



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
Coordinación Académica

ESCUELA DE MATEMÁTICA



**GUÍA DE ESTUDIO**

# **CÁLCULO INTEGRAL EN VARIAS VARIABLES**

**RAMÓN BRUZUAL - MARISELA DOMÍNGUEZ**



CARACAS, 2016



**Sello Editorial Ediciencias-UCV**  
**Universidad Central de Venezuela**  
**Facultad de Ciencias**  
**Coordinación Académica**

**Editor Jefe:**

*Héctor Finol*

**Editores del Área:**

*José Rafael León; Carenne Ludeña*

**Coordinación Editorial:**

*Carmen Marrero; Arcángel Sánchez*

**Editado por:**

*Fundación Amigos de la Facultad de Ciencias*

*Fondo Editorial de la Facultad de Ciencias*

**Diseño, ilustración, edición electrónica y diagramación:**

*Ramón Bruzual, Marisela Domínguez*

***Diseño portada:*** *Carlos Raúl Pérez*

**© 2016, Ramón Bruzual; Marisela Domínguez**

**Cálculo Integral en Varias Variables**

**Depósito Legal: DC2017000404**

**ISBN: 978-980-00-2850-6**

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICA  
LABORATORIO DE FORMAS EN GRUPOS

# CÁLCULO INTEGRAL EN VARIAS VARIABLES

Ramón Bruzual  
Marisela Domínguez

Caracas, Venezuela  
Abril 2016

ISBN: 978-980-00-2850-6

Nº Depósito Legal: DC2017000404

Año de la primera publicación de este texto: 1998.

Primera revisión: año 2005.

Segunda revisión: año 2016.

Ramón Bruzual

Correo-E: [ramon.bruzual@ciens.ucv.ve](mailto:ramon.bruzual@ciens.ucv.ve)

Marisela Domínguez

Correo-E: [marisela.dominguez@ciens.ucv.ve](mailto:marisela.dominguez@ciens.ucv.ve)

Laboratorio de Formas en Grupos

Centro de Análisis

Escuela de Matemática

Facultad de Ciencias

Universidad Central de Venezuela

<http://www.matematica.ciens.ucv.ve/labfg/>

## Prólogo

Estas notas han sido concebidas para ser utilizadas en la segunda parte del curso de Análisis II de la Licenciatura en Matemática de la Universidad Central de Venezuela y son el resultado de la experiencia de los autores en el dictado de dicho curso. Es la continuación natural de la Guía de Cálculo Diferencial en Varias Variables, elaborada por los autores para la primera parte del curso.

En este curso se debe dar una visión rigurosa del cálculo en varias variables. La primera parte de este curso corresponde con el cálculo diferencial en varias variables y la segunda con el cálculo integral en varias variables.

Se supone que el estudiante ya ha visto un curso riguroso de cálculo en una variable, que domina la topología básica de  $\mathbb{R}^n$ , que ha visto un curso introductorio de cálculo en varias variables y que ya ha estudiado la Guía de Cálculo Diferencial en Varias Variables o un texto equivalente.

Los siguientes temas son tratados en forma exhaustiva:

- (1) Integrales múltiples. Integral de Riemann, condiciones de integrabilidad.  
Teorema de Fubini.  
Cambio de variable.  
Integrales impropias.
- (2) Integrales de línea. Curvas, curvas rectificables, parametrización.  
Independencia del camino, potenciales.  
Teorema de Green.
- (3) Funciones de valores vectoriales.  
Gradiente, rotor, divergencia y Laplaciano.  
Superficies, representaciones paramétricas e implícitas.  
Integrales de superficie.  
Teoremas de Gauss y Stokes.

Tanto el trabajo de mecanografía como la elaboración de los gráficos estuvo a cargo de los autores. Agradecemos la colaboración del Sello Editorial de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela en la revisión del año 2016.

Cualquier observación o comentario que deseen hacernos llegar será bienvenido.

Ramón Bruzual.  
Marisela Domínguez.  
Abril 2016.

## Índice general

Capítulo 1. Integrales múltiples.	1
1. El caso de una dimensión.	1
2. Integrales dobles.	4
3. Integrales múltiples	18
4. Cálculo de una integral múltiple mediante integración iterada.	20
5. Condiciones de integrabilidad	22
6. Integrales múltiples sobre regiones generales	25
7. Cambio de variables en integrales múltiples.	31
8. Integrales impropias.	43
Ejercicios 1.	47
Capítulo 2. Integrales de línea y teorema de Green.	55
1. Curvas y trayectorias.	55
2. Longitud de arco y reparametrización.	58
3. Parametrización por la longitud de arco.	63
4. Integral de un campo escalar a lo largo de una curva.	63
5. Integrales de línea.	64
6. Teorema fundamental del cálculo para integrales de línea.	69
7. El teorema de Green.	71
8. Ecuaciones diferenciales exactas de primer orden.	76
Ejercicios 2.	79
Capítulo 3. Análisis vectorial.	85
1. Integrales de superficie.	85
2. Superficies orientables.	88
3. Integrales de superficie	89
4. El teorema de Stokes	92
5. El teorema de la divergencia o teorema de Gauss	95

Ejercicios 3.	99
Bibliografía	103
Índice alfabético	105

## Integrales múltiples.

### 1. El caso de una dimensión.

En esta sección recordaremos algunos resultados y definiciones relacionados con la integral de Riemann en una dimensión.

El enfoque usual de la integral de Riemann, a través de suma superiores e inferiores, es el siguiente.

DEFINICIÓN 1.1. Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Una *partición* del intervalo  $[a, b]$  es una colección finita de puntos de  $[a, b]$ , de los cuales uno es  $a$  y otro es  $b$ .

Los puntos de una partición pueden ser numerados como  $x_0, x_1, \dots, x_k$ , de forma tal que el conjunto quede ordenado de la siguiente manera

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k = b.$$

Al hablar de una partición siempre supondremos que está ordenada de la forma anterior.

DEFINICIÓN 1.2. Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Sea  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$  una partición del intervalo  $[a, b]$ .

Para  $1 \leq i \leq n$ , sean

$$m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\},$$

$$M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}.$$

La *suma inferior* de  $f$  correspondiente a  $P$ , se denotará por  $L(f, P)$  y es

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}).$$

La *suma superior* de  $f$  correspondiente a  $P$ , se denotará por  $U(f, P)$  y es

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Es importante notar que la hipótesis  $f$  acotada es esencial para poder garantizar que tanto  $M_i$  como  $m_i$  están definidos. También es necesario definirlos como supremo e ínfimo y no como máximos y mínimos, ya que  $f$  no se supone continua.

DEFINICIÓN 1.3. Una función acotada  $f$  definida en  $[a, b]$  es *integrable Riemann* o *integrable* sobre  $[a, b]$  si

$$\sup\{L(f, P) : P \text{ es una partición de } [a, b]\} = \inf\{U(f, P) : P \text{ es una partición de } [a, b]\}.$$

DEFINICIÓN 1.4. En caso de que  $f$  sea integrable el número común de la definición anterior recibe el nombre de integral de  $f$  sobre  $[a, b]$  y se denota por

$$\int_a^b f.$$

Si la función  $f$  es no negativa, la integral de  $f$  sobre  $[a, b]$  representa el área de la región plana limitada por el gráfico de  $f$ , el eje  $x$  y las verticales  $x = a$  y  $x = b$ .

Tenemos que si  $f$  es continua en  $[a, b]$ , salvo en una cantidad finita de puntos, entonces  $f$  es integrable sobre  $[a, b]$ .

Además, para funciones continuas tenemos lo siguiente.

DEFINICIÓN 1.5. Si  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$  es una partición del intervalo  $[a, b]$ , la norma de  $P$  se define por

$$|P| = \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \dots, k\}.$$

TEOREMA 1.6. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Entonces para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\left| \sum_{i=1}^k f(c_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f \right| < \varepsilon$$

para toda partición  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$  de  $[a, b]$  tal que  $|P| < \delta$  y para cualquier conjunto de puntos  $\{c_i\}$  tales que  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ .

OBSERVACIÓN 1.7. El resultado anterior se suele expresar de la siguiente manera:

Si  $f$  es continua en  $[a, b]$  entonces

$$\int_a^b f = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

$c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ .

Las sumas que aparecen en la fórmula anterior se conocen con el nombre de *sumas de Riemann de  $f$* .

Es muy importante recordar el siguiente resultado, el cual establece una conexión entre el cálculo diferencial y el cálculo integral, y que es sumamente útil en el momento de calcular integrales.

TEOREMA 1.8 (Teorema fundamental del cálculo). *Si  $f$  es integrable sobre  $[a, b]$  y  $f = g'$  para alguna función  $g$ , entonces*

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

Existe otra forma equivalente de abordar la integral de Riemann, a través del concepto de función escalonada. Este es el enfoque que utilizaremos para abordar las integrales múltiples. Para facilitar la comprensión de las integrales múltiples vamos a dar una breve descripción de cómo se puede llegar a la integral de Riemann unidimensional, a través de las funciones escalonadas.

DEFINICIÓN 1.9 (Función escalonada). Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  y  $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Se dice que  $s$  es una *función escalonada* si existe una partición  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$  del intervalo  $[a, b]$  tal que  $s$  es constante en cada uno de los intervalos abiertos que determina  $P$ , es decir, para cada  $i = 1, \dots, k$  existe un número real  $s_i$  tal que

$$s(x) = s_i \quad \text{si} \quad x_{i-1} < x < x_i.$$

DEFINICIÓN 1.10 (Integral de una función escalonada). Si  $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función escalonada y  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$  es una partición del intervalo  $[a, b]$  tal que  $s(x) = s_i$  si  $x_{i-1} < x < x_i$ , se define la *integral* de  $s$  sobre el intervalo  $[a, b]$  por

$$\int_a^b s(x) dx = \sum_{i=1}^k s_i(x_i - x_{i-1}).$$

Es claro que a una función escalonada  $s$  se le pueden asociar diferentes particiones, tales que  $s$  es constante en cada uno de los intervalos abiertos que ésta determina. Como ejercicio, demostrar que la integral de una función escalonada está bien definida, es decir, demostrar que el valor de la suma que aparece en la definición anterior es independiente de la partición escogida  $P$ , tal que  $s$  es constante en cada uno de los intervalos abiertos que determina  $P$ .

DEFINICIÓN 1.11. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada.

La *integral superior* de  $f$  se define por

$$\bar{I}(f) = \inf \left\{ \int_a^b s(x) dx : s \text{ es una función escalonada y } s \geq f \right\}.$$

La *integral inferior* de  $f$  se define por

$$\underline{I}(f) = \sup \left\{ \int_a^b s(x) dx : s \text{ es una función escalonada y } s \leq f \right\}.$$

Se puede probar que  $f$  es integrable Riemann en  $[a, b]$  si y sólo si  $\bar{I}(f) = \underline{I}(f)$  y en este caso

$$\int_a^b f(x) dx = \bar{I}(f) = \underline{I}(f).$$

## 2. Integrales dobles.

DEFINICIÓN 1.12. Sea  $Q = [a, b] \times [c, d]$  un rectángulo contenido en  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $P$  una colección de subrectángulos de  $Q$ . Se dice que  $P$  es una *partición* de  $Q$  si existen una partición  $P_1 = \{x_0, \dots, x_{N_1}\}$  de  $[a, b]$  y una partición  $P_2 = \{y_0, \dots, y_{N_2}\}$  de  $[c, d]$  tales que

$$P = \{ [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] : 1 \leq i \leq N_1, 1 \leq j \leq N_2 \}.$$

El par  $(P_1, P_2)$  lo usaremos para denotar a  $P$ .

Notar que si  $P_1$  origina  $N_1$  intervalos y  $P_2$  origina  $N_2$  intervalos entonces  $P$  contiene  $N_1 \cdot N_2$  subrectángulos.

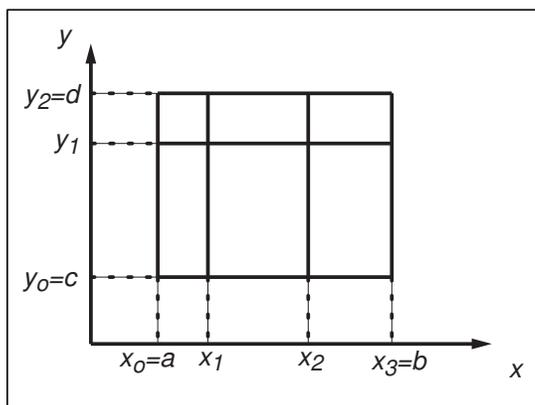


FIGURA 1.1. Partición de  $[a, b] \times [c, d]$ .

### 2.1. Integral doble de una función escalonada.

DEFINICIÓN 1.13. Sea  $Q = [a, b] \times [c, d]$  un rectángulo contenido en  $\mathbb{R}^2$  y sea  $s : Q \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Se dice que  $s$  es una *función escalonada* si existe una partición  $P$  de  $Q$  tal que  $s$  es constante en cada uno de los subrectángulos abiertos de  $P$ .

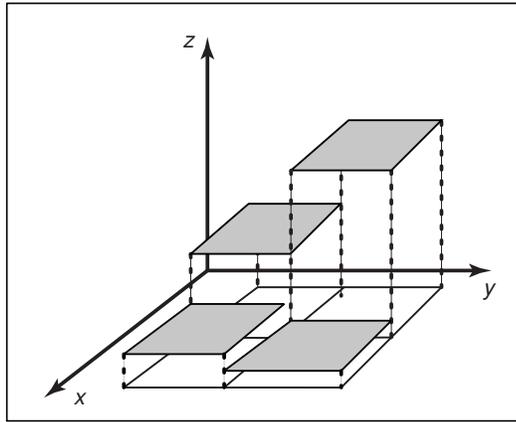


FIGURA 1.2. Gráfico de una función escalonada.

Sea  $Q = [a, b] \times [c, d]$  un rectángulo contenido en  $\mathbb{R}^2$  y sea  $P = (P_1, P_2)$  una partición de  $Q$ . Sea

$$s : Q \rightarrow \mathbb{R}$$

una función escalonada, que es constante en cada uno de los subrectángulos abiertos de  $Q$ , es decir, si  $P_1 = \{x_0, \dots, x_{N_1}\}$  y  $P_2 = \{y_0, \dots, y_{N_2}\}$  entonces

$$s(x, y) = c_{ij} \quad \text{si } (x, y) \in (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j),$$

para  $i = 1, \dots, N_1$ ,  $j = 1, \dots, N_2$ .

DEFINICIÓN 1.14 (Integral doble de una función escalonada). Sea  $s$  como antes, la *integral doble* de  $s$  sobre  $Q$  es

$$\iint_Q s = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} c_{ij} \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1})$$

EJERCICIO 1.15. Demostrar que la integral doble de una función escalonada está bien definida.

OBSERVACIÓN 1.16. Notar que si  $s \geq 0$  entonces la integral doble de  $s$  sobre  $Q$  es el volumen del sólido limitado por  $Q$  y el gráfico de  $s$ .

Otra notación muy común para  $\iint_Q s$  es

$$\iint_Q s(x, y) \, dx dy,$$

o también

$$\iint_Q s \, dA.$$

Sea  $s$  como en la Definición 1.14 una función escalonada y sea  $Q_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ , entonces

$$\iint_{Q_{ij}} s(x, y) \, dx dy = c_{ij} \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}).$$

Un cálculo directo muestra que

$$\iint_{Q_{ij}} s(x, y) \, dx dy = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( \int_{y_{j-1}}^{y_j} s(x, y) \, dy \right) dx = \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} s(x, y) \, dx \right) dy,$$

por la linealidad de la integral unidimensional, obtenemos el resultado de Fubini para integrales de funciones escalonadas

$$\iint_Q s(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d s(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b s(x, y) \, dx \right) dy. \quad (1.1)$$

**EJERCICIO 1.17.** Sea  $Q = [a, b] \times [c, d]$  un rectángulo contenido en  $\mathbb{R}^2$ .

- (1) Demostrar que si  $s_1$  y  $s_2$  son dos funciones escalonadas en  $Q$  y  $c_1$  y  $c_2$  son dos constantes reales, entonces

$$\iint_Q (c_1 s_1(x, y) + c_2 s_2(x, y)) \, dx dy = c_1 \iint_Q s_1(x, y) \, dx dy + c_2 \iint_Q s_2(x, y) \, dx dy.$$

- (2) Demostrar que si  $s$  es una función escalonada en  $Q$  y se tiene que  $Q = Q_1 \cup Q_2$ , donde  $Q_1$  y  $Q_2$  son rectángulos de lados paralelos a los ejes de coordenadas, tales que  $\text{interior}(Q_1) \cap \text{interior}(Q_2) = \emptyset$ , entonces

$$\iint_{Q_1 \cup Q_2} s(x, y) \, dx dy = \iint_{Q_1} s(x, y) \, dx dy + \iint_{Q_2} s(x, y) \, dx dy.$$

- (3) Demostrar que si  $s$  y  $t$  son funciones escalonadas en  $Q$  y  $s(x, y) \leq t(x, y)$  para todo  $(x, y) \in Q$ , entonces

$$\iint_Q s(x, y) \, dx dy \leq \iint_Q t(x, y) \, dx dy.$$

En particular, si  $t(x, y) \geq 0$  para todo  $(x, y) \in Q$ , entonces

$$\iint_Q t(x, y) \, dx dy \geq 0.$$

## 2.2. Integral doble de una función acotada en un rectángulo.

Sea  $Q = [a, b] \times [c, d]$  un rectángulo contenido en  $\mathbb{R}^2$  y sea  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Sea  $M > 0$  tal que

$$|f(x, y)| \leq M \quad \text{si } (x, y) \in Q.$$

Sean  $s_o, t_o : Q \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

$$s_o(x, y) = -M \quad \text{y} \quad t_o(x, y) = M,$$

tenemos que  $s_o$  y  $t_o$  son funciones escalonadas y

$$s_o(x, y) \leq f(x, y) \leq t_o(x, y) \quad \text{para todo } (x, y) \in Q.$$

DEFINICIÓN 1.18.

La *integral superior* de  $f$  sobre  $Q$  es

$$\bar{I}(f) = \inf \left\{ \iint_Q t(x, y) \, dx dy : t \text{ es una función escalonada y } f \leq t \right\}.$$

La *integral inferior* de  $f$  sobre  $Q$  es

$$\underline{I}(f) = \sup \left\{ \iint_Q s(x, y) \, dx dy : s \text{ es una función escalonada y } s \leq f \right\}.$$

Es importante destacar que, por ser  $f$  acotada, ninguno de los conjuntos que aparece en la definición anterior es vacío, y tanto el supremo como el ínfimo son finitos.

DEFINICIÓN 1.19. Sea  $Q = [a, b] \times [c, d]$  un rectángulo contenido en  $\mathbb{R}^2$  y sea  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Se dice que  $f$  es *integrable* sobre  $Q$  si

$$\bar{I}(f) = \underline{I}(f).$$

Este valor común se denomina la *integral doble* de  $f$  sobre  $Q$  y se denota por

$$\iint_Q f(x, y) \, dx dy,$$

o simplemente por

$$\iint_Q f.$$

EJERCICIO 1.20. Sea  $Q = [a, b] \times [c, d]$  un rectángulo contenido en  $\mathbb{R}^2$ .

Demostrar las siguientes propiedades de la integral.

- (1) Linealidad: Si  $f$  y  $g$  son dos funciones integrables sobre  $Q$  y  $c_1$  y  $c_2$  son dos constantes reales, entonces  $c_1 f + c_2 g$  es integrable sobre  $Q$  y

$$\iint_Q (c_1 f(x, y) + c_2 g(x, y)) \, dx dy = c_1 \iint_Q f(x, y) \, dx dy + c_2 \iint_Q g(x, y) \, dx dy.$$

- (2) Si  $f$  es una función integrable sobre  $Q$  y se tiene que  $Q = Q_1 \cup Q_2$ , donde  $Q_1$  y  $Q_2$  son rectángulos de lados paralelos a los ejes de coordenadas, tales que  $\text{interior}(Q_1) \cap \text{interior}(Q_2) = \emptyset$ , entonces  $f$  es integrable sobre cada  $Q_i$ ,  $i = 1, 2$  y

$$\iint_{Q_1 \cup Q_2} f(x, y) \, dx dy = \iint_{Q_1} f(x, y) \, dx dy + \iint_{Q_2} f(x, y) \, dx dy.$$

- (3) Monotonía: Si  $f$  y  $g$  son funciones integrables sobre  $Q$  y  $g(x, y) \leq f(x, y)$  para todo  $(x, y) \in Q$ , entonces

$$\iint_Q g(x, y) \, dx dy \leq \iint_Q f(x, y) \, dx dy.$$

En particular, si  $f(x, y) \geq 0$  para todo  $(x, y) \in Q$ , entonces

$$\iint_Q f(x, y) \, dx dy \geq 0.$$

### 2.3. Cálculo de una integral doble mediante integración iterada.

TEOREMA 1.21 (Fubini). Sea  $Q = [a, b] \times [c, d]$  un rectángulo y sea  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada, integrable sobre  $Q$ . Supongamos que:

- (a) Para cada  $y \in [c, d]$  la función  $x \mapsto f(x, y)$  de  $[a, b]$  en  $\mathbb{R}$  es integrable sobre  $[a, b]$ .  
 (b) La función  $y \mapsto \int_a^b f(x, y) \, dx$  de  $[c, d]$  en  $\mathbb{R}$  es integrable sobre  $[c, d]$ .

Entonces

$$\iint_Q f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean  $s$  y  $t$  dos funciones escalonadas definidas en  $Q$  tales que

$$s \leq f \leq t.$$

Entonces, para  $y \in [c, d]$ ,

$$\int_a^b s(x, y) \, dx \leq \int_a^b f(x, y) \, dx \leq \int_a^b t(x, y) \, dx.$$

Luego

$$\int_c^d \left( \int_a^b s(x, y) \, dx \right) dy \leq \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy \leq \int_c^d \left( \int_a^b t(x, y) \, dx \right) dy.$$

Usando el resultado de Fubini para integrales de funciones escalonadas (ver la ecuación (1.1)) tenemos que

$$\iint_Q s(x, y) \, dx dy \leq \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy \leq \iint_Q t(x, y) \, dx dy.$$

Haciendo variar las funciones escalonadas, tenemos que el número que está en el centro de esta desigualdad es una cota superior para las integrales que están a la izquierda y es una cota inferior para las integrales que están a la derecha. Luego

$$\underline{I}(f) \leq \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy \leq \bar{I}(f).$$

Por ser  $f$  integrable tenemos que  $\bar{I}(f) = \underline{I}(f)$ . Usando la definición de integral tenemos que

$$\iint_Q f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy.$$

□

OBSERVACIÓN 1.22. Si en el Teorema anterior suponemos que

- (a) Para cada  $x \in [a, b]$  la función  $y \mapsto f(x, y)$  de  $[c, d]$  en  $\mathbb{R}$  es integrable sobre  $[c, d]$ .
- (b) La función  $x \mapsto \int_c^d f(x, y) \, dy$  de  $[a, b]$  en  $\mathbb{R}$  es integrable sobre  $[a, b]$ .

Entonces, con un argumento completamente análogo, obtenemos

$$\iint_Q f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx.$$

El Teorema de Fubini tiene una interpretación geométrica que damos a continuación. Si  $f \geq 0$  entonces

$$\iint_Q f$$

es el volumen de la región limitada por el gráfico de  $f$  y el plano  $xy$ . Este volumen también lo podemos obtener por integración unidimensional del área de su sección transversal. En la figura

$$A(x_o) = \int_c^d f(x_o, y) dy.$$

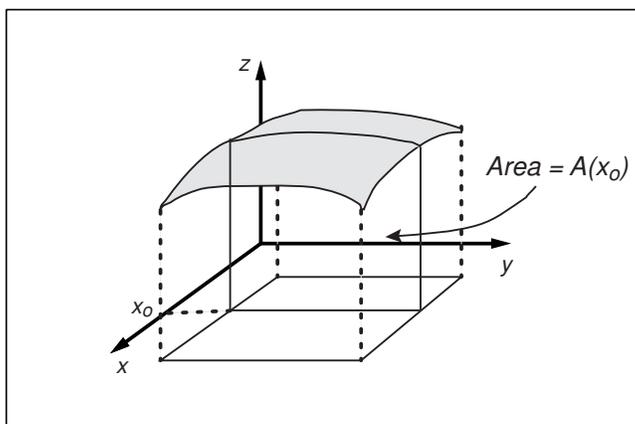


FIGURA 1.3.

