UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO DE MATEMÁTICA

Espacios de Funciones de Variación Acotada Generalizada y Temas Relacionados

Autor: MSc. Odalis M. Mejía G.
Tutor: Dr. Nelson J. Merentes D.
CoTutor: Dr. Janusz Matkowski

Tesis Doctoral presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela para optar al título de Doctor en Ciencias Mención Matemática.

Caracas, Venezuela
23 de Febrero, 2017

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
COMISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

VEREDICTO

Quienes suscriben, miembros del jurado designado por el Consejo de la Facultad de Ciencias y el Consejo de Estudios de Postgrado de la Universidad Central de Venezuela, para examinar la **TESIS DOCTORAL** presentada por la estudiante **MAGISTER ODALIS MARIA MEJÍA GONZÁLEZ**, **CI.V-17.426.865**, bajo el título: ***"ESPACIOS DE FUNCIONES DE VARIACIÓN ACOTADA GENERALIZADA Y TEMAS RELACIONADOS"***, a fin de cumplir con el requisito legal para optar al grado académico de **DOCTOR EN CIENCIAS, MENCIÓN MATEMÁTICA**, dejan constancia de lo siguiente:

1.- Leído como fue dicho trabajo por cada uno de los miembros del jurado, se fijó el día **Jueves, 23 de Febrero de 2017**, a las **10:00 am**, para que la autora lo defendiera en forma pública, lo que ésta hizo en la **Sala Raimundo Chela de la Escuela de Matemática, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela**, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual respondió satisfactoriamente a las preguntas que le fueron formuladas por el jurado, todo ello conforme con lo dispuesto en el Reglamento de Estudios de Postgrado.

2.- El jurado decidió **APROBARLO**, sin hacerse solidario con la ideas expuestas por la autora, porque se ajusta a lo dispuesto y exigido en el Reglamento de Estudios de Postgrado.

Para dar este Veredicto, el jurado estimó que el trabajo examinado reúne los requisitos de presentación, originalidad, revisión bibliográfica e impacto necesarios para constituir una Tesis Doctoral ya que se presentan generalizaciones del concepto de función de variación acotada en distintos contextos, que constituyen un aporte original y relevante al tema. Adicionalmente se resuelven ecuaciones integrales clásicas y se caracteriza la actuación del operador de composición en este tipo de espacios.

3.- El jurado por unanimidad decidió otorgar la calificación de EXCELENTE al presente trabajo por considerar que presenta contribuciones valiosas a los temas abordados que se sustentan por opiniones de investigadores reconocidos en el área.

En fe de lo cual se levanta la presente ACTA, a los **23** días del mes de **Febrero** del año **2017**, conforme a lo dispuesto en el Reglamento de Estudios de Postgrado. Actuaron como Tutores los Profesores Dr. NELSON MERENTES (UCV) y Dr. JANUSZ MATKOWSKI (Universidad de Zielonna Góra, Polonia) y como **Coordinador del Jurado el Dr. NELSON MERENTES (UCV).**

Dr. JOSÉ GIMÉNEZ-ULA
C.I.V-5.542.086
Jurado designado por Consejo Facultad

DR. JOSÉ ATILIO GUERRERO-U.N.E.T.
C.I.V-8.088.232
Jurado designado por Consejo de Facultad

Ramón Bruzual

DR. RAMÓN BRUZUAL-UCV
C.I.V-4.349.516
Jurado designado por Consejo de Estudios de Postgrado

DRA. YAMILET QUINTANA-USB
C.I.V-10.826.652
Jurado designado por Consejo de Estudios de Postgrado

DR. NELSON MERENTES-UCV
CI.V-3.986.108
Tutor

POSTGRADO DE MATEMÁTICA
Facultad de Ciencias

Agradecimientos

Agradecida primeramente a Dios por darme salud, sabiduría y el logro obtenido con este trabajo de investigación.

A mis amados padres Pureza y Simón, mi hermano Xavier, mis tíos Iris, Moncho y Yoyo, mis hermosos sobrinos Victoria y Jheremy y mis demás familiares, por el apoyo incondicional para todo.

A mi tutor, Nelson Merentes, quien es la guía en mis estudios, gracias por permitirme el honor de aprender de su sabiduría y profesionalismo.

A los profesores Antonio Azocar, Jurancy Ereú, Atilio Guerrero, José Giménez, Hugo Leiva, Sergio Rivas, José Luís Sánchez y Pilar Silvestre por sus sabias sugerencias en la realización de esta tesis.

A los amigos y compañeros, quienes me brindan una gran amistad y apoyo siempre, Maira, Materano, Marianto, Jesús Mujica, Ronaldys, María y Lysis.

A todos aquellos que están y no están en esta lista que son parte importante en mi vida y han contribuido de alguna manera en el cumplimiento de mis metas, Gracias.

Dedicatoria

A mis amados padres

Resumen

Luego de presentar algunas de las generalizaciones del concepto de variación acotada en un intervalo, dado por Jordan en 1881, en esta Tesis Doctoral se presentan resultados originales en este campo de investigación, los cuales están compaginados en 11 artículos, publicados en revistas arbitradas internacionales, en los mismos se obtienen los siguientes resultados: se exhiben nuevas propiedades del espacio de funciones de $\kappa\phi$-variación acotada en el sentido de Schramm-Korenblum. Se definen los espacios de variación acotada en el sentido de Wiener, Wiener-Korenblum, Waterman-Shiba y De La Vallée Poussin-Wiener con exponente variable; el cual, en cada uno de estos espacios, se presentan propiedades de la clase y su caracterización vía composición. Se estudia el operador de composición de Nemytskij, actuación, uniformemente continuo, Lipschitzidad local y localmente definido en los espacios de funciones de variación acotada generalizada con exponente variable y en el espacio de funciones de $\kappa\phi$-variación acotada. Se demuestra la existencia y unicidad de soluciones de las ecuaciones integrales de Hammerstein y Volterra-Hammerstein en el espacio de las funciones de variación acotada en el sentido de Wiener con exponente variable. Se encuentra una relación entre el espacio de (p,k)-variación acotada en el sentido de Riesz-Popoviciu y el p-módulo de continuidad, estos funcionales generan escalas de espacios que conecta el espacio de funciones de (p,k)-variación acotada y el espacio W_p^k. Y por último, se define el espacio de $\kappa\phi$-variación acotada en el sentido de Schramm-Korenblum bidimensional y se estudian sus propiedades.

Palabras Claves: Variación Acotada, Exponente Variable, Wiener, Korenblum, Waterman-Shiba, De La Vallée Poussin-Wiener, Caracterización, Operador de Composición, Actuación, Condición de Matkowski, Operador de Composición Localmente Lipschitz, Operador Localmente Definido, Ecuaciones Integrales, Hammerstein, Volterra, Espacios Intermedios, Espacio de Riesz, Variación Bidimensional, Schramm-Korenblum.

Abstract

After presenting some generalizations of the concept of bounded variation in a interval, by Jordan in 1881, in this doctoral thesis original results are presented in this field of investigation, which are collated in 11 papers, published in international refereed journals in which the following results are obtained: we exhibit new properties of the space of functions of bounded $\kappa\phi$-variation in the sense of Schramm-Korenblum. We defined the spaces of bounded variation in the sense of Wiener, Wiener-Korenblum, Waterman-Shiba and De La Vallée Poussin-Wiener with variable exponent; which, in each of these spaces, the properties and characterization via composition are presented. The composition operator (Nemytskij), maps, uniformly continuous, Local Lipschitzian and locally defined function spaces of generalized bounded variation with variable exponent and in the space of functions of bounded $\kappa\phi$-variation are studied. The existence and uniqueness of solutions of integral equations of Hammerstein and Volterra-Hammerstein in the space of functions of bounded variation in the sense of Wiener with variable exponent are showed. A relationship between the space of bounded (p,k)-variation in the sense of Riesz-Popoviciu and the continuity p-modulus, these functionals form a scale between the space of function of bounded (p,k)-variation and the space W_p^k is found. And finally, the space of bounded $\kappa\phi$-variation dimensional in the sense of Schramm-Korenblum is defined and their properties are studied.

Keywords: Bounded Variation, Variable exponent, Wiener, Korenblum, Waterman-Shiba, De La Vallée Poussin-Wiener, Characterization, Composition Operator, Maps, Matkowski Condition, Composition Operator Locally Lipschitz, Locally Defined Operator, Integral Equations, Hammerstein, Volterra, Scale of Space, Riesz Space, Bidimensional Variation, Schramm-Korenblum.

Índice general

Introducción

A finales del siglo XIX (1881), el matemático francés, Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922) publicó un resultado donde se exponía por primera vez la noción de “función de variación acotada” cuando realizaba investigaciones sobre convergencia de series de Fourier. Las ideas de Jordan han sido estudiadas y generalizadas desde 1881 hasta nuestros días y estos nuevos espacios son de suma importancia para las aplicaciones en el estudio de la integral de Stieltjes, las curvas rectificables y descomposición de imágenes; también en diferentes áreas de las matemática, tales como Análisis de Fourier, teorías de integración y en la teoría de operadores (Ver [13], [25], [27], [75], [83]). Esta Tesis Doctoral a nuestro juicio, es un aporte para los temas relacionados con los espacios de funciones de variación acotada generalizadas y aspectos que involucran estos espacios. Si el lector de esta Tesis Doctoral está interesado en ampliar su interés en este campo le recomendamos las siguientes bibliografías J. Appell, J. Banas y N. Merentes (2015), en [3] y los artículos y libros que aquí aparecen citados.

Esta Tesis Doctoral se ha estructurado en seis capítulos, subdivididos cada uno de ellos en secciones, cuyos contenidos se exponen a continuación:

El primer capítulo esta dividido en doce secciones. En la primera sección se define el espacio de las funciones de variación acotada y en las siguientes doce secciones se presentan generalizaciones del concepto clásico de variación dado por Jordan, los cuales son el espacio de funciones de segunda variación acotada en el sentido de De La Vallée Poussin [167], el espacio de funciones de p-variación acotada en el sentido de Riesz [143], el espacio de funciones de p-variación acotada en el sentido de Wiener [177], el espacio de funciones de segunda variación acotada en el sentido de De La Vallée Poussin-Wiener [3], el espacio de funciones de k-variación acotada en el sentido de Popoviciu [138], el espacio de funciones de φ-variación acotada en el sentido de Wiener [185], el espacio de funciones de φ-variación acotada en el sentido de Riesz [109], el espacio de funciones de κ-variación acotada en el sentido de Korenblum [79], el espacio de funciones de Λ-variación acotada en el sentido de Waterman [174], el espacio de funciones de Λ_p-variación acotada en el sentido de Waterman-Shiba [159], el espacio de funciones de Φ-variación acotada en el sentido de Schramm [158] y el espacio de funciones de $\kappa\phi$-variación acotada en el sentido de Schramm-Korenblum [76] subdividido en los espacios de funciones de κp y $\kappa\varphi$-variación acotada en el sentido de Riesz-Korenblum. Como contribución al tema, se demuestran nuevas propiedades de los espacios de funciones de segunda variación acotada en el sentido de De La Vallée Poussin-Wiener (Ver [114]) y $\kappa\phi$-variación acotada en el sentido de Schramm-Korenblum (Ver [72]).

En el segundo capítulo, se presentan cuatro secciones; en la primera sección se expone el espacio de funciones de variación acotada en el sentido de Wiener con exponente variable, introducido por R. Castillo, N. Merentes y H. Rafeiro (2014) en [30]. Luego se complementa esta sección, puesto que obtenemos nuevos resultados para las funciones pertenecientes a este espacio (Ver [111]). Las siguientes tres secciones se introducen varios espacios de variación acotada en el sentido de Wiener-Korenblum, Waterman-Shiba y De La Vallée Poussin-Wiener con exponente variable; y en cada uno de estos espacios, se presentan propiedades de la clase y su caracterización vía composición (Ver [56], [112], [114]).

El tercer capítulo trata sobre uno de los operadores de mayor uso en casi todas las áreas del Análisis no Lineal; se trata del operador de composición o Nemytskij (Ver [3], [9], [121]) y se obtienen los siguientes resultados:

- Se determina las condiciones para que el operador actúe del espacio $\mathbb{X}$ en si mismo, en los espacios $Lip[a,b]$ y $\kappa BV[a,b]$ o $\kappa BV_{\phi}[a,b]$, $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$, $\kappa BV^{W}_{p(\cdot)}[a,b]$ y $\Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$ (Ver [57], [72], [111], [112]).

- El operador de composición actúa en el espacio $\mathbb{X}$ y es uniformemente continuo si y solo si la función generadora es una función afín con respecto a la segunda variable, en los espacios $\kappa BV_{\phi}[a,b]$, $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$, $\kappa BV^{W}_{p(\cdot)}[a,b]$, $\Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$, $BV^{W}_{(p(\cdot),2)}[a,b]$ (Ver [57], [72], [111], [112], [114]).

- El operador de composición autónomo es localmente Lipschitz en el espacio $\mathbb{X}$ si y solo si la derivada de la función generadora existe y es localmente Lipschitz, en los espacios $\kappa BV_{\phi}[a,b]$ y $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ (Ver [60], [110]).

- La aplicación $K : X \to Y$ es un operador localmente definido en el espacio de funciones de variación acotada en el sentido de Wiener con exponente variable (Ver [60]).

En el cuarto capítulo trabajamos con las ecuaciones integrales de Hammerstein y Volterra-Hammerstein, las cuales son útiles para la modelación de muchos problemas de la Ingeniería y otras ramas del conocimiento. Como contribución al tema se demuestra la existencia y unicidad de soluciones para este tipo de ecuaciones integrales en el espacio de las funciones de variación acotada en el sentido de Wiener con exponente variable (Ver [55]).

En el quinto capítulo se obtiene una relación entre el espacio de (p,k)-variación acotada en el sentido de Riesz-Popoviciu y el p-módulo de continuidad, estos funcionales generan escalas de espacios que conectan el espacio de funciones de (p,k)-variación acotada y el espacio W^k_p y, por último, se demuestran algunas relaciones con límites para estos funcionales y se obtiene la mejor estimación en términos del módulo fraccional de orden $k-1/p$ (Ver [113]).

En el sexto capítulo, se introduce la definición de $\kappa\phi$-variación acotada en el sentido de Schramm-Korenblum para funciones reales definidas en un subconjunto no vacío de un rectángulo en el plano, siguiendo la definición de variación de Vitali y Hardy-Krause. Se obtienen nuevas propiedades del espacio formado por dichas funciones (Ver [17]).

Dada la importancia de la noción de variación acotada en el estudio del Análisis Armónico y las series de Fourier nos permitimos, al final de esta introducción, hacer un recorrido histórico de este tema para que el lector tenga una visión global de la importancia de esta noción en este campo de la matemática. Una parte del desarrollo del Análisis Matemático se debe, en gran medida, a la teoría matemática conocida como Análisis de Fourier o Análisis Armónico; desde los orígenes de esta teoría se ha permitido profundizar algunos conceptos matemáticos tales como: función, límite, integral, continuidad, convergencia entre otros. Muchos matemáticos han colaborado en el desarrollo del Análisis Armónico; dentro de los conceptos de gran importancia, nos encontramos con los tipos de convergencia de funciones y así mismo la divergencia. La representación de una función arbitraria por medio de una serie trigonométrica fue estudiada por algunos investigadores a finales del siglo XVIII y principios del siglo XIX. Uno de estos investigadores fué Joseph Fourier (1768 - 1830), el cual dio una primera “demostración” de que cualquier “función” admite una representación en serie trigonométrica, de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n cos(nt) + b_n sen(nt)] .$$

Después de esto se presentó el problema de encontrar condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales dicha serie converge. Es bien conocido que una de las mayores controversias respecto al aporte de Joseph Fourier fue su afirmación que cualquier función periódica “razonable” u podía aproximarse por la serie

$$u(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n cos(nt) + b_n sen(nt)] .$$

En cuanto a la convergencia, J. B. J. Fourier (1808) en [54] afirmaba :

“Esto no resulta solamente de que los valores de los términos disminuyen continuamente; pues esta condición por sí sola no basta para establecer la convergencia de una serie. Es necesario que los valores a los que se llega aumentando continuamente el número de términos se acerquen cada vez más a un límite fijo y no se separen de éste más que en una cantidad que puede hacerse menor que toda magnitud dada: Este límite es el valor de la serie. Pues bien, se demuestra rigurosamente que las sucesiones de las que se trata satisfacen esta última condición.”

A falta de demostraciones generales de sus resultados, lo que Fourier nos legó no fue un teorema sobre la representación de una función en serie trigonométrica, sino un problema. Un problema en el que estaban implicados los conceptos de función, integral, suma de series y, posteriormente, el tipo de convergencia. La influencia de este problema en el desarrollo de los conceptos del Análisis Matemático fue considerable. Una vez planteado el problema de la representación de funciones por series trigonométricas, los intentos de demostrar la convergencia de la serie de Fourier aparecieron inmediatamente. Siméon Denis Poisson (1781-1840) y Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) publicaron sendas pruebas incorrectas.

Fue el matemático alemán, Lejeune Dirichlet (1805-1859), quien en 1829 (Ver [50]) inicio una nueva época ya que publicó el primer resultado correcto de convergencia:

“Si la función $\phi(x)$, cuyos valores se suponen finitos y determinados, no presenta más que un número finito de soluciones de continuidad entre los límites -π y π , y si además no tiene más que un número determinado de máximos y mínimos entre esos mismos límites, la serie de Fourier cuyos coeficientes son integrables definidas dependientes de la función $\phi(x)$ es convergente a un valor expresado generalmente por $[\phi(x+\varepsilon)+\phi(x-\varepsilon)]$, donde ε designa un número infinitamente pequeño.”

Es decir, si una función acotada es continua a trozos, su serie de Fourier converge en cada punto de la semisuma de los límites laterales de la función. La definición era apta para la integral, que data de 1823. Además, por el interés de su resultado, el trabajo de Dirichlet vino a clarificar los términos en que se planteaba el problema. Por una parte, sólo podemos hablar de coeficientes de Fourier más que para las funciones para las cuales las integrales que aparecen en las fórmulas tienen sentido. Por otra parte, Dirichlet comprendió que no había que buscar un resultado tan general como Fourier sugería, sino condiciones suficientes que asegurasen la convergencia de la serie; inaugurando así los criterios de convergencia.

En 1881 el matemático francés Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922) extendió el criterio de Dirichlet a las funciones de variación acotada. Jordan las definió como aquellas funciones $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, tales que

$$V(u;[a,b]) := \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-1} |u(t_{j+1}) - u(t_j)| < \infty,$$

donde el supremo se considera sobre las particiones $\pi : a \leq t_1 < \ldots < t_n \leq b$ del intervalo $[a,b]$. Esta clase de funciones se denota usualmente por $BV[a,b]$ y tiene una estructura de álgebra de Banach (Ver [3]) con la norma: $||u|| = |u(a)| + V(u;[a,b]),\ \ u \in BV[a,b]$. Jordan probó que toda función de variación acotada se puede escribir como diferencia de dos funciones crecientes, por lo que se limitó a señalar que la demostración de Dirichlet es aplicable, sin modificación. El concepto de función de variación acotada nació precisamente en ese trabajo de Jordan. Indicó que las funciones de oscilación limitada forman una clase bien definida, cuyo estudio podría presentar algún interés y mostró algunas de sus propiedades. En particular, la posibilidad de que una función de variación acotada tenga una cantidad infinita de discontinuidades en cualquier intervalo, le sirvió para mostrar que una posible condición necesaria y suficiente de integrabilidad que Dirichlet sugería al final de su artículo no era necesaria.

La noción dada por C. Jordan ha sido generalizada de varias maneras, dependiendo de su utilidad en el contexto de algunas teorías, en este sentido se presentan a continuación algunas generalizaciones dadas de manera cronológica:

En el año 1908 (Ver [167]), De La Vallée Poussin definió la clase de funciones con segunda variación acotada y demostró que pueden representarse como diferencias de funciones convexas. F. Riesz (Ver [144]) demuestra que una función u es de segunda variación acotada sobre un intervalo si y sólo si existe una función de variación acotada v tal que la función u puede representarse por:

$$u(a) + \int_a^t v(s)\, ds.$$

En el año 1910 (Ver [143]), F. Riesz definió otra noción de variación de funciones: función con p-variación acotada $(1 < p < \infty)$, las cuales las caracterizó como aquellas funciones absolutamente continuas con derivada en el espacio L_p y, además, la variación de una función u en el intervalo $[a,b]$ puede calcularse mediante la integral

$$\int_a^b |u'(t)|^p\, dt.$$

En el año 1924 (Ver [177]), N. Wiener introdujo la noción de función de p-variación acotada con $(1 < p < \infty)$, caracterizada mediante la composición de una función acotada no decreciente y una continua que satisface la condición de Hölder con exponente $1/p$ y constante de Hölder ≤ 1 (Ver [38]). Además, esta clase de funciones tienen serie de Fourier convergente.

En el año 1933 (Ver [138]), M. T. Popoviciu, generalizó los resultados de De La Vallée Poussin para órdenes superiores, por medio de las funciones con la k-ésima variación acotada ($k \in \mathbb{N}$). Estas funciones pueden representarse como diferencia de dos funciones k-convexas (Ver [151]). También, la derivada de estas funciones de orden $(k-1)$ es absolutamente continua y la variación puede calcularse mediante la integral

$$\frac{1}{(k-1)!} \int_a^b |u^{(k)}(t)|\, dt.$$

En el año 1937 (Ver [185]), L. C. Young introdujo la noción de función con φ-variación en el sentido Wiener donde φ es una función de Young (es decir, $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ continua, no decreciente, $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$). Estas funciones son caracterizadas mediante la composición de una función acotada no decreciente y una función que tiene módulo de continuidad acotado superiormente por la función inversa φ^{-1} (Ver [39]).

En el año 1953 (Ver [109]), Yu. T. Medvedev generalizó la noción dada por Riesz y el Lema de Riesz a la clase de funciones con φ-variación acotada en el sentido de Riesz, donde φ es una función de Young convexa que satisface la llamada condición ∞_1. Esta clase de funciones son absolutamente continuas, su derivada está en L_φ[1] y, además, la variación de una función u puede calcularse mediante la integral

$$\int_a^b \varphi(|u'(t)|)\, dt.$$

En el año 1972 (Ver [173], [174]), D. Waterman introdujo la noción de función de Λ-variación acotada donde Λ es una Λ-sucesión (es decir, $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente de números positivos, tal que $\lambda_n \downarrow 0$ cuando $n \to \infty$ y la serie $\sum\limits_{n\geq 1} \lambda_n$ es divergente). D. Waterman (1979) en [175] demuestra que las sumas parciales de la serie de Fourier de funciones con variación armónica acotada[2] son uniformemente acotadas y demuestra un teorema análogo al de P. L. Dirichlet para esta clase de funciones. Además demostró que

$$BV[a,b] = \bigcap_{\Lambda} \Lambda BV[a,b] \quad \text{y} \quad R[a,b] = \bigcup_{\Lambda} \Lambda BV[a,b],$$

donde $R[a,b]$ es el espacio de las funciones regulares, $BV[a,b]$ es el espacio de las funciones de variación acotada y $\Lambda BV[a,b]$ el espacio de las funciones de Λ-variación acotada en el sentido de Waterman.

En el año 1975 (Ver [79]), B. Korenblum introdujo una nueva clase de funciones denominadas funciones de κ-variación acotada, la diferencia de ésta con las anteriores es que la distorsión ocurre en el dominio de la función y no en el rango, con este nuevo enfoque se obtiene un resultado similar al obtenido por Jordan sobre la representación por medio de funciones monótonas. Más precisamente, se obtiene el Teorema de Representación de Korenblum; que afirma que una función $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ tiene κ-variación acotada en $[a,b]$ si y sólo si u es la diferencia de dos funciones κ-monótonas (Ver [43], [157]).

En el año 1985 (Ver [158]), M. Schramm introduce la noción de funciones de Φ-variación acotada donde Φ es una Φ-sucesión (es decir, $\Phi = \{\phi_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones convexas tales que para $n \geq 1$, $t \in [0,\infty)$, $\phi_{n+1}(t) \leq \phi_n(t)$, y la serie $\sum\limits_{n\geq 1} \phi_n(t)$ diverge), conocida en la literatura matemática como la variación en el sentido de Schramm. Para algunas $\phi = \{\phi_n\}_{n\geq 1}$ se tienen los siguientes casos particulares:

1. Si $\phi_n(x) = x$, $n \geq 1$ entonces $BV_\phi[a,b] = BV[a,b]$ ($BV[a,b]$ es el espacio de las funciones de variación acotada).

2. Si $\phi_n = \varphi$, entonces $BV_\phi[a,b] = BV_\varphi[a,b]$ ($BV_\varphi[a,b]$ es el espacio de las funciones de φ-variación acotada en el sentido de Wiener).

[1] L_φ denota la clase de Orlicz de las funciones $u \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ tales que $\int_a^b \varphi(|u(t)|)\, dt < \infty$, con $\varphi \in \Phi$.

[2] Si $\Lambda = \{\frac{1}{n}\}_{n\geq 1}$ el espacio $\Lambda BV[a,b]$ se denota por $HBV[a,b]$ y se le denomina espacio de las funciones de variación armónica acotada.

3. Si $\phi_n(x) = \lambda_n x$, $n \geq 1$ (λ_n es una Λ-sucesión de Waterman) entonces $BV_\phi[a,b] = \Lambda BV[a,b]$ ($\Lambda BV[a,b]$ es el espacio de las funciones de Λ-variación acotada en el sentido de Waterman).

Además, se demuestra que

$$BV[a,b] = \bigcap_\phi BV_\phi[a,b] \ \text{ y } \ R[a,b] = \bigcup_\phi BV_\phi[a,b],$$

donde $BV[a,b]$ es el espacio de las funciones de variación acotada y $BV_\phi[a,b]$ el espacio de las funciones de ϕ-variación acotada en el sentido de Schramm.

En el año 1986 (Ver [76]), S. K. Kim y J. Kim combinaron los conceptos de Φ-variación acotada en el sentido de Schramm y κ-variación acotada en el sentido de Korenblum para crear la noción de funciones de $\kappa\phi$-variación acotada en el sentido de Schramm-Korenblum en el intervalo $[a,b]$, donde κ es una función distorsión y Φ es una Φ-función.

En el año 1991 (Ver [117]), N. Merentes introdujo la noción de funciones de $(\varphi,2)$-variación acotada en el sentido de Riesz-De la Vallée Poussin, la cual es una combinación de los conceptos dados por F. Riesz y De la Vallée Poussin; estas clases de funciones se caracteriza como aquellas funciones $u:[a,b]\to\mathbb{R}$, tales que u' es absolutamente continua en $[a,b]$, $u'' \in L_\varphi[a,b]$ y la variación puede calcularse mediante la integral

$$\int_a^b \varphi(|u''(t)|)\,dt.$$

En el año 1992 (Ver [118]), N. Merentes caracterizó la clase $RV_{(p,2)}$ como aquellas funciones, cuya derivada u' es absolutamente continua en $[a,b]$, $u'' \in L_p[a,b]$ y la variación puede calcularse mediante la integral

$$\int_a^b |u''(t)|^p\,dt,$$

por medio de la noción de funciones de $(p,2)$-variación acotada ($1<p<\infty$), la cual puede considerarse como una combinación de las nociones dadas por De La Vallée Poussin y de F. Riesz.

En el año 2012 (Ver [123]), N. Merentes, J. L. Sánchez y S. Rivas generalizaron el concepto de funciones de variación acotada introducido por F. Riesz (Ver [145]) definiendo el espacio de las funciones con (p,k)-variación acotada en el sentido de Riesz-Popoviciu y demuestran entre otras cosas que es un espacio de Banach y obtienen una nueva versión del Lema de Riesz demostrando que este espacio está conformado por las funciones $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ cuya derivada de orden $(k-1)$ es absolutamente continua, la derivada de orden (k) pertenece al espacio L_p y además la variación se calcula mediante la integral:

$$\int_a^b \left(\left|\frac{u^{(k)}(t)}{(k-1)!}\right|\right)^p\,dt.$$

En el año 2012 (Ver [32]), M. Castillo, M. Sanoja, I. Zea, combinaron los conceptos dados por F. Riesz y B. Korenblum e introducen el concepto de función de κ-variación acotada en el sentido de Riesz-Korenblum, donde κ es una función distorsión.

En el año 2013 (Ver [86]), H. Leiva, N. Merentes, J. L. Sánchez y S. Rivas definieron la clase de las funciones que tienen (φ,k)-variación acotada en el sentido de Riesz-Popoviciu, donde φ es una φ-función, comprobando que el espacio generado por esta clase es un espacio de Banach y que se verifica un lema tipo Lema de Riesz para esta clase de la siguiente manera: la derivada de orden $(k-1)$ es absolutamente continua, $\dfrac{u^{(k)}}{(k-1)!} \in L_\varphi$ y, además, la variación se calcula mediante la integral:

$$\int_a^b \varphi\left(\left|\frac{u^{(k)}(t)}{(k-1)!}\right|\right)\, dt.$$

En este año (Ver [31]), M. Castillo, S. Rivas, M. Sanoja y I. Zea introdujeron una nueva clase de funciones de $\kappa\varphi$-variación acotada en el sentido de Riesz-Korenblum, donde κ es una función distorsión y φ una φ-función, el cual es una combinación de los conceptos dados por F. Riesz y B. Korenblum.

Las nociones de funciones de variación acotada comentadas anteriormente se refiere a funciones dependientes de una variable real; es decir las funciones $u : [a, b] \to \mathbb{R}$. La noción de función de variación acotada fue extendida al caso bidimensional, por ejemplo, la dada por Hardy-Vitali entre 1905-1906 (Ver [63] y [168]). Existen al menos siete formas de extender al plano, las cuales son: Vitali, Fréchet, Hardy-Krause, Arzelá, Pierpont, Tonelli, Hahn. C. R. Adams y J. A. Clarkson (Ver en [1] y [42]) demuestran algunas propiedades importantes de las clases de funciones con variación acotada en el plano y las relaciones entre ellas, las cuales han permitido otros trabajos referente a la noción de variación de Hardy-Vitali. En el año 2002, V. V. Chistyakov (Ver en [36]) retomó el estudio de esta clase de funciones demostrando un teorema de representación para la clase de funciones definidas en un rectángulo y con variación acotada en el sentido de Hardy-Vitali, (ver [63] y [168]); además, es posible dotar a esta clase de funciones de una estructura de álgebra de Banach.

1 Espacio de Funciones de Variación Acotada Generalizada en $\mathbb{R}$

El 21 de diciembre de 1807, Joseph Fourier, presentó al Institut de France una memoria titulada "Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides" (Ver [54]). Cuatro miembros, uno más de lo que era habitual, Lagrange, Laplace, Lacroix y Monge, fueron designados para emitir un informe, que nunca se llegó a escribir a pesar de las insistencias de Fourier, que deseaba un juicio sobre su trabajo. A cambio, el Instituto propuso el tema para el premio que se debía otorgar en 1812 "dar la teoría matemática" de las leyes de propagación del calor y comparar los resultados de esta teoría con las experiencias exactas. A finales de 1811, Fourier entregó una nueva memoria como concursante, esta vez con el título "Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides".

La publicación dada por Fourier, de la Teoría Analítica del Calor, fue muy importante para el desarrollo de las matemáticas. La conjetura de Fourier supone que cualquier función puede desarrollarse en serie de senos y cosenos (Serie de Fourier). D. Bernoulli consideró series de este tipo en la resolución del problema de la cuerda vibrante y Euler obtuvo los coeficientes de $sen(kx)$ y $cos(kx)$ en el desarrollo de esta serie, pero fue a partir del trabajo de Fourier cuando la posibilidad de expresar una función mediante una serie trigonométrica que empezó a ser ampliamente discutida. Los inicios del estudio de la convergencia puntual de series de Fourier comenzó en el año 1829 con el primer resultado dado por Peter Gustav Lejeune Dirichlet (Ver [50]) hoy conocido como "Criterio de Dirichlet sobre la convergencia de series de Fourier", que afirma que toda función definida en un intervalo a valores reales, descrita por medio de un número finito de trozos de funciones monótonas, tiene serie de Fourier puntualmente convergente.

En el año 1881 Camille Jordan extendió el criterio de P. L. Dirichlet a las funciones de variación acotada (Ver [73]), demostrando que toda función de variación acotada se puede escribir como diferencia de dos funciones crecientes, en consecuencia, el resultado de Dirichlet es aplicable a este tipo de funciones. La noción de función de variación acotada surgió precisamente en ese trabajo de Jordan; señalando que "Las funciones de oscilación acotada forman una clase bien definida, cuyo estudio podría presentar algún interés" y mostró algunas de sus propiedades. Esta noción de funciones de variación acotada, introducida por Jordan, ejerce un papel importante en muchas investigaciones y ha dado lugar a algunas generalizaciones, a clases de funciones cuyos elementos tengan serie de Fourier puntualmente convergente y en otros casos para obtener resultados de espacios de funciones que se usan en aplicaciones a otras áreas del conocimiento (Para más información ver [121]).

La noción de variación acotada dada por C. Jordan ha sido generalizada de varias maneras, dependiendo de su utilidad en el contexto de algunas teorías. En el presente capítulo se expone en orden cronológico algunas de estas generalizaciones, el cual esta dividido en 13 secciones, dedicados a presentar los espacios de funciones de: Variación acotada, Segunda variación acotada en el sentido de De la Vallée Poussin, p-variación acotada en el sentido de Riesz, p-variación acotada en el sentido de Wiener, Segunda variación acotada en el sentido de De la Vallée Poussin-Wiener, k-variación acotada en el sentido de Popoviciu, φ-variación acotada en el sentido de Wiener, φ-variación acotada en el sentido de Riesz, κ-variación acotada en el sentido de Korenblum, Λ-variación acotada en el sentido de Waterman, Λ_p-variación acotada en el sentido de Waterman-Shiba, Φ-variación acotada en el sentido de Schramm-Korenblum, $\kappa\phi$-variación acotada en el sentido de Schramm-Korenblum, κp-variación acotada en el sentido de Riesz-Korenblum y $\kappa\varphi$-variación acotada en el sentido de Riesz-Korenblum.

En cada una de las secciones se recopilan propiedades y representaciones de estos espacios de funciones; en particular, se demuestran, como contribución al tema, nuevas propiedades del espacio de las funciones de $\kappa\phi$-variación acotada en el sentido de Schramm-Korenblum (Ver [72] y [110]) y nuevas propiedades del espacio de funciones de $(p,2)$-variación acotada en el sentido de De la Vallée Poussin-Wiener (Ver [114]).

1.1 Variación Acotada.

Se denota por $\mathbb{R}^{[a,b]}$ la colección de todas las funciones $u:[a,b]\to\mathbb{R}$.

En el año 1881 C. Jordan (Ver [73]) introduce el concepto de variación acotada de la siguiente manera:

Definición 1.1 Variación Jordan

Sean $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función y una partición $\pi: a=t_1<\cdots<t_n=b$ del intervalo $[a,b]$, se definen

$$\sigma(u)=\sigma_1(u,\pi):=\sum_{j=1}^{n-1}\left|u(t_{j+1})-u(t_j)\right|$$

y

$$V(u)=V(u;[a,b]):=\sup_{\pi}\sigma(u,\pi),$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones π del intervalo $[a,b]$. $V(u;[a,b])$ se denomina variación en el sentido de Jordan (o simplemente variación) de la función u en el intervalo $[a,b]$. Si $V(u;[a,b])<\infty$, se dice que la función u tiene variación acotada o finita en el intervalo $[a,b]$.

La clase de las funciones de variación acotada se denotará por $BV([a,b],\mathbb{R})$ o de una manera más abreviada $BV[a,b]$. Para ilustrar la definición anterior, a continuación, se exhibe un ejemplo de una función de variación acotada.

Ejemplo 1.1 **(Ver (157), pág. 24)**

Sea $u : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ definida por $u(x) = \text{sen}(x)$. La función u es de variación acotada; ya que, si en particular, se considera la partición $\pi = \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ del intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{2} |sen(t_i) - sen(t_{i-1})| \\
&= \left|sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) - sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| + \left|sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right| \\
&= |-2| - |2| = 4
\end{aligned}$$

considerando el supremo sobre el conjunto de todas las particiones de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ se obtiene que $V\left(u, \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]\right) = 4$.

El próximo ejemplo sigue para mostrar un conjunto de funciones que pertenecen al espacio de variación acotada.

Ejemplo 1.2 **(Ver (3), pág. 36)**

Dados números reales positivos a y b se define

$$u_{a,b}(x) := \begin{cases} x^a sen\dfrac{1}{x^b}, & 0 < x \leq 1, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Si $a = b + 1$, entonces $u_{a,b}$ es de variación acotada.

Existen funciones de variación acotada, las cuales no son monótonas en ningún intervalo, como lo demuestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.3 **(Ver (3), pág. 58)**

Sean $(0,1) \cap \mathbb{Q} = \{r_1, r_2, ...\}$ y la función $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(t) := \begin{cases} 2^{-k} & t = r_k, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

La función u no es monótona en ningún intervalo $[a,b] \subseteq [0,1]$. Además, sean $n \in \mathbb{N}$ fijo, $r_1, r_2, ..., r_n$ tal que $r_1 < r_2 < \cdots < r_n$, $S_0 := 0$, $S_1 := r_1$, $S_3 := r_2$, $S_5 := r_3$, ... , $S_{2n-1} := r_n$, $S_{2n} := 1$ y escojamos puntos racionales $S_2 \in (S_1, S_3)$, $S_4 \in (S_3, S_5)$, $S_6 \in (S_5, S_7)$, ... , $S_{2n-2} \in (S_{2n-3}, S_{2n-1})$. Para la partición $\pi_* = \{S_0, S_1, ..., S_{2n}\} \in \pi([0,1])$ se obtiene que

$$V(u, \pi_*, [0,1]) = \sum_{j=1}^{2n} |u(s_j) - u(s_{j-1})| = 2\sum_{j=1}^{2n} 2^{-j} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - 2^{-2n}\right).$$

Considerando n suficientemente grande se concluye que $V(u;[0,1]) = 2$; por lo tanto $u \in BV[0,1]$.

Por otro lado, existen funciones continuas que no son necesariamente de variación acotada; así como lo presenta el próximo ejemplo:

Ejemplo 1.4 **(Ver (3), pág. 61)**

Sea $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera

$$u(x) := \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & 0 < x \leq 1, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Se tiene que la función u es continua en $[0,1]$ y para demostrar que $u \notin BV[0,1]$, se construye una partición $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\}$ tal que

$$\begin{aligned} t_0 &:= 0, \\ t_1 &:= \frac{2}{(2m-1)\pi}, \\ t_2 &:= \frac{2}{(2m-3)\pi}, \\ &\vdots \\ t_{m-2} &:= \frac{2}{5\pi}, \\ t_{m-1} &:= \frac{2}{3\pi}, \\ t_m &:= 1. \end{aligned}$$

Entonces $|u(t_j) - u(t_{j-1})| \geq 2t_{j-1}$ para $j = 2, 3, ..., m-1$. Por lo tanto, la sucesión de sumas parciales $S_m = \sum_{j=1}^{m-1} |u(t_j) - u(t_{j-1})|$ tiende a infinito, lo cual implica que la variación es infinita.

La clase $BV[a,b]$ tiene una estructura de álgebra y de espacio de Banach (Ver [12, 28]) con respecto a la norma

$$\|u\|_1 := |u(a)| + V(u), \; u \in BV[a,b].$$

Una clase de funciones que está relacionada con el espacio de $BV[a,b]$ es el espacio de las funciones Hölder; en particular con el espacio de las funciones Lipschitz, presentadas a continuación:

Definición 1.2 Lipschitz

Sea $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función, se dice que u es Hölder, si existe una constante $L > 0$ tal que

$$|u(x) - u(y)| \leq L|x-y|^{\alpha} \quad (a \leq x < y \leq b).$$

Se denota por $Lip_{\alpha}[a,b]$ la clase de las funciones Hölderianas y para el caso particular en que $\alpha = 1$ se tiene el espacio de las funciones Lipschitzianas en un intervalo $[a,b]$, el cual se denota por $Lip[a,b]$; en la siguiente proposición se presentan algunos resultados para la clase Lipschitz.

Proposición 1.1

La clase $Lip[a,b]$:

1. Es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$
2. Equipado con la norma

$$||u||_{Lip[a,b]} := |u(a)| + L_a^b(u), \quad \text{donde} \quad L_a^b(u) := \sup_{t\neq\bar{t}} \frac{|u(t)-u(\bar{t})|}{t-\bar{t}}, \quad u \in Lip[a,b], \tag{1.1}$$

   es un espacio normado.
3. Es un espacio de Banach con la norma (1.1).
4. Es un álgebra de Banach con la norma (1.1).
5. $C^n[a,b] \subset Lip[a,b]$[a].
6. $Lip[a,b] \subseteq BV[a,b]$.

[a] $C^n[a,b]$ denota el álgebra de las funciones que son n-veces continuamente diferenciable en $[a,b]$.

Por lo antes expuesto, el siguiente ejemplo muestra una función de variación acotada que no es Lipschitz.

Ejemplo 1.5 **(Ver (157), pág. 28)**

Sea $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función definida por $u(x) = \sqrt{x}$. La función u es continua, creciente y por lo tanto de variación acotada en $[0,1]$ pero $u \notin Lip[0,1]$ ya que

$$\left|\frac{u(t)-u(0)}{t-0}\right| = \frac{\sqrt{t}}{t} = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

no es acotada en ningún entorno de cero.

Ahora, se dan algunos resultados de las funciones de variación acotada (Ver VII.1-2 de [131]).

Proposición 1.2

Sea $u \in BV[a,b]$, entonces:

1. u tiene límites laterales.
2. u es acotada.
3. El conjunto de discontinuidades de u es numerable.
4. u posee derivada c.s. en $[a,b]$.
5. u es Riemann integrable.
6. u tiene serie de Fourier convergente.

Otras clases de funciones que están relacionadas con el espacio $BV[a,b]$ es el espacio de las funciones absolutamente continuas en el intervalo $[a,b]$, definida a continuación:

Definición 1.3 Absolutamente Continua

Sea $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función, se dice que u es absolutamente continua en $[a,b]$ si dado $\epsilon>0$, existe $\delta>0$, tal que para cualquier colección finita de intervalos disjuntos dos a dos (a_k,b_k), $k=1,\ldots,n$ contenidos en $[a,b]$, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta \quad \text{implica que} \quad \sum_{k=1}^{n}|u(b_k)-u(a_k)|<\epsilon.$$

El espacio de las funciones absolutamente continuas en el intervalo $[a,b]$ es denotado por $AC([a,b],\mathbb{R})$ o $AC[a,b]$ y en la siguiente proposición se presentan algunos resultados de este espacio.

Proposición 1.3

El espacio $AC[a,b]$:

1. Es un espacio normado, equipado con la norma

$$||u||_{AC[a,b]}:=|u(t_0)|+\int_a^b|u'(t)|\,dt,\quad t_0\in[a,b],\ \ u\in AC[a,b]. \tag{1.2}$$

2. Es un espacio de Banach con la norma (1.2).
3. Es un álgebra de Banach.
4. $AC[a,b]\subseteq C[a,b]$.
5. $Lip[a,b]\subset AC[a,b]$.

En lo que sigue se exponen algunas propiedades de las funciones de variación acotada y algunas relaciones con los espacios $Lip[a,b]$, $AC[a,b]$ y $C^n[a,b]$ (Para detalles de las demostraciones ver [12, 131]).

Proposición 1.4

Dado $u\in BV[a,b]$, se tiene que

1. $V(u)=0 \Leftrightarrow u=c;\ c\in\mathbb{R}$.
2. Si $V(u)<\infty$, entonces u es acotada y $\|u\|_\infty\leq|u(a)|+V(u)$, donde la norma infinito viene definido por $||u||_\infty=\sup\limits_{i\in\mathbb{N}}|u_i|$.
3. Si u es monótona, entonces $V(u)=|u(b)-u(a)|$.
4. Si $[c,d]\subset[a,b]$, entonces $V(u;[c,d])\leq V(u;[a,b])$.
5. Si $t\in[a,b]$, entonces $V(u;[a,b])=V(u;[a,t])+V(u;[t,b])$.

6. $AC[a,b] \subset BV[a,b]$.

