y_1, \dots, y_T)$ y un vector de parámetros dado por $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$. Partiendo de estos, es posible definir la distribución de los parámetros condicionada a los datos observados como $P(\Theta | Y)$. Usando el Teorema de Bayes, esta última termina siendo igual a:

$$(1.26) \quad P(\Theta | Y) = \frac{P(Y | \Theta) \cdot P(\Theta)}{P(Y)}.$$

En esta expresión, el término en el denominador puede ser visto como un factor de normalización, cuya forma general viene dada por:

$$(1.27) \quad P(Y) = \int_{\Theta} P(Y | \Theta) \cdot P(\Theta) d\Theta.$$

Debido a que este último integra a la unidad, el mismo puede ser omitido sin afectar los resultados. Por tanto, se tiene entonces:

$$(1.28) \quad P(\Theta | Y) \propto P(Y | \Theta)P(\Theta).$$

Esta ultima expresion resume el método de estimación bayesiana. El termino $P(\Theta | Y)$ es la distrbución posterior conjunta¹³ de los parámetros, que es la que realmente termina siendo de interés determinar. El símbolo \propto indica que ésta es proporcional al producto de dos términos conocidos. El primero de ellos, $P(Y | \Theta)$ representa la función de verosimilitud $L(Y | \Theta)$ del modelo, la cual, al igual que ocurría en el caso de la estimación ML, tiene como

¹¹Vale notar, que la inferencia bayesiana también considera que los propios modelos están sujetos a esta misma clase de incertidumbre. En general, la manera de dar cuenta por ésta consiste en computar el *Factor de Bayes* asociado a cada uno de los modelos que compiten entre sí y comparar luego para cual de ellos este ultimo es mayor. Debido a que los objetivos de este trabajo no incluyen en realidad la comparación de diferentes modelos, la explicación detallada de este procedimiento se omite

¹³Full joint posterior

finalidad dar cuenta por el proceso generador de la datos. El segundo, a su vez, dado por $P(\Theta)$, se conoce como la distribución a priori de los parámetros y en esencia, tiene como propósito introducir en el modelo toda la información exógena adicional disponible sobre los parámetros, antes incluso de ver los datos.

El paso final en el método de estimación bayesiana consiste en derivar la distribución de cada uno de los parámetros que integran el modelo. Esto último se logra integrando sobre la distribución posterior conjunta a fin de aislar el parámetro de interés. De esta manera, por ejemplo, la distribución marginal del parámetro θ_i viene dada por:

$$(1.29) \quad P(\theta_i) = \int_{\Theta_{-i}} P(\Theta | Y) P(\Theta) d\Theta_{-i}.$$

En este caso, Θ_{-i} representa el vector de parámetros exepctuando θ_i . Alternativamente, también es posible encontrar la distribución condicional completa posterior ¹³ de θ_i , es:

$$(1.30) \quad P(\theta_i | \Theta_{-i}, Y) = \frac{P(\Theta | Y)}{P(\Theta_{-i} | Y)}.$$

Para esta última expresión, su denominador es igual a:

$$(1.31) \quad P(\Theta_{-i} | Y) = \int_{\theta_i} P(\Theta | Y) d\theta.$$

La posibilidad de definir tanto la distribución marginal como la distribución condicional de los parámetros ofrece cierta flexibilidad al método de inferencia bayesiana. Esto, básicamente, porque brinda la oportunidad de emplear distintos procedimientos de simulación para obtener una u otra dependiendo del caso.

5.3. La distribución a priori.

La selección de la distribución a priori es un tema de cierta relevancia en el contexto de la estimación bayesiana. Esto se debe a que la misma influye sobre la forma que adquiere la distribución posterior de los parámetros. Tal vez más importante aún, ciertas distribuciones

¹³Full conditional posterior

a priori pueden ayudar también a reducir la complejidad de los cálculos necesarios y permitir además una interpretación más clara de los resultados que se obtienen.

En principio existen diversas aproximaciones para clasificar las distribuciones a priori. Un criterio común para agrupar estas distribuciones parte de tomar en cuenta la cantidad de información que éstas contienen. Así, por ejemplo, las distribuciones a priori pueden ser clasificadas en: informativas, débilmente informativas, menos informativas y no informativas (Koduvely, 2015). En particular, las últimas pueden ser caracterizadas como aquellas que no introducen ningún tipo de información preliminar sobre el valor del parámetro que se desea estimar. Esta clase de distribuciones también suelen llamarse planas debido a la forma que toma su función de densidad o función de probabilidad de masa.

De modo similar, una distribución a priori se puede clasificar como propias o impropias. La diferencia entre ambas es que, en el caso de la segunda la integral sobre su dominio no converge sobre la unidad, por lo cual no puede ser normalizada (Koduvely, 2015). Un ejemplo de esta clase de distribuciones es la uniforme en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Una clase importante de distribuciones a priori son las llamadas conjugadas. Una distribución a priori se dice es conjugada si su producto por la función de verosimilitud, produce una distribución posterior dentro de la misma familia de distribuciones. La principal ventaja de las distribuciones conjugadas es que facilitan significativamente los cálculos, ofreciendo en ciertos casos incluso la posibilidad de hallar soluciones analíticas para la distribución posterior.

Finalmente, las distribuciones a priori pueden ser clasificadas como jerárquicas. Esta clase de distribuciones tienen lugar cuando la distribución a priori seleccionada depende de algún parámetro, el cual a su vez se supone es también una variable aleatoria que depende de otro parámetro. En este caso, la ecuación (1.26) puede reescribirse como:

$$(1.32) \quad P(\Theta | Y) \propto P(Y | \Theta)P(\Theta | \varphi)P(\varphi).$$

Igual que antes, el término $P(Y | \Theta)$ representa la verosimilitud del modelo, sin embargo la distribución a priori viene dada ahora por el producto de los dos últimos términos, $P(\Theta | \varphi) \cdot P(\varphi)$. Esta última refleja el hecho de que en este caso el conjunto de parámetros Θ depende a su vez de un hiper-parámetro φ . Este esquema de jerarquización en principio puede ser extendido, por ejemplo, haciendo que φ dependa a su vez de otro hiper-hiper-parámetro λ y así sucesivamente. Claramente, la principal ventaja que tiene el uso de prioris jerárquicas, incluso a pesar de su mayor complejidad, es la posibilidad que ofrece para representar la verdadera estructura de dependencia subyacente en cierto proceso que se quiere modelar.

6. Métodos de Monte Carlo basados en Cadenas de Markov (MCMC)

La aplicación del método de estimación bayesiana puede ser complicada por la necesidad de resolver integrales multidimensionales. Diversas técnicas han sido propuestas como posibles soluciones a este problema, como por ejemplo, el método de estimación a máximo posteriori (MAP) y la Aproximación de Laplace. La experiencia ha demostrado sin embargo que estos métodos pueden también traer consigo ciertos problemas adicionales, por ejemplo, cuando la distribución posterior presenta colas gruesas (Koduvely, 2015). Como consecuencia de ello, también se ha hecho frecuente el uso de métodos de simulación. Dentro de éstos, tal vez las más populares son las técnicas de simulación de Monte Carlo basadas en Cadenas de Markov (MCMC) y en particular, el algoritmo Metropolis - Hastings y el algoritmo de Gibbs.

6.1. El Algoritmo Metropolis - Hastings (MH).

La principal técnica MCMC es el algoritmo MH. La ventaja de éste radica en su versatilidad, pues permite producir cada nueva iteración o paso de la cadena a partir de una distribución arbitraria y, forzar luego la invarianza de la distribución objetivo mediante la implementación de un mecanismo de aceptación - rechazo.

Supongase que se quiere obtener muestras sucesiva de una distribución objetivo $\pi(\Theta)$, la cual puede ser difícil de muestrear directamente y para la cual $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ supone un

vector de $N \times 1$ parámetros. En este caso, el algoritmo MH permite puede ser usado para obtener J muestras de dicha distribución llevando a cabo los siguientes pasos:

Paso 1: Proponer una distribución candidata $q(\Theta^{j+1} | \Theta^j)$ más fácil de muestrear.

Para $j = 1, \dots, J$.

Paso 2: Generar un valor candidato $\Theta^{(j+1)}$ a partir de $q(\Theta^{(j+1)} | \Theta^{(j)})$.

Paso 3: Computar la probabilidad Ψ de aceptar $\Theta^{(j+1)}$, a partir de:

$$(1.33) \quad \Psi = \min\left\{\frac{\pi(\Theta^{(j+1)})/q(\Theta^{(j+1)})}{\pi(\Theta^{(j)})/q(\Theta^{(j)})}; 1\right\}.$$

Paso 4: Generar $u \sim U[0, 1]$.

Paso 5: Si $u < \Psi$ aceptar Θ_{j+1} con probabilidad Ψ , en cualquier otro caso retener Θ_j .

Paso 6: volver al **Paso 2**.

Al implementar el algoritmo anterior, una simplificación común es generar la distribución candidata como una caminata aleatoria. De esta manera, se tiene:

$$(1.34) \quad \Theta^{(j+1)} = \Theta^{(j)} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \Sigma).$$

Debido a que ε_t se distribuye de acuerdo a una Normal, entonces: $\varepsilon_t = \Theta^{(j+1)} - \Theta^{(j)}$ también esta distribuida normalmente y, como esta es simétrica, se verifica que:

$$(1.35) \quad q(\Theta^{(j+1)} | \Theta^{(j)}) = q(\Theta^{(j)} | \Theta^{(j+1)}).$$

Por tanto, la probabilidad de aceptación Ψ definida en el **Paso 3** puede ser definida ahora como:

$$\Psi = \min\left\{\frac{\pi(\Theta^{(j+1)})}{\pi(\Theta^{(j)})}; 1\right\}.$$

Respectivamente, el numerador y denominador de la expresión anterior representan la distribución objetivo evaluada $\Theta^{(j+1)}$ y $\Theta^{(j)}$. En la práctica, la varianza Σ en (1.32) se fija exógenamente, permitiendo ajustar a través de ella la tasa de aceptación para las muestras obtenidas. Intuitivamente, un mayor valor para Σ permite explorar un espacio de valores más

amplio para Θ , aunque con el costo de una tasa de aceptación más baja. En contraste, un valor más bajo para Σ permite incrementar la tasa de aceptación, aunque ahora con el costo de considerar un espacio de posibles valores para Θ más reducido (Blake y Mumtaz,2002).

6.2. El Algoritmo de Gibbs.

El algoritmo de Gibbs representa un caso particular del algoritmo HM, el cual permite extraer las distribuciones de los paraámetros a partir de su distribución conjunta, la cual por su dificultad puede ser considerada intratable. El algoritmo de Gibbs resulta especialmente útil en el contexto de la estimación bayesiana, debido a que usualmente es más fácil obtener las distribuciones condicionales de los parámetros a partir de su distribución conjunta posterior que sus distribuciones marginales.

Supongase que se tiene la distribución objetivo $\pi(\Theta)$, para la cual $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ representa un vector de $N \times 1$ parámetros. Supongase además que es dable definir el conjunto de las distribuciones condicionales de los parámetros como $\lambda(\Theta_i | \Theta_{-i})$ con $i = 1, \dots, N$. Si estas tienen formas conocidas y son además fáciles de muestrear, entonces, el algoritmo para obtener J muestras a partir de $\pi(\Theta)$ procede de la siguiente manera:

Paso 1: Seleccionar los valores iniciales para $\Theta_1^{(0)}, \Theta_2^{(0)}, \Theta_3^{(0)}, \dots, \Theta_{N-1}^{(0)}, \Theta_N^{(0)}$ y fijar $j = 1$.

Para $j = 1, \dots, J$.

Paso 2: Transitar las condicionales y generar muestras para cada uno de los parámetros:

(a) Generar Θ_1^j a partir de $\lambda(\Theta_1 | \Theta_2^{(j-1)}, \Theta_3^{(j-1)}, \dots, \Theta_{N-1}^{(j-1)}, \Theta_N^{(j-1)})$,

(b) Generar Θ_2^j a partir de $\lambda(\Theta_2 | \Theta_1^{(j)}, \Theta_3^{(j-1)}, \dots, \Theta_{N-1}^{(j-1)}, \Theta_N^{(j-1)})$,

(c) Generar Θ_3^j a partir de $\lambda(\Theta_3 | \Theta_1^{(j)}, \Theta_2^{(j)}, \dots, \Theta_{N-1}^{(j-1)}, \Theta_N^{(j-1)})$,

⋮

(d) Generar Θ_N^j a partir de $\lambda(\Theta_N | \Theta_1^{(j)}, \Theta_2^{(j)}, \dots, \Theta_3^{(j)}, \dots, \Theta_{N-1}^{(j)})$,

Paso 3: Hacer $j = j + 1$ y volver al **Paso 2**.