OBSERVACIÓN 1.23. La existencia de la integral doble no garantiza la existencia de las iteradas y viceversa, ver ejercicios 8 y 9.

#### 2.4. Condición suficiente de integrabilidad.

En esta sección vamos a ver que si una función acotada es continua, salvo en un conjunto “pequeño”, entonces es integrable. Para medir el tamaño de un conjunto introducimos el siguiente concepto.

DEFINICIÓN 1.24. Sea  $A$  un subconjunto acotado del plano. Se dice que  $A$  tiene *contenido bidimensional nulo* si para cada  $\varepsilon > 0$  existe un conjunto finito de rectángulos  $\{Q_1, \dots, Q_N\}$  de lados paralelos a los ejes tales que la suma de las áreas de los  $Q_i$  es menor que  $\varepsilon$  y

$$A \subset \bigcup_{i=1}^N \text{interior}(Q_i).$$

EJERCICIO 1.25. Demostrar las siguientes afirmaciones.

- (1) Cualquier subconjunto finito del plano tiene contenido bidimensional nulo.
- (2) La unión de una familia finita de conjuntos de contenido bidimensional nulo tiene contenido bidimensional nulo.
- (3) Todo subconjunto de un conjunto de contenido bidimensional nulo tiene contenido bidimensional nulo.
- (4) Todo segmento de recta tiene contenido nulo.
- (5) Sea  $A \subset \mathbb{R}^2$ , demostrar que si para cada  $\varepsilon > 0$  se tiene que existe un conjunto finito de rectángulos acotados  $\{Q_1, \dots, Q_N\}$  tales que la suma de las áreas de los  $Q_i$  es menor que  $\varepsilon$  y

$$A \subset \bigcup_{i=1}^N Q_i$$

entonces  $A$  tiene contenido bidimensional nulo (es decir, no es necesario suponer que los lados de  $Q_i$  son paralelos a los ejes y podemos colocar  $Q_i$  en vez de interior  $(Q_i)$  en la definición de contenido nulo).

TEOREMA 1.26. Sea  $Q = [a, b] \times [c, d]$  un rectángulo y sea  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Si el conjunto de las discontinuidades de  $f$  tiene contenido bidimensional nulo entonces  $f$  es integrable sobre  $Q$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $M > 0$  tal que  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x \in Q$ . Sea  $D$  el conjunto de las discontinuidades de  $f$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ .

Como  $D$  tiene contenido bidimensional nulo existe una colección finita de rectángulos de lados paralelos a los ejes,  $R_1, \dots, R_{N_1}$  tales que la suma de sus áreas es menor que  $\frac{\varepsilon}{4M}$  y

$$D \subset \bigcup_{i=1}^{N_1} \text{interior}(R_i).$$

El conjunto

$$C = Q \setminus \bigcup_{i=1}^{N_1} \text{interior}(R_i)$$

es compacto y  $f$  es continua en  $C$ , luego  $f$  es uniformemente continua en  $C$ . Por lo tanto, podemos dividir  $C$  en rectángulos  $R'_1, \dots, R'_{N_2}$ , tales que

$$\text{máx}\{f(x, y) : (x, y) \in R'_i\} - \text{mín}\{f(x, y) : (x, y) \in R'_i\} < \frac{\varepsilon}{2 \text{área}(Q)}$$

para  $i = 1, \dots, N_2$ .

Sea  $P = \{Q_1, \dots, Q_N\}$  una partición de  $Q$  tal que cualquier rectángulo  $R_i$ ,  $1 \leq i \leq N_1$ , ó  $R'_i$ ,  $1 \leq i \leq N_2$  es unión de rectángulos pertenecientes a  $P$ .

Sea  $(x, y) \in Q$ . Definimos las funciones escalonadas  $s$  y  $t$  en el punto  $(x, y)$  de la siguiente manera:

Si  $(x, y)$  pertenece al rectángulo  $R'_i$  para algún  $i$ , entonces

$$s(x, y) = m_i = \min\{f(x, y) : (x, y) \in R'_i\} \quad \text{y} \quad t(x, y) = M_i = \max\{f(x, y) : (x, y) \in R'_i\},$$

en otro caso

$$s(x, y) = -M \quad \text{y} \quad t(x, y) = M.$$

De la definición de  $s$  y  $t$  sigue que  $s(x, y) \leq f(x, y) \leq t(x, y)$  para todo  $(x, y) \in Q$ .

$$\iint_Q (t(x, y) - s(x, y)) \, dx dy = \sum_{i=1}^N (s_i - t_i) \text{área}(Q_i),$$

donde  $s_i$  y  $t_i$  son los valores respectivos de  $s$  y  $t$  en  $Q_i$ .

Si  $Q_i$  es uno de los rectángulos contenido en algún  $R'_1, \dots, R'_{N_2}$  tenemos que

$$s_i - t_i < \frac{\varepsilon}{2 \text{área}(Q)}.$$

En otro caso  $s_i - t_i = 2M$ .

Por construcción la suma de las áreas de los rectángulos de  $P$  que no están contenidos en  $R'_1, \dots, R'_{N_2}$  es menor que  $\frac{\varepsilon}{4M}$ , por lo tanto tenemos que

$$\iint_Q (t(x, y) - s(x, y)) \, dx dy \leq (\text{área}(Q)) \left( \frac{\varepsilon}{2 \text{área}(Q)} \right) + 2M \left( \frac{\varepsilon}{4M} \right) = \varepsilon.$$

Luego  $f$  es integrable sobre  $Q$ .

□

EJEMPLO 1.27. Verificar la existencia y calcular la siguiente integral doble

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} (x^2 + y) \, dx dy.$$

Como el integrando es una función continua, resulta ser integrable. Además como se cumplen las hipótesis del teorema de Fubini tenemos que:

$$\int_0^1 (x^2 + y) \, dx = \frac{x^3}{3} + yx \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} + y,$$

luego

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y) dx dy &= \int_0^1 \left( \int_0^1 (x^2 + y) dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{3} + y \right) dy \\ &= \frac{1}{3}y + \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=1} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

### 2.5. Integrales dobles sobre conjuntos más generales.

TEOREMA 1.28. *Sea  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Entonces el gráfico de  $\varphi$  tiene contenido bidimensional nulo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $A$  el gráfico de  $\varphi$ , es decir,

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, y = \varphi(x)\}.$$

Sea  $\varepsilon > 0$ . Por ser  $[a, b]$  compacto,  $\varphi$  es uniformemente continua, luego existe una partición  $P = \{x_0, \dots, x_k\}$  del intervalo  $[a, b]$ , tal que la oscilación de  $\varphi$  en cada uno de los intervalos  $I_i = [x_{i-1}, x_i]$  de  $P$  es menor que  $\varepsilon/(b-a)$ , es decir  $|\varphi(x) - \varphi(x')| < \varepsilon/(b-a)$  si  $x$  y  $x'$  están en un mismo  $I_i$ .

Para  $i = 1, \dots, k$  sean

$$M_i = \sup\{\varphi(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{y} \quad m_i = \inf\{\varphi(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Estos valores son finitos porque  $\varphi$  es continua en los compactos  $[x_{i-1}, x_i]$ . Además

$$A \subset \bigcup_{i=1}^k [x_{i-1}, x_i] \times [m_i, M_i]$$

y

$$M_i - m_i \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \text{área} \left( \bigcup_{i=1}^k [x_{i-1}, x_i] \times [m_i, M_i] \right) &= \sum_{i=1}^k (x_i - x_{i-1}) \cdot (M_i - m_i) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^k (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Sean  $S$  un subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^2$  y  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Sea  $Q$  un rectángulo de lados paralelos a los ejes y acotado tal que  $S \subset Q$ . Sea  $\tilde{f} : Q \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in S, \\ 0 & \text{si } (x, y) \in Q \setminus S. \end{cases} \quad (1.2)$$

El conjunto de los puntos de discontinuidad de  $\tilde{f}$  está contenido en el conjunto de los puntos de discontinuidad de  $f$  unido con la frontera de  $S$ . Por lo tanto, si la frontera de  $S$  y el conjunto de los puntos de discontinuidad de  $f$  tienen contenido nulo, entonces  $\tilde{f}$  es integrable sobre  $Q$ .

DEFINICIÓN 1.29. Sea  $S$  un subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^2$  tal que su frontera tiene contenido nulo. Sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada, tal que el conjunto de los puntos de discontinuidad de  $f$  tiene contenido nulo. Sean  $Q$  y  $\tilde{f}$  como en (1.2), la *integral doble* o *integral de área* de  $f$  sobre  $S$  es

$$\iint_S f(x, y) \, dx dy = \iint_Q \tilde{f}(x, y) \, dx dy.$$

EJERCICIO 1.30. Demostrar que  $\iint_S f(x, y) \, dx dy$  está bien definida, es decir probar que no depende del rectángulo  $Q$  que contiene a  $S$ .

EJERCICIO 1.31. Supongamos que  $S$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $\chi_S$  la *función característica* de  $S$ , es decir,

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S, \\ 0 & \text{si } x \notin S. \end{cases}$$

Demostrar que el conjunto de los puntos de discontinuidad de  $\chi_S$  es la frontera de  $S$

Tomando en cuenta lo anterior resulta muy natural la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.32. Sea  $S$  es un subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^2$  tal que su frontera tiene contenido bidimensional nulo. El *área* o *contenido bidimensional* de  $S$  es la integral doble de  $\chi_S$ , es decir,

$$\text{área}(S) = \iint_S dx dy.$$

OBSERVACIÓN 1.33. Notar que el área de  $S$  es la integral doble sobre  $S$  de la función constante igual a 1.

A continuación vamos a ver cómo calcular la integral doble de una función, usando integración iterada, sobre regiones bastantes generales.

DEFINICIÓN 1.34. Una *región del tipo I* es una región de la forma

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

donde  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son funciones continuas en  $[a, b]$ , tales que  $\varphi_1 \leq \varphi_2$ .

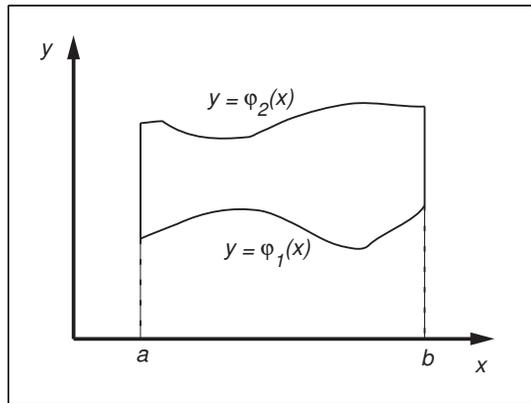


FIGURA 1.4. Región tipo I

Del Teorema 1.28 sigue que la frontera de toda región del tipo I tiene contenido nulo. Supongamos que  $f$  es continua en la región del tipo I

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

Si  $c = \inf\{\varphi_1(x) : a \leq x \leq b\}$  y  $d = \sup\{\varphi_2(x) : a \leq x \leq b\}$  entonces  $R_1 \subset [a, b] \times [c, d]$ .

Luego

$$\iint_{R_1} f(x, y) \, dx dy = \iint_{[a, b] \times [c, d]} \tilde{f}(x, y) \, dx dy,$$

donde

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in R_1, \\ 0 & \text{si } (x, y) \in [a, b] \times [c, d] \setminus R_1. \end{cases}$$

Por ser  $f$  continua tenemos que, para cada  $x \in [a, b]$ , la función  $y \mapsto \tilde{f}(x, y)$  es integrable sobre  $[c, d]$  y de la definición de  $\tilde{f}$  sigue que

$$\int_c^d \tilde{f}(x, y) \, dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy.$$

Por el Teorema de Fubini

$$\iint_{R_1} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

DEFINICIÓN 1.35. Una *región del tipo II* es una región de la forma

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

donde  $\psi_1$  y  $\psi_2$  son funciones continuas en  $[c, d]$  tales que  $\psi_1 \leq \psi_2$ .

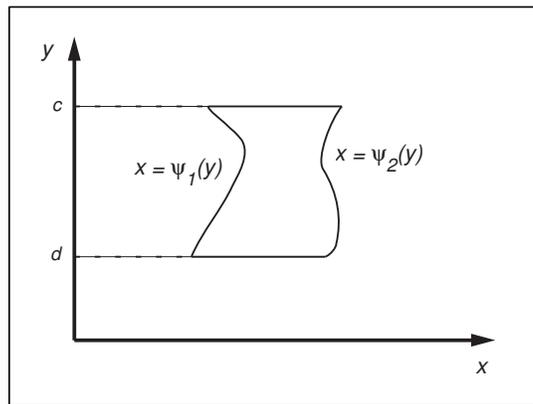


FIGURA 1.5. Región tipo II

Al igual que antes se puede mostrar que si  $f$  es continua en una región del tipo II

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

entonces

$$\iint_{R_2} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Finalmente, para calcular una integral sobre una región arbitraria, la descomponemos como una unión de regiones tipo I y tipo II.

EJEMPLO 1.36. Cambiar el orden de integración en la siguiente integral

$$\int_0^2 \left( \int_{x^2}^4 f(x, y) dy \right) dx.$$

Tenemos que la región de integración está dada por  $0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4$ .

Otra manera de describir la región es  $0 \leq y \leq 4, 0 \leq x \leq \sqrt{y}$ , por lo tanto, al cambiar el orden de integración obtenemos

$$\int_0^4 \left( \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy.$$

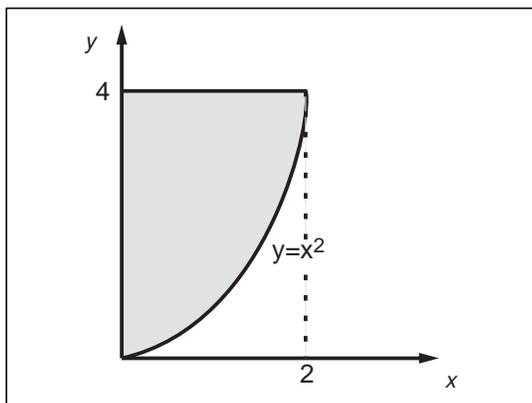


FIGURA 1.6.

EJEMPLO 1.37. Sea  $R$  la región  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ . Escribiremos

$$\iint_R f dA$$

en términos de integrales iteradas.

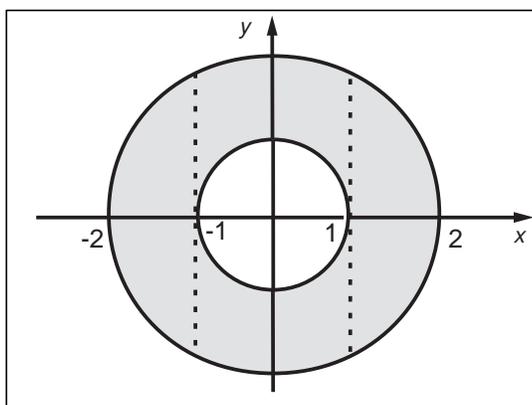


FIGURA 1.7.

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dx dy &= \int_{-2}^{-1} \left( \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \right) dx + \int_{-1}^1 \left( \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \right) dx \\ &+ \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right) dx + \int_1^2 \left( \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.38. Calcular el volumen del sólido limitado por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

El elipsoide es la región comprendida entre los gráficos de las funciones

$$f_1(x, y) = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad \text{y} \quad f_2(x, y) = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

para  $(x, y) \in S$ , donde

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Por lo tanto, denotando por  $V$  al volumen del sólido, tenemos que

$$V = \iint_S (f_1(x, y) - f_2(x, y)) \, dx \, dy.$$

Tomado en cuenta las simetrías del sólido tenemos que

$$V = 8c \iint_{S_1} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, dx \, dy,$$

donde

$$S_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Por lo tanto

$$V = 8c \int_0^a \left( \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, dy \right) dx.$$

Como ejercicio, verificar que la integral anterior es igual a

$$\frac{4}{3}\pi abc.$$

### 3. Integrales múltiples

El concepto de integral puede extenderse del espacio bidimensional  $\mathbb{R}^2$  al espacio  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$ . Las definiciones, el tratamiento y los resultados son completamente análogos. Desarrollaremos el concepto de integral múltiple para  $n \geq 3$ . Dada la analogía mencionada omitiremos algunas pruebas y detalles.

DEFINICIÓN 1.39. Sea  $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$  un paralelepípedo rectangular. Sea  $P$  una colección de paralelepípedos contenidos en  $Q$ . Se dice que  $P$  es una *partición* de  $Q$  si existen particiones  $P_k = \{x_0^k, x_1^k, \dots, x_{N_k}^k\}$  de  $[a_k, b_k]$  tales que

$$P = \{ [x_{i_1-1}^1, x_{i_1}^1] \times \dots \times [x_{i_n-1}^n, x_{i_n}^n] : 1 \leq i_1 \leq N_1, \dots, 1 \leq i_n \leq N_n \}.$$

Por  $(P_1, \dots, P_n)$  se denotará la partición  $P$ .

Notar que si  $P_k$  consta de  $N_k$  puntos entonces  $P$  contiene  $N_1 \cdots N_n$  subparalelepípedos.

### 3.1. Integral múltiple de una función escalonada.

DEFINICIÓN 1.40. Sea  $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$  un paralelepípedo rectangular y sea  $s : Q \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Se dice que  $s$  es una *función escalonada* si existe una partición  $P$  de  $Q$  tal que  $s$  es constante en cada uno de los subparalelepípedos abiertos de  $P$ .

DEFINICIÓN 1.41. Sea  $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$  un paralelepípedo rectangular. El *volumen  $n$ -dimensional* o *contenido  $n$ -dimensional* de  $Q$  es

$$\text{Vol}(Q) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n).$$

Supongamos que  $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$  es un paralelepípedo rectangular y que  $s : Q \rightarrow \mathbb{R}$  una función escalonada. Sea  $P = \{Q_{i_1 \dots i_n}, i_1 = 1, \dots, N_1, \dots, i_n = 1, \dots, N_n\}$  una partición de  $Q$  tal que

$$s(x_1, \dots, x_n) = c_{i_1 \dots i_n}$$

en  $\text{int}(Q_{i_1 \dots i_n})$

DEFINICIÓN 1.42 (Integral múltiple de una función escalonada). La *integral múltiple*, o simplemente, la *integral* de  $s$  sobre  $Q$  es

$$\int_Q s \, dV = \int_Q s(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \cdots dx_n = \sum_{i_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{N_n} c_{i_1 \dots i_n} \text{Vol}(Q_{i_1 \dots i_n}).$$

Al igual que en el caso bidimensional tenemos que, si  $s$  es una función escalonada, entonces

$$\int_Q s \, dV = \int_{a_{j_1}}^{b_{j_1}} \left( \cdots \int_{a_{j_n}}^{b_{j_n}} s(x_1, \dots, x_n) \, dx_{j_n} \cdots \right) dx_{j_1}. \quad (1.3)$$

donde  $(j_1, \dots, j_n)$  es una permutación de  $(1, \dots, n)$ .

También se cumplen los análogos de las propiedades establecidas en el Ejercicio 1.17.

### 3.2. Integral múltiple de una función acotada en un paralelepípedo.

Sea  $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$  un paralelepípedo  $n$ -dimensional rectangular y sea  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada.

DEFINICIÓN 1.43.

La *integral superior* de  $f$  sobre  $Q$  es

$$\bar{I}(f) = \inf \left\{ \int_Q t \, dV : t \text{ es una función escalonada y } f \leq t \right\}.$$

La *integral inferior* de  $f$  sobre  $Q$  es

$$\underline{I}(f) = \sup \left\{ \int_Q s \, dV : s \text{ es una función escalonada y } s \leq f \right\}.$$

DEFINICIÓN 1.44. Sea  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada se dice que  $f$  es *integrable* sobre  $Q$  si

$$\bar{I}(f) = \underline{I}(f).$$

Este valor común se denomina la *integral múltiple*, o simplemente, la *integral* de  $f$  sobre  $Q$  y se denota por

$$\int_Q f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n, \text{ o simplemente por } \int_Q f \, dV.$$

La siguiente notación

$$\int_Q f(\vec{x}) \, d\vec{x},$$

para la integral múltiple también es común y conveniente en algunos casos.

Las propiedades establecidas en el Ejercicio 1.20 también valen para integrales múltiples.

#### 4. Cálculo de una integral múltiple mediante integración iterada.

TEOREMA 1.45 (Fubini). Sea  $Q = I_1 \times \dots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$  un paralelepípedo rectangular, donde  $I_k = [a_k, b_k]$  es un intervalo acotado y sea  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable sobre  $Q$ . Sean  $p$  y  $q$  enteros positivos tales que  $p + q = n$ . Sean  $Q_1 = I_1 \times \dots \times I_p$  y  $Q_2 = I_{p+1} \times \dots \times I_n$ .

Supongamos que:

- (a) Para cada  $\vec{u} \in Q_1$  la función  $\vec{v} \mapsto f(\vec{u}, \vec{v})$  de  $Q_2$  en  $\mathbb{R}$  es integrable.
- (b) La función  $\vec{u} \mapsto \int_{Q_2} f(\vec{u}, \vec{v}) \, d\vec{v}$  de  $Q_1$  en  $\mathbb{R}$  es integrable sobre  $Q_1$ .

Entonces

$$\int_Q f(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_{Q_1} \left( \int_{Q_2} f(\vec{u}, \vec{v}) \, d\vec{v} \right) d\vec{u}.$$

La demostración de este resultado es completamente análoga a la del Teorema 1.21 y la dejaremos como ejercicio.

Aplicando sucesivamente el resultado anterior obtenemos.

**COROLARIO 1.46.** *Sea  $Q = I_1 \times \dots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$  un paralelepípedo rectangular, donde  $I_k = [a_k, b_k]$  es un intervalo acotado y sea  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable en  $Q$ .*

*Sea  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  una permutación de  $(1, \dots, n)$ . Supongamos que las siguientes integrales iteradas están definidas*

$$\begin{aligned} & \int_{a_{j_1}}^{b_{j_1}} f(x_1, \dots, x_n) dx_{j_1}, \\ & \int_{a_{j_2}}^{b_{j_2}} \left( \int_{a_{j_1}}^{b_{j_1}} f(x_1, \dots, x_n) dx_{j_1} \right) dx_{j_2}, \\ & \quad \vdots \\ & \int_{a_{j_n}}^{b_{j_n}} \left( \dots \int_{a_{j_2}}^{b_{j_2}} \left( \int_{a_{j_1}}^{b_{j_1}} f(x_1, \dots, x_n) dx_{j_1} \right) dx_{j_2} \dots \right) dx_{j_n}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\int_Q f dV = \int_{a_{j_n}}^{b_{j_n}} \left( \dots \int_{a_{j_2}}^{b_{j_2}} \left( \int_{a_{j_1}}^{b_{j_1}} f(x_1, \dots, x_n) dx_{j_1} \right) dx_{j_2} \dots \right) dx_{j_n}.$$

**OBSERVACIÓN 1.47.** Si tenemos una función integrable como en el corolario anterior y las integrales iteradas de  $f$  existen en dos órdenes diferentes, entonces estas dos integrales iteradas son iguales a la integral de  $f$  sobre  $Q$ .

En particular, cuando  $f$  es integrable y las integrales iteradas existen en todos los órdenes posibles, todas estas integrales nos dan el mismo valor.

Otra notación común para las integrales iteradas es la siguiente:

En vez de escribir

$$\int_{a_{j_n}}^{b_{j_n}} \left( \dots \int_{a_{j_2}}^{b_{j_2}} \left( \int_{a_{j_1}}^{b_{j_1}} f(x_1, \dots, x_n) dx_{j_1} \right) dx_{j_2} \dots \right) dx_{j_n},$$

se suele escribir

$$\int_{a_{j_n}}^{b_{j_n}} dx_{j_n} \left( \dots \int_{a_{j_2}}^{b_{j_2}} dx_{j_2} \left( \int_{a_{j_1}}^{b_{j_1}} dx_{j_1} f(x_1, \dots, x_n) \right) \dots \right).$$

## 5. Condiciones de integrabilidad

Al igual que en el caso bidimensional, si una función acotada es continua, salvo en un conjunto “pequeño”, entonces es integrable. Para medir el tamaño de un conjunto en  $\mathbb{R}^n$  generalizaremos, de manera natural, el concepto de contenido nulo.