   6.1. Como $Lip[a,b] \subset AC[a,b]$ entonces
$$Lip[a,b] \subset BV[a,b].$$

   6.2. Como $C^n[a,b] \subset Lip[a,b]$ entonces
$$C^n[a,b] \subset BV[a,b].$$

Las funciones de variación acotada han sido estudiadas por C. Jordan, dando una caracterización de las funciones de variación acotada relacionándolas con las funciones monótonas (Ver [73]), más precisamente, Jordan demuestra lo siguiente:

Teorema 1.1 (Teorema de Representación de Jordan)

Sea $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, si $u \in BV[a,b]$, entonces u se puede escribir como diferencia de funciones monótonas.

La representación $u = u_1 - u_2$, donde $u_1(t) = V(u;[a,t])$ y $u_2(t) = V(u;[a,t]) - u(t)$ establecida en el Teorema anterior no es única. En algunos casos, es posible calcular la variación de una función. I. P. Natanson (1955) en [131] muestra como calcular la variación de funciones absolutamente continuas. Más precisamente se demuestra la siguiente proposición:

Proposición 1.5

Si u es una función absolutamente continua, entonces
$$V(u;[a,b]) = \int_a^b \left|u'(t)\right| dt.$$

Otra manera de calcular la variación para el caso de las funciones continuas, es empleando la función Indicatriz de Banach dada por S. Banach en 1925 (Ver [20, 131]). Dada una función continua $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, se define la Indicatriz de Banach: $\mathcal{N} : [\text{mín}\, u, \text{máx}\, u] \to [0,\infty)$, como aquella función que asigna a cada z el número de raíces de la ecuación $u(x) = z$, es decir $\mathcal{N}(z)$ es el número de valores $x \in [a,b]$ que verifican la ecuación $u(x) = z$. S Banach (1925) en [20] demuestra el siguiente teorema (también puede verse en VIII-5, Teorema 3 de [131]):

Teorema 1.2 (Teorema de Representación de Banach)

Si $u \in BV[a,b] \cap C[a,b]$, entonces
$$V(u;[a,b]) = \int_{\text{mín}\, u}^{\text{máx}\, u} \mathcal{N}(z)\, dz.$$

H. Federer (1969), en [53] presenta un resultado que caracteriza las funciones de variación acotada como composición de funciones, como se presenta a continuación:

Teorema 1.3 (Teorema de Representación de Federer)

Una función u es de variación acotada si y solo si $u = g \circ m$, donde m es monótona y $g : m([a,b]) \to \mathbb{R}$ es Lipschitz, con constante de lipschitzidad menor o igual que 1.

Este resultado, tiene la misma estructura del resultado expuesto por el polaco W. Sierpiński (1933), en [161], que garantiza lo siguiente:

Teorema 1.4 (Teorema de Representación de Sierpiński)

Toda función regular $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ se puede descomponer de la forma $u = g \circ m$, donde $m : [a,b] \to \mathbb{R}$ es monótona y $g : m([a,b]) \to \mathbb{R}$ es continua.

La noción dada por C. Jordan ha sido generalizada de varias maneras, dependiendo de su utilidad en el contexto de algunas teorías. En las próximas secciones se examinarán algunas de estas generalizaciones.

1.2 Segunda Variación Acotada en el Sentido de De La Vallée Poussin.

En 1908 De La Vallée Poussin introduce la noción de segunda variación de una función $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ (Ver [167]); extendiendo la noción de variación acotada dada por Jordan, de la siguiente manera:

Para simplificar la notación, se hace uso de la siguiente expresión:

Si $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $s, t \in [a,b]$, $s \neq t$; se define la diferencia dividida de orden 1, como

$$u[s,t] = \frac{u(t) - u(s)}{t - s} \quad \text{(es claro que, } u[s,t] = u[t,s]).$$

Definición 1.4 Segunda Variación Acotada

Sean $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función y $\pi : a = t_1 < \cdots < t_n = b$ una partición del intervalo $[a,b]$, con al menos tres puntos, se definen

$$\begin{aligned} \sigma_2(u,\pi) &:= \sum_{j=1}^{n-2} \left| \frac{u(t_{j+2}) - u(t_{j+1})}{t_{j+2} - t_{j+1}} - \frac{u(t_{j+1}) - u(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \right| \\ &= \sum_{j=1}^{n-2} \left| u[t_{j+1}, t_{j+2}] - u[t_j, t_{j+1}] \right| \end{aligned} \tag{1.3}$$

y

$$V_2(u) = V_2(u;[a,b]) := \sup_{\pi} \sigma_2(u,\pi),$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones π del intervalo $[a,b]$. $V_2(u,[a,b])$ es llamado variación en el sentido De la Vallée Poussin de u en $[a,b]$. Si $V_2(u;[a,b]) < \infty$, se dice que la función u tiene segunda variación acotada o finita en el intervalo $[a,b]$.

La clase de las funciones de segunda variación acotada se denota por $BV_2[a,b]$.

Por la definición de diferencia dividida de orden 1, se obtiene que, si $u, v \in \mathbb{R}^{[a,b]}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $s, t \in [a, b]$, entonces $(u + v)[s, t] = u[s, t] + v[s, t]$ y $(\alpha u)[s, t] = \alpha\,(u[s, t])$.
De las relaciones anteriores y de la definición de segunda variación acotada se tiene que si $u, v \in \mathbb{R}^{[a,b]}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $V_2(u + v; [a, b]) \leq V_2(u; [a, b]) + V_2(v; [a, b])$ y $V_2(\alpha u; [a, b]) = |\alpha|\, V_2(u; [a, b])$. Lo que permite afirmar que $BV_2[a, b]$ es un espacio vectorial.

Ejemplo 1.6

Sea $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$u(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma, \quad t \in [a, b].$$

Así,

$$\begin{aligned}
\sigma_2(u, [a, b]) &= \sum_{j=1}^{n-2} \left| \frac{u(t_{j+2}) - u(t_{j+1})}{t_{j+2} - t_{j+1}} - \frac{u(t_{j+1}) - u(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \right| \\
&= \sum_{j=1}^{n-2} \left| \frac{(\alpha t_{j+2}^2 + \beta t_{j+2} + \gamma) - (\alpha t_{j+1}^2 + \beta t_{j+1} + \gamma)}{t_{j+2} - t_{j+1}} - \frac{(\alpha t_{j+1}^2 + \beta t_{j+1} + \gamma) - (\alpha t_j^2 + \beta t_j + \gamma)}{t_{j+1} - t_j} \right| \\
&= \sum_{j=1}^{n-2} |\alpha(t_{j+2} + t_{j+1}) - \alpha(t_{j+1} + t_j)| \\
&= |\alpha| \sum_{j=1}^{n-2} |t_{j+2} - t_j| \\
&= |\alpha|(t_2 - t_1) + 2(t_{n-1} - t_2) + (t_n - t_{n-1})
\end{aligned}$$

si se considera el supremo sobre particiones con $|t_2 - t_1|$ y $|t_n - t_{n-1}|$ suficientemente pequeño resulta que $V_2(u, [a, b]) = 2(b - a)|\alpha|$.

En el Lema 1.2 de [150], A. M. Russell demuestra lo siguiente:

Proposición 1.6

Sea $u : [a, b] \to \mathbb{R}$, si $u \in BV_2[a, b]$, entonces $|u[s, t]|$ es acotado, donde $s, t \in [a, b]$, $s \neq t$.

Es decir, $BV_2[a, b] \subset Lip[a, b]$ y en consecuencia toda función de $BV_2[a, b]$ es continua. Además, $BV_2[a, b] \subset BV[a, b]$.

Como consecuencia del Teorema 1.1 del resultado de A. M. Russell (1970), en [150] se obtiene un teorema de representación tipo Jordan, para las funciones de $BV_2[a, b]$.

Proposición 1.7 (Teorema de Descomposición Tipo Jordan)

Si $u \in BV_2[a, b]$, entonces u es la diferencia de dos funciones convexas[a].

[a] Se dice que una función $u : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función convexa si satisface $u(tx + (1 - t)y) \leq tu(x) + (1 - t)u(y)$ para todo $x, y \in I$ y $t \in [0, 1]$.

Con el resultado de la proposición anterior se puede obtener ejemplos de funciones pertenecientes al espacio $BV_2[a,b]$ como se presenta a continuación:

Ejemplo 1.7

Sea $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función definida por $u(x)=v(x)-w(x)$ donde $v(x)=x^2$ y $w(x)=|x|$. Ya que las funciones v y w son funciones convexas; entonces, haciendo uso de la proposición anterior, como la función u se escribe como diferencia de dos funciones convexas, se tiene que $u\in BV_2[a,b]$.

N Si u es suficientemente suave, por ejemplo, derivable y tiene segunda variación acotada, entonces la derivada de u tiene variación acotada y por el teorema de descomposición de Jordan, la función derivada u', se puede escribir como diferencia de dos funciones monótonas. Al integrar se obtiene la descomposición de u como diferencia de funciones convexas.

Otro resultado que relaciona las funciones que tienen segunda variación acotada con las funciones de variación acotada, fue dado por F. Riesz en el año 1911 (Ver [144]), donde demuestra que una función tiene segunda variación acotada si y solo si es la integral indefinida de una función de variación acotada. Más específicamente, F. Riesz demostró el siguiente Teorema:

Teorema 1.5 (Teorema de Representación de Riesz [144])

Una función $u\in BV_2[a,b]$ si y solo si existe una función $v\in BV[a,b]$ tal que

$$u(t)=u(a)+\int_a^t v(s)ds.$$

N Una generalización del concepto de segunda variación acotada fue estudiada por A. M. Russell (1970) en [150] y F. N. Huggins (1971) en [69]. Ambos autores sustituyen la expresión (1.3) de la definición de segunda variación acotada por la siguiente:

$$\sum_{j=1}^{n-2}\left|\frac{u(t_{j+2})-u(t_{j+1})}{m(t_{j+2})-m(t_{j+1})}-\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{m(t_{j+1})-m(t_j)}\right|,$$

donde $m:[a,b]\to\mathbb{R}$, es una función estrictamente creciente, es decir, consideran el concepto de segunda variación respecto a la función m.

El funcional $||\cdot||_{BV_2[a,b]}:BV_2[a,b]\to\mathbb{R}$ definido por:

$$||u||_{BV_2[a,b]}:=|u(a)|+|u'_+(a)|+V_2(u;[a,b]),$$

es una norma. Como consecuencia de esta definición se obtiene el siguiente teorema (Para detalles de la demostración ver [148]).

Teorema 1.6

$\left(BV_2[a,b],||\cdot||_{BV_2[a,b]}\right)$ es un álgebra de Banach.

1.3 p-Variación Acotada en el Sentido de Riesz.

Una de las generalizaciones del concepto de variación acotada, fue presentada por Frigyes Riesz (1910) en [143], quien introduce la noción de función de p-variación obteniendo una caracterización, hoy conocido como el Lema de Riesz, donde demuestra que una función tiene p-variación acotada en el sentido de Riesz, si es absolutamente continua y su derivada está en L_p. Además, da una relación que permite calcular la p-variación, a través de una integral. A continuación se presenta el concepto introducido por Riesz y algunos resultados de las funciones con este tipo de variación finita.

Definición 1.5 p-variación de Riesz

Sean $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función, $p>1$ y $\pi: a=t_1<\cdots<t_n=b$ una partición del intervalo $[a,b]$. Se define

$$\sigma_p^R(u,\pi) := \sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{|u(t_{j+1})-u(t_j)|}{|t_{j+1}-t_j|}\right)^p |t_{j+1}-t_j|$$

y

$$V_p^R(u) = V_p^R(u;[a,b]) := \sup_{\pi}\sigma_p^R(u,\pi),$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones π del intervalo $[a,b]$. El número $V_p^R(u;[a,b])$ se denomina variación en el sentido de Riesz de la función u en el intervalo $[a,b]$. Si $V_p^R(u;[a,b])<\infty$, se dice que la función u tiene p-variación acotada o finita en el sentido de Riesz, en el intervalo $[a,b]$.

La clase de las funciones con p-variación acotada se denota por $RV_p[a,b]$.

N Nótese que cuando $p=1$ se tiene que $RV_p[a,b]=BV[a,b]$, por esta razón se considera en general que $p>1$.

El siguiente teorema garantiza que las funciones Lipschitz tienen p-variación acotada y estas a su vez tienen variación acotada.

Teorema 1.7 (Ver [146])

Sea $p>1$, entonces

1. Si $u\in Lip[a,b]$ entonces $V_p^R(u;[a,b])\le K^p(b-a)$, donde K es la constante de lipschitzidad asociada a u.
2. Si $u\in RV_p[a,b]$, entonces
   a. $V(u;[a,b])\le b-a+V_p^R(u;[a,b])$.
   b. $V(u;[a,b])\le (b-a)^{1-1/p}\left(V_p^R(u;[a,b])\right)^{1/p}$.
3. $Lip[a,b]\subset RV_p[a,b]\subset AC[a,b]\subset BV[a,b]$.

Dicho lo anterior, se da un ejemplo de una función que no pertenece a la clase de las funciones de p-variación acotada en el sentido de Riesz.

Ejemplo 1.8 **(Ver (3), pág. 164)**

Se construirá una función $u \in \left(\bigcap_{0<\alpha<1} Lip_\alpha[0,1]\right) \backslash BV[0,1]$ y para este fin se define la constante γ y la sucesión $\{s_n\}_n$ en $[0,1]$ por

$$\gamma := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\log^2(k+1)}, \qquad s_n := \frac{1}{\gamma}\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k\log^2(k+1)}$$

para $n \geq 1$ y $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$u(x) := \begin{cases} 0 & \text{para } x = 0, \\ \dfrac{(-1)^n}{n} & \text{para } x = s_n, \\ \text{lineal} & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Consideremos la partición $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\}$ tal que

$$t_0 := 0,\ \ t_1 := \frac{2}{(2m-1)\pi},\ \ t_2 := \frac{2}{(2m-3)\pi}, ..., t_{m-2} := \frac{2}{5\pi},\ \ t_{m-1} := \frac{2}{3\pi},\ \ t_m := 1.$$

Así

$$V(u, P; [0,1]) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty \ \text{ cuando } \ n \to \infty$$

es decir, $u \notin BV[0,1]$. Por el Teorema 1.7 $RV_p[0,1] \subset BV[0,1]$, por lo que la función u no pertenece al espacio $RV_p[0,1]$ para cualquier $p \geq 1$. Entonces u pertenece al espacio de Hölder $Lip_\alpha[0,1]$ y no pertenece al espacio $RV_p[0,1]$.

En la siguiente proposición se garantiza que el espacio $RV_p[a,b]$, tiene una estructura de álgebra.

Proposición 1.8 (Ver [146])

Sean $p > 1$, $u, v \in \mathbb{R}^{[a,b]}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

1. $\left(V_p^R(u+v)\right)^{1/p} \leq \left(V_p^R(u)\right)^{1/p} + \left(V_p^R(v)\right)^{1/p}$.
2. $V_p^R(\alpha u) = |\alpha|^p\, V_p^R(u)$.
3. $\left(V_p^R(uv)\right)^{1/p} \leq \|v\|_\infty \left(V_p^R(u)\right)^{1/p} + \|u\|_\infty \left(V_p^R(v)\right)^{1/p}$.
4. $RV_p[a,b]$ es un álgebra.

De las relaciones 1. y 2. de la Proposición 1.8, se deduce que, el espacio $RV_p[a,b]$ tiene una estructura de espacio normado (Ver [12]), con la norma:

$$\|u\|_p^R := |u(a)| + \left(V_p^R(u;[a,b])\right)^{1/p}, \qquad u \in RV_p[a,b].$$

El siguiente lema resume algunos resultados relacionadas con la convergencia en la norma.

Lema 1.1
Sean $p>1$ y $u:[a,b]\to\mathbb{R}$, así

1. Si $\|u\|_p^R<\varepsilon$ entonces $\|u\|_\infty<\left((b-a)^{1-1/p}+1\right)\varepsilon$.
2. Si $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en la norma $\|\cdot\|_p^R$ entonces también lo es con la norma $\|\cdot\|_\infty$.
3. Si $\{u_n\}_{n\geq 1}\xrightarrow{\|\cdot\|_p^R}u$, entonces $\{u_n\}_{n\geq 1}\xrightarrow{\|\cdot\|_\infty}u$.

Como consecuencia de este lema se obtiene la siguiente proposición cuya demostración en detalle se puede revisar en el resultado de L. Avila (1994) en [12].

Proposición 1.9

El espacio $RV_p[a,b]$ es un espacio de Banach.

En 1987, los polacos L. Maligranda y W. Orlicz (Ver [91]) dan condiciones para que un espacio de Banach de funciones acotadas sea un álgebra de Banach. El enunciado de este resultado se expone a continuación:

Lema 1.2 (Ver [91])
Sea $(\mathbb{X},\|\cdot\|)$ un espacio de Banach de funciones acotadas $u\in\mathbb{R}^{[a,b]}$, tales que

$$\|uv\|\leq\|u\|_\infty\|v\|+\|u\|\,\|v\|_\infty,\ u,v\in\mathbb{X}.$$

Entonces $\mathbb{X}$ es un álgebra de Banach con la norma $\|\cdot\|_\infty+\|\cdot\|$. Si además $\|u_n\|_\infty\to 0$, cuando $\|u_n\|\to 0$, las normas $\|.\|$ y $\|\cdot\|_\infty+\|\cdot\|$ son equivalentes, más aún, si existe $c>0$, tal que $\|u\|_\infty\leq c\|u\|$, $u\in\mathbb{X}$, entonces $(\mathbb{X},2c\|\cdot\|)$ es también un álgebra de Banach.

Haciendo uso del lema anterior se puede demostrar la siguiente proposición:

Proposición 1.10

Sea $p>1$, entonces el espacio $\left(RV_p[a,b],\|\cdot\|_p^R\right)$ es un álgebra de Banach.

F. Riesz (1910) en [143], presenta una caracterización de las funciones que tienen p-variación acotada, el cual se aplica para demostrar que el dual de los espacios $L_p[a,b]$ son $L_q[a,b]$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ $(1\geq p,q<\infty)$, demostrando:

Lema 1.3 (Lema de Riesz [143])
Sea $p > 1$, entonces $u \in RV_p[a,b]$ si y solo si $u \in AC[a,b]$ y $u' \in L_p[a,b]$ y además

$$V_p^R(u;[a,b]) = \int_a^b |u'(t)|^p \, dt.$$

El lema anterior presenta una caracterización de las funciones de p-variación acotada y da una manera de calcular la p-variación de una función, como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.9 (Ver (59), pág. 12)

Sea u la función gaviota definida por

$$u(t) = \text{mín}\{\sqrt{t}, 1\}$$

entonces

$$\begin{aligned} V_p^R(u;[a,b]) &= \int_0^1 \left|(\sqrt{t})'\right|^p \, dt \\ &= 2^{-p} \int_0^1 \left|(t)^{-\frac{1}{2}}\right|^p \, dt \\ &= \frac{2^{-p+1} t^{\frac{2-p}{2}}}{2-p} \Big|_0^1 \\ &= \frac{2^{-p+1}}{2-p} \end{aligned}$$

para $1 < p < 2$, entonces $u \in RV_p[0,1]$.

Además, el resultado del Lema de Riesz permite reescribir la norma $\|\cdot\|_p^R$, como sigue

$$\|u\|_p^R := |u(a)| + \left(\int_a^b |u'(t)|^p \, dt\right)^{1/p}, \quad u \in RV_p[a,b].$$

Una demostración detallada del lema de Riesz puede verse en el resultado de S. Rivas (1991) en [145]. Por otra parte, como $L_p[a,b] \subset L_q[a,b]$, para $p > q > 1$, del lema de Riesz se tiene el siguiente corolario:

Corolario 1.1
Sea $p > q > 1$, entonces

$$RV_p[a,b] \subset RV_q[a,b] \subset AC[a,b].$$

Dicho lo anterior, se presenta un ejemplo que demuestra que la inclusión $RV_p[a,b] \subset RV_q[a,b]$, $p > q > 1$ es estricta.

Ejemplo 1.10

Sean p, q, α números reales positivos tales que $p \geq \frac{1}{\alpha} > q > 1$ y consideremos la función $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(t) = \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad t \in [0,1].$$

Luego

$$u(t) = \int_0^t u'(s)\,ds = \int_0^t \frac{ds}{s^\alpha}$$

por lo tanto $u \in AC[0,1]$. Por otra parte

$$\int_0^t |u'(s)|^q\,ds = \int_0^t \frac{ds}{s^{\alpha q}} < \infty \quad (\alpha q < 1)$$

así $u \in RV_q[0,1]$. Además

$$\int_0^t |u'(s)|^p\,ds = \int_0^t \frac{ds}{s^{\alpha p}}$$

y esta integral diverge porque $\alpha p \geq 1$, entonces $u \notin RV_p[0,1]$.

1.4 p-Variación Acotada en el Sentido de Wiener.

En lo que sigue, se presenta otra generalización de la noción de variación, la cual fue introducida por Norbert Wiener (1924), en [177], conocida como variación cuadrática de una función o 2-variación acotada. Como en el caso clásico de variación, esta noción de variación tiene diversas aplicaciones en distintas ramas de la matemática pura y aplicada. La variación cuadrática es utilizada frecuentemente en el análisis de procesos estocásticos, tales como el movimiento browniano y martingalas; por lo que, desempeña un papel significativo en el cálculo estocástico, en el proceso de difusión e inclusive en la teoría del potencial.

N. Wiener introduce la noción de funciones 2-variación acotada en un intervalo $[a,b]$ como sigue a continuación:

Definición 1.6

Sean $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $\pi : a = t_1 < \cdots < t_n = b$ una partición del intervalo $[a,b]$. Se define

$$V_2^W(u) = V_2^W(u;[a,b]) := \sup_\pi \sum_{i=1}^n |u(t_i) - u(t_{i-1})|^2,$$

donde el supremo es considerado sobre todas las particiones π de $[a,b]$. Si $V_2^W(u) < \infty$ se dice que la función u es de 2-variación acotada (o segunda variación acotada en el sentido de Wiener) en el intervalo $[a,b]$.

Posteriormente, esta definición fue extendida a valores de $1 < p < \infty$ de la siguiente manera:

Definición 1.7 ***p*-Variación Acotada en el sentido de Wiener**

Sean $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función y $\pi : a = t_1 < \cdots < t_n = b$ una partición del intervalo $[a,b]$. Se define

$$\sigma_p^W(u,\pi) := \sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})|^p$$

y

$$V_p^W(u) = V_p^W(u;[a,b]) := \sup_{\pi} \sigma_p^W(u,\pi),$$

donde el supremo es considerado sobre todas las particiones π del intervalo $[a,b]$. $V_p^W(u)$ se le denomina p-variación en el sentido de Wiener ($1 < p < \infty$), de la función u en el intervalo $[a,b]$. Si $V_p^W(u) < \infty$, se dice que u tiene p-variación acotada o finita en el intervalo $[a,b]$.

La clase de funciones con p-variación acotada en el sentido de Wiener es denotado por $BV_p[a,b]$. Este conjunto es no vacío, pues contiene a las funciones constantes; además, en el próximo ejemplo se muestra otra función que también pertenece a este espacio.

Ejemplo 1.11 **(Ver (3), pág. 85)**

Sea $u : [0,2] \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{si } x = 1, \\ 2 & \text{si } 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Si se consideran las particiones $\pi_1 := \{0,2\}$ y $\pi_2 := \{0,1,2\} \supset \pi_1$, con un cálculo, se tiene que

$$\sigma_p^W(u,\pi_1;[0,2]) = 2^p$$

y

$$\sigma_p^W(u,\pi_2;[0,2]) = 2,$$

lo cual demuestra que, en el caso $p > 1$, $\pi_1 \subseteq \pi_2$ no implica que $V_p^W(u,\pi_1;[a,b]) \le V_p^W(u,\pi_2;[a,b])$.

Además, $BV_p[a,b]$ con las operaciones usuales de funciones, tiene estructura de álgebra, que resulta ser de Banach al dotarla con la norma:

$$||u||_p := |u(a)| + \left(V_p^W(u)\right)^{\frac{1}{p}}, \quad u \in BV_p[a,b].$$

En la siguiente proposición se enumeran algunos resultados de las funciones de p-variación acotada en el sentido de Wiener.

Proposición 1.11

Sea $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, entonces

1. $V_p^W(u) = 0$ si y solo si u es constante.
2. Toda función de p-variación acotada en $[a,b]$ es acotada en $[a,b]$.
3. Si u es de p-variación acotada en $[a,b]$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $V_p^W(u+c) = V_p^W(u)$.
4. Si u es de p-variación acotada en $[a,b]$, entonces la función definida por $V(x) := V_p^W(u;[a,x])$ con, $a < x \leq b$ y $V(a) = 0$, es creciente.
5. Si $p, q \in \mathbb{R}$ tales que $p < q$, entonces $V_p^W[a,b] \leq V_q^W[a,b]$.
6. $Lip_{\frac{1}{p}}[a,b] \subseteq V_p^W[a,b]$.

En los siguientes dos Teoremas se demuestra que la clase de funciones que tienen p-variación acotada en el sentido de Wiener en $[a,b]$ es un espacio vectorial y un álgebra (Para detalles de la demostración ver [12]).

Teorema 1.8

Sea $1 < p < \infty$, entonces $BV_p[a,b]$ es un espacio vectorial.

Teorema 1.9

Sea $1 < p < \infty$, entonces $BV_p[a,b]$ es un álgebra.

1.5 Segunda Variación Acotada en el Sentido de De La Vallée Poussin-Wiener.

En lo que sigue, se define el espacio de funciones de de $(p,2)$-variación acotada en el sentido de De La Vallée Poussin-Wiener (Ver [3]) y como contribución al tema (Ver [114]), se presenta, una proposición que recopila algunas de las propiedades de esta variación y por último se define la norma para el espacio de las funciones que poseen este tipo de variación.

Definición 1.8 (Ver [3])

Sean $1 < p < \infty$, $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ una partición del intervalo $[a,b]$, con al menos tres puntos y $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Se definen

$$\sigma_{(p,2)}^W(u,\pi) = \sum_{j=1}^{n-1} \left| \frac{u(t_{j+1}) - u(t_j)}{t_{j+1} - t_j} - \frac{u(t_j) - u(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \right|^p$$

y

$$V_{(p,2)}^W(u) = V_{(p,2)}^W(u;[a,b]) := \sup_{\pi} \sigma_{(p,2)}^W(u,\pi),$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones π de $[a,b]$. $V_{(p,2)}^W(u)$ se denomina la segunda variación en el sentido de De La Vallée Poussin-Wiener (o $(p,2)$-variación en el sentido de Wiener) de u en $[a,b]$. En el caso en que $V_{(p,2)}^W(u) < \infty$, se dice que u tiene $(p,2)$-variación acotada en $[a,b]$ y esta familia de funciones se denota por $BV_{(p,2)}^W[a,b]$.

Proposición 1.12

Sea $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función con $a,b > 0$ y consideremos $1 < p < \infty$. Entonces

(1) $V^W_{(p,2)}(u,[a,b]) = 0$ si y solo si u es una función lineal.

(2) Si $V^W_{(p,2)}(u,[a,b]) < \infty$ entonces u es acotada en $[a,b]$.

(3) $V^W_{(p,2)}(\cdot,[a,b])$ es convexa.

Demostración:

(1) Supongamos que u es una función lineal. Sea $u(t) = \alpha t + \beta$ para todo $t \in [a,b]$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces por la Definición 1.8, $V^W_{(p,2)}(u,[a,b]) = 0$.

Ahora bien, si $V^W_{(p,2)}(u,[a,b]) = 0$ entonces por la Definición 1.8, se tiene

$$0 = V^W_{(p,2)}(u,[a,b]) = \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-1} \left| \frac{u(t_{j+1}) - u(t_j)}{t_{j+1} - t_j} - \frac{u(t_j) - u(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \right|^p$$

por lo tanto

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left| \frac{u(t_{j+1}) - u(t_j)}{t_{j+1} - t_j} - \frac{u(t_j) - u(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \right|^p = 0.$$

Ya que la función $t \to t^p$ se anula solo en cero

$$\frac{u(t_{j+1}) - u(t_j)}{t_{j+1} - t_j} = \frac{u(t_j) - u(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}}, \quad \text{para todo } \; j = 1,2,\dots,n-1.$$

En particular, supongamos que la partición $\pi : a \le t \le b$, entonces

$$\frac{u(b) - u(t)}{b - t} = \frac{u(t) - u(a)}{t - a}$$

así

$$(t-a)[u(b) - u(t)] = (b-t)[u(t) - u(a)]$$

reagrupando

$$u(t) = t \left[\frac{u(a) - u(b)}{a - b} \right] + au(b) - bu(a)$$

considerando $\alpha = \left[\frac{u(a) - u(b)}{a - b} \right]$ y $\beta = au(b) - bu(a)$ se tiene que

$$u(t) = t\alpha + \beta.$$

Así, u es igual a una función lineal.

(2) Supongamos que $u \in BV^W_{(p,2)}[a,b]$ y u no es acotada, entonces existe una sucesión $\{t_j\}_{j\ge1}$, $t_j \in [a,b]$, $j \ge 1$ tal que $|u(t_j)| \to \infty$ cuando $j \to \infty$. Así, se tiene

$$\left| \frac{u(t_{j+1}) - u(t_j)}{t_{j+1} - t_j} - \frac{u(t_j) - u(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \right|^p \le V^W_{(p,2)}(u,[a,b]), \qquad j \ge 1,$$

y

$$\lim_{j\to\infty}\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^p \le V^W_{(p,2)}(u,[a,b]), \qquad j\ge 1.$$

En particular, para $\pi : a \le t \le t_j \le \ldots \le b$ se tiene que

$$\left|\frac{u(t_j)-u(t)}{t_j-t}-\frac{u(t)-u(a)}{t-a}\right|^p \le V^W_{(p,2)}(u,[a,t_j]) \le V^W_{(p,2)}(u,[a,b]).$$

En consecuencia, $V^W_{(p,2)}(u,[a,b])=\infty$, porque

$$\left|\frac{u(t_j)-u(t)}{t_j-t}-\frac{u(t)-u(a)}{t-a}\right|^p \to \infty,$$

cuando $j\to\infty$ y esto es una contradicción. Por lo tanto u es acotada.

(3) Sean $u,v:[a,b]\to\mathbb{R}$ dos funciones, $\alpha,\beta\in[0,1]$ tal que $\alpha+\beta=1$ y $\pi: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ una partición de $[a,b]$. Ya que t^p es convexa y no decreciente se tiene que

$$\begin{aligned}
&\alpha V^W_{(p,2)}(u)+\beta V^W_{(p,2)}(v)\\
&= \alpha\sup_\pi\sum_{j=1}^{n-1}\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^p+\beta\sup_\pi\sum_{j=1}^{n-1}\left|\frac{v(t_{j+1})-v(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{v(t_j)-v(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^p\\
&\ge \sup_\pi\sum_{j=1}^{n-1}\left|\alpha\left[\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right]+\beta\left[\frac{v(t_{j+1})-v(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{v(t_j)-v(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right]\right|^p\\
&= \sup_\pi\sum_{j=1}^{n-1}\left|\frac{(\alpha u+\beta v)(t_{j+1})-(\alpha u+\beta v)(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{(\alpha u+\beta v)(t_j)-(\alpha u+\beta v)(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^p\\
&= V^W_{(p,2)}(\alpha u+\beta v).
\end{aligned}$$

Entonces, $V^W_{(p,2)}(\cdot)$ es convexa.

□

Definición 1.9 Norma en $BV^W_{(p,2)}[a,b]$

Sean $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función y $1<p<\infty$. Se define el funcional $||\cdot||^W_{(p,2)} : BV^W_{(p,2)}[a,b]\to\mathbb{R}$ por:

$$||u||^W_{(p,2)} := |u(a)|+|u'_+(a)|+V^W_{(p,2)}(u;[a,b])^{\frac{1}{p}}. \tag{1.4}$$

En el resultado de J. Appell, J. Banas, N. Merentes (2015) en [3], los autores demuestran que el espacio lineal $BV^W_{(p,2)}[a,b]$ con la norma (1.4) es un espacio de Banach y además que $BV^W_{(p,2)}[a,b]\subset BV^W_p[a,b]$.

1.6 k-Variación Acotada en el Sentido de Popoviciu.

El espacio de funciones de k-variación acotada fue introducido en 1930 por T. Popoviciu (Ver [138]), generalizando la noción de segunda variación acotada dada por De la Vallée Poussin. Antes de presentar algunos resultados relacionados con este nuevo espacio, se considera la definición de k-diferencia dividida.

Definición 1.10 (Ver [29, 70])

Si $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ y $t_1,\ldots,t_{k+1}$ son puntos distintos de $[a,b]$, se definen las diferencias divididas de orden $0,1$ y k, respectivamente, como:

1. $u[t_1]:=u(t_1)$.
2. $u[t_1,t_2]:=\frac{u(t_2)-u(t_1)}{t_2-t_1}$, $t_2\neq t_1$.
3. $u[t_1,\ldots,t_k,t_{k+1}]:=\dfrac{u[t_2,\ldots,t_{k+1}]-u[t_1,\ldots,t_k]}{t_{k+1}-t_1}$, $t_{k+1}\neq t_1$.

Algunas propiedades de las diferencias divididas se resumen en la siguiente proposición:

Proposición 1.13 (Ver [29, 70])

Sean $k\in\mathbb{N}$, $t_1,\ldots,t_{k+1}$ puntos distintos del intervalo $[a,b]$, $u,v:[a,b]\to\mathbb{R}$ y $\alpha\in\mathbb{R}$, entonces:

1. $u[t_1,\ldots,t_{k+1}]=\displaystyle\sum_{j=1}^{k+1}\frac{u(t_j)}{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k+1}(t_j-t_i)}$.
2. El valor de $u[t_1,\ldots,t_{k+1}]$ es independiente del orden en que se consideren los puntos $t_1,\ldots,t_{k+1}$.
3. $(u+v)[t_1,\ldots,t_{k+1}]=u[t_1,\ldots,t_{k+1}]+v[t_1,\ldots,t_{k+1}]$.
4. $(\alpha u)[t_1,\ldots,t_{k+1}]=\alpha\, u[t_1,\ldots,t_{k+1}]$.
5. Si $u(t)=a_0+a_1t+\ldots+a_kt^k$, entonces
$$u[t_1,\ldots,t_{n+1}]=\begin{cases} a_k, & n=k,\\ 0, & n>k.\end{cases}$$
6. Si $u\in C^k[a,b]$, entonces:
$$u[t_1,\ldots,t_{k+1}]=\int_0^1\int_0^{x_1}\ldots\int_0^{x_k}u^{(k)}\left(x_k(t_{k+1}-t_k)+\ldots+x_1(t_2-t_1)+t_1\right)dx_k\ldots dx_1.$$
7. Si $u\in C^k[a,b]$, entonces existe ξ en la cápsula convexa[a] de $\{t_1,\,t_2,\,\ldots,t_{k+1}\}$, tal que:
$$u[t_1,\ldots,t_{k+1}]=\frac{u^{(k)}(\xi)}{k!}. \tag{1.5}$$

[a] La cápsula convexa de un conjunto de puntos $\{t_1,\,t_2,\ldots,t_{k+1}\}$ es la intersección de todos los conjuntos convexos que contiene a los $k+1$-puntos

N Si se considera el límite cuando $t_1,\ldots,t_{k+1} \to t$ en la ecuación (1.5), nos permite definir la diferencia dividida de $k+1$ puntos iguales. De forma más precisa, si $u \in C^{(k)}[a,b]$, entonces

$$u[\underbrace{t,\ldots,t}_{(k-1)-veces}] = \frac{u^{(k)}(t)}{k!}, \; t \in [a,b].$$

Por otra parte, dada $u:[a,b] \to \mathbb{R}$

1. Si u es derivable en $t_1 \in [a,b]$, entonces

$$u'[t_1] = \lim_{h\to 0} u[t_1, t_1+h] = u[t_1,t_1].$$

2. Si u es derivable en $t_1, t_2 \in [a,b]$, con $t_1 \neq t_2$, entonces

$$\begin{aligned} u'[t_1,t_2] &= \frac{u'[t_2]-u'[t_1]}{t_2-t_1} = \frac{u[t_2,t_2]-u[t_1,t_1]}{t_2-t_1} = \frac{u[t_2,t_2]-u[t_1,t_2]}{t_2-t_1} + \frac{u[t_1,t_2]-u[t_1,t_1]}{t_2-t_1} \\ &= u[t_1,t_2,t_2] + u[t_1,t_1,t_2]. \end{aligned}$$

En general, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.14 (Ver [151])

Sea $u:[a,b] \to \mathbb{R}$. Si u es derivable en $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [a,b]$, entonces

$$u'[t_1,t_2,\ldots,t_n] = u[t_1,t_1,t_2,\ldots,t_n] + \ldots + u[t_1,t_2,\ldots,t_{k-1},t_k,\ldots,t_n].$$

Haciendo uso de la definición de diferencia dividida, se presenta la noción de k-variación acotada, dada por T. Popoviciu (1930) en [138] y estudiada en detalle por A. M. Russell (1973) en [151].

Definición 1.11 k-Variación Acotada

Sean $k \geq 1$ un entero, $\pi : a = t_1 < \cdots < t_n = b$ una partición del intervalo $[a,b]$, con al menos $k+1$ puntos y $u:[a,b] \to \mathbb{R}$, se definen

$$\sigma_k(u,\pi) := \sum_{j=1}^{n-k} \left| u[t_{j+1},\ldots,t_{j+k}] - u[t_j,\ldots,t_{j+k-1}] \right| = \sum_{j=1}^{n-k} (t_{j+k}-t_j) \left| u[t_j,\ldots,t_{j+k}] \right|$$

y

$$V_k(u) = V_k(u;[a,b]) := \sup_{\pi} \sigma_k(u,\pi)$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones π del intervalo $[a,b]$. $V_k(u)$ se denomina k-variación en el sentido de Popoviciu de u en [a,b]. Si $V_k(u;[a,b]) < \infty$ se dice que la función u tiene k-variación acotada o finita en el intervalo $[a,b]$.

La clase de tales funciones se denota por $BV_k[a,b]$. Debido a las propiedades de las diferencias divididas (Ver Proposición 1.13) se tiene que:

Proposición 1.15

$BV_k[a,b]$ es un espacio vectorial, para cualquier entero $k \geq 1$.

Además, de la definición de k-variación y de las propiedades de las diferencias divididas (Proposición 1.13) se desprende la siguiente proposición, que relaciona la k-variación de una función en un intervalo con la k-variación en subintervalos (Para detalles de la demostración ver [146]).

Proposición 1.16 (Ver [151])

Sean $k \geq 1$ un entero y $u \in BV_k[a,b]$, entonces para cada número $t \in (a,b)$, se tiene que $u \in BV_k[a,t] \cap BV_k[t,b]$ y

$$V_k(u;[a,b]) \geq V_k(u;[a,t]) + V_k(u;[t,b]).$$

N A. M. Russell (1973), en [151], demuestra que la igualdad de la Proposición anterior es cierta si existe la Riemann $*$-derivada k-ésima de u definida por

$$\lim_{h_k \to 0} \lim_{h_{k-1} \to 0} \cdots \lim_{h_1 \to 0} u[t, x+h_1, \ldots, x+h_k].$$

El siguiente Teorema presenta un resumen de algunas de las propiedades de la clase de funciones de k-variación acotada.

Teorema 1.10 (Ver [151])

Sea k un entero positivo. Entonces

1. Si $V_k(u,[a,b]) < \infty$, entonces $u[t_1,\ldots,t_k]$ es acotada, donde $t_1,\ldots,t_k \in [a,b]$.
2. $BV_{k+1}[a,b] \subset BV_k[a,b]$.
3. Si $u \in BV_k[a,b]$, entonces

$$\begin{cases} \text{existe}\, u'\, c.s\, en\, [a,b] & k=1,\\ \text{si existe}\, u'\, en\, [a,b], \text{se tiene que}\, u' \in BV[a,b] & k=2,\\ \text{existe}\, u^{(r)},\ r=1,\ldots,k-2\ y\ u^{(r)} \in BV_{k-r}[a,b]\ \text{y existe}\, u^{(k-1)}\ c.s.\ en\, [a,b] & k \geq 3. \end{cases}$$

Además, A. M. Russell (1976), en [152], demuestra que $BV_k[a,b]$, $k \in \mathbb{N}$, es un espacio de Banach con la norma:

$$\|u\|_k := |u(a)| + \left|u'_+(a)\right| + \cdots + \left|u_+^{(k-1)}(a)\right| + V_k(u), \quad u \in BV_k[a,b].$$

A. M. Russell (1973), en [151], extiende el teorema de despomposición de Jordan. Para ello, generaliza la definición usual de convexidad en términos de la diferencia dividida como sigue:

Definición 1.12 k**-Convexa**

Sea $k \geq 0$ un entero. Una función $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ es k-convexa si $u[t_1,\ldots,t_{k+1}] \geq 0$, para cualesquiera $k+1$ puntos distintos, $t_1,\ldots,t_{k+1} \in [a,b]$.

N La Definición anterior coincide con algunos conceptos conocidos al considerar valores concretos para k. Así, cuando

1. $k = 0$, este concepto indica que $u(t) \geq 0$, $t \in [a,b]$.
2. $k = 1$, se tiene la definición de función creciente.
3. $k = 2$, se obtiene la clásica definición de función convexa.

A. M. Russell (Ver [151]) generaliza el Teorema de Descomposición de Jordan con el siguiente teorema:

Teorema 1.11 (Generalización del Teorema de Descomposición de Jordan)

Sean $k \geq 1$ un entero y $u \in BV_k[a,b]$, entonces u se puede descomponer como diferencia de dos funciones k-convexas.

En virtud de la Proposición 1.5 se puede calcular la variación de Jordan de una función $u \in AC[a,b]$ mediante la integral

$$V_1(u;[a,b]) = \int_a^b \left|u'(t)\right| dt.$$

Este resultado es generalizado por A. M. Russell para funciones de k-variación acotada. De manera más precisa, se tiene:

Teorema 1.12 (Ver [153])

Sean $k \geq 1$ un número entero y $u \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ tal que $u^{(k-1)}$ es absolutamente continua, entonces

$$V_k(u;[a,t]) = \frac{1}{(k-1)!}\int_a^t \left|u^{(k)}(s)\right| ds, \quad a \leq s \leq b.$$

A continuación se presentan tres lemas que establecen conexiones entre las funciones que pertenecen al espacio $BV_2[a,b]$ y $BV_k[a,b]$ con las funciones que pertenecen al espacio $Lip[a,b]$ (Para detalles de las demostraciones ver [150]).

Lema 1.4 (Ver [150])

Si $u \in BV_2[a,b]$ entonces

$$L_a^b(u) \leq V_2(u,[a,b]) + |u'_+(a)|.$$

Lema 1.5
Si $u \in BV_k[a,b]$, $k \geq 3$, $k \in \mathbb{N}$, entonces $u \in BV_{k-1}[a,b]$ y

$$V_{k-1}(u) \leq k(b-a)\left(V_k(u) + |u_+^{(k)}(a)|\right).$$

Lema 1.6
Si $u \in BV_k[a,b]$, $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$, entonces existe una constante positiva $r(k)$ tal que

$$L_a^b(u) + |u(a)| \leq r(k)||u||_k.$$

1.7 φ-Variación Acotada en el Sentido de Wiener.

Se inicia esta sección presentando el concepto de φ-función también conocidas como $\mathcal{N}$-función o función de Young. El término de $\mathcal{N}$-función es frecuentemente utilizado en libros sobre espacios de Orlicz (Ver [82, 84, 141]). La denominación de función de Young es debido a L. C. Young, quien fue el primero en tratar este tipo de funciones en el año 1937 (Ver [185]).

Definición 1.13 φ-Función
Una φ-función es una función $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $\varphi(t) = 0$ si $t = 0$.
2. φ es creciente.
3. φ es continua.
4. $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$.

Con respecto a la definición anterior, se presentan una serie de ejemplos de φ-funciones:

Ejemplo 1.12

Sea $\varphi : (0,\infty] \to (0,\infty]$; definidas por

- $\varphi(t) = ct^p$ donde $p \in (0,\infty)$ y $c > 0$.
- $\varphi(t) = \ln(t+1)$.
- $$\varphi(t) := \begin{cases} t^2, & t \in [0,1], \\ 1 & t \in (1,2], \\ t-1 & t > 2. \end{cases}$$

Para cada caso, $\varphi(t)$ es una φ-función.