A diferencia del algoritmo HM, en el algoritmo de Gibbs no hay necesidad de incluir un paso de rechazo para las muestras obtenidas. En cambio, bajo condiciones suaves de regularidad como las propuestas por Tierney(1991), es dable verificar que a medida que $J \rightarrow$

∞ , las muestras que se consiguen a partir del algoritmo de Gibbs convergen en distribución sobre las distribuciones marginales y conjunta relevantes. Así, por ejemplo, se tiene:

$$(1.36) \quad \theta_i^{(J)} \rightarrow \rho(\theta_i),$$

$$(1.37) \quad (\theta_1^J, \dots, \theta_N^J) \rightarrow \pi(\Theta).$$

De esta manera, para J suficientemente grande, de modo que la condición de convergencia ha sido alcanzada, las muestras sucesivas $(\theta_1^j, \dots, \theta_N^j)$ para $j = (J + 1), \dots, (J + M)$ pueden ser vistas como si fueran extraídas directamente de la distribución objetivo $\pi(\Theta)$.

El algoritmo de Gibbs puede ser modificado para permitir agrupar los parámetros en bloques. Por tanto, no es necesario generar muestras para cada parámetro individualmente, sino que es posible hacerlo en grupos, usando para ello distribuciones multivariantes. A manera de ejemplo, supongase que se tiene el vector de parámetros $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ y se definen los bloques (θ_1, θ_2) y (θ_3, θ_4) . Entonces, el algoritmo de Gibbs puede ser llevado a cabo de la siguiente manera:

Paso 1: Seleccionar los valores iniciales para $\Theta_1^{(0)}, \Theta_2^{(0)}, \Theta_3^{(0)}, \Theta_4^{(0)}$ y fijar $j = 1$.

Para $j = 1, \dots, J$.

Paso 2: Transitar las condicionales y generar muestras para cada uno de los parámetros:

(a) Generar (Θ_1^j, Θ_2^j) a partir de $\lambda(\Theta_1, \Theta_2 \mid \Theta_3^{(j-1)}, \Theta_4^{(j-1)})$,

(b) Generar (Θ_3^j, Θ_4^j) a partir de $\lambda(\Theta_3, \Theta_4 \mid \Theta_1^{(j)}, \Theta_2^{(j)})$,

Paso 3: Hacer $j = j + 1$ y volver al **Paso 2**.

El Modelo de Volatilidad Estocástica con Cambios de Régimen Markovianos (MSSV)

1. Introducción

Continuando con los conceptos presentados, este Capítulo tiene como finalidad introducir el modelo de Volatilidad Estocástica con Cambios de Régimen Markovianos (MSSV), así como describir el procedimiento para estimar sus parámetros mediante técnicas bayesianas y de simulación MCMC. El modelo MSSV fue inicialmente introducido en la literatura por So et al. (1998) y ha sido usado con cierta amplitud por otros autores para identificar la existencia de cambios de régimen en la volatilidad de series financieras y, estudiar diferencias en los niveles de persistencia que pueden ser asociados a la volatilidad de esta clase de series.

2. Descripción del modelo

El modelo MSSV supone una combinación de los modelos SV de Taylor (1982) y MS de Hamilton (1989). El mismo puede ser descrito como un modelo de espacio de estados, con la característica de incluir ahora dos variables latentes en su estructura. Asumiendo en este caso la posibilidad de dos regímenes en la dinámica de la volatilidad de una serie financiera, el modelo MSSV puede ser especificado entonces a partir del siguiente sistema de ecuaciones:

$$(2.1) \quad r_t = \exp(h_t/2)\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, 1),$$

$$(2.2) \quad h_t = \mu_{s_t} + \phi(h_{t-1} - \mu_{s_{t-1}}) + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2), \quad \text{cov}(\varepsilon_t, \eta_t) = 0,$$

$$(2.3) \quad \mu_{s_t} = s_{1t}\mu_1 + s_{2t} \cdot \mu_2, \quad \mu_1 < \mu_2,$$

$$(2.4) \quad s_{it} = 1 \text{ si } s_t = i \text{ y } s_{it} = 0 \text{ si } s_t \neq i, \quad i \in \{1, 2\},$$

$$(2.5) \quad P(s_t = i \mid s_{t-1} = j) = p_{ji},$$

$$(2.6) \quad \sum_{i=1}^2 p_{ji} = 1.$$

Respectivamente, r_t denotan los retornos de la serie de tiempo que es objeto de interés, mientras h_t es el logaritmo de su varianza en cada momento $t = 1, \dots, T$. Al igual que en el modelo SV estándar, se asume que h_t es un proceso latente que sigue un proceso AR(1) gaussiano estándar con parámetro de persistencia $|\phi| < 1$ y media μ_{s_t} . En esta presentación del modelo MSSV, sin embargo, esta última se asume puede transitar ahora entre dos regímenes de volatilidad acuerdo a los valores que toma una segunda variable latente s_t . En particular, se tiene entonces que h_t se encuentra en un régimen de baja volatilidad cuando $s_t = 1$ ($\mu_{s_t} = \mu_1$) y se halla a su vez en un régimen de alta volatilidad cuando $s_t = 2$ ($\mu_{s_t} = \mu_2$). La propiedad markoviana que define la evolución de s_t viene especificada a través de (2.5) y (2.6). Por tanto, es posible hallar que la dinámica de s_t se encuentra resumida en la matriz de transición Q . La misma puede ser representada como:

$$(2.7) \quad Q = \begin{bmatrix} p_{11} & 1 - p_{11} \\ 1 - p_{22} & p_{22} \end{bmatrix}.$$

Con base en esta última, es posible encontrar que las probabilidades no condicionales de cada régimen son iguales finalmente a:

$$(2.8) \quad \pi_{11} = \frac{1 - p_{22}}{2 - p_{11} - p_{22}}, \quad \pi_{22} = \frac{1 - p_{11}}{2 - p_{11} - p_{22}}.$$

3. Estimación del modelo

Dado un vector de observaciones $R = (r_1, \dots, r_T)$, la estimación del modelo MSSV requiere inferir los valores del conjunto de parámetros $\Theta = (\mu_1, \mu_2, \phi, \sigma_\eta^2)$, las probabilidades de transición $\Pi = (p_{11}, p_{12}, p_{22}, p_{21})$, así como de cada uno de los elementos que integran los vectores de variables latentes $H = (h_1, \dots, h_T)$ y $S = (s_1, \dots, s_T)$. En particular, la presencia de estos dos últimos vectores implica que la función de verosimilitud en el modelo MSSV debe ser integrada sobre $(2 \cdot T + 8)$ variables. Jaquier et al. (1994) muestran sin embargo que los métodos tradicionales de estimación tienden a fallar en estos casos frente a la complejidad de la función de verosimilitud, por lo cual sostienen que una mejor alternativa consiste entonces en utilizar métodos de estimación alternativos.

La aproximación básica para estimar el modelo MSSV usando técnicas bayesianas y de simulación MCMC fue presentada inicialmente por So et al. (1998). En particular, al igual que Jaquier et al. (1994), estos autores usan el principio de aumento de datos de Tanner y Wong (1987), para incluir las variables latentes H y S en un vector de parámetros aumentado $\Psi = (\Theta, \Pi, H, S)$, cuya densidad posterior condicional puede ser escrita como: $f(\Theta, H, S \mid R)$. Usando el Teorema de Bayes, So et al. (1998) demuestran que esta última puede ser descompuesta como:

$$(2.9) \quad f(\Psi \mid R) \propto f(R \mid \Theta, \Pi, H, S) f(\Theta, \Pi, H, S).$$

Donde, usando (2.1) se tiene que $f(R \mid \Theta, \Pi, H, S) \propto f(R \mid H)$ y, por tanto:

$$(2.10) \quad f(\Psi \mid R) \propto f(R \mid H) f(H \mid \Theta, \Pi, S) f(\Theta, \Pi, S),$$

$$(2.11) \quad f(\Psi \mid R) \propto f(R \mid H) f(H \mid \Theta, \Pi, S) f(S \mid \Theta, \Pi) \cdot f(\Theta, \Pi).$$

En esencia, la densidad posterior conjunta del modelo MSSV muestra como se relacionan los modelos SV y MS. El primer término a la derecha del signo de proporcionalidad puede ser interpretado propiamente como la función de verosimilitud del modelo. A su vez,

$f(H | \Theta, \Pi, S)$ corresponde a la densidad posterior del modelo AR(1) estándar con cambios de régimen (una vez S es conocida), mientras que $f(S | \Theta, \Pi)$ es la densidad posterior del Modelo de Cambios de Régimen. Finalmente, $f(\Theta, \Pi)$ es la densidad conjunta a priori de los parámetros y probabilidades de transición.

A fin de estimar el modelo MSSV, So et al. (1998) proponen usar el algoritmo de Gibbs. De este modo, la estimación del modelo MSSV puede ser llevada a cabo iterando un número J de veces suficiente cada uno de los siguientes pasos:

Paso 1: Seleccionar los valores iniciales: $H^{(0)}$, $S^{(0)}$, $\Theta^{(0)}$ y fijar $j = 1$.

Para $j = 1, \dots, J$.

Paso 2: Simular $\Theta^{(j+1)} \sim f(\Theta | H^{(j)}, S^{(j)}, \Theta_-^{(j)})$,

Paso 2.1: Simular $\sigma_\eta^2^{(j+1)} \sim f(\sigma_\eta^2 | H^{(j)}, S^{(j)}, \phi^{(j)}, \mu_1^{(j)}, \mu_2^{(j)})$,

Paso 2.2: Simular $\mu_1^{(j+1)}, \mu_2^{(j+1)} \sim f(\mu_1, \mu_2 | H^{(j)}, S^{(j)}, \phi^{(j)}, \sigma_\eta^2^{(j+1)})$,

Paso 2.3: Simular $\phi^{(j+1)} \sim f(\phi | H^{(j)}, S^{(j)}, \sigma_\eta^2^{(j+1)}, \mu_1^{(j+1)}, \mu_2^{(j+1)})$,

Paso 3: Simular $S^{(j+1)} \sim f(S | H^{(j)}, \Theta^{(j+1)})$.

Paso 3.1: Simular $p_{11}^{(j+1)} \sim f(p_{11} | S^{(j+1)})$,

Paso 3.2: Simular $p_{22}^{(j+1)} \sim f(p_{22} | S^{(j+1)})$,

Paso 3.3: Simular $p_{12}^{(j+1)} \sim 1 - p_{11}^{(j+1)}$,

Paso 3.4: Simular $p_{21}^{(j+1)} \sim 1 - p_{22}^{(j+1)}$,

Paso 4: Simular $H^{(j+1)} \sim f(H | R, S^{(j+1)}, \Theta^{(j+1)})$.

Paso 5: Fijar $j = j + 1$.

Paso 6: Mientras $j < J$ ir al **Paso 2**.

3.1. Muestreo de Θ .

El procedimiento empleado para generar μ_1 , μ_2 , ϕ y σ_η^2 termina siendo análogo al descrito por Chib y Albert (1993) así como Kim y Nelson(1999), para el caso de procesos autorregresivos. En esencia, el mismo puede ser considerado inicialmente como una extensión del procedimiento utilizado habitualmente en la estimación de modelos lineales de regresión. En comparación con este último sin embargo, la principal diferencia proviene del tratamiento

que debe tenerse en cuenta para las primeras observaciones de la muestra de datos empleada.