Cuando hablemos de paralelepípedo rectangular en  $\mathbb{R}^n$  supondremos que se trata de un conjunto de la forma  $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ , es decir, supondremos que sus caras son paralelas a los espacios coordenados.

**DEFINICIÓN 1.48.** Sea  $A$  un subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^n$ . Se dice que  $A$  tiene *contenido  $n$ -dimensional nulo* si para cada  $\varepsilon > 0$  existe un conjunto finito de paralelepípedos rectangulares  $\{Q_1, \dots, Q_N\}$  tales que la suma de los contenidos  $n$ -dimensionales de los  $Q_i$  es menor que  $\varepsilon$  y además

$$A \subset \bigcup_{i=1}^N \text{interior}(Q_i).$$

**EJERCICIO 1.49.** Demostrar las siguientes afirmaciones.

- (1) Cualquier subconjunto finito de  $\mathbb{R}^n$  tiene contenido  $n$ -dimensional nulo.
- (2) La unión de una familia finita de conjuntos de contenido  $n$ -dimensional nulo tiene contenido  $n$ -dimensional nulo.
- (3) Todo subconjunto de un conjunto de contenido  $n$ -dimensional nulo tiene contenido  $n$ -dimensional nulo.
- (4) Todo subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^n$  contenido en un subespacio afín de dimensión menor que  $n$  tiene contenido  $n$ -dimensional nulo.
- (5) Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ , demostrar que si para cada  $\varepsilon > 0$  existe un conjunto finito de paralelepípedos rectangulares  $\{Q_1, \dots, Q_N\}$  tales que la suma de los contenidos  $n$ -dimensionales de los  $Q_i$  es menor que  $\varepsilon$  y

$$A \subset \bigcup_{i=1}^N Q_i$$

entonces  $A$  tiene contenido  $n$ -dimensional nulo (es decir, podemos colocar  $Q_i$  en vez de  $\text{interior}(Q_i)$  en la definición de contenido nulo).

De manera completamente análoga a como se demostraron los Teoremas 1.26 y 1.28 se prueban los siguientes resultados. Los detalles se los dejamos al lector.

TEOREMA 1.50. Sean  $Q \subset \mathbb{R}^n$  un paralelepípedo rectangular acotado y  $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Entonces el gráfico de  $\varphi$  tiene contenido nulo en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

TEOREMA 1.51. Sea  $Q \subset \mathbb{R}^n$  un paralelepípedo rectangular acotado y sea  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Si el conjunto de las discontinuidades de  $f$  tiene contenido  $n$ -dimensional nulo en  $\mathbb{R}^n$  entonces  $f$  es integrable en  $Q$ .

EJERCICIO 1.52. Sea  $Q \subset \mathbb{R}^n$  un paralelepípedo rectangular y sea  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Sea  $P$  una partición de  $Q$ . Definir  $U(f, P)$ , la suma superior para  $f$  con respecto a la partición  $P$  y definir  $L(f, P)$ , la suma inferior para  $f$  con respecto a la partición  $P$ .

Demostrar los siguientes resultados (aclarar bien el significado de la notación en el segundo).

TEOREMA 1.53 (Condición de Riemann). Sea  $Q \subset \mathbb{R}^n$  un paralelepípedo rectangular y  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Entonces  $f$  es integrable sobre  $Q$  si y sólo si para cada  $\varepsilon > 0$  existe una partición  $P$  de  $Q$  tal que  $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$ .

TEOREMA 1.54. Sea  $Q \subset \mathbb{R}^n$  un paralelepípedo rectangular cerrado y acotado, sea  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua entonces

- (a)  $f$  es integrable.
- (b) Si  $\vec{c}_{i_1 \dots i_n} \in Q_{i_1 \dots i_n}$ , la integral de  $f$  en  $Q$  es:

$$\int_Q f dV = \lim_{\|P_1\| \rightarrow 0, \dots, \|P_n\| \rightarrow 0} \sum_{i_1=1}^{N_1} \dots \sum_{i_n=1}^{N_n} f(\vec{c}_{i_1 \dots i_n}) \text{Vol}(Q_{i_1 \dots i_n}).$$

### Conjuntos lisos.

DEFINICIÓN 1.55. Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Se dice que  $A$  es un *conjunto liso* si existe un entero no negativo  $k < n$ , una función  $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $\mathcal{C}^1$  y un conjunto  $D \subset \mathbb{R}^k$  compacto tal que

$$A = g(D).$$

EJEMPLO 1.56. Los subconjuntos lisos de  $\mathbb{R}$  son los puntos. Una curva suave es un subconjunto liso de  $\mathbb{R}^3$ .

Vamos a probar que todo subconjunto liso de  $\mathbb{R}^n$  tiene contenido  $n$ -dimensional nulo. Primero necesitamos recordar y establecer ciertos resultados.

Recordemos (ver Guía de Cálculo Diferencial en varias variables) que si  $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  entonces

$$\|g(\vec{y}) - g(\vec{x})\| \leq \sqrt{n} \|\vec{y} - \vec{x}\| \max_{\vec{z} \in L} \|g'(\vec{z})\|_M,$$

donde  $L$  es el segmento de recta que une los puntos  $\vec{x}$  y  $\vec{y}$ .

Por lo tanto, si  $D \subset \mathbb{R}^k$  es compacto y convexo, tenemos que

$$\|g(\vec{y}) - g(\vec{x})\| \leq \sqrt{n} \|\vec{y} - \vec{x}\| \max_{\vec{z} \in D} \|g'(\vec{z})\|_M,$$

para todo par de puntos  $\vec{x}, \vec{y} \in D$ .

Un cubo en  $\mathbb{R}^k$  es un conjunto de la forma  $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k]$ , donde  $b_i - a_i = b_j - a_j$  para  $i, j = 1, \dots, k$ .

Si  $K$  es un cubo en  $\mathbb{R}^k$ ,  $\vec{x}_o$  es el centro de  $K$  y  $l$  es la longitud de la arista de  $K$ , entonces

$$K = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x} - \vec{x}_o\|_\infty \leq \frac{l}{2} \right\},$$

donde

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_k|\}.$$

LEMA 1.57. Sea  $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función de clase  $\mathcal{C}^1$  y sea  $K$  un cubo en  $\mathbb{R}^k$  de centro  $\vec{x}_o$  y arista de longitud  $l$ . Entonces  $g(K)$  está contenido en un cubo de arista de longitud

$$n \cdot l \cdot \max_{\vec{z} \in K} \|g'(\vec{z})\|_M.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\vec{x} \in K$ . Entonces

$$\begin{aligned} \|g(\vec{x}) - g(\vec{x}_o)\|_\infty &\leq \|g(\vec{x}) - g(\vec{x}_o)\| \\ &\leq \sqrt{n} \max_{\vec{z} \in K} \|g'(\vec{z})\|_M \|\vec{x} - \vec{x}_o\| \\ &\leq \sqrt{n} \max_{\vec{z} \in K} \|g'(\vec{z})\|_M \sqrt{n} \|\vec{x} - \vec{x}_o\|_\infty \\ &\leq n \left( \frac{l}{2} \right) \max_{\vec{z} \in K} \|g'(\vec{z})\|_M. \end{aligned}$$

□

TEOREMA 1.58. Todo subconjunto liso de  $\mathbb{R}^n$  tiene contenido  $n$ -dimensional nulo.

DEMOSTRACIÓN. Como todo subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^k$  está contenido en un cubo, basta probar que si  $k < n$ ,  $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función de clase  $\mathcal{C}^1$  y  $K \subset \mathbb{R}^k$  es un cubo entonces  $g(K)$  tiene contenido  $n$ -dimensional nulo.

Sea  $K \subset \mathbb{R}^k$  un cubo. Sea  $l$  la longitud de la arista de  $K$ . Si dividimos cada arista de  $K$  en  $N$  partes iguales de longitud  $l/N$  entonces  $K$  queda dividido en  $N^k$  subcubos.

Sea  $\gamma = n \cdot \max_{\vec{z} \in K} \|g'(\vec{z})\|_M$ . Por el Lema 1.57 la imagen de cada uno de estos subcubos está contenido en un cubo cuya arista tiene longitud

$$\gamma \cdot \left(\frac{l}{N}\right),$$

por lo tanto, el contenido  $n$ -dimensional de su imagen de cada subcubo está acotado por

$$\gamma^n \cdot \left(\frac{l}{N}\right)^n.$$

Cómo  $K$  consta de  $N^k$  subcubos tenemos que el contenido  $n$ -dimensional de  $g(K)$  está acotado por

$$N^k \cdot \gamma^n \cdot \left(\frac{l}{N}\right)^n.$$

Cómo  $k < n$  y  $N$  es arbitrario el contenido  $n$ -dimensional de  $g(K)$  tiene que ser nulo. □

## 6. Integrales múltiples sobre regiones generales

Sean  $S$  un subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^n$  y  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Sea  $Q$  un paralelepípedo rectangular acotado tal que  $S \subset Q$ . Sea  $\tilde{f} : Q \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por

$$\tilde{f}(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}) & \text{si } \vec{x} \in S, \\ 0 & \text{si } \vec{x} \in Q \setminus S. \end{cases} \quad (1.4)$$

El conjunto de los puntos de discontinuidad de  $\tilde{f}$  está contenido en el conjunto de los puntos de discontinuidad de  $f$  unido con la frontera de  $S$ . Por lo tanto, si la frontera de  $S$  y el conjunto de los puntos de discontinuidad de  $f$  tienen contenido  $n$ -dimensional nulo, entonces  $\tilde{f}$  es integrable sobre  $Q$ .

DEFINICIÓN 1.59. Sea  $S$  un subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^n$  tal que su frontera tiene contenido nulo. Sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada, tal que el conjunto de los puntos de discontinuidad de  $f$  tiene contenido nulo. Sean  $Q$  y  $\tilde{f}$  como en (1.4), se define

$$\int_S f(\vec{x}) dV = \int_Q \tilde{f}(\vec{x}) dV.$$

DEFINICIÓN 1.60. Sea  $R$  un subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^n$  cuya frontera tiene contenido nulo. El volumen  $n$ -dimensional o contenido  $n$ -dimensional de  $R$  es:

$$V_n(R) = \int_R 1 \, dV.$$

Tal como es natural, al contenido 2-dimensional se le llama área y al 3-dimensional se le llama volumen.

De manera análoga al caso bi-dimensional, podemos calcular integrales múltiples sobre regiones generales.

Por ejemplo, si

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \alpha_1(x, y) \leq z \leq \alpha_2(x, y)\}$$

donde  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son funciones continuas en  $[a, b]$  siendo  $\varphi_1 \leq \varphi_2$ ,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son funciones continuas con  $\alpha_1 \leq \alpha_2$ .

Si  $f$  es integrable en  $R$  entonces

$$\iiint_R f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left( \int_{\alpha_1(x, y)}^{\alpha_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx.$$

Otro ejemplo, si

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq z \leq h_2(y), \beta_1(y, z) \leq x \leq \beta_2(y, z)\}$$

entonces

$$\iiint_R f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dz \int_{\beta_1(y, z)}^{\beta_2(y, z)} f(x, y, z) \, dx.$$

Una región arbitraria debe descomponerse en la unión de regiones análogas a las anteriores para poder así colocar los límites de integración.

OBSERVACIÓN 1.61. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \geq 0$ . Entonces

$$\iiint_Q f(x, y, z) \, dx dy dz$$

representa la masa de un sólido que ocupa la región  $Q$  y cuya densidad en cada punto es  $f$ .

EJERCICIO 1.62. Demostrar que si  $A \subset \mathbb{R}^2$  es acotado,  $f : A \rightarrow [0, \infty)$  es integrable y

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

entonces

$$\text{Vol}(R) = \iint_A f(x, y) \, dx \, dy.$$

EJEMPLO 1.63. Calcular el volumen del sólido  $R$  limitado por los planos coordenados y el plano  $x + y + z = 1$ .

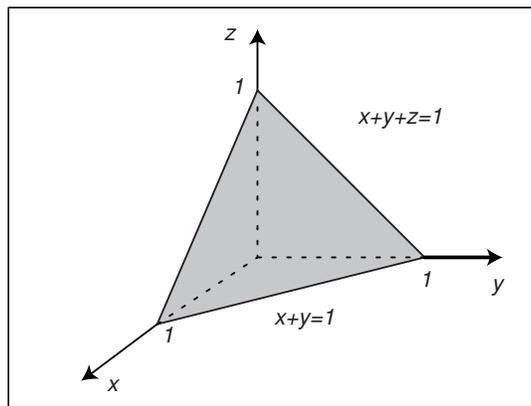


FIGURA 1.8. Sólido  $R$

Tenemos que

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}.$$

Por lo tanto, aplicando el teorema de Fubini tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Vol}(R) &= \int_R 1 \, dV = \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \left( \int_0^{1-x-y} 1 \, dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} (1-x-y) dy \right) dx, \end{aligned}$$

por otra parte

$$\int_0^{1-x} (1-x-y) dy = (1-x)y - \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=1-x} = (1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2} = \frac{(1-x)^2}{2},$$

de donde

$$\text{Vol}(R) = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = -\frac{1}{2} \frac{(1-x)^3}{3} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{6}.$$

EJEMPLO 1.64. Calcular el volumen del sólido  $S$  acotado por las superficies de  $z = 3x^2$ ,  $z = 4 - x^2$ ,  $y = 0$ ,  $z + y = 6$ .

El primer paso es identificar la región de integración.

Veamos primero los gráficos de

$$z = 3x^2 \quad \text{y de} \quad z = 4 - x^2.$$

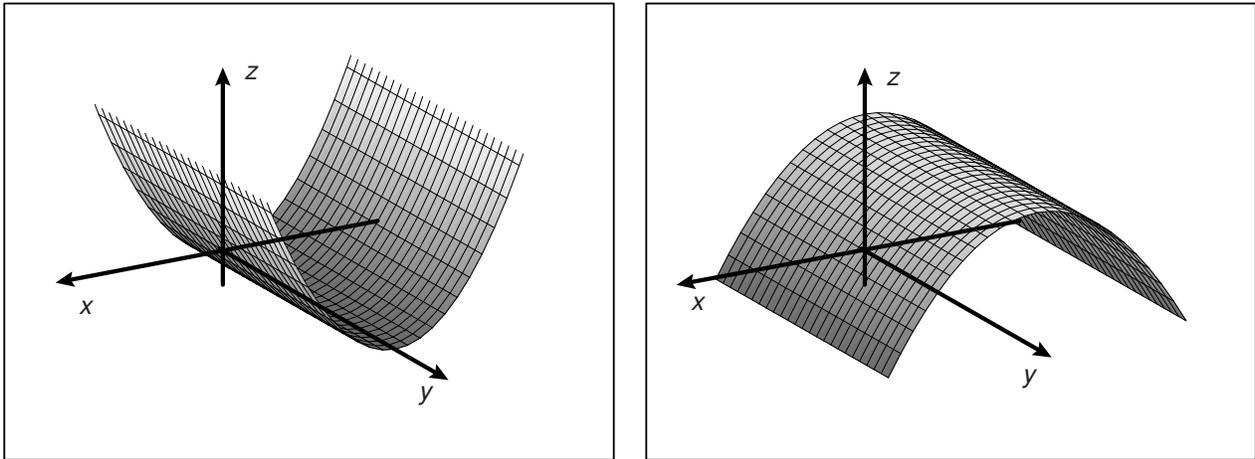


FIGURA 1.9. Gráficos de  $z = 3x^2$  y de  $z = 4 - x^2$

La superficie  $y = 0$  es el plano  $xz$  y la superficie  $z + y = 6$  es un plano. A continuación ilustramos el plano  $z + y = 6$  y la región  $S$ .

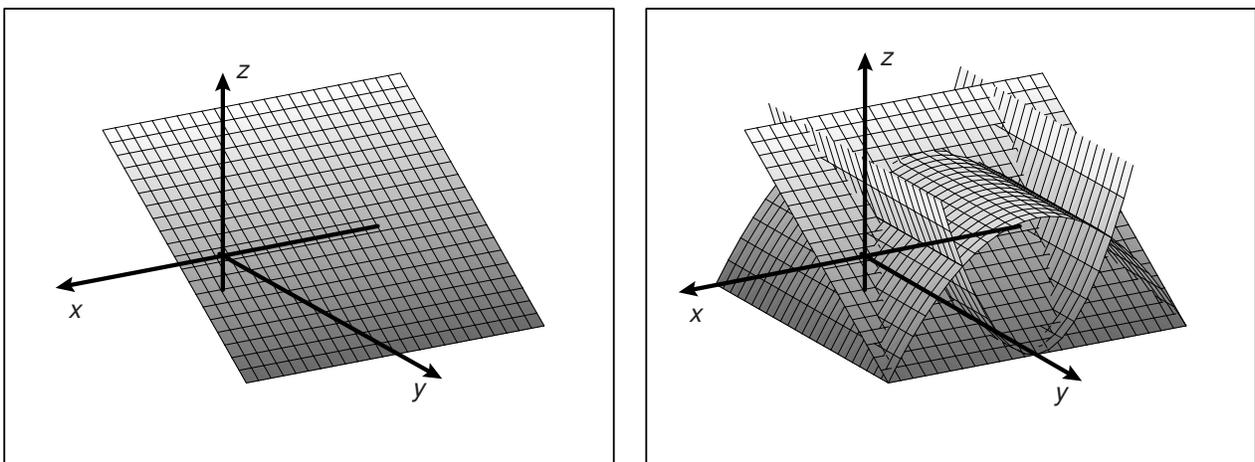


FIGURA 1.10. Plano  $z + y = 6$  y región  $S$

Si rotamos la región para poder verla desde atrás obtenemos

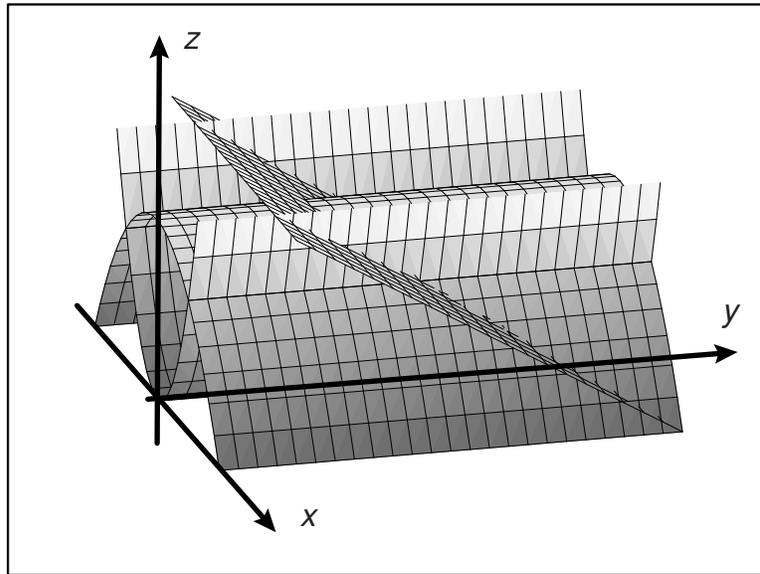


FIGURA 1.11. Región  $S$

En conclusión, la región está dada por las siguientes desigualdades:

$$-1 \leq x \leq 1, \quad 3x^2 \leq z \leq 4 - x^2, \quad 0 \leq y \leq 6 - z,$$

por lo tanto,

$$\text{Vol}(S) = \int_{-1}^1 dx \int_{3x^2}^{4-x^2} dz \int_0^{6-z} dy = \dots = \frac{304}{15}.$$

EJEMPLO 1.65. Encontrar el volumen de la región  $R$  acotada por las superficies  $z = x^2 + y^2$  y  $z = 10 - x^2 - 2y^2$ .

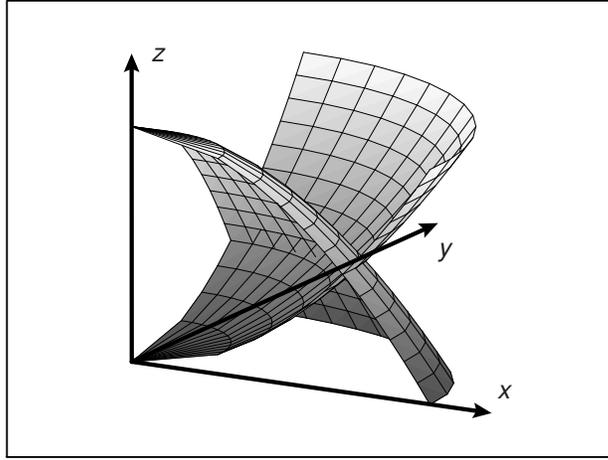
La superficie  $z = x^2 + y^2$  es un paraboloides que se abre hacia arriba y la superficie  $z = 10 - x^2 - 2y^2$  es un paraboloides que se abre hacia abajo.

Igualando las dos ecuaciones tenemos que se intersectan donde  $x^2 + y^2 = 10 - x^2 - 2y^2$  o bien  $2x^2 + 3y^2 = 10$ , que es un conjunto cuya proyección sobre el plano  $xy$  es una elipse.

Esta elipse se puede describir como

$$-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}, \quad -\frac{\sqrt{10 - 2x^2}}{3} \leq y \leq \frac{\sqrt{10 - 2x^2}}{3}.$$

En la siguiente figura se observa una sección del sólido, visto desde la parte de atrás.

FIGURA 1.12. Corte de las superficies que limitan a  $R$ 

Tenemos que

$$\begin{aligned}
 \text{Vol}(R) &= \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \int_{-\frac{\sqrt{10-2x^2}}{3}}^{\frac{\sqrt{10-2x^2}}{3}} \int_{x^2+y^2}^{10-x^2-2y^2} dz dy dx \\
 &= \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \int_{-\frac{\sqrt{10-2x^2}}{3}}^{\frac{\sqrt{10-2x^2}}{3}} (10 - x^2 - 2y^2 - x^2 - y^2) dy dx \\
 &= \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \int_{-\frac{\sqrt{10-2x^2}}{3}}^{\frac{\sqrt{10-2x^2}}{3}} (10 - 2x^2 - 3y^2) dy dx \\
 &= \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left( 10y - 2x^2y - y^3 \Big|_{y=-(1/3)(10-2x^2)^{1/2}}^{y=(1/3)(10-2x^2)^{1/2}} \right) dx \\
 &= \frac{4}{3\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left( 10\sqrt{2}\sqrt{5-x^2} - 2\sqrt{2}x^2\sqrt{5-x^2} \right) dx.
 \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{5-x^2} dx &= \frac{x}{2}\sqrt{5-x^2} + \frac{5}{2} \arcsen \frac{x}{\sqrt{5}} + c, \\
 \int x^2\sqrt{5-x^2} dx &= \frac{x}{8}(2x^2-5)\sqrt{5-x^2} + \frac{25}{8} \arcsen \frac{x}{\sqrt{5}} + c.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(R) &= \frac{40\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \left( \frac{x}{2} \sqrt{5-x^2} + \frac{5}{2} \arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) \right) \Big|_{x=-\sqrt{5}}^{x=\sqrt{5}} \\ &\quad - \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \left( \frac{x}{8} (2x^2 - 5) \sqrt{5-x^2} + \frac{25}{8} \arcsen\frac{x}{\sqrt{5}} \right) \Big|_{x=-\sqrt{5}}^{x=\sqrt{5}} \\ &= \frac{25\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

### 7. Cambio de variables en integrales múltiples.

Recordemos que, bajo ciertas condiciones, para funciones de una variable se cumple

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \int_a^b f(g(u)) g'(u) du.$$

En esta sección vamos a estudiar la extensión de este resultado a funciones de varias variables e integrales múltiples.

OBSERVACIÓN 1.66. Es importante aclarar que, para el caso de funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ , calcular  $\int_I f(x) dx$  es lo mismo que calcular  $\int_I f(t) dt$ .