N Si φ es una φ-función, $s,t \in [0,\infty)$ y $\alpha,\beta \in [0,1]$ son tales que $\alpha+\beta=1$, entonces como φ es creciente, no negativa y $\alpha s+\beta t$ está entre s y t, se tiene que

$$\varphi(\alpha s+\beta t) \leq \text{máx}\left\{\varphi(s),\varphi(t)\right\} \leq \varphi(s)+\varphi(t).$$

Como toda función convexa $\varphi:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, es continua en $(0,\infty)$, entonces para una φ- función convexa se puede reemplazar la condición de continuidad en $[0,\infty)$ de la Definición de φ-función por la continuidad en 0. La clase de las φ-funciones se denotará por Φ y las propiedades de esta clase se presentan en la siguiente proposición:

Proposición 1.17

Si $\varphi,\psi \in \Phi$ y $c>0$, entonces las siguientes funciones están en Φ

1. $\varphi+\psi$.
2. $\varphi.\psi$.
3. $\varphi\circ\psi$.
4. φ^{-1}.
5. $c\varphi,\ \ c>0$.
6. $\varphi\wedge\psi=\text{mín}\left\{\varphi,\psi\right\}$.
7. $\varphi\vee\psi=\text{máx}\left\{\varphi,\psi\right\}$.

Cuando se refiere a espacios donde intervienen las φ-funciones se le exige una condición adicional, la cual es, que sean convexas. Otras condiciones de uso frecuente se exponen en las siguientes definiciones:

Definición 1.14 Condición ∞_1

Sea φ una φ-función convexa, se dice que φ cumple la condición ∞_1 si

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\varphi(t)}{t}=\infty.$$

Geométricamente la condición ∞_1 significa que para valores "grandes" de t la gráfica de la función φ está por encima de las rectas que pasan por el origen.

La siguiente condición permitirá garantizar que los espacios de variación que se definen y estudian en las próximas secciones sean espacios vectoriales.

Definición 1.15 Condición $\triangle_2$

Sea φ una φ-función convexa. Se dice que

1. φ cumple la condición $\triangle_2(0)$ si existen números $\eta > 0$, $t_0 > 0$ tales que

$$\varphi(2t) \leq \eta\varphi(t), \quad t \leq t_0.$$

2. φ cumple la condición $\triangle_2(\infty)$ si existen números $\eta > 0$, $t_0 > 0$ tales que

$$\varphi(2t) \leq \eta\varphi(t), \quad t \geq t_0.$$

En la siguiente proposición se exponen algunas relaciones equivalentes con los conceptos de las definiciones anteriores y que son consecuencia de la definición de límite superior (Ver [145]).

Proposición 1.18

Sea $\varphi \in \Phi$ una función convexa, entonces

1. φ satisface la condición ∞_1 si y solo si para todo $\eta > 0$ existe t_0, tal que $\varphi(t) \geq \eta t, \ t \geq t_0$.
2. φ satisface la condición $\triangle_2(0)$ si y solo si $\displaystyle\limsup_{t\to 0} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} < \infty$.
3. φ satisface la condición $\triangle_2(\infty)$ si y solo si $\displaystyle\limsup_{t\to \infty} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} < \infty$.

La siguiente proposición, presentada por S. Rivas en su tesis doctoral (Ver [145]), muestra tres propiedades de las funciones convexas:

Proposición 1.19

Sea $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función convexa entonces:

1. Si $\varphi(0) = 0$, entonces

$$\begin{cases} \varphi(\alpha t) \leq \alpha\varphi(t), & 0 \leq \alpha \leq 1; \\ \varphi(\alpha t) \geq \alpha\varphi(t), & 1 \leq \alpha. \end{cases}$$

2. Si $\varphi(0) = 0$, la función $t \in (0,\infty) \mapsto \dfrac{\varphi(t)}{t}$ es creciente.
3. Si φ es una φ- función que cumple la condición ∞_1, entonces

$$\lim_{t\to 0} \varphi^{-1}\left(\frac{k}{t}\right) t = 0, \quad k > 0.$$

La clase de las funciones de p-variación acotada en el sentido de Wiener, donde $1 < p < \infty$, el cual fue introducida por Wiener en el año 1924, posteriormente fue generalizada por L. C. Young (1937), en [185], para el caso de funciones de de φ-variación acotada, donde φ es una φ-función.

Definición 1.16 φ-Variación Acotada en el Sentido de Wiener

Sean φ una φ-función, $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función y $\pi : a = t_1 < \cdots < t_n = b$ una partición del intervalo $[a,b]$, se definen

$$\sigma_\varphi^W(u,\pi) := \sum_{j=1}^{n-1} \varphi\left(\left|u(t_{j+1}) - u(t_j)\right|\right)$$

y

$$V_\varphi^W(u) = V_\varphi^W(u;[a,b]) := \sup_\pi \sigma_\varphi^W(u,\pi),$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones π del intervalo $[a,b]$. $V_\varphi^W(u;[a,b])$ se denomina φ-variación en el sentido de Wiener de la función u en el intervalo $[a,b]$. Si $V_\varphi^W(u;[a,b]) < \infty$, se dice que la función u tiene φ-variación acotada o finita en el sentido de Wiener en el intervalo $[a,b]$.

La clase de las funciones con φ-variación acotada en el sentido de Wiener se denota por $V_\varphi^W[a,b]$. Algunas propiedades en relación con esta clase de funciones se exponen en los siguientes resultados (Ver [132]):

Teorema 1.13

Sean φ una φ-función y $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función

1. La función $V_\varphi^W(\cdot) : V_\varphi^W[a,b] \to \mathbb{R}$ es par.
2. $V_\varphi^W(u) = 0$ si y solo si u es constante.
3. Si $V_\varphi^W[a,b] < \infty$ entonces u es acotada en $[a,b]$.
4. φ es convexa si y solo si $V_\varphi^W(\cdot)$ es convexa.
5. V_φ^W es un conjunto convexo y simétrico.

N El espacio vectorial generado por la clase $V_\varphi^W[a,b]$ viene dado por

$$BV_\varphi[a,b] = \left\{u \in \mathbb{R}^{[a,b]} : \exists\lambda > 0,\ V_\varphi^W(\lambda u) < \infty\right\}.$$

Proposición 1.20

Sea φ una φ-función convexa. El espacio $BV_\varphi[a,b]$ es un álgebra.

Sea $BV_\varphi^0[a,b]$ el espacio vectorial de todas las funciones $u \in BV_\varphi[a,b]$ tal que $u(a) = 0$.

Definición 1.17

Sea φ una φ-función convexa. Se define la función $||\cdot||^W_{\varphi,0} : BV^0_\varphi[a,b] \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$||u||^W_{\varphi,0} := \inf\left\{\lambda > 0 : \ V^W_\varphi\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\}.$$

Teorema 1.14

Sea φ una φ-función convexa, entonces $\left(BV^0_\varphi[a,b], ||\cdot||^W_{\varphi,0}\right)$ es un espacio normado.

Ahora consideremos la norma en el espacio $BV_\varphi[a,b]$ como sigue

$$||u||^W_\varphi := |u(a)| + ||u - u(a)||^W_{\varphi,0}.$$

Mediante un cálculo sencillo se tiene que

$$||u||^W_\varphi := |u(a)| + \inf\left\{\lambda > 0 : \ V^W_\varphi\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\}.$$

Teorema 1.15

Sea φ una φ-función convexa, entonces $\left(BV_\varphi[a,b], ||\cdot||^W_\varphi\right)$ es un espacio vectorial normado.

Teorema 1.16

Sea φ una φ-función convexa, entonces $\left(BV^0_\varphi[a,b], ||\cdot||^W_{\varphi,0}\right)$ es un espacio de Banach.

Corolario 1.2

Sea φ una φ-función convexa, entonces $\left(BV_\varphi[a,b], ||\cdot||^W_\varphi\right)$ es un espacio de Banach.

En el siguiente teorema, demostrado por L. Maligranda y W. Orlicz (1987), en [91], se obtiene que $BV^0_\varphi[a,b]$ con la norma $||\cdot||_1 = ||\cdot||_\infty + ||\cdot||^W_{\varphi,0}$ o la norma $||\cdot||_2 = 2\varphi^{-1}(1)\,||\cdot||^W_{\varphi,0}$ es un álgebra de Banach.

Teorema 1.17

Sea φ una φ-función convexa, entonces $BV^0_\varphi[a,b]$ con la norma $||\cdot||_1$ definida por

$$||\cdot||_1 = ||\cdot||_\infty + ||\cdot||^W_{\varphi,0}$$

o con la norma $||\cdot||_2$ definida por

$$||\cdot||_2 = 2\varphi^{-1}(1)||\cdot||^W_{\varphi,0}$$

es un álgebra de Banach. Además, las normas $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ y $||\cdot||^W_{\varphi,0}$ son equivalentes.

Y por último, como consecuencia del Teorema anterior, se obtiene que el espacio $BV_\varphi[a,b]$ es un álgebra de Banach con las normas $||\cdot||_1 = ||\cdot||_\infty + ||\cdot||_\varphi^W$ y $||\cdot||_2 = 2\max\{\varphi^{-1}(1),1\}\,||\cdot||_\varphi^W$.

Corolario 1.3
Sea φ una φ-función convexa, entonces $BV_\varphi[a,b]$ con la norma $||\cdot||_1$ definida por

$$||\cdot||_1 = ||\cdot||_\infty + ||\cdot||_\varphi^W$$

o con la norma $||\cdot||_2$ definida por

$$||\cdot||_2 = 2\max\{\varphi^{-1}(1),1\}\,||\cdot||_\varphi^W$$

es un álgebra de Banach. Además, las normas $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ y $||\cdot||_\varphi^W$ son equivalentes.

1.8 φ-Variación Acotada en el Sentido de Riesz.

El concepto de p-variación acotada, presentado por F. Riesz (1910), en [143], fue generalizado en 1953 por Yu. T. Medveded (1953), en [109] de la siguiente manera:

Definición 1.18 φ-Variación Acotada en el Sentido de Riesz
Sean φ una φ-función, $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función y $\pi: a=t_1<\cdots<t_n=b$ una partición del intervalo $[a,b]$, se definen

$$\sigma^R_{(\varphi,1)}(u,\pi) := \sum_{j=1}^{n-1}\varphi\left(\frac{\left|u(t_{j+1})-u(t_j)\right|}{\left|t_{j+1}-t_j\right|}\right)\left|t_{j+1}-t_j\right|$$

y

$$V^R_\varphi(u) = V^R_{(\varphi,1)}(u;[a,b]) := \sup_\pi \sigma^R_{(\varphi,1)}(u,\pi),$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones π del intervalo $[a,b]$. $V^R_{(\varphi,1)}(u;[a,b])$ se denomina φ-variación en el sentido de Riesz de la función u en el intervalo $[a,b]$. Si $V^R_{(\varphi,1)}(u;[a,b])<\infty$, se dice que la función u tiene φ-variación o $(\varphi,1)$-variación acotada o finita en el sentido de Riesz en el intervalo $[a,b]$.

La clase de las funciones con φ-variación acotada en el sentido de Riesz se denota por $V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$. Algunas propiedades en relación con esta clase de funciones se exponen en el siguiente teorema (Ver [145]):

Teorema 1.18
Sea $\varphi\in\Phi$, entonces

1. $V^R_{(\varphi,1)}(u) = 0$ si y solo si u es una constante.

2. Si $[s,t] \subset [a,b]$, entonces
$$V^R_{(\varphi,1)}(u;[s,t]) \leq V^R_{(\varphi,1)}(u;[a,b]).$$

3. Si $\pi : a = t_1 < \cdots < t_n = b$ es una partición del intervalo $[a,b]$ y $t \in [a,b] \backslash \pi$, entonces
$$\sigma^R_{(\varphi,1)}(u,\pi) \leq \sigma^R_{(\varphi,1)}(u,\pi \cup \{t\}).$$

4. Si $t \in [a,b]$, entonces
$$V^R_{(\varphi,1)}(u;[a,b]) = V^R_{(\varphi,1)}(u;[a,t]) + V^R_{(\varphi,1)}(u;[t,b]).$$

5. $Lip[a,b] \subset V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$.

6. Si φ es convexa, entonces $V^R_{(\varphi,1)}[a,b] \subset BV[a,b]$ y
$$V(u;[a,b]) \leq b - a + V^R_{(\varphi,1)}(u;[a,b]), \quad u \in V^R_{(\varphi,1)}[a,b].$$

7. $V^R_{(\varphi,1)}[a,b] = BV[a,b]$ si φ no cumple la condición ∞_1.

8. Si φ cumple la condición ∞_1 y $V^R_{(\varphi,1)}(u;[a,b]) < \infty$, entonces u es acotada y
$$\|u\|_\infty \leq |u(a)| + \sup_{t\in(a,b]} \varphi^{-1}\left(\frac{V^R_{(\varphi,1)}(u)}{t-a}\right)(t-a).$$

9. $V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$ es un conjunto simétrico y convexo.

10. φ es convexa si y solo si la función $V^R_{(\varphi,1)} : V^R_{(\varphi,1)}[a,b] \to [0,\infty)$, definida por
$$V^R_{(\varphi,1)}(u) := V^R_{(\varphi,1)}(u;[a,b]), \quad u \in V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$$
es convexa.

N La conclusión del punto 5, del teorema anterior, nos provee de una amplia gama de ejemplos de funciones en $V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$, por ejemplo, toda función con derivada continua tiene $(\varphi,1)$-variación acotada.

N El punto 7, del teorema anterior, asegura que $V^R_{(\varphi,1)}[a,b] \underset{\neq}{\subset} BV[a,b]$ si φ es una φ-función que verifica la condición ∞_1. Por esta razón es usual imponer a φ esta condición, cuando se trata con este tipo de funciones, hecho que se asumirá de ahora en adelante.

Como consecuencia de la definición de límite superior de una función, el siguiente lema presenta los posibles valores de $\limsup\limits_{t\to\infty} \dfrac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)}$ para dos φ-funciones φ_1 y φ_2.

Lema 1.7
Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$, entonces se verifica una de las dos siguientes condiciones:

1. $\limsup\limits_{t\to\infty} \dfrac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)} < \infty$ si y solo si existen $\eta > 0$, $t_0 > 0$, tal que $\varphi_1(t) \leq \eta\varphi_2(t)$, $\quad t \geq t_0$.

2. $\limsup\limits_{t\to\infty} \dfrac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)} = \infty$ si y solo si existen $\eta > 0$, $t_0 > 0$, tal que $\varphi_2(t) \leq \eta\varphi_1(t)$, $\quad t \geq t_0$.

S. Rivas (2012), en [146], presenta una adaptación del teorema 8.1 del artículo de M. A. Krasnosel'skĭ y Ya. R. Rutickĭ (1961) en [82] o del lema 2 del artículo de V. V. Chistyakov (1998) en [35], para dar condiciones necesarias y suficientes sobre las φ-funciones φ_1 y φ_2 de modo que $V^R_{(\varphi_1,1)}[a,b] \subset V^R_{(\varphi_2,1)}[a,b]$.

Teorema 1.19
Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ funciones convexas entonces $V^R_{(\varphi_1,1)}[a,b] \subset V^R_{(\varphi_2,1)}[a,b]$ si y solo si

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)} < \infty.$$

Siguiendo las ideas desarrolladas del teorema 8.2, del artículo de M. A. Krasnosel'skĭ y Ya. R. Rutickĭ (1961), en [82], S. Rivas (1991), en [145] obtiene el siguiente corolario:

Corolario 1.4
Sea $\varphi \in \Phi$ una función convexa. Entonces $V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$ es un espacio vectorial si y solo si φ cumple la condición $\triangle_2(\infty)$.

De acuerdo con lo anterior la clase $V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$ no siempre es un espacio vectorial. Por esta razón se considera la siguiente notación. Dada $\varphi \in \Phi$, se denota por $RV_{(\varphi,1)}[a,b]$ al espacio vectorial generado por la clase $V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$. El siguiente lema permite dar una caracterización del espacio $RV_{(\varphi,1)}[a,b]$.

Lema 1.8
Sea $A \neq \emptyset$ un subconjunto convexo y simétrico de un espacio vectorial $\mathbb{X}$, entonces

1. $0 \in A$.

2. El espacio vectorial generado por A está dado por

$$< A >= \{x \in \mathbb{X} : \exists\lambda > 0,\ \lambda x \in A\} = \bigcup_{\lambda>0} \lambda A.$$

N Como consecuencia del lema anterior, si se considera $A = V^R_{(\varphi,1)}$ entonces el espacio vectorial generado por $V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$ viene dado por

$$RV_{(\varphi,1)}[a,b] = \left\{u \in \mathbb{R}^{[a,b]} : \exists \lambda > 0,\ V^R_{(\varphi,1)}(\lambda u) < \infty\right\}.$$

Proposición 1.21

Sea $\varphi \in \Phi$, entonces $RV_{(\varphi,1)}[a,b]$ es un álgebra, con el producto usual de funciones.

En la sección 3 del trabajo de M. A. Krasnosel'skĭ y Ya. R. Rutickĭ (1961), en [82] introducen la siguiente definición:

Definición 1.19

Sean φ_1 y $\varphi_2 \in \Phi$. Se dice que $\varphi_2 \prec \varphi_1$ si existen números positivos η y t_0, tales que $\varphi_2(t) \le \varphi_1(\eta t),\ t \ge t_0$.

S. Rivas (2012) en [146] hace una adaptación del teorema 5 del artículo de V. V. Chistyakov (2000), en [35], para dar condiciones necesarias y suficientes sobre las φ-funciones φ_1 y φ_2 para que $RV_{(\varphi_1,1)}[a,b] \subset RV_{(\varphi_2,1)}[a,b]$.

Proposición 1.22

Sean φ_1 y $\varphi_2 \in \Phi$. Entonces $RV_{(\varphi_1,1)}[a,b] \subset RV_{(\varphi_2,1)}[a,b]$ si y solo si $\varphi_2 \prec \varphi_1$.

En lo que sigue, se considera el funcional de Minkowski (Ver [149]) para dotar al espacio $RV_{(\varphi,1)}[a,b]$ de una norma $\|\cdot\|^R_{(\varphi,1)}$ que le da una estructura de álgebra de Banach.

Dada $\varphi \in \Phi$ una función convexa, se define el conjunto:

$$A_{(\varphi,1)} := \left\{u \in RV_{(\varphi,1)}[a,b] : V^R_{(\varphi,1)}(u) \le 1\right\}.$$

De las propiedades de la clase $V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$ (Teorema 1.18) y de la definición de $RV_{(\varphi,1)}[a,b]$, se sigue que $A_{(\varphi,1)}$ es convexo, simétrico y absorbente. Entonces el funcional de Minkowski asociado al conjunto $A_{(\varphi,1)}$ definido por:

$$\mu_{A_{(\varphi,1)}}(u) = \mu_{(\varphi,1)} = \inf\left\{\lambda > 0 : V^R_{(\varphi,1)}\left(\frac{u}{\lambda}\right) < 1\right\},$$

es una seminorma sobre el espacio $RV_{(\varphi,1)}[a,b]$ (Ver [41] o [149]).

A continuación se enumerarán algunas propiedades del funcional $\mu_{(\varphi,1)}$:

Proposición 1.23 (Ver [86] o [146])

Sea $\varphi \in \Phi$ una función convexa, entonces

1. Si $\mu_{(\varphi,1)}(u) \neq 0$, entonces $V^R_{(\varphi,1)}\left(\frac{u}{\mu_{(\varphi,1)}(u)}\right) \leq 1$.
2. Si $\lambda > \mu_{(\varphi,1)}(u)$, entonces $V^R_{(\varphi,1)}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1$.
3. Si $0 \leq \mu_{(\varphi,1)}(u) \leq 1$, entonces $V^R_{(\varphi,1)}(u) \leq \mu_{(\varphi,1)}(u)$.
4. $\left\{\lambda > 0 : V^R_{(\varphi,1)}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \leq 1\right\} = \begin{cases} [\mu_{(\varphi,1)}(u), \infty), & \mu_{(\varphi,1)}(u) \neq 0, \\ (0, \infty), & \mu_{(\varphi,1)}(u) = 0. \end{cases}$

Consideremos la función $\|\cdot\|^R_{(\varphi,1)} : RV_{(\varphi,1)}[a,b] \to [0,\infty)$ definida por:

$$\|u\|^R_{(\varphi,1)} := |u(a)| + \mu_{(\varphi,1)}(u), \quad u \in RV_{(\varphi,1)}[a,b],$$

conocido en la literatura como norma de Luxemburg[1]. A continuación se obtienen los siguientes resultados.

Proposición 1.24 (Ver [146])

Sea $\varphi \in \Phi$ una función convexa, entonces $\left(RV_{(\varphi,1)}[a,b], \|\cdot\|^R_{(\varphi,1)}\right)$ es un espacio normado.

N De la Proposición anterior se puede garantizar que

$$|||u|||^R_{(\varphi,1)} := \|u\|_\infty + \mu_{(\varphi,1)}(u), \quad u \in RV_{(\varphi,1)}[a,b]$$

es una norma sobre $RV_{(\varphi,1)}[a,b]$ (Ver [146]).

Por otra parte, se presenta un conjunto de resultados sobre la convergencia en la norma $\|\cdot\|^R_{(\varphi,1)}$, cuya demostración puede verse con detalle en la tesis de S. Rivas (2012), en [146].

Lema 1.9

Sean $\varphi \in \Phi$ una función convexa y $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, entonces

1. $\|u\|^R_{(\varphi,1)} < \varepsilon$ implica que $\|u\|_\infty < \left(\sup\limits_{t\in(a,b]} \left(\varphi^{-1}\left(\frac{1}{t-a}\right)\right)(t-a) + 1\right)\varepsilon$.
2. Si $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy con la norma $\|\cdot\|^R_{(\varphi,1)}$, entonces también es una sucesión de Cauchy con la norma $\|\cdot\|_\infty$.
3. Si $\{u_n\}_{n\geq 1} \xrightarrow{\|\cdot\|^R_{(\varphi,1)}} u$, entonces $\{u_n\}_{n\geq 1} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} u$.

Como consecuencia del Lema anterior se obtiene la siguiente proposición:

[1] Las propiedades de la norma de Luxemburg fueron estudiadas por el matemático W. A. J. Luxemburg (1955) en [90].

Proposición 1.25 (Ver [91])

El espacio $RV_{(\varphi,1)}[a,b]$ es un espacio de Banach.

Más aún, L. Maligranda y W. Orlicz (1987), en [91] demuestran lo siguiente:

Proposición 1.26

Sea $\varphi \in \Phi$ una función convexa que verifica la condición ∞_1, entonces el espacio $\left(RV_{(\varphi,1)}[a,b], \|\cdot\|^R_{(\varphi,1)}\right)$ es un álgebra de Banach.

Yu T. Medveded (1953), en [109] y Z. Cybertowicz y W. Matuszewska (1977), en [44] generalizan el Lema de Riesz para la clase $V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$, como se expone a continuación (Ver [132]):

Teorema 1.20 (Generalización del Lema de Riesz)

Sea $\varphi \in \Phi$ una función convexa que cumple la condición ∞_1. Entonces, $u \in V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$ si y solo si $u \in AC[a,b]$, $u' \in L_\varphi[a,b]$[a] y además

$$V^R_{(\varphi,1)}(u;[a,b]) = \int_a^b \varphi\left(\left|u'(t)\right|\right) dt.$$

[a] $L_\varphi[a,b]$ denota la clase de Orlicz de las funciones $u \in \mathbb{R}^{[a,b]}$, tales que $\int_a^b \varphi(|u(t)|)\,dt < \infty$, con $\varphi \in \Phi$.

Con el resultado de este teorema se puede reescribir el funcional de Minkowski $\mu_{(\varphi,1)}$ como sigue

$$\mu_{(\varphi,1)}(u) = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \int_a^b \varphi\left(\frac{\left|u'(t)\right|}{\lambda}\right) < 1\right\}, \quad u \in RV_{(\varphi,1)}[a,b];$$

y la norma sobre el espacio de la forma

$$\|u\|^R_{(\varphi,1)} := |u(a)| + \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \int_a^b \varphi\left(\frac{\left|u'(t)\right|}{\lambda}\right) < 1\right\}, \quad u \in RV_{(\varphi,1)}[a,b].$$

1.9 κ-Variación Acotada en el Sentido de Korenblum

B. Korenblum (1975), en [79], extiende la noción de variación acotada, definiendo una nueva clase de variación para las funciones acotadas, llamada κ-variación, la cual se diferencia de las anteriores en que una función distorsión κ es introducida para medir intervalos en el dominio de la función y no en el rango. Por consiguiente, se comienza presentando la noción de función distorsión, la cual puede considerarse como un cambio de escala en la longitud de los subintervalos de $[a,b]$ tal que la longitud de $[a,b]$ es 1 si $\kappa(1) = 1$.

Definición 1.20 Función Distorsión

Se dice que la función $\kappa : [0,1] \to [0,1]$ es una función distorsión (o κ-función) si satisface las siguientes propiedades:

(i) κ es continua, con $\kappa(0) = 0$ y $\kappa(1) = 1$,

(ii) κ es cóncava, creciente y

(iii) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\kappa(x)}{x} = \infty$.

El siguiente ejemplo muestra algunas funciones distorsión en $(0,1)$.

Ejemplo 1.13 (Ver (3), pág. 170)

- Sea $\kappa : [0,1] \to [0,1]$ definida por

$$\kappa(t) = \begin{cases} t(1-\ln t), & 0 < t \leq 1, \\ 0, & t = 0; \end{cases}$$

por lo que $\kappa'(t) = \ln t > 0$ y $\kappa''(t) = \frac{1}{t} < 0$ sobre $(0,1)$; es decir, κ es creciente y cóncava. Además

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t(1-\ln t)}{t} = \lim_{t\to 0^+} (1-\ln t) = \infty.$$

Así, κ es una función distorsión.

- La función $\kappa : [0,1] \to [0,1]$ definida por

$$\kappa(t) = \begin{cases} \frac{2}{2-\ln t}, & 0 < t \leq 1, \\ 0, & t = 0; \end{cases}$$

es una función distorsión, $\kappa'(t) = -2(2-\ln t)' = -2\left(-\frac{1}{t}\right) = \frac{2}{t} > 0$ y $\kappa''(t) = -\frac{2}{t^2} < 0$ sobre $(0,1)$; es decir, κ es creciente y cóncava. Además

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{2}{t(2-\ln t)} \to \infty.$$

Así, κ es una función distorsión.

Proposición 1.27 (Ver [3] sección 2.5 pág. 170)

Sea $\kappa : [0,1] \to [0,1]$ una función distorsión entonces κ es subaditiva, es decir,

$$\kappa(x+y) \leq \kappa(x) + \kappa(y).$$

Con respecto a la definición de función distorsión, se presenta la clase de funciones de κ-variación acotada introducida por B. Korenblum (1975) en [79].

Definición 1.21 κ-Variación Acotada

Sean $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función, $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ una partición del intervalo $[a,b]$ y κ una función distorsión. Se define

$$\kappa\sigma(u,\pi) := \frac{\sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})|}{\sum_{i=1}^{n} \kappa\left(\frac{|t_i - t_{i-1}|}{b-a}\right)},$$

y

$$\kappa V(u) = \kappa V(u;[a,b]) := \sup_{\pi} \kappa\sigma(u,\pi),$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones π del intervalo $[a,b]$. $\kappa V(u;[a,b])$ se denomina la κ-variación en el sentido de Korenblum de la función u es el intervalo $[a,b]$. Si $\kappa V(u;[a,b]) < \infty$ se dice que u tiene κ-variación acotada o finita en el sentido de Korenblum.

Se denota la familia de todas las funciones de κ-variación acotada por $\kappa BV[a,b]$.

En el siguiente ejemplo se presenta una función de κ-variación acotada que, además, no pertenece al espacio de variación acotada.

Ejemplo 1.14 (Ver (3), pág. 174)

Sea $k : [0,1] \to [0,1]$ definida por $k(t) = t^{\alpha}$ para algún $\alpha \in (0,1)$. Consideremos la siguiente notación,

$$t_n := \frac{1}{\zeta(1/\alpha, 0)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1/\alpha}}$$

y

$$\zeta(\alpha,\beta) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} log^{\beta}(n+1)} \qquad (n \geq 1).$$

Se define una función $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ como

$$u(x) := \begin{cases} 0 & x = 0 \text{ ó } x = 1, \\ (x - t_n)^{\alpha} & t_n \leq x < t_{n+1} \end{cases}$$

por lo que $u \notin BV[0,1]$ y además $u \in \kappa BV[0,1]$ donde $V_{\kappa}(u;[0,1]) \leq 2$.

El próximo ejemplo muestra que la función de κ-variación total, definida por

$$\kappa V_u(x) = \kappa V(u,x) = \kappa V(u \circ \alpha), \text{ donde } \alpha(t) = xt,\ 0 \leq t \leq 1,$$

no es necesariamente creciente con respecto a x.

Ejemplo 1.15 (Ver (7))

Sea $\kappa : [0,1] \to [0,1]$ definida por $\kappa(t) = t^\alpha$ para algún $\alpha \in (0,1)$. Sea

$$\gamma := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1/\alpha}}, \quad t_n := \frac{1}{\gamma}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1/\alpha}} \quad (n \geq 1),$$

se define la función $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$u(x) := \begin{cases} 0 & x = 0 \text{ ó } x = 1, \\ (x - t_n)^\alpha & t_n \leq x < t_{n+1}. \end{cases}$$

Considerando las particiones que contienen a los puntos $t_0, t_1, \ldots, t_n$, se tiene que $u \notin BV[0,1]$ y $u \in \kappa BV[0,1]$.

En las siguientes proposiciones se presenta una compilación de ciertos resultados de funciones pertenecientes a la clase de las funciones κ-variación acotada (Ver [157]).

Proposición 1.28

La clase de funciones con κ-variación acotada $\kappa BV[a,b]$, está dotado de una estructura de espacio vectorial.

Proposición 1.29

Si u es una función de κ-variación acotada en $[a,b]$, entonces

1. u es acotada en $[a,b]$ y además,

$$|u(x)| \leq |u(a)| + \frac{3}{2}\kappa V(u).$$

2. Cada función de variación acotada en el sentido clásico es de κ-variación acotada y $\kappa V(u) \leq V(u)$.

3. Si u es monótona, se tiene que $\kappa V(u) = V(u) = |u(b) - u(a)|$.

4. Para todo punto $x \in [a,b]$ existen los límites laterales $u(x^+)$ y $u(x^-)$.

5. u solo tiene una cantidad numerable de discontinuidades, de primer orden.

El espacio $\kappa BV[a,b]$ se puede dotar de una estructura de espacio normado, para lo cual se define el siguiente funcional $||\cdot||_{\kappa BV}$ del espacio $\kappa BV[a,b]$ a valores en $\mathbb{R}$ por

$$||u||_{\kappa BV} := |u(a)| + \kappa V(u), \quad \text{para todo} \quad u \in \kappa BV[a,b].$$

Teorema 1.21
El espacio $(\kappa BV[a,b], ||\cdot||_{\kappa BV})$ es un espacio normado.

A continuación se enunciará que el espacio $\kappa BV[a,b]$ con la norma $||\cdot||_{\kappa BV}$ es un espacio normado completo.

Teorema 1.22
El espacio $(\kappa BV[a,b], ||\cdot||_{\kappa BV})$ es un espacio de Banach.

Para detalles de la demostración ver el resultado de D. Cyphert y J. Kelingos (1985) en [43].

Definición 1.22
Sea κ una función distorsión sobre $[0,1]$ se dice que la función u es κ-decreciente con constante $C \geq 0$, si para cada intervalo $I = [x,y]$, con $0 \leq x < y \leq 1$,

$$u(y) - u(x) \leq C\kappa(y-x).$$

El siguiente ejemplo muestra que no toda función $u \in \kappa BV[0,1]$ es k-decreciente.

Ejemplo 1.16 **(Ver (3), pág. 174)**

Sean $k : [0,1] \to [0,1]$ una función de distorsión arbitraria y $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $u(x) := \sqrt{k(x)}$. Entonces u es monótona creciente, de k-variación acotada con $V_k(u;[0,1]) = 1$ y

$$V_k(u;[0,1]) \leq |u(1) - u(0)|.$$

Por otro lado,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{u(x)-u(0)}{k(x-0)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{k(x)}} = \infty$$

y u no satisface lo siguiente

$$u(y) - u(x) \leq C_k(y-x) \qquad (0 \leq x < y \leq 1),$$

para cualquier $C > 0$, por lo tanto u no es κ-decreciente.

Ahora se presenta un ejemplo de una función κ-decreciente.

Ejemplo 1.17 **(Ver (43))**

Se puede observar que toda función Hölder continua sobre $[0,1]$ con exponente $\alpha, 0 < \alpha < 1$, es κ-decreciente si se considera $\kappa(x) = x^\alpha$.

Proposición 1.30

Si u es una función κ-decreciente con constante C.

1. Entonces u tiene discontinuidades de salto hacia abajo, es decir,

$$u(a^-) \geq u(a) \geq u(a^+), \qquad x \leq a \leq y.$$

2. Entonces u es de κ-variación acotada y

$$\kappa V(u) \leq 2C + |u(1) - u(0)|.$$

N Si u es una función decreciente entonces u es κ-decreciente.

B. Korenblum (1975), en [79] introduce la noción de κ-variación acotada, encuentra como ventaja de este espacio de funciones, que una función de κ-variación acotada puede ser descompuesta como la diferencia de dos funciones κ-decrecientes. Ahora se presenta un teorema análogo de selección de Helly para funciones de κ-variación acotada junto con el teorema de representación de Korenblum, el cual como se dijo anteriormente, indica que toda función de κ-variación acotada se puede escribir como la diferencia de funciones κ-decrecientes (Ver [43]).

Teorema 1.23 (Teorema de Selección de Helly)

Una familia arbitraria infinita de funciones definidas en $[0,1]$, las cuales son uniformemente acotadas y uniformemente κ-decrecientes, contiene una subsucesión, la cual converge en cada punto de $[0,1]$ a una función κ-decreciente.

Teorema 1.24 (Teorema de Descomposición)

Cada función u de κ-variación acotada, $\kappa V(f) = C$, se puede representar como la diferencia de dos funciones κ-decrecientes, tal que $u = g - h$ donde g, h son funciones κ-decrecientes.

1.10 Λ-Variación en el Sentido de Waterman.

Para comprender la noción que se dará a continuación, primeramente se presentará el concepto de Λ-sucesión (Ver [173]) y algunos ejemplos:

Definición 1.23 Λ-Sucesión

Una sucesión $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números reales positivos se dice que es una Λ-sucesión en el sentido de Waterman si satisface las siguientes condiciones:

1. $\lambda_n \downarrow 0$ cuando $n \to \infty$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ diverge.

En este orden de ideas, se presentan ejemplos de Λ-sucesiones.

Ejemplo 1.18

- La sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$, la cual genera la serie armónica.
- La sucesión $\left\{\frac{1}{log(n)}\right\}_{n\geq 2}$.

Son ejemplos clásicos de Λ-sucesiones en el sentido de Waterman.

D. Waterman (1976), en [173], da la noción de función con Λ-variación acotada de la siguiente manera:

Definición 1.24 Λ-Variación en el Sentido de Waterman

Sean $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ una Λ-sucesión en el sentido de Waterman y $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función y $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ una partición del intervalo $[a,b]$. Se define:

$$\sigma_\Lambda(u,\pi) := \sum_j \lambda_j |u(t_j) - u(t_{j-1})|$$

y

$$V_\Lambda(u) = V_\Lambda(u;[a,b]) := \sup_\pi \sigma_\Lambda(u,\pi),$$

donde el supremo se considera sobre el conjunto π de todas las particiones π del intervalo $[a,b]$. $V_\Lambda(u;[a,b])$ se denomina Λ-variación de la función u en el intervalo $[a,b]$. Si $V_\Lambda(u;[a,b]) < \infty$, se dice que u tiene Λ-variación acotada en el intervalo $[a,b]$.

La clase de las funciones $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ con Λ-variación en el sentido de Waterman acotada se denota por $\Lambda BV[a,b]$.

A continuación se presenta un ejemplo de una función perteneciente al espacio de las funciones de Λ-variación acotada en el sentido de Waterman.

Ejemplo 1.19

Sean $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ una Λ-sucesión en el sentido de Waterman, $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ la función definida por $u(x) = x^2$ y $\pi = \{t_i\}_{i=0}^n$ una partición del intervalo $[a,b]$, entonces

$$\begin{aligned} V_\Lambda(u,[a,b]) &\leq \sup_\pi \sum_n \frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{\lambda_1} = \sup_\pi \sum_n \frac{\left|t_i^2 - t_{i-1}^2\right|}{\lambda_1} \\ &\leq \frac{2K}{\lambda_1} \sup_\pi \sum_n |t_i - t_{i-1}| \leq \frac{2K}{\lambda_1}(b-a) < \infty \end{aligned}$$

donde $K = \text{máx}_i\{t_i, t_{i-1}\}$, por lo tanto $u \in \Lambda BV[a,b]$.

Algunas de las propiedades de la Λ-variación en el sentido de Waterman se presentan en la siguiente proposición:

Proposición 1.31

Sean $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ una Λ-sucesión en el sentido de Waterman y $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Entonces

1. $V_\Lambda(u;[a,b]) \geq 0$, para toda $u : [a,b] \to \mathbb{R}$.
2. u es una función constante si y solo si $V_\Lambda(u;[a,b]) = 0$.
3. $||u||_\infty \leq |u(a)| + V_\Lambda(u;[a,b])$.
4. Para $x \in [a,b]$, $V_\Lambda(u;[a,x]) \leq V_\Lambda(u;[a,b])$.
5. $V_\Lambda(\cdot;[a,b])$ es una función par.
6. Existe $C > 0$ tal que para todo $u \in \Lambda BV[a,b]$, se tiene que $BV[a,b] \subset \Lambda BV[a,b]$.

1.11 Λ_p-Variación en el Sentido de Waterman-Shiba.

M. Shiba (1980) en [159] generaliza la noción de Waterman introduciendo la clase $\Lambda_p BV[a,b]$ $(1 \leq p < \infty)$; que es, la clase de todas las funciones $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ con Λ_p-variación acotada en $[a,b]$, como sigue:

Definición 1.25 Λ_p-Variación en el Sentido de Waterman-Shiba (Ver [170])

Sean $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i\geq 1}$ una Λ-sucesión, $1 \leq p < \infty$ y $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función, se definen

$$V_{\Lambda_p}(\pi,u,p) := \left(\sum_i \frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|^p}{\lambda_i}\right)^{\frac{1}{p}},$$

y

$$V_{\Lambda_p}(u) = V_{\Lambda_p}(u;[a,b]) := \sup_\pi V_{\Lambda_p}(\pi,u,p),$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ del intervalo $[a,b]$. V_{Λ_p} se denomina la Λ_p-variación en el sentido de Waterman-Shiba. Si $V_{\Lambda_p}(u;[a,b]) < \infty$ se dice que la función u tiene Λ_p-variación acotada o finita en el sentido de Waterman-Shiba.

La clase de las funciones de Λ_p-variación acotada en el sentido de Waterman-Shiba, se denota por $\Lambda_p BV[a,b]$.

N Sea $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función.

- Si $\lambda_i = 1$, para todo i, entonces $\Lambda_p BV[a,b] = BV_p[a,b]$.
- Si $p = 1$ entonces $\Lambda_p BV[a,b] = \Lambda BV[a,b]$
- Si $p = 1$ y $\lambda_i = i$, para todo i, entonces $\Lambda_p BV[a,b] = HBV[a,b]$ (La clase de las funciones de variación acotada armónica (Ver [3], pág. 141)).
- Si $p = 1$ y $\lambda_i = 1$, para todo i, entonces $\Lambda_p BV[a,b] = BV[a,b]$.

N Para toda $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i\geq 1}$ una Λ-sucesión y todo $1 < p < \infty$ se tiene que

$$\left(\sum_i \frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|^p}{\lambda_i}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_i |u(t_i) - u(t_{i-1})|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_i |u(t_i) - u(t_{i-1})|\right).$$

Esto implica que $BV[a,b] \subset BV_p[a,b] \subset \Lambda_p BV[a,b]$.

Obsérvese que el espacio $\Lambda_p BV[a,b]$ es un espacio lineal normado con respecto a la norma variación $||\cdot||_{\Lambda_p}$ definida como

$$||u||_{\Lambda_p} := ||u||_\infty + V_{\Lambda_p}(u,[a,b]), \quad u \in \Lambda_p BV[a,b].$$

En lo que sigue, se presenta una serie de resultados demostrados por R. G. Vyas (2006), en [170], el cual generaliza los resultados obtenidos por Waterman para la clase de las funciones de $\Lambda BV[a,b]$.

Proposición 1.32

- La clase de las funciones de $\Lambda_p BV[a,b]$ es un espacio de Banach.
- Si $u \in \Lambda_p BV[a,b]$ entonces u tiene límites por la derecha y por la izquierda en todo punto de $[a,b]$.
- Si $u \in \Lambda_p BV[a,b]$ para toda sucesión Λ entonces $u \in BV_p[a,b]$.
- Si u es una función continua sobre $[a,b]$ entonces $u \in \Lambda_p BV[a,b]$ para alguna sucesión Λ.
- Si $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ es una función monótona y $u \in \Lambda_p BV[c,d]$ entonces $u \circ \varphi \in \Lambda_p BV[a,b]$.
- Si u tiene límites por la derecha y por la izquierda en todo punto del intervalo $[a,b]$ entonces $u \in \Lambda_p BV[a,b]$ para toda sucesión Λ.
- Si g es continua y $U \in \Lambda_p BV[a,b]$ entonces $g \circ U \in \Lambda_p^* BV[a,b]$ para alguna sucesión Λ^*.

R. G. Vyas (2005), en [169] estudia la condición de suficiencia para la convergencia de la serie de Fourier en término de funciones pertenecientes al espacio $\Lambda_p BV[a,b]$ y demuestra lo siguiente:

Lema 1.10
Si $u \in \Lambda_p BV[a,b]$ entonces la función u es acotada sobre $[a,b]$.

N Obsérvese que si $u \in \Lambda_p BV[a,b]$ entonces u es una función regular sobre $[a,b]$ (Ver [142]). Si u es una función regular sobre $[a,b]$ entonces $u \in \Lambda_p BV[a,b]$ para alguna sucesión Λ. Así, la unión de funciones de $\Lambda_p BV[a,b]$ sobre todas las sucesiones Λ es la clase de las funciones regulares sobre $[a,b]$, es decir,

$$\bigcup_{\Lambda} \Lambda_p BV[a,b] = R[a,b].$$

Además, si $u \in \Lambda_p BV[a,b]$, para toda sucesión Λ, entonces $u \in RV_p[a,b]$. Así la intersección de funciones de $\Lambda_p BV[a,b]$ sobre todas las sucesiones Λ es la clase $RV_p[a,b]$, es decir,

$$\bigcap_{\Lambda} \Lambda_p BV[a,b] = RV_p[a,b].$$

Con un contraejemplo se demostrará que una función continua no necesariamente es de Λ_p-variación acotada en el sentido de Waterman-Shiba.

Ejemplo 1.20

Sea $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(x) := \begin{cases} x^{\frac{1}{p}} cos\left(\frac{\pi}{2x}\right) & \text{si } x \in (0,1], \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Claramente, $u \in C[0,1]$. Para todo $m = 2k$, donde $k \in \mathbb{N}$. Consideremos los puntos $x_0 = 0$ y $x_i = \frac{1}{m+1-i}$, para $i = 1, 2, ..., m$ entonces se tiene que $0 = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_m = 1$ y

$$u(x_i) := \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ es par,} \\ \pm x_i^{\frac{1}{p}} & \text{si } i \text{ es impar.} \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m-1} |u(x_{i+1}) - u(x_i)|^p &= \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m-2} + \frac{1}{m-2} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \to \infty \ \text{ cuando } \ k \to \infty. \end{aligned}$$

Así $u \notin RV_p[0,1]$. Como $\bigcap_{\Lambda} \Lambda_p BV[0,1] = RV_p[0,1]$ entonces $u \notin \Lambda_p BV[0,1]$ para al menos una sucesión Λ.

1.12 Φ-Variación Acotada en el Sentido de Schramm.