3.1.1. Muestreo de σ_η^2 .

Con la finalidad de generar muestras de σ_η^2 , se define primero:

$$(2.12) \quad Y_t = (h_t - \mu_{s_t}) - \phi \cdot (h_{t-1} - \mu_{s_{t-1}}).$$

La distribución a priori de σ_η^2 se puede asumir viene dada por:

$$(2.13) \quad f(\sigma_\eta^2 \mid \phi, \mu_1, \mu_2) \sim IG(A_0, B_0).$$

En este caso, IG denota la distribución inversa-gamma. Respectivamente, A_0 y B_0 definen los hiper-parámetros de esta distribución. Partiendo de esta última, es dable encontrar que se puede generar σ_η^2 directamente a partir de su distribución posterior dada por:

$$(2.14) \quad f(\sigma_\eta^2 \mid H, S, \phi, \mu_1, \mu_2) \sim IG\left(\frac{A_0 + T}{2}, \frac{B_0 + (1 - \phi^2) \cdot (h_1 - \mu_1)^2 + \sum_{t=1}^T Y_t^2}{2}\right).$$

3.1.2. Muestreo de μ_1 y μ_2 .

Los parámetros μ_1 , μ_2 pueden ser generados en bloque. Definiendo inicialmente $s_{i,t} = 1$ si $s_i = 1$ y $s_{i,t} = 0$ en otros casos para $i = 1, 2$, es posible reescribir (2.2) como:

$$(2.15) \quad h_t^* = \mu_1 s_{1t}^* + \mu_2 s_{2t}^* + \eta_t.$$

En esta última expresión, $h_t^* = h_t - \phi h_{t-1}$ y $s_t^* = s_{i,t} - \phi s_{i,t-1}$ para $i = 1, 2$. A fin de hacer que ésta sea además homocedástica, la misma puede se divide entre σ_η , para obtener:

$$(2.16) \quad h_t^* = \mu_1 \frac{s_{0t}^*}{\sigma_\eta} + \mu_2 \frac{s_{1t}^*}{\sigma_\eta} + v_t, \quad v_t \sim N(0, 1).$$

En notación matricial, esta última se convierte en:

$$(2.17) \quad \hat{h}_T^* = \hat{s}_T^* \cdot \hat{\mu} + v \quad v_t, \sim N(0, I_{T-1}).$$

De esta manera, es posible derivar la distribución posterior de (μ_1, μ_2) dada una distribución a priori apropiada. En particular, es dable asumir que está última es igual a:

$$(2.18) \quad f(\mu_1, \mu_2 \mid \phi, \sigma_\eta^2) \sim N(A_0, B_0)_{I[\mu_1 < \mu_2]}.$$

Respectivamente, A_0 y B_0 son los hiper-parametros de la distribución a priori. Por su parte, $I[\mu_1 < \mu_2]$ es una función indicadora que, en este caso, sirve para denotar que solo se consideran aquellas realizaciones que cumplan la condición $\mu_1 < \mu_2$. Esta condición es necesaria para garantizar la identificación de un estado de baja volatilidad (μ_1) y otro de alta volatilidad (μ_2). Partiendo de ésta densidad, se tiene que la distribución posterior conjunta de (μ_1, μ_2) viene dada por:

$$(2.19) \quad f(\mu_1, \mu_2 \mid H, S, \phi^{(j)}, \sigma_\eta^{2(j+1)}) \sim N(A_1, B_1)_{I[\mu_1 < \mu_2]}.$$

En ésta, ahora A_1 y B_1 pueden ser interpretados como los hiperpárametros posteriores. Identificando la transpuesta de un vector con el signo ($'$), éstos son iguales a:

$$(2.20) \quad B_1 = (B_0^{-1} + \hat{s}_T^{*'} \hat{s}_T^*)^{-1},$$

$$(2.21) \quad A_1 = B_1(B_0^{-1} A_0 + \hat{s}_T^{*'} \hat{h}_T^*).$$

A fin de satisfacer la condición $\mu_1 < \mu_2$ se emplea un algoritmo de aceptación y rechazo.

3.1.3. Muestreo de ϕ .

Para generar muestras del parámetro ϕ hacemos $h_t^{**} = h_t - \mu_{s_t}$, de modo que (2.2) puede ser escrita ahora como:

$$(2.22) \quad h_t^{**} = \phi h_{t-1}^{**} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = N(0, \sigma_\eta^2).$$

A fin de hacer esta expresión homocedástica, se puede dividir entre σ_η . De esta manera se obtiene:

$$(2.23) \quad \frac{h_t^{**}}{\sigma_\eta} = \phi \frac{h_{t-1}^{**}}{\sigma_\eta} + v_t, \quad v_t \sim N(0, 1).$$

En notación matricial lo anterior se puede escribir como:

$$(2.24) \quad \hat{h}_t^{**} = \hat{\phi} \cdot X + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, I_{T-1}).$$

De esta manera, es dable obtener muestras para ϕ si se considera una distribución a priori apropiada para éste. En particular, se puede asumir que esta última viene dada por:

$$(\phi \mid \mu_1, \mu_2, \sigma_\eta^2) \sim N(A_0, B_0)_{|\phi| < 1}.$$

Para ésta, A_0 y B_0 representan los hiper-parámetros de la distribución a priori y $|\phi| < 1$ es una función indicadora que sirve para condición para garantizar la estacionariedad del proceso h_t . Partiendo de esta distribución es posible entonces derivar la distribución posterior de ϕ como:

$$(2.25) \quad f(\phi \mid H, S, \sigma_\eta^2, \mu_1, \mu_2) \sim N(A_1, B_1)_{|\phi| < 1}$$

En ésta, A_1 y B_1 representan los hiperparámetros posteriores. Estos vienen dados respectivamente por:

$$(2.26) \quad B_1 = (B_0^{-1} + X'X)^{-1},$$

$$(2.27) \quad A_1 = B_1(B_0^{-1}A_0 + X'\hat{h}_T^{**}).$$

Finalmente, con el propósito de garantizar la condición $|\phi| < 1$, se emplea el un algoritmo de aceptación y rechazo. De esta manera, si $|\phi^j| < 1$, entonces ϕ^j es aceptado, de otra manera el valor de ϕ^j se rechaza y vuelve a ser generado.

3.2. Muestreo de S.

El procedimiento para generar (s_1, \dots, s_T) se basa en un esquema de muestreo FFBS¹⁴ (Carter y Kohn, 1994) como el descrito por Kim et al.(1999). El mismo involucra primero generar las probabilidades de cada estado o régimen y luego, usar esta información con el propósito de inferir cada uno de los elementos del vector $S = (s_1, \dots, s_T)$. A fin de lograr el primero de los pasos anteriores, una opción consiste en utilizar secuencialmente el Filtro de Hamilton y luego el Suavizador de Kim.

3.2.1. Filtro de Hamilton.

La implementación del Filtro de Hamilton en procesos autoregresivos es presentada en detalle por Hamilton(1994) y Mei-Yuan (2008). Presentado de forma sintética, la aplicación del filtro requiere llevar a cabo los siguientes pasos:

Paso 1: Sea la probabilidad de encontrarse en cierto régimen $i = 1, \dots, K$ al principio del periodo $t = 1, 2, \dots, T$ condicionada al conjunto de información Λ_{t-1} igual a: $P(s_{t-1} = i | \Lambda_{t-1})$, los pesos $P(s_t = j, s_{t-1} = i | \Lambda_{t-1})$ para $i, j = 1, \dots, K$ son computadas como:

(2.28)

$$P(s_t = j, s_{t-1} = i | \Lambda_{t-1}) = P(s_t = j, s_{t-1} = i)P(s_{t-1} = i | \Lambda_{t-1}) = p_{ij}P(s_{t-1} = i | \Lambda_{t-1}).$$

Paso 2: Una vez h_t es observado al final del periodo t , entonces:

(2.29)

$$P(s_t = j, s_{t-1} = i | \Lambda_t) = P(s_t = j, s_{t-1} = i | \Lambda_{t-1}, h_t)$$

$$\frac{P(s_t = j, s_{t-1} = i | \Lambda_{t-1})}{f(h_t | \Lambda_t)} = \frac{f(h_t | s_t = j, s_{t-1} = i, \Lambda_{t-1}) \cdot P(s_t = j, s_{t-1} = i | \Lambda_{t-1})}{\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M f(h_t | s_t = j, s_{t-1} = i, \Lambda_{t-1}) P(s_t = j, s_{t-1} = i | \Lambda_{t-1})}.$$

Paso 3: Se actualiza la probabilidad de cada régimen:

$$(2.30) \quad P(s_t = j | \Lambda_t) = \sum_{i=1}^M P(s_t = j, s_{t-1} = i | \Lambda_t).$$

¹⁴Forward Filtering - Backward Sampling

A fin de dar inicio al Filtro, se emplean las probabilidades ergódicas obtenidas a partir de la matriz de transición Q en (2.6). Así, se tiene entonces $P(s_0 = i | \Lambda_0) = \pi_{ii}$.

3.2.2. Suavizador de Kim.

El Filtro de Hamilton usa la información disponible hasta cierto momento $t < T$ para inferir la probabilidad de cada régimen en el momento t . El Suavizador de Kim sin embargo, permite mejorar los resultados obtenidos en el paso anterior al usar toda la información disponible $t = T$ para estimar la probabilidad de cada régimen en el momento t . A fin de implementar este último procedimiento, se requiere seguir el siguiente paso:

Paso 1: Dado $P(s_T | \Lambda_T)$ en la última iteración del Filtro de Hamilton, entonces en el momento $T - 1$ se tiene:

$$(2.31) \quad P(s_{T-1} = i, s_t = j | \Lambda_T) = \frac{P(s_T = j | \Lambda_T) \cdot P(s_{T-1} = i | \Lambda_{T-1}) \cdot P(s_T = j | s_{T-1} = i)}{P(s_T = j | \Lambda_{T-1})},$$

$$P(s_{T-1} = i | \Lambda_T) = \sum_{j=1}^M P(s_{T-1} = i, s_t = j | \Lambda_T).$$

El procedimiento anterior se repite para $T - 2, T - 3, \dots, 2, 1$, permitiendo inferir de esta manera las probabilidades suavizadas para todos los periodos considerados.

3.2.3. Inferencia de (s_1, \dots, s_T) .

En general, una vez halladas las probabilidades suavizadas para uno de los estados para cada momento t , el procedimiento para hallar s_t consiste ahora en comparar sus valores contra un valor aleatorio $u \sim U[0, 1]$ (Kim et al., 1999). De esta manera, por ejemplo, decimos que $s_t = 1$ si se verifica que $P(s_t = 1 | \Psi_t) \geq u$ y, decimos en cambio que $s_t = 2$ si $P(s_t = 1 | \Psi_t) < u$.

Para el presente estudio, la regla anterior es modificada ligeramente, imponiendo la condición $u = 0,5$ para todo $t = 1, 2, \dots, T$. La decisión de usar éste criterio para inferir los estados s_t se debe a que favorece la obtención de resultados más estables en el tiempo y por tanto,

má significantes para una interpretación de carácter macroeconómica de largo plazo sobre los resultados obtenidos.

3.2.4. Inferencia de p_{11} y p_{22} .

Asumiendo distribuciones independientes Beta para p_{11} y p_{22} , sus distribuciones a priori pueden ser especificadas como:

$$(2.32) \quad f(p_{ii}) \sim \text{Beta}(A_0, B_0), \quad i, j = \{1, 2\}.$$

Respectivamente, A_0 y B_0 son los hiper-parámetros a priori. Con base en éstas, es posible encontrar que las distribuciones posteriores de p_{11} y p_{22} vienen dadas entonces por:

$$(2.33) \quad f(p_{ii} | S) \sim \text{Beta}(A_0 + n_{ii}, B_0 + n_{ij}), \quad i, j = \{1, 2\}.$$

Usando estas distribuciones es posible entonces generar p_{11} y p_{22} . En este caso, n_{ij} puede ser obtenido a partir de (s_1, \dots, s_T) , simplemente contando el número de veces que el proceso transita del régimen $s_{t-1} = i$ al régimen $s_t = j$. Partiendo de los resultados anteriores, las probabilidades de transición p_{12} y p_{21} pueden ser halladas como el complemento de las anteriores:

$$(2.34) \quad f(p_{ij} | S) \sim 1 - p_{ii}, \quad i, j = \{1, 2\}.$$

3.3. Muestreo de H.

Con el propósito de generar el vector H se emplea un algoritmo MH con aceptación - rechazo como el propuesto por Jaquier et al. (1994). El mismo fue luego desarrollado con más detalle por Kim, Shepard y Chib (1998), quienes proponen una funión candidata diferente. En este caso, los pasos necesarios para la ejecución del algoritmo pueden ser resumidos de la siguiente manera:

Paso 1: Generar h_t^* de la distribución candidata $p_N(h_t | \alpha_t^*, \beta^2)$.

Paso 2: Generar $u \sim U [0, 1]$.

Paso 3: Si $u \leq \frac{f^*(r_t, h_t^*, \Theta)}{g^*(r_t, h_t^*, \Theta)}$.

Fijar $h_t = h_t^*$.

En otro caso volver al **Paso 1**.