Lo anterior no es un cambio de variable, simplemente es un cambio de notación. También lo podríamos haber escrito como

$$\int_I f(\theta) d\theta,$$

la región de integración es siempre la misma.

De la misma manera si  $A \subset \mathbb{R}^2$  se tiene que calcular

$$\iint_A f(x, y) dx dy$$

es lo mismo que calcular esta integral

$$\iint_A f(u, v) du dv$$

o esta otra

$$\int_A f(r, \theta) dr d\theta,$$

la región de integración siempre es la misma.

El teorema de cambio de variables para integrales múltiples es el siguiente.

TEOREMA 1.67 (Teorema de cambio de variables). *Supongamos que*

- (i)  $D \subset \mathbb{R}^n$  es un abierto y  $T : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función de clase  $\mathcal{C}^1$ ,
- (ii)  $B \subset \mathbb{R}^n$  es acotado,  $\partial B$  está formada por un número finito de conjuntos lisos y  $\bar{B} \subset D$ ,
- (iii)  $T$  es inyectiva en  $B$ ,
- (iv)  $\det T'(u_1, \dots, u_n) \neq 0$  para todo  $(u_1, \dots, u_n) \in B$  con la posible excepción de un número finito de conjuntos lisos,
- (v)  $f : T(B) \rightarrow \mathbb{R}$  es una función acotada y continua .

Entonces  $f$  es integrable sobre  $T(B)$  y

$$\int_{T(B)} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_B f(T(u_1, \dots, u_n)) |\det T'(u_1, \dots, u_n)| du_1 \dots du_n.$$

Para la demostración remitimos al lector a las referencias, ver por ejemplo el libro de Williamson, Crowell y Trotter [13] o el libro de Edwards [3]. Veremos algunos ejemplos en detalle y justificaremos el resultado de manera intuitiva.

EJERCICIO 1.68. Verificar que en el caso  $n = 1$  el teorema se reduce a la conocida fórmula:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \int_a^b f(g(u)) g'(u) du.$$

(Notar que debe aclarar que ocurre con el valor absoluto que aparece en el teorema).

EJEMPLO 1.69. Sea  $P$  el paralelogramo acotado por

$$y = 2x, \quad y = 2x - 2, \quad y = x + 1, \quad y = x.$$

Utilizaremos el teorema de cambio de variables para calcular

$$\int_P xy \, dx dy.$$

Haremos el cambio de variables  $x = u - v$ ,  $y = 2u - v$ . Más precisamente sea

$$T(u, v) = (u - v, 2u - v).$$

Sea  $B$  el rectángulo acotado por  $v = 0$ ,  $v = -2$ ,  $u = 0$ ,  $u = 1$  entonces  $T(B) = P$ . Además

$$T(0, 0) = (0, 0), \quad T(1, 0) = (1, 2), \quad T(0, -2) = (2, 2) \quad \text{y} \quad T(1, -2) = (3, 4).$$

El jacobiano para el cambio de variables es:

$$T'(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Luego  $\det T'(u, v) = -1 + 2 = 1$ .

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \iint_P xy \, dx dy &= \iint_B (u-v)(2u-v) \, du dv = \int_{-2}^0 \int_0^1 (2u^2 - 3vu + v^2) \, du dv \\ &= \int_{-2}^0 \left. \frac{2}{3}u^3 - \frac{3}{2}vu^2 + v^2 \right|_{u=0}^{u=1} dv = \int_{-2}^0 \left( \frac{2}{3} - \frac{3}{2}v + v^2 \right) dv = \\ &= \left. \frac{2}{3}v - \frac{3}{4}v^2 + \frac{v^3}{3} \right|_{v=-2}^{v=0} = - \left( \frac{2}{3}(-2) - 3 - \frac{8}{3} \right) \\ &= - \left( -\frac{12}{3} - 3 \right) = 7. \end{aligned}$$

### Coordenadas Polares.

Recordemos que el punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tiene coordenadas polares  $(r, \theta)$  si

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta.$$

En este caso,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \tan \theta = y/x.$$

Es usual suponer  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Más generalmente, se restringe  $\theta$  a un intervalo semiabierto de longitud  $2\pi$ .

Explícitamente

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0, y \geq 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x < 0 \\ 2\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0, y < 0 \end{cases}$$

donde  $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$  está entre  $-\pi/2$  y  $\pi/2$ .

EJEMPLO 1.70.

(a) Hallar las coordenadas polares del punto  $(6, 6)$ .

Tenemos que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2},$$

$$\theta = \arctan(6/6) = \arctan 1 = \pi/4.$$

(b) Si un punto tiene coordenadas polares  $(8, 2\pi/3)$ , ¿Cuáles son sus coordenadas cartesianas?

Tenemos que

$$x = r \cos \theta = 8 \cos(2\pi/3) = -8/2 = -4,$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta = 8 \operatorname{sen}(2\pi/3) = 8\sqrt{3}/2 = 4\sqrt{3},$$

OBSERVACIÓN 1.71.

Sea  $\theta_o$  fijo. La gráfica de  $\theta = \theta_o$  está formada por los puntos de una semirrecta que forma un ángulo  $\theta_o$  con la recta  $y = 0$ .

Sea  $r_o$  fijo. La gráfica de  $r = r_o$  es una circunferencia con centro en el origen y radio  $r_o$ .

TEOREMA 1.72 (Cambio de variables a Coordenadas Polares).

Sea  $B \subset \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi\}$  acotado y sea  $T_P(r, \theta) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$  la transformación de coordenadas polares. Sea  $T_P(B)$  la imagen de  $B$  por  $T_P$  y sea  $f : T_P(B) \rightarrow \mathbb{R}$  continua y acotada. Entonces

$$\iint_{T_P(B)} f(x, y) \, dx dy = \iint_B f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) r \, dr d\theta.$$

DEMOSTRACIÓN. La matriz jacobiana para el cambio a coordenadas polares es:

$$T'_P(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Luego  $\det T'_P(r, \theta) = r$ .

□

EJEMPLO 1.73. Calcular

$$\iint_Q \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy$$

donde

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Sean  $T_P(r, \theta) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$  y  $B = [1, 2] \times [0, 2\pi]$ , entonces

$$T_P(B) = Q.$$

Luego

$$\begin{aligned}
 \iint_Q \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy &= \iint_B \sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \operatorname{sen} \theta)^2} \, r \, dr d\theta \\
 &= \iint_B r^2 \, dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^2 \, dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^2 \, dr = 2\pi \int_1^2 r^2 \, dr \\
 &= 2\pi \frac{r^3}{3} \Big|_{r=1}^{r=2} = \frac{2\pi}{3} (8 - 1) \\
 &= \frac{14\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

### Justificación de la fórmula del cambio de variables para coordenadas polares.

A continuación vamos a justificar, de manera intuitiva y usando argumentos geométricos sencillos, la fórmula para el cambio de variables a coordenadas polares.

Tal como antes sea

$$T_P(r, \theta) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta).$$

Es un hecho básico de geometría (ver figura) que si  $B_o = [0, q] \times [0, \alpha]$ , donde  $\alpha \in [0, \pi/2]$  y  $q \geq 0$ , entonces

$$\operatorname{Area}(T_P(B_o)) = q^2 \frac{\alpha}{2}.$$

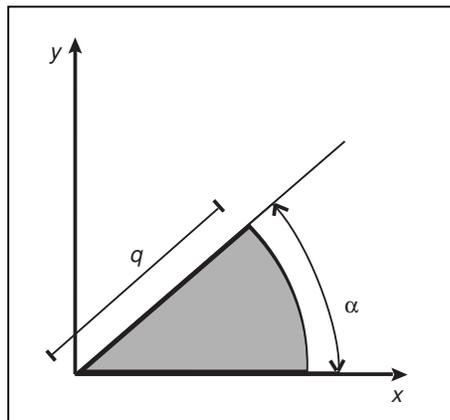


FIGURA 1.13.  $T_P(B_o)$

PROPOSICIÓN 1.74. Si

$$B_1 = [q_1, q_2] \times [\alpha_1, \alpha_2],$$

donde  $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 < 2\pi$  y  $0 \leq q_1 < q_2$ , entonces

$$\text{Area}(T_P(B_1)) = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)(q_2 - q_1)(q_2 + q_1)}{2}.$$

DEMOSTRACIÓN. Del comentario previo a esta Proposición podemos concluir que (ver figura)

$$\begin{aligned} \text{Area}(T_P(B_1)) &= q_2^2 \frac{\alpha_2}{2} - q_1^2 \frac{\alpha_1}{2} - (q_1^2 \frac{\alpha_2}{2} + q_2^2 \frac{\alpha_1}{2}) \\ &= \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)(q_2 - q_1)(q_2 + q_1)}{2}. \end{aligned}$$

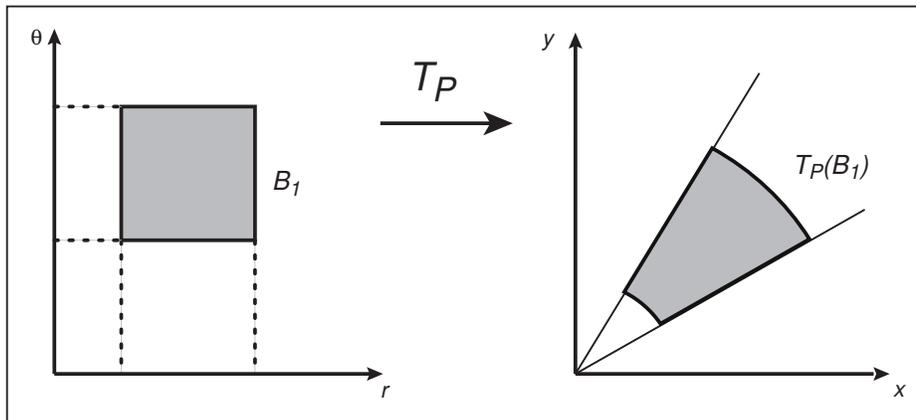


FIGURA 1.14.  $T_P(B_1)$

□

Consideremos ahora una región  $B$  en el plano  $r\theta$ . Supongamos  $B \subset [a, b] \times [\gamma, \delta]$  y sea  $T_P(B)$  la imagen de  $B$  por  $T_P$ .

Sean  $P_1 = \{r_0, r_1, \dots, r_{n_1}\}$  una partición de  $[a, b]$  y  $P_2 = \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n_2}\}$  una partición de  $[\gamma, \delta]$ .

Sean  $B_{ij} = [r_{i-1}, r_i] \times [\theta_{j-1}, \theta_j]$  y  $d_{ij} \in B_{ij}$ .

Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, entonces basándonos en el Teorema 1.54 podemos justificar, de manera informal, la fórmula para el cambio de variables a coordenadas polares de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\iint_{T_P(B)} f(x, y) \, dx dy &= \lim_{(\|P_1\|, \|P_2\|) \rightarrow (0,0)} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} f(T_P(d_{ij})) \text{Area}(T_P(B_{ij})) \\
&= \lim_{(\|P_1\|, \|P_2\|) \rightarrow (0,0)} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} f(T_P(d_{ij})) \frac{r_i + r_{i-1}}{2} (r_i - r_{i-1}) (\theta_j - \theta_{j-1}) \\
&= \iint_B f(T_P(r, \theta)) r \, dr d\theta \\
&= \iint_B f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr d\theta.
\end{aligned}$$

### 7.1. Coordenadas Cilíndricas.

Recordemos que el punto  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tiene coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  si

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

es decir, representamos la primera y la segunda coordenada en términos de coordenadas polares y no alteramos la tercera.

En general se toma  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $z \in \mathbb{R}$ .

Además

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad z = z.$$

**EJEMPLO 1.75.** Si un punto tiene coordenadas cilíndricas  $(8, 2\pi/3, -3)$ , ¿Cuáles son sus coordenadas cartesianas?

Tenemos que

$$\begin{aligned}
x &= r \cos \theta = 8 \cos 2\pi/3 = -8/2 = -4, \\
y &= r \sin \theta = 8 \sin 2\pi/3 = 8\sqrt{3}/2 = 4\sqrt{3}, \\
z &= -3.
\end{aligned}$$

**OBSERVACIÓN 1.76.**

Sea  $z_o$  fijo. El conjunto  $z = z_o$  está formada por todos los puntos de un plano paralelo al plano  $xy$ .

Sea  $\theta_o$  fijo. El conjunto  $\theta = \theta_o$  está formada por todos los puntos de un semiplano que contiene al eje  $z$  y que forma un ángulo  $\theta_o$  con el plano  $y = 0$ .

En particular  $\theta = 0$  corresponde al plano  $xz$ .

Sea  $r_o$  fijo. El conjunto  $r = r_o$  está formada por todos los puntos de un cilindro circular recto cuyo eje central es el eje  $z$  y que tiene radio  $r_o$ .

Sea

$$T_C(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z)$$

la transformación de coordenadas cilíndricas, entonces su jacobiano es:

$$T'_C(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego  $\det T'_C(r, \theta, z) = r$ .

Del teorema general de cambio de variables obtenemos.

**TEOREMA 1.77** (Cambio de variables a Coordenadas Cilíndricas).

Sean  $B \subset \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi\}$  acotado,  $T_C(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z)$  y  $f : T_C(B) \rightarrow \mathbb{R}$  continua y acotada. Entonces

$$\iiint_{T_C(B)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_B f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z) r dr d\theta dz.$$

**EJEMPLO 1.78.** Sea  $S$  el sólido dado por  $x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ . Hallar

$$\iiint_S z dx dy dz.$$

Cambiando a coordenadas cilíndricas obtenemos

$$\begin{aligned} \iiint_S dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^r r z dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left( \frac{r z^2}{2} \Big|_{z=0}^{z=r} \right) dr d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r^3}{2} dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4} d\theta = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

### Coordenadas Esféricas.

Recordemos que el punto  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tiene coordenadas esféricas  $(\rho, \theta, \varphi)$  si

$$x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \quad z = \rho \cos \varphi.$$

En general se toma

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Además,

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad \cos \varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

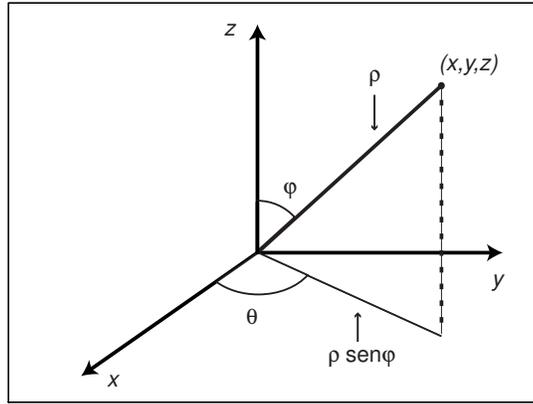


FIGURA 1.15. Coordenadas esféricas

OBSERVACIÓN 1.79. Sea  $\rho_0$  fijo. La gráfica de  $\rho = \rho_0$  es una esfera con centro en el origen y radio  $\rho_0$ .

Sea  $\theta_0$  fijo. La gráfica de  $\theta = \theta_0$  es un semiplano que contiene al eje  $z$ .

Sea  $\varphi_0$  fijo. La gráfica de  $\varphi = \varphi_0$  es un cono con vértice en el origen y una abertura angular  $2\varphi_0$ .

OBSERVACIÓN 1.80.

- (1) Si  $\rho$  es constante, las cantidades  $(\rho, \theta, \varphi)$  forman un sistema de coordenadas en la superficie de una esfera.
- (2) La latitud y la longitud en la superficie de la Tierra también forman un sistema de coordenadas.
- (3) Si restringimos  $\theta$  de modo que  $-\pi < \theta < \pi$ , entonces se llama la longitud del punto en coordenadas esféricas.
- (4)  $\varphi$  se llama colatitud del punto y la latitud del punto es  $\pi/2 - \varphi$ .

Sea

$$T_E(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \sen \varphi \cos \theta, \rho \sen \varphi \sen \theta, \rho \cos \varphi).$$

El jacobiano para el cambio a coordenadas esféricas es:

$$T'_E(\rho, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sen \varphi \cos \theta & -\rho \sen \varphi \sen \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \sen \varphi \sen \theta & \rho \sen \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sen \theta \\ \cos \varphi & 0 & -\rho \sen \varphi \end{pmatrix}$$

Luego  $\det T'_E(\rho, \theta, \varphi) = -\rho^2 \operatorname{sen} \varphi$ . Y así

$$|\det T'_E(\rho, \theta, \varphi)| = \rho^2 \operatorname{sen} \varphi.$$

TEOREMA 1.81 (Cambio de variables a Coordenadas Esféricas).

Sean

$$B \subset \{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : \rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$$

acotado,  $T_E(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \varphi)$  y  $f : T_E(B) \rightarrow \mathbb{R}$  continua, entonces

$$\iiint_{T_E(B)} f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_B f(\rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \operatorname{sen} \varphi \, d\rho d\theta d\varphi$$

EJEMPLO 1.82. Sea  $D$  la esfera de radio  $a$  y centro  $(0, 0, 0)$ , queremos hallar el volumen de  $D$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{Vol}(D) &= \int_D 1 \, dx dy dz = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho^2 \operatorname{sen} \varphi \, d\rho d\theta d\varphi = \\ &= \frac{a^3}{3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \varphi \, d\theta d\varphi = \frac{2\pi a^3}{3} \int_0^\pi \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi \\ &= \frac{2\pi a^3}{3} (-\cos \pi + \cos 0) \\ &= \frac{4\pi a^3}{3}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.83. Calcular el volumen del sólido  $S$  que está encima del cono  $z^2 = x^2 + y^2$  y dentro de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ .

Este cono está dado por  $\varphi = \pi/4$  y la ecuación de la esfera dada es

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2,$$

es decir tiene centro  $(0, 0, a)$  y radio  $a$ .

Sea  $(x, y, z)$  un punto de la esfera, entonces

$$\begin{aligned}
 a^2 &= x^2 + y^2 + (z - a)^2 \\
 &= x^2 + y^2 + z^2 - 2az + a^2 \\
 &= \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \varphi - 2a\rho \cos \varphi + a^2 \\
 &= \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) + \rho^2 \cos^2 \varphi - 2a\rho \cos \varphi + a^2 \\
 &= \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi - 2a\rho \cos \varphi + a^2 \\
 &= \rho^2 (\operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi) - 2a\rho \cos \varphi + a^2 \\
 &= \rho^2 - 2a\rho \cos \varphi + a^2.
 \end{aligned}$$

Luego  $\rho^2 = 2a\rho \cos \varphi$  y, por lo tanto,

$$\rho = 2a \cos \varphi.$$

Cómo los puntos de  $S$  están por encima del cono tenemos que  $0 \leq \varphi \leq \pi/4$  y cómo están dentro de la esfera tenemos que  $0 \leq \rho \leq 2a \cos \varphi$ .

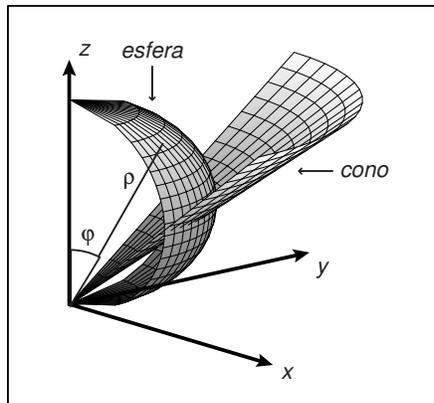


FIGURA 1.16. Corte de las superficies que limitan a  $S$

Por lo tanto  $S$  está dado por  $0 \leq \rho \leq 2a \cos \varphi$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi/4$ .

Utilizando el cambio a coordenadas esféricas obtenemos

$$\begin{aligned}
\text{Vol}(R) &= \iiint_S dx dy dz \\
&= \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \int_0^{2a \cos \varphi} \rho^2 \text{sen } \varphi \, d\rho d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{\pi/4} \left( \int_0^{2\pi} \int_0^{2a \cos \varphi} \rho^2 \, d\rho d\theta \right) \text{sen } \varphi \, d\varphi \\
&= \int_0^{\pi/4} \left( \int_0^{2\pi} \frac{8a^3}{3} \cos^3 \varphi \, d\theta \right) \text{sen } \varphi \, d\varphi \\
&= \frac{8a^3}{3} \int_0^{\pi/4} \cos^3 \varphi \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \text{sen } \varphi \, d\varphi \\
&= \frac{16\pi a^3}{3} \int_0^{\pi/4} \cos^3 \varphi \text{sen } \varphi \, d\varphi.
\end{aligned}$$

el resto de los cálculos se los dejamos al lector.

### Justificación intuitiva del teorema de cambio de variables.

En los cursos de álgebra lineal o de geometría se demuestra que si  $\Lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una transformación lineal y  $Q \subset \mathbb{R}^n$  es un rectángulo, entonces

$$V_n(\Lambda(Q)) = |\det \Lambda| V_n(Q)$$

( $V_n$  es el contenido  $n$ -dimensional).

Como las traslaciones dejan invariante el contenido  $n$ -dimensional, tenemos que si  $A$  es de la forma  $\vec{Y}_o + \Lambda$ , donde  $\vec{Y}_o$  es un vector fijo y  $\Lambda$  es lineal, entonces también vale

$$V_n(A(Q)) = |\det \Lambda| V_n(Q).$$

Supongamos que  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función de clase  $\mathcal{C}^1$ . Entonces  $T$  es diferenciable y

$$T(\vec{x}) \approx T(\vec{x}_o) + dT_{\vec{x}_o}(\vec{x} - \vec{x}_o)$$

si  $\vec{x} \approx \vec{x}_o$ .

Luego si  $Q$  es un paralelepípedo “pequeño” y  $\vec{x}_o \in Q$ , entonces

$$V_n(T(Q)) \approx V_n(dT_{\vec{x}_o}(Q)) = |\det T'(\vec{x}_o)| V_n(Q).$$

Consideremos ahora una región acotada  $B$  en  $\mathbb{R}^n$  y  $f : T(B) \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua y acotada. Si dividimos a  $B$  en paralelepípedos “pequeños”  $Q_1, \dots, Q_N$  y  $\vec{x}_i \in Q_i$  tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{T(B)} f(\vec{x}) d\vec{x} &\approx \sum_{i=1}^N f(T(\vec{x}_i)) V_n(T(Q_i)) \\
&\approx \sum_{i=1}^N f(T(\vec{x}_i)) |\det T'(\vec{x}_i)| V_n(Q_i) \\
&\approx \int_B f(T(\vec{u})) |\det T'(\vec{u})| d\vec{u}.
\end{aligned}$$

Justificando adecuadamente todas estas igualdades aproximadas se obtiene una demostración formal del teorema de cambio de variables.

### 8. Integrales impropias.

La definición de integral puede ser extendida a funciones no acotadas y que no son necesariamente cero fuera de un conjunto acotado.

Supongamos que tenemos  $B \subset \mathbb{R}^n$  y  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  tales que:

- (1) Si  $D$  es el conjunto de los puntos donde  $f$  no es continua, entonces la intersección de  $D$  con cualquier rectángulo acotado, está contenida en un número finito de conjuntos lisos.
- (2) La frontera de la intersección de  $B$  con cualquier rectángulo acotado, está contenida en un número finito de conjuntos lisos.

DEFINICIÓN 1.84. Sean  $B \subset \mathbb{R}^n$  y  $\{B_N\}_N$  una familia creciente de subconjuntos de  $B$ , diremos que  $\{B_N\}_N$  converge a  $B$  si todo subconjunto acotado de  $B$  en el cual  $f$  está acotada está contenido en algún  $B_N$ .

El índice  $N$  se puede escoger de manera conveniente, discreto o continuo, tendiendo a infinito o a un número dado.

DEFINICIÓN 1.85. La integral de  $f$  en  $B$  es

$$\int_B f dV = \lim_N \int_{B_N} f dV$$

siempre que el límite sea finito y no dependa de la familia de conjuntos acotados  $\{B_N\}_N$  que converge a  $B$ . (Se supone que los conjuntos  $B_N$  se escogen de manera que existan las integrales ordinarias de Riemann)

TEOREMA 1.86. Sea  $f$  no negativa en  $B$  y supongamos que

$$\lim_N \int_{B_N} f dV$$

es finito para una familia creciente de conjuntos  $\{B_N\}_N$  que converge a  $B$ . Entonces

$$\int_B f dV$$

está definida y

$$\int_B f dV = \lim_N \int_{C_N} f dV$$

para toda familia de conjuntos  $\{C_N\}_N$  que converge a  $B$ .