Se inicia esta sección presentando la noción de ϕ-sucesión, para la mejor comprensión de la definición del espacio de funciones de Φ-variación acotada en el sentido de Schramm.

Definición 1.26 ϕ**-sucesión**

Sea $\phi = \{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión no decreciente de φ-funciones convexas. Se dice que ϕ es una ϕ-sucesión si satisface las siguientes condiciones:

i) $\varphi_{n+1}(t) \leq \varphi_n(t)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $t \in [0,\infty)$.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t)$ diverge para $t > 0$.

En los siguientes ejemplos se presentan algunas ϕ-sucesiones.

Ejemplo 1.21

1. $\Phi = \{\phi_n(t) = t,\ \ t \geq 0\}_{n\geq 1}$.
2. $\Phi = \left\{\phi_n(t) = \frac{e^t - 1}{n},\ \ t \geq 0\right\}_{n\geq 1}$.
3. $\Phi = \left\{\phi_n(t) = \frac{t^2}{n^p},\ \ t \geq 0\right\}_{n\geq 1}$ para $0 < p \leq 1$.

En cada caso, Φ es una ϕ-sucesión.

N En general, si $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es una φ-función convexa, $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión decrecientes de números positivos, además, si se considera $\phi = \{\varphi_n(t) = \varphi(t)a_n,\ t \geq 0\}_{n\geq 1}$, entonces ϕ es una ϕ-sucesión si y solo si $\sum a_n$ diverge.

Algunas de las propiedades elementales de las funciones convexas son presentadas en la siguiente proposición:

Proposición 1.33

Sean $x, y \in [0,\infty)$ tales que $y > x$. Para cada $n \geq 1$

$$\frac{\varphi_n(y) - \varphi_n(x)}{y - x} \leq \varphi_n(y+1) - \varphi_n(y) < \varphi_n(y+1) \leq \varphi_1(y).$$

La propiedad anterior implica que la ϕ-sucesión ϕ es equicontinua en todo intervalo $[0,b]$, $b < \infty$. Para la siguiente definición se consideran sucesiones finitas o numerables de intervalos cerrados $\{I_k\}_{k\geq 1}$, donde los intervalos de las sucesiones están contenidos en un intervalo $I = [a,b]$ y la intersección de dos de ellos distintos, es vacía o un punto. La familia de todas las sucesiones de intervalos con estas características se denotan por: $F_{\mathbb{N}}[a,b]$.

M. Schramm (1985), en [158] introduce la noción de ϕ-variación acotada, generalizando la noción dada por D. Waterman en el año 1976 de la siguiente manera:

Definición 1.27 **ϕ-variación acotada en el sentido de Schramm**

Sean ϕ una ϕ-sucesión y $\{I_n\}$ una colección de intervalos de $I = [a,b]$ tales que la intersección $I_i \cap I_j$ es vacía o contiene un punto, para todo $i, j \geq 1$, $i \neq j$. Se definen

$$\sigma_\phi(u,\pi) := \sum_n \varphi_n(|u(I_n)|)$$

y

$$V_\phi(u) = V_\phi(u;[a,b]) := \sup_{\{I_n\}_{n\geq 1} \in F_{\mathbb{N}}(I)} \sigma_\phi(u,\pi),$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones π del intervalo $[a,b]$. $V_\phi(u)$ es llamado la ϕ-variación de la función u en el intervalo $[a,b]$ en el sentido de Schramm. Si $V_\phi(u) < \infty$ se dice que u tiene ϕ-variación acotada en el sentido de Schramm.

Se denota por $V_\phi[a,b]$ la clase de todas las funciones $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que $V_\phi(u) < \infty$.

N El espacio generado por esta clase viene dado por

$$BV_\phi[a,b] = \{u : [a,b] \to \mathbb{R} : \exists\, \lambda > 0, V_\phi(\lambda u;[a,b]) < \infty\},$$

el cual, es el espacio de todas las funciones que tienen ϕ-variación acotada en el sentido de Schramm.

N Si ϕ es una ϕ-sucesión y u tiene ϕ-variación acotada, entonces u es acotada y solo tiene discontinuidades simples.

En el siguiente ejemplo se presenta una función perteneciente a la clase de funciones ϕ-variación acotada y que, además, no pertenece al espacio de funciones de φ-variación acotada.

Ejemplo 1.22 **(Ver (14))**

La función $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida como

$$\varphi := \begin{cases} 0 & t = 0, \\ e^{-1/t} & 0 < t < \frac{1}{4}, \\ \frac{16t-3}{e^4} & t \geq \frac{1}{4}; \end{cases}$$

es una función de Young. Sea $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln(m)} & x = \frac{1}{m},\ m \geq 2; \\ 0 & x \neq \frac{1}{m}. \end{cases}$$

Considerando la partición $\pi_n := \{0, s_n, t_n, s_{n-1}, t_{n-1}, \cdots, s_2, t_2, s_1\}, n \geq 2$ donde $s_k := 1/k$ y $t_n \in (s_k, s_{k-1})$ es arbitrario, entonces $u \notin BV_\varphi[0,1]$ y considerando la sucesión $\phi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi_n(t) = t^2/n, n \in \mathbb{N}$, se obtiene que $u \in BV_\phi[0,1]$.

N Varios espacios de funciones de variación acotada se obtienen como caso particular de la Definición de ϕ-variación acotada en el sentido de Schramm, tal como se muestra a continuación:

a) Si $\varphi_n(t) = t$, para todo $n \geq 1$ y todo $t \in [0,\infty)$, entonces $BV_\phi[a,b] = BV[a,b]$ (Ver [73]).

b) Si $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una Λ-sucesión en el sentido de Waterman y $\varphi_n(t) = \frac{t}{\lambda_n}$ para todo $n \geq 1$ y todo $t \in [0,\infty)$, entonces $BV_\phi[a,b] = \Lambda BV[a,b]$ (Ver [173]).

c) Si $\phi = \{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ es una φ-función y $\varphi_n(t) = \varphi(t)$, para todo $n \geq 1$ y todo $t \in [0,\infty)$, se obtiene $BV_\phi[a,b] = BV_\varphi[a,b]$ (Ver [177]).

En el siguiente teorema se exponen algunas propiedades de la ϕ-variación de Schramm de una función y de la clase $V_\phi[a,b]$.

Teorema 1.25 (Ver [146])

Sea $\phi = \{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ una ϕ-sucesión y $u \in V_\phi[a,b]$, entonces

1. Si $[s,t] \subset [a,b]$, entonces $V_\phi(u;[s,t]) \leq V_\phi(u;[a,b])$.
2. u es acotada y $||u||_\infty \leq |u(a)| + \phi_1^{-1}(V_\phi(u))$.
3. Si u es monótona $V_\phi(u;[a,b]) = \varphi_1(|u(b) - u(a)|)$.
4. $V_\phi[a,b]$ es un conjunto simétrico y convexo.
5. La función $V_\phi : V_\phi[a,b] \to [0,\infty)$, que asocia a cada función $u \in V_\phi[a,b]$ su ϕ-variación en el sentido de Schramm, es convexa.

M. Schramm (1985), en [158], demuestra que $BV_\phi[a,b]$ es un espacio y álgebra de Banach con la norma

$$\|u\|_\phi := \|u(a)\| + \text{ínf}\left\{k > 0 : \ V_\phi\left(\frac{u}{k};[a,b]\right) \leq 1\right\}.$$

El lema que ahora se presenta es una herramienta útil para demostrar que el espacio $BV_\phi[a,b]$, introducido por Schramm, es un espacio normado y de Banach (Ver [158]).

Lema 1.11 (Lema 2.1 [158], Pág. 51)

Sea $u \in BV_\phi[a,b]$. Entonces

a) $V_\phi\left(\frac{u}{\|u\|_\phi};[a,b]\right) \leq 1$ si $\|u\|_\phi \neq 0$.

b) $c > \|u\|_\phi$ si y solo si $V_\phi\left(\frac{u}{c}\right) \leq 1$.

En lo que sigue se presentan dos teoremas que demuestran que el espacio $BV_\phi[a,b]$ es un espacio normado y de Banach (para detalles de las demostraciones ver [66]).

Teorema 1.26

Sea $\phi = \{\phi_n\}_{n\geq 1}$ una ϕ-sucesión, entonces el espacio $\left(BV_\phi[a,b], ||\cdot||_\phi\right)$ es un espacio de Banach.

Teorema 1.27

Sea $\phi = \{\phi_n\}_{n\geq 1}$ una ϕ-sucesión, entonces el espacio $BV_\phi[a,b]$ con la norma $||\cdot||_1$ definida por

$$||u||_1 := ||u||_\infty + ||u||_\phi, \ \ u \in BV_\phi[a,b]$$

o la norma $||\cdot||_2$ definida por

$$||u||_2 := 2\,\text{máx}\left\{\phi_1^{-1}(1), 1\right\}||u||_\phi, \ \ u \in BV_\phi[a,b]$$

es un álgebra de Banach y además las normas $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ y $||\cdot||_\phi$ son equivalentes.

1.13 $\kappa\phi$-Variación Acotada en el Sentido de Schramm-Korenblum.

S. K. Kim y J. Kim (1986), en [76] combinan el concepto de κ-variación y ϕ-variación introducido por B. Korenblum y M. Schramm, respectivamente, para crear el concepto de $\kappa\phi$-variación o variación en el sentido de Schramm-Korenblum, como se muestra a continuación:

Definición 1.28 $\kappa\phi$-Variación Acotada

Sean $\kappa : [0,1] \to [0,1]$ una función distorsión, $\phi = \left\{\varphi_n\right\}_{n\geq 1}$ una ϕ-sucesión, $\{I_n = [a_n, b_n]\}_{n\geq 1} \in F_{\mathbb{N}}[a,b]$ y $u : [a,b] \to \mathbb{R}$. Se definen

$$\kappa\sigma_\phi(u, I_n) := \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n\left(|u(b_n) - u(a_n)|\right)}{\sum_{n=1}^{\infty} \kappa\left(\frac{b_n - a_n}{b-a}\right)}$$

y

$$\kappa V_\phi(u) = \kappa V_\phi(u; [a,b]) := \sup_{I_n \in F_{\mathbb{N}}[a,b]} \kappa\sigma_\phi(u, I_n),$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones $F_{\mathbb{N}}[a,b]$. $\kappa V_\phi(u)$ es llamada la $\kappa\phi$-variación de u en el sentido de Schramm-Korenblum en $[a,b]$. Si $\kappa V_\phi(u;[a,b]) < \infty$ se dice que u tiene $\kappa\phi$-variación acotada en el intervalo $[a,b]$.

La clase de funciones que tienen $\kappa\phi$-variación acotada en el intervalo $[a,b]$ se denota por $\kappa V_\phi[a,b]$. El espacio vectorial generado por esta clase es denotado por $\kappa BV_\phi[a,b]$.

N Un caso particular de una ϕ-sucesión es cuando todas las funciones φ_n, $n \in \mathbb{N}$ son iguales a una φ-función fija φ. En esta situación la clase $\kappa V_\varphi[a,b]$ es la clase de todas las funciones que tienen $\kappa\varphi$-variación acotada en el sentido de Wiener-Korenblum. Esta clase de funciones es denotada por $\kappa V_\varphi[a,b]$ y el espacio vectorial generado por esta clase de funciones es denotado por $\kappa BV_\varphi[a,b]$.

Algunos resultados obtenidos de las funciones de $\kappa\phi$-variación acotada en el sentido de Schramm-Korenblum se presentan en el siguiente teorema, como contribución al tema (Ver [72]).

Teorema 1.28

Sea $\kappa : [0,1] \to [0,1]$ una función distorsión y $\phi = \{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ una ϕ-sucesión, entonces

(1) $\kappa BV_\phi[a,b]$ es un espacio de Banach dotado con la norma

$$\|u\|_{\kappa\phi} := |u(a)| + \mu_\phi(u) \quad (u \in \kappa BV_\phi[a,b]),$$

donde $\mu_\phi(u) := \inf\limits_{\lambda>0} \left\{\lambda > 0 : \kappa V_\phi\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\}$.

(2) Si u es monótona, entonces $\kappa V_\phi(u) = \varphi_1(|u(b) - u(a)|)$.

(3) Si $u \in \kappa V_\phi[a,b]$, entonces u es acotada y $\|u\|_\infty \leq |u(a)| + 2\varphi_1^{-1}\left(\kappa V_\phi(u)\right)$.

(4) $\kappa V_\phi[a,b]$ es un conjunto convexo y simétrico.

(5) $\kappa BV_\phi[a,b] = \{u : [a,b] \to \mathbb{R} : \exists\lambda > 0 \text{ tal que } \kappa V_\phi(\lambda u) < \infty\}$.

(6) $BV[a,b] \subset V_\phi[a,b] \subset \kappa V_\phi[a,b]$ por consiguiente $BV[a,b] \subset BV_\phi[a,b] \subset \kappa BV_\phi[a,b]$.

(7) $\kappa BV[a,b] \subset \kappa BV_\phi[a,b]$.

(8) $u \in \kappa V_\phi[a,b]$ entonces u tiene límites laterales en cada punto de $[a,b]$.

Demostración:

Parte (1) Ver [76].

Parte (2) Sea u una función monótona, consideremos $\{[a_n,b_n]\}_{n\geq 1} \in F_{\mathbb{N}}[a,b]$, entonces la función $0 < t \to \dfrac{\varphi_n(t)}{t}$ es creciente, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(|u(b_n) - u(a_n)|)}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \kappa\left(\dfrac{b_n - a_n}{b-a}\right)} &= \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\varphi_n(|u(b_n) - u(a_n)|)}{|u(b_n) - u(a_n)|}|u(b_n) - u(a_n)|}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \kappa\left(\frac{b_n - a_n}{b-a}\right)} \\
&\leq \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\varphi_n(|u(b) - u(a)|)}{|u(b) - u(a)|}|u(b_n) - u(a_n)|}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \kappa\left(\frac{b_n - a_n}{b-a}\right)} \\
&\leq \frac{\varphi_1(|u(b) - u(a)|)}{|u(b) - u(a)|}\sum_{n=1}^{\infty} |u(b_n) - u(a_n)| \\
&= \varphi_1(|u(b) - u(a)|).
\end{aligned}$$

Así se obtiene que

$$\kappa V_\phi(u) \le \varphi_1\left(|u(b)-u(a)|\right).$$

De la definición de $\kappa V_\phi(u)$ se obtiene la desigualdad recíproca.

Parte (3) Sea $a < t \le b$, por lo tanto,

$$\frac{\varphi_1\left(|u(t)-u(a)|\right)}{\kappa\left(\frac{t-a}{b-a}\right)+\kappa\left(\frac{b-t}{b-a}\right)} \le \kappa V_\phi(u),$$

entonces $\varphi_1\left(|u(t)-u(a)|\right) \le 2\kappa V_\phi(u)$ y de esta desigualdad se obtiene la relación requerida.

Parte (4) Se obtiene por la convexidad de las funciones $\varphi_n,\ n\in\mathbb{N}$ y la definición de $\kappa\phi$-variación.

Parte (5) Se obtiene haciendo uso de la parte (4) y el Lema 1.8.

Parte (6) Sea $u\in BV[a,b]$ y consideremos $\{[a_n,b_n]\}_{n\ge1}\in F_{\mathbb{N}}[a,b]$. Se define

$$A := \{n\in\mathbb{N} : |u(b_n)-u(a_n)| \le 1\}.$$

Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\left(|u(b_n)-u(a_n)|\right) \le \varphi_1(1)\sum_{n\in A}|u(b_n)-u(a_n)| + \sum_{n\notin A}\varphi_n(|u(b_n)-u(a_n)|).$$

La última suma tiene al menos $[\![V(u)]\!]$ términos, donde $[\![x]\!] = \text{máx}\{n : n\le x\}$. Porque de lo contrario tiene al menos $[\![V(u)]\!]+1$ sumandos. Así,

$$V(u) \ge \sum_{n\notin A}|u(b_n)-u(a_n)| \ge [\![V(u)]\!]+1,$$

el cual es una contradicción. Por consiguiente

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\left(|u(b_n)-u(a_n)|\right) &\le \varphi_1(1)V(u)+\sum_{n\notin A}\varphi_n(|u(b_n)-u(a_n)|)\\ &\le \varphi_1(1)V(u)+\varphi_1(2\|u\|_\infty)[\![V(u)]\!].\end{aligned}$$

Esto concluye que $BV[a,b]\subset V_\phi[a,b]$. Para demostrar que $V_\phi[a,b]\subset\kappa V_\phi[a,b]$, sea $u\in V_\phi[a,b]$ y $\{[a_n,b_n]\}_{n\ge1}\in F_{\mathbb{N}}[a,b]$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(|u(b_n)-u(a_n)|) \le V_\phi(u)\kappa(1) \le V_\phi(u)\kappa\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n-a_n}{b-a}\right).$$

Por lo tanto $\kappa V_\phi(u) \le V_\phi(u)$.

Parte (7) Sea $u \in \kappa BV[a,b]$, entonces por la parte (3) u es acotado en $[a,b]$. Sea $\lambda > 0$ fijo, tal que $||\lambda u||_\infty \leq \frac{1}{2}$. Sea $\{[a_n,b_n]\}_{n\geq 1} \in F_{\mathbb{N}}[a,b]$, entonces de la convexidad de las funciones $\varphi_n,\ n \in \mathbb{N}$, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n\left(|\lambda u(b_n) - \lambda u(a_n)|\right)}{\sum_{n=1}^{\infty} \kappa\left(\frac{b_n-a_n}{b-a}\right)} &\leq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(1)\lambda|u(b_n)-u(a_n)|}{\sum_{n=1}^{\infty} \kappa\left(\frac{b_n-a_n}{b-a}\right)} \\
&\leq \varphi_1(1)\lambda \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |u(b_n)-u(a_n)|}{\sum_{n=1}^{\infty} \kappa\left(\frac{b_n-a_n}{b-a}\right)} \\
&\leq \varphi_1(1)\lambda\kappa V(u).
\end{aligned}$$

Por el Lema 1.8 se concluye que $u \in \kappa BV_\phi[a,b]$.

Parte (8) Supongamos que existe $t^* \in (a,b]$ tal que $\lim\limits_{t\uparrow t^*} u(t)$ no existe. Por la parte (3) u es acotada, entonces

$$\alpha = \lim_{t\uparrow t^*} inf\, u(t) < \lim_{t\uparrow t^*} sup\, u(t) = \beta, \quad (\alpha,\beta \in \mathbb{R}).$$

Para cada entero n (suficientemente grande) se puede elegir t_n, t_n', tal que

$$t^* - \frac{1}{n} < t_n < t_n' < t^* \quad y \quad |u(t_n) - u(t_n')| \geq \beta - \alpha.$$

Haciendo uso de la definición de $\kappa\phi$-variación, se tiene

$$\frac{\varphi_1\left(\left|u(t_n) - u(t_n')\right|\right)}{\kappa\left(\frac{t_n-a}{b-a}\right) + \kappa\left(\frac{t_n'-t_n}{b-a}\right) + \kappa\left(\frac{b-t_n'}{b-a}\right)} \leq \kappa V_\phi(u).$$

Así,

$$\varphi_1\left(\beta-\alpha\right) \leq \kappa V_\phi(u)\left(2 + \kappa\left(\frac{1}{n(b-a)}\right)\right).$$

Considerando el límite, cuando $n \to \infty$, se obtiene que $\varphi_1(\beta-\alpha) = 0$, lo cual es absurdo. Así, se tiene que

$$\lim_{t\uparrow t^*} inf\, u(t) = \lim_{t\uparrow t^*} sup\, u(t).$$

Por un argumento similar se sigue que existe $\lim\limits_{t\downarrow t^*} u(t),\ t^* \in [a,b)$.

□

Si se asume que $\lim\limits_{t\to 0} \frac{k(t)}{t}$ es finito, entonces $V_\phi[a,b] = \kappa V[a,b]$. Por la última parte del Teorema 1.13, se puede definir la regularización izquierda y derecha de la función $u \in \kappa BV_\phi[a,b]$.

Definición 1.29

Sea $u \in \kappa BV_\phi[a,b]$ entonces

$$u^-(t) := \begin{cases} \lim\limits_{s\uparrow t} u(s) & , \quad t \in (a,b] \\ u(a) & , \quad t = a \end{cases} .$$

y

$$u^+(t) := \begin{cases} \lim\limits_{s\downarrow t} u(s) & , \quad t \in [a,b) \\ u(b) & , \quad t = b \end{cases} .$$

La función u^- es llamada la regularización izquierda de la función u. Y la función u^+ la regularización derecha de la función u.

Aplicando la definición previa y la última parte del Teorema 1.13, se define

$$\kappa BV_\phi^-[a,b] := \left\{u^- : u \in \kappa BV_\phi[a,b]\right\}.$$

Similarmente, se define $\kappa BV_\phi^+[a,b]$.

Definiéndose el espacio $\kappa BV_{\phi_0} = \left\{u \in \kappa BV_\phi \mid u(a) = 0\right\}$, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1.29 (Ver [136])

Sea $\{u_n\} \in \kappa BV_{\phi_0}$ una sucesión tal que u_n converge a u en casi todas partes con $u \in \kappa BV_{\phi_0}$. Entonces

$$||u||_{\kappa\phi} \leq \lim_{n\to\infty} \inf ||u_n||_{\kappa\phi},$$

es decir, la norma Luxemburg es semi-continua inferiormente en κBV_{ϕ_0}.

Lema 1.12 (Ver [136])

Para toda función distorsión y toda ϕ-sucesión $\phi = \{\varphi_n\}_{n\geq 1}$, se tiene que

1. $\kappa V_\phi\left(\dfrac{u}{||u||_{\kappa\phi}}\right) \leq 1,\ u \in \kappa BV_\phi$.
2. Si $||u||_{\kappa\phi} \leq 1$, entonces $\kappa V_\phi(u) \leq ||u||_{\kappa\phi},\ \ u \in \kappa BV_\phi$.

Lema 1.13 (Ver [72]) Sean $\kappa : [0,1] \to [0,1]$ una función distorsión, $\phi = \{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ una ϕ-sucesión, $u \in \kappa BV_\phi$ y $c > 0$. Entonces $\mu_\phi(u) < c$ si y solo si $\kappa V_\phi\left(\dfrac{u}{c}\right) < 1$.

Definición 1.30

Sea $\Phi = \{\phi_n\}_{n\geq 1}$ una Φ-sucesión. Una función real $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ se dice que es de $\kappa\Phi$-decreciente en $[a,b]$ si existe una constante positiva c tal que para cada subintervalo I de $[a,b]$

$$\phi_n(|u(I)|) \leq c\kappa\left(\frac{|I|}{b-a}\right).$$

Teorema 1.30 (Ver [76] o [176])

Si una función u es $\kappa\Phi$-decreciente en $[a,b]$, entonces se tienen las siguientes propiedades

1. u es de $\kappa\Phi$-variación acotada.
2. $u(x_0^+)$ y $u(y_0^-)$ existe para todo $a \leq x_0 < b$ y $a < y_0 \leq b$.
3. u es continua en $[a,b]$.

1.13.1 κp-Variación Acotada en el Sentido de Riesz-Korenblum.

Recientemente M. Castillo, M. Sanoja y I. Zea (Ver [32]) introducen el concepto de κp-variación en el sentido de Riesz-Korenblum, de la siguiente manera:

Definición 1.31 κp-Variación Acotada

Sean $1 < p < \infty$, $\kappa : [0,1] \to [0,1]$ una función distorsión, $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $\pi : a = t_1 < \cdots < t_n = b$ una partición del intervalo $[a,b]$. Se definen

$$\kappa\sigma_p(u,\pi) := \frac{\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\left|u(t_{j+1}) - u(t_j)\right|^p}{\left|t_{j+1} - t_j\right|^{p-1}}}{\sum_{j=1}^{n-1} \kappa\left(\frac{t_{j+1}-t_j}{b-a}\right)}$$

y

$$\kappa V_p^R(u) = \kappa V_p^R(u;[a,b]) := \sup_{\pi} \kappa\sigma_p(u,\pi),$$

donde el supremo se considera sobre el conjunto de todas las particiones de $[a,b]$. El número $\kappa V_p^R(u;[a,b])$ se denomina la κp-variación de u en el sentido de Riesz-Korenblum en $[a,b]$. Si $\kappa V_p^R(u;[a,b]) < \infty$ se dice que u tiene κp-variación acotada en el intervalo $[a,b]$.

La clase de funciones que tienen κp-variación acotada en el intervalo $[a,b]$ se denota por $\kappa RV_p[a,b]$.

A continuación se presenta un ejemplo de una función perteneciente al espacio de las funciones de κp-variación acotada en el sentido de Riesz-Korenblum.

Ejemplo 1.23

Sean $1 < p < \infty$ y $u : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(t) = cos(t) \quad t \in [0,2\pi],$$

y la partición $\sigma : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 2\pi$ del intervalo $[0,2\pi]$, entonces por el Teorema de Valor Medio existe $t_{i-1} < r_i < t_i$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|^p}{|t_i - t_{i-1}|^{p-1}}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa\left(\frac{t_i - t_{i-1}}{b-a}\right)} &= \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{|cos(t_i) - cos(t_{i-1})|^p}{|t_i - t_{i-1}|^{p-1}}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa\left(\frac{t_i - t_{i-1}}{b-a}\right)} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{|cos'(r_i)(t_i - t_{i-1})|^p}{|t_i - t_{i-1}|^{p-1}}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa\left(\frac{t_i - t_{i-1}}{2\pi}\right)} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{|-sen(r_i)|^p |(t_i - t_{i-1})|^p}{|t_i - t_{i-1}|^{p-1}}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa\left(\frac{t_i - t_{i-1}}{2\pi}\right)}
\end{aligned}$$

puesto que $|sen(t)| \le 1$ se obtiene que

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|^p}{|t_i - t_{i-1}|^{p-1}}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa\left(\frac{t_i - t_{i-1}}{b-a}\right)} \le \sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}| = 2\pi$$

al considerar el supremo sobre todas las particiones σ de $[0,2\pi]$ se tiene que $\kappa V_p^R(u;[0,2\pi]) \le 2\pi$. Así $u \in \kappa RV_p[a,b]$.

Algunas resultados de estas funciones son expuestas en el siguiente teorema:

Teorema 1.31 (Ver [32])

Sea $1 < p < \infty$ y $\kappa : [0,1] \to [0,1]$ una función distorsión, entonces

1. $\kappa RV_p[a,b]$ es un espacio de Banach dotado con la norma

$$\|u\|_{\kappa p} := |u(a)| + \left(\kappa V_p^R(u)\right)^{1/p} \qquad (u \in \kappa RV_p[a,b]).$$

2. $Lip[a,b] \subset RV_p[a,b] \subset \kappa RV_p[a,b] \subset \kappa BV[a,b]$.

3. $\kappa RV_p[a,b]$ es un álgebra de Banach.

1.13.2 $\kappa\varphi$-Variación Acotada en el Sentido de Riesz-Korenblum.

El concepto de kp-variación acotada en el sentido de Riesz-Korenblum fue generalizado por M. Castillo, S. Rivas, M. Sanoja y I. Zea (Ver [31]) como sigue a continuación:

Definición 1.32 $\kappa\varphi$-Variación Acotada

Sean φ una φ-función, $\kappa : [0,1] \to [0,1]$ una función distorsión, $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ una partición del intervalo $[a,b]$. Se definen

$$\kappa\sigma_\varphi(u,\pi) := \frac{\sum_{j=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{|u(t_{j+1}) - u(t_j)|}{|t_{j+1} - t_j|}\right) |t_{j+1} - t_j|}{\sum_{j=1}^{n-1} \kappa\left(\frac{t_{j+1}-t_j}{b-a}\right)}$$

y

$$\kappa V_\varphi^R(u) = \kappa V_\varphi^R(u; [a,b]) := \sup_\pi \kappa\sigma_\varphi(u,\pi),$$

donde el supremo se considera sobre el conjunto de todas las particiones π de $[a,b]$. $\kappa V_\varphi(u)$ es llamada la $\kappa\varphi$-variación de u en el sentido de Riesz-Korenblum en $[a,b]$. Si $\kappa V_\varphi(u; [a,b]) < \infty$ se dice que u tiene $\kappa\varphi$-variación acotada en el intervalo $[a,b]$.

La clase de funciones que tienen $\kappa\varphi$-variación acotada en el intervalo $[a,b]$ se denota por $\kappa V_\varphi^R[a,b]$. El espacio vectorial generado por esta clase se denota por $\kappa RV_\varphi[a,b]$.

A continuación se presenta un ejemplo de una función perteneciente al espacio de $\kappa\varphi$-variación acotada.

Ejemplo 1.24

Sea $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$u(t) := et + d, \quad t \in [a,b], \text{ donde } d, e \text{ son números reales fijos.}$$

Dada una partición $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ del intervalo $[a,b]$ se tiene que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|}\right) |t_i - t_{i-1}|}{\sum_{i=1}^{n} \kappa\left(\frac{t_i - t_{i-1}}{b-a}\right)} = \frac{\varphi(|e|)(b-a)}{\sum_{i=1}^{n} \kappa\left(\frac{t_i - t_{i-1}}{b-a}\right)}$$

considerando el supremo sobre todas las particiones π del intervalo $[a,b]$, el mayor valor del lado derecho de la expresión anterior, se obtiene para la partición $\pi : a = t_0 < t_1 = b$ y en este caso

$$\frac{\varphi(|e|)(b-a)}{\sum_{i=1}^{n} \kappa\left(\frac{t_i - t_{i-1}}{b-a}\right)} = \frac{\varphi(|e|(b-a))}{\kappa(1)} = \varphi(|e|)(b-a).$$

Por lo tanto $\kappa V_\varphi^R(u; [a,b]) = \varphi(|e|(b-a))$.

Algunos resultados de estas funciones son expuestas en el siguiente teorema.

Teorema 1.32 (Ver [31])

Sean φ una φ-función convexa y $\kappa : [0,1] \to [0,1]$ una función distorsión, entonces

1. $Lip[a,b] \subset \kappa V_{\varphi}^{R}[a,b] \subset \kappa BV[a,b]$.
2. $RV_{\varphi}[a,b] \subset \kappa V_{\varphi}^{R}[a,b] \subset \kappa BV[a,b]$.
3. Si $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{t} < \infty$, entonces $\kappa V_{\varphi}^{R}[a,b] = \kappa BV[a,b]$.
4. Si $u \in \kappa V_{\varphi}^{R}[a,b]$, entonces u es acotada.
5. $\kappa V_{\varphi}^{R}[a,b]$ es un conjunto convexo y simétrico.
6. $\kappa RV_{\varphi}[a,b] = \left\{ u : [a,b] \to \mathbb{R} : \exists \lambda > 0 \text{ tal que } \kappa V_{\phi}^{R}(\lambda u) < \infty \right\}$.
7. $\kappa RV_{\varphi}[a,b]$ es un espacio de Banach dotado con la norma
$$\|u\|_{\kappa\varphi} := |u(a)| + \mu_{\kappa\varphi}(u) \quad (u \in \kappa RV_{\varphi}[a,b]),$$
donde $\mu_{\kappa\varphi}(u) := \inf\limits_{\lambda>0} \left\{ \lambda > 0 : \kappa V_{\varphi}^{R}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \le 1 \right\}$.

Para culminar esta sección se presenta un conjunto de ejemplos de funciones perteneciente a algunos espacios de funciones nombrados anteriormente, el cual demuestran algunas inclusiones estrictas (Ver Figura 1.1) y por último (Ver Figura 1.2) se presentan algunas relaciones de contenciones, entre varios espacios de funciones de variación acotada generalizada, expuestos a lo largo de este capítulo.

Ejemplo 1.25

Sean $I = [0,1]$ y la familia de dos parámetros de funciones oscilatorias $u_{\beta,\gamma} : I \to \mathbb{R}$ definido para $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ por

$$u_{\beta,\gamma}(t) \begin{cases} t^{\beta} \operatorname{sen} t^{\gamma}, & \text{para } 0 < t \le 1, \\ 0, & \text{para } t = 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

1. $u_{\beta,\gamma} \in C^1(I)$ para $\beta + \gamma > 1$.
2. $u_{\beta,\gamma} \in Lip(I)$ para $\beta + \gamma \le 1$.
3. $u_{\beta,\gamma} \in RV_p(I)$ para $\gamma > 0$ y $p\beta - \gamma \le p - 1$ o para $\gamma \ge 0$ y $p\beta + \gamma > p - 1$.
4. $u_{\beta,\gamma} \in AC(I)$ para $\beta + \gamma > 0$.
5. $u_{\beta,\gamma} \in C(I)$ para $\beta > 0$ y γ arbitrario o $\beta \le 0$ y $\beta + \gamma > 0$.
6. $u_{\beta,\gamma} \in Lip_{\alpha}(I)$ para $\alpha\beta + \gamma \ge \alpha$.

7. $u_{\beta,\gamma} \in WBV_p(I)$ para $\gamma > 0$ y $p\beta + \gamma \geq 0$ o para $\gamma \leq 0$ y $p\beta + \gamma > 0$.

8. $u_{\beta,\gamma} \in BV(I)$ para $\beta + \gamma > 0$.

La familia de funciones (1.6) hace que sea posible demostrar que las contenciones de algunas de estas clases de funciones en la Figura 1.1 sea estricta.

1. Para $\beta + \gamma = 1$ por ejemplo $\beta = \frac{1}{3}$ y $\gamma = \frac{2}{3}$ la función $u_{\beta,\gamma}$ pertenece a $Lip[0,1]$ pero no pertenece a $C^1[0,1]$.

2. Para $\beta + \gamma < 1$ y $p\beta + \gamma \geq p - 1$ por ejemplo $p = 2$ y $\beta = \gamma = \frac{1}{3}$ la función $u_{\beta,\gamma}$ pertenece a $RV_p[0,1]$ pero no pertenece a $Lip[0,1]$.

3. Para $p\beta + \gamma < p - 1$ y $\beta + \gamma > 0$ por ejemplo $p = 2$ y $\beta = \gamma = \frac{1}{4}$ la función $u_{\beta,\gamma}$ pertenece a $AC[0,1]$ pero no pertenece a $RV_p[0,1]$.

4. Para $p\beta + \gamma > 0$ y $\beta + \gamma \leq 0$ por ejemplo $p = 2$, $\beta = \frac{1}{3}$ y $\gamma = -\frac{1}{3}$ la función $u_{\beta,\gamma}$ pertenece a $WBV_p[0,1]$ pero no pertenece a $BV[0,1]$.

5. Para $\gamma \leq 0$ y $0 < p\beta + \gamma < p$ por ejemplo $p = 2$, $\beta = 1$ y $\gamma = -1$ la función $u_{\beta,\gamma}$ pertenece a $WBV_p[0,1]$ pero no pertenece a $Lip_{\frac{1}{p}}[0,1]$.

6. $\beta + \gamma < 1 \leq \beta + p\gamma$ por ejemplo $p = 2$ y $\beta = \gamma = \frac{1}{3}$ la función $u_{\beta,\gamma}$ pertenece a $Lip_{\frac{1}{p}}[0,1]$ pero no pertenece a $Lip[0,1]$.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
C^1(I) & \subset & Lip(I) & \subset & RV_p(I) & \subset & AC(I) & \subset & C(I) \\
 & & \cap & & \cap & & \cap & & \cap \\
 & & Lip_{1/p}(I) & \subset & WBV_p(I) & \supset & BV(I) & \subset & L_p(I)
\end{array}
$$

Figura 1.1: Relaciones entre Espacios de Funciones

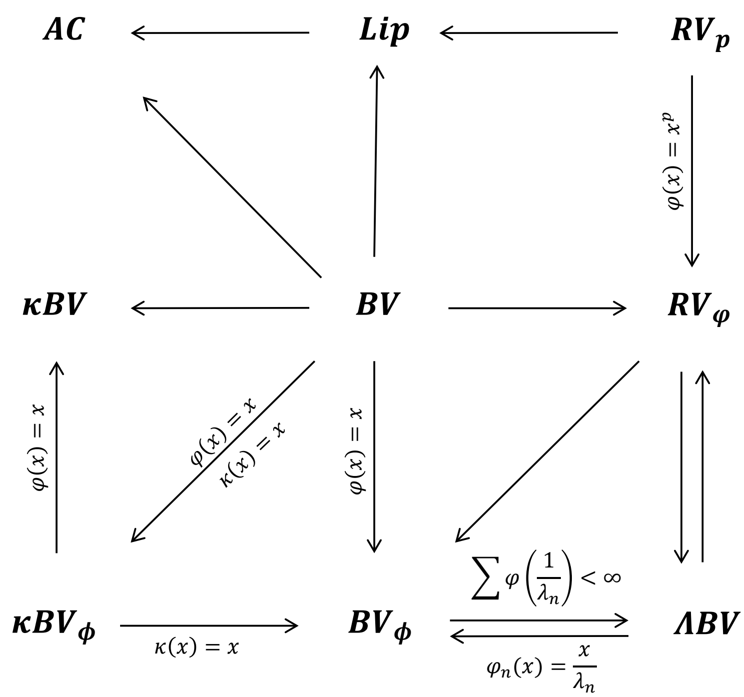

Figura 1.2: Implicaciones de Espacios de Variación Acotada Generalizada

2 Espacio de Funciones de Variación Acotada con Exponente Variable

El espacio de Lebesgue con exponente variable aparece en la literatura en el artículo de W. Orlicz (1931) en [134]. Motivado en el estudio de los espacios de funciones que contienen todas las funciones medibles $u:\Omega\to\mathbb{R}$ tales que

$$\rho(\lambda u)=\int_{\Omega}\varphi(\lambda|u(x)|)dx<\infty,$$

para algún $\lambda>0$, una función φ que satisface alguna suposición natural y Ω es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$. Este espacio es denotado por L^{φ} y es ahora llamado espacio de Orlicz. Orlicz introduce el espacio $L^{p(\cdot)}[0,1]$ y demuestra que la condición necesaria y suficiente en las funciones arbitrarias f y g para que $\int_0^1 f(x)g(x)dx<\infty$ es que exista algún $\lambda>0$ tal que $\int_0^1\left(\frac{|g(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)}dx<\infty$.

En la década de 1950, H. Nakano (1950) y (1951) en [129] y [130], respectivamente, hizo el primer estudio sistemático de los espacios de Orlicz con exponente variable y más tarde, algunos matemáticos polacos y checoslovacos investigaron los espacios de funciones modulares (Ver [127], [128], [80]). Referimos al lector al libro de V. D. Rădulescu y D. D. Repovš (2015) en [140] para la información detallada sobre el enfoque teórico de los espacios de Lebesgue y Sobolev con exponentes variables.

En los últimos años, ha habido un creciente interés en el estudio de diversos problemas matemáticos que involucran espacios de funciones con exponentes variables. En particular, los problemas no lineales en ciencias aplicadas, espacios de Lebesgue y Sobolev demostraron sus limitaciones en aplicaciones. La clase de problemas no lineales con un crecimiento exponencial es un nuevo campo de investigación y refleja un nuevo tipo de fenómenos físicos. En el año 2000, el campo de investigación se amplió aún más motivado por los problemas en el estudio de los fluidos electrorreológicos[1], L. Diening (2004) en [48] planteó la pregunta sobre el operador maximal de Hardy-Littlewood y otros operadores clásicos en el análisis armónico son acotados en el espacio de Lebesgue variable. Estos y los problemas relacionados son objeto de investigación activa en la actualidad. Por sus diversos problemas en aplicaciones (Ver [18], [49], [52], [140], [184]) dieron lugar a un renacimiento del interés en espacios de Lebesgue y Sobolev con exponente variable cuyos orígenes se remontan a los trabajos de Orlicz en 1930 (Ver [134]).

R. Castillo, N. Merentes y H. Rafeiro (2014), en [30], estudiaron un nuevo espacio de funciones de varia-

[1] Los fluidos electrorreológicos son líquidos que cambian su estado en presencia de campo eléctrico.

ción acotada generalizada. En sus trabajos, los autores introducen la noción de $p(\cdot)$-variación acotada en el sentido de Wiener con exponente variable y demuestran una serie de propiedades de este espacio. En éste capítulo, como contribución al tema, se presentan los siguientes resultados en el marco de las funciones de variación acotada generalizada con exponente variable:

- Propiedades del espacio de funciones de $p(\cdot)$-variación acotada en el sentido de Wiener (Ver [111]).
- Extensión de la noción de $p(\cdot)$-variación acotada en el sentido de Wiener, de las funciones de $p(\cdot)$-variación acotada en el sentido de Wiener-Korenblum con exponente variable y se demuestra que el espacio de dichas funciones tiene estructura de espacio de Banach (Ver [112]).
- Noción de $\Lambda_{p(\cdot)}$-variación acotada en el sentido de Waterman-Shiba con exponente variable y se demuestran algunos resultados para este tipo de funciones (Ver [56]).
- Noción de $(p(\cdot),2)$-variación acotada en el sentido de De la Vallée Poussin-Wiener; además, se obtienen algunos resultados para las funciones con este tipo de variación (Ver [114]).

Además, para estos nuevos espacios, se obtiene un teorema de representación vía composición.

2.1 Variación en el Sentido de Wiener.

En esta sección se presenta la noción del espacio de $p(\cdot)$-variación acotada en el sentido de Wiener con exponente variable, introducido por R. Castillo, N. Merentes, H. Rafeiro (2014) en [30]; y como contribución, se demuestran algunas propiedades del espacio y un teorema estructural para este tipo de funciones (Ver [111]).

Se denota por $\omega_{p(x_{ts})}(u,[a,b]) = \sup\left\{|u(t)-u(s)|^{p(x_{ts})} : \; t,s \in [a,b]\right\}$ y por x_{ts} un número entre $[t,s]$.

R. Castillo, N. Merentes y H. Rafeiro (2014) en [30] introducen la noción de espacio de variación acotada en el sentido de Wiener con exponente variable en $[a,b]$ y estudian algunas de sus propiedades básicas, como se muestran a continuación:

Definición 2.1 $p(\cdot)$**-Variación Acotada**

Sean $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función, $\pi: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ una partición del intervalo $[a,b]$ y $p:[a,b]\to(1,\infty)$ una función. Se definen

$$\sigma^W_{p(\cdot)}(u,\pi^*) = \sum_{i=1}^{n} |u(t_i)-u(t_{i-i})|^{p(x_{i-1})}$$

y

$$V^W_{p(\cdot)}(u;[a,b]) = V^W_{p(\cdot)}(u) = V^W_{p(\cdot)}(u,\pi^*) := \sup_{\pi^*} \sigma^W_{p(\cdot)}(u,\pi^*)$$

donde π^* es una partición seleccionada del intervalo $[a,b]$, es decir, una partición del intervalo $[a,b]$ junto con una sucesión finita de números $x_0,\ldots,x_{n-1}$ sujeta a la condición que para cada i, $t_i \le x_i \le t_{i+1}$. En el caso en que $V^W_{p(\cdot)}(u;[a,b])<\infty$, se dice que u tiene variación acotada Wiener con exponente variable (o $p(\cdot)$-variación acotada en el sentido de Wiener) en $[a,b]$.

El símbolo $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ denota la clase de las funciones de $p(\cdot)$-variación acotada en el sentido de Wiener con exponente variable en $[a,b]$.

N Dada una función $p : [a,b] \to (1,\infty)$,

1. Si se considera $p(x) = 1$, para todo x en $[a,b]$, entonces $WBV_{p(\cdot)}[a,b] = BV[a,b]$. Por esta razón en la Definición 2.1 se considera $1 < p < \infty$.

2. Si $p(x) = p$, para todo x en $[a,b]$ y $1 < p < \infty$, se tiene que $WBV_{p(\cdot)}[a,b] = WBV_p[a,b]$.

Definición 2.2
Una función admisible $p : [a,b] \to (1,\infty)$ es aquella función cuyo rango está en $(1,\infty)$ tal que $p_+ := \sup\limits_{x\in[a,b]} p(x)$ es finito.

Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Una función continua por la izquierda y convexa $\rho : X \to [0,\infty]$ es llamada pseudomodular convexa en X, si para x e y arbitrarios, se satisface que:

(i) $\rho(0) = 0$.

(ii) $\rho(\alpha x) = \rho(x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $|\alpha| = 1$.

(iii) $\rho(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha\rho(x) + (1-\alpha)\rho(y)$ para todo $\alpha \in [0,1]$.