Respectivamente, p_N denota la función Normal con media α_t^* y varianza β^2 . Estos últimos vienen dados a su vez por:

$$(2.35) \quad \alpha_t^* = \alpha_t + \frac{\beta^2}{2} \cdot (r^2 \cdot \exp\{-\alpha_t\} - 1),$$

$$(2.36) \quad \alpha_t = \mu_{s_t} + \phi \cdot \frac{(h_{t+1} - \mu_{s_t}) + (h_{t-1} - \mu_{s_t})}{(1 + \phi^2)},$$

$$(2.37) \quad \beta^2 = \frac{\sigma_\eta^2}{(1 + \phi^2)}.$$

Por su parte, $f^*(r_t, h_t, \Theta)$ y $g^*(r_t, h_t, \Theta)$ están son iguales:

$$(2.38) \quad \log f^*(r_t, h_t, \Theta) = -\frac{1}{2}h_t - \frac{r_t^2}{2} \{ \exp(-\alpha_t) \},$$

$$(2.39) \quad \log g^*(r_t, h_t, \Theta) = -\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2}h_t - \frac{r_t^2}{2} [\exp(-\alpha_t) \{1 + \alpha_t - h_t \exp(-\alpha_t)\}].$$

3.4. Hiper-parámetros.

Una vez establecido el procedimiento general para estimar el modelo MSSV, el paso final consiste en seleccionar los hiper-parámetros para la distribución a Priori de los parámetros. Los mismos pueden ser seleccionados a fin de reflejar escasa información que se tiene de los valores reales de estos de los parámetros. En particular, atendiendo a la literatura, éstos pueden ser seleccionados de la siguiente manera: $A_0^{\sigma_\eta^2} = 5$, $B_0^{\sigma_\eta^2} = 0,05$, $A_0^{\mu_i} = 0$, $B_0^{\mu_i} = 100$ para $i = 0, 1$, $A_0^\phi = 0$, $B_0^\phi = 100$, $A_0^{p_{ii}} = 20$ y $A_0^{p_{ij}} = 1,5$. Las densidades a Priori para los parámetros del modelo, resultantes tras incorporar los hiper-parámetros seleccionados previamente, se reflejan en la Figura 2.1.

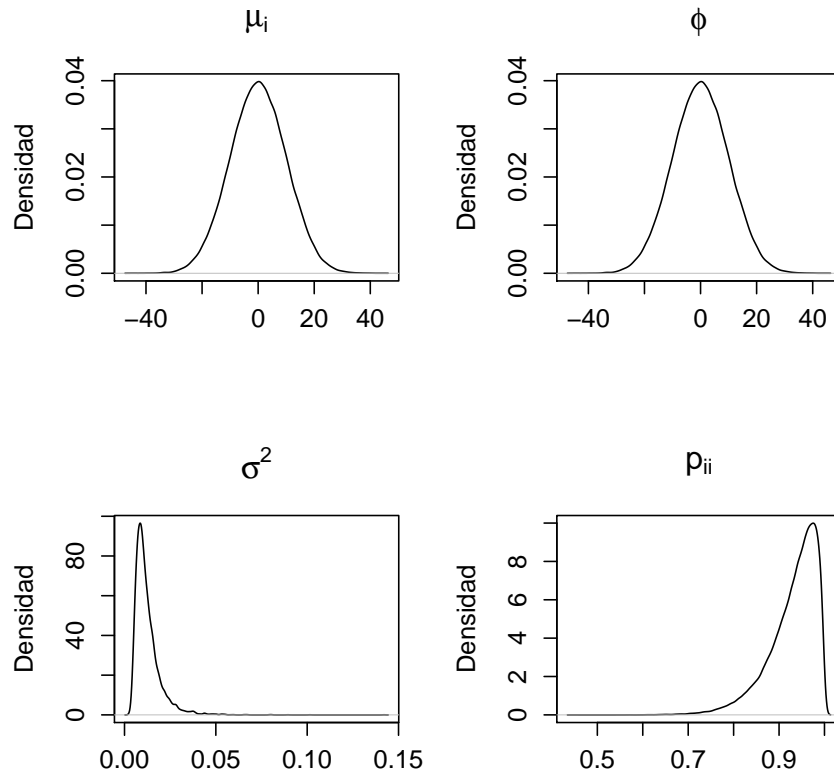


FIGURA 2.1. Densidades a priori para μ_i , ϕ , σ_η^2 y ρ_{ii} . Fuente: Elaboración propia.

Capítulo 3

Resultados

1. Introducción

La implementación del modelo MSSV y los hallazgos obtenidos a partir de éste para los precios del crudo venezolano se resumen en el presente Capítulo. Seguidamente, la Sección 2 introduce la muestra de datos utilizados, así como los supuestos específicos que fueron considerados. Por su parte, la Sección 3 presenta y discute los resultados alcanzados. Finalmente, la Sección 4 da cuenta por el objetivo central de la investigación, al revelar los los periodos de alta y baja volatilidad que pudieron ser identificados para los precios del crudo venezolano entre los años 2000 - 2016.

2. Datos e implementación

La muestra de datos usada agrega un total de 864 observaciones semanales de los precios del crudo tipo Merey. Este último sirve como referencia para el crudo venezolano. Las observaciones se denotan en Dólares de los Estados Unidos por barril (USD/barril) y reflejan específicamente, el precio de cierre de cada lunes a lo largo del periodo comprendido entre el 03 de enero de 2000 y el 24 de octubre de 2016. La fuente de la cual se recolectó toda la información fue Thompson Reuters. Con base en éstos, los retornos geométricos semanales para los precios del crudo venezolano fueron computados como:

$$(3.1) \quad r_t = \log P_t - \log P_{t-1}.$$

Si bien el objetivo central es estimar el modelo MSSV para los precios del crudo venezolano, también se consideró necesario estimar primero el modelo SV-AR(1), a fin de proveer un marco de comparación para los resultados obtenidos. Intuitivamente, el modelo SV-AR(1) puede ser visto como una aplicación específica del modelo MSSV, en el cual solamente se considera la existencia de 1 régimen. Por tanto, este último puede ser estimado a partir

del mismo algoritmo presentado en la Sección 3 del Capítulo 2, imponiendo sin embargo la condición $\mu_2 = \mu_1$. De esta manera, se fuerza a que los dos regímenes considerados colapsen sobre uno sólo. A fin de dar inicio al algoritmo para estimar los modelos SV - AR(1) y MSSV se utilizaron como valores iniciales: $\mu_1^{(0)} = -2$, $\mu_2^{(0)} = -1$, $\phi^{(0)} = 0,5$, $\sigma_\eta^{2,(0)} = 0,2$, $h_t^{(0)} = 0$ y $s_t^{(0)} = 1$ para $t = 1, \dots, T$. Estos fueron seleccionados con base en la literatura.

Un total de 15.000 iteraciones se llevaron a cabo para obtener un número similar de muestras o realizaciones de los parámetros para el modelo SV-AR(1). De éstas, se eliminaron las primeras 5.000 a fin de reducir el efecto de los valores iniciales mostrados anteriormente. Teniendo en cuenta la mayor complejidad que incorpora el modelo MSSV, se consideró prudente incrementar el número de iteraciones hasta un total de 28.000 y, eliminar luego las primeras 8.000 a fin de obtener los valores finales de sus parámetros.

3. Resultados

3.1. Resultados para el modelo SV-AR(1).

Se presentan primero los resultados para el modelo básico SV - AR(1). Los valores estimados para sus distintos parámetros se resumen en el Cuadro 3.1.

CUADRO 3.1. Parámetros del modelo SV estándar

Parámetro	Media	Mediana	Desviación Estándar	Intervalo posterior 95 %
μ	-6,532	-6,547	0.689	(-7,358;-7,358)
ϕ	0,973	0,974	0.012	(0,943;0,995)
σ_η^2	0,047	0,044	0.015	(0,024;0,084)
$-\log(2)/\log(\phi)$	57,37	27,01	554,26	(12,02; 147,31)

Fuente. Elaboración propia.

Vistos en conjunto, cabe señalar que los resultados hallados para el modelo SV-AR(1) se ajustan a lo que cabría esperar de acuerdo a la literatura. En este caso, cabe notar que el valor de μ refleja la media no condicionada del logaritmo de la varianza. Por tanto, la desviación estándar a puede ser obtenida directamente a partir de su magnitud como una

medida más intuitiva de la volatilidad de los precios del crudo venezolano, usando el hecho de que esta última es igual a $\exp(h_t/2)$. De esta manera, dado que el estimado de μ termina siendo igual a $-6,60$, es dable hallar que la desviación estándar promedio para los precios semanales del crudo venezolano es aproximadamente $3,68\%$.

Más importante aún sin embargo, es posible ver que el modelo SV-AR(1) es posible atribuir una alta persistencia a la volatilidad de los precios del crudo venezolano, en tanto el valor estimado para el parámetro ϕ termina siendo cercano a la unidad, mientras que su intervalo posterior al 5% se ubica también muy por encima de $0,90$. Esta propiedad sugiere entonces que el caso de los precios del crudo venezolano, la volatilidad observada en cierto periodo tiene una alta influencia sobre sus valores posteriores.

En un sentido tal vez más práctico, es posible apreciar los efectos que se derivan de una alta persistencia en la volatilidad, calculando para ello la Vida Media (*Half - Life*) de un choque aleatorio sobre su magnitud. Esta última puede ser computada como $-\log(2)/\log(\phi)$. De esta manera, usando las realizaciones obtenidas para ϕ , la misma termina siendo igual a $57,37$ semanas. En otras palabras, tomaría incluso entre 14 y 15 meses, poco más de un año, para que una variación inesperada en la volatilidad de los precios del crudo venezolano decayera hasta la mitad de su valor inicial.

La Figura 3.1 muestra la densidad que corresponde a la Vida Media de un choque aleatorio en la volatilidad según el modelo SV-AR(1). Esta se obtuvo usando las realizaciones de ϕ . Cabe notar que, el valor de la Vida Media crece considerablemente cuando ϕ se aproxima a la unidad. Por ejemplo, para $\phi = 0,9999$ se tiene que la Vida Media es igual a 6.931 semanas. Por esta razón, algunos valores para obtenidos para la vida media llegan incluso a superar las 30.000 semanas. La presencia de estos altos valores también explica la aparente incongruencia que existe entre la magnitud de la desviación estándar y los límites hallados para su intervalo de confianza, lo cual en realidad denota solamente un gran sesgo en la distribución de la vida media. A fin de lograr una mejor representación de la Figura 3.1, aquellos valores superiores a 5.000 fueron omitidos.

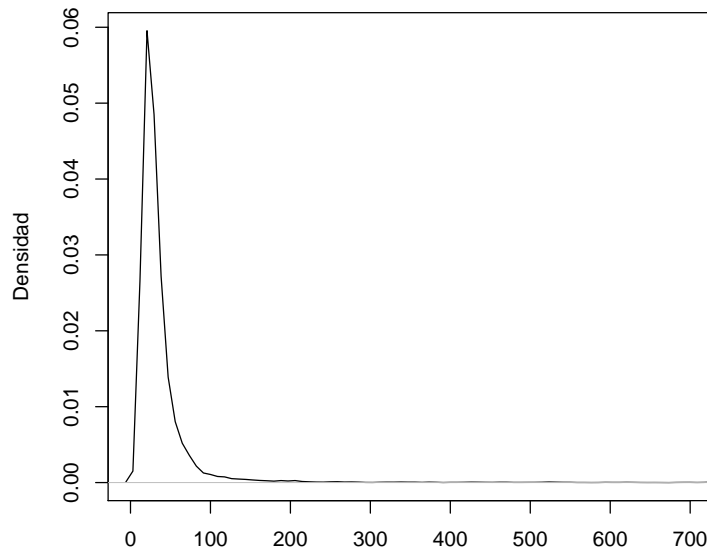


FIGURA 3.1. Vida Media para un choque en la volatilidad de acuerdo a los valores obtenidos para ϕ según el modelo SV-AR(1). Fuente: Elaboración propia.

La Figura 3.2 permite ver las densidades posteriores de: μ , ϕ y σ_{η}^2 halladas a partir del modelo SV-AR(1). A la derecha de cada una de éstas, la figura también muestra la evolución que tuvo la media de las realizaciones de cada parámetro, relativo al numero de iteraciones llevadas a cabo durante el proceso de estimación de sus valores.

Una rápida inspección de la Figura 3.1 permite observar que para los tres parámetros, sus densidades tienen inicialmente formas acampanadas. Teniendo esto en cuenta, es también claro que las densidades ϕ y σ_{η}^2 sin embargo, muestran también un mayor grado de asimetría, en torno a sus respectivos límites (Por construcción, $\phi < 1$ y $\sigma_{\eta}^2 \geq 0$). Por su parte, la evolución de la media de las realizaciones de los parametros sugieren que un alto grado de convergencia sobre sus valores reales existe tras de la iteración 5.000. Esto, al mismo tiempo que es posible apreciar que su magnitud no muestra grandes variaciones después de este punto.