DEMOSTRACIÓN. Para cada  $N$  existe un  $K$  tal que  $B_N \subset C_K$ . De la misma manera existe un índice  $M$  que depende de  $K$  tal que  $C_K \subset B_M$ . Como  $f$  es no negativa

$$\int_{B_N} f dV \leq \int_{C_K} f dV \leq \int_{B_M} f dV.$$

Además, para todo  $N$

$$\int_{C_N} f dV \leq \lim_N \int_{B_N} f dV.$$

Como  $\left( \int_{C_N} f dV \right)_N$  es una sucesión creciente y acotada superiormente de números reales, entonces converge.

De la doble desigualdad se sigue que

$$\lim_N \int_{B_N} f dV \leq \lim_N \int_{C_N} f dV \leq \lim_N \int_{B_N} f dV.$$

Luego

$$\int_B f dV = \lim_N \int_{C_N} f dV.$$

□

EJEMPLO 1.87. Sea  $f(x, y) = 1/x^2y^2$  definida en  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, y \geq 1\}$ . Sea

$$B_N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq N, 1 \leq y \leq N\}.$$

Si  $N > 1$  entonces

$$\int_{B_N} f dA = \int_1^N \int_1^N \frac{1}{x^2y^2} dx dy = \left( \int_1^N \frac{1}{x^2} dx \right)^2 = \left( 1 - \frac{1}{N} \right)^2.$$

Cuando  $N$  tiende a infinito, los rectángulos  $B_N$  cubren todo  $B$ . Entonces

$$\int_B f dA = \lim_N \int_{B_N} f dA = \lim_N \left( 1 - \frac{1}{N} \right)^2 = 1.$$



## Ejercicios 1.

(1) Calcular las siguientes integrales iteradas.

$$(a) \int_0^2 dy \int_0^1 (x^2 + 2y) dx$$

$$(b) \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} dy$$

$$(c) \int_3^4 dx \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} dy$$

$$(d) \int_0^{2\pi} d\theta \int_{a \operatorname{sen} \theta}^a r dr$$

(2) Construir las regiones cuyas áreas se expresan por las siguientes integrales, decir qué tipo de región es, y calcular la integral.

$$(a) \int_0^1 \left( \int_0^{x^2} dy \right) dx$$

$$(b) \int_1^2 \left( \int_{2x}^{3x+1} dy \right) dx$$

(3) Hallar y representar gráficamente las regiones de integración que correspondan con cada una de las siguientes integrales iteradas.

$$(a) \int_{-6}^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x, y) dx$$

$$(b) \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy$$

$$(c) \int_1^3 dx \int_{x^2}^{x+9} f(x, y) dy$$

$$(d) \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} f(x, y) dy$$

(4) Calcular la siguiente integral doble por integración sucesiva.

$$\iint_Q xy(x+y) dx dy, \text{ donde } Q = [0, 1] \times [0, 1].$$

(5) Demostrar que el área de la parte del disco de centro  $(0, 0)$  y radio 1 que está comprendida entre la recta  $x = 1/2$  y la recta  $x = -1/2$  es igual a  $\pi/3 + \sqrt{3}/2$ .

(6) Sea  $0 < t < 1$ . Calcular el área de  $S = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y < t/x\}$ .

(7) Dibujar las regiones de integración y calcular la integral doble.

(a)  $\iint_S x \cos(x+y) dx dy$  donde  $S$  es el triángulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(\pi, 0)$  y  $(\pi, \pi)$ .

(b)  $\iint_S e^{x+y} dx dy$  donde  $S = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$ .

(8) Sea  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional;} \\ 2y & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Demuestre que

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = 1,$$

y que  $f$  no es integrable Riemann en el rectángulo  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

(9) ¿Es posible dar un ejemplo de una función  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  que es integrable y sin embargo no están definidas ninguna de las integrales iteradas de  $f$ ?

(10) Demuestre que

$$\int_0^1 dy \int_1^\infty (e^{-xy} - 2e^{-2xy}) dx \neq \int_1^\infty dx \int_0^1 (e^{-xy} - 2e^{-2xy}) dy.$$

(11) Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua. Demostrar que si  $\vec{x}_0$  es un punto interior de  $D$  entonces

$$f(\vec{x}_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{V_n(B(x_0, r))} \int_{B(x_0, r)} f dV.$$

(12) Demostrar la *regla de Leibnitz*: Si  $g : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y  $\frac{\partial g}{\partial y}$  es continua entonces

$$\frac{d}{dy} \int_a^b g(t, y) dt = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial y}(t, y) dt.$$

(Indicación: Cambiar el orden de integración en  $\int_c^y dx \int_a^b \frac{\partial g}{\partial y}(t, x) dt$ .)

(13) Demostrar que si  $g(x, y)$  y  $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$  son continuas y  $h_1$  y  $h_2$  son diferenciables, entonces

$$\frac{d}{dy} \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} g(t, y) dt = \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial g}{\partial y}(t, y) dt + h_2'(y)g(h_2(y), y) - h_1'(y)g(h_1(y), y).$$

- (14) Evaluar la siguiente integral iterada y dibujar la región  $D$  determinada por los límites de integración (algunas de las integrales son impropias).

$$(a) \int_1^1 \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y} dy dx \qquad (b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos \theta} \cos \theta dr d\theta$$

$$(c) \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx dy \qquad (d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr d\theta$$

- (15) Cambiar el orden de integración en

$$\int_0^1 \int_0^x f(x, y) dy dx.$$

- (16) Usando integrales, verificar:

- (a) El área de una elipse con semiejes de longitud  $a$  y  $b$  es  $\pi ab$ .
- (b) El volumen de un elipsoide con semiejes  $a$ ,  $b$  y  $c$  es  $\frac{4}{3}\pi abc$ .
- (c) El área de una región semicircular de radio  $a$  es  $\frac{1}{2}\pi a^2$ .
- (d) El volumen de la esfera unitaria es  $\frac{4}{3}\pi$ .

- (17) Cambiar el orden de integración en

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x, y, z) dz dy dx$$

para obtener las otras cinco formas posibles. Esbozar la región.

- (18) Utilizar integrales triples para justificar la fórmula para el volumen de un sólido de revolución estudiada en cursos previos de cálculo.

- (19) Evaluar  $\iiint_W y e^{-xy} dV$ , donde  $W = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ .

- (20) Evaluar  $\iiint_W x^2 \cos z dV$ , donde  $W$  es la región acotada por los planos  $z = 0$ ,  $z = \pi$ ,  $y = 0$ ,  $y = \pi$ ,  $x = 0$ ,  $x + y = 1$ .

- (21) Calcular  $\int_0^1 \int_0^{2x} \int_{x^2+y^2}^{x+y} dz dy dx$ .

(22) Sean  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  números positivos. Demostrar que

$$(a) \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_3 z} dx dy = \lambda_3 e^{-\lambda_3 z}$$

$$(b) \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} xyz \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_3 z} dx dy dz = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}$$

(23) Sean  $f$  y  $g$  dos funciones acotadas, integrables y de valor absoluto integrable en  $\mathbb{R}$ , la convolución de  $f$  y  $g$  es la función dada por:

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y) dy$$

Sean  $f, g, h$  funciones integrables y de valor absoluto integrable en  $\mathbb{R}$ . Demostrar que:

- (a) La integral que define  $f * g$  converge para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
- (b)  $f * g = g * f$ .
- (c)  $(f * g) * h = f * (g * h)$ .

(24) El propósito del siguiente ejercicio es calcular el valor de  $\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx$

$$(a) \text{ Probar que } \int_0^{+\infty} e^{-xy} dy = \frac{1}{x} \text{ si } x > 0.$$

(b) Usar integración por partes para probar que

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy} \text{sen } x dx = \frac{1}{1+y^2} \text{ si } y > 0.$$

(c) Justificar las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx &= \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-xy} \text{sen } x dy \\ &= \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} e^{-xy} \text{sen } x dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2} dy. \end{aligned}$$

(d) Deducir que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

(25) Pasar a coordenadas polares  $r$  y  $\theta$ , y colocar los límites de integración para las siguientes integrales:

(a)  $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy.$

(b)  $\int_0^2 dx \int_0^x f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy.$

(c)  $\iint_S f(x, y) dx dy$  donde  $S$  es el triángulo limitado por las rectas  $y = x$ ,  $y = -x$ ,  $y = 1$ .

(d)  $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f\left(\frac{y}{x}\right) dy.$

(e)  $\iint_S f(x, y) dx dy$  donde  $S$  es la región limitada por la lemniscata  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ .

(26) Calcular la siguiente integral doble pasando previamente a coordenadas polares:

$$\iint_S y dx dy$$

donde  $S$  es el semicírculo de diámetro  $a$  con centro en  $(\frac{a}{2}, 0)$ .

(27) Sea  $(x, y) = T(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ .

(a) Dibujar la región que se obtiene como imagen por  $T$  del cuadrado de vértices:  $(1, 1)$ ,  $(1, \frac{3}{2})$ ,  $(\frac{3}{2}, 1)$  y  $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ .

(b) Encuentre el área de la región dibujada en (a).

(28) Calcular la integral doble

$$\iint_S \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$$

donde  $S$  es la región limitada por la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , pasando a coordenadas polares generalizadas  $\frac{x}{a} = r \cos \theta$ ,  $\frac{y}{b} = r \sin \theta$ .

(29) Representar gráficamente la región cuya área se expresa por la siguiente integral:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_a^{a(1+\cos\theta)} r dr.$$

(30) Sea  $a > 0$ , hallar el área limitada por las curvas:  $r = a(1 + \cos\theta)$  y  $r = a \cos\theta$ , para  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

(31) Usando coordenadas polares hallar el área de la región interior a la curva  $(x^2 + y^2)^3 = 16x^2$ .

(32) Calcular el área de la región interior a la circunferencia  $x^2 + y^2 - 8y = 0$  y exterior a la circunferencia  $x^2 + y^2 = 9$ .

(33) El propósito del siguiente ejercicio es calcular el valor de  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ .

(a) Demostrar que  $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy dx = \frac{\pi}{4}$ .

(b) Deducir que  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

(34) Sea  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$ . Demostrar que:

(a)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$                       (b)  $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = m$

(c)  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = m^2 + \sigma^2$     (d)  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx\right)^2 = \sigma^2$ .

(35) Hallar el volumen de un cono circular recto de radio  $R$  y altura  $h$ .

(36) Calcular  $\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$ , donde  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ .

(37) Calcular  $\iiint_B \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dx dy dz$ , donde  $B$  es el sólido limitado por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

(38) Calcular  $\iiint_B xyz \, dx \, dy \, dz$  donde  $S$  es el conjunto de los puntos  $(x, y, z)$  tales que  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .

(39) El propósito del siguiente ejercicio es deducir la fórmula para el contenido  $n$ -dimensional de la bola de radio  $R$  en  $\mathbb{R}^n$ .

(a) Sea  $\alpha_n$  el contenido  $n$ -dimensional de la bola con centro  $\vec{0}$  y radio  $R$  en  $\mathbb{R}^n$ . Demostrar que el contenido  $n$ -dimensional de una bola de radio  $R$  en  $\mathbb{R}^n$  es igual a

$$\alpha_n \cdot R^n.$$

Por lo tanto, basta que hallemos una fórmula para  $\alpha_n$ .

(b) Demostrar que

$$\alpha_n = \int_{-1}^1 V_{n-1}(B_{n-1}(\vec{0}, \sqrt{1-t^2})) \, dt,$$

donde  $V_{n-1}$  es el contenido  $n-1$  dimensional y  $B_{n-1}(\vec{0}, \sqrt{1-t^2})$  es la bola con centro  $\vec{0}$  y radio  $\sqrt{1-t^2}$  en  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

(c) Deducir que

$$\begin{aligned} \alpha_n &= 2\alpha_{n-1} \int_0^1 (1-t^2)^{(n-1)/2} \, dt \\ &= 2\alpha_{n-1} \int_0^{\pi/2} \text{sen}^n(\theta) \, d\theta, \end{aligned}$$

Luego, si

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^n(\theta) \, d\theta,$$

entonces

$$\alpha_n = 2\alpha_{n-1} I_n,$$

y, por lo tanto,

$$\alpha_n = 4\alpha_{n-2} I_n I_{n-1}.$$

(d) Utilizar integración por partes para demostrar que

$$I_n = \left( \frac{n-1}{n} \right) I_{n-1}.$$

(e) Demostrar por inducción que

$$I_{2n+1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n+1}$$

y

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}.$$

Usar estas dos fórmulas para probar que

$$I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2n}.$$

Concluir que

$$\alpha_n = \frac{2\pi}{n} \alpha_{n-2}.$$

(f) Demostrar que

$$\alpha_{2m} = \frac{\pi^m}{m!} \quad \text{y} \quad \alpha_{2m+1} = \frac{2^{m+1} \pi^m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m+1)}.$$

(40) \* Sea  $A$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . Se dice que  $A$  tiene *medida  $n$ -dimensional nula* o simplemente *medida 0* si para cada  $\varepsilon > 0$  existe un conjunto numerable de paralelepípedos rectangulares  $\{Q_1, Q_2, \dots\}$  tales que

$$\sum_{i=1}^{\infty} V_n(Q_i) < \varepsilon$$

y

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{interior}(Q_i).$$

- Demostrar que en la definición de medida 0 podemos cambiar la condición  $A \subset \bigcup_{i=1}^N \text{interior}(Q_i)$  por  $A \subset \bigcup_{i=1}^N Q_i$ .
- Demostrar que todo conjunto de contenido nulo tiene medida 0.
- Demostrar que todo subconjunto numerable de  $\mathbb{R}^n$  tiene medida 0, en particular  $\mathbb{Q}^n$  tiene medida 0.
- Demostrar que  $\mathbb{Q}^n \cap [0, 1]^n$  no tiene contenido nulo.
- Dar un ejemplo de un subconjunto infinito de  $\mathbb{R}$  de contenido nulo.

## Integrales de línea y teorema de Green.

### 1. Curvas y trayectorias.

Sea  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  un intervalo.

DEFINICIÓN 2.1. Una *trayectoria* es una función  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

El concepto de trayectoria tiene una interpretación muy natural: Si queremos describir el movimiento de una partícula en el plano o en el espacio, debemos indicar en que posición se encuentra la partícula en cada instante. En otras palabras, a cada instante  $t$ , debemos asignarle un punto  $g(t)$  en el plano o en el espacio.

Por lo tanto, podemos pensar en una trayectoria como una función que nos permite describir el movimiento de una partícula en el espacio  $n$ -dimensional.

El mismo recorrido puede ser hecho por una partícula de diferentes maneras. Es importante hacer una distinción entre la trayectoria de una partícula y la forma de esta trayectoria.

DEFINICIÓN 2.2. Una *curva* es la imagen de una trayectoria. Es decir,  $G \subset \mathbb{R}^n$  es una curva si existe una trayectoria  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$G = g([a, b]).$$

Los puntos  $g(a)$  y  $g(b)$  se llaman los *extremos* de la trayectoria,  $g(a)$  es el extremo inicial y  $g(b)$  el extremo final. Si indicamos cual es la curva  $G$ , cual es su extremo inicial y cual es su extremo final, estamos indicando la dirección en que fue recorrida  $G$ . Por esto a la terna  $(g([a, b]), g(a), g(b))$  se le suele llamar *curva orientada*. A la trayectoria  $g$  se le suele llamar *parametrización* de la curva  $G$ .

Es importante notar que dos trayectorias diferentes pueden dar origen a la misma curva.

También es usual considerar trayectorias cuyo dominio es toda la recta  $\mathbb{R}$ . En este caso no tenemos punto inicial, ni punto final, pero si un sentido de recorrido.

## EJEMPLO 2.3.

- (1) Sean  $\vec{p}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $g(t) = \vec{p} + t\vec{v}$ . Entonces  $g$  es una trayectoria, la curva correspondiente es la recta que pasa por  $\vec{p}$  en la dirección de  $\vec{v}$ .
- (2) Sea  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $h(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t)$ . Entonces  $h$  es una trayectoria, la curva correspondiente es una *hélice*.

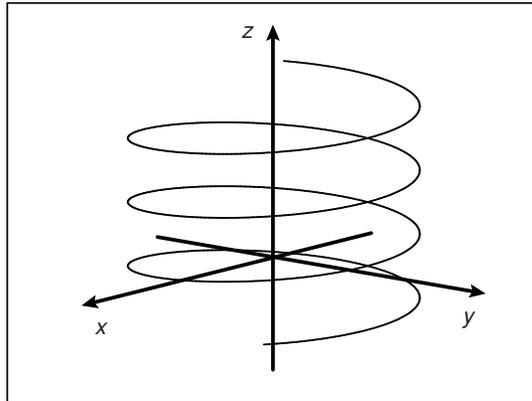


FIGURA 2.1. Hélice

DEFINICIÓN 2.4. Sean  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  dos trayectorias. Diremos que  $g$  y  $h$  son equivalentes si existe una función  $\alpha : [a, b] \rightarrow [c, d]$  tal que

- (i)  $\alpha(a) = c$ ,  $\alpha(b) = d$ .
- (ii)  $\alpha$  es derivable y  $\alpha'(t) > 0$  para todo  $t \in [a, b]$ .
- (iii)  $g = h \circ \alpha$ , esto es  $g(t) = h(\alpha(t))$  para todo  $t \in [a, b]$ .

EJEMPLO 2.5. Sean  $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $g(t) = (\cos t, \sin t)$  y  $h : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $h(t) = (-\cos t, -\sin t)$ . Entonces  $h$  y  $g$  son equivalentes, ya que si definimos  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow [-\pi, \pi]$  por  $\alpha(t) = t - \pi$  tenemos  $g = h \circ \alpha$ .

OBSERVACIÓN 2.6. Dos trayectorias equivalentes dan origen a la misma curva orientada.

DEFINICIÓN 2.7. Sea  $G = (g[a, b], g(a), g(b))$  una curva orientada, la *curva opuesta* a  $G$  es la curva  $-G = (g[a, b], g(b), g(a))$ , es decir, es el mismo conjunto de puntos, pero recorrido en sentido contrario.

OBSERVACIÓN 2.8. Dada  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una trayectoria de  $G$ , sea  $h : [-b, -a] \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $h(t) = g(-t)$ , entonces  $g[a, b] = h[-b, -a]$ ,  $g(a) = h(-a)$ ,  $g(b) = h(-b)$ . Por lo tanto  $h$  es una parametrización de  $-G$ .

Las trayectorias corresponden con un caso particular de funciones de  $\mathbb{R}^k$  en  $\mathbb{R}^n$ , por lo tanto tiene sentido hablar de límites, continuidad, derivabilidad y funciones coordenadas de las trayectorias.

En el caso de las trayectorias, su derivada tiene un significado geométrico muy importante. Si  $g$  es una trayectoria, el vector  $g'(t_0)$  es paralelo a la recta tangente a la curva  $G = g(I)$  en el punto  $g(t_0)$  (justificar).

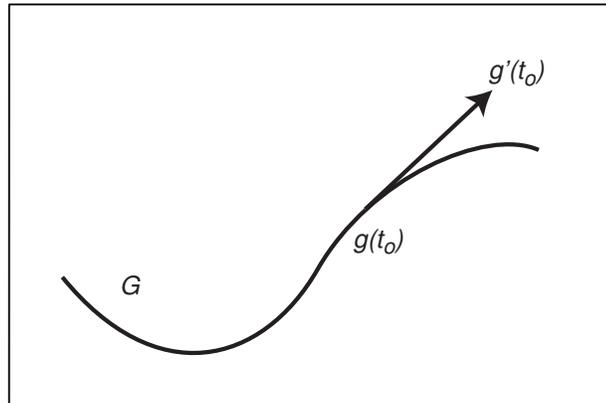


FIGURA 2.2. Significado geométrico de la derivada

DEFINICIÓN 2.9. Sea  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una trayectoria diferenciable.

El vector *velocidad* en  $g(t)$  es  $g'(t) = (g'_1(t), \dots, g'_n(t))$ .

La *rapidez* en  $g(t)$  es

$$\|g'(t)\| = \sqrt{(g'_1(t))^2 + \dots + (g'_n(t))^2}.$$

EJEMPLO 2.10. Sea

$$g(t) = \begin{cases} (t^2, t^2) & \text{si } t \geq 0, \\ (-t^2, t^2) & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Entonces

$$g'(t) = \begin{cases} (2t, 2t) & \text{si } t \geq 0, \\ (-2t, 2t) & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Además

$$\|g'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 4t^2} = 2\sqrt{2}|t|.$$

Notemos que  $g$  es diferenciable en 0 y  $g'(0) = (0, 0)$ . La curva que corresponde a esta trayectoria es el gráfico de valor absoluto, que tiene un pico en  $(0, 0)$ .

OBSERVACIÓN 2.11. Tal como muestra el ejemplo anterior, puede ocurrir que una trayectoria  $g$  sea diferenciable y sin embargo la curva  $G = g(I)$  tenga picos. En ese caso no está definida una dirección tangente en el punto donde hay un pico.

Interpretación física: Una partícula se mueve sobre la curva en dirección al origen, va disminuyendo su velocidad, se detiene en el origen, cambia de dirección y comienza a moverse nuevamente.

EJEMPLO 2.12. Otro ejemplo de trayectoria diferenciable tal que la curva correspondiente tiene picos es la cicloide. La cicloide es la trayectoria descrita por un punto de una circunferencia que comienza a rodar, con velocidad constante.

Consideremos el punto  $(0, 0)$ , en la circunferencia de radio 1, con centro en  $(0, 1)$ , que comienza a rodar hacia la derecha con velocidad 1. En el instante  $t$  el centro de la circunferencia está en el punto  $(t, 1)$ . Si  $g(t)$  describe el movimiento del punto, tenemos que

$$g(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \operatorname{cos} t) = (t, 1) - (\operatorname{sen} t, \operatorname{cos} t).$$

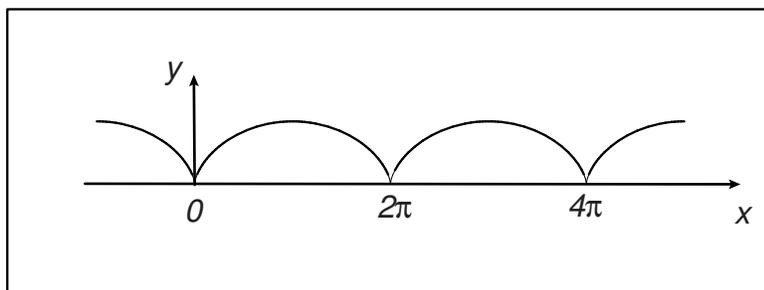


FIGURA 2.3. Cicloide

La cicloide tiene picos en los puntos  $(0, 0), \pm(2\pi, 0), \dots$ , sin embargo es derivable en estos puntos.

Para poder garantizar que la curva correspondiente a una trayectoria diferenciable  $g$  no tenga “picos”, es necesario pedirle  $g'(t) \neq 0$  para todo  $t \in \operatorname{Dom}(g)$ .

## 2. Longitud de arco y reparametrización.

Sea  $I = [a, b]$  un intervalo acotado y sea  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una trayectoria. Si  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$  es una partición de  $I$  entonces  $P$  da origen a una poligonal, que se obtiene uniendo los puntos  $g(t_0), g(t_1), \dots, g(t_N)$  en ese orden.