Si toda ρ es pseudomodular en X entonces el conjunto definido por:

$$X_\rho := \left\{ x \in X \mid \lim_{\lambda\to 0} \rho(\lambda x) = 0 \right\}$$

es llamado espacio modular.

Lema 2.1
Sea p una función admisible. Entonces $V^W_{p(\cdot)}$ es pseudomodular convexa.

2.1.1 Propiedades de la Clase

En esta sección se presentan algunos resultados para las funciones pertenecientes a la clase de funciones de $p(\cdot)$-variación acotada en el sentido de Wiener con exponente variable.

Teorema 2.1
Dada una función $p : [a,b] \to (1,\infty)$ admisible y acotada, el conjunto $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ es un espacio vectorial.

Demostración:

Sean $u, v \in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$, entonces para cada partición $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ de $[a,b]$ y π^* es una partición seleccionada del intervalo $[a,b]$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\left(|(u+v)(t_j)-(u+v)(t_{j-1})|\right)^{p(x_{j-1})} &= \left(|u(t_j)+v(t_j)-u(t_{j-1})-v(t_{j-1})|\right)^{p(x_{j-1})}\\
&\leq \left(|u(t_j)-u(t_{j-1})|+|v(t_j)-v(t_{j-1})|\right)^{p(x_{j-1})}\\
&\leq 2^{p(x_{j-1})-1}\left[\left(|u(t_j)-u(t_{j-1})|\right)^{p(x_{j-1})}+\left(|v(t_j)-v(t_{j-1})|\right)^{p(x_{j-1})}\right].
\end{aligned}$$

Como p es acotada, entonces existe $M \geq 0$ tal que $2^{p(x_{j-1})-1} \leq M$ para todo x_j, así se obtiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\left(|(u+v)(t_j)-(u+v)(t_{j-1})|\right)^{p(x_{j-1})} &\leq M\sum_{j=1}^{n}\left(|u(t_j)-u(t_{j-1})|\right)^{p(x_{j-1})}\\
&+ M\sum_{j=1}^{n}\left(|v(t_j)-v(t_{j-1})|\right)^{p(x_{j-1})}.
\end{aligned}$$

En otras palabras, si $u,v \in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$, entonces la función $u+v$ es de $p(\cdot)$-variación acotada en el sentido de Wiener en $[a,b]$ y

$$V^W_{p(\cdot)}(u+v,[a,b]) \leq M\left(V^W_{p(\cdot)}(u,[a,b])+V^W_{p(\cdot)}(v,[a,b])\right).$$

Por otro lado, como $p(\cdot)$ es acotada, para todo x, existe $M \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\left(|(\alpha u)(t_j)-(\alpha u)(t_{j-1})|\right)^{p(x_{j-1})} &= \sum_{j=1}^{n}|\alpha|^{p(x_{j-1})}\left(|u(t_j)-u(t_{j-1})|\right)^{p(x_{j-1})}\\
&\leq M\sum_{j=1}^{n}\left(|u(t_j)-u(t_{j-1})|\right)^{p(x_{j-1})}
\end{aligned}$$

por lo tanto, $\alpha u \in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$. Así, se tiene que $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ es un espacio vectorial.

□

Proposición 2.1

Dada una función $p:[a,b] \to (1,\infty)$ admisible, el funcional $V^W_{p(\cdot)}(\cdot)$ es convexo.

Demostración:

Sean $u,v \in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Por el Teorema 2.1 $\alpha u \in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$. Así para $s>1$ y $t \geq 0$ la función $t \to t^s$ es convexa, entonces se tiene

$$\begin{aligned}
&\left(|((1-\alpha)u+\alpha v)(t_j)-((1-\alpha)u+\alpha v)(t_{j-1})|\right)^{p(x_{j-1})}\\
&\quad= \left(|(1-\alpha)u(t_j)+\alpha v(t_j)-(1-\alpha)u(t_{j-1})-\alpha v(t_{j-1})|\right)^{p(x_{j-1})}\\
&\quad\leq \left((1-\alpha)|u(t_j)-u(t_{j-1})|+\alpha|v(t_j)-v(t_{j-1})|\right)^{p(x_{j-1})}\\
&\quad\leq (1-\alpha)\left(|u(t_j)-u(t_{j-1})|\right)^{p(x_{j-1})}+\alpha\left(|v(t_j)-v(t_{j-1})|\right)^{p(x_{j-1})}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$V^W_{p(\cdot)}((1-\alpha)u+\alpha v,[a,b]) \leq (1-\alpha)V^W_{p(\cdot)}(u,[a,b])+\alpha V^W_{p(\cdot)}(v,[a,b]).$$

□

Definición 2.3 Norma

Sean $p:[a,b]\to(1,\infty)$ una función admisible y $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función. Se define el funcional $||\cdot||^W_{p(\cdot)}: WBV_{p(\cdot)}[a,b]\to\mathbb{R}$ por

$$||u||^W_{p(\cdot)} := |u(a)| + \mu_{p(\cdot)}(u), \quad u\in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$$

donde $\mu_{p(\cdot)}(u) := \inf_{\lambda>0}\left\{\lambda>0:\ V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\lambda}\right)\leq 1\right\}$.

Lema 2.2 (Ver [111])

Sea $u\in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ y $\lambda>0$. Entonces $\mu_{p(\cdot)}(u)<\lambda$ si y solo si $V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\lambda}\right)\leq 1$.

Demostración:

Sean $u\in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ y $\lambda>0$, supongamos que $\mu_{p(\cdot)}<\lambda$, entonces por definición de $\mu_{p(\cdot)}(u)$ existe k tal que $\lambda>k>\mu_{p(\cdot)}$ y $V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\lambda}\right)\leq 1$. Así, por la Proposición 2.1

$$V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\lambda}\right) = V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{k}\frac{k}{\lambda}\right) \leq \frac{k}{\lambda}V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{k}\right)\leq\frac{k}{\lambda}\leq 1.$$

Inversamente, asumamos que $V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\lambda}\right)\leq 1$, entonces $\lambda\in\left\{\lambda>0: V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\lambda}\right)\leq 1\right\}$; así, $\mu_{p(\cdot)}(u)<\lambda$.

□

Lema 2.3

Sea $u\in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$. Entonces

$$V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{||u||^W_{p(\cdot)}}\right)\leq 1.$$

Demostración:

Sea π^* una partición seleccionada del intervalo $[a,b]$ y consideremos $\lambda>||u||^W_{p(\cdot)}$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|u(t_j)-u(t_{j-1})|^{p(x_j)}}{\lambda}\leq V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\lambda}\right)\leq 1.$$

Así

$$V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{||u||^W_{p(\cdot)}}\right) = \sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{n}\lim_{\lambda\to||u||^W_{p(\cdot)}}\left(\frac{|u(t_j)-u(t_{j-1})|^{p(x_j)}}{\lambda}\right)\leq 1.$$

□

Como consecuencia de la Definición 2.3 se demuestra que el espacio $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ es un espacio normado.

Teorema 2.2 **(Ver [111])**

Sea $p : [a,b] \to (1,\infty)$ una función admisible, $\left(WBV_{p(\cdot)}[a,b], ||\cdot||^W_{p(\cdot)}\right)$ es un espacio normado.

Demostración:

Sea $u, v \in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces,

(a) Se tiene que $||\cdot||^W_{p(\cdot)} \geq 0$ ya que $|u(a)| \geq 0$ y $\mu_{p(\cdot)}(u) \geq 0$.

(b) Si $\alpha = 0$ el caso es trivial. Supongamos que $\alpha \neq 0$, así

$$\begin{aligned}
||\alpha u||^W_{p(\cdot)} &= |\alpha u(a)| + \inf_{\lambda>0}\left\{\lambda > 0 :\ V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{|\alpha| u}{\lambda}\right) \leq 1\right\} \\
&= |\alpha||u(a)| + |\alpha| \inf_{\lambda>0}\left\{\frac{\lambda}{|\alpha|} > 0 :\ V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\frac{\lambda}{|\alpha|}}\right) \leq 1\right\} \\
&= |\alpha||u(a)| + |\alpha| \inf_{\mu>0}\left\{\mu > 0 :\ V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\mu}\right) \leq 1\right\} \\
&= |\alpha|(|u(a)| + \mu_{p(\cdot)}(u)) \\
&= |\alpha|\ ||u||^W_{p(\cdot)}.
\end{aligned}$$

Así, $||\alpha u||^W_{p(\cdot)} = |\alpha|||u||^W_{p(\cdot)}$.

(c) Dados $\lambda_u > ||u||^W_{p(\cdot)}$ y $\lambda_v > ||v||^W_{p(\cdot)}$ fijos; entonces $V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\lambda_u}\right) \leq 1$ y $V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{v}{\lambda_v}\right) \leq 1$. Ahora, sea $\lambda = \lambda_u + \lambda_v$, entonces por la convexidad de $V^W_{p(\cdot)}(u,[a,b])$

$$\begin{aligned}
V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u+v}{\lambda};[a,b]\right) &= V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{\lambda_u}{\lambda}\frac{u}{\lambda_u} + \frac{\lambda_v}{\lambda}\frac{v}{\lambda_v};[a,b]\right) \\
&\leq \frac{\lambda_u}{\lambda} V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\lambda_u};[a,b]\right) + \frac{\lambda_v}{\lambda} V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{v}{\lambda_v};[a,b]\right) \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
||u+v||^W_{p(\cdot)} &= |(u+v)(a)| + \mu_{p(\cdot)}(u+v) \\
&\leq |u(a)+v(a)| + \mu_{p(\cdot)}(u) + \mu_{p(\cdot)}(v) \\
&\leq ||u||^W_{p(\cdot)} + ||v||^W_{p(\cdot)}.
\end{aligned}$$

Es decir, $||u+v||^W_{p(\cdot)} \leq ||u||^W_{p(\cdot)} + ||v||^W_{p(\cdot)}$.

(d) $||u||^W_{p(\cdot)} = 0$ si y solo si $u = 0$. Si $u \equiv 0$, entonces $V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\lambda}\right) = 0 \leq 1$ para todo $\lambda > 0$ y así $||u||^W_{p(\cdot)} = 0$. Inversamente, supongamos que $||u||^W_{p(\cdot)} = 0$, es decir,

$$|u(a)| + \mu_{p(\cdot)}(u) = 0$$

entonces $|u(a)| = 0$ y $\mu_{p(\cdot)}(u) = \inf\limits_{\lambda>0}\left\{\lambda > 0 : V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\} = 0$, por lo tanto, se tiene que

$$V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\lambda}\right) = 0$$

es decir,

$$\sum_{j=1}^{n}\left(|u(t_j) - u(t_{j-1})|\right)^{p(x_{j-1})} = 0,$$

sin pérdida de generalidad, consideremos la partición $\pi : a = t_1 < t_2 = x < t_3 = b$; así, se obtiene

$$\left(\frac{|u(x) - u(a)|}{\lambda}\right)^{p(x)} + \left(\frac{|u(b) - u(x)|}{\lambda}\right)^{p(b)} = 0$$

entonces

$$\left(\frac{|u(x) - u(a)|}{\lambda}\right)^{p(x)} = 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{|u(b) - u(x)|}{\lambda}\right)^{p(b)} = 0$$

obteniéndose, para $p(x) > 1$, $x \in [a, b]$, que

$$(|u(x) - u(a)|)^{p(x)} = 0 \;\; \text{y} \;\; (|u(b) - u(x)|)^{p(b)} = 0.$$

Por lo tanto, se tiene que $u(x) = u(a) = u(b)$ para todo $x \in [a, b]$ y $u(a) = 0$, así $u = 0$.

□

Para los resultados posteriores, lo que sigue son propiedades para obtener los resultados principales de esta sección.

R. Castillo et al. (2014), en [30] demuestran que el espacio $WBV_{p(\cdot)}[a, b]$, dotado con la norma $||\cdot||^W_{p(\cdot)}$, es un espacio de Banach; como sigue:

Teorema 2.3

Sea $p : [a, b] \to (1, \infty)$ una función admisible, entonces $\left(WBV_{p(\cdot)}[a, b], ||\cdot||^W_{p(\cdot)}\right)$ es un espacio de Banach.

Demostración:

Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\left(WBV_{p(\cdot)}[a, b], ||\cdot||^W_{p(\cdot)}\right)$; entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que para $n, m \geq N$ se tiene

$$||u_n - u_m||^W_{p(\cdot)} < \varepsilon,$$

es decir

$$|u_n(a) - u_m(a)| + \mu_{p(\cdot)}(u_n - u_m) < \varepsilon.$$

Entonces

$$|u_n(a) - u_m(a)| < \varepsilon \;\; \text{y} \;\; \mu_{p(\cdot)}(u_n - u_m) < \varepsilon.$$

Por lo tanto, para todo $x, y \in [a, b]$ y $\varepsilon > 0$, se tiene que

$$V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u_n - u_m}{\varepsilon}; [a, b]\right) \leq 1$$

entonces

$$\left(\frac{|(u_n - u_m)(x) - (u_n - u_m)(y)|}{\varepsilon}\right)^{p(x)} \leq V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u_n - u_m}{\varepsilon}; [a,b]\right) \leq 1,$$

así

$$\left(|(u_n - u_m)(x) - (u_n - u_m)(y)|\right)^{p(x)} \leq (\varepsilon)^{p(x)},$$

por propiedades de la función $log(x)$, se tiene

$$p(x)\log\left(|(u_n - u_m)(x) - (u_n - u_m)(y)|\right) \leq p(x)\log(\varepsilon)$$

entonces

$$\log\left(|(u_n - u_m)(x) - (u_n - u_m)(y)|\right) \leq \log(\varepsilon)$$

por consiguiente

$$|(u_n - u_m)(x) - (u_n - u_m)(y)| \leq \varepsilon.$$

En consecuencia, la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$, es una sucesión uniformemente de Cauchy, en el intervalo $[a,b]$. Como $\mathbb{R}$ es completo, existe una función u definida en $[a,b]$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x), \quad x \in [a,b].$$

Ahora se demostrará que u_n converge a u en la norma $||\cdot||^W_{p(\cdot)}$. Como $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy, existe $N > 0$ tal que

$$||u_n - u_m||^W_{p(\cdot)} < \varepsilon, \quad n,m \geq N.$$

Por el hecho de que $\{u_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente a la función u en el intervalo $[a,b]$, se tiene

$$||u_n - u||^W_{p(\cdot)} = ||u_n - \lim_{m\to\infty} u_m||^W_{p(\cdot)} = \lim_{m\to\infty} ||u_n - u_m||^W_{p(\cdot)} < \varepsilon, \;\; n \geq N.$$

Por lo tanto, la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$ converge a la función u en la norma $||\cdot||^W_{p(\cdot)}$. Así $(WBV_{p(\cdot)}[a,b], ||\cdot||^W_{p(\cdot)})$ es un espacio de Banach.

□

Los siguientes resultados (4 teoremas y 1 corolario) proporcionan propiedades adicionales al espacio $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ (para detalles de la demostración, referimos al lector interesado a [30]).

Teorema 2.4

Sea p una función admisible. Entonces

1. Si $u \in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ entonces u es acotada en el intervalo $[a,b]$.
2. $WBV_{p(\cdot)}[a,b] \hookrightarrow WBV_{q(\cdot)}[a,b]$[a] para $q(x) \geq p(x)$.

[a] Un espacio normado $(X, ||\cdot||_X)$ esta inmerso en un espacio normado $(Y, ||\cdot||_Y)$ si $X \subseteq Y$ y existe una constante positiva k, tal que $||u||_Y \leq k||u||_X$, $u \in X$ y se escribe $X \hookrightarrow Y$ para denotar tal situación.

Corolario 2.1
Sea p una función admisible. Entonces $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ tiene un subespacio isomorfo a c_0.

Teorema 2.5
Sea p una función admisible. Si $u \in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ entonces

$$V_{p(\cdot)}^W(u,[a,c]) + V_{p(\cdot)}^W(u,[c,b]) \leq V_{p(\cdot)}^W(u,[a,b]) \leq 2^{p_+-1}\left[V_{p(\cdot)}^W(u,[a,c]) + V_{p(\cdot)}^W(u,[c,b])\right]$$

donde $c \in (a,b)$.

Teorema 2.6
Toda sucesión en $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ acotada en variación variable tiene una subsucesión puntualmente convergente a una función $u \in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$.

Teorema 2.7
Sea p una función admisible. El espacio $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ no es separable.

Lema 2.4 (Ver [111])
Sea $u:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función tal que $u \in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ entonces u tiene límites por la derecha y por la izquierda en todo punto de $[a,b]$.

Demostración:

Sin pérdida de generalidad se demostrará que u tiene un límite por la izquierda en $x_0 \in (a,b]$. Asumamos que $\lim\limits_{x\to x_0^-} u(x)$ no existe. Entonces

Caso 1: Si $\lim\limits_{x\to x_0^-} u(x) \to \pm\infty$, se obtiene que

$|u(x)-u(x_0)| \leq V_{p(\cdot)}^W(u;[a,b])^{1/p(x)}$ así $\lim\limits_{x\to x_0^-} |u(x)-u(x_0)| \leq V_{p(\cdot)}^W(u;[a,b])^{1/p(x)}$.

Como $u(x_0) = L < \infty$ y $\lim\limits_{x\to x_0^-} u(x) \to \pm\infty$, entonces $V_{p(\cdot)}^W(u;[a,b]) = \infty$, el cual es una contradicción.

Caso 2: $\lim\limits_{x\to x_0^-} u(x)$ no converge en todo punto. Es decir, la función u es oscilante. Sea $\{t_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión tal que $t_n \uparrow x_0$ cuando $n \to \infty$

$$|u(t_n)-u(t_m)| > r \quad \text{para todo} \quad n,m \geq N$$

$nr < \sum\limits_{i=1}^{n} |u(t_i)-u(t_{i-1})| \leq V_{p(\cdot)}^W(u;[a,b])$ por lo tanto $V_{p(\cdot)}^W(u;[a,b]) = \infty$, el cual es una contradicción.

Para demostrar que existe límite por la derecha se procede de manera similar.

□

N Sin pérdida de generalidad consideremos $[a,b]=[0,1]$. Si $u\in Lip[0,1]$ entonces existe k tal que $|u(t_j)-u(t_{j-1})|\leq k|t_j-t_{j-1}|$, además, como $p(\cdot)$ es acotada

$$\begin{aligned} V^W_{p(\cdot)}(u,[0,1]) &= \sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{n}|u(t_j)-u(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})} \\ &\leq \sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{n}k^{p(x_{j-1})}|t_j-t_{j-1}|^{p(x_{j-1})} \\ &\leq k^{p_+}\sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{n}|t_j-t_{j-1}|^{p(x_{j-1})} \end{aligned}$$

ya que $p(x)>1$ y $|t_j-t_{j-1}|\leq 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} V^W_{p(\cdot)}(u,[0,1]) &\leq k^{p_+}\sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{n}|t_j-t_{j-1}|^{p(x_{j-1})} \\ &\leq k^{p_+}\sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{n}|t_j-t_{j-1}|\leq k^{p_+} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Así $u\in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$, es decir, $Lip[a,b]\subset WBV_{p(\cdot)}[a,b]$.

Las siguientes propiedades de los elementos de $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ permitirá encontrar caracterizaciones de ellos.

Lema 2.5 (Propiedades Generales de $p(\cdot)$-variación)
Sea $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ una aplicación arbitraria.

(P1) Minimalidad: si $t,s\in[a,b]$, entonces

$$|u(t)-u(s)|^{p(x_{ts})}\leq\omega_{p(x_{ts})}(u;[a,b])\leq V^W_{p(\cdot)}(u;[a,b]).$$

(P2) Monotonía: si $a,t,s,b\in[a,b]$ y $a\leq t\leq s\leq b$, entonces $V^W_{p(\cdot)}(u;[a,t])\leq V^W_{p(\cdot)}(u;[a,s])$, $V^W_{p(\cdot)}(u;[s,b])\leq V^W_{p(\cdot)}(u;[t,b])$ y $V^W_{p(\cdot)}(u;[t,s])\leq V^W_{p(\cdot)}(u;[a,b])$.

(P3) Semi-aditividad: si $t\in[a,b]$, entonces

$$2^{1-p^+}V^W_{p(\cdot)}(u;[a,b])\leq V^W_{p(\cdot)}(u;[a,t])+V^W_{p(\cdot)}(u;[t,b])\leq V^W_{p(\cdot)}(u;[a,b]).$$

(P4) Cambio de variable: si $[c,d]\subset\mathbb{R}$ y $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ (no necesariamente estricta) es una función monótona, entonces $V^W_{p(\cdot)}(u;\varphi([c,d]))=V^W_{p(\cdot)}(u\circ\varphi;[c,d])$.

(P5) Regularidad: $V^W_{p(\cdot)}(u;[a,b])=\sup\left\{V^W_{p(\cdot)}(u;[s,t]);\ s,t\in[a,b],a\leq b\right\}$.

Demostración:

(P1) Sea $a, t, s, b \in [a, b]$, tal que $a \leq t \leq s \leq b$

$$\begin{aligned}
|u(t)-u(s)|^{p(x_{ts})} &\leq \sup_{\pi^*}\left\{|u(t)-u(s)|^{p(x_{ts})} : \ t, s \in [a, b]\right\} \\
&= \omega_{p(x_{ts})}(u, [a, b]) \\
&\leq \sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{n}\left(|u(t_j)-u(t_{j-1})|\right)^{p(x_{j-1})} \\
&= V^W_{p(\cdot)}(u; [a, b]).
\end{aligned}$$

(P2) Sea $a, t, s, b \in [a, b]$, tal que $a \leq t \leq s \leq b$ y la partición $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{m1} = t < \cdots < t_{m2} = s < \cdots < t_n = b$ así

$$\begin{aligned}
V^W_{p(\cdot)}(u; [a, t]) &= \sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{m1}\left(|u(t_j)-u(t_{j-1})|\right)^{p(x_{j-1})} \\
&\leq \sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{m1}\left(|u(t_j)-u(t_{j-1})|\right)^{p(x_{j-1})} + \sup_{\pi^*}\sum_{j=m1+1}^{m2}\left(|u(t_j)-u(t_{j-1})|\right)^{p(x_{j-1})} \\
&= \sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{m2}\left(|u(t_j)-u(t_{j-1})|\right)^{p(x_{j-1})} \\
&= V^W_{p(\cdot)}(u; [a, s])
\end{aligned}$$

los otros casos son similares.

(P3) Sean Π la clase de todas las particiones $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, Π^* la clase de todas las particiones seleccionadas $\pi^* : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, $T = \{t_j\}_{j=0}^{m} \in \Pi$, $p_+(\cdot) = \sup_{x \in [a,b]} p(x)$ y $S = T \cup \{t\}$. Consideremos los siguientes dos casos:

(a) Si $t = t_0$ ó $t_m \leq t$, entonces

$$V^W_{p(\cdot)}(u, T) \leq V^W_{p(\cdot)}(u, T \cup \{t\}).$$

(b) Si $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ para algún $1 \leq k \leq m$, se tiene

$$V^W_{p(\cdot)}(u, T) \leq 2^{p_+-1} V^W_{p(\cdot)}(u, T \cup \{t\}).$$

Para el caso (a)

$$\begin{aligned}
V^W_{p(\cdot)}(u, T) &\leq V^W_{p(\cdot)}(u, T \cup \{t\}) \\
&\leq V^W_{p(\cdot)}(u; [a, t]) + V^W_{p(\cdot)}(u; [t, b]).
\end{aligned}$$

Para el caso (b) se obtiene

$$\begin{aligned}
V^W_{p(\cdot)}(u,T) &= \sup_{\pi^*}\left[\sum_{j=1}^{k-1}|u(t_j)-u(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}+|u(t_k)-u(t_{k-1})|^{p(x_{k-1})}\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{j=k+1}^{m}|u(t_j)-u(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}\right]\\
&\le \sup_{\pi^*}\left[\sum_{j=1}^{k-1}|u(t_j)-u(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}+(|u(t)-u(t_{k-1})|+|u(t_k)-u(t)|)^{p(x_{k-1})}\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{j=k+1}^{m}|u(t_j)-u(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}\right]\\
&\le \sup_{\pi^*}\left[\sum_{j=1}^{k-1}|u(t_j)-u(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}+2^{p(x_{k-1})-1}\left(|u(t)-u(t_{k-1})|^{p(x_{k-1})}\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+|u(t_k)-u(t)|^{p(x_{k-1})}\right)+\sum_{j=k+1}^{m}|u(t_j)-u(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}\right]\\
&\le \sup_{\pi^*}\left[\sum_{j=1}^{k-1}2^{p(x_{k-1})-1}|u(t_j)-u(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}+2^{p(x_{k-1})-1}|u(t)-u(t_{k-1})|^{p(x_{k-1})}\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{j=k+1}^{m}2^{p(x_{k-1})-1}|u(t_k)-u(t)|^{p(x_{k-1})}+2^{p(x_{k-1})-1}|u(t_j)-u(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}\right]\\
&\le 2^{p_+-1}V^W_{p(\cdot)}(u,T\cup\{t\}).
\end{aligned}$$

Además

$$V^W_{p(\cdot)}(u,T\cup\{t\})=V^W_{p(\cdot)}(u,T)+|u(t)-u(t_{k-1})|^{p(x_{j-1})}+|u(t_k)-u(t)|^{p(x_{j-1})}-|u(t_k)-u(t_{k-1})|^{p(x_{j-1})}.$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned}
V^W_{p(\cdot)}(u,T) &\le 2^{p^+-1}V^W_{p(\cdot)}(u,S)\\
&\le 2^{p^+-1}V^W_{p(\cdot)}(u;[a,b])\\
&\le 2^{p^+-1}\left(V^W_{p(\cdot)}(u;[a,t])+V^W_{p(\cdot)}(u;[t,b])\right).
\end{aligned}$$

Considerando el supremo sobre todo $T\in\Pi^*$, se obtiene el lado izquierdo en (P3).

Ahora para demostrar el lado derecho de la desigualdad, sean $V^W_{p(\cdot)}(u;[a,t])<\infty$ y $V^W_{p(\cdot)}(u;[t,b])<\infty$. Entonces, para todo $\varepsilon>0$ existen particiones $\pi_1\in\Pi^*$ y $\pi_2\in\Pi^*$ del intervalo $[a,t]$ y $[t,b]$ respectivamente, tal que

$$V^W_{p(\cdot)}(u;[a,t])\le V^W_{p(\cdot)}(u,\pi_1)+\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{y}\quad V^W_{p(\cdot)}(u;[t,b])\le V^W_{p(\cdot)}(u,\pi_2)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}
V^W_{p(\cdot)}(u;[a,t])+V^W_{p(\cdot)}(u;[t,b]) &\le V^W_{p(\cdot)}(u,\pi_1)+V^W_{p(\cdot)}(u,\pi_2)+\varepsilon\\
&\le V^W_{p(\cdot)}(u,\pi_1\cup\{t\})+V^W_{p(\cdot)}(u,\pi_2\cup\{t\})+\varepsilon\\
&= V^W_{p(\cdot)}(u,\pi_1\cup\pi_2\cup\{t\})+\varepsilon\\
&\le V^W_{p(\cdot)}(u;[a,b])+\varepsilon,
\end{aligned}$$

teniendo en cuenta la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$.

(P4) Sea $[c,d] \subset \mathbb{R}$, $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ (no necesariamente estricta) una función monótona, π_0 una partición seleccionada del intervalo $[c,d]$, Π_0 la clase de particiones seleccionadas π_0, $T_1 = \{\tau_j\}_{j=0}^m \in \Pi_0$ y $T = \{t_j\}_{j=0}^m$ con $t_j = \varphi(\tau_j)$, entonces

$$\begin{aligned} V_{p(\cdot)}^W(u\circ\varphi, T_1) &= \sup_{T_1} \sum_{j=1}^m |u(\varphi(\tau_j)) - u(\varphi(\tau_{j-1}))|^{p(x_{j-1})} \\ &= \sup_{T} \sum_{j=1}^m |u(t_j) - u(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})} \\ &= V_{p(\cdot)}^W(u, T) \\ &\leq V_{p(\cdot)}^W(u, \varphi([c,d])). \end{aligned}$$

Por otro lado, si una partición $T = \{t_j\}_{j=0}^m$ de $\varphi([c,d])$ es tal que $t_{j-1} < t_j$ para $j = 1,\ldots,m$ entonces existe $\tau_j \in [c,d]$ tal que $t_j = \varphi(\tau_j)$ y de nuevo por la monotonía de φ

$$V_{p(\cdot)}^W(u, T) = V_{p(\cdot)}^W(u\circ\varphi, T_1) \leq V_{p(\cdot)}^W(u, \varphi([c,d])).$$

(P5) Por la monotonía de $V_{p(\cdot)}^W[a,b]$ se tiene

$$V_{p(\cdot)}^W(u;[a,b]) \geq \sup\left\{V_{p(\cdot)}^W(u;[s,t]);\ s,t \in [a,b], a \leq b\right\}.$$

En otro orden de ideas, para todo número $\alpha < V_{p(\cdot)}^W(u;[a,b])$ existe una partición $T = \{t_i\}_{i=0}^m \in \Pi^*$ con $V_{p(\cdot)}^W(u,T) \geq \alpha$. Definamos $\hat{\pi}$ una partición del intervalo $[t_0, t_m]$ y $\hat{\Pi}$ la clase de particiones $\hat{\pi}$, entonces $T \in \hat{\Pi}$ y $V_{p(\cdot)}^W(u,\hat{\pi}) \geq V_{p(\cdot)}^W(u,T) \geq \alpha$, es decir,

$$V_{p(\cdot)}^W(u;[a,b]) \leq \sup\left\{V_{p(\cdot)}^W(u;[s,t]);\ s,t \in [a,b], a \leq b\right\}.$$

□

Dada una función $u \in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$, consideremos la función $p(\cdot)$-variación en el sentido de Wiener $V_{p(\cdot),u}^W : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$V_{p(\cdot),u}^W(x) := V_{p(\cdot)}^W(u;[a,x]). \tag{2.1}$$

Proposición 2.2

Sea $u \in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ una función continua en algún punto $y_0 \in [a,b]$; entonces, la función $V_{p(\cdot),u}^W$ definida en (2.1) es también continua en y_0.

Demostración:

Sea $\varepsilon > 0$ y supongamos que $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en y_0, sin pérdida de generalidad supongamos que $y_0 < y < b$. Consideremos la diferencia $V_{p(\cdot),u}^W(y) - V_{p(\cdot),u}^W(y_0)$. Escojamos las particiones $P_{y_0} = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_s = y_0\}$ y $P_y = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_m = y\}$ tal que

$$V_{p(\cdot)}^W(u;[y_0,b]) < V_{p(\cdot)}^W(u, P_{y_0};[y_0,b]) + \varepsilon.$$

Luego, sea δ tal que $|u(y)-u(y_0)|<\varepsilon$ para $0<y-y_0<\delta$ el cual se satisface por la continuidad de u en y_0. Por definición de $V^W_{p(\cdot)}(u;[a,b])$ existe una partición $\pi: a=t_0\leq t_0\leq\ldots\leq t_n=b$ y $\varepsilon>0$ tal que

$$V^W_{p(\cdot)}(u;[a,b])\leq\sum_{j=1}^{n}|u(t_j)-u(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}+\varepsilon.$$

Entonces para este y, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m}|u(t_j)-u(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}-\sum_{i=1}^{s}|u(t_i)-u(t_{i-1})|^{p(x_{i-1})}\\
&= \sum_{j=1}^{k}|u(t_j)-u(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}+\sum_{j=k+1}^{m}|u(t_j)-u(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}-\sum_{i=1}^{s}|u(t_i)-u(t_{i-1})|^{p(x_{i-1})}\\
&\leq \sum_{j=1}^{k}|u(t_j)-u(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}+|u(y)-u(t_k)|^{p(x_{y_k y})}\\
&\quad+\sum_{j=k+1}^{m}|u(t_j)-u(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}-\sum_{i=1}^{s}|u(t_i)-u(t_{i-1})|^{p(x_{i-1})}\\
&\leq V^W_{p(\cdot)}(u,P_y)+\sum_{j=k+1}^{m}|u(t_j)-u(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}-\sum_{i=1}^{s}|u(t_i)-u(t_{i-1})|^{p(x_{i-1})}\\
&\leq \sum_{k=1}^{m+n}|u(t_j)-u(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}+\varepsilon-\sum_{i=1}^{s}|u(t_i)-u(t_{i-1})|^{p(x_{i-1})}\\
&\leq V^W_{p(\cdot)}(u;[y_0,b])+\varepsilon-V^W_{p(\cdot)}(u;[y,b])\\
&= |u(y)-u(y_0)|^{p(x_{y_o y})}+\sum_{j=2}^{n}|u(t_j)-u(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}+2\varepsilon-V^W_{p(\cdot)}(u;[y,b])\\
&< \varepsilon^{p(x_{y_o y})}+2\varepsilon\\
&\leq 3\,\text{máx}\{\varepsilon^{p(x_{y_o y})},\varepsilon\}=\varepsilon_1.
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.3

Sea $\{u_n\}\in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ una sucesión tal que u_n converge a u casi siempre, con $u\in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$. Entonces

$$||u||^W_{p(\cdot)}\leq\liminf_{n\to\infty}||u_n||^W_{p(\cdot)}$$

es decir, la norma de Luxemburg es semi-continua inferiormente en $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$.

Demostración:

Sea $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que $\alpha<V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\lambda};[a,b]\right)$ para $\lambda>0$. Por la Definición 2.1, para todo $\beta\in\mathbb{R}$ con $\alpha<\beta<V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\lambda};[a,b]\right)$ existe una partición seleccionada $\pi^*=\{t_i\}_{i=0}^{n}$ de $[a,b]$ tal que

$$V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\lambda},\pi^*\right)=\sum_{i=1}^{m}\left|\frac{1}{\lambda}(u(t_i)-u(t_{i-1}))\right|^{p(x_{i-1})}\geq\beta.$$

Por la convergencia puntual de u_n a u existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|u_n(t) - u(t)| \leq \delta := \frac{\lambda\left(\beta^{1/p(x_{i-1})} - \alpha^{1/p(x_{i-1})}\right)}{2m^{1/p(x_{i-1})}}$$

para todo $n \geq n_0$, $t \in \pi^*$ y $t_i \leq x_i \leq t_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Por la desigualdad de Minkowski, se tiene que

$$\begin{aligned}
\beta &\leq V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\lambda}, \pi^*\right) = \sum_{i=1}^{m} \left|\frac{1}{\lambda}(u(t_i) - u(t_{i-1}))\right|^{p(x_{i-1})} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left[\left|\frac{1}{\lambda}[(u(t_i) - u_n(t_{i-1})) - (u_n(t_i) - u_n(t_{i-1})) + (u_n(t_i) - u(t_{i-1}))]\right|\right]^{p(x_{i-1})} \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} \left[\left|\frac{1}{\lambda}(u(t_i) - u_n(t_{i-1}))\right| + \left|\frac{1}{\lambda}(u_n(t_i) - u_n(t_{i-1}))\right| + \left|\frac{1}{\lambda}(u_n(t_i) - u(t_{i-1}))\right|\right]^{p(x_{i-1})} \\
&\leq \left[\left(\sum_{i=1}^{m} \left|\frac{1}{\lambda}(u(t_i) - u_n(t_{i-1}))\right|^{p(x_{i-1})}\right)^{\frac{1}{p(x_{i-1})}} + \left(\sum_{i=1}^{m} \left|\frac{1}{\lambda}(u_n(t_i) - u_n(t_{i-1}))\right|^{p(x_{i-1})}\right)^{\frac{1}{p(x_{i-1})}}\right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_{i=1}^{m} \left|\frac{1}{\lambda}(u_n(t_{i-1}) - u(t_{i-1}))\right|^{p(x_{i-1})}\right)^{\frac{1}{p(x_{i-1})}}\right]^{p(x_{i-1})} \\
&\leq \left[\left(\sum_{i=1}^{m} \left|\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\lambda\left(\beta^{1/p(x_{i-1})} - \alpha^{1/p(x_{i-1})}\right)}{2m^{1/p(x_{i-1})}}\right)\right|^{p(x_{i-1})}\right)^{\frac{1}{p(x_{i-1})}} + \left(\sum_{i=1}^{m} \left|\frac{1}{\lambda}(u_n(t_i) - u_n(t_{i-1}))\right|^{p(x_{i-1})}\right)^{\frac{1}{p(x_{i-1})}}\right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_{i=1}^{m} \left|\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\lambda\left(\beta^{1/p(x_{i-1})} - \alpha^{1/p(x_{i-1})}\right)}{2m^{1/p(x_{i-1})}}\right)\right|^{p(x_{i-1})}\right)^{\frac{1}{p(x_{i-1})}}\right]^{p(x_{i-1})} \\
&\leq \left[\beta^{\frac{1}{p(x_{i-1})}} - \alpha^{\frac{1}{p(x_{i-1})}} + \left(V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u_n}{\lambda}, \pi^*\right)\right)^{\frac{1}{p(x_{i-1})}}\right]^{p(x_{i-1})}, \quad \text{para todo } \ n \geq N_0,
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\alpha \leq V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u_n}{\lambda}, \pi^*\right) \leq V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u_n}{\lambda}, [a,b]\right), \quad \text{para todo } \ n \geq N_0.$$

Así $\alpha \leq \inf\limits_{n \geq N_0} V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u_n}{\lambda}; [a,b]\right)$, es decir,

$$\alpha \leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u_n}{\lambda}; [a,b]\right).$$

Aplicando el límite cuando α tiende a $V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u_n}{\lambda}; [a,b]\right)$, se obtiene que $V^W_{p(\cdot)}$ es secuencialmente semicontinua inferiormente, es decir,

$$V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq \liminf_{n \to \infty} V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u_n}{\lambda}\right),$$

si $u_n \in \mathbb{R}^{[a,b]}$, $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(x) = u(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Por la Definición 2.3 se sigue que

$$||u||^W_{p(\cdot)} \leq \liminf_{n \to \infty} ||u_n||^W_{p(\cdot)}.$$

□

Para concluir con la serie de propiedades sobre las funciones pertenecientes al espacio $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$, se presenta a continuación dos resultados que se refieren a la regularidad y la acotación de estas funciones.

Proposición 2.4

Sea $u \in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$, el conjunto de puntos de discontinuidades de $u \in [a,b]$ es al menos numerable.

Demostración:

Sea $u \in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$, por el Lema 1 en [72] la función u tiene límites por la derecha y por la izquierda en todo punto de $[a,b]$. Sea π^* una partición seleccionada del intervalo $[a,b]$.

Sea A_n el conjunto de puntos t de discontinuidades por la izquierda de $u \in (a,b]$ tal que

$$|u(t) - u(t-0)| > \frac{1}{n}.$$

Supongamos que A_n es infinito, para todo m existen puntos $t_2 < t_4 < \cdots < t_{2m}$ con $t_{2j} \in A_n$ para $j = 1,2,\ldots,m$.

Así, existen puntos $t_1 < t_3 < \cdots < t_{2m-1}$ tal que $a < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < \cdots < t_{2m-1} < t_{2m} \leq b$ y

$$|u(t_{2j}) - u(t_{2j-1})| > \frac{1}{n}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} V^W_{p(\cdot)}(ku) &\geq \sum_{j=1}^{m} \left(k|u(t_{2j}) - u(t_{2j-1})|\right)^{p(x_{j-1})} \\ &> \sum_{j=1}^{m} \left(k\frac{1}{n}\right)^{p(x_{j-1})} \longrightarrow \infty \;\text{ cuando }\; m \to \infty \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción porque $u \in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$. Por lo tanto el conjunto $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ de discontinuidades por la izquierda de $u \in [a,b]$ es al menos numerable. De manera similar se demuestra para el conjunto de puntos de discontinuidades por la derecha de $u \in [a,b]$.

□

Para concluir esta sección se demuestra que todas las funciones pertenecientes al espacio $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ son acotadas.

Lema 2.6
Si $u \in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ entonces u es acotada.

Demostración:

Sean $u \in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$, π^* una partición seleccionada del intervalo $[a,b]$, para cada j, $\; t_j \leq x_j \leq t_{j+1}$ y supongamos que u no es acotada, entonces

$$\lim_{j\to\infty} u(t_j) = \infty.$$

Como

$$V_{p(\cdot)}^{W}(u) \geq |u(t_j) - u(a)|^{p(x_{j-1})}$$

entonces

$$\left(V_{p(\cdot)}^{W}(u)\right)^{1/p(x_{j-1})} \geq |u(t_j) - u(a)| \geq |u(t_j)| - |u(a)|$$

por lo tanto

$$\left(V_{p(\cdot)}^{W}(u)\right)^{1/p(x_{j-1})} + |u(a)| \geq |u(t_j)| \longrightarrow \infty \text{ cuando } j \to \infty$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto u es acotada.

$\square$

2.1.2 Caracterización

W. Sierpiński (1933) en [161] demuestra que una función $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función regular si y solo si es la composición de una función creciente y una función continua. Este es un resultado el cual relaciona las funciones regulares con las funciones continuas. H. Federer (1969) en [53] demuestra que una función es de variación acotada si y solo si es la composición de una función Lipschitz con una función monótona. V. V. Chistyakov y O. E. Galkin (1998) en [38] obtienen un resultado similar para funciones de p-variación acotada con $p > 1$, los autores demuestran que una función es de p-variación acotada si y solo si es la composición de una función no decreciente con una función Hölderiana. En esta sección se demuestra que una función es de $p(\cdot)$-variación acotada en el sentido de Wiener con exponente variable si y solo si es la composición de una función no decreciente con una función Hölderiana con exponente variable, con exponente igual a $\frac{1}{p(\cdot)}$.

Definición 2.4

Una función g es continua Hölder de exponente γ, donde $\gamma(\cdot)$ es una función positiva tal que $0 \leq \gamma(x) \leq 1$, si

$$|g(t_i) - g(t_{i-1})| \leq C|t_i - t_{i-1}|^{\gamma(x_{i-1})}$$

para todo $x_{i-1} \in [0,1]$. El menor número C que satisface la desigualdad anterior es llamada la constante Hölder de g y se denota por $H(g)$.

Teorema 2.8

La función $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ es de $p(\cdot)$-variación acotada si y solo si existe una función no decreciente y acotada $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ y una aplicación Hölderiana $v : \varphi([a,b]) \to \mathbb{R}$ de exponente $\gamma = 1/p(\cdot)$ y $H(v) \leq 1$ tal que $u = v \circ \varphi$ en $[a,b]$.

La demostración de este Teorema está contenida en los dos Lemas siguientes:

Lema 2.7

Si $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ es monótona acotada, $v : \varphi([a,b]) \to \mathbb{R}$ es Hölderiana de exponente $\gamma(\cdot) = 1/p(\cdot)$ y $u = v \circ \varphi$, entonces $u \in V^W_{p(\cdot)}[a,b]$.

Demostración:

Asumamos que φ es no decreciente y que $u = v \circ \varphi$, como $\varphi([a,b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$ en virtud de la propiedad de cambio de variable (P4) del Lema 2.5, se tiene

$$\begin{aligned} V^W_{p(\cdot)}(u;[a,b]) &= V^W_{p(\cdot)}(v \circ \varphi;[a,b]) \\ &= V^W_{p(\cdot)}(v;\varphi([a,b])) \\ &= V^W_{p(\cdot)}(v;[\varphi(a),\varphi(b)]). \end{aligned}$$

Si $T = \{t_i\}_{i=0}^m$ es una partición de $[\varphi(a), \varphi(b)]$

$$\begin{aligned} V^W_{p(\cdot)}(v,T) &= \sup_T \sum_{i=1}^m |v(t_i) - v(t_{i-1})|^{p(x_{i-1})} \\ &\leq \sup_T \sum_{i=1}^m C^{p(x_{i-1})}|t_i - t_{i-1}|^{p(x_{i-1})\gamma(x_{i-1})} \\ &= \sum_{i=1}^m C^{p(x_{i-1})}|t_i - t_{i-1}| \\ &\leq C^{p(x_\varphi)}(\varphi(b) - \varphi(a)), \end{aligned}$$

donde $\varphi(a) \leq x_\varphi \leq \varphi(b)$. Por consiguiente, por la acotación de φ

$$V^W_{p(\cdot)}(u,[a,b]) \leq C^{p(x_\varphi)}(\varphi(b) - \varphi(a)) < \infty \text{ para todo } a,b \in [a,b].$$

Si φ es no creciente la demostración es similar.