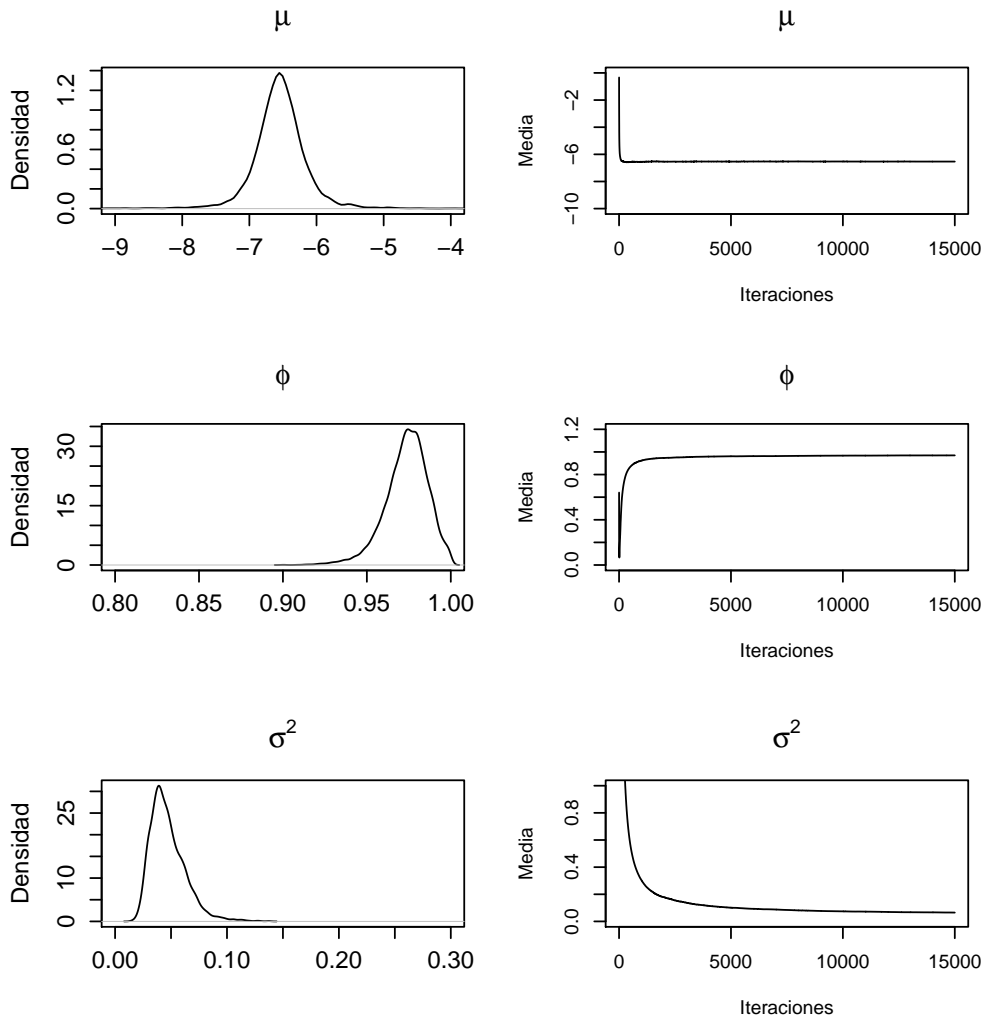


FIGURA 3.2. Densidades posteriores y medias de las realizaciones de μ , ϕ y σ_η^2 obtenidas a partir del modelo SV. Fuente: Elaboración propia.

Finalmente, la Figura 3.3 revela la dinámica de la volatilidad $\exp(h_t/2)$ para los precios del crudo venezolano durante el periodo observado de acuerdo al modelo SV-AR(1). Con el propósito de obtener h_t , simplemente se promedian las 10.000 muestras obtenidas en cada semana $t = 1, \dots, 863$. La figura incluye también los percentiles correspondientes al 5% y 95%, dando de esta manera una idea de como evolucionó la distribución de h_t a lo largo del periodo.

La Figura 3.3 muestra que en al menos en un sentido amplio, la dinámica de la volatilidad de los precios del crudo venezolano, estuvo más bien caracterizada por una continua caída de sus valores, interrumpida únicamente de manera significativa en torno al año 2008

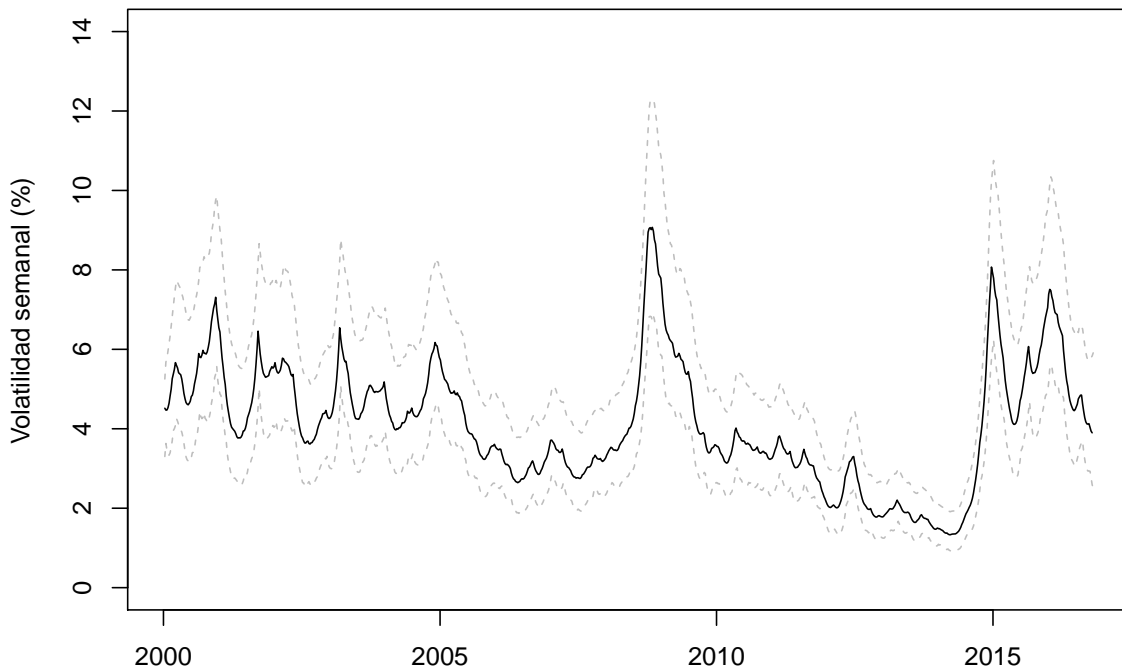


FIGURA 3.3. Volatilidad $\exp(h_t/2)$ y percentiles al 5% y 95% (en líneas grises punteadas) para los precios del crudo venezolano de acuerdo al modelo SV-AR(1). Fuente: Elaboración propia.

y luego a partir del año 2014. Después de comenzar en torno a una magnitud de 6,0% en enero de 2000, ésta sin embargo tuvo en promedio a declinar al menos hasta el mes de mayo de 2006, cuando empezó a mostrar entonces un comportamiento más estable hasta abril de 2007. La creciente confusión de los mercados financieros internacionales paralelamente con el comienzo de la crisis sub-prime en los Estados Unidos, así como su efecto en la volatilidad de los precios del crudo venezolano, es claramente visible en el acelerado crecimiento que muestra a partir de entonces hasta alcanzar un máximo de 8,9% en noviembre de 2008. Aunque luego la volatilidad tuvo nuevamente a declinar hasta alcanzar incluso un mínimo de 2,9% para todo el periodo en noviembre de 2014, los años 2015 y 2016 se caracterizan no obstante por un claro incremento en el nivel de la volatilidad de los precios del crudo venezolano, que alcanzan en promedio niveles incluso similares a los observados para el año 2000. Varios

factores diversos contribuyeron a este aumento. Entre estos por ejemplo: el desaceleramiento del crecimiento de la Economía China y otros países emergentes como Rusia, India y Brasil luego de 2010; el aumento de la producción de crudo en algunos países como Estados Unidos y Canadá y finalmente; la decisión de algunos países del Medio Oriente como Arabia Saudita de mantener sus niveles de producción a pesar de la caída de los precios internacionales del crudo a fin de preservar sus cuotas de mercado.

3.2. Resultados para el modelo MSSV.

Los resultados para el modelo MSSV se reportan en el Cuadro 3.2. Las medias e intervalos posteriores al 95 % para μ_1 y μ_2 se ubican bastante alejadas de cero, permitiendo por tanto identificar la existencia de al menos dos regímenes diferentes para la volatilidad para los precios del crudo venezolano. Específicamente, es dable apreciar que existe ahora un régimen de baja volatilidad, para el cual la media de su logaritmo es igual a -8,095 (desviación estándar $exp(\mu_1/2) = 1,75\%$) y, otro de alta volatilidad para el cual esta última se ubica en -6,22 ($exp(\mu_2/2) = 4,35\%$). El hecho de que los intervalos posteriores para μ_1 y μ_2 no se solapen entre sí, sugiere que no existen en principio problemas de identificación entre ambos regímenes.

CUADRO 3.2. Parámetros del modelo MSSV

Parámetro	Media	Mediana	Desviación Estándar	Intervalo posterior 95 %
μ_1	-8,095	-8,104	0,266	(-8,584; -7,514)
μ_2	-6,271	-6,273	0,103	(-6,466; -6,058)
ϕ	0,692	0,707	0,097	(0,477; 0,829)
σ_η^2	0,286	0,277	0,073	(0,169; 0,459)
p_{11}	0,982	0,984	0,011	(0,952; 0,996)
p_{22}	0,995	0,996	0,002	(0,988; 0,999)
$(1 - p_{11})^{-1}$	91,85	63,43	146,61	(21,01; 321,71)
$(1 - p_{22})^{-1}$	386,04	266,32	606,74	(89,04; 1354,85)
$-\log(2)/\log(\phi)$	2,08	2,00	0,717	(0,93; 3,71)

Fuente. Elaboración propia.

De acuerdo a Shibata et al (2005), una de las principales observaciones que se desprenden del modelo MSSV es que, el estimado de ϕ termina siendo más bajo y, el estimado de σ_η^2 más alto que en el modelo SV-AR(1). Los resultados aquí reportados para el modelo MSSV también confirman esta observación. El valor estimado para la media posterior de ϕ como su intervalo de confianza al 95 % caen significativamente hasta 0,692 y (0, 477; 0, 829), mientras que la media posterior de σ_η^2 alcanza a ubicarse ahora en 0,286 y su intervalo posterior al 95 % es igual a (0, 169; 0, 459). El estimado más bajo para ϕ puede ser interpretado en principio como resultado de una disminución en el grado de persistencia que exhibe la volatilidad de los precios del crudo venezolano; la cual es a su vez consecuencia de la incorporación de cambios estructurales en su dinámica, los cuales se reflejan aquí como saltos discretos en la magnitud de μ .

Al igual que antes para el modelo SV-AR(1), resulta posible calcular la Vida Media de un choque aleatorio en la volatilidad de los precios del crudo venezolano usando las realizaciones de ϕ obtenidas a partir del modelo MSSV. Con base en los resultados reportados en la Tabla 2, es posible hallar que esta última se ubica ahora en torno a 2 semanas. De hecho, considerando los límites del intervalo de confianza obtenido para la Vida Media, (0, 93; 3, 71), tomaría incluso menos de 1 mes para que un choque aleatorio en la volatilidad de los precios del crudo venezolano redujera su magnitud inicial hasta la mitad. La Figura 3.4 muestra la densidad de la Vida Media, construida a partir de las realizaciones simuladas para ϕ . Inicialmente, es posible sostener que esta termina mostrando un alto grado de asimetría en torno a su media. Esta apreciación también parece corroborada por la mediana obtenida para la Vida Media, la cual claramente termina siendo bastante próxima a su media.

Relacionado con lo anterior, es importante notar también el crecimiento en la magnitud de σ_η^2 , en la medida que revelan aspectos sobre el propio funcionamiento del modelo MSSV. Siguiendo a Kalimipaneli et al. (2004) es dable hallar que el coeficiente de correlación entre las realizaciones de ϕ y σ_η^2 es altamente significativo e igual a -0,7001 (p - valor : 0,000). Esta relación negativa entre ambos parámetros sugiere que, a fin de dar cuenta por la existencia de dos procesos de volatilidad en torno a μ_1 y μ_2 , la magnitud de σ_η^2 debe aumentar,

haciendo a su vez que el estimado de ϕ decline.

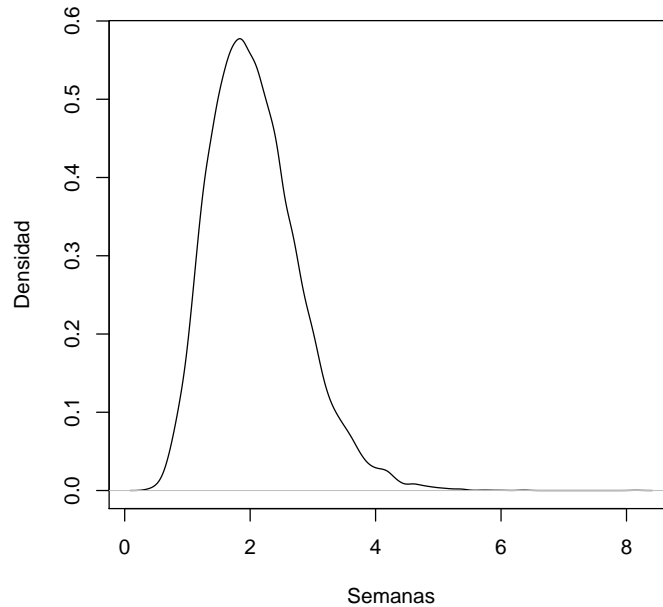


FIGURA 3.4. Vida Media para un choque en la volatilidad de acuerdo a los valores obtenidos para ϕ . Fuente: Elaboración propia.