La longitud de esta poligonal es

$$\sum_{k=1}^N \|g(t_k) - g(t_{k-1})\|.$$

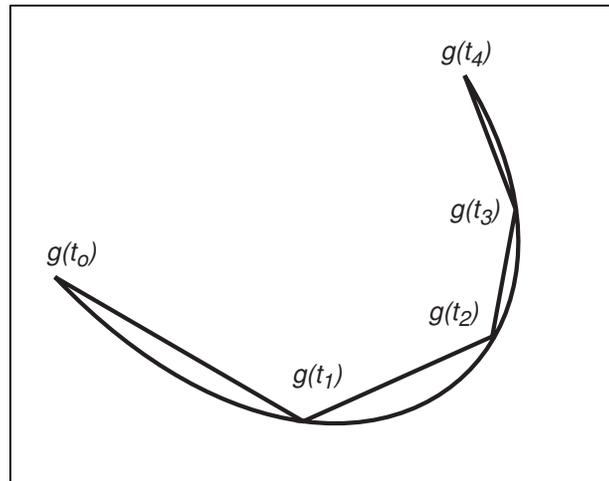


FIGURA 2.4. Poligonal

DEFINICIÓN 2.13. Se dice que una trayectoria  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  es *rectificable* si

$$\sup_{P \text{ partición de } I} \sum_{k=1}^N \|g(t_k) - g(t_{k-1})\|$$

existe y es finito, donde se entiende que  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ .

Diremos que la curva  $G$  es rectificable si existe una parametrización de  $G$  que es rectificable.

DEFINICIÓN 2.14. Si  $g$  es una trayectoria rectificable, se define su *longitud* por

$$l(g) = \sup_{P \text{ partición de } I} \sum_{k=1}^N \|g(t_k) - g(t_{k-1})\|,$$

donde se entiende que  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ .

DEFINICIÓN 2.15. Sea  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una trayectoria. Decimos que  $g$  es *lisa* si  $g$  es de clase  $\mathcal{C}^1$ . Es decir, cuando existe un intervalo abierto  $V$ , que contiene a  $[a, b]$  y una extensión de  $g$  a  $V$  que tiene derivada continua.

TEOREMA 2.16. Sea  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una trayectoria lisa. Entonces  $g$  es rectificable y

$$l(g) = \int_a^b \|g'(t)\| dt.$$

DEMOSTRACIÓN. ( $\leq$ ) Sea  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$  entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \|g(t_k) - g(t_{k-1})\| &= \sum_{k=1}^N \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} g'(t) dt \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|g'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \|g'(t)\| dt. \end{aligned}$$

Es decir, la integral es una cota superior de la primera suma. De donde

$$l(g) \leq \int_a^b \|g'(t)\| dt.$$

( $\geq$ ) Como  $g'$  es uniformemente continua en  $[a, b]$ , dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|g'(t) - g'(u)\| < \varepsilon$$

si  $|t - u| < \delta$ .

Sea  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$  una partición de  $[a, b]$  tal que  $|t_k - t_{k-1}| < \delta$  para  $k = 1, \dots, N$ .

Si  $t \in [t_{k-1}, t_k]$  entonces

$$\|g'(t)\| - \|g'(t_k)\| \leq \|g'(t) - g'(t_k)\| < \varepsilon.$$

Luego

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|g'(t)\| dt < \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\|g'(t_k)\| + \varepsilon) dt = \|g'(t_k)\|(t_k - t_{k-1}) + \varepsilon(t_k - t_{k-1}).$$

Acotaremos el primer sumando del término de la derecha

$$\begin{aligned}
\|g'(t_k)\|(t_k - t_{k-1}) &= \|(t_k - t_{k-1})g'(t_k)\| = \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} g'(t_k) dt \right\| \\
&= \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} (g'(t) + g'(t_k) - g'(t)) dt \right\| \\
&\leq \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} g'(t) dt \right\| + \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} (g'(t_k) - g'(t)) dt \right\| \\
&\leq \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} g'(t) dt \right\| + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|g'(t_k) - g'(t)\| dt \\
&\leq \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} g'(t) dt \right\| + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varepsilon dt \\
&= \|g(t_k) - g(t_{k-1})\| + \varepsilon(t_k - t_{k-1}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|g'(t)\| dt \leq \|g(t_k) - g(t_{k-1})\| + 2\varepsilon(t_k - t_{k-1}).$$

Sumando en  $k$ , se tiene que

$$\int_a^b \|g'(t)\| dt \leq \sum_{k=1}^N \|g(t_k) - g(t_{k-1})\| + 2\varepsilon(b - a),$$

de donde,

$$\int_a^b \|g'(t)\| dt \leq l(g).$$

□

**PROPOSICIÓN 2.17.** Sean  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  dos trayectorias lisas. Si  $g$  y  $h$  son equivalentes entonces  $l(g) = l(h)$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $\alpha : [a, b] \rightarrow [c, d]$  como en la Definición 2.4 tal que  $g = h \circ \alpha$ . Entonces

$$g'_k(t) = h'_k(\alpha(t)) \alpha'(t)$$

para  $k = 1, \dots, n$ .

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|g'(t)\|^2 &= [g'_1(t)]^2 + \cdots + [g'_n(t)]^2 \\ &= [h'_1(\alpha(t))\alpha'(t)]^2 + \cdots + [h'_n(\alpha(t))\alpha'(t)]^2 \\ &= [[h'_1(\alpha(t))]^2 + \cdots + [h'_n(\alpha(t))]^2] \alpha'(t)^2 \\ &= \|h'(\alpha(t))\|^2 \alpha'(t)^2, \end{aligned}$$

luego,

$$l(g) = \int_a^b \|g'(t)\| dt = \int_a^b \|h'(\alpha(t))\| \alpha'(t) dt = \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} \|h'(u)\| du = \int_c^d \|h'(u)\| du = l(h).$$

□

DEFINICIÓN 2.18. Diremos que una curva  $G$  es *lisa* si puede ser parametrizada por una trayectoria lisa.

En este caso definimos la *longitud* de  $G$  como  $l(G) = l(g)$  donde  $g$  es una parametrización lisa de  $G$ .

OBSERVACIÓN 2.19. Por la proposición anterior la longitud de una curva es independiente de su parametrización.

EJEMPLO 2.20. La función  $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $g(t) = (R \cos t, R \sin t)$  es una parametrización de la circunferencia de radio  $R$  y su longitud es:

$$\int_0^{2\pi} \|g'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

EJERCICIO 2.21. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $\mathcal{C}^1$ . Demostrar que la longitud del gráfico de  $f$  es

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

Indicación: considerar la parametrización  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $g(t) = (t, f(t))$ .

### 3. Parametrización por la longitud de arco.

Sea  $G$  una curva lisa. Supongamos que existe una trayectoria lisa  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $g'(t) \neq \vec{0}$  para todo  $t \in [a, b]$ .

Sea  $S : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida mediante

$$S(t) = \int_a^t \|g'(u)\| du.$$

Entonces

(i)  $S(a) = 0, S(b) = l(G)$ .

(ii)  $S$  es derivable y  $S'(t) = \|g'(t)\| > 0$  (así que  $S$  es estrictamente creciente en  $[a, b]$  y, por lo tanto,  $S$  es inyectiva).

Tenemos que  $S : [a, b] \rightarrow [0, l(G)]$  es biyectiva y de clase  $\mathcal{C}^1$ . Sea  $T$  su inversa, entonces también  $T$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  (justifique).

Definamos  $h : [0, l(G)] \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$h = g \circ T,$$

entonces

$$g = h \circ S.$$

Por lo tanto,  $g$  y  $h$  son dos trayectorias equivalentes.

EJERCICIO 2.22. Demostrar que, para todo  $s \in [0, l(G)]$

$$\|h'(s)\| = 1.$$

Esta parametrización es especial porque la variable  $s$  representa el largo del camino desde  $h(0)$  hasta  $h(s)$ , y es llamada la *parametrización por longitud de arco*.

### 4. Integral de un campo escalar a lo largo de una curva.

DEFINICIÓN 2.23. Sean  $G$  una curva lisa orientada y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar. La *integral de  $f$  a lo largo de  $G$*  se define por

$$\int_a^b f(g(t)) \|g'(t)\| dt$$

donde  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una parametrización de  $G$ .

OBSERVACIÓN 2.24. El resultado de la integral anterior no depende de la parametrización de  $G$ . (justificar).

Interpretación física:

Si  $f \geq 0$  entonces  $f$  se puede interpretar como la densidad de un alambre cuya forma es la curva  $G$  y la integral

$$\int_a^b f(g(t)) \|g'(t)\| dt$$

es la masa del alambre (justificar).

## 5. Integrales de línea.

DEFINICIÓN 2.25. Sea  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial continuo y  $G$  una curva lisa orientada. La *integral de línea* de  $F$  a lo largo de  $G$  es

$$\int_G F \cdot d\vec{x} = \int_a^b \langle F(g(t)), g'(t) \rangle dt$$

donde  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una parametrización de  $G$ .

La integral de línea mide el comportamiento de  $F$  a lo largo de  $G$ .

EJEMPLO 2.26. Sea  $F(x, y, z) = (x + y, y^2, z^2)$  y  $g(t) = (t, t^2, t^3)$  para  $0 \leq t \leq 1$  con  $G = g[0, 1]$  entonces

$$\int_G F \cdot d\vec{x} = \int_0^1 \langle (t + t^2, t^4, t^6), (1, 2t, 3t^2) \rangle dt = \int_0^1 (t + t^2 + 2t^5 + 3t^8) dt = 3/2.$$

TEOREMA 2.27 (Independencia de la trayectoria). Sea  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial. Sean  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Si  $g$  y  $h$  son dos trayectorias equivalentes entonces

$$\int_a^b \langle F(g(t)), g'(t) \rangle dt = \int_c^d \langle F(h(u)), h'(u) \rangle du$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\alpha : [a, b] \rightarrow [c, d]$  tal que  $g = h \circ \alpha$  entonces, haciendo el cambio de variable  $u = \alpha(t)$ ,

$$\begin{aligned} \int_a^b \langle F(g(t)), g'(t) \rangle dt &= \int_a^b \langle F(h(\alpha(t))), h'(\alpha(t)) \alpha'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b \langle F(h(\alpha(t))), h'(\alpha(t)) \rangle \alpha'(t) dt \\ &= \int_c^d \langle F(h(u)), h'(u) \rangle du. \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 2.28. Sea

$$F(x, y) = (x, -y)$$

y  $G$  el segmento de la circunferencia de centro  $\vec{0}$  y radio 1 que está en el primer cuadrante, orientado en sentido antihorario. Calcular

$$\int_G F \cdot d\vec{x}.$$

Sea

$$g(t) = (\cos t, \sin t)$$

para  $0 \leq t \leq \pi/2$ , así  $G = g[0, \pi/2]$ . Luego

$$\begin{aligned} \int_G F \cdot d\vec{x} &= \int_0^{\pi/2} \langle F(g(t)), g'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \langle (\cos t, -\sin t), (-\sin t, \cos t) \rangle dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (-\sin t \cos t - \sin t \cos t) dt \\ &= - \int_0^{\pi/2} \sin(2t) dt \\ &= \frac{\cos(2t)}{2} \Big|_0^{\pi/2} = -1. \end{aligned}$$

**Interpretación física de la integral de línea.**

$$\int_G F \cdot d\vec{x} = \int_a^b \langle F(g(t)), g'(t) \rangle dt = \int_a^b \langle F(g(t)), \frac{g'(t)}{\|g'(t)\|} \rangle \|g'(t)\| dt$$

$\langle F(g(t)), \frac{g'(t)}{\|g'(t)\|} \rangle$  es la proyección del vector  $F(g(t))$ , en la dirección de  $g'(t)$

$\|g'(t)\|dt$  es el elemento de longitud de arco.

Así que la integral de línea es el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la trayectoria  $g$ , que está sometida al campo de fuerzas  $F$ .

**Otra notación para integrales de línea.**

Sea  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial continuo y  $G$  una curva lisa orientada. Sea  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una parametrización lisa de  $G$ .

La integral de línea de  $F$  a lo largo de  $G$  es

$$\begin{aligned} \int_G F \cdot d\vec{x} &= \int_a^b \langle (F_1(g(t)), \dots, F_n(g(t))), (g'_1(t), \dots, g'_n(t)) \rangle dt \\ &= \int_a^b (F_1(g(t))g'_1(t) + \dots + F_n(g(t))g'_n(t)) dt. \end{aligned}$$

Esta expresión se abrevia mediante:

$$\int_G F_1(\vec{x}) dx_1 + \dots + F_n(\vec{x}) dx_n.$$

Así que la notación más usual es

$$\int_G F \cdot d\vec{x} = \int_G F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n.$$

EJEMPLO 2.29. Sea  $G$  la curva dada por

$$g(t) = (t, t^2, t^3)$$

para  $0 \leq t \leq 1$ . Calcular

$$\int_G x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz.$$

Lo que debemos calcular es la integral de línea del campo vectorial

$$F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$$

sobre la trayectoria  $g$ .

Tenemos que

$$\begin{aligned} F_1(g(t)) &= t^2, & F_2(g(t)) &= t^4, & F_3(g(t)) &= t^6, \\ g'_1(t) &= 1, & g'_2(t) &= 2t, & g'_3(t) &= 3t^2. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \int_G x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz &= \int_0^1 (t^2 + t^4 2t + t^6 3t^2) dt \\ &= \int_0^1 (t^2 + 2t^5 + 3t^8) dt = 1. \end{aligned}$$

En la práctica es usual proceder usando el “cálculo simbólico”, es decir, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x &= t, & dx &= dt, \\ y &= t^2, & dy &= 2t dt, \\ z &= t^3, & dz &= 3t^2 dt. \end{aligned}$$

Substituyendo en la integral de línea llegamos al resultado.

EJEMPLO 2.30. Sea  $G$  la curva dada por

$$g(t) = (t, -t, t^2, -t^2)$$

para  $0 \leq t \leq 1$ . Calcular

$$\int_G (x - y) dx + (y - z) dy + (z - w) dz + (w - x) dw.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \int_G (x - y) dx + (y - z) dy + (z - w) dz + (w - x) dw &= \\ &= \int_0^1 [2t - (-t - t^2) + 2t^2 2t - (-t^2 - t)2t] dt = \dots = 4. \end{aligned}$$

LEMA 2.31. Sea  $G$  una curva lisa entonces

$$\int_{-G} F \cdot d\vec{x} = - \int_G F \cdot d\vec{x}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una parametrización lisa de  $G$ , entonces una parametrización de  $-G$  está dada por  $h : [-b, -a] \rightarrow \mathbb{R}^n$  donde

$$h(t) = g(-t).$$

Además

$$h'(t) = -g'(-t).$$

De donde

$$\begin{aligned} \int_{-G} F \cdot d\vec{x} &= \int_{-b}^{-a} \langle F(h(t)), h'(t) \rangle dt \\ &= \int_{-b}^{-a} \langle F(g(-t)), -g'(-t) \rangle dt \\ &= \int_{-b}^{-a} \langle F(g(-t)), g'(-t) \rangle (-1) dt \\ &= \int_b^a \langle F(g(s)), g'(s) \rangle ds \\ &= - \int_a^b \langle F(g(s)), g'(s) \rangle ds \\ &= - \int_G F \cdot d\vec{x}. \end{aligned}$$

□

### Integrales de línea sobre curvas lisas a trozos.

DEFINICIÓN 2.32. Sea  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una trayectoria. Diremos que  $g$  es *lisa a trozos* si  $g$  es continua y si existe una partición  $P = \{t_0, \dots, t_N\}$  de  $[a, b]$  tal que, para  $i = 1, \dots, N$ ,

$$g|_{[t_{i-1}, t_i]}$$

es una trayectoria lisa.

Se dice que una curva  $G$  es *lisa a trozos* si puede ser parametrizada por una trayectoria lisa a trozos.

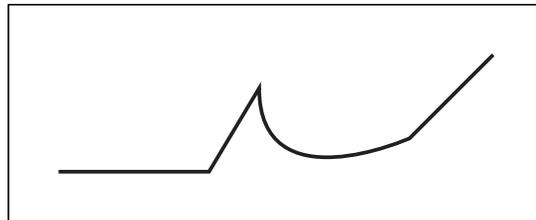


FIGURA 2.5. Curva lisa a trozos

En este caso

$$G = G_1 \cup \cdots \cup G_N,$$

donde cada  $G_i$  es una curva lisa y la integral de línea de  $F$  sobre  $G$  se define de la siguiente manera

$$\int_G F \cdot d\vec{x} = \int_{G_1} F \cdot d\vec{x} + \cdots + \int_{G_N} F \cdot d\vec{x}.$$

### 6. Teorema fundamental del cálculo para integrales de línea.

**TEOREMA 2.33.** *Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y sea  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^1$ . Sean  $\vec{x}_o$  y  $\vec{x}_1$  dos puntos de  $D$  y sea  $G \subset D$  una curva lisa a trozos con extremo inicial  $\vec{x}_o$  y extremo final  $\vec{x}_1$ . Entonces*

$$\int_G \nabla\varphi \cdot d\vec{x} = \varphi(\vec{x}_1) - \varphi(\vec{x}_o).$$

**DEMOSTRACIÓN.** Supongamos primero que la curva  $G$  es lisa. Sea  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una parametrización de clase  $\mathcal{C}^1$  de  $G$ . Entonces

$$\begin{aligned} \int_G \nabla\varphi \cdot d\vec{x} &= \int_a^b \langle \nabla\varphi(g(t)), g'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} (\varphi(g(t))) dt \\ &= \varphi(g(b)) - \varphi(g(a)). \end{aligned}$$

Supongamos ahora que  $G$  es lisa a trozos, entonces  $G = G_1 \cup \cdots \cup G_N$  donde cada una de las curvas  $G_i$  es lisa y el extremo inicial de  $G_i$  es el extremo final de  $G_{i-1}$ . Si por  $\vec{y}_i$  denotamos el extremo final de  $G_i$  tenemos que

$$\begin{aligned} \int_G \nabla\varphi \cdot d\vec{x} &= \int_{G_1} \nabla\varphi \cdot d\vec{x} + \cdots + \int_{G_N} \nabla\varphi \cdot d\vec{x} \\ &= \varphi(\vec{y}_1) - \varphi(\vec{x}_o) + \varphi(\vec{y}_2) - \varphi(\vec{y}_1) + \cdots + \varphi(\vec{y}_N) - \varphi(\vec{x}_{N-1}) \\ &= \varphi(\vec{x}_1) - \varphi(\vec{x}_o). \end{aligned}$$

□

**OBSERVACIÓN 2.34.** Recordar que si  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ , una *trayectoria poligonal* desde  $\vec{a}$  hasta  $\vec{b}$  es una función continua  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\varphi(0) = \vec{a}$ ,  $\varphi(1) = \vec{b}$  y  $\varphi[0, 1]$  es la unión de un número finito de segmentos de recta.

Si  $D$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , se dice que  $D$  es *poligonalmente conexo* cuando para todo par de puntos  $\vec{a}, \vec{b} \in D$  existe una trayectoria poligonal desde  $\vec{a}$  hasta  $\vec{b}$ , cuya imagen está contenida en  $D$ .

El resultado anterior se suele enunciar de la siguiente manera:

Sean  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y poligonalmente conexo, y  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^1$ . Sean  $\vec{x}_o, \vec{x}_1 \in D$ , entonces

$$\int_{\vec{x}_o}^{\vec{x}_1} \nabla \varphi \cdot d\vec{x} = \varphi(\vec{x}_1) - \varphi(\vec{x}_o),$$

donde la integral anterior se calcula sobre cualquier curva lisa a trozos, contenida en  $D$ , de extremo inicial  $\vec{x}_o$  y extremo final  $\vec{x}_1$ .

Se dice que una curva  $G$  es *cerrada* cuando su extremo final coincide con su extremo inicial.

**COROLARIO 2.35.** *Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y sea  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^1$ . La integral de línea de  $\nabla \varphi$  sobre cualquier curva cerrada es 0.*

**TEOREMA 2.36.** *Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y poligonalmente conexo y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial continuo. Supongamos que la integral de línea de  $f$  a lo largo de cualquier curva lisa a trozos contenida en  $D$  solamente depende de los extremos de la curva.*

Sea  $\vec{x}_o$  un punto de  $D$  y definamos

$$\varphi(\vec{x}) = \int_{\vec{x}_o}^{\vec{x}} f(\vec{u}) \cdot d\vec{u},$$

donde la integral anterior denota la integral sobre cualquier curva lisa a trozos de extremo inicial  $\vec{x}_o$  y extremo final  $\vec{x}$ .

Entonces  $\varphi$  es diferenciable y

$$\nabla \varphi = f.$$

**IDEA DE LA DEMOSTRACIÓN.** (Completar los detalles)

Basta demostrar que, para  $k = 1, \dots, n$ ,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(\vec{x}) = f_k(\vec{x})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\vec{x}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(\vec{x} + he_k) - \varphi(\vec{x})}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\vec{x}}^{\vec{x} + he_k} f(\vec{u}) \cdot d\vec{u} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h f_k(\vec{x} + te_k) dt \\
&= f_k(\vec{x}).
\end{aligned}$$

□

**COROLARIO 2.37.** *Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y poligonalmente conexo y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial continuo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a)  $f$  es el gradiente de un campo escalar.
- (b) La integral de línea de  $f$  sobre una curva lisa a trozos contenida en  $D$  es independiente de la curva (sólo depende de los extremos).
- (c) La integral de línea de  $f$  sobre una cualquier curva cerrada lisa a trozos contenida en  $D$  es nula.

## 7. El teorema de Green.

A continuación daremos el teorema de Green, este teorema es en algún sentido similar al teorema fundamental del cálculo.

Comenzaremos definiendo lo que llamaremos región simple.

Recordemos (ver Definiciones 1.34 y 1.35) que una región del tipo I es una región de la forma

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

donde  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son funciones continuas en  $[a, b]$ , tales que  $\varphi_1 \leq \varphi_2$  y que una región del tipo II es una región de la forma

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

donde  $\psi_1$  y  $\psi_2$  son funciones continuas en  $[c, d]$  tales que  $\psi_1 \leq \psi_2$ .

**DEFINICIÓN 2.38.** Sea  $D \subset \mathbb{R}^2$  decimos que  $D$  es una *región simple* si  $D$  es una región tanto de tipo I como de tipo II y además  $\partial D$  es una curva lisa a trozos.

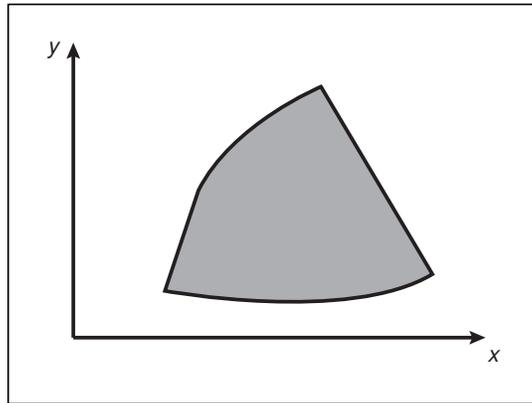
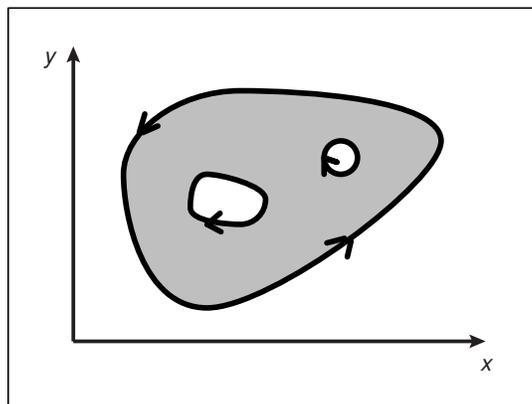


FIGURA 2.6. Región simple

DEFINICIÓN 2.39. Sea  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Decimos que  $\partial D$  está positivamente orientada con respecto a  $D$  si al “caminar” por  $\partial D$  con esa orientación, la región  $D$  queda a la izquierda de  $\partial D$ .

FIGURA 2.7.  $\partial D$  positivamente orientada con respecto a  $D$ 

TEOREMA 2.40 (Green). Sea  $D \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto acotado que se puede descomponer como una unión finita de regiones simples. Sean  $P$  y  $Q$  campos escalares de clase  $C^1$  en un abierto que contiene a  $D$ . Entonces

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} P dx + Q dy$$

donde  $\partial D$  está orientada positivamente con respecto a  $D$ .

DEMOSTRACIÓN.

Caso 1:  $D$  es una región simple.