□

Lema 2.8
Sea $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de $p(\cdot)$-variación acotada. Entonces existe una función no negativa, no decreciente y acotada $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ y una aplicación Hölderiana $v : \varphi([a,b]) \to \mathbb{R}$ de exponente $\gamma(\cdot) = 1/p(\cdot)$ y de constante Hölder $H(v) \leq 1$, tal que

(1) $u = v \circ \varphi$ en $[a,b]$.

(2) $v(\varphi([a,b])) = u([a,b])$ en $\mathbb{R}$.

(3) $V^W_{p(\cdot)}(v, \varphi([a,b])) = V^W_{p(\cdot)}(u,[a,b])$.

Demostración:

Sea φ una función definida por $\varphi(t) = V^W_{p(\cdot)}(u,[a,t])$; por la propiedad (P2), del Lema 2.5, la función φ está bien definida, es no negativa, acotada y no decreciente. Si $\tau \in \varphi([a,b])$ denotemos por

$$\varphi^{-1}(\tau) = \{t \in [a,b] : \varphi(t) = \tau\}$$

la imagen inversa del conjunto unitario $\{\tau\}$ de la función φ. Definamos la aplicación $v : \varphi([a,b]) \to \mathbb{R}$ como sigue

Si $\tau \in \varphi([a,b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$, entonces

$$v(\tau) = u(t) \quad \text{para todo} \quad t \in \varphi^{-1}(\tau). \tag{2.2}$$

Por las propiedades (P1) y (P3), del Lema 2.5

$$\begin{aligned}
|u(t) - u(s)|^{p(x_{ts})} &\leq V^W_{p(\cdot)}(u,[t,s]) \\
&\leq V^W_{p(\cdot)}(u,[a,s]) - V^W_{p(\cdot)}(u,[a,t]) \\
&= \varphi(s) - \varphi(t).
\end{aligned}$$

La representación de u en (1) se sigue de (2.2), porque si $t \in [a,b]$, entonces $\tau := \varphi(t) \in [\varphi(a), \varphi(b)]$ y $t \in \varphi^{-1}(\tau)$, así que

$$u(t) = v(\tau) = v(\varphi(t)) = (v \circ \varphi)(t).$$

Las afirmaciones en (2) y (3) se sigue de (1) y la propiedad (P4) del Lema 2.5. Ahora para demostrar que v es Hölderiana se tiene que

$$\begin{aligned}
V^W_{p(\cdot)}(v;[\varphi(a), \varphi(b)]) &= V^W_{p(\cdot)}(v \circ \varphi; [a,t]) \\
&= V^W_{p(\cdot)}(u;[a,t]) \\
&= \varphi(t) \\
&= \tau.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\alpha, \beta \in [\varphi(a), \varphi(b)]$, para $\alpha \leq \beta$, entonces por (P1), (P3) y el Lema 2.5 se obtiene

$$\begin{aligned}
|v(\beta) - v(\alpha)|^{p(x_{\beta\alpha})} &\leq V^W_{p(\cdot)}(v;[\alpha,\beta]) \\
&\leq V^W_{p(\cdot)}(v;[a,\beta]) - V^W_{p(\cdot)}(v;[a,\alpha]) \\
&= \beta - \alpha,
\end{aligned}$$

entonces $\quad |v(\beta) - v(\alpha)| \leq |\beta - \alpha|^{1/p(x_{\beta\alpha})} = |\beta - \alpha|^{\gamma(x_{\beta\alpha})}$.

$\square$

2.2 Variación en el Sentido de Wiener-Korenblum.

En esta sección, como contribución al tema de variación acotada generalizada con exponente variable; se define el espacio de funciones de $p(\cdot)$-variación acotada en el sentido de Wiener-Korenblum con exponente variable (Ver [112]), el cual generaliza la noción del espacio de funciones de $p(\cdot)$-variación acotada en el sentido de Wiener con exponente variable en $[a,b]$ y se demuestran algunas propiedades para las funciones pertenecientes a este espacio.

A lo largo de esta sección, se denota por $\kappa\omega_{p(x_{ts})}(u,[a,b]) = \sup\left\{ \dfrac{|u(t)-u(s)|^{p(x_{ts})}}{k\left(\dfrac{t-s}{b-a}\right)} : t,s \in [a,b] \right\}$,

y por x_{ts} un número entre $[t,s]$.

O. Mejía, N. Merentes, J. L. Sánchez, M. Valera López (2016) en [112] introducen la noción de espacio de $p(\cdot)$-variación acotada en el sentido de Wiener-Korenblum con exponente variable como sigue:

Definición 2.5

Sean $p:[a,b]\to(1,\infty)$ una función, $\pi: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ una partición del intervalo $[a,b]$, κ una función distorsión y $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función. Se define

$$\kappa\sigma^{W}_{p(\cdot)}(u,\pi^*) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \left|u(t_j)-u(t_{j-1})\right|^{p(x_{j-1})}}{\sum_{j=1}^{n} \kappa\left(\dfrac{t_j-t_{j-1}}{b-a}\right)}$$

y

$$\kappa V^{W}_{p(\cdot)}(u) = \kappa V^{W}_{p(\cdot)}(u;[a,b]) := \sup_{\pi^*} \kappa\sigma^{W}_{p(\cdot)}(u,\pi^*)$$

donde π^* es una partición seleccionada del intervalo $[a,b]$, es decir, una partición del intervalo $[a,b]$ junto con una sucesión finita de números $x_0,\ldots,x_{n-1}$ sujeta a la condición que para cada i, $t_i \le x_i \le t_{i+1}$. En el caso en que $\kappa V^{W}_{p(\cdot)}(u;[a,b])<\infty$, se dice que u tiene variación acotada Wiener-Korenblum con exponente variable (o $p(\cdot)$-variación acotada en el sentido de Wiener-Korenblum) en $[a,b]$.

El símbolo $\kappa BV^{W}_{p(\cdot)}[a,b]$ denota la clase de funciones de $p(\cdot)$-variación acotada en el sentido de Wiener-Korenblum con exponente variable en $[a,b]$.

N Sea $p:[a,b]\to(1,\infty)$ una función

1. Si se considera $p(x)=1$ para todo x en $[a,b]$, entonces $\kappa BV^{W}_{p(\cdot)}[a,b] = \kappa BV[a,b]$, es por esto que en la definición anterior se considera $1<p<\infty$.

2. Si $p(x)=p$ para todo x en $[a,b]$ y $1<p<\infty$, entonces $\kappa BV^{W}_{p(\cdot)}[a,b] = \kappa BV_p[a,b]$.

En el próximo ejemplo se presenta una familia de funciones pertenecientes a la clase $\kappa BV^W_{p(\cdot)}[a,b]$.

Ejemplo 2.1

Sea $u:[0,1]\to\mathbb{R}$ una función tal que $u\in C^1[0,1]$ y $|u'(x)|<L$ para $x\in[0,1]$ y $L<\infty$. Entonces, por el Teorema de Valor Medio, existe c_i, tal que

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=1}^{n}|u(t_i)-u(t_{i-1})|^{p(x_{i-1})}}{\sum_{i=1}^{n}\kappa\left(\frac{t_i-t_{i-1}}{b-a}\right)} &\leq \sum_{i=1}^{n}|u(t_i)-u(t_{i-1})|^{p(x_{i-1})}\\
&= \sum_{i=1}^{n}|u'(c_i)|^{p(x_{i-1})}|t_i-t_{i-1}|^{p(x_{i-1})}\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}L^{p(x_{i-1})}|t_i-t_{i-1}|^{p(x_{i-1})}\\
&\leq L_0\sum_{i=1}^{n}|t_i-t_{i-1}|^{p(x_{i-1})}=L_0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $u\in\kappa BV^W_{p(\cdot)}[0,1]$, donde $L^{p(x_{i-1})}\leq L_0$ para todo $t_i\leq x_i\leq t_{i+1}$.

Con respecto a la definición previa se presentarán algunos resultados referente a las funciones pertenecientes a la clase $\kappa BV^W_{p(\cdot)}[a,b]$.

2.2.1 Propiedades de la Clase

Teorema 2.9

Sea $p:[a,b]\to(1,\infty)$ una función admisible y κ una función distorsión entonces $WBV_{p(\cdot)}[a,b]\subset\kappa BV^W_{p(\cdot)}[a,b]$.

Demostración:

Sean $p:[a,b]\to(1,\infty)$ una función admisible, $u\in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ y $\pi^*: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ una partición seleccionada del intervalo $[a,b]$. Entonces, por la subaditividad de κ, se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}|u(t_j)-u(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})} &\leq V^W_{p(\cdot)}(u)\\
&= V^W_{p(\cdot)}(u)\kappa\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{t_j-t_{j-1}}{b-a}\right)\\
&\leq V^W_{p(\cdot)}(u)\sum_{j=1}^{n}\kappa\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{b-a}\right).
\end{aligned}$$

Así,

$$\frac{\sum_{j=1}^{n}|u(t_j)-u(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}}{\sum_{j=1}^{n}\kappa\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{b-a}\right)} \leq V_{p(\cdot)}^{W}(u).$$

Entonces, si se considera el supremo del lado izquierdo se tiene que

$$\kappa V_{p(\cdot)}^{W}(u) \leq V_{p(\cdot)}^{W}(u),$$

por lo tanto, $u \in \kappa BV_{p(\cdot)}^{W}[a,b]$ así $WBV_{p(\cdot)}[a,b] \subset \kappa BV_{p(\cdot)}^{W}[a,b]$.

□

Ahora, en el siguiente teorema, se demostrará que la clase de funciones de $p(\cdot)$-variación acotada en el sentido de Wiener-Korenblum tiene estructura de espacio vectorial.

Teorema 2.10

Sea $p:[a,b]\to(1,\infty)$ una función admisible, entonces $\kappa BV_{p(\cdot)}^{W}[a,b]$ es un espacio vectorial.

Demostración:

Sean $u,v \in \kappa BV_{p(\cdot)}^{W}[a,b]$, entonces para cada partición $\pi: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ de $[a,b]$ y π^* una partición seleccionada del intervalo $[a,b]$, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{|(u+v)(t_j)-(u+v)(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}}{\sum_{j=1}^{n}\kappa\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{b-a}\right)} &\leq \frac{[|u(t_j)-u(t_{j-1})|+|v(t_j)-v(t_{j-1})|]^{p(x_{j-1})}}{\sum_{j=1}^{n}\kappa\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{b-a}\right)}\\ &\leq 2^{p(x_{j-1})-1}\left[\frac{|u(t_j)-u(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}+|v(t_j)-v(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}}{\sum_{j=1}^{n}\kappa\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{b-a}\right)}\right].\end{aligned}$$

Sumando desde $j=1$ hasta $j=n$ se obtiene

$$\begin{aligned}&\frac{\sum_{j=1}^{n}|(u+v)(t_j)-(u+v)(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}}{\sum_{j=1}^{n}\kappa\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{b-a}\right)}\\ &\qquad\leq \left[\frac{\sum_{j=1}^{n}2^{p(x_{j-1})-1}|u(t_j)-u(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}}{\sum_{j=1}^{n}\kappa\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{b-a}\right)}\right]+\left[\frac{\sum_{j=1}^{n}2^{p(x_{j-1})-1}|v(t_j)-v(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}}{\sum_{j=1}^{n}\kappa\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{b-a}\right)}\right].\end{aligned}$$

Como p es acotada, entonces existe $M > 0$ tal que $2^{p(x_{j-1})-1} \leq M$ para todo $t_{j-1} < x_j < t_j$, por lo tanto

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} |(u+v)(t_j) - (u+v)(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}}{\sum_{j=1}^{n} \kappa\left(\frac{t_j - t_{j-1}}{b-a}\right)}$$
$$\leq M \left[\frac{\sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}}{\sum_{j=1}^{n} \kappa\left(\frac{t_j - t_{j-1}}{b-a}\right)}\right] + M \left[\frac{\sum_{j=1}^{n} |v(t_j) - v(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}}{\sum_{j=1}^{n} \kappa\left(\frac{t_j - t_{j-1}}{b-a}\right)}\right].$$

En otras palabras, si $u, v \in \kappa BV^W_{p(\cdot)}[a,b]$, entonces la función $u+v$ es de $p(\cdot)$-variación acotada en el sentido de Wiener-Korenblum con exponente variable en $[a,b]$ y

$$\kappa V^W_{p(\cdot)}(u+v,[a,b]) \leq M\left(\kappa V^W_{p(\cdot)}(u,[a,b]) + \kappa V^W_{p(\cdot)}(v,[a,b])\right).$$

Por otro lado, como p es acotado, entonces existe $L > 0$ tal que

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} |(\alpha u)(t_j) - (\alpha u)(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}}{\sum_{j=1}^{n} \kappa\left(\frac{t_j - t_{j-1}}{b-a}\right)}$$
$$= \left[\frac{\sum_{j=1}^{n} |\alpha|^{p(x_{j-1})} |u(t_j) - u(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}}{\sum_{j=1}^{n} \kappa\left(\frac{t_j - t_{j-1}}{b-a}\right)}\right] \leq L \left[\frac{\sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}}{\sum_{j=1}^{n} \kappa\left(\frac{t_j - t_{j-1}}{b-a}\right)}\right].$$

Por lo tanto, $\alpha u \in \kappa BV^W_{p(\cdot)}[a,b]$. Así, se tiene que $\kappa BV^W_{p(\cdot)}[a,b]$ es un espacio vectorial.

$\square$

Proposición 2.5

Sea $p : [a,b] \to (1,\infty)$ una función admisible, la variación $\kappa V^W_{p(\cdot)}(\cdot;[a,b])$ es convexa.

Demostración:

Sean $u, v \in \kappa BV^W_{p(\cdot)}[a,b]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Por el Teorema 2.10 se tiene que $\alpha u \in kBV^W_{p(\cdot)}[a,b]$. Como, para $s > 1$, la función $t \geq 0,\ t \to t^s$ es convexa, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
&\frac{|((1-\alpha)u+\alpha v)(t_j)-((1-\alpha)u+\alpha v)(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}}{\sum_{j=1}^{n}\kappa\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{b-a}\right)}\\
&= \frac{|((1-\alpha)u(t_j)+\alpha v(t_j)-(1-\alpha)u(t_{j-1})+\alpha v(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}}{\sum_{j=1}^{n}\kappa\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{b-a}\right)}\\
&\leq \frac{|((1-\alpha)|u(t_j)-u(t_{j-1})|+\alpha|v(t_j)+v(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}}{\sum_{j=1}^{n}\kappa\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{b-a}\right)}\\
&\leq (1-\alpha)\frac{|u(t_j)-u(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}}{\sum_{j=1}^{n}\kappa\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{b-a}\right)}+\alpha\frac{|v(t_j)+v(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}}{\sum_{j=1}^{n}\kappa\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{b-a}\right)}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\kappa V_{p(\cdot)}^{W}((1-\alpha)u+\alpha v;[a,b]) \leq (1-\alpha)\kappa V_{p(\cdot)}^{W}(u;[a,b])+\alpha\kappa V_{p(\cdot)}^{W}(v;[a,b]).$$

□

Con la próxima definición, el cual es la norma para el espacio $\kappa BV_{p(\cdot)}^{W}[a,b]$, se garantiza que es un espacio normado.

Definición 2.6

Sea $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función que pertenece a $\kappa BV_{p(\cdot)}^{W}[a,b]$. Se define el funcional $||\cdot||_{\kappa p(\cdot)}^{W}$: $\kappa BV_{p(\cdot)}^{W}[a,b]\to\mathbb{R}$ por

$$||u||_{\kappa p(\cdot)}^{W} := |u(a)|+\mu_{p(\cdot)}^{\kappa}(u),\ u\in\kappa BV_{p(\cdot)}^{W}[a,b],$$

donde $\mu_{p(\cdot)}^{\kappa}(u) := \inf\limits_{\lambda>0}\left\{\lambda>0 : \kappa V_{p(\cdot)}^{W}\left(\frac{u}{\lambda}\right)\leq 1\right\}$.

Por la definición previa, se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 2.11

$\left(\kappa BV_{p(\cdot)}^{W}[a,b], ||\cdot||_{\kappa p(\cdot)}^{W}\right)$ es un espacio normado.

Demostración:

Sean $u,v\in\kappa BV_{p(\cdot)}^{W}[a,b]$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Entonces se tiene que

(a) $||\cdot||_{\kappa p(\cdot)}^{W}\geq 0$ ya que $|u(a)|\geq 0$ y $\mu_{p(\cdot)}(u)\geq 0$.

(b)

$$\begin{aligned}
\|\alpha u\|^W_{\kappa p(\cdot)} &= |\alpha u(a)| + \inf_{\lambda>0}\left\{\lambda>0 : \kappa V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{|\alpha| u}{\lambda}\right)\leq 1\right\}\\
&= |\alpha||u(a)| + |\alpha| \inf_{\lambda>0}\left\{\frac{\lambda}{|\alpha|}>0 : \kappa V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\frac{\lambda}{|\alpha|}}\right)\leq 1\right\}\\
&= |\alpha||u(a)| + |\alpha| \inf_{\mu>0}\left\{\mu>0 : \kappa V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\mu}\right)\leq 1\right\}\\
&= |\alpha|[|u(a)| + \mu_{p(\cdot)}(u)]\\
&= |\alpha|\|u\|^W_{\kappa p(\cdot)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|\alpha u\|^W_{\kappa p(\cdot)} = |\alpha|\|u\|^W_{\kappa p(\cdot)}$.

(c) Sean λ_u y λ_v fijos, tales que $\lambda_u > \|u\|^W_{\kappa p(\cdot)}$ y $\lambda_v > \|v\|^W_{\kappa p(\cdot)}$; entonces $\kappa V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\lambda_u}\right)\leq 1$ y $\kappa V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{v}{\lambda_v}\right)\leq 1$. Ahora, sea $\lambda = \lambda_u + \lambda_v$. Por la convexidad de $\kappa V^W_{p(\cdot)}(u;[a,b])$

$$\begin{aligned}
\kappa V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u+v}{\lambda};[a,b]\right) &= \kappa V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{\lambda_u}{\lambda}\frac{u}{\lambda_u} + \frac{\lambda_v}{\lambda}\frac{v}{\lambda_v};[a,b]\right)\\
&\leq \frac{\lambda_u}{\lambda}\kappa V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\lambda_u};[a,b]\right) + \frac{\lambda_v}{\lambda}\kappa V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{v}{\lambda_v};[a,b]\right)\\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^W_{\kappa p(\cdot)} &= |(u+v)(a)| + \mu_{p(\cdot)}(u+v)\\
&\leq |u(a)+v(a)| + \mu_{p(\cdot)}(u) + \mu_{p(\cdot)}(v)\\
&\leq \|u\|^W_{\kappa p(\cdot)} + \|v\|^W_{\kappa p(\cdot)}.
\end{aligned}$$

Así, $\|u+v\|^W_{\kappa p(\cdot)} \leq \|u\|^W_{\kappa p(\cdot)} + \|v\|^W_{\kappa p(\cdot)}$.

(d) Se demostrará que $\|u\|^W_{\kappa p(\cdot)} = 0$ si y solo si $u = 0$. Si $u \equiv 0$, entonces $\kappa V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\lambda}\right) = 0 \leq 1$ para todo $\lambda > 0$, así $\|u\|^W_{\kappa p(\cdot)} = 0$. Recíprocamente, supongamos que $\|u\|^W_{\kappa p(\cdot)} = 0$, es decir,

$$|u(a)| + \mu_{p(\cdot)}(u) = 0$$

entonces $|u(a)| = 0$ y $\mu_{p(\cdot)}(u) = \inf_{\lambda>0}\left\{\lambda>0 : \kappa V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\lambda}\right)\leq 1\right\} = 0$, así

$$\kappa V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\lambda}\right) = 0,$$

es decir,

$$\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left[\left|\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{\lambda}\right|\right]^{p(x_{j-1})}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\kappa\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{b-a}\right)} = 0.$$

Sin pérdida de generalidad, consideremos la partición $\pi : a = t_1 < t_2 = x < t_3 = b$, por lo tanto se tiene que

$$\left(\frac{|u(x)-u(a)|}{\lambda}\right)^{p(x)} + \left(\frac{|u(b)-u(x)|}{\lambda}\right)^{p(b)} = 0,$$

entonces

$$\left(\frac{|u(x)-u(a)|}{\lambda}\right)^{p(x)} = 0 \ \text{ y } \ \left(\frac{|u(b)-u(x)|}{\lambda}\right)^{p(b)} = 0,$$

se obtiene

$$[|u(x)-u(a)|]^{p(x)} = 0 \ \text{ y } \ [|u(b)-u(x)|]^{p(b)} = 0.$$

Por lo tanto $u(x) = u(a) = u(b)$ para todo $x \in [a,b]$ y $u(a) = 0$, así $u = 0$.

□

A continuación se demuestra que el espacio $\kappa BV^{W}_{p(\cdot)}[a,b]$ dotada con la norma $||\cdot||^{W}_{\kappa p(\cdot)}$ es un espacio de Banach.

Teorema 2.12

Sea $p : [a,b] \to (1,\infty)$ una función admisible, entonces $\left(\kappa BV^{W}_{p(\cdot)}[a,b], ||\cdot||^{W}_{\kappa p(\cdot)}\right)$ es un espacio de Banach.

Demostración:

Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\left(\kappa BV^{W}_{p(\cdot)}[a,b], ||\cdot||^{W}_{\kappa p(\cdot)}\right)$, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que para $n, m \geq N$ se tiene

$$||u_n - u_m||^{W}_{\kappa p(\cdot)} < \varepsilon, \quad n, m \geq N,$$

es decir

$$|u_n(a) - u_m(a)| + \mu_{p(\cdot)}(u_n - u_m) < \varepsilon, \quad n, m \geq N.$$

Entonces

$$|u_n(a) - u_m(a)| < \varepsilon \ \text{ y } \ \mu_{p(\cdot)}(u_n - u_m) < \varepsilon, \quad n, m \geq N.$$

Así, para todo $t, s \in [a,b]$ y $\varepsilon > 0$, se tiene que

$$\kappa V^{W}_{p(\cdot)}\left(\frac{u_n - u_m}{\varepsilon}; [a,b]\right) \leq 1.$$

Entonces

$$\frac{\left(\dfrac{|(u_n-u_m)(t)-(u_n-u_m)(s)|}{\varepsilon}\right)^{p(x_{ts})}}{\kappa\left(\dfrac{t-s}{b-a}\right)} \leq \kappa V^{W}_{p(\cdot)}\left(\frac{u_n - u_m}{\varepsilon}; [a,b]\right) \leq 1,$$

por lo tanto

$$[|(u_n-u_m)(t)-(u_n-u_m)(s)|]^{p(x_{ts})} \leq \varepsilon^{p(x_{ts})}\kappa\left(\frac{t-s}{b-a}\right),$$

por propiedades de la función $log(\cdot)$, se tiene

$$\begin{aligned} p(x_{ts})\log[|(u_n-u_m)(t)-(u_n-u_m)(s)|] &\leq p(x_{ts})\log(\varepsilon)+\log\left[\kappa\left(\frac{t-s}{b-a}\right)\right]\\ &\leq p(x_{ts})\log(\varepsilon)+p(x_{ts})\log\left[\kappa\left(\frac{t-s}{b-a}\right)\right]\\ &\leq p(x_{ts})\left[\log(\varepsilon)+\log\left[\kappa\left(\frac{t-s}{b-a}\right)\right]\right]\\ &= p(x_{ts})\log\left[\varepsilon\kappa\left(\frac{t-s}{b-a}\right)\right], \end{aligned}$$

entonces

$$\log[|(v_n-v_m)(t)-(v_n-v_m)(s)|]\leq\log\left[\varepsilon\kappa\left(\frac{t-s}{b-a}\right)\right],$$

por lo tanto

$$|(v_n-v_m)(t)-(v_n-v_m)(s)|\leq\varepsilon\kappa\left(\frac{t-s}{b-a}\right).$$

En consecuencia, la sucesión $\{v_n\}_{n\geq1}$, es una sucesión uniformemente de Cauchy, en el intervalo $[a,b]$. Como $\mathbb{R}$ es completo, entonces existe una función u definida en $[a,b]$ tal que

$$\lim_{n\to\infty}u_n(t)=u(t),\quad t\in[a,b].$$

Ahora se demostrará que u_n converge en la norma $||\cdot||^W_{\kappa p(\cdot)}$. Como $\{u_n\}_{n\geq1}$ es una sucesión de Cauchy existe $N>0$ tal que

$$||u_n-u_m||^W_{\kappa p(\cdot)}<\varepsilon,\quad n,m\geq N.$$

Por el hecho de que $\{u_n\}_{n\geq1}$ converge uniformemente a la función u en el intervalo $[a,b]$, se tiene que

$$||u_n-u||^W_{\kappa p(\cdot)} = ||u_n-\lim_{m\to\infty}u_m||^W_{\kappa p(\cdot)}=\lim_{m\to\infty}||u_n-u_m||^W_{\kappa p(\cdot)}<\varepsilon,\qquad n\geq N.$$

Por lo tanto, la sucesión $\{u_n\}_{n\geq1}$ converge a la función u en la norma $||\cdot||^W_{\kappa p(\cdot)}$. Así $\left(\kappa BV^W_{p(\cdot)}[a,b],||\cdot||^W_{\kappa p(\cdot)}\right)$ es un espacio de Banach.

□

En el siguiente lema se presentan algunos resultados de las funciones pertenecientes al espacio $\kappa BV^W_{p(\cdot)}[a,b]$.

Lema 2.9 (Propiedades Generales de $p(\cdot)$-variación)
Sean $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ una aplicación arbitraria y κ una función distorsión. Se tiene

(P1) Minimalidad: si $t,s\in[a,b]$, entonces

$$|u(t)-u(s)|^{p(x_{ts})}\leq\kappa\omega_{p(x_{ts})}(u,[a,b])\leq\kappa V^W_{p(\cdot)}(u,[a,b]).$$

(P2) Cambio de variable: si $[c,d]\subset\mathbb{R}$ y $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ es una función monótona (no necesariamente estricta), entonces $\kappa V^W_{p(\cdot)}(u,\varphi[c,d])=\kappa V^W_{p(\cdot)}(u\circ\varphi,[c,d])$.

(P3) Regularidad: $\kappa V^W_{p(\cdot)}(u,[a,b])=\sup\{\kappa V^W_{p(\cdot)}(u,[s,t]);\ s,t\in[a,b],\ a\leq b\}$.

Demostración:

(P1) Sean a, t, s, $b \in [a,b]$ y $a \leq t \leq s \leq b$.

$$|u(t)-u(s)|^{p(x_{ts})} \leq \sup_{\pi^*}\left\{\frac{|u(t)-u(s)|^{p(x_{ts})}}{\kappa\left(\dfrac{t-s}{b-a}\right)} : t,s \in [a,b], a \leq b\right\} = \kappa\omega_{p(x_{ts})}(u,[a,b])$$

por definición de supremo

$$\kappa\omega_{p(x_{ts})}(u,[a,b]) \leq \sup_{\pi^*}\frac{\sum_{j=1}^{n}[|u(t_j)-u(t_{j-1})|]^{p(x_{x_{j-1}})}}{\sum_{j=1}^{n}\kappa\left(\dfrac{t_j-t_{j-1}}{b-a}\right)} = \kappa V^W_{p(\cdot)}(u,[a,b]).$$

(P2) Sean $[c,d] \subset \mathbb{R}$, $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ una función monótona (no necesariamente estricta), π_0 una partición del intervalo $[c,d]$, $T_l = \{\tau_j\}_{j=0}^{m} \in \pi_0$ y $T = \{t_j\}_{j=0}^{m}$ con $t_j = \varphi(\tau_j)$, entonces

$$\begin{aligned}
\kappa V^W_{p(\cdot)}(u\circ v, T_l) &= \sup_{T_l}\left\{\frac{\sum_{j=1}^{m}|u(\varphi(\tau_j))-u(\varphi(\tau_{j-1}))|^{p(x_{j-1})}}{\sum_{j=1}^{m}\kappa\left(\dfrac{t_j-t_{j-1}}{b-a}\right)}\right\}\\
&= \sup_{T}\left\{\frac{\sum_{j=1}^{m}|u(t_j)-u(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}}{\sum_{j=1}^{m}\kappa\left(\dfrac{t_j-t_{j-1}}{b-a}\right)}\right\}\\
&= \kappa V^W_{p(\cdot)}(u,T) \leq \kappa V^W_{p(\cdot)}(u,\varphi([c,d])).
\end{aligned}$$

Por otro lado, si una partición $T = \{t_j\}_{j=0}^{m}$ de $\varphi([c,d])$, tal que $t_{j-1} < t_j$ para $j = 1,\dots,m$, entonces existe $\tau_j \in [c,d]$ tal que $t_j = \varphi(\tau_j)$ y de nuevo por la monotonía de φ

$$\kappa V^W_{p(\cdot)}(u,T) = \kappa V^W_{p(\cdot)}(u\circ\varphi, T_l) \leq \kappa V^W_{p(\cdot)}(u\circ\varphi,[c,d]).$$

(P3) Por la monotonía de $\kappa V^W_{p(\cdot)}$ se tiene

$$\kappa V_{p(\cdot)}(u,[a,b]) \geq \sup\left\{\kappa V^W_{p(\cdot)}(u,[s,t]) : s,t \in [a,b],\ a \leq b\right\}.$$

Por otro lado, para todo número $\alpha < \kappa V^W_{p(\cdot)}(u,[a,b])$ tal que existe una partición $T = \{t_j\}_{j=0}^{m} \in \pi^*$, $t_j < t_{j+1}$ con $\kappa V^W_{p(\cdot)}(u,T) \geq \alpha$, se define $\hat{\pi}$ una partición del intervalo $[t_0,t_m]$, entonces $T \in \hat{\pi}$ y $\kappa V^W_{p(\cdot)}(u,[a,b]) \geq \sup\left\{\kappa V^W_{p(\cdot)}(u,[s,t]);\ s,t \in [a,b],\ a \leq b\right\}$.

$\square$

2.3 Variación en el Sentido de Waterman-Shiba.

En esta sección, como contribución al tema (Ver [56]), se introduce la noción del espacio de funciones de $\Lambda_{p(\cdot)}$-variación acotada en el sentido de Waterman-Shiba con exponente variable, se demuestran algunas propiedades del espacio y se caracterizan este tipo de funciones vía composición.

Definición 2.7 $\Lambda_{p(\cdot)}$-Variación en el Sentido de Waterman-Shiba

Sean $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y Λ una Λ-sucesión y $p : [a,b] \to (1,+\infty)$ y $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones. Se definen

$$\sigma_{\Lambda_{p(\cdot)}}(u,\pi^*) := \sum_{i=1}^{n} \frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|^{p(x_{i-1})}}{\lambda_i}$$

y

$$V_{\Lambda}^{p(\cdot)}(u) = V_{\Lambda}^{p(\cdot)}(u;[a,b]) := \sup_{\pi^*} \sigma_{\Lambda_{p(\cdot)}}(u,\pi^*),$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones seleccionadas π^* of $[a,b]$; es decir, una partición del intervalo $[a,b]$ junto con una sucesión finita de números $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ tal que $t_j \leq x_j \leq t_{j+1}$ para todo $j = 0,1,\ldots,n-1$. En el caso en que $V_{\Lambda}^{p(\cdot)}(u) < \infty$ se dice que u tiene $\Lambda_{p(\cdot)}$-variación de u en $[a,b]$ (o u tiene $\Lambda_{p(\cdot)}$-variación acotada en el sentido de Waterman-Shiba).

N Note que toda partición $\pi = \{t_0, \ldots, t_n\}$ también puede ser vista como una unión de intervalos no-solapados $\bigcup_{i=1}^{n} I_i$ con $I_i : [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, n$.

Definición 2.8

El conjunto de funciones de $\Lambda_{p(\cdot)}$-variación acotada en el sentido de Waterman-Shiba es definido como

$$\Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b] := \left\{ u : [a,b] \to \mathbb{R} \mid \exists \beta > 0 \text{ donde } V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\beta}\right) < \infty \right\}.$$

N Sea $p : [a,b] \to (1,\infty)$ una función

1. Si se considera $p(x) = 1$ para todo $x \in [a,b]$ entonces

$$\Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b] = \Lambda BV[a,b],$$

por esta razón, en la Definición 2.7 se considera $1 < p < \infty$.

2. Si $p(x) = p$, para todo $x \in [a,b]$ con $1 < p < +\infty$ entonces

$$V_{\Lambda}^{p(\cdot)}(u) = [V_{\Lambda_p}(u)]^p.$$

Lema 2.10 (Propiedades Generales de la $\Lambda_{p(\cdot)}$-variación)
Sean Λ una Λ-sucesión, $p:[a,b]\to(1,+\infty)$ una función admisible y $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función.

(P1) Minimalidad: si $s,t\in[a,b]$ con $s<t$, entonces

$$\frac{|u(t)-u(s)|^{p(x_{st})}}{\lambda_{st}}\leq V_{\Lambda}^{p(\cdot)}(u).$$

donde x_{ts} es un número entre $[t,s]$ y λ_{st} es el correspondiente término en la sucesión Λ asociada a toda partición π que contiene a $[s,t]$ como subintervalo.

(P2) Monotonía: si $s,t\in[a,b]$ con $a\leq s\leq t\leq b$, entonces
$V_{\Lambda}^{p(\cdot)}(u;[a,s])\leq V_{\Lambda}^{p(\cdot)}(u;[a,t])$, $V_{\Lambda}^{p(\cdot)}(u;[t,b])\leq V_{\Lambda}^{p(\cdot)}(u;[s,b])$ y $V_{\Lambda}^{p(\cdot)}(u;[s,t])\leq V_{\Lambda}^{p(\cdot)}(u;[a,b])$.

(P3) Semi-aditividad: si $c\in[a,b]$ entonces

$$V_{\Lambda}^{p(\cdot)}(u;[a,b])\geq V_{\Lambda}^{p(\cdot)}(u;[a,c])+V_{\Lambda}^{p(\cdot)}(u;[c,b]).$$

(P4) Cambio de variable: si $[c,d]\subset\mathbb{R}$ y $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ es una función monótona (no necesariamente estricta), entonces

$$V_{\Lambda}^{p(\cdot)}(u;\varphi([c,d]))=V_{\Lambda}^{p(\cdot)}(u\circ\varphi;[c,d]).$$

(P5) Regularidad:

$$V_{\Lambda}^{p(\cdot)}(u;[a,b])=\sup\left\{V_{\Lambda}^{p(\cdot)}(u;[s,t]);s,t\in[a,b],s\leq t\right\}.$$

Demostración:

La demostración de estas propiedades se obtienen haciendo uso de un argumento similar presentado en el Lema 2.5.

□

2.3.1 Propiedades de la Clase.

A continuación se presentan algunos resultados del funcional $V_{\Lambda}^{p(\cdot)}(\cdot)$ que se necesitará más adelante para demostrar que $\Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$ es un espacio vectorial.

Teorema 2.13
Si Λ es una Λ-sucesión, $p:[a,b]\to(1,+\infty)$ una función admisible y $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función entonces

1. $V_{\Lambda}^{p(\cdot)}(|u|)\leq V_{\Lambda}^{p(\cdot)}(u)$ para todo $u\in\Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$.
2. Si $\beta_1>\beta_2$ entonces $V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\beta_1}\right)\leq V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\beta_2}\right)$ para todo $u\in\Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$.
3. $V_{\Lambda}^{p(\cdot)}$ es convexa.

Demostración:

Sean $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ una partición del intervalo $[a, b]$ y π^* una partición seleccionada. Entonces

1. Se obtiene usando el hecho de que
$$||u(t_i)| - |u(t_{i-1})|| \le |u(t_i) - u(t_{i-1})|.$$
Además que si $u \in \Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$ entonces $|u| \in \Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$.

2. Sea β_1, β_2 tal que $\beta_1 > \beta_2$. Entonces,
$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{u}{\beta_1}\right)(t_i) - \left(\frac{u}{\beta_1}\right)(t_{i-1})\right|^{p(x_{i-1})} &= \left(\frac{1}{\beta_1}|u(t_i) - u(t_{i-1})|\right)^{p(x_{i-1})} \\ &\le \left(\frac{1}{\beta_2}|u(t_i) - u(t_{i-1})|\right)^{p(x_{i-1})} \\ &= \left|\left(\frac{u}{\beta_2}\right)(t_i) - \left(\frac{u}{\beta_2}\right)(t_{i-1})\right|^{p(x_{i-1})}.\end{aligned}$$
Dividiendo por λ_i y considerando el supremo sobre todas las particiones seleccionadas π^* se obtiene
$$V_\Lambda^{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\beta_1}\right) \le V_\Lambda^{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\beta_2}\right).$$

3. Sea $\alpha, \beta \ge 0$ tal que $\alpha + \beta = 1$ y $u, v \in \Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$. Usando la convexidad de la función $h(t) = t^a$, $a \ge 1$ se tiene que
$$\begin{aligned}&|(\alpha u + \beta v)(t_i) - (\alpha u + \beta v)(t_{i-1})|^{p(x_{i-1})} \\ &\quad = |\alpha(u(t_i) - u(t_{i-1})) + \beta(v(t_i) - v(t_{i-1}))|^{p(x_{i-1})} \\ &\quad \le (\alpha|u(t_i) - u(t_{i-1})| + \beta|v(t_i) - v(t_{i-1})|)^{p(x_{i-1})} \\ &\quad \le \alpha|u(t_i) - u(t_{i-1})|^{p(x_{i-1})} + \beta|v(t_i) - v(t_{i-1})|^{p(x_{i-1})}.\end{aligned}$$
Así
$$\begin{aligned}&\frac{|(\alpha u + \beta v)(t_i) - (\alpha u + \beta v)(t_{i-1})|^{p(x_{i-1})}}{\lambda_i} \\ &\quad \le \alpha\frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|^{p(x_{i-1})}}{\lambda_i} + \beta\frac{|v(t_i) - v(t_{i-1})|^{p(x_{i-1})}}{\lambda_i}.\end{aligned}$$
Consideremos el supremo sobre todas las particiones seleccionadas π^* se obtiene finalmente
$$V_\Lambda^{p(\cdot)}(\alpha\, u + \beta\, v) \le \alpha\, V_\Lambda^{p(\cdot)}(u) + \beta\, V_\Lambda^{p(\cdot)}(v).$$

$\square$

Ahora, se demostrará que el conjunto de todas las funciones de $\Lambda_{p(\cdot)}$-variación acotada en el sentido de Waterman-Shiba, en el intervalo $[a, b]$, es un espacio vectorial.

Teorema 2.14

$\Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$ es un espacio vectorial.

Demostración:

Sean $u, v \in \Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$ y supongamos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces, existen $\beta_1, \beta_2 > 0$ tal que

$$V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\beta_1}\right) < \infty \quad \text{y} \quad V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\frac{v}{\beta_2}\right) < \infty.$$

Sea $\hat{\beta} := \text{máx}\{\beta_1, \beta_2\} > 0$. Por la propiedad 2. del Teorema 2.13 se obtiene

$$V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\hat{\beta}}\right) \leq V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\beta_1}\right) < \infty$$

y

$$V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\frac{v}{\hat{\beta}}\right) \leq V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\frac{v}{\beta_2}\right) < \infty.$$

Si $\alpha = \beta = 0$, $\alpha u + \beta v = 0 \in \Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$. Supongamos entonces que $\alpha \neq 0$ ó $\beta \neq 0$.

Sean $\mu := (|\alpha| + |\beta|)\hat{\beta} > 0$ y π^* una partición seleccionada de $[a,b]$. Dados $u, v \in \Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$ y $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se obtiene

$$\begin{aligned} |(\alpha u + \beta v)(t_i) - (\alpha u + \beta v)(t_{i-1})| &= |\alpha(u(t_i) - u(t_{i-1})) + \beta(v(t_i) - v(t_{i-1}))| \\ &\leq |\alpha||u(t_i) - u(t_{i-1})| + |\beta||v(t_i) - v(t_{i-1})|. \end{aligned}$$

Así,

$$\left|\left(\frac{\alpha u + \beta v}{\mu}\right)(t_i) - \left(\frac{\alpha u + \beta v}{\mu}\right)(t_{i-1})\right| \leq \frac{|\alpha|}{\mu}|u(t_i) - u(t_{i-1})| + \frac{|\beta|}{\mu}|v(t_i) - v(t_{i-1})|,$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} &\left|\left(\frac{\alpha u + \beta v}{\mu}\right)(t_i) - \left(\frac{\alpha u + \beta v}{\mu}\right)(t_{i-1})\right|^{p(x_{i-1})} \\ &\quad \leq \left(\frac{|\alpha|}{|\alpha| + |\beta|}\frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{\hat{\beta}} + \frac{|\beta|}{|\alpha| + |\beta|}\frac{|v(t_i) - v(t_{i-1})|}{\hat{\beta}}\right)^{p(x_{i-1})} \\ &\quad \leq \frac{|\alpha|}{|\alpha| + |\beta|}\left(\frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{\hat{\beta}}\right)^{p(x_{i-1})} + \frac{|\beta|}{|\alpha| + |\beta|}\left(\frac{|v(t_i) - v(t_{i-1})|}{\hat{\beta}}\right)^{p(x_{i-1})} \\ &\quad = \frac{|\alpha|}{|\alpha| + |\beta|}\left|\left(\frac{u}{\hat{\beta}}\right)(t_i) - \left(\frac{u}{\hat{\beta}}\right)(t_{i-1})\right|^{p(x_{i-1})} + \frac{|\beta|}{|\alpha| + |\beta|}\left|\left(\frac{v}{\hat{\beta}}\right)(t_i) - \left(\frac{v}{\hat{\beta}}\right)(t_{i-1})\right|^{p(x_{i-1})}. \end{aligned}$$

De modo que,

$$\begin{aligned} \frac{\left|\left(\frac{\alpha u + \beta v}{\mu}\right)(t_i) - \left(\frac{\alpha u + \beta v}{\mu}\right)(t_{i-1})\right|^{p(x_{i-1})}}{\lambda_i} &\leq \frac{|\alpha|}{|\alpha| + |\beta|}\frac{\left|\left(\frac{u}{\hat{\beta}}\right)(t_i) - \left(\frac{u}{\hat{\beta}}\right)(t_{i-1})\right|^{p(x_{i-1})}}{\lambda_i} \\ &\quad + \frac{|\beta|}{|\alpha| + |\beta|}\frac{\left|\left(\frac{v}{\hat{\beta}}\right)(t_i) - \left(\frac{v}{\hat{\beta}}\right)(t_{i-1})\right|^{p(x_{i-1})}}{\lambda_i}. \end{aligned}$$

Considerando el supremo sobre todas las particiones seleccionadas π^* de $[a,b]$ se tiene que

$$V_\Lambda^{p(\cdot)}\left(\frac{\alpha\, u+\beta\, v}{\mu}\right)\leq \frac{|\alpha|}{|\alpha|+|\beta|}V_\Lambda^{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\hat{\beta}}\right)+\frac{|\alpha|}{|\alpha|+|\beta|}V_\Lambda^{p(\cdot)}\left(\frac{v}{\hat{\beta}}\right)<\infty.$$

Por lo tanto

$$\alpha\, u+\beta\, v\in \Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b].$$

Así se concluye que $\Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$ es un espacio vectorial.

$\square$

Definamos el funcional $\|\cdot\|_{\Lambda_{p(\cdot)}}:\Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]\to\mathbb{R}$ por

$$\|u\|_{\Lambda_{p(\cdot)}}:=|u(a)|+\text{ínf}\left\{\beta>0: V_\Lambda^{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\beta}\right)\leq 1\right\}\ \text{ para cada }\ u\in\Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b].$$

Ahora se demostrará que $\|\cdot\|_{\Lambda_{p(\cdot)}}$ define una norma en $\Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$.

Teorema 2.15

$\left(\Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b];\|\cdot\|_{\Lambda_{p(\cdot)}}\right)$ es un espacio vectorial normado.

Demostración:

Sean $u,v\in\Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$, $\alpha\in\mathbb{R}$ y $\Lambda=\{\lambda_i\}_{i\geq 1}$ una Λ-sucesión.