En general, vale notar que los estimados obtenidos para ϕ y σ_{η}^2 parecen congruentes con la literatura. En particular, estos terminan siendo similares aunque no necesariamente iguales a los reportados por Vo (2009). Este último encuentra usando el modelo MSSV que, para el caso del crudo WTI, el valor de ϕ es 0,52, mientras que el estimado de σ_{η} es igual a 0,66¹⁵. La similitud de los resultados da inicialmente cierta seguridad sobre la eficacia del procedimiento implementado. Claramente, varios factores, entre los cuales cabe considerar: el periodo de tiempo observado y las diferencias en los procedimientos aplicados, así como las propias disparidades en la evolución de la volatilidad del crudo WTI y venezolano, explican las diferencias de los resultados aquí reportados y Vo (2009).

Por otro lado, los estimados obtenidos para las probabilidades de transición p_{11} y p_{22} terminan encontrándose cerca de la unidad. Específicamente, las medias posteriores para cada

¹⁵Vo reporta la desviación estándar y no la varianza

una de estas son iguales a 0,982 y 0,995. Por su parte, las probabilidades p_{12} y p_{21} vienen dadas por el complemento de las anteriores. Partiendo de éstas, cabe señalar entonces que en el caso de los precios del crudo venezolano, la probabilidad de que ocurran cambios entre regímenes de alta y baja volatilidad es más bien pequeña. Tomando como base los valores estimados para p_{11} y p_{22} , es posible entonces medir el número promedio de semanas que tomaría a la volatilidad de los precios del crudo venezolano transitar de un estado a otro. Esto es, la duración media de cada régimen. Así por ejemplo, empleando la expresión $(1 - p_{ii})^{-1}$, se puede encontrar que una vez h_t se ubica en el régimen de baja volatilidad, tardaría cerca de 92 semanas (23 meses) para transitar nuevamente al régimen de alta volatilidad. De modo similar, cuando h_t entra al régimen de alta volatilidad, le tomaría en promedio 386 semanas (96,5 meses) salir de éste y volver al régimen de baja volatilidad.

A modo de resumen, la Figura 3.5 muestra las densidades posteriores halladas para los parámetros: μ_1 , μ_2 , ϕ , σ_η^2 , p_{11} y p_{22} . Tal como se puede ver, todas ellas muestran formas acampanadas. Teniendo esto en cuenta, sin embargo, también es claro que ellas revelan cierto grado de asimetría y curtosis en todos los casos. Específicamente, al computar los estadísticos correspondientes, es posible encontrar que el coeficiente de asimetría y curtosis para μ_1 son iguales a 0,276 y 0,302, para μ_2 estos terminan siendo iguales 0,39 y 1,42, para ϕ son -0,912 y 1,23, para σ_η^2 son 0,79 y 0,85, para p_{11} son -1,33 y 2,68 y finalmente, para p_{22} estas son iguales a 1,32 y 2,58.

Un aspecto importante de cualquier estimación basada en métodos bayesianos y de simulación, tiene que ver con la convergencia de los valores alcanzados para los parámetros sobre sus magnitudes reales. Por esta razón, tal como se hizo en el caso del modelo SV-AR(1), la Figura 3.6 muestra la evolución de la media de las realizaciones simuladas de los parámetros: μ_1 , μ_2 , ϕ , σ_η^2 , p_{11} y p_{22} , respecto al número de iteraciones realizadas. La figura de esta manera provee cierta garantía de convergencia y por tanto, permite considerar que efectivamente los estimados reportados para todos los parámetros se acercan en gran medida a sus valores reales.

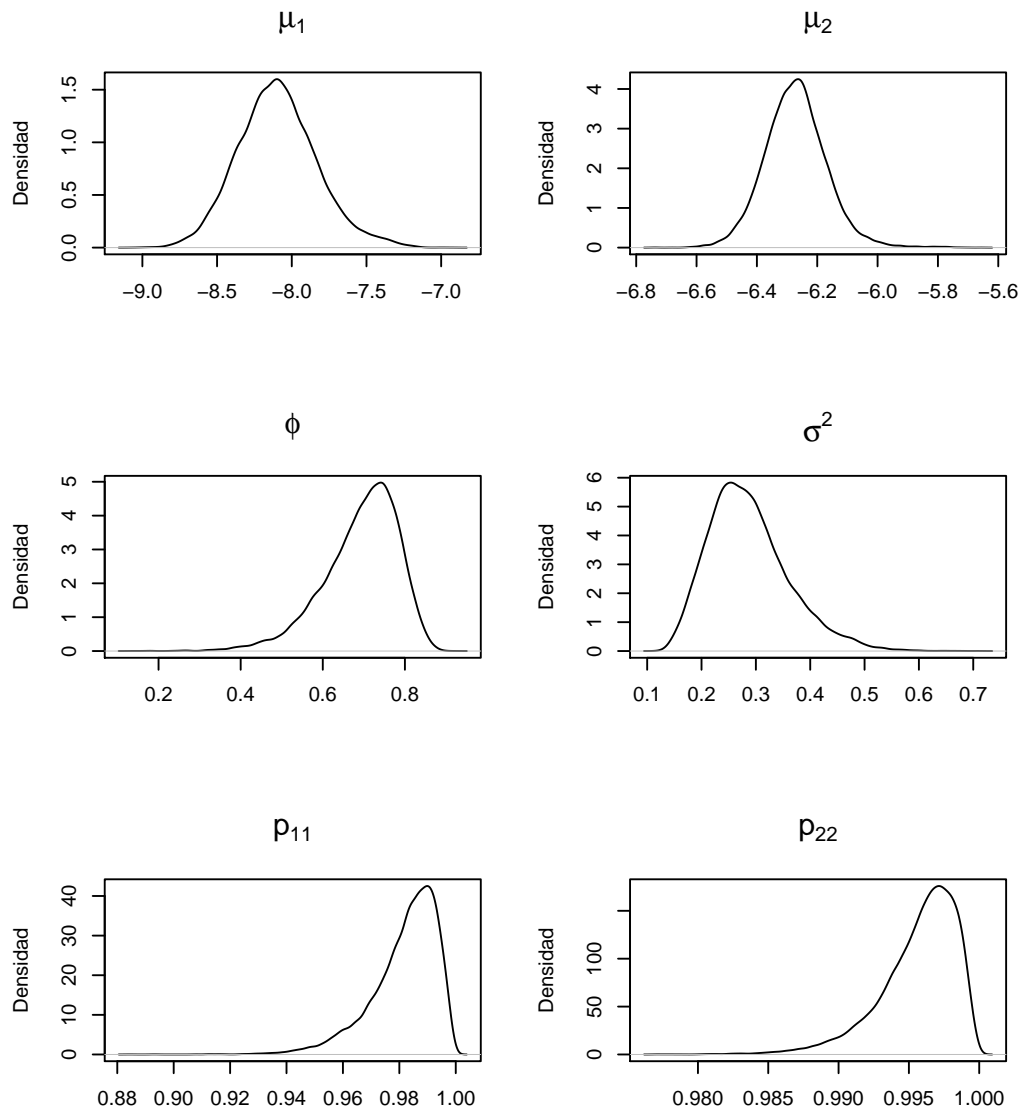


FIGURA 3.5. Densidades posteriores para μ_1 , μ_2 , ϕ , σ_{η}^2 , ρ_{11} y ρ_{22} obtenidas a partir del modelo MSSV. Fuente: Elaboración propia.

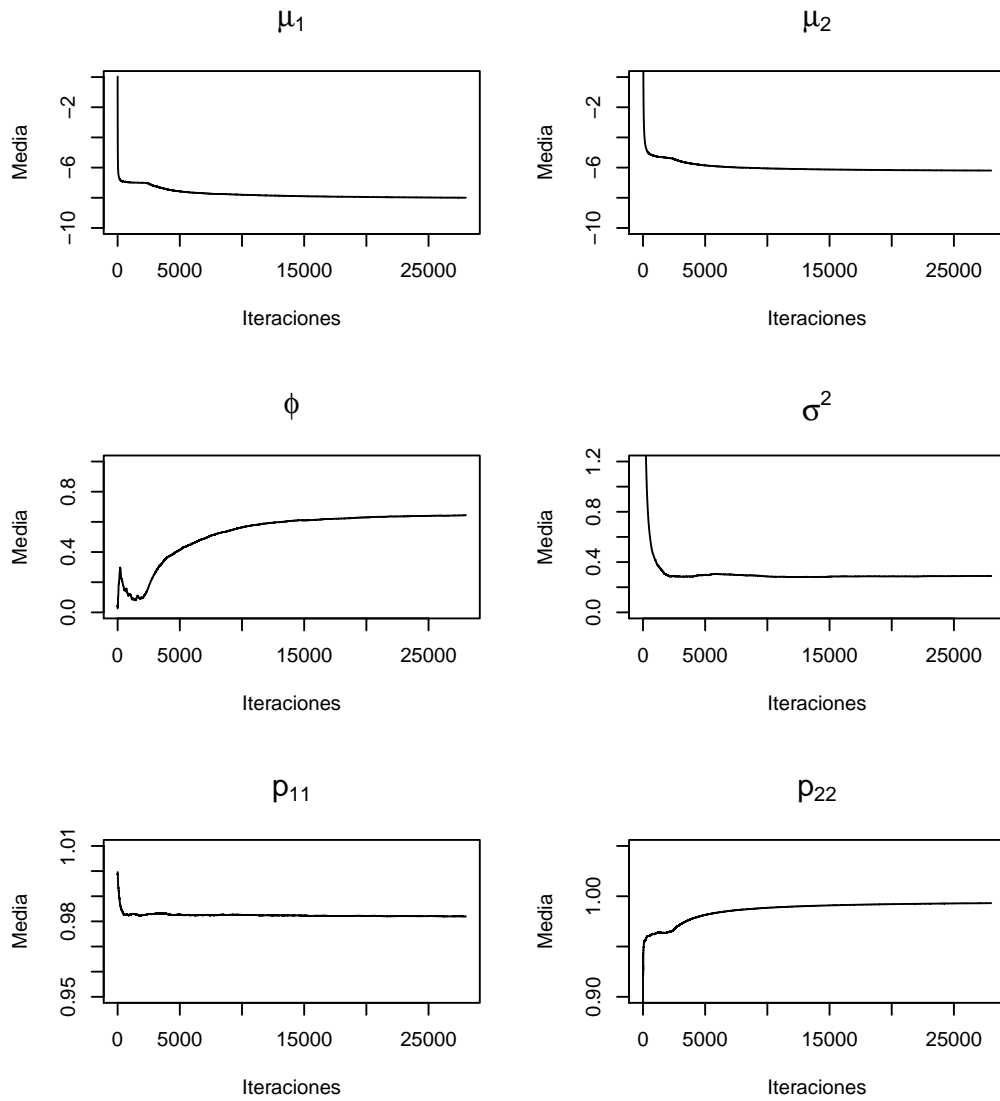


FIGURA 3.6. Media de las realizaciones de: μ_1 , μ_2 , ϕ , σ_η^2 , p_{11} y p_{22} a medida que aumenta el número de iteraciones en el modelo MSSV. Fuente: Elaboración propia.

Habiendo presentado los resultados básicos del modelo MSSV, la Figura 3.7 muestra finalmente la evolución de $\exp(h_t/2)$ para los precios del crudo venezolano de acuerdo al modelo MSSV. Tal como cabría esperarse, la misma termina siendo análoga a la hallada previamente con el modelo SV-AR(1), aún cuando es claro también que ésta es ahora más suave o más fluctuante que el caso anterior. La explicación de ello se desprende básicamente del mayor valor de σ_η^2 en el caso del modelo MSSV.