Cómo  $(P, Q) = (P, 0) + (0, Q)$  tenemos que

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \int_{\partial D} P dx + \int_{\partial D} Q dy.$$

Por lo tanto para probar el teorema basta demostrar las siguientes dos igualdades

$$\int_{\partial D} P dx = - \int_D \int \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \quad (2.1)$$

$$\int_{\partial D} Q dy = \int_D \int \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy \quad (2.2)$$

Solamente probaremos (2.1). La prueba de (2.2) es análoga.

Tenemos que  $D$  es una región del tipo I y por lo tanto existen  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y dos funciones  $u$  y  $v$  tales que  $\partial D$  está formada por:

- (1) Una curva parametrizada por  $(t, v(t))$  con  $t \in [\alpha, \beta]$ .
- (2) Una curva parametrizada por  $(-s, u(-s))$  con  $s \in [-\beta, -\alpha]$ .
- (3) A lo sumo por dos segmentos de las rectas verticales  $x = \alpha$  y  $x = \beta$ .

Sea  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una trayectoria  $\mathcal{C}^1$  a trozos de  $\partial D$ . En las rectas verticales  $g'_1(t) = 0$  y en los otros dos segmentos de la curva  $g'_1(t) = 1$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} P dx &= \int_{\partial D} P dx + 0 dy = \int_a^b P(g(t)) g'_1(t) dt \\ &= \int_{-\beta}^{-\alpha} P(-s, u(-s)) dt + \int_{\alpha}^{\beta} P(t, v(t)) dt \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} (P(x, u(x)) - P(x, v(x))) dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} \left( \int_{v(x)}^{u(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy \right) dx \\ &= - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \end{aligned}$$

Caso 2: Caso general,  $D$  es la unión finita de regiones simples.

Aplicamos el resultado anterior en cada una de las regiones simples. Al sumar obtenemos el teorema general, por la cancelación de integrales sobre la misma curva, recorrida en sentidos diferentes ( ver figura).

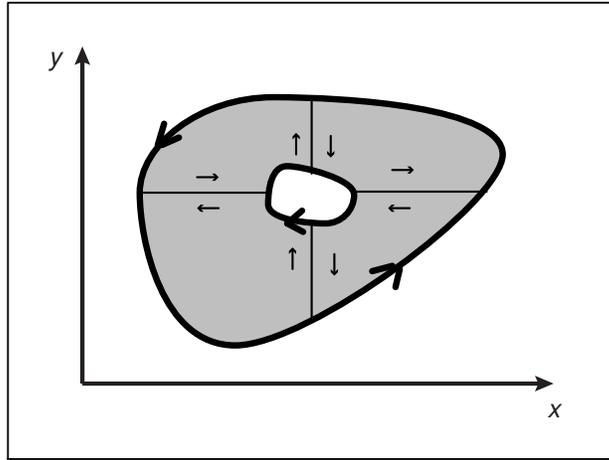


FIGURA 2.8. Caso general del teorema de Green

□

OBSERVACIÓN 2.41. Tal como es natural, la integral sobre dos curvas disjuntas se define como la suma de las integrales sobre cada una de las curvas.

EJEMPLO 2.42.

- (a) Sea  $G$  la circunferencia de centro en el origen y radio 1, recorrida en sentido anti-horario.

Calcular

$$\int_G y \cos(xy) dx + x \cos(xy) dy.$$

Sea  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ , por el teorema de Green, tenemos que esta integral de línea es igual a

$$\iint_D (\cos(xy) - xy \operatorname{sen}(xy) - \cos(xy) - xy \operatorname{sen}(xy)) dx dy = 0.$$

- (b) Calcular

$$\int_G (-y + 1) dx + x dy$$

donde  $G$  es la curva orientada positivamente que limita el triángulo  $\tau$  de vértices  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1, 0)$ .

Aplicamos el teorema de Green con  $P(x, y) = -y + 1$ ,  $Q(x, y) = x$ . Entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

Luego

$$\int_G (-y + 1) dx + x dy = \iint_\tau (1 + 1) dx dy = 2\text{Area}(\tau) = 1.$$

(c) Calcular

$$\frac{1}{2} \int_G -y dx + x dy$$

donde  $G$  es la circunferencia de centro el origen y radio 1 recorrida en sentido antihorario.

Sea  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$  entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_G -y dx + x dy &= \frac{1}{2} \iint_D (1 - (-1)) dx dy \\ &= \iint_D 1 dx dy \\ &= \text{Area}(D) = \pi. \end{aligned}$$

**PROPOSICIÓN 2.43.** *Sea  $D$  una región simple de  $\mathbb{R}^2$  cuya frontera  $\partial D$  es una curva lisa a trozos. Si  $\partial D$  está positivamente orientada con respecto a  $D$ , entonces el área de  $D$  es*

$$\text{Area}(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D} -y dx + x dy.$$

La demostración de esta Proposición queda como ejercicio. Sugerencia: Utilizar el teorema de Green.

**EJEMPLO 2.44.** Calcular el área de la región  $D$  limitada por la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Sea  $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$g(t) = (a \cos t, b \sin t).$$

Entonces

$$g'(t) = (-a \sin t, b \cos t).$$

Luego

$$\begin{aligned} \text{Area}(D) &= \frac{1}{2} \int_{\partial D} -y \, dx + x \, dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-b \operatorname{sen} t (-a \operatorname{sen} t) + a \cos t b \cos t) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab \, dt = \pi ab. \end{aligned}$$

EJERCICIO 2.45. Utilizar el teorema de Green y la idea de la prueba del Teorema 2.36 para establecer el siguiente resultado.

Sea  $D \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto abierto y conexo. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^1$ . Supongamos  $f = (f_1, f_2)$ .

Demostrar que si

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x},$$

entonces  $f$  es el gradiente de un campo escalar.

OBSERVACIÓN 2.46. Notar que en el resultado anterior tenemos que suponer que el conjunto es **conexo**. No basta suponer que es poligonalmente conexo, tal como lo muestra el Ejercicio 20. El resultado se puede extender a los llamados conjuntos simplemente conexos. Muy informalmente, se dice que un conjunto es simplemente conexo si toda curva cerrada contenida en el conjunto puede ser deformada de manera continua a un punto.

## 8. Ecuaciones diferenciales exactas de primer orden.

Sea  $D$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  y sean  $P$  y  $Q$  funciones definidas en  $D$ .

Recordemos que se dice que la ecuación diferencial

$$P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy = 0 \tag{2.3}$$

es exacta si existe una función  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$P(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad Q(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

En este caso, por la regla de la cadena, si  $f$  es solución de la ecuación (2.3) entonces

$$\varphi(x, f(x)) = C,$$

donde  $C$  es una constante.

Lo anterior nos proporciona un método para resolver ciertas ecuaciones diferenciales. Veamos un ejemplo.

EJEMPLO 2.47. Resolver la ecuación diferencial

$$y dx + 2x dy = 0.$$

En este ejemplo  $P(x, y) = y$  y  $Q(x, y) = 2x$ . Por lo tanto no es exacta. Sin embargo, si multiplicamos ambos miembros de la ecuación por  $y$  obtenemos la siguiente ecuación

$$y^2 dx + 2xy dy = 0,$$

que sí es exacta.

Si consideramos  $\varphi(x, y) = xy^2$  entonces

$$\nabla\varphi = (P, Q).$$

Por lo tanto toda solución de la ecuación es de la forma

$$xy^2 = C.$$

OBSERVACIÓN 2.48. Notar que por el ejercicio 2.45, para verificar que la ecuación

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

es exacta basta verificar que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

siempre que estemos en un dominio conexo.



## Ejercicios 2.

- (1) Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  la trayectoria definida por  $g(t) = (e^t, t)$ .
- (a) Representar gráficamente la curva  $g$ .
  - (b) Representar gráficamente los vectores tangentes  $g'(0)$  y  $g'(1)$ .
- (2) Representar gráficamente la curva asociada a la trayectoria  $(x, y) = (t^3, t^5)$ . Verificar que esta parametrización no define un vector tangente en el origen. ¿Será posible encontrar otra parametrización que sí defina un vector tangente en el origen?
- (3) Sea  $g(t) = (\sin 2t, 2\sin^2 t, 2\cos t)$ . Demostrar que la curva  $g$  está contenida en una esfera con centro en el origen.
- (4) Demuestre que si  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  es diferenciable y  $g'(t) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  entonces  $g(t)$  es un vector constante. Interprete físicamente.
- (5) Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una trayectoria diferenciable tal que  $g'(t) \neq 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Sea  $p$  un punto que no pertenece a la curva  $g$ . Supóngase que  $q = g(t_0)$  es el punto de la curva  $g$  más cercano a  $p$ , es decir,

$$\|p - q\| \leq \|p - g(t)\| \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Demstrar que el vector  $p - q$  es ortogonal a la curva  $g$  en  $q$ .

Indicación: Derivar la función  $q(t) = \|p - g(t)\|^2$ .

Interpretar gráficamente el resultado anterior.

- (6) Encontrar la longitud de las siguientes curvas:
- (a)  $(x, y) = (t, \ln(\cos t))$  para  $0 \leq t \leq 1$ .
  - (b)  $(x, y) = (t^2, \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t)$  para  $0 \leq t \leq 2$ .
  - (c)  $y = x^{3/2}$  para  $0 \leq x \leq 5$ .
  - (d)  $g(t) = (3t^2, 4\sqrt{2}t^3, 3t^4)$  para  $-1 \leq t \leq 2$ .

(7) Demuestre que la curva  $(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$ , para  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , está parametrizada por la longitud de arco. Represente gráficamente los vectores velocidad y aceleración cuando  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

(8) Encontrar una parametrización por la longitud de arco de la curva espiral

$$(x, y, z) = (a \cos \omega t, a \sin \omega t, bt)$$

con  $0 \leq t$ .

(9) Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función de clase  $\mathcal{C}^1$ . Demostrar que si  $G$  es el gráfico de  $f$  entonces

$$l(G) = \int_a^b \sqrt{1 + (f_1'(x))^2 + (f_2'(x))^2} dx$$

donde  $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$  para todo  $x \in [a, b]$ .

(10) Calcular las siguientes integrales de línea:

(a)  $\int_L x dx + x dy + y dz$ , donde  $L$  está dada por  $g(t) = (t, t, t)$  para  $1 \leq t \leq 2$ .

(b)  $\int_P (x + y) dx + dy$ , donde  $P$  está dada por  $g(t) = (t, t^2)$  para  $1 \leq t \leq 3$ .

(c)  $\int_G e^x dx + z dy + \sin z dz$ , donde  $G$  está definida por  $(x, y, z) = (t, t^2, t^6)$  para  $0 \leq t \leq 1$ .

(d)  $\int_{G_1} x dy + \int_{G_2} x dy$ , donde  $G_1$  está definida por  $g_1(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 9\pi$  y  $G_2$  está definida por  $g_2(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $2 \leq t \leq 4\pi$ .

(11) Calcular el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la curva

$$(x, y, z) = (t, t, t^2), \quad 0 \leq t \leq 2,$$

bajo la influencia del campo de fuerzas

$$F(x, y, z) = (x + y, y, y).$$

(12) Halle la masa total de la espiral definida por  $g(t) = (a \cos t, b \sin t, bt)$  con  $0 \leq t \leq 2\pi$ , si su densidad en el punto  $(x, y, z)$  es  $x^2 + y^2 + z^2$ .

- (13) Usar el teorema de Green para calcular el valor de la integral de línea

$$\int_G y dx + x^2 dy$$

para los casos en que  $G$  es cada uno de los siguientes caminos cerrados.

- (a) La circunferencia definida por  $g(t) = (\cos t, \sin t)$  con  $0 \leq t \leq 2\pi$ .  
 (b) El cuadrado con vértices en  $(1, 1)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(-1, 1)$  y  $(-1, -1)$  recorrido en sentido contrario a las agujas del reloj.
- (14) Sea  $G$  la curva parametrizada por  $g(t) = (2 \cos t, 3 \sin t)$  con  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Calcule

$$\int_G (2x + y) dx + (3x + y) dy.$$

- (15) Sea  $D$  una región simple cuya frontera es una curva  $G$  lisa por pedazos. Demuestre que si  $G$  se recorre en sentido positivo entonces el área de  $D$  es

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_G -y dx + x dy.$$

- (16) Sea  $G$  el triángulo con vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  y  $(1, \frac{\pi}{2})$  recorrido en sentido positivo. Evaluar la siguiente integral de línea.

$$\int_G e^x \cos y dx + e^x \sin y dy.$$

- (17) Valiéndose de la fórmula de Green, transformar la integral curvilínea

$$I = \int_C \sqrt{x^2 + y^2} dx + y(xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})) dy$$

donde  $C$  es el contorno, recorrido en sentido positivo, que limita un recinto  $S$ .

- (18) Calcular  $\int_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$  en los siguientes dos casos:

- (a) El origen de coordenadas está fuera del contorno  $C$ .  
 (b) El origen de coordenadas está dentro y  $C$  es una elipse.
- (19) Calcular el área limitada por las siguientes curvas:
- (a) La elipse  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ .  
 (b)  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = b \sin^3 t$ .  
 (c)  $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$ ,  $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$ .

(20) Consideremos el campo vectorial  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido por

$$f(x, y) = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right),$$

donde  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$ . Es decir,  $f = (f_1, f_2)$ , donde

$$f_1(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad f_2(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

(a) Demostrar que

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y),$$

para todo  $(x, y) \in D$ .

(b) Sea  $C$  una circunferencia con centro en el origen, recorrida en sentido antihorario. Demostrar que

$$\int_C f_1 dx + f_2 dy = 2\pi.$$

(c) Demostrar que no existe ningún campo escalar  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f = \nabla\varphi.$$

(d) Demostrar que si  $S$  es un subconjunto abierto y conexo de  $D$  entonces existe un campo escalar  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f|_S = \nabla\varphi.$$

(e) Explicar y justificar la siguiente afirmación: “Si  $C$  es una curva cerrada y simple que no pasa por el origen, entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_C f_1 dx + f_2 dy$$

es el número de vueltas que la curva  $C$  da alrededor del origen”.

(f) Sea  $T = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, x \leq 0\}$  y, para  $(x, y) \in T$ , sea

$$\theta(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{si } x > 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Demostrar que

$$\nabla\theta = f|_T.$$

- (g) Interpretar geoméricamente el significado de la función  $\theta$ . En base a esta interpretación justificar (20e).

Notar que este ejercicio muestra que el conjunto donde está definido un campo vectorial influye de manera determinante sobre la posibilidad de que este campo vectorial sea un gradiente.

- (21) Hallar una familia de soluciones para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

(a)  $(x + 2y) dx + (2x + y) dy = 0$ .

(b)  $2xy dx + x^2 dy = 0$ .

(c)  $(x^2 - y) dx - (x + \operatorname{sen}^2 y) dy = 0$ .



## Análisis vectorial.

### 1. Integrales de superficie.

Ya la definición de superficie o variedad diferenciable  $k$ -dimensional en  $\mathbb{R}^n$  ha sido presentada. En este capítulo estudiaremos resultados relacionados con superficies de dimensión 2, contenidas en  $\mathbb{R}^3$ . Será conveniente hacer ciertas precisiones y arreglos en algunas de las definiciones.

Diremos que un subconjunto  $D$  del plano es una *región* cuando  $D$  es abierto y poligonalmente conexo.

DEFINICIÓN 3.1. Sea  $S$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ . Diremos que  $S$  es un *pedazo de superficie lisa* o un *elemento de superficie regular* si existe una región  $D \subset \mathbb{R}^2$  y una función  $g : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

- (a)  $g$  es inyectiva y  $S = g(D)$ .
- (b)  $g$  es de clase  $\mathcal{C}^1$ .
- (c) Si  $(u, v) \in D$ , los vectores  $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v)$  y  $\frac{\partial g}{\partial v}(u, v)$  son linealmente independientes.

En este caso decimos que la función  $g$  es una parametrización de  $S$ .

Es importante recordar que  $g$  de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $\bar{D}$ , que es un conjunto cerrado, quiere decir que  $g$  se puede extender a una función de clase  $\mathcal{C}^1$  en un abierto que contiene a  $\bar{D}$ .

OBSERVACIÓN 3.2. Denotemos por  $\times$  el producto vectorial en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces los vectores  $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v)$  y  $\frac{\partial g}{\partial v}(u, v)$  son linealmente independientes si y sólo si

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \neq \vec{0}.$$

Sea  $S$  un pedazo de superficie lisa, con parametrización  $g$ .

Si mantenemos a  $v$  constante,  $v = v_o$ , entonces obtenemos una curva regular sobre la superficie, dada por

$$u \mapsto g(u, v_o) = (x(u, v_o), y(u, v_o), z(u, v_o)).$$

El vector  $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v_o)$  es tangente a esta curva.

Análogamente, si mantenemos a  $u$  constante,  $u = u_o$ , el vector  $\frac{\partial g}{\partial v}(u_o, v)$  es el vector tangente a la curva en  $S$  determinada por

$$v \mapsto g(u_o, v) = (x(u_o, v), y(u_o, v), z(u_o, v)).$$

Los vectores  $\frac{\partial g}{\partial u}(u_o, v_o)$  y  $\frac{\partial g}{\partial v}(u_o, v_o)$  están en el plano tangente a la superficie en el punto  $g(u_o, v_o)$ .

DEFINICIÓN 3.3. Sea  $S$  un pedazo de superficie lisa, con parametrización  $g$ . El *producto vectorial fundamental* es el vector

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u_o, v_o) \times \frac{\partial g}{\partial v}(u_o, v_o).$$

OBSERVACIÓN 3.4. El producto vectorial fundamental es normal a la superficie en  $g(u_o, v_o)$ .

El número

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial u}(u_o, v_o) \times \frac{\partial g}{\partial v}(u_o, v_o) \right\|$$

es el área del paralelogramo determinado por los vectores  $\frac{\partial g}{\partial u}(u_o, v_o)$  y  $\frac{\partial g}{\partial v}(u_o, v_o)$ .

Para definir el área de una superficie, cuando ésta está dada en forma paramétrica, se consideran las normas de estos vectores, se aproxima el área trabajando localmente en el plano tangente y luego se toma límite. En forma precisa, tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.5. Si  $S$  es un pedazo de superficie lisa entonces el *área* de  $S$  es

$$A(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \right\| dudv$$

donde  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una parametrización de  $S$ .

Se puede probar que esta integral es independiente de la parametrización, por lo que el área está bien definida.

Cuando la superficie es la unión finita de pedazos de superficies lisas se calcula el área como la suma de las áreas estas superficies lisas.

OBSERVACIÓN 3.6. Existen analogías entre la fórmula anterior y la fórmula de la longitud de una curva

$$l(g) = \int_a^b \|g'(t)\| dt.$$

Es fácil probar (hacerlo como ejercicio) que si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una función diferenciable tal que  $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$  para todo  $x \in [a, b]$ , y si  $G$  es el gráfico de  $f$  entonces

$$l(G) = \int_a^b \sqrt{1 + (f_1'(x))^2 + (f_2'(x))^2} dx.$$

Para superficies tenemos un resultado análogo.

Supongamos que  $S$  está dada explícitamente por una ecuación de la forma  $z = f(x, y)$ , es decir  $S$  es el gráfico de una función  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces  $g(x, y) = (x, y, f(x, y))$  es una representación paramétrica de  $S$  y el producto vectorial fundamental es:

$$\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{pmatrix} = \left( -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right).$$

De donde,

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

EJEMPLO 3.7. Calcular el área de la superficie  $S$  parametrizada por

$$g(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

donde  $1 \leq u^2 + v^2 \leq 4$ .

Tenemos que

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{pmatrix} = (-2u, -2v, 1)$$

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \right\| = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}.$$

Sea

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u^2 + v^2 \leq 4\}$$

entonces

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_D \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1} \, dudv \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r \sqrt{4r^2 + 1} \, dr \\ &= \frac{(17^{3/2} - 5^{3/2})\pi}{6}. \end{aligned}$$

## 2. Superficies orientables.

DEFINICIÓN 3.8. Sea  $S$  una superficie en  $\mathbb{R}^3$ . Se dice que  $S$  es *orientable* si existe una función continua  $\vec{n} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

- (a)  $\vec{n}(\vec{x})$  es ortogonal a  $S$  en todo punto  $\vec{x} \in S$ .
- (b)  $\|\vec{n}(\vec{x})\| = 1$  para todo  $\vec{x} \in S$

En este caso  $\vec{n}$  se llama la normal unitaria a la superficie  $S$ .

OBSERVACIÓN 3.9. Si  $\vec{n}$  es la normal unitaria a una superficie entonces  $-\vec{n}$  es una normal unitaria que apunta en la dirección opuesta. Luego cada superficie orientable tiene dos posibles orientaciones.

Si  $S$  es un pedazo de superficie lisa parametrizada por  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  entonces  $S$  es orientable, la normal unitaria en el punto  $g(u, v)$  es el vector

$$\vec{n}(u, v) = \frac{\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial g}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \right\|}$$

para  $(u, v) \in D$ .

Si tomamos a  $\vec{n}$  como arriba diremos que la orientación es positiva, en la otra dirección la orientación es negativa.

OBSERVACIÓN 3.10. El que una superficie sea orientable equivale a que la superficie tenga dos caras, una esfera, un plano y un cilindro son ejemplos de superficies orientables. La cinta de Möbius es un ejemplo de una superficie no orientable.

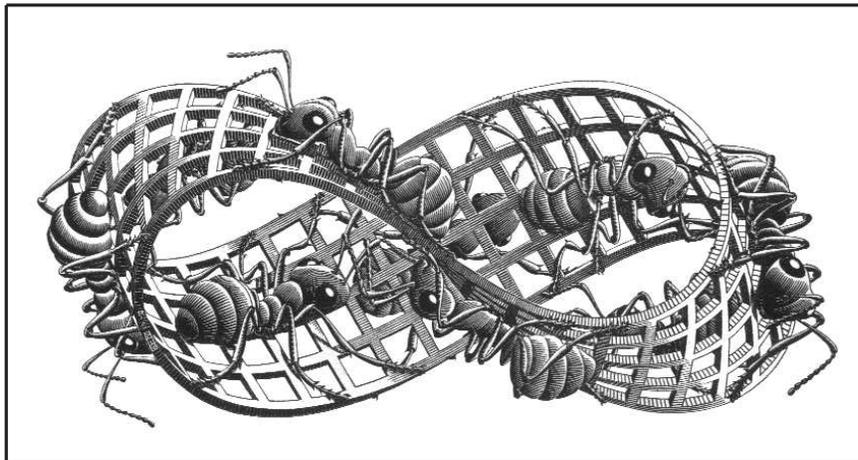


FIGURA 3.1. Hormigas caminando sobre una cinta de Möbius, por M. C. Escher, 1963

### 3. Integrales de superficie

DEFINICIÓN 3.11. Sea  $S$  un pedazo de superficie lisa con parametrización  $g$  y sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar continuo sobre  $S$ . Definimos la *integral* de  $f$  sobre  $S$  como

$$\iint_S f \, d\sigma = \iint_D f(g(u, v)) \left\| \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \right\| \, dudv.$$

EJEMPLO 3.12. Sea  $S$  parametrizada por  $g(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ , con  $(u, v) \in D$  donde  $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u^2 + v^2 \leq 4\}$  y sea  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ , entonces

$$\begin{aligned} \iint_S f \, d\sigma &= \iint_D \sqrt{u^2 + v^2} \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1} \, dudv \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^2 \sqrt{4r^2 + 1} \, dr. \end{aligned}$$

EJERCICIO 3.13. Demostrar que si la superficie  $S$  está dada por  $z = h(x, y)$  con  $(x, y) \in D$  entonces

$$\iint_S f \, d\sigma = \iint_D f(x, y, h(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2} \, dx dy.$$

Si  $f \geq 0$  la integral de  $f$  sobre la superficie  $S$  representa la masa de una lámina cuya forma es  $S$  y cuya densidad es  $f$ .