1. Por definición

$$\|u\|_{\Lambda_{p(\cdot)}}\geq 0,\ \text{para todo } u\in\Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b].$$

2. Si $\alpha=0$ entonces $\|\alpha\, u\|_{\Lambda_{p(\cdot)}}=|\alpha|\,\|u\|_{\Lambda_{p(\cdot)}}$. Supongamos que $\alpha\neq 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\|\alpha\, u\|_{\Lambda_{p(\cdot)}} &= |\alpha\, u(a)|+\text{ínf}\left\{\beta>0: V_\Lambda^{p(\cdot)}\left(\frac{\alpha\, u}{\beta}\right)\leq 1\right\}\\
&= |\alpha|\,|u(a)|+\text{ínf}\left\{\beta>0: V_\Lambda^{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\frac{\beta}{|\alpha|}}\right)\leq 1\right\}\\
&= |\alpha|\,|u(a)|+|\alpha|\,\text{ínf}\left\{\frac{\beta}{|\alpha|}>0: V_\Lambda^{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\frac{\beta}{|\alpha|}}\right)\leq 1\right\}\\
&= |\alpha|\left(|u(a)|+\text{ínf}\left\{\hat{\beta}>0: V_\Lambda^{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\hat{\beta}}\right)\leq 1\right\}\right)\\
&= |\alpha|\,\|u\|_{\Lambda_{p(\cdot)}}.
\end{aligned}$$

3. Sea $\beta_1,\beta_2>0$ tal que

$$\beta_1>\text{ínf}\left\{\beta>0: V_\Lambda^{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\beta}\right)\leq 1\right\}:=C_1$$

y

$$\beta_2 > \text{ínf}\left\{\beta > 0 : V_\Lambda^{p(\cdot)}\left(\frac{v}{\beta}\right) \le 1\right\} := C_2.$$

Así, por definición de ínfimo, existen $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ tal que

$$C_1 < \hat{\beta}_1 < \beta_1 \quad \text{con} \quad V_\Lambda^{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\hat{\beta}_1}\right) \le 1$$

y

$$C_2 < \hat{\beta}_2 < \beta_2 \quad \text{con} \quad V_\Lambda^{p(\cdot)}\left(\frac{v}{\hat{\beta}_2}\right) \le 1,$$

entonces, haciendo uso de la propiedad 2. del Teorema 2.13, se obtiene

$$V_\Lambda^{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\beta_1}\right) \le 1 \quad \text{y} \quad V_\Lambda^{p(\cdot)}\left(\frac{v}{\beta_2}\right) \le 1.$$

Consideremos $\hat{\beta} := \beta_1 + \beta_2$. Ya que $V_\Lambda^{p(\cdot)}(u)$ es convexo

$$\begin{aligned} V_\Lambda^{p(\cdot)}\left(\frac{u+v}{\hat{\beta}}\right) &= V_\Lambda^{p(\cdot)}\left(\frac{\beta_1}{\hat{\beta}}\frac{u}{\beta_1} + \frac{\beta_2}{\hat{\beta}}\frac{v}{\beta_2}\right) \\ &\le \frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2} V_\Lambda^{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\beta_1}\right) + \frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2} V_\Lambda^{p(\cdot)}\left(\frac{v}{\beta_2}\right) \\ &\le 1, \end{aligned}$$

consecuentemente,

$$\begin{aligned} \|u+v\|_{\Lambda_{p(\cdot)}} &= |(u+v)(a)| + \text{ínf}\left\{\delta > 0 : V_\Lambda^{p(\cdot)}\left(\frac{u+v}{\delta}\right) \le 1\right\} \\ &\le |u(a) + v(a)| + \hat{\beta} \\ &\le |u(a)| + \beta_1 + |v(a)| + \beta_2, \end{aligned}$$

como β_1 y β_2 son arbitrarios, particularmente para $\beta_1 = \beta_2 := 1/2n$, con $n \in \mathbb{N}$, se obtiene

$$\begin{aligned} \|u+v\|_{\Lambda_{p(\cdot)}} &\le |u(a)| + C_1 + \frac{1}{2n} + |v(a)| + C_2 + \frac{1}{2n} \\ &= |u(a)| + C_1 + |v(a)| + C_2 + \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

consideremos el límite cuando $n \to +\infty$, se obtiene

$$\begin{aligned} \|u+v\|_{\Lambda_{p(\cdot)}} &\le |u(a)| + C_1 + |v(a)| + C_2 \\ &= \|u\|_{\Lambda_{p(\cdot)}} + \|v\|_{\Lambda_{p(\cdot)}}. \end{aligned}$$

4. Ahora se demostrará que $\|u\|_{\Lambda_{p(\cdot)}} = 0$ si y solo si $u = 0$. Notemos que si $u = 0$, $V_\Lambda^{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\beta}\right) = 0 \le 1$ para todo $\beta > 0$, así que

$$\text{ínf}\left\{\beta > 0 : V_\Lambda^{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\beta}\right) \le 1\right\} = 0$$

y como $u(a)=0$ se tiene que $\|u\|_{\Lambda_{p(\cdot)}}=0$. Supongamos ahora que $\|u\|_{\Lambda_{p(\cdot)}}=0$. Entonces

$$|u(a)|+\text{ínf}\left\{\beta>0: V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\beta}\right)\leq 1\right\}=0,$$

el cual implica que

$$|u(a)|=0 \quad \text{y} \quad \text{ínf}\left\{\beta>0: V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\beta}\right)\leq 1\right\}=0.$$

Ahora bien, si $\text{ínf}\left\{\beta>0: V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\beta}\right)\leq 1\right\}=0$, dado $\varepsilon>0$, existe $0<\beta<\varepsilon$ tal que

$$V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\leq V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\beta}\right)\leq 1.$$

Esto implica que $V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\leq 1$, para todo $\varepsilon>0$, particularmente para $0<\varepsilon<1$,

$$\begin{aligned} V_{\Lambda}^{p(\cdot)}(u)=V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\varepsilon\frac{u}{\varepsilon}\right) &= V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\varepsilon\frac{u}{\varepsilon}+(1-\varepsilon)\,0\right)\\ &\leq \varepsilon\, V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)+(1-\varepsilon)\,V_{\Lambda}^{p(\cdot)}(0)\\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Así, $0\leq V_{\Lambda}^{p(\cdot)}(u)\leq\varepsilon$, para todo $\varepsilon>0$ y esto implica que

$$V_{\Lambda}^{p(\cdot)}(u)=0.$$

Además, sin pérdida de generalidad consideremos la partición $\pi: a=t_0<t_1=x<t_2=b$, de donde se obtiene que

$$\frac{|u(x)-u(a)|^{p(a)}}{\lambda_1}+\frac{|u(b)-u(x)|^{p(x)}}{\lambda_2}=0,$$

entonces $|u(x)-u(a)|=0$ y $|u(b)-u(x)|=0$ así que $u(x)=u(a)=u(b)$, para todo $x\in[a,b]$ y como $u(a)=0$ se obtiene que $u=0$.

□

Teorema 2.16

Sean $p:[a,b]\to[1,+\infty)$ una función admisible y Λ una Λ-sucesión, entonces $\left(\Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b];\|\cdot\|_{\Lambda_{p(\cdot)}}\right)$ es un espacio de Banach.

Demostración:

Sea $\Lambda=\{\lambda_i\}_{i\geq 1}$ una Λ-sucesión y supongamos que $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio $\left(\Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b];\|\cdot\|_{\Lambda_{p(\cdot)}}\right)$. Entonces, dado $\varepsilon>0$, existe $N>0$ tal que para $m,n\geq N$ se tiene que

$$\|u_n-u_m\|_{\Lambda_{p(\cdot)}}\leq\frac{\varepsilon}{2},$$

es decir,

$$|u_n(a)-u_m(a)|+\text{ínf}\left\{\beta>0: V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\frac{u_n-u_m}{\beta}\right)\leq 1\right\}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Así $|u_n(a)-u_m(a)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ y

$$\text{ínf}\left\{\beta>0: V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\frac{u_n-u_m}{\beta}\right)\leq 1\right\}<\frac{\varepsilon}{2},\ n,m\geq N;$$

entonces, por la definición de ínfimo y la propiedad 2 del Teorema 2.13,

$$V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\frac{u_n-u_m}{\varepsilon/2}\right)\leq 1.$$

Sean $s,t\in[a,b]$ fijos con $s<t$ y consideremos, sin pérdida de generalidad, la partición seleccionada $\pi^*: a=t_0<x_0<t_1=s<x_1<t_2=t<x_2<t_3=b$. Sea $M=\text{máx}\{\lambda_2,1\}$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{|(u_n-u_m)(t_2)-(u_n-u_m)(t_1)|}{\varepsilon/2}\right)^{p(x_1)}}{\lambda_2} &\leq \sum_{i=1}^{3}\frac{\left(\frac{|(u_n-u_m)(t_i)-(u_n-u_m)(t_{i-1})|}{\varepsilon/2}\right)^{p(x_{i-1})}}{\lambda_i}\\ &\leq V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\frac{u_n-u_m}{\varepsilon/2}\right)\leq 1\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$|(u_n-u_m)(t_2)-(u_n-u_m)(t_1)|^{p(x_1)}\leq\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p(x_1)}\lambda_2\leq\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p(x_1)}M$$

así

$$|(u_n-u_m)(t)-(u_n-u_m)(s)|^{p(x_1)}\leq\left(\frac{\varepsilon}{2}M\right)^{p(x_1)}$$

de modo que

$$|(u_n-u_m)(t)-(u_n-u_m)(s)|\leq M\frac{\varepsilon}{2},\quad \text{para todo } s,t\in[a,b].$$

Sea $s=a$ fijo,

$$|u_n(t)-u_m(t)-(u_n(a)-u_m(a))|\leq M\frac{\varepsilon}{2},\quad \text{para todo } t\in[a,b]$$

y como $|u_n(a)-u_m(a)|\leq\varepsilon/2$ se obtiene

$$\begin{aligned}|u_n(t)-u_m(t)| &= |u_n(t)-u_n(a)+u_n(a)+u_m(a)-u_m(a)-u_m(t)|\\ &\leq |u_n(t)-u_m(t)-(u_n(a)+u_m(a))|+|u_n(a)-u_m(a)|\\ &\leq M\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\ &= \frac{(M+1)\varepsilon}{2},\quad \text{para todo } t\in[a,b].\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión uniformemente de Cauchy en el intervalo $[a,b]$. Como $\mathbb{R}$ es completo, existe una función u definida en $[a,b]$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty}u_n(t)=u(t),\quad t\in[a,b].$$

Ahora, se demostrará que $\{u_n\}_{n\geq 1}$ converge en la norma $\|\cdot\|_{\Lambda_{p(\cdot)}}$. Notemos que

$$\|u_n - u\|_{\Lambda_{p(\cdot)}} = |u_n(a) - u(a)| + \text{ínf}\left\{\beta > 0 : V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\frac{u_n - u}{\beta}\right) \leq 1\right\}. \tag{2.3}$$

Como $|u_n(a) - u_m(a)| < \varepsilon/2$ y considerándose el límite cuando $m \to +\infty$ se tiene que

$$|u_n(a) - u(a)| \leq \varepsilon/2, \quad n \geq N. \tag{2.4}$$

Por otro lado, consideremos la partición seleccionada

$$\pi^* : a = t_0 < x_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < x_{k-1} < t_k = b$$

y sea $n \geq N$ fijo. Entonces,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k} \frac{\left(\dfrac{|u_n(t_i) - u(t_i) - (u_n(t_{i-1}) - u(t_{i-1}))|}{\varepsilon/2}\right)^{p(x_{i-1})}}{\lambda_i} \\
&\qquad = \lim_{m\to+\infty} \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(\dfrac{|u_n(t_i) - u_m(t_i) - (u_n(t_{i-1}) - u_m(t_{i-1}))|}{\varepsilon/2}\right)^{p(x_{i-1})}}{\lambda_i} \\
&\qquad \leq \limsup_{m\to+\infty} V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\frac{u_n - u_m}{\varepsilon/2}\right) \leq 1,
\end{aligned}$$

esto implica que $V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\frac{u_n - u}{\varepsilon/2}\right) \leq 1$ y por lo tanto

$$\text{ínf}\left\{\delta > 0 : V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\frac{u_n - u}{\delta}\right) \leq 1\right\} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.5}$$

De la ecuación (2.3) y haciendo uso de los resultados (2.4) y (2.5) se obtiene

$$\|u_n - u\|_{\Lambda_{p(\cdot)}} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Así, la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$ converge a la función u en la norma $\|\cdot\|_{\Lambda_{p(\cdot)}}$ y de esta manera se obtiene

$$\left(\Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]; \|\cdot\|_{\Lambda_{p(\cdot)}}\right)$$

es un espacio de Banach.

$\square$

2.3.2 Caracterización

Siguiendo el resultado obtenido por V. V. Chistyakov y O. E. Galkin (1998) en [38], se demuestra que una función es de $\Lambda_{p(\cdot)}$-variación acotada en el sentido de Waterman-Shiba si y solo si es la composición de una función continua y estrictamente creciente y una función $\Lambda_{p(\cdot)}$-variación acotada en el sentido de Waterman-Shiba.

Teorema 2.17

Si $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función monótona y acotada, $g : \varphi([a,b]) \to \mathbb{R}$ es una función Hölder con exponente variable $\gamma(\cdot) = \dfrac{1}{p(\cdot)}$ y $u = g\circ\varphi$, entonces $u \in \Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$.

Demostración:

Sea Λ una Λ-sucesión. Supongamos que φ es no decreciente (en el caso en que es decreciente se procede de manera análoga). Entonces, $\varphi([a,b]) = [\varphi(a),\varphi(b)]$ y por la propiedad (P4) del Lema 2.10 se tiene que

$$V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\frac{u}{C};[a,b]\right) = V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\frac{g\circ\varphi}{C};[a,b]\right) = V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\frac{g}{C};\varphi([a,b])\right) \quad \text{para todo } C>0. \tag{2.6}$$

Como $g \in H^{\gamma(\cdot)}$, existe $C>0$ tal que

$$|g(t_i)-g(t_{i-1})| \le C\,|t_i - t_{i-1}|^{\gamma(x_{i-1})} \quad \text{para todo } \ x_{i-1}\in[a,b],$$

esto implica que

$$\frac{|g(t_i)-g(t_{i-1})|}{C} \le |t_i - t_{i-1}|^{\gamma(x_{i-1})}$$

entonces,

$$\begin{aligned}\left[\frac{|g(t_i)-g(t_{i-1})|}{C}\right]^{p(x_{i-1})} &\le |t_i-t_{i-1}|^{p(x_{i-1})\,\gamma(x_{i-1})}\\ &= |t_i-t_{i-1}|\end{aligned}$$

así que

$$\begin{aligned}\frac{\left[\dfrac{|g(t_i)-g(t_{i-1})|}{C}\right]^{p(x_{i-1})}}{\lambda_i} &\le \frac{|t_i-t_{i-1}|}{\lambda_i}\\ &\le \frac{|t_i-t_{i-1}|}{\lambda_1}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Ahora, consideremos $T=\{t_i\}_{i=1}^{m}$ una partición de $[\varphi(a),\varphi(b)]$, haciendo uso de (2.7), se obtiene que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\frac{\left[\dfrac{|g(t_i)-g(t_{i-1})|}{C}\right]^{p(x_{i-1})}}{\lambda_i} &\le \sum_{i=1}^{m}\frac{|t_i-t_{i-1}|}{\lambda_1}\\ &\le \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\lambda_1},\end{aligned}$$

consideremos el supremo en T y usando el hecho que φ es acotado

$$V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\frac{g}{C};T\right) \le \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\lambda_1} < +\infty.$$

Esto implica que

$$V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\frac{g}{C};\varphi([a,b])\right) = V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\frac{g}{C};[\varphi(a),\varphi(b)]\right) < +\infty.$$

Así, de la ecuación (2.6)

$$V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\frac{u}{C};[a,b]\right) < +\infty.$$

Por lo tanto, $u = g \circ \varphi \in \Lambda_{p(\cdot)}BV([a,b])$.

□

Ahora bien, en el siguiente resultado, se demuestra que $\Lambda_{p(\cdot)}BV$ es invariante sobre sustituciones monótonas de variables.

Proposición 2.6

Dada una función $g : [c,d] \to \mathbb{R}$, sea $\tau : [a,b] \to [c,d]$ una función continua y estrictamente creciente con $\tau(a) = c$ y $\tau(b) = d$. Entonces $g \circ \tau \in \Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$ si y solo si $g \in \Lambda_{p(\cdot)}BV[c,d]$.

Demostración:

Denotemos por $\Pi([a,b])$ el conjunto de todas las particiones del intervalo $[a,b]$ y sea $\pi^* = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in [a,b]$, entonces $\tau\pi^* := \{\tau(x_0), \tau(x_1), \ldots, \tau(x_n)\} \in \Pi([c,d])$ y se tiene que $\Pi[a,b] = \tau(\Pi([c,d]))$. El resultado se obtiene haciendo uso de un argumento similar al obtenido en la demostración de la Proposición 2.22 en [3].

□

2.4 Variación en el Sentido de De La Vallée Poussin-Wiener

En lo que sigue, como contribución a este tema (Ver [114]), se presenta la noción de $(p(\cdot),2)$-variación acotada en el sentido de De La Vallée Poussin-Wiener con exponente variable y se demuestran propiedades; así como también, se demuestra que si una función es la composición de una función monótona acotada con una función $(\gamma(\cdot)+1)$-Hölder continua con exponente $\gamma(\cdot) = 1/p(\cdot)$ entonces la función pertenece al espacio $BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$.

Definición 2.9

Sean $p : [a,b] \to (1,\infty)$ una función, $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ una partición del intervalo $[a,b]$ y $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Se definen

$$\sigma^W_{(p(\cdot),2)}(u,\pi^*) = \sum_{j=1}^{n-1} \left| \frac{u(t_{j+1}) - u(t_j)}{t_{j+1} - t_j} - \frac{u(t_j) - u(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \right|^{p(x_{j-1})},$$

y

$$V^W_{(p(\cdot),2)}(u) = V^W_{(p(\cdot),2)}(u;[a,b]) := \sup_{\pi^*} \sigma^W_{(p(\cdot),2)}(u,\pi^*)$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones seleccionadas π^* de $[a,b]$, es decir, una partición del intervalo $[a,b]$ junto con una sucesión finita de números $x_0, \ldots, x_n$ sujeta a la condición $t_j \le x_j \le t_{j+1}$ para cada j. El caso en que $V^W_{(p(\cdot),2)}(u) < \infty$, se dice que u tiene variación De La Vallée Poussin-Wiener con exponente variable (o $(p(\cdot),2)$-variación en el sentido de De La Vallée Poussin-Wiener) en $[a,b]$.

N Cabe señalar que en la definición anterior (se considera el supremo sobre todas las particiones) el número $V^W_{(p(\cdot),2)}(u)$ no depende de la elección del argumento del exponente.

Se denota por $BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$ la clase de todas las funciones de $(p(\cdot),2)$-variación acotada en el sentido de Wiener con exponente variable en $[a,b]$.

Definición 2.10

Sea $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función, tal que $u\in BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$. Se define el funcional $||\cdot||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]}$: $BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]\to\mathbb{R}$ por

$$\|u\|_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]} := |u(a)| + \left|u'_+(a)\right| + \text{ínf}\left\{\lambda>0; V^W_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{u}{\lambda};[a,b]\right)\le 1\right\}. \tag{2.8}$$

La norma $\|u\|_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]}$ es la norma de Luxemburg.

N Sea $p:[a,b]\to(1,\infty)$ una función.

1. Si se considera $p(x)=1$, para todo $x\in[a,b]$, entonces $BV_{(p(\cdot),2)}[a,b]=BV^2[a,b]$, por esta razón que en la Definición 2.9 se considerada $1<p<\infty$.

2. Si $p(x)=p$, para todo $x\in[a,b]$ y $1<p<\infty$ entonces $BV_{(p(\cdot),2)}[a,b]=BV_{(p,2)}[a,b]$, es decir, el espacio de variación acotada en el sentido de De La Vallée Poussin-Wiener con exponente variable es igual al espacio de variación acotada en el sentido de De la Vallée Poussin-Wiener.

2.4.1 Propiedades de la Clase

En esta sección se presentan algunos resultados del espacio $BV_{(p(\cdot),2)}[a,b]$ y a continuación se demostrará que para p una función admisible, el funcional $V^W_{(p(\cdot),2)}(\cdot;[a,b])$ es pseudomodular convexo.

Proposición 2.7

Sea p una función admisible. Entonces $V^W_{(p(\cdot),2)}(\cdot;[a,b])$ es pseudomodular convexo.

Demostración:

Para todo $u\in BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$ se tiene que $V^W_{(p(\cdot),2)}(0u;[a,b])=V^W_{(p(\cdot),2)}(0;[a,b])=0$. Además, el hecho de que todo $u\in BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$ implica que $V^W_{(p(\cdot),2)}(\alpha u;[a,b])=V^W_{(p(\cdot),2)}(u;[a,b])$ cuando $|\alpha|=1$ se sigue inmediatamente de la definición.
Finalmente, Con el mismo argumento de la Proposición 1.12 parte (3), se sigue que para $\alpha\in[0,1]$ y $u,v\in BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$ se obtiene que

$$V^W_{(p(\cdot),2)}(\alpha u+(1-\alpha)v;[a,b])\le\alpha V^W_{(p(\cdot),2)}(u;[a,b])+(1-\alpha)V^W_{(p(\cdot),2)}(v;[a,b]).$$

□

Lema 2.11
Si $||u||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]} \leq 1$ entonces $V^W_{(p(\cdot),2)}(u;[a,b]) \leq \left(||u||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]}\right)^{p^-}$.

Demostración:

Sea $k > \left(||u||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]}\right)^{p^-}$. Si $0 < ||u||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]} \leq 1$, entonces como por definición

$$\text{ínf}\left\{\lambda > 0: \; V^W_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{u}{\lambda};[a,b]\right) \leq 1\right\} \leq ||u||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]},$$

se sigue que

$$V^W_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{u}{||u||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]}};[a,b]\right) \leq 1. \tag{2.9}$$

Se tiene que para todo $x \in [a,b]$,

$$\begin{aligned} p^+ &= \text{ínf}\,\{\alpha \in \mathbb{R} : |\{x \in [a,b];\; p(x) > \alpha\}| = 0\} \\ &= \text{ínf}\,\{\alpha \in \mathbb{R} : |\{x \in [a,b];\; |p(x)| > \alpha\}| = 0\} \\ &= \|p\|_\infty \geq p(x). \end{aligned}$$

Por otro lado, supongamos que existe $y \in [a,b]$ tal que $p(y) < p^-$, donde

$$p^- := \text{essinf}_{x\in[a,b]}\, p(x) = \sup\left\{\beta \in \mathbb{R} : |\{x \in [a,b]; p(x) < \beta\}| = 0\right\}.$$

Entonces, por definición, como $p(y) < p^-$, se sigue que $y \in \{z \in [a,b]; p(z) < p^-\}$. Por lo tanto

$$|\{z \in [a,b]; p(z) < p^-\}| \geq |\{y\}| > 0,$$

el cual es una contradicción. Por consiguiente, para todo $x \in [a,b]$ tal que $p(x) \geq p^-$.

En resumen, para todo $x \in [a,b]$, $p^- \leq p(x) \leq p^+$.

Así, como $||u||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]} \leq 1$, se sigue que para todo $x \in [a,b]$

$$\left(||u||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]}\right)^{p^+} \leq \left(||u||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]}\right)^{p(x)} \leq \left(||u||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]}\right)^{p^-}$$

y

$$\frac{1}{\left(||u||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]}\right)^{p^-}} \leq \frac{1}{\left(||u||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]}\right)^{p(x)}} \qquad (x \in [a,b]). \tag{2.10}$$

Entonces, por definición del funcional $V^W_{(p(\cdot),2)}(\cdot;[a,b])$, (2.9) y (2.10) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(||u||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]}\right)^{p^-}} V^W_{(p(\cdot),2)}(u;[a,b]) &= \sup_{\pi^*} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\left(||u||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]}\right)^{p^-}} \left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j} - \frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})} \\ &\leq \sup_{\pi^*} \sum_{j=1}^{n-1} \left|\frac{1}{||u||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]}}\left(\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j} - \frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}}\right)\right|^{p(x_{j-1})} \\ &= V^W_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{u}{||u||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]}};[a,b]\right) \leq 1 \end{aligned}$$

De modo que $V^{W}_{(p(\cdot),2)}(u;[a,b]) \leq \left(||u||_{BV^{W}_{(p(\cdot),2)}[a,b]}\right)^{p^-}$.

En otro orden de ideas, si $||u||_{BV^{W}_{(p(\cdot),2)}[a,b]} = 0$, entonces

$$\inf\left\{\lambda > 0 : \; V^{W}_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{u}{\lambda};[a,b]\right) \leq 1\right\} = 0.$$

como

$$\inf\left\{\lambda > 0 : \; V^{W}_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{u}{\lambda};[a,b]\right) \leq 1\right\} \leq ||u||_{BV^{W}_{(p(\cdot),2)}[a,b]},$$

entonces, existe $k' > 0$ tal que

$$V^{W}_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{u}{k'};[a,b]\right) \leq 1.$$

Además, para todo $0 < k \leq k'$, se sigue que

$$V^{W}_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{u}{k};[a,b]\right) \leq V^{W}_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{u}{k'};[a,b]\right) \leq 1$$

para todo $k' \leq k \leq 1$. Por lo tanto, por el mismo argumento usado anteriormente, se tiene que

$$\frac{1}{k^{p^-}} V^{W}_{(p(\cdot),2)}(u;[a,b]) \leq V^{W}_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{u}{k};[a,b]\right) \leq 1, \quad 0 < k < 1.$$

Entonces,

$$V^{W}_{(p(\cdot),2)}(u;[a,b]) \leq k^{p^-}, \quad 0 < k < 1.$$

Por consiguiente, $\left(V^{W}_{(p(\cdot),2)}(u;[a,b])\right)^{\frac{1}{p^-}}$ es cota inferior del conjunto

$$\left\{\lambda > 0 : \; V^{W}_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{u}{\lambda};[a,b]\right) \leq 1\right\}$$

el cual significa que

$$\left(V^{W}_{(p(\cdot),2)}(u;[a,b])\right)^{\frac{1}{p^-}} \leq \inf\left\{\lambda > 0 : \; V^{W}_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{u}{\lambda};[a,b]\right) \leq 1\right\} \leq ||u||_{BV^{W}_{(p(\cdot),2)}[a,b]}.$$

Así,

$$V^{W}_{(p(\cdot),2)}(u;[a,b]) \leq \left(||u||_{BV^{W}_{(p(\cdot),2)}[a,b]}\right)^{p^-}.$$

□

Teorema 2.18

Sean $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función y p una función admisible, entonces $BV^2[a,b] \subset BV^{W}_{(p(\cdot),2)}[a,b]$.

Demostración:

Sean p una función admisible, π^* una partición seleccionada del intervalo $[a,b]$, $u \in BV^2[a,b]$ y

$$\sigma = \left\{ j \in \pi^* : \; \left| \frac{u(t_{j+1}) - u(t_j)}{t_{j+1} - t_j} - \frac{u(t_j) - u(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \right| \leq 1 \right\}.$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n-1}\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})}\\
&\quad = \sum_{j\in\sigma}\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})}+\sum_{j\notin\sigma}\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})}\\
&\quad \leq \sum_{j\in\sigma}\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|+\sum_{j\notin\sigma}\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})}\\
&\quad \leq \sum_{j=1}^{n-1}\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|+\sum_{j\notin\sigma}\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})}\\
&\quad = V^{(2)}(u;[a,b])+\sum_{j\notin\sigma}\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})}.
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
V^W_{(p(\cdot),2)}(u) &:= \sup_{\pi*}\sum_{j=1}^{n-1}\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})}\\
&\leq V^{(2)}(u;[a,b])+\sup_{\pi*}\sum_{j\notin\sigma}\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})}.
\end{aligned}
$$

La demostración del hecho de que $\sup_{\pi^*}\sum_{j\notin\sigma}\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})}<\infty$ la realizaremos por absurdo. Asumamos que

$$
\sup_{\pi^*}\sum_{j\notin\sigma}\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})}=\infty.
$$

Por lo tanto, existe una partición seleccionada π^* tal que

$$
\sum_{j\notin\sigma}\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})}=\infty.
$$

Como $j\notin\sigma$ y $p(x)>1$ se obtiene que

$$
\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|>1,
$$

Pero esto se satisface solo para un número finito de términos porque en caso contrario se tendría que

$$
V^{(2)}(u;[a,b])\geq\sum_{j\notin\sigma}\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|>\sum_{j\notin\sigma}1\to\infty,
$$

lo cual es una contradicción ya que $u\in BV^2[a,b]$. Entonces, si consideramos el supremo se obtiene

$$
V^W_{(p(\cdot),2)}(u;[a,b])=\sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{n-1}\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})}<\infty.
$$

$\square$

Teorema 2.19

Sea p una función admisible. Si $u \in BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$, entonces para todo $c \in (a,b)$

$$V^W_{(p(\cdot),2)}(u;[a,c]) + V^W_{(p(\cdot),2)}(u;[c,b]) \leq V^W_{(p(\cdot),2)}(u;[a,b]). \tag{2.11}$$

Demostración:

Por la definición de $V^W_{(p(\cdot),2)}(u;[a,c])$ y $V^W_{(p(\cdot),2)}(u;[c,b])$, se tiene que para cada $\epsilon > 0$, existen particiones $\pi_{(a,c)}$ y $\pi_{(c,b)}$ con $\pi_{(a,c)} := \{a = \overline{t}_0, \ldots, \overline{t}_m = c\}$ y $\pi_{(c,b)} := \{c = t_0, \ldots, t_r = b\}$, y $\{\overline{x}_j\}_{j=0}^{m-1}$, $\{y_j\}_{j=0}^{r-1}$ sucesiones de puntos tales que $\overline{t}_j \leq \overline{x}_j \leq \overline{t}_{j+1}$, $\ t_j \leq y_j \leq t_{j+1}$ y $\overline{t}_m = c,\ t_0 = c$, que satisfacen

$$\sum_{j=1}^{m-1} \left| \frac{u(\overline{t}_{j+1}) - u(\overline{t}_j)}{\overline{t}_{j+1} - \overline{t}_j} - \frac{u(\overline{t}_j) - u(\overline{t}_{j-1})}{\overline{t}_j - \overline{t}_{j-1}} \right|^{p(\overline{x}_{j-1})} > V^W_{(p(\cdot),2)}(u;[a,c]) - \frac{\epsilon}{2},$$

y

$$\sum_{j=1}^{r-1} \left| \frac{u(t_{j+1}) - u(t_j)}{t_{j+1} - t_j} - \frac{u(t_j) - u(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \right|^{p(y_{j-1})} > V^W_{(p(.),2)}(u;[c,b]) - \frac{\epsilon}{2}.$$

Consideremos $\pi = \pi_{(a,c)} \cup \pi_{(c,b)} = \{a = l_0, \ldots, l_{r+m} = b\}$ y los puntos $\{z_j\}_j := \{x_j\}_{j=0}^{m-1} \cup \{y_j\}_{j=0}^{r-1}$ se obtiene una partición de $[a,b]$ tal que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m+r} \left| \frac{u(l_{j+1}) - u(l_j)}{l_{j+1} - l_j} - \frac{u(l_j) - u(l_{j-1})}{l_j - l_{j-1}} \right|^{p(z_{j-1})} &= \sum_{j=1}^{r-1} \left| \frac{u(t_{j+1}) - u(t_j)}{t_{j+1} - t_j} - \frac{u(t_j) - u(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \right|^{p(\overline{y}_{j-1})} \\
&+ \sum_{j=1}^{m-1} \left| \frac{u(\overline{t}_{j+1}) - u(\overline{t}_j)}{\overline{t}_{j+1} - \overline{t}_j} - \frac{u(\overline{t}_j) - u(\overline{t}_{j-1})}{\overline{t}_j - \overline{t}_{j-1}} \right|^{p(\overline{x}_{j-1})},
\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\sum_{j=1}^{m+r} \left| \frac{u(u_{j+1}) - u(u_j)}{u_{j+1} - u_j} - \frac{u(u_j) - u(u_{j-1})}{u_j - u_{j-1}} \right|^{p(z_{j-1})} > V^W_{(p(.),2)}(u;[a,c]) - \frac{\epsilon}{2} + V^W_{(p(\cdot),2)}(u;[c,b]) - \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.12}$$

Sea $\epsilon \to 0$ y consideremos un supremo apropiado en el lado izquierdo de (2.12), así se deduce la desigualdad (2.11).

$\square$

Para los resultados del siguiente lema, definamos

$$\omega_{p(x_{ts\sigma})}(u;[a,b]) := \sup_{t,s,\sigma \in [a,b]} \left\{ \left| \frac{u(t) - u(s)}{t - s} - \frac{u(s) - u(\sigma)}{s - \sigma} \right|^{p(x_{ts\sigma})} \right\}.$$

Lema 2.12 Propiedades Básicas de la $(p(\cdot),2)$-variación en el sentido de De La Vallée Poussin-Wiener
Sean $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función arbitraria y p una función admisible. Se tiene las siguientes propiedades:

(P1) Para todo $t,s,\sigma\in[a,b]$, se tiene que

$$\left|\frac{u(t)-u(s)}{t-s}-\frac{u(s)-u(\sigma)}{s-\sigma}\right|^{p(x_{ts\sigma})}\leq \omega_{p(x_{ts\sigma})}(u;[a,b])\leq V^W_{(p(\cdot),2)}(u;[a,b]).$$

(P2) Monotonía: si $t,s\in[a,b]$ y $a\leq t\leq s\leq b$, entonces $V^W_{(p(\cdot),2)}(u;[a,t])\leq V^W_{(p(\cdot),2)}(u;[a,s])$, $V^W_{(p(\cdot),2)}(u;[s,b])\leq V^W_{(p(\cdot),2)}(u;[t,b])$ y $V^W_{(p(\cdot),2)}(u;[t,s])\leq V^W_{(p(\cdot),2)}(u;[a,b])$.

(P3) Semi-aditividad: si $t\in(a,b)$, entonces

$$V^W_{(p(\cdot),2)}(u;[a,t])+V^W_{(p(\cdot),2)}(u;[t,b])\leq V^W_{(p(\cdot),2)}(u;[a,b]).$$

(P4) Cambio de variable: si $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ es una función monótona, entonces

$$V^W_{(p(\cdot),2)}\big(u;\varphi[c,d]\big)=V^W_{(p(\cdot),2)}\big(u\circ\varphi;[c,d]\big). \tag{2.13}$$

(P5) Regularidad: $V^W_{(p(\cdot),2)}\big(u;[a,b]\big)=\sup\Big\{V^W_{(p(\cdot),2)}\big(u;[s,t]\big);s,t\in[a,b]\Big\}$.

Demostración:

(P1) Se obtiene que, para todo $t,s,\sigma\in[a,b]$,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{u(t)-u(s)}{t-s}-\frac{u(s)-u(\sigma)}{s-\sigma}\right|^{p(x_{ts\sigma})}\\
&\quad\leq \sup\left\{\left|\frac{u(t)-u(s)}{t-s}-\frac{u(s)-u(\sigma)}{s-\sigma}\right|^{p(x_{ts\sigma})};t,s,\sigma\in[a,b]\right\}:=\omega_{p(x_{ts\sigma})}(u;[a,b])\\
&\quad\leq \sup_{\pi}\sum_{j=1}^{m-1}\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})}=V^W_{(p(\cdot),2)}(u;[a,b]).
\end{aligned}$$

(P2) Sean $a\leq t\leq s\leq b$ y $\pi:a=t_0<t_1<\cdots<t_{m1}=t<\cdots<t_{m2}=s<\cdots<t_n=b$ una partición. Entonces

$$\begin{aligned}
V^W_{(p(\cdot),2)}(u;[a,t]) &= \sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{m1}\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})}\\
&\leq \sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{m1}\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})}\\
&+ \sup_{\pi^*}\sum_{j=m1+1}^{m2}\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})}\\
&\leq \sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{m2}\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})}\\
&= V^W_{(p(\cdot),2)}(u;[a,s]).
\end{aligned}$$

Los otros casos se obtienen de manera similar.

(P3) La semi-aditividad se obtiene del Teorema 2.19.

(P4) Sea $[c,d]\subset\mathbb{R}$, $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ una función monótona (no necesariamente estricta), π_0 una partición seleccionada del intervalo $[c,d]$, $T_1=\{\tau_j\}_{j=0}^m\in\pi_0$ y $T=\{t_j\}_{j=0}^m$ con $t_j=\varphi(\tau_j)$, entonces

$$\begin{aligned} V^W_{(p(\cdot),2)}(u\circ\varphi,T_1) &= \sup_{T_1}\sum_{j=1}^m\left|\frac{u(\varphi(\tau_{j+1}))-u(\varphi(\tau_j))}{\tau_{j+1}-\tau_j}-\frac{u(\varphi(\tau_j))-u(\varphi(\tau_{j-1}))}{\tau_j-\tau_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})}\\ &= \sup_{T}\sum_{j=1}^m\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})}\\ &= V^W_{(p(\cdot),2)}(u,T)\\ &\le V^W_{(p(\cdot),2)}(u,\varphi([c,d])). \end{aligned}$$

Por otro lado, si una partición $T=\{t_j\}_{j=0}^m$ de $\varphi([c,d])$, tal que $t_{j-1}<t_j$ para $j=1,\ldots,m$, entonces existe $\tau_j\in[c,d]$ tal que $t_j=\varphi(\tau_j)$ y de nuevo por la monotonía de φ

$$V^W_{(p(\cdot),2)}(f,T)=V^W_{(p(\cdot),2)}(f\circ\varphi,T_1)\le V^W_{(p(\cdot),2)}(f,\varphi([c,d])).$$

(P5) Por monotonía $V^W_{(p(\cdot),2)}\big(u;[a,b]\big)\ge\sup\left\{V^W_{(p(\cdot),2)}\big(u;[s,t]\big);s,t\in[a,b]\right\}$. Por otro lado, para todo $\alpha<V^W_{(p(\cdot),2)}\big(u;[a,b]\big)$ tal que existe una partición seleccionada $\Pi=\{t_i\}_{i=0}^n$ de $[a,b]$ con $V^W_{(p(\cdot),2)}\big(u;\Pi\big)\ge\alpha$. Definamos $\overline{\pi}$ una partición del intervalo $[t_0,t_m]$ entonces $\Pi\in\overline{\pi}$ y $V^W_{(p(\cdot),2)}\big(u;\overline{\pi}\big)\ge V^W_{(p(\cdot),2)}\big(u;\Pi\big)\ge\alpha$, es decir,

$$V^W_{(p(\cdot),2)}\big(u;[a,b]\big)\le\sup\left\{V^W_{(p(\cdot),2)}\big(u;[s,t]\big);s,t\in[a,b]\right\}.$$

$\square$

Lema 2.13
Si $\beta_1>\beta_2$, entonces $V^W_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{u}{\beta_1};[a,b]\right)\le V^W_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{u}{\beta_2};[a,b]\right)$ para todo $u\in BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$.

Demostración:

Sean β_1,β_2 tal que $\beta_1>\beta_2$. Entonces, consideremos toda partición π de $[a,b]$, $\pi:a=t_0<\ldots<t_n=b$ y toda sucesión finita de números $x_0,\ldots,x_{n-2}$ sujeta a la condición $t_i\le x_i\le t_{i+1}$ para cada $i\le n-2$. Se sigue que

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\left(\frac{u}{\beta_1}\right)(t_{i+1})-\left(\frac{u}{\beta_1}\right)(t_i)}{t_{i+1}-t_i}-\frac{\left(\frac{u}{\beta_1}\right)(t_i)-\left(\frac{u}{\beta_1}\right)(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}\right|^{p(x_{i-1})}\\ &\qquad= \left|\frac{1}{\beta_1}\left[\frac{u(t_{i+1})-u(t_i)}{t_{i+1}-t_i}-\frac{u(t_i)-u(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}\right]\right|^{p(x_{i-1})}\\ &\qquad\le \left|\frac{1}{\beta_2}\left[\frac{u(t_{i+1})-u(t_i)}{t_{i+1}-t_i}-\frac{u(t_i)-u(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}\right]\right|^{p(x_{i-1})}\\ &\qquad= \left|\frac{\left(\frac{u}{\beta_2}\right)(t_{i+1})-\left(\frac{u}{\beta_2}\right)(t_i)}{t_{i+1}-t_i}-\frac{\left(\frac{u}{\beta_2}\right)(t_i)-\left(\frac{u}{\beta_2}\right)(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}\right|^{p(x_{i-1})} \end{aligned}$$

cuando $\frac{1}{\beta_2} \geq \frac{1}{\beta_1}$. Entonces, como esta desigualdad se satisface para todos los términos en la suma

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{\left(\frac{u}{\beta_1}\right)(t_{i+1}) - \left(\frac{u}{\beta_1}\right)(t_i)}{t_{i+1} - t_i} - \frac{\left(\frac{u}{\beta_1}\right)(t_i) - \left(\frac{u}{\beta_1}\right)(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right|^{p(x_{i-1})}$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{\left(\frac{u}{\beta_2}\right)(t_{i+1}) - \left(\frac{u}{\beta_2}\right)(t_i)}{t_{i+1} - t_i} - \frac{\left(\frac{u}{\beta_2}\right)(t_i) - \left(\frac{u}{\beta_2}\right)(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right|^{p(x_{i-1})}$$

Consideremos el supremo sobre todas las particiones, se obtiene que

$$V^W_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{u}{\beta_1}; [a,b]\right) \leq V^W_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{u}{\beta_2}; [a,b]\right).$$

□

La próxima proposición demuestra que el espacio $BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$ es un espacio vectorial.

Proposición 2.8

Sea p una función admisible. El espacio $BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$ es un espacio vectorial.

Demostración:

Sean $u, v \in BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$, $\pi^* = \{a = t_0, \ldots, t_n = b\}$ una partición seleccionada del intervalo $[a,b]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Por definición, existen β_1, β_2 tal que

$$V^W_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{u}{\beta_1}; [a,b]\right) \leq 1 < \infty \ \text{ y } \ V^W_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{v}{\beta_2}; [a,b]\right) \leq 1 < \infty.$$

Sea $\hat{\beta} := \text{máx}\{\beta_1, \beta_2\} > 0$. Por el Lema 2.4.1, se obtiene que

$$V^W_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{u}{\hat{\beta}}; [a,b]\right) < V^W_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{u}{\beta_1}; [a,b]\right) < \infty$$

$$V^W_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{v}{\hat{\beta}}; [a,b]\right) < V^W_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{v}{\beta_2}; [a,b]\right) < \infty.$$

El resto de la demostración se obtiene con el análisis de los siguientes casos.