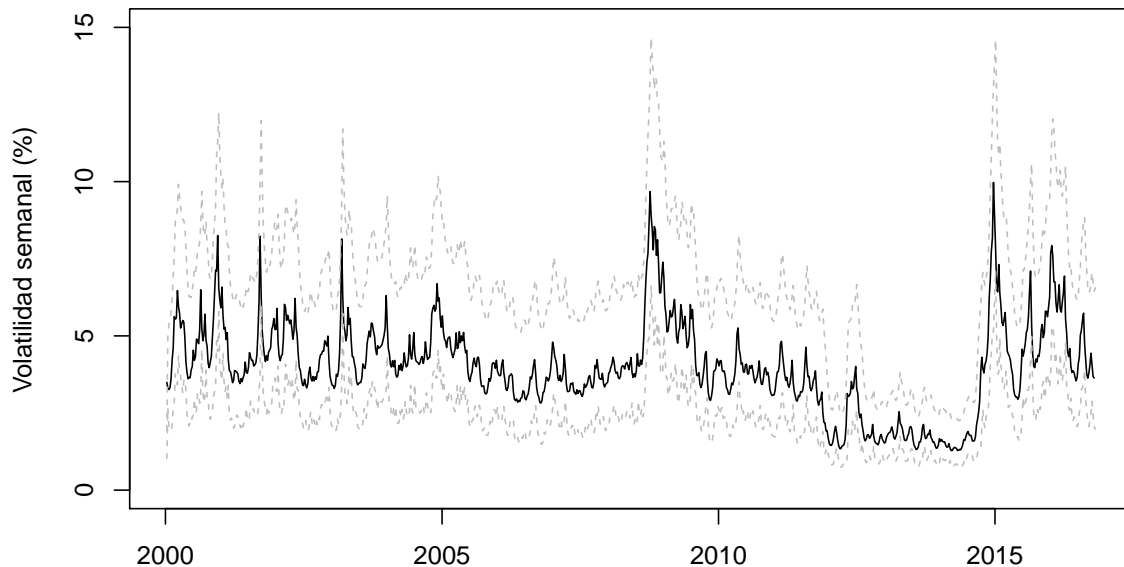


FIGURA 3.7. Volatilidad $\exp(h_t/2)$ y percentiles al 5% y 95% (en líneas grises punteadas) extraída del modelo MSSV para los precios del crudo venezolano. Fuente: Elaboración propia.

4. Regímenes de volatilidad en los precios del crudo venezolano

Partiendo del modelo MSSV, es posible inferir las probabilidades posteriores para los Regímenes de alta y baja volatilidad $P(s_t = i)$, con $i = 1, 2$. La Figura 3.8 muestra aquellas que corresponden al régimen de alta volatilidad ($s_t = 2$). De forma equivalente, las

probabilidades para el régimen de baja volatilidad ($s_t = 1$) pueden ser obtenidas como el complemento de éstas.

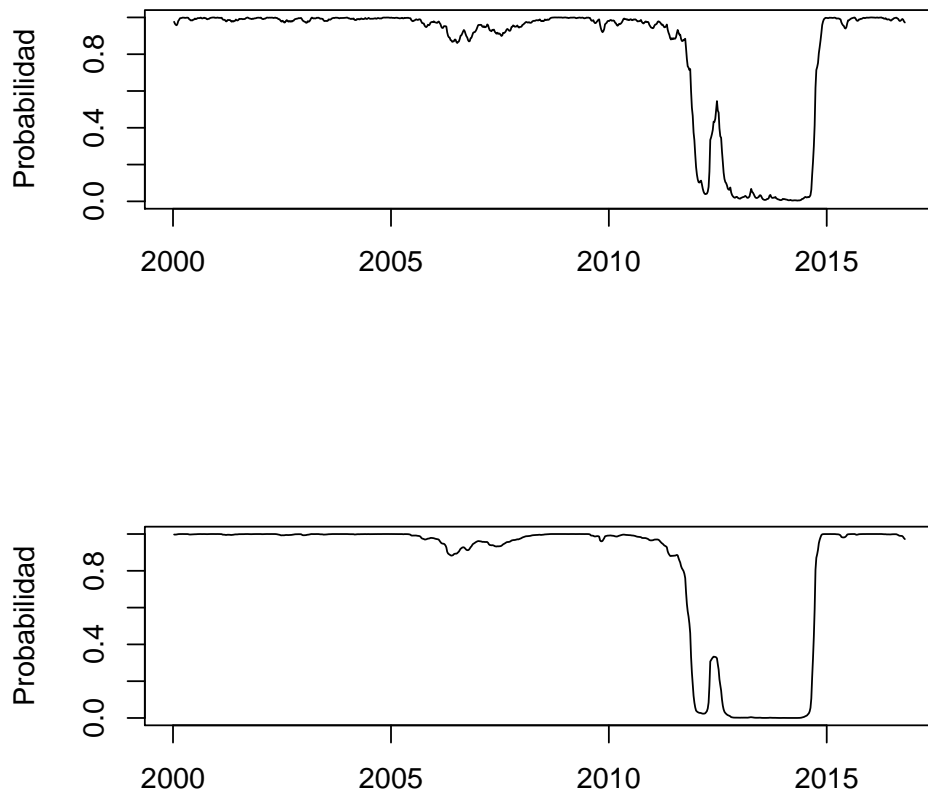


FIGURA 3.8. Probabilidades filtradas (arriba) y suavizadas (abajo) para el régimen de alta volatilidad $P(s_t = 2)$ obtenidas a partir del modelo MSSV.

Fuente: Elaboración propia.

Al igual que para la variable h_t , los valores estimados de $P(s_t = 2)$ para cada punto de tiempo $t = 1, \dots, 863$ se obtienen promediando las 20.000 realizaciones que fueron generadas a partir de su distribución posterior. En particular, la parte superior de la Figura 3.8 muestra las probabilidades halladas a partir del Filtro de Hamilton. Por su parte, la sección inferior de la misma figura presenta las probabilidades luego de ser suavizadas usando el procedimiento de Kim et al.(1999). Las diferencias entre ambas se vinculan principalmente al menor grado

de fluctuación que presentan las segundas.

A partir de la dinámica de $P(s_t = 2)$ la observación central a realizar es que el periodo 03/01/2000 - 24/10/2016 fue mayormente uno de altos niveles de volatilidad relativos en los precios del crudo venezolano. Este resultado, tal vez era de ser esperado sí se tiene en cuenta los diferentes hechos económicos y políticos que ocurrieron durante el periodo. El inicio de la Guerra contra el Terror, la invasión de Irak, la Crisis Sub - Prime, la creciente inestabilidad política de los países del Medio Oriente, así como el desarrollo del Fracking, se hallan muy probablemente entre los principales factores que explican la alta volatilidad de los precios del crudo venezolano.

Con base en $P(s_t = 2)$, es posible identificar con mayor exactitud los periodos de alta y baja volatilidad que caracterizaron la evolución de los precios del crudo venezolano. Para ello, se denota una fecha t como un punto de cambio o *switching* hacia el régimen de baja volatilidad si es posible verificar que $P(s_{t-1} = 2) > 0,5$ y $P(s_t = 2) \leq 0,5$. Análogamente, se caracteriza a su vez t como un punto de cambio hacia el régimen de alta volatilidad si $P(s_{t-1} = 2) \leq 0,5$ y $P(s_t = 2) > 0,5$. Usando este criterio, se identifican los puntos o fechas en las cuales ocurrieron cambios de régimen en la evolución de la volatilidad de los precios del crudo venezolano.

Específicamente, partiendo de la información contenida en la Figura 3.7, cabe identificar al menos dos periodos de alta volatilidad, el primero, más largo, entre el 10 de enero de 2000 y el 7 de noviembre de 2011 y, el segundo, más corto, entre el 29 de septiembre de 2014 y el 24 de octubre de 2016. Agregados, ambos periodos dan cuenta por un total de 714 semanas, las cuales agregan el 82,7% del periodo observado. En comparación, solamente es posible identificar un claro periodo de baja volatilidad, el cual ocurrió entre el 14 de noviembre de 2011 y el 22 de septiembre de 2014, cuya duración totaliza 149 semanas y el 17,3% del periodo bajo estudio.

La Figura 3.9 y la Figura 3.10 permiten finalmente los periodos de alta y baja volatilidad que fueron identificados anteriormente, contra los precios y retornos semanales del crudo

venezolano durante el periodo observado. En este caso, el único periodo de baja volatilidad aparece resaltado en azul.

Partiendo de las figuras anteriores, es posible ver que el modelo MSSV hace en principio un buen trabajo para caracterizar la evolución de la volatilidad en los precios del crudo venezolano entre periodos de alta y baja. Esto, básicamente, porque resulta claro a partir de las figuras que el periodo de baja volatilidad se ajusta en este caso también con una mayor estabilidad de los precios del crudo venezolano, así como con una menor variabilidad en sus retornos. A fin de explicar este resultado, tal vez lo más importante tener en cuenta el principio de asimetría que caracteriza el comportamiento de la volatilidad de una serie financiera, el cual hace que ésta tienda a disminuir al mismo tiempo que aumentan los precios de cierto activo. Por esta razón entonces, no es extraño apreciar que el periodo de baja volatilidad identificado coincide también con aquel que se caracteriza por presentar en promedio precios más altos para el crudo venezolano.



FIGURA 3.9. Régimenes de alta y baja volatilidad (en azul) comparados contra los precios del crudo venezolano. Fuente: Elaboración propia.

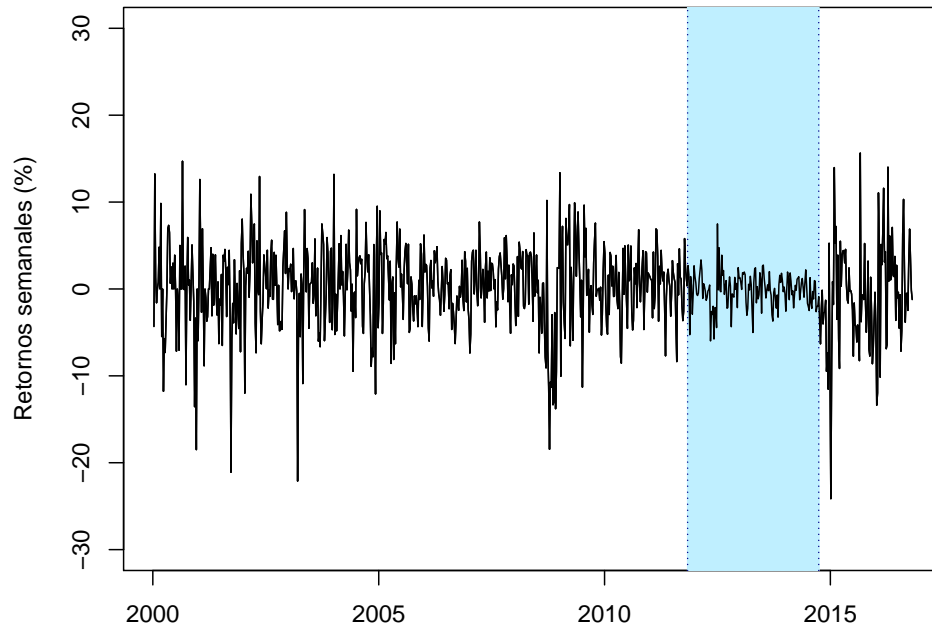


FIGURA 3.10. Régimenes de alta y baja volatilidad (en azul) comparados contra los retornos semanales del crudo venezolano. Fuente: Elaboración propia.

Finalmente, cabe notar que el procedimiento para generar la variable s_t ; en específico: el uso de un umbral de 0,5 para inferir su valor, tiene un importante papel para explicar la estabilidad de los régimenes en el periodo. En particular, cambiar este valor por una variable $u \sim U[0, 1]$ llevaría a obtener una mayor variabilidad entre régimenes. Si bien este último caso probablemente llevaría a resultados más interesantes desde un punto de vista financiero o económico de corto plazo, es también posible argumentar que emplear un umbral como el utilizado aquí permite obtener resultados más significantes desde una perspectiva largo plazo.

Conclusiones y recomendaciones

El objetivo de la presente investigación consistió en identificar cambios estructurales o de régimen en la volatilidad de los precios del crudo venezolano. Con esta finalidad, la aproximación metodológica empleada consistió en estimar el modelo de Volatilidad Estocástica con Cambios de Régimen Markovianos (MSSV), usando para ello datos semanales para los precios en USD/barril del crudo tipo Merey entre los años 2000-2016 y, técnicas de inferencia bayesiana y de simulación Monte Carlo basadas en Cadenas de Markov (MCMC). A fin de comparar los resultados alcanzados, también se llevó a cabo la estimación del modelo estándar de Volatilidad Estocástica (SV) usando la misma información y método de inferencia para sus parámetros.

En conjunto, los resultados alcanzados parecen adecuarse a los presentados en la literatura relacionada, lo que a nuestro entender brinda en principio cierta garantía sobre su veracidad. Aunque es cierto que desde un punto de vista más estricto, ciertas pruebas estadísticas podrían ser llevadas a cabo con el propósito de lograr una mayor certeza y formalidad en cuanto a la validez de los resultados presentados, su omisión en este caso se justifica en las propias dificultades prácticas que conlleva la realización de tales pruebas, lo que hace entonces que este paso pueda ser visto en sí mismo como un tema de estudio más apropiado para una futura investigación relacionada.