DEFINICIÓN 3.14. Sea  $S$  un pedazo de superficie lisa con parametrización  $g$  y sea  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial continuo sobre  $S$ . Definimos la integral de  $F$  sobre  $S$  como

$$\iint_S F \cdot ds = \iint_D \left\langle F(g(u, v)), \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \right\rangle \, dudv.$$

OBSERVACIÓN 3.15. Notar que

$$\iint_S F \cdot ds = \iint_D \langle F(g(u, v)), \vec{\mathbf{n}}(u, v) \rangle \left\| \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \right\| \, dudv = \iint_S \langle F, \vec{\mathbf{n}} \rangle \, d\sigma.$$

### Interpretación Física de la integral de superficie.

Si el campo vectorial  $F$  describe el movimiento de un fluido, entonces el *flujo* de  $F$  a través de la superficie  $S$  es

$$\iint_S F \cdot ds.$$

Como ejercicio, justificar la definición anterior de flujo.

Indicación: De acuerdo a la figura, el flujo aproximado de  $F$  a través del paralelogramo generado por los vectores

$$\Delta u \frac{\partial g}{\partial u} \quad \text{y} \quad \Delta v \frac{\partial g}{\partial v}$$

es

$$\langle F, \vec{\mathbf{n}} \rangle \Delta u \Delta v = \left\langle F(g(u, v)), \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \right\rangle \Delta u \Delta v$$

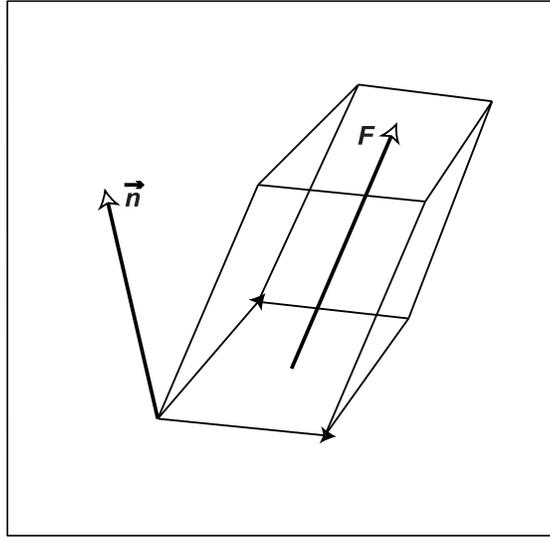


FIGURA 3.2. Flujo de un campo vectorial

**Otras notaciones para las integrales de superficie.**

Supongamos  $g(u, v) = (g_1(u, v), g_2(u, v), g_3(u, v))$ .

Para  $i, j = 1, 2$ , definimos

$$\frac{\partial(g_i, g_j)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial g_i}{\partial u} & \frac{\partial g_i}{\partial v} \\ \frac{\partial g_j}{\partial u} & \frac{\partial g_j}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{\partial g_i}{\partial u} \frac{\partial g_j}{\partial v} - \frac{\partial g_i}{\partial v} \frac{\partial g_j}{\partial u}.$$

Con esta notación tenemos que

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_3}{\partial u} \\ \frac{\partial g_1}{\partial v} & \frac{\partial g_2}{\partial v} & \frac{\partial g_3}{\partial v} \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial(g_2, g_3)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(g_3, g_1)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(u, v)} \right).$$

Si  $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ , entonces

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot ds &= \iint_D \left\langle F(g(u, v)), \left( \frac{\partial(g_2, g_3)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(g_3, g_1)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(u, v)} \right) \right\rangle dudv \\ &= \iint_D \left( F_1(g(u, v)) \frac{\partial(g_2, g_3)}{\partial(u, v)} + F_2(g(u, v)) \frac{\partial(g_3, g_1)}{\partial(u, v)} + F_3(g(u, v)) \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(u, v)} \right) dudv. \end{aligned}$$

Esto se abrevia de la siguiente manera

$$\iint_S F \cdot ds = \iint_S F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy.$$

DEFINICIÓN 3.16. Sean  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $h : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  dos parametrizaciones de la misma superficie  $S$ . Se dice que  $g$  y  $h$  son *equivalentes* cuando existe una transformación  $T : D \rightarrow B$  biyectiva tal que  $T$  y  $T^{-1}$  son de clase  $\mathcal{C}^1$ , con determinante jacobiano positivo y tal que  $g = h \circ T$ .

EJERCICIO 3.17. Demostrar que dos parametrizaciones equivalentes asocian la misma integral de superficie a un campo vectorial.

#### 4. El teorema de Stokes

Sea  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Recuerde que decimos que  $\partial D$  tiene orientación positiva si al “caminar” por  $\partial D$  con esa orientación, la región  $D$  queda a la izquierda de  $\partial D$ .

Sea  $S$  un elemento de superficie regular en  $\mathbb{R}^3$  parametrizada por una función  $g : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  donde  $D \subset \mathbb{R}^2$ . La curva frontera  $\partial S$  es la curva cerrada simple que es imagen por  $g$  de la frontera de  $D$ , es decir,  $\partial S = g(\partial D)$ .

DEFINICIÓN 3.18. Sea  $S$  un elemento de superficie regular parametrizado por  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Decimos que  $\partial S$  tiene *orientación positiva con respecto a  $S$*  si  $\partial D$  tiene orientación positiva.

En este caso, si una persona recorre  $\partial S$  con la cabeza en la dirección positiva de la normal entonces  $S$  queda a la izquierda.

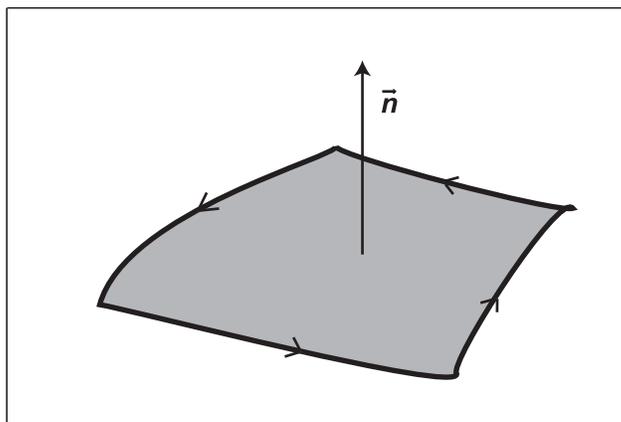


FIGURA 3.3.  $\partial S$  positivamente orientada con respecto a  $S$

DEFINICIÓN 3.19. Una superficie lisa a trozos es unión finita de pedazos de superficies lisas. Esta superficie es *orientable* si se pueden orientar cada una de las superficies de manera que las curvas que son fronteras comunes tengan orientaciones opuestas.

TEOREMA 3.20 (Stokes). Sea  $S$  una superficie regular en  $\mathbb{R}^3$  parametrizada por una función  $g$  de clase  $C^2$  tal que la curva frontera  $\partial S$  está orientada positivamente respecto a  $S$ . Sea  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial de clase  $C^1$  definido en un conjunto abierto que contiene a  $S \cup \partial S$ . Entonces

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot ds = \int_{\partial S} F \cdot d\vec{x}$$

donde

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F &= \nabla \times F = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Otras maneras de expresar la igualdad del teorema son

$$\begin{aligned} \iint_S \nabla \times F \cdot ds &= \int_{\partial S} F \cdot d\vec{x} \\ \iint_S \langle \operatorname{rot} F, \vec{n} \rangle d\sigma &= \int_{\partial S} F \cdot d\vec{x} \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que

$$\int_{\partial S} F \cdot d\vec{x} = \int_{\partial S} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_{\partial S} F_1 dx + \int_{\partial S} F_2 dy + \int_{\partial S} F_3 dz.$$

Además

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} F \cdot ds &= \\ \iint_S \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) dy \wedge dz &+ \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Por lo tanto para probar este teorema basta probar las siguientes tres igualdades:

$$\int_{\partial S} F_1 dx = \iint_S \frac{\partial F_1}{\partial z} dz \wedge dx - \frac{\partial F_1}{\partial y} dx \wedge dy, \quad (3.1)$$

$$\int_{\partial S} F_2 dy = \iint_S -\frac{\partial F_2}{\partial z} dy \wedge dz + \frac{\partial F_2}{\partial x} dx \wedge dy, \quad (3.2)$$

$$\int_{\partial S} F_3 dz = \iint_S \frac{\partial F_3}{\partial y} dy \wedge dz - \frac{\partial F_3}{\partial x} dz \wedge dx. \quad (3.3)$$

Cada una de estas igualdades se obtendrá aplicando el teorema de Green. Probaremos solamente la igualdad (3.1), las otras son análogas.

Sea  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización de  $S$ .

$$\iint_S \frac{\partial F_1}{\partial z} dz \wedge dx - \frac{\partial F_1}{\partial y} dx \wedge dy = \iint_D \left( \frac{\partial F_1}{\partial z}(g(u, v)) \frac{\partial(g_3, g_1)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial F_1}{\partial y}(g(u, v)) \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(u, v)} \right) dudv.$$

Sea  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una parametrización de  $\partial D$  entonces  $g \circ \alpha$  es una parametrización de  $\partial S$ .

Sea  $h : D \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $h = F_1 \circ g$  entonces, por el teorema de Green.

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} F_1 dx &= \int_a^b F_1((g \circ \alpha)(t))(g_1 \circ \alpha)'(t) dt \\ &= \int_a^b h(\alpha(t)) \left( \frac{\partial g_1}{\partial u}(\alpha(t))\alpha_1'(t) + \frac{\partial g_1}{\partial v}(\alpha(t))\alpha_2'(t) \right) dt \\ &= \int_{\partial D} h \frac{\partial g_1}{\partial u} du + h \frac{\partial g_1}{\partial v} dv \\ &= \iint_D \left( \frac{\partial}{\partial u} \left( h \frac{\partial g_1}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( h \frac{\partial g_1}{\partial u} \right) \right) dudv \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u} \left( h \frac{\partial g_1}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( h \frac{\partial g_1}{\partial u} \right) &= \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial g_1}{\partial v} + h \frac{\partial^2 g_1}{\partial u \partial v} - \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial g_1}{\partial u} - h \frac{\partial^2 g_1}{\partial v \partial u} \\
&= \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial g_1}{\partial v} - \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial g_1}{\partial u} = \\
&= \frac{\partial(F_1 \circ g)}{\partial u} \frac{\partial g_1}{\partial v} - \frac{\partial(F_1 \circ g)}{\partial v} \frac{\partial g_1}{\partial u} \\
&= \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial g_1}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial g_2}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial g_3}{\partial u} \right) \frac{\partial g_1}{\partial v} \\
&\quad - \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial g_1}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial g_2}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial g_3}{\partial v} \right) \frac{\partial g_1}{\partial u} \\
&= \left( \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial g_2}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial g_3}{\partial u} \right) \frac{\partial g_1}{\partial v} - \left( \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial g_2}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial g_3}{\partial v} \right) \frac{\partial g_1}{\partial u} \\
&= \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial g_1}{\partial v} \frac{\partial g_2}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial g_3}{\partial u} \frac{\partial g_1}{\partial v} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial g_1}{\partial u} \frac{\partial g_2}{\partial v} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial g_3}{\partial v} \frac{\partial g_1}{\partial u} \\
&= \frac{\partial F_1}{\partial z} \left( \frac{\partial g_3}{\partial u} \frac{\partial g_1}{\partial v} - \frac{\partial g_3}{\partial v} \frac{\partial g_1}{\partial u} \right) - \frac{\partial F_1}{\partial y} \left( \frac{\partial g_1}{\partial u} \frac{\partial g_2}{\partial v} - \frac{\partial g_1}{\partial v} \frac{\partial g_2}{\partial u} \right) \\
&= \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial(g_3, g_1)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(u, v)}.
\end{aligned}$$

De donde

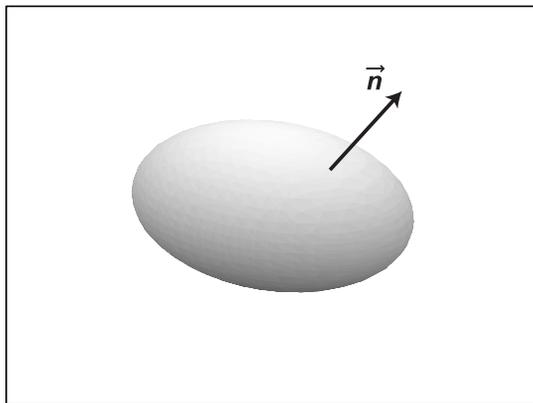
$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} F_1 dx &= \iint_D \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial(g_3, g_1)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(u, v)} \right) dudv \\
&= \iint_S \frac{\partial F_1}{\partial z} dz \wedge dx - \frac{\partial F_1}{\partial y} dx \wedge dy.
\end{aligned}$$

□

## 5. El teorema de la divergencia o teorema de Gauss

DEFINICIÓN 3.21. Sea  $W \subset \mathbb{R}^3$  un sólido cuya frontera es una superficie lisa a trozos. Si cada pedazo de  $\partial W$  es parametrizado por una función de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que el vector normal está dirigido hacia afuera de  $W$  en cada punto de  $\partial W$ , diremos que  $\partial W$  tiene *orientación positiva*.

La siguiente figura nos muestra un sólido con frontera orientada positivamente.

FIGURA 3.4.  $\partial W$  positivamente orientada con respecto a  $W$ 

TEOREMA 3.22 (Gauss). Sea  $W$  un sólido en  $\mathbb{R}^3$  limitado por una superficie lisa a trozos,  $\partial W$ , cerrada y orientada positivamente. Si  $F = (F_1, F_2, F_3)$  es un campo vectorial de clase  $C^1$  definido en  $W \cup \partial W$ , entonces

$$\iiint_W \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial W} F \cdot ds$$

donde

$$\operatorname{div} F = \langle \nabla, F \rangle = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Note que la igualdad del teorema es

$$\iiint_W \langle \nabla, F \rangle \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial W} \langle F, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

DEMOSTRACIÓN. Haremos la demostración cuando  $W$  es una región del siguiente tipo

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\}$$

donde  $A \subset \mathbb{R}^2$ .

Para regiones proyectables en otros planos coordenados distintos del  $xy$  la demostración es análoga. Para el caso general la demostración se hace picando a  $W$  en distintas regiones proyectables y sumando después.

Sean  $F = (F_1, F_2, F_3)$  y  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ . Sabemos que

$$\iint_{\partial W} F \cdot ds = \iint_{\partial W} \langle F, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \iint_{\partial W} (F_1 n_1 + F_2 n_2 + F_3 n_3) \, d\sigma$$

y

$$\iiint_W \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = \iiint_W \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz.$$

Por lo tanto para demostrar el teorema basta probar

$$\iiint_W \frac{\partial F_1}{\partial x} dx dy dz = \iint_{\partial W} F_1 n_1 d\sigma, \quad (3.4)$$

$$\iiint_W \frac{\partial F_2}{\partial y} dx dy dz = \iint_{\partial W} F_2 n_2 d\sigma, \quad (3.5)$$

$$\iiint_W \frac{\partial F_3}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial W} F_3 n_3 d\sigma. \quad (3.6)$$

Solamente probaremos (3.6), las otras son análogas.

Sea

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\}$$

entonces

$$\partial W = S_o \cup S_1 \cup S_2$$

donde  $S_o$ ,  $S_1$  y  $S_2$  son superficies que cumplen las condiciones que describiremos a continuación.

La superficie  $S_1$  se puede parametrizar mediante la función

$$\psi_1(u, v) = (u, v, h_1(u, v))$$

y la dirección de la normal es la opuesta. La superficie  $S_2$  se puede parametrizar mediante la función

$$\psi_2(u, v) = (u, v, h_2(u, v))$$

y la dirección de la normal es la misma. Claramente la normal a  $S_o$  en cualquier punto es perpendicular al eje  $z$ . Por lo tanto,  $n_3(g(u, v)) = 0$  si  $g(u, v) \in S_o$ .

Además

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \psi_1}{\partial v}(u, v) = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial h_1}{\partial v} \end{pmatrix} = \left( -\frac{\partial h_1}{\partial u}, -\frac{\partial h_1}{\partial v}, 1 \right)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \psi_2}{\partial v}(u, v) = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial h_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \left( -\frac{\partial h_2}{\partial u}, -\frac{\partial h_2}{\partial v}, 1 \right).$$

Usando el teorema fundamental del cálculo y el teorema de Fubini obtenemos,

$$\begin{aligned} \iint_{\partial W} F_3 n_3 d\sigma &= \iint_{S_1} F_3 n_3 d\sigma + \iint_{S_2} F_3 n_3 d\sigma + \iint_{S_o} F_3 n_3 d\sigma \\ &= - \iint_A F_3(u, v, \psi_1(u, v)) du dv + \iint_A F_3(u, v, \psi_2(u, v)) du dv + 0 \\ &= \iint_A (F_3(x, y, h_2(x, y)) - F_3(x, y, h_1(x, y))) dx dy + 0 \\ &= \iint_A \left( \int_{h_1(x, y)}^{h_2(x, y)} \frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, z) dz \right) dx dy \\ &= \iiint_W \frac{\partial F_3}{\partial z} dx dy dz \end{aligned}$$

□

### Ejercicios 3.

- (1) Sea  $F$  un campo vectorial derivable dado por  $F = (P, Q, R)$ . Halle una fórmula para

$$\operatorname{rot}F = \left( \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right), \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right), \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right).$$

en los siguientes casos:

- (a)  $F(x, y, z) = (y^2, xy, xz)$ ,  
(b)  $F(x, y, z) = (y - z, yz, -xz)$ .
- (2) Sea  $F$  un campo vectorial derivable dado por  $F = (P, Q, R)$ . En los siguientes casos halle una fórmula para

$$\operatorname{div}F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

- (a)  $F(x, y, z) = (x, y, z)$ ,  
(b)  $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ .
- (3) Encuentre el área de la rampa espiral representada por:

$$g(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v), \text{ con } 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 3\pi.$$

- (4) Calcular  $\int_S F \cdot ds$ , donde  $F(x, y, z) = x + y + z$  y  $S$  está dado por  $g(u, v) = (u - v, u + v, uv)$ , para  $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$ .

- (5) Aplicando el teorema de Stokes hallar

$$\int_L (y + z) dx + (z + x) dy + (x + y) dz$$

donde  $L$  es la intersección de las superficies dadas por

$$x + y + z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

y  $a$  es un número positivo.

- (6) Encuentre la masa total de una película esférica cuya densidad en cada punto es igual a la distancia del punto a un punto fijo de la esfera.
- (7) Sea  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $\mathcal{C}^1$ . Supongamos que  $G$  determina implícitamente un pedazo de superficie lisa  $S$  en la cual  $\partial G/\partial z \neq 0$ , que yace sobre una región  $D$  del plano  $xy$  tal que hay un solo punto de  $S$  sobre cada punto de  $D$ . Demostrar que

$$\text{área}(S) = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2} \left|\frac{\partial G}{\partial z}\right|^{-1} dx dy.$$

- (8) Encuentre una parametrización como superficie lisa por pedazos, orientable, con normal apuntando hacia afuera, para cada uno de los siguientes conjuntos:
- (a) El cilindro con una tapa dado por  $x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1$  y  $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$ .
- (b) El embudo dado por  $x^2 + y^2 - z^2 = 0, 1 \leq z \leq 4$  y  $x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1$ .
- (9) Sea  $F$  el campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$  dado por  $F(x, y, z) = (x, y, 2z - x - y)$ . Calcular la integral de  $F$  sobre las superficies orientadas del Ejercicio 8.

- (10) Hallar  $\int_L x^2 y^3 dx + dy + dz$ , donde  $L$  es la intersección de las superficies

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad z = 0.$$

- (11) Usando el teorema de Stokes, calcular la integral de superficie  $\iint_S \text{rot} F \cdot ds$  para:
- (a)  $F(x, y, z) = (y^2, xy, xz)$  y  $S$  es el hemisferio  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ .
- (b)  $F(x, y, z) = (y - z, yz, -xz)$  y  $S$  consta de las cinco caras del cubo  $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2$  no situadas en el plano  $xy$ .
- (12) Transformar la integral de superficie usando el teorema de la divergencia en los siguientes casos:
- (a)  $F(x, y, z) = (x, y, z)$  y  $S$  es la superficie dada por  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .
- (b)  $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$  y  $S$  está limitada por las superficies dadas por  $x^2 + y^2 = 4, z = 0, z + x = 2$ .

- (13) Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $\mathcal{C}^1$  y no negativa. El gráfico de  $f$  rotado alrededor del eje  $x$  genera una superficie de revolución  $S$  en  $\mathbb{R}^3$ .
- (a) Encontrar una parametrización de  $S$  en términos de  $f$ .
- (b) Demostrar que

$$\text{área}(S) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

- (14) Verifique que si  $F(x, y, z)$  no depende de  $z$  y la tercera coordenada de  $F$  es cero entonces la fórmula de Stokes, aplicada a una superficie en el plano  $xy$ , se reduce a la fórmula de Green.
- (15) Demuestre que si  $R$  es una región en la que se puede aplicar el teorema de Gauss, entonces

$$\text{Vol}(R) = \frac{1}{3} \iint_{\partial R} x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy.$$



## Bibliografía

- [1] APOSTOL, T. *Mathematical Analysis*.
- [2] COHEN, L. AND EHRLICH, G. *The structure of the real number system*. Van Nostrand 1963.
- [3] EDWARDS, C.H. *Advanced Calculus of Several Variables*.
- [4] GOLDBERG. *Methods of Real Analysis*.
- [5] HALMOS, P. *Teoría intuitiva de los conjuntos*. CECSA 1971.
- [6] O.E.A. *Introducción a la Topología General, No 9 de la Serie de Matemática de la O.E.A.*
- [7] PROTTER, M. H. AND MORREY, C. B. *A First Course in Real Analysis*.
- [8] RUDIN, W. *Principles of Mathematical Analysis. Second Edition*. McGraw-Hill 1964.
- [9] SIMMONS. *Introduction to Topology and Modern Analysis*.
- [10] SPIVAK. *Cálculo en Variedades*.
- [11] STROMBERG, H. *An Introduction to Classical Real Analysis*.
- [12] WHITE, A. *Real Analysis: An Introduction*.
- [13] WILLIAMSON, CROWELL, TROTTER. *Cálculo de Funciones Vectoriales*.



## Índice alfabético

- área, 14
  - de una superficie, 86
- cambio de variables, 32, 42
- cicloide, 58
- cinta de Möbius, 89
- condición de Riemann, 23
- conjunto liso, 23
- contenido
  - $n$ -dimensional, 19, 26
  - $n$ -dimensional nulo, 22
  - bidimensional, 14
  - bidimensional nulo, 10
- coordenadas
  - cilíndricas, 37
  - esféricas, 38
  - polares, 33
- curva, 55
  - cerrada, 70
  - lisa, 62
  - lisa a trozos, 68
  - opuesta , 56
  - orientada, 55
  - rectificable, 59
- elemento de superficie regular , 85
- flujo, 90
- Fubini, teorema de, 8, 20
- función característica, 14
- función escalonada, 3, 4, 19
- Green, teorema de, 72
- hélice, 56
- integrable, 2, 7, 20
- integral, 2, 7, 20, 63
  - de área, 14
  - de línea, 64
  - de superficie, 89
  - de una función escalonada , 3
  - doble, 5, 14
  - impropia, 43
  - inferior, 4, 7, 20
  - múltiple, 19, 25
  - superior, 3, 7, 20
- longitud
  - de una curva, 62
  - de una trayectoria, 59
- medida 0, 54
- parametrización
  - de una curva, 55
- partición, 1, 4, 18
- poligonalmente conexo, 70
- producto vectorial fundamental, 86
- rapidez, 57
- rectificable, 59
- región, 85
  - simple, 71
  - tipo I, 15
  - tipo II, 16

Stokes, teorema de, [93](#)

suma

  inferior, [1](#)

  superior, [1](#)

sumas de Riemann, [2](#)

superficie

  lisa, [85](#)

  no orientable, [89](#)

  orientable, [88](#)

teorema fundamental del cálculo, [3](#)

trayectoria, [55](#)

  lisa, [59](#)

  lisa a trozos, [68](#)

  poligonal, [69](#)

trayectorias equivalentes, [56](#)

velocidad, [57](#)

volumen, [19](#)

volumen  $n$ -dimensional, [26](#)