Teniendo lo anterior en cuenta, tal vez la observación más importante a destacar en función del objetivo general propuesto para la presente investigación es que, para el caso de la volatilidad de los precios del crudo venezolano, el modelo MSSV permite identificar con claridad la ocurrencia de cambios estructurales o de régimen en su dinámica a lo largo del periodo considerado. En particular, es posible entonces señalar la ocurrencia de dos largos periodos de alta volatilidad relativa, los cuales tuvieron lugar específicamente entre el 10/01/2000-07/11/2011 y el 29/09/2014-24/10/2016. En conjunto, éstos periodos agregaron

714 semanas de un total de 863 semanas efectivamente consideradas en la muestra de datos que fue usada, lo que termina haciendo difícil entonces negar la idea de los años 2000 - 2016 estuvieron caracterizados mayormente por la existencia de altos niveles de volatilidad en los precios del crudo venezolano. Notablemente, el único periodo de baja volatilidad que pudo ser identificado efectivamente para los precios del crudo venezolano se encontró entre el 14/11/2011-22/09/2014, comprendiendo de esta manera aquel que coincide generalmente con el fin de la crisis sub-prime y la explosión del fenómeno del *fracking* en los Estados Unidos.

En principio, vale notar que el bajo numero de eventos de cambio de régimen encontrados para la volatilidad de los precios del crudo venezolano, se vincula a la propia aproximación metodológica utilizada para en su identificación. En particular, la utilización de una referencia de 0,5 a fin de asignar los valores de la variable s_t . Como consecuencia de ésta, las probabilidades de transición halladas entre los regímenes de alta y baja volatilidad considerados terminaron siendo considerablemente pequeñas. Tal como se argumentó en su momento, esta variación sobre la aproximación habitualmente empleada en la literatura previa para inferir los valores de s_t , se justifica sin embargo en el deseo de lograr resultados más significativos desde una perspectiva macroeconómica o de largo plazo.

Por su parte, al comparar los resultados del modelo MSSV con aquellos encontrados a partir del modelo SV estándar, se destaca que en el primero se observa una disminución significativa en la persistencia que exhibe la volatilidad de los precios del crudo venezolano, así como un incremento igualmente notable en su varianza. Tanto la disminución de la magnitud de ϕ como el aumento de σ_η^2 , se encuentran estrechamente relacionados y terminan siendo un hallazgo frecuente en la literatura. Con base en esta última, estos resultados sugieren que en el caso de los precios del crudo venezolano, tal como ocurre también con otras series de tipo financieras, buena parte de la persistencia que exhibe su volatilidad, es en realidad resultado de la ocurrencia de cambios estructurales en su dinámica, los cuales de no ser tenidos en cuenta adecuadamente, pueden llevar entonces a una falsa impresión sobre los verdaderos niveles de persistencia que presenta la volatilidad de los precios del crudo.

Por último, vale notar que por su construcción, el modelo MSSV ofrece una amplia flexibilidad en su aplicación. En este sentido, estudios subsecuentes podrían enfocar su atención en considerar un mayor número de regímenes para la volatilidad de los precios del crudo, así como incorporar también elementos adicionales en éste a fin de dar cuenta por hechos estilizados asociados con la volatilidad de series financieras como, por ejemplo: asimetrías o efectos de memoria larga. Igualmente, otro posible avance sobre esta investigación consiste en el uso del modelo MSSV a los fines de lograr valores proyectados para la volatilidad de los precios del crudo venezolano, o bien llevar a cabo la comparación de los resultados que pueden ser obtenidos a partir de éste con los de otros modelos de volatilidad similares, para ilustrar entonces con mayor claridad su verdadera eficacia a los fines de caracterizar la dinámica de la volatilidad de los precios del crudo venezolano.

Bibliografía

- [1] ALBERT, J. Y CHIB, S.,(1993),*Bayes inference via Gibbs sampling of autoregressive time series subject to Markov mean and variance shifts*,*Journal of Business & Economic Statistics***11(1)**, 1-15.
- [2] BINA, C. Y VO, M.,(2007), *OPEC in the epoch of Globalization: An event study of Global Oil Prices*, *Global Economy Journal* **7 (1)**.
- [3] BLAKE, A. Y MUMBATZ, H.,(2012), *Applied Bayesian econometrics for central bankers*, *CCBS Technical Handbook No. 4*, Bank of England.
- [4] BOLLERSLEV, T.,(1986), *A Markov model of switching-regime ARCH*, *Journal of Business and Economic Statistics* **12**, 309-316.
- [5] CAI, J.,(1994), *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*, *Journal of Econometrics* **31(3)**, 307-327.
- [6] CARTER, C. K. Y KOHN, R.,(1994), *On Gibbs Sampling for State Space Models*, *Biometrika* **81 (3)**, 541-553.
- [7] CARVALHO, C., Y LOPES, H.,(2007), *Simulation-based sequential analysis of Markov switching stochastic volatility models*, *Computational Statistics & Data Analysis* **51**, 4526-4542.
- [8] CHANG, J., Y GRANT, A.,(2015), *Modeling energy price dynamics: GARCH versus stochastic volatility*, *CAMA Working Paper 20/2015*.
- [9] CLARK, P.K.,(1973), *A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices*, *Econometrica* **41**, 135-156.
- [10] CHEONG, C.,(2009), *Modeling and forecasting crude oil markets using ARCH-type models*, *Energy Policy* **37(6)**, 2346-2355.
- [11] CHRISTOPEIT, N. Y CRON, A., (1997), *A Simple Regime-switching model for Stochastic Volatilities*, *SFB-Discussion Paper B-406*.
- [12] DIEBOLD, F.,(1986), *Modelling persistence of conditional variances: a comment*, *Econometric Reviews* **5(1)**, 51-56.
- [13] ENGLE, R. H.,(1982), *Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation*, *Econometrica* **50(4)**, 987-1007.
- [14] FONG, W., Y SEE, K.,(2002), *A Markov switching model of the conditional volatility of crude oil futures prices*, *Energy Economics* **24**, 71-95.
- [15] HAMILTON, J.,(1982), *A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle* **57(2)**, 357-384.

- [16] HAMILTON, J., (1994), *Time series analysis, Princenton University Press*
- [17] HAMILTON, J., Y SUSMEL, R.,(1994), *Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime, Journal of Econometrics* **64**, 307-333.
- [18] HARVEY, A. C., E. RUIZ, Y SHEPHARD, N.,(1994), *Multivariate stochastic variance models, Review of Economic Studies* **61**, 247-264.
- [19] HARVEY, A. C., Y SHEPHARD, N.,(1996), *Estimation of an asymmetric stochastic volatility model for asset returns, Journal of Applied Econometrics* **14(4)**, 429-434.
- [20] HWANG, S., SATCHELL, S.E., PEREIRA, Y PEDRO L.V.,(2007), *How persistent is stock return volatility? An answer with Markov regime switching stochastic volatility models, Journal of Business Finance and Accounting* **34**, 1002-1024.
- [21] JAQUIER, E., POLSON, N. Y ROSSI, P.,(1994), *Bayesian analysis of stochastic volatility models, Journal of Business and Economic Statistics* **12(4)**, 371-417.
- [22] JAQUIER, E., POLSON, N. Y ROSSI, P.,(2004), *Bayesian analysis of stochastic volatility models with fat tails and correlated errors, Journal of Econometrics* **122**, 185-212.
- [23] KALIMPALLI, M. Y SUSMEL, R.,(2001), *Regime switching stochastic volatility and short-term interest rates, Journal of Empirical Finance* **11**, 309-329.
- [24] KANG, S. H., KANG, S. M., Y YOON, S. M.,(2009), *Forecasting volatility of crude oil markets, Energy Economics* **31(1)**, 119-125.
- [25] KWIATKOWSKI, L., (2010) *Markov Switching In-Mean Effect. Bayesian Analysis in Stochastic Volatility Framework, CEJME* **2(1)**, 59-94.
- [26] KIM, S., SHEPARD, N. Y CHIB, S.,(1998), *Stochastic volatility: likelihood inference and comparison with ARCH models, Review of Economics Studies* **65**, 361-393.
- [27] KIM, C.J. Y NELSON, C., (1999), *State space models with regime switching: classical and Gibbs sampling approaches with application*, MIT press, Ed. 2.
- [28] KODUVELY, H.,(2015), *Learning Bayesian Models with R, Packt Publishing Ltd.*
- [29] KOOP, G., (2006), *Bayesian Econometrics*, Wiley-Interscience.
- [30] KRICHENE, N.,(2003), *Modelling Stochastic Volatility with Application to Stock Returns IMF Working Paper 03-125.*
- [31] KUAN, C. M.,(2002), *The Markov switching model, Institute of Economics Academia Sinica.*
- [32] LAMOUREUX, C., Y LASTRAPES, W.,(1990), *Persistence in Variance, Structural Change, and the GARCH Model, Journal of Business & Economic Statistics* **8**, 225-234.
- [33] LUX, T., SEGNON, M., Y GUPTA, R.,(2015), *Modeling and Forecasting Crude Oil Price Volatility: Evidence from Historical and Recent Data, Working Paper: 2015-11.*
- [34] MEI-YUAN, C.,(2008), *Markov-Switching Models, Department of Finance National Chung Hsing University.*

- [35] MELINO, A. Y TURNBULL, S. M.,(1990), *Pricing foreign currency options with stochastic volatility*, *Journal of Econometrics* **45**, 239-265.
- [36] MOHAMMADI, H. Y SU, L.,(2010), *International evidence on crude oil price dynamics: Applications of ARIMA-GARCH models*, *Energy Economics* **32(5)**, 1001-1008.
- [37] NWOKO, I., AYE, G., YILDIZ, F., Y ASOGWA, B., (2016), *Effects of oil price on Nigeria food price volatility*, *Cogent Food & Agriculture* **2**, 1-14.
- [38] OPEC, (2016), *Annual Statistical Bulletin*.
- [39] PLATANIOTI, E., MCCOY, D. Y STEPHEN, A., B., (2005), *A Review of Stochastic Volatility Models: univariate and multivariate*, *Imperial London College*.
- [40] QI, P., Y LI, Y.,(2013), *Testing volatility persistence on Markov switching stochastic volatility models*, *Economic Modelling* **35**, 45-50.
- [41] RENTSCHLER, J.,(2013), *Oil Price Volatility, Economic Growth and the Hedging Role of Renewable Energy*, Policy Research Working Papers 6603, The World Bank.
- [42] RUIZ, E.,(1994), *Quasi Maximum Likelihood estimation of Stochastic Variance models*, *Journal of Applied Econometrics* **8**, 135-152.
- [43] SHEPARD, N., Y ANDERSEN, T.,(2008), *Stochastic Volatility: Origins and Overview*, en Mikosh, T., Kreiss, J., Davis, R. y Andersen, T., *Handbook of Financial Time Serie*. Springer.
- [44] SHIBATA, M. Y WATANABE, T.,(2005), *Bayesian analisis of a markov switching stochastic volatility model*, *Journal of Japan Statistics Society* **35(2)**, 205-2019.
- [45] SO, M., LAM, K. Y LI, W., (1998), *Stochastic volatility: likelihood inference and comparisson with ARCH models*, *Journal of Bussiness and Economic Statistics* **16**, 244-253.
- [46] TANNER, M. Y WONG, W. H.,(1987), *The Calculation of Posterior Distributions by Data Augmentation*, *American Statistical Association* **82(398)** , 528-540.
- [47] TAYLOR, S.J.,(1982), *Financial returns modelled by the product of two stochastic processes, a study of daily sugar prices 1961-79*, en Anderson, O. D. (ed.), *Time Series Analysis: Theory and Practice 1*, North-Holland, 203-226.
- [48] TIERNEY, L.,(1994), *Markov chains for exploring posterior distributions (with discussion)*, *The Annals of Statistics* **22(4)** , 1701-1762.
- [49] YU, J.,(2005), *On leverage in a stochastic volatility model*, *Journal of Econometrics* **127**, 165-178.
- [50] VO, M.,(2009), *Regime-switching stochastic volatility: evidence from the crude oil market*, *Energy Economics* **31**, 779-788.
- [51] WILSON, B., R. AGGARWAL, AND C. INCLAN,(1996), *Detecting Volatility Changes across the Oil Sector*, *Journal of Futures Markets* **16**, 313-320.
- [52] ZHANG, Y., YAO, T., Y HE, L. Y.,(2015), *Forecasting crude oil market volatility: can the Regime Switching GARCH model beat the single-regime GARCH models?*, *Institute of Resource, Environment and Sustainable Development*.