1. Si $\alpha = \beta = 0$, entonces $\alpha u + \beta v \in BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$.

2. Si $\alpha \neq 0$ y/o $\beta \neq 0$. Sea $\mu = (|\alpha| + |\beta|)\hat{\beta} > 0$ y consideremos toda partición seleccionada π^* de $[a,b]$, es decir, una partición tal que para toda sucesión de números $x_0, \ldots, x_{n-2}$ está sujeta a la condición $t_j \leq x_j \leq t_{j+1}$ para cada $j \leq n-2$. Entonces, por convexidad de t^p, cuando $1 < p < \infty$, se obtiene

que

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n-1}\left|\frac{\left(\frac{\alpha u+\beta v}{\mu}\right)(t_{j+1})-\left(\frac{\alpha u+\beta v}{\mu}\right)(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{\left(\frac{\alpha u+\beta v}{\mu}\right)(t_j)-\left(\frac{\alpha u+\beta v}{\mu}\right)(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})}\\
&= \sum_{j=1}^{n-1}\left|\frac{1}{\mu}\frac{\left[\alpha(u(t_{j+1})-u(t_j))+\beta(v(t_{j+1})-v(t_j))\right]}{t_{j+1}-t_j}-\frac{1}{\mu}\frac{\left[\alpha(u(t_j)-u(t_{j-1}))+\beta(v(t_j)-v(t_{j-1}))\right]}{t_j-t_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})}\\
&\leq \sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{|\alpha|}{\mu}\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|+\frac{|\beta|}{\mu}\left|\frac{v(t_{j+1})-v(t_j)}{t_j-t_{j-1}}-\frac{v(t_j)-v(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|\right)^{p(x_{j-1})}\\
&\leq \sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{|\alpha|}{|\alpha|+|\beta|}\frac{1}{\hat{\beta}}\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|\right.\\
&\qquad\left.+\frac{|\beta|}{|\alpha|+|\beta|}\frac{1}{\hat{\beta}}\left|\frac{v(t_{j+1})-v(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{v(t_j)-v(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|\right)^{p(x_{j-1})}\\
&\leq \sum_{j=1}^{n-1}\left[\frac{|\alpha|}{|\alpha|+|\beta|}\left(\frac{1}{\hat{\beta}}\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|\right)^{p(x_{j-1})}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{|\beta|}{|\alpha|+|\beta|}\left(\frac{1}{\hat{\beta}}\left|\frac{v(t_{j+1})-v(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{v(t_j)-v(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|\right)^{p(x_{j-1})}\right]\\
&\leq \frac{|\alpha|}{|\alpha|+|\beta|}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\hat{\beta}}\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|\right)^{p(x_{j-1})}\\
&\qquad+\frac{|\beta|}{|\alpha|+|\beta|}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\hat{\beta}}\left|\frac{v(t_{j+1})-v(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{v(t_j)-v(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|\right)^{p(x_{j-1})}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n-1}\left|\frac{\left(\frac{\alpha u+\beta v}{\mu}\right)(t_{j+1})-\left(\frac{\alpha u+\beta v}{\mu}\right)(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{\left(\frac{\alpha u+\beta v}{\mu}\right)(t_j)-\left(\frac{\alpha u+\beta v}{\mu}\right)(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})}\\
&\leq \frac{|\alpha|}{|\alpha|+|\beta|}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\hat{\beta}}\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|\right)^{p(x_{j-1})}\\
&\qquad+\frac{|\beta|}{|\alpha|+|\beta|}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\hat{\beta}}\left|\frac{v(t_{j+1})-v(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{v(t_j)-v(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|\right)^{p(x_{j-1})}\\
&\leq \frac{|\alpha|}{|\alpha|+|\beta|}V^W_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{u}{\hat{\beta}};[a,b]\right)+\frac{|\beta|}{|\alpha|+|\beta|}V^W_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{v}{\hat{\beta}};[a,b]\right)<\infty.
\end{aligned}
$$

Considerando el supremo sobre todas las particiones, se obtiene que

$$\begin{aligned} V^W_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{\alpha u+\beta v}{\mu};[a,b]\right) &\leq \frac{|\alpha|}{|\alpha|+|\beta|}V^W_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{u}{\hat{\beta}};[a,b]\right)+\frac{|\beta|}{|\alpha|+|\beta|}V^W_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{v}{\hat{\beta}};[a,b]\right)\\ &\leq \frac{|\alpha|}{|\alpha|+|\beta|}+\frac{|\beta|}{|\alpha|+|\beta|}=1<\infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\alpha u+\beta v\in BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$.

Las otras propiedades de un espacio vectorial se obtienen de manera similar.

$\square$

Teorema 2.20

Sea p una función admisible. $(BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b],||\cdot||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]})$ es un espacio normado.

Demostración:

Sea p una función admisible. A continuación se analizarán todas las propiedades de una norma.

1. Por la definición de $||\cdot||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]}$, se tiene que $||u||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]}\geq 0$ para todo $u\in BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$
2. Para demostrar que $||\alpha u||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]}=|\alpha|||u||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]}$ para todo $\alpha\in\mathbb{R}$, consideremos los posibles casos:
   - Si $\alpha=0$, entonces

$$||\alpha u||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]}=||0||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]}=0=0||u||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]}=\alpha||u||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]}$$

   para todo $u\in BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$.
   - Si $\alpha\neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} ||\alpha u||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]} &= |\alpha u(a)|+|\alpha u'_+(a)|+\text{ínf}\left\{\lambda>0;\ V^W_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{\alpha u}{\lambda};[a,b]\right)\leq 1\right\}\\ &= |\alpha||u(a)|+|\alpha||u'_+(a)|+\text{ínf}\left\{\lambda>0;\ V^W_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{u}{\frac{\lambda}{\alpha}};[a,b]\right)\leq 1\right\}\\ &= |\alpha||u(a)|+|\alpha||u'_+(a)|+\text{ínf}\left\{\alpha\frac{\lambda}{\alpha}>0;\ V^W_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{u}{\frac{\lambda}{\alpha}};[a,b]\right)\leq 1\right\}\\ &= |\alpha||u(a)|+|\alpha||u'_+(a)|+\alpha\,\text{ínf}\left\{\frac{\lambda}{\alpha}>0;\ V^W_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{u}{\frac{\lambda}{\alpha}};[a,b]\right)\leq 1\right\}\\ &= |\alpha||u(a)|+|\alpha||u'_+(a)|+\alpha\,\text{ínf}\left\{\beta>0;\ V^W_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{u}{\beta};[a,b]\right)\leq 1\right\}\\ &= |\alpha|||u||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]}, \end{aligned}$$

   así $V^W_{(p(\cdot),2)}(\alpha u;[a,b])=\alpha V^W_{(p(\cdot),2)}(u;[a,b])$ por definición.

3. La propiedad $||u+v||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]} \leq ||u||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]} + ||v||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]}$ se satisface usando el hecho de que $|u+v| \leq |u|+|v|$, $|(u+v)'_+| = |u'_+ + v'_+| \leq |u'_+| + |v'_+|$ y la proposición previa.

4. Ahora demostraremos que $||u||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]} = 0$ si y solo si $u = 0$.
   - Si $||u||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]} = 0$, entonces $u(a) = 0$ y $u'_+(a) = 0$ y

   $$\text{ínf}\left\{\lambda > 0; V^W_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{u}{\lambda};[a,b]\right) \leq 1\right\} = 0.$$

   Por el Lema 2.11 se tiene que

   $$V^W_{(p(\cdot),2)}(u;[a,b]) \leq \|u\|^{p^-}_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]}.$$

   Por lo tanto $V^W_{(p(\cdot),2)}(u;[a,b]) = 0$. Así,

   $$\sup_{\pi^*} \sum_{j=1}^{n-1} \left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j} - \frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})} = 0.$$

   Por lo que, para toda partición seleccionada π^* del intervalo $[a,b]$, que es una partición $\pi = \{a = t_0 < \ldots . t_n = b\}$ junto con una sucesión finita de números $x_0, \ldots, x_n$ sujeta a la condición $t_j \leq x_j \leq t_{j+1}$ para cada j, obteniéndose que

   $$\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j} - \frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})} = 0 \qquad \text{para todo} \qquad j \in \{1,\ldots,n-1\}.$$

   así

   $$\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j} = \frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \qquad \text{para todo} \qquad j \in \{1,\ldots,n-1\}.$$

   Consideremos la partición $\pi = \{a \leq t_1 < t_2 = c < t \leq b\}$. Entonces

   $$\lim_{c\to a_+} \frac{u(t)-u(c)}{t-c} = \lim_{c\to a_+} \frac{u(c)-u(a)}{c-a} = u'_+(a) = 0.$$

   Por lo que

   $$\frac{u(t)-u(a)}{t-a} = 0.$$

   Como $u(a) = 0$ se obtiene que $u(t) = 0$ para todo $t \in [a,b]$.

   - Por otro lado, si $u = 0$, entonces $u(t) = 0$ para todo $t \in [a,b]$. Como, $u'_+(a) = 0$ y $V^W_{(p(\cdot),2)}(u;[a,b]) = V^W_{(p(\cdot),2)}(0;[a,b]) = 0$. Entonces, por definición, $||u||_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]} = 0$.

$\square$

Proposición 2.9

Sea p una función admisible. El espacio $BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$ es un espacio de Banach equipado con la norma de Luxemburg (2.8).

Demostración:

Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$. Entonces, para todo $\varepsilon>0$, existe $N(\varepsilon)$ tal que

$$\|u_m-u_n\|_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]}<\varepsilon,\qquad \text{para todo}\qquad m,n>N(\varepsilon).$$

Por lo tanto, por definición de la norma, se obtiene que

$$\text{ínf}\left\{\lambda>0; V^W_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{u_m-u_n}{\lambda};[a,b]\right)\leq 1\right\}<\varepsilon,\qquad \text{para todo}\qquad m,n>N(\varepsilon), \tag{2.14}$$

$$|(u_m-u_n)(a)|<\varepsilon,\qquad \text{para todo}\qquad m,n>N(\varepsilon), \tag{2.15}$$

y

$$|(u_m-u_n)'_+(a)|<\varepsilon,\qquad \text{para todo}\qquad m,n>N(\varepsilon). \tag{2.16}$$

Entonces, por (2.14) y el Lema 2.11 se obtiene que

$$V^W_{(p(\cdot),2)}(u_m-u_n;[a,b])<\varepsilon^{p^-}.$$

Esto implica que para t fijo, $\{u_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. En efecto

$$V^W_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{u_m-u_n}{\varepsilon}\right)\leq 1$$

entonces para todo $x,y,z\in[a,b]$, $u=u_m-u_n$ y $\varepsilon>0$ se obtiene

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}\frac{u(z)-u(y)}{z-y}-\frac{u(y)-u(x)}{y-x}\right|^{p(y)}\leq V^W_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{u_m-u_n}{\varepsilon}\right)\leq 1$$

así

$$\left|\frac{u(z)-u(y)}{z-y}-\frac{u(y)-u(x)}{y-x}\right|^{p(y)}\leq\varepsilon^{p(y)}$$

por lo tanto

$$\left|\frac{u(z)-u(y)}{z-y}\right|^{p(y)}\leq\left|\left|\frac{u(z)-u(y)}{z-y}\right|-\left|\frac{u(y)-u(x)}{y-x}\right|\right|^{p(y)}\leq\left|\frac{u(z)-u(y)}{z-y}-\frac{u(y)-u(x)}{y-x}\right|^{p(y)}$$

con lo cual

$$\left|\frac{u(z)-u(y)}{z-y}\right|^{p(y)}\leq\varepsilon^{p(y)}$$

entonces

$$\left|u(z)-u(y)\right|^{p(y)}\leq(\varepsilon(z-y))^{p(y)}$$

por propiedades de log

$$p(y)\log\left|u(z)-u(y)\right|\leq p(y)\log(\varepsilon(z-y))$$

con lo que

$$\log\left|u(z)-u(y)\right| \leq \log(\varepsilon(z-y))$$

por consiguiente, para $\varepsilon' = \varepsilon(z-y)$

$$\left|u(z)-u(y)\right| \leq \varepsilon'$$

es decir

$$\left|(u_m-u_n)(z)-(u_m-u_n)(y)\right| \leq \varepsilon'.$$

Sean $u(t) := \lim\limits_{t\to\infty} u_n(t)$ para todo $t \in [a,b]$ y $\pi := \{a = t_0, \ldots, t_k = b\}$ una partición, con al menos 3 puntos, $[a,b]$ y una sucesión $x_0, \ldots, x_k$ tal que $t_j \leq x_j \leq t_{j+1}$ para todo $j < k$. Por lo tanto, se tiene que para todo $m, n \geq N(\epsilon)$

$$\sum_{j=1}^{k}\left|\frac{(u_m-u)(t_{j+1})-(u_m-u)(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{(u_m-u)(t_j)-(u_m-u)(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})} < \epsilon. \tag{2.17}$$

Entonces, por (2.17), para toda partición seleccionada π^* de $[a,b]$ y considerando el supremo sobre todas las particiones seleccionadas se obtiene que

$$V^W_{(p(\cdot),2)}(u_m-u;[a,b]) < \epsilon, \qquad \text{para todo} \qquad m > N(\epsilon). \tag{2.18}$$

Además, por (2.15) y (2.16)

$$|(u_m-u_n)(a)| < \epsilon, \quad |(u_m-u_n)'_+(a)| < \epsilon, \qquad \text{para todo} \qquad m,n > N(\epsilon).$$

Entonces, tendiendo $n \to \infty$, se obtiene que

$$|(u_m-u)(a)| < \epsilon, \quad |(u_m-u)'_+(a)| < \epsilon, \qquad \text{para todo} \qquad m > N(\epsilon). \tag{2.19}$$

Así (2.18) y (2.19) implica que para m suficientemente grande

$$\|u_m-u\|_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]} < 3\epsilon.$$

Por lo tanto

$$\|u\|_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]} \leq \|u_m-u\|_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]} + \|u_m\|_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]} < \infty,$$

por lo que $u \in BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$.

□

Teorema 2.21

Sea p una función admisible

(a) Si $u \in BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$, entonces u es acotada en todo el intervalo $[a,b]$.

(b) $BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b] \hookrightarrow BV^W_{(q(\cdot),2)}[a,b]$ para funciones p y q tales que $q(x) \geq p(x)$.

Demostración:

Parte (a). Supongamos que $u \in BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$ y u no es acotada, entonces existe una sucesión $\{t_n\}_{n\geq1}$, $t_n \in (a,b)$, $n \geq 1$ tal que $|u(t_n)| \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Sea $\{t_m\}_{m\geq1}$ una subsucesión de $\{t_n\}_{n\geq1}$ tal que $\{t_m\}_{m\geq1}$ converge a $x \in [a,b]$. Ya que $\{u(t_m)\}_{m\geq1}$ es una subsucesión de $\{u(t_n)\}_{n\geq1}$, entonces

$$|u(t_m)| \to \infty \quad \text{cuando} \quad m \to \infty.$$

Caso 1: Supongamos que $x = a$ y sea t tal que $a \leq t_m < t < b$ para algún $t_m \in \{t_m\}_{m\geq 1}$, entonces

$$\left|\frac{u(b)-u(t)}{b-t} - \frac{u(t)-u(t_m)}{t-t_m}\right|^{p(x_t)} \leq V^W_{(p(\cdot),2)}(u)$$

ya que $t \to t^s$ es continua

$$\begin{aligned}\left|\frac{u(b)-u(t)}{b-t} - \frac{\lim\limits_{m\to\infty} u(t)-u(t_m)}{t-x}\right|^{p(x_t)} &= \lim_{m\to\infty}\left|\frac{u(b)-u(t)}{b-t} - \frac{u(t)-u(t_m)}{t-t_m}\right|^{p(x_t)} \\ &\leq V^W_{(p(\cdot),2)}(u).\end{aligned}$$

Por otro lado $|u(t)-u(t_m)|$ tiende a infinito cuando $m \to \infty$. Entonces

$$\lim_{m\to\infty}\left|\frac{u(b)-u(t)}{b-t} - \frac{u(t)-u(t_m)}{t-t_m}\right|^{p(x_t)} = \infty$$

así $V^W_{(p(\cdot),2)}(u) = \infty$, lo cual es una contradicción.

Caso 2: Supongamos que $x \neq a$ y sea t tal que $a < t < t_m < b$ para algún $t_m \in \{t_m\}_{m\geq 1}$, entonces

$$\left|\frac{u(t_m)-u(t)}{t_m-t} - \frac{u(t)-u(a)}{t-a}\right|^{p(x_t)} \leq V^W_{(p(\cdot),2)}(u).$$

Ya que $t \to t^s$ es continua

$$\begin{aligned}\left|\frac{\lim\limits_{m\to\infty} u(t_m)-u(t)}{x-t} - \frac{u(t)-u(a)}{t-a}\right|^{p(x_t)} &= \lim_{m\to\infty}\left|\frac{u(t_m)-u(t)}{t_m-t} - \frac{u(t)-u(a)}{t-a}\right|^{p(x_t)} \\ &\leq V^W_{(p(\cdot),2)}(u).\end{aligned}$$

Por otro lado $|u(t_m)-u(t)|$ tiende a infinito cuando $m \to \infty$ entonces

$$\left|\frac{\lim\limits_{m\to\infty} u(t_m)-u(t)}{x-t} - \frac{u(t)-u(a)}{t-a}\right|^{p(x_t)} \to \infty \text{ cuando } n \to \infty$$

así $V^W_{(p(\cdot),2)}(u) = \infty$, lo cual es una contradicción.

Parte (b). Sea $u \in BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$ y consideremos $\|u\|_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]} = 1$; ya que $V^W_{(p(\cdot),2)}(u;[a,b]) \leq 1$, se sigue que

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j} - \frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})} \leq 1,$$

para toda partición seleccionada, con al menos 3 puntos, $\pi^* : a = t_0 < \cdots < t_n = b$ y toda sucesión de puntos x_j tal que $t_j \leq x_j \leq t_{j+1}$ para todo $j = 0,\ldots,n-2$. Por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j} - \frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^{q(x_{j-1})} \leq \sum_{j=1}^{n-1}\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j} - \frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})} \leq 1,$$

ya que $\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j} - \frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})} \leq 1$, para todo $1 \leq j \leq n-1$.

Considerando el supremo en ambos lados, se obtiene que $V^W_{(q(\cdot),2)}(u;[a,b]) \leq V^W_{(p(\cdot,2))}(u;[a,b])$. Entonces, por definición se sigue que $\|u\|_{BV^W_{(q(\cdot),2)}[a,b]} \leq \|u\|_{BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]}$ y el caso general se obtiene de la homogeneidad de la norma.

□

En lo que sigue, se definen las funciones análogas de las funciones absolutamente p-continuas de orden dos, en el marco del espacio de funciones con exponente variable, para luego demostrar la relación que existe con el espacio $BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$.

Definición 2.11

Dada una función $p:[0,1]\to(1,\infty)$, el módulo de $p(\cdot)$-continuidad de orden dos de una función $u:[a,b]\to\mathbb{R}$, se define por

$$\omega_\delta^{(p(\cdot),2)}(u) := \sup_{\|\pi^*\|\leq\delta}\sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{n-1}\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})},$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones seleccionadas $\pi^*=\{a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b\}$ del intervalo $[a,b]$ junto con una sucesión finita de números $x_0,\dots,x_n$ sujeta a la condición $t_j\leq x_j\leq t_{j+1}$ para cada j tal que la norma de π^* es a lo sumo δ .

A continuación presentamos algunos resultados del módulo de $p(\cdot)$-continuidad, en particular en el espacio $BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$.

Lema 2.14

Sea p una función admisible. El módulo de $p(\cdot)$-continuidad de orden dos es una función subaditiva.

Demostración:

Sean $u,v:[a,b]\to\mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\omega_\delta^{(p(\cdot),2)}(u+v) &= \sup_{\|\pi^*\|\leq\delta}\sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{n-1}\left|\frac{(u+v)(t_{j+1})-(u+v)(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{(u+v)(t_j)-(u+v)(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})}\\
&\leq 2^{p^+-1}\sup_{\|\pi^*\|\leq\delta}\sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\left|\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})}\right.\\
&\quad\left.+\left|\frac{v(t_{j+1})-v(t_j)}{t_{j+1}-t_j}-\frac{v(t_j)-v(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right|^{p(x_{j-1})}\right)\\
&= 2^{p^+-1}\left(\omega_\delta^{(p(\cdot),2)}(u)+\omega_\delta^{(p(\cdot),2)}(v)\right).
\end{aligned}$$

□

N Si la función $u \in BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$ y $\lim_{\delta\to 0} \omega_\delta^{(p(\cdot),2)}(u) = 0$, se dice que u es absolutamente $p(\cdot)$-continua de orden dos, que es, $u \in C^{(p(\cdot),2)}[0,1]$.

Teorema 2.22

Sea p una función admisible. Entonces $C^{(p(\cdot),2)}[a,b]$ es un subespacio cerrado de $BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$.

Demostración:

Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $C^{(p(\cdot),2)}[a,b]$ tal que

$$s-\lim_{n\to\infty} u_n = u \in BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]. \tag{2.20}$$

Por la subaditividad de $\omega_\delta^{(p(\cdot),2)}(u)$ se tiene que

$$\omega_\delta^{(p(\cdot),2)}(u) \le \omega_\delta^{(p(\cdot),2)}(u-u_n) + \omega_\delta^{(p(\cdot),2)}(u_n).$$

Además, como $V^W_{(p(\cdot),2)}(u) \ge \omega_\delta^{(p(\cdot),2)}(u)$ y $V^W_{(p(\cdot),2)}(2u) \le V^W_{(p(\cdot),2)}(u)$, haciendo uso de la Proposición **??** y el límite (2.20) se tiene que, para cada δ fijo, $\omega_\delta^{(p(\cdot),2)}(u-u_n) \to 0$ cuando $n\to\infty$. Ya que $\omega_\delta^{(p(\cdot),2)}(u_n) \to 0$ cuando $\delta \to 0$ por hipótesis, se obtiene que $\omega_\delta^{(p(\cdot),2)}(u) \to 0$ cuando $\delta \to 0$.

□

2.4.2 Caracterización.

En esta sección se demuestra que si una función es la composición de una función monótona acotada con una función $(\gamma(\cdot)+1)$-Hölder continua con exponente $\gamma(\cdot) = \frac{1}{p(\cdot)}$ entonces la función pertenece a $BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$.

Proposición 2.10

Sea p una función admisible y $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ tal que $u = g\circ\varphi$, donde $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función monótona acotada y $g:\varphi[a,b]\to\mathbb{R}$ es $(\gamma(\cdot)+1)$- Hölder continua con $\gamma(\cdot) = \frac{1}{p(\cdot)}$. Entonces $u \in BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$.

Demostración:

Asumamos que φ es no decreciente. Ya que $\varphi([a,b]) = [\varphi(a),\varphi(b)]$, en virtud de la propiedad de cambio de variable

$$V^W_{(p(\cdot),2)}(u;[a,b]) = V^W_{(p(\cdot),2)}(g\circ\varphi;[a,b]) = V^W_{(p(\cdot),2)}(g;[\varphi(a),\varphi(b)]). \tag{2.21}$$

Si $T = \{t_i\}_{i=0}^{n}$ es una partición de $[\varphi(a), \varphi(b)]$, entonces

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{g(t_{i+1}) - g(t_i)}{t_{i+1} - t_i} - \frac{g(t_i) - g(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right|^{p(x_{i-1})} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1} \left(\left| \frac{g(t_{i+1}) - g(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \right| + \left| \frac{g(t_i) - g(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right| \right)^{p(x_{i-1})} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{C|t_{i+1} - t_i|^{\gamma(x_{i-1})+1}}{|t_{i+1} - t_i|} + \frac{C|t_i - t_{i-1}|^{\gamma(x_{i-1})+1}}{|t_i - t_{i-1}|} \right)^{p(x_{i-1})} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1} \left(C|t_{i+1} - t_i|^{\gamma(x_{i-1})} + C|t_i - t_{i-1}|^{\gamma(x_{i-1})} \right)^{p(x_{i-1})} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1} 2^{p(x_{i-1})} \left(C^{p(x_{i-1})} |t_{i+1} - t_i|^{(\gamma(x_{i-1}))p(x_{i-1})} + C^{p(x_{i-1})} |t_i - t_{i-1}|^{(\gamma(x_{i-1}))p(x_{i-1})} \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1} 2^{p^+} (C^{p^+} |t_{i+1} - t_i| + C^{p^+} |t_i - t_{i-1}|) \leq 2^{p^+ +1} C^{p^+} |\varphi(b) - \varphi(a)|.
\end{aligned}$$

De manera que, si consideramos el supremo sobre todas las particiones seleccionadas y sucesiones de puntos $x_j \in (t_j, t_{j+1})$ para $j < m$, se obtiene que

$$V_{(p(\cdot),2)}^{W}(g; [\varphi(a), \varphi(b)]) \leq 2^{p^+ +1} C^{p^+} |\varphi(b) - \varphi(a)| < \infty$$

por la acotación de φ. Así, por (2.21)

$$V_{(p(\cdot),2)}^{W}(u; [a, b]) = V_{(p(\cdot),2)}^{W}(g; [\varphi(a), \varphi(b)]) < \infty.$$

□

3 Operador de Composición

El operador de Composición (o Nemytskij) resulta ser uno de los operadores más interesantes e importantes estudiado en el análisis funcional no lineal. El comportamiento de este operador exhibe muchas características e incluso patológicas en varios espacios de funciones; como por ejemplo, hace 37 años, B. E. J. Dahlberg (1979) en [45] demostró lo siguiente: “Para $1 \leq p \leq \infty$ y $1 + (1/p) < m < n/p$ entero, si H aplica el espacio de Sobolev $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo, entonces h es una función lineal“. Entre estas patologías existe uno llamado fenómeno degenerativo, el cual establece que la condición globalmente Lipschitz necesariamente conduce a funciones afines en varios espacios de funciones. Esta propiedad fue demostrada por primera vez por J. Matkowski (1982) en [97] para el espacio $Lip[a,b]$ (Información adicional acerca de este fenómeno degenerativo se puede encontrar en los resultados de J. Appell, N. Guanda, N. Merentes, J. L. Sánchez (2011) en [4] y J. Appell, N. Guanda, M. Väth (2011) en [5]).

Dada una función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, el operador de composición H, generado por la función h aplica cada función $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ en la función composición $Hu : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por

$$Hu(t) := h(u(t)), \quad (t \in [a,b]). \tag{3.1}$$

Mas generalmente, dado $h : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se considera el operador H, definido por

$$Hu(t) := h(t, u(t)), \quad (t \in [a,b]). \tag{3.2}$$

Este operador es llamado *Operador de Superposición*, *Operador de Sustitución*, *Operador de Nemytskij* u *Operador de Composición*. En lo que sigue, nos referiremos a (3.1) como el *caso autónomo* y a (3.2) como el *caso no-autónomo*.

3.1 Actuación del Operador de Composición

Un problema relacionado con el operador de composición (3.1) es establecer las condiciones necesarias y suficientes de la función h para que el operador H aplique un espacio $\mathbb{X}$ de funciones reales definidas en $[a,b]$ en sí mismo, es decir, $H(\mathbb{X}) \subset \mathbb{X}$; o en forma más general, que el operador H aplica un espacio $\mathbb{X}$ en un espacio de las funciones $\mathbb{Y}$ ($H(\mathbb{X}) \subset \mathbb{Y}$). Este problema se le denomina frecuentemente como el problema del operador de composición (o COP por sus siglas en ingles). Para determinar $\mathbb{X}$ es algunas veces muy fácil y algunas veces no trivial. En una variedad de espacios la condición requerida es que la función h sea localmente Lipschitz. Otro problema interesante es determinar el espacio más pequeño de funciones $\mathbb{X}$ y el mayor espacio $\mathbb{Y}$ tal que $H(\mathbb{X}) \subset \mathbb{Y}$. En esta sección, como contribución a este tema

(Ver [57], [72], [110], [111] y [112]) se establecen las condiciones necesarias y suficientes de la función, haciendo uso de la función del tipo zig-zag como la empleada por J. Appell et al. en [4] y J. Appell et al. en [5], para que el operador H actúe entre los espacios:

- $Lip[a,b]$ y $\kappa BV[a,b]$ o $\kappa BV_{\phi}[a,b]$.
- $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$.
- $\kappa BV^{W}_{p(\cdot)}[a,b]$.
- $\Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$.

3.1.1 Entre $Lip[a,b]$ y $\kappa BV[a,b]$ o $\kappa BV_{\phi}[a,b]$

En esta sección se demostrará, como contribución al tema ver ([72]), que la condición localmente Lipschitz de la función h es una condición necesaria y suficiente tal que $H(Lip[a,b]) \subset \kappa BV[a,b]$ y que en este caso el operador H es acotado .

Lema 3.1 (Principio de Invarianza ver [110])
Sea $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función. Entonces el operador de composición (3.1), generado por la función h, aplica el espacio $\kappa BV_{\phi}[a,b]$ en sí mismo si y solo si aplica, para toda otra escogencia de $c<d$, el espacio $\kappa BV_{\phi}[c,d]$ en sí mismo.

Demostración:

Supongamos que el operador de composición definido por $Hu = h\circ u$ aplica el espacio $\kappa BV_{\phi}[a,b]$ en sí mismo. La función $\alpha:[c,d]\to[a,b]$ definida por

$$\alpha(t) := \frac{b-a}{d-c}(t-c)+a \quad (c\le t\le d)$$

es un homeomorfismo estrictamente creciente entre $[c,d]$ y $[a,b]$ con inversa

$$\alpha^{-1}(s) = \frac{d-c}{b-a}(s-a)+c \quad (a\le s\le b)$$

el cual satisface $\alpha(c)=a$ y $\alpha(d)=b$. Sea $\pi([a,b])$ la familia de todas las particiones del intervalo $[a,b]$, así $\alpha:\pi([c,d])\to\pi([a,b])$ tal que

$$\alpha(\{t_0,t_1,...,t_{m-1},t_m\}) = \{\alpha(t_0),\alpha(t_1),...,\alpha(t_{m-1}),\alpha(t_m)\}$$

define una correspondencia uno a uno de todas las particiones del intervalo $[c,d]$ y todas las particiones del intervalo de $[a,b]$. Dado $v\in\kappa BV_{\phi}[c,d]$, la función $u := v\circ\alpha^{-1}$ pertenece a $\kappa BV_{\phi}[a,b]$, por la definición de las funciones de $\kappa\phi$-variación acotada, así $Hu = h\circ v\circ\alpha^{-1}$ pertenece a $\kappa BV_{\phi}[a,b]$, por suposición. Pero para $P\in\pi([c,d])$ y $\alpha(P)\in\pi([a,b])$, como se definió anteriormente, se tiene

$$
\begin{aligned}
\kappa V_\phi(h\circ u,\alpha(P);[a,b]) &= \kappa V_\Phi(h\circ v\circ \alpha^{-1},P;[a,b]) \\
&= \frac{\sum_{j=1}^{m}\phi_n(|h(u(\alpha(t_j)))-h(u(\alpha(t_{j-1})))|)}{\sum_{j=1}^{m} c\kappa\left(\frac{|u(\alpha(t_j))-u(\alpha(t_{j-1}))|}{b-a}\right)} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^{m}\phi_n(|h(v(t_j))-h(v(t_{j-1}))|)}{\sum_{j=1}^{m} c\kappa\left(\frac{|v(t_j)-v(t_{j-1})|}{d-c}\right)} \\
&= \kappa V_\phi(h\circ v,P;[c,d]).
\end{aligned}
$$

Si consideramos el supremo con respecto a $P\in\pi([c,d])$ y $\alpha(P)\in\pi([a,b])$ se concluye que $\kappa V_\phi(h\circ v;[c,d])=\kappa V_\phi(h\circ u;[a,b])$.

□

Los siguientes lemas serán usados en la demostración del teorema principal de esta sección (Teorema 3.1).

Lema 3.2
Sean $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ y $a\le s<\eta<t\le b$, entonces

$$\frac{|u(t)-u(s)|}{t-s}\le\frac{\left|u(\eta)-u(s)\right|}{\eta-s}+\frac{\left|u(t)-u(\eta)\right|}{t-\eta}.$$

Demostración:

Sea $a\le s<\eta<t\le b$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{|u(t)-u(s)|}{t-s} &\le \frac{|u(\eta)-u(s)|}{t-s}+\frac{|u(t)-u(\eta)|}{t-s} \\
&= \frac{|u(\eta)-u(s)|}{\eta-s}\left(\frac{\eta-s}{t-s}\right)+\frac{|u(t)-u(\eta)|}{t-\eta}\left(\frac{t-\eta}{t-s}\right) \\
&\le \frac{|u(\eta)-u(s)|}{\eta-s}+\frac{|u(t)-u(\eta)|}{t-\eta}.
\end{aligned}
$$

□

Lema 3.3
Sean $\kappa:[0,1]\to[0,1]$ una función distorsión, $\phi=\{\varphi_n\}_{n\ge1}$ una ϕ-sucesión, $u\in\kappa BV_\phi[a,b]$ y $\lambda>0$. Entonces $\mu_\phi(u)<\lambda$ si y solo si $\kappa V_\phi\left(\frac{u}{\lambda}\right)<1$.

Demostración:

Sea $u \in \kappa BV_\phi[a,b]$. Supongamos que $\mu_\phi(u) < \lambda$; entonces, por definición de $\mu_\phi(u)$ existe k tal que $\lambda > k > \mu_\phi(u)$ y $\kappa V_\phi\left(\frac{u}{k}\right) \leq 1$. Además, por la convexidad de las funciones φ_n, se tiene que

$$\kappa V_\phi\left(\frac{u}{\lambda}\right) = \kappa V_\phi\left(\frac{u}{k}\frac{k}{\lambda}\right) \leq \frac{k}{\lambda}\kappa V_\phi\left(\frac{u}{k}\right) \leq \frac{k}{\lambda} \leq 1.$$

Recíprocamente, asumamos que $\kappa V_\phi\left(\frac{u}{\lambda}\right) < 1$, entonces $\lambda \in \left\{\lambda > 0 : \ \kappa V_\phi\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\}$, por lo tanto $\mu_\phi(u) < \lambda$.

□

Teorema 3.1

Sean $\kappa : [0,1] \to [0,1]$ una función distorsión, $\phi = \{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ una ϕ-sucesión, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y H el operador de composición generado por la función h. H aplica el espacio $Lip[0,1]$ en el espacio $\kappa BV_\phi[0,1]$ ó $\kappa BV[0,1]$, si y solo si h es localmente Lipschitz. Además el operador H es acotado.

Demostración:

Sean $u \in Lip[0,1]$, $r = \|u\|_\infty$ y supongamos que h es localmente Lipschitz, entonces existe $k = k(r)$, tal que

$$|h(t) - h(s)| \leq k(r)\,|s-t|, \quad (s,t \in \mathbb{R},\ |s| \leq r,\ |t| \leq r).$$

Sean $\{[a_n,b_n]\}_{n\geq 1} \in F_{\mathbb{N}}[a,b]$ y $\lambda > 0$, tal que $\lambda < \dfrac{1}{2k(r)\,\|u\|_{Lip}\,\|u\|_\infty + 1}$ entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\left(\lambda\,|h(u(b_n)) - h(u(a_n))|\right)}{\sum_{n=1}^{\infty}\kappa\left(\frac{b_n-a_n}{b-a}\right)} &\leq \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\left(\lambda k(r)\,|u(b_n)-u(a_n)|\right)}{\kappa(1)} \\
&\leq \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda k(r)\varphi_1(1)\,|u(b_n)-u(a_n)|}{\kappa(1)} \\
&\leq \lambda k(r)\varphi_1(1)\,\|u\|_{Lip}\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Así, por el Lema 3.2 y el Teorema 1.13, se tiene que $H(u) \in \kappa BV_\phi[0,1]$.

La implicación inversa se demostrará por contradicción. Asumamos que $H(Lip[0,1]) \subset \kappa BV_\phi[0,1]$ y que h no es localmente Lipschitz. Como la función identidad $I_d : [0,1] \to [0,1]$ pertenece a $Lip[0,1]$, entonces $h \circ I_d \in \kappa BV_\phi[0,1]$ y por consiguiente h es acotada en el intervalo $[0,1]$. Sin perdida de generalidad asumamos que

$$\left\| h\,|_{[0,1]} \right\|_\infty \leq \frac{1}{4}. \tag{3.3}$$

Como h no es localmente Lipschitz en $\mathbb{R}$, existe un intervalo cerrado I tal que h no satisface la condición Lipschitz. Con el fin de simplificar la demostración, sea $I = [0,1]$. De este modo, para toda sucesión creciente de números reales positivos $\{k_n\}_{n\geq 1}$ que convergen al infinito, seleccionemos sucesiones $\{a_n\}_{n\geq 1}$, $\{b_n\}_{n\geq 1}$, tal que

$$|h(b_n) - h(a_n)| > k_n |b_n - a_n|, \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{3.4}$$

Además, consideremos a_n, b_n tal que

$$a_n < b_n, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Considerándose subsucesiones si es necesario y acordemos que la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es monótona. Asumamos sin pérdida de generalidad que la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es creciente. Como $[0,1]$ es compacto, por la desigualdad (3.4) se tiene que existe una subsucesión de $\{a_n\}_{n\geq 1}$ y $\{b_n\}_{n\geq 1}$, que se denotará de la misma manera, que convergen a $a_\infty \in [0,1]$.

Como la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy se considera (considerándose subsucesión si es necesario) que

$$|a_m - a_n| < \frac{1}{k_n}, \quad (m > n). \tag{3.5}$$

De nuevo, consideremos subsucesiones si es necesario, haciendo uso de las propiedades de la función κ asumamos que

$$\text{máx}\{\kappa(b_n - a_n), \kappa(a_m - a_n)\} < \frac{1}{k_n}, \quad (n \in \mathbb{N},\, m \geq n). \tag{3.6}$$

Consideremos una nueva sucesión $\{m_n\}_{n\geq 1}$ definida por

$$m_n := \frac{1}{k_n(b_n - a_n)}, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

De las desigualdades (3.3) y (3.4) se sigue que $m_n > 2$; por lo tanto

$$\frac{m_n}{2} < [\![m_n]\!] \leq m_n, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Sea $\{t_n\}_{n\geq 1}$ la sucesión definida recursivamente por

$$t_1 := 0, \quad t_{n+1} := t_n + a_{n+1} - a_n + 2[\![m_n]\!](b_n - a_n), \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Esta sucesión es estrictamente creciente y de las relaciones (3.5) y (3.6), se obtiene que

$$\begin{aligned} t_n \to t_\infty &:= \sum_{n=1}^{\infty} (t_{n+1} - t_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) + 2\sum_{n=1}^{\infty} [\![m_n]\!](b_n - a_n) \\ &\leq 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n}. \end{aligned}$$

Así, para asegurar que $t_\infty \in [0,1]$, es suficiente suponer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n} \leq \frac{1}{3}$.

Definamos la función de zig-zag continua $u : [0,1] \to \mathbb{R}$, como se presenta a continuación:

$$u(t) := \begin{cases} a_n & , \quad t = t_n + 2i(b_n - a_n),\ i = 0,\dots,[\![m_n]\!] \\ b_n & , \quad t = t_n + (2i+1)(b_n - a_n),\ i = 0,\dots,[\![m_n]\!] - 1 \\ a_\infty & , \quad t_\infty \leq t \leq 1 \\ afín & , \quad \text{otro caso} \end{cases}.$$

Además

$$t_{n,i} := t_n + i(b_n - a_n), \quad n \in \mathbb{N},\ i = 0,\dots,2[\![m_n]\!].$$

Cada intervalo $I_n = [t_n, t_{n+1}]$, $n \in \mathbb{N}$, se puede escribir como la unión de familias de intervalos no-solapados

$$I_{n,i} := [t_{n.i}, t_{n,i+1}], \quad I_{n,2[\![m_n]\!]} := [t_{n,2[\![m_n]\!]}, t_{n+1}], \quad i = 0,\dots,[\![m_n]\!] - 1.$$

Y la función u es definida en $I_{n,i}$, $i = 0,\dots,2[\![m_n]\!]$, como sigue

$$u(t) = t - (t_n + 2i(b_n - a_n)) + a_n,\ (t \in I_{n,2i}), \tag{3.7}$$

$$u(t) = t - t_n + (2i+1)(b_n - a_n) + b_n,\ (t \in I_{n,2i+1}), \tag{3.8}$$

y

$$u(t) = t - t_{n+1} + a_n,\ (t \in I_{n,2[\![m]\!]}). \tag{3.9}$$

En todos estos casos las pendientes de los segmentos de recta son iguales a 1. Por lo tanto, para $n \in \mathbb{N}$, el valor absoluto de la pendiente de los segmentos de recta en estos rangos son acotados por 1:

$$2^{-n} \frac{|b_n - a_n|}{\kappa^{-1}(b_n - a_n)} \leq 2^{-n} k_n (b_n - a_n) \leq 1 \quad \text{y} \quad 2^{-(n+1)} \frac{a_{n+1} - a_n}{t_n + a_{n+1} - a_n} \leq 1.$$

Llegados a este punto se demostrará que $u \in Lip[0,1]$.

Sea $0 \leq s < t \leq 1$, entonces existen las siguientes posibilidades para la ubicación de s y t en el intervalo $[0,1]$.

1er caso: Si $s, t \in I_n$, $(n \in \mathbb{N})$ y están en el mismo intervalo $I_{n,i}$, $i = 0,\dots,2[\![m_n]\!]$.

De las relaciones (3.7), (3.8) y (3.9) se sigue que $\frac{|u(t) - u(s)|}{|t - s|} = 1$.

2do caso: Si $s, t \in I_n$, $(n \in \mathbb{N})$ están en dos intervalos diferentes $I_{n,i}$, $i = 0,\dots,2[\![m_n]\!]$.

Existen varias posibilidades

a) $s \in I_{n,i}$, $t \in I_{n,j}$, $i < j < 2[\![m_n]\!]$.

a_1) $j = i+1$. Por el Lema 3.2 y las relaciones (3.7) y (3.8) se tiene que

$$\frac{|u(t)-u(s)|}{|t-s|} \leq \frac{\left|u(t_{n,i+1})-u(s)\right|}{t_{n,i+1}-s} + \frac{\left|u(t)-u(t_{n,i+1})\right|}{t-t_{n,i+1}} \leq 2.$$

a_2) $j > i+1$. Entonces

$$\frac{|u(t)-u(s)|}{|t-s|} \leq \frac{b_n-a_n}{t_{n,i+2}-t_{n,i+1}} = 1.$$

b) $s \in I_{n,i}$, $t \in I_{n,j}$, $i < j = 2[\![m_n]\!]$.

Si $j = i+1$ se procede como a_1).

Si $j > i+1$, de nuevo usando el Lema 3.2 y las relaciones (3.7), (3.8) y (3.9) se obtiene que

$$\begin{aligned}
\frac{|u(t)-u(s)|}{|t-s|} &\leq \frac{\left|u(t_{n,2[\![m_n]\!]})-u(s)\right|}{t_{n,2[\![m_n]\!]}-s} + \frac{\left|u(t)-u(t_{n,2[\![m_n]\!]})\right|}{t_{n,2[\![m_n]\!]}-t} \\
&\leq \frac{b_n-a_n}{t_{n,2[\![m_n]\!]}-t_{n,2[\![m_n]\!]-1}} + 1 \\
&\leq 2.
\end{aligned}$$

3er caso: Si $s \in I_n$, $t \in I_m$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$. Del Lema 3.2 y el 2do caso se concluye que

$$\frac{|u(t)-u(s)|}{t-s} \leq \frac{|u(t_{n+1})-u(s)|}{t_{n+1}-s} + \frac{|u(t)-u(t_m)|}{t-t_m} \leq 4.$$

4to caso: Si $s \in I_n$, $n \in \mathbb{N}$, $t = t_\infty$. Entonces por el Lema 3.2

$$\begin{aligned}
\frac{|u(t_\infty)-u(s)|}{t_\infty-s} &\leq \frac{\left|u(t_{n,i+1})-u(s)\right|}{t_{n,i+1}-s} + \frac{\left|a_\infty-u(t_{n,i+1})\right|}{b_n-a_n} \\
&\leq 1 + \frac{a_\infty-a_n}{b_n-a_n} \\
&\leq 2.
\end{aligned}$$

5to caso: Si $s < t_\infty < t \leq 1$. Por el Lema 3.2 y el 4to caso

$$\frac{|u(t)-u(s)|}{t-s} \leq \frac{|u(t_\infty)-u(s)|}{t_\infty-s} \leq 2.$$

6to caso: Si $t_\infty \leq s < t \leq 1$. En esta circunstancia se tiene que $u(s) = u(t) = a_\infty$. Por lo tanto

$$|u(t)-u(s)| \leq |t-s|, \quad (s,t \in [0,1]).$$

Así u es Lipschitz en $[0,1]$. Además, para cada partición del intervalo $[0,1]$ de la forma:

$$\pi : 0 = t_1 < t_1+(b_1-a_1) < \cdots < t_1+2[\![m_1]\!](b_1-a_2) < t_2 < t_2+(b_2-a_2) < \cdots < t_k < \cdots < t_k+2[\![m_k]\!](b_k-a_k) < 1$$

y $c > 0$, haciendo uso de la desigualdad (3.4), la convexidad de la función φ_n, $n \geq 1$ y la definición de m_n, $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\kappa V_\phi(c(h\circ u);[0,1]) &= \frac{\sum_{n=1}^{k}\varphi_n\left(c|h(u(t_n))-h(u(t_{n-1}))|\right)}{\sum_{n=1}^{k}\kappa(u(t_n)-u(t_{n-1}))}\\
&\geq \frac{\sum_{n=1}^{k}2[\![m_n]\!]\,\varphi_n(c)\,|h(b_n)-h(a_n)|}{\sum_{n=1}^{k}[2[\![m_n]\!]\kappa(b_n-a_n)+\kappa(a_{n+1}-a_n)]}\\
&\geq \frac{\sum_{n=1}^{k}2[\![m_n]\!]\,\varphi_n(c)\,k_n\,|b_n-a_n|}{\sum_{n=1}^{k}[2[\![m_n]\!]\kappa(b_n-a_n)+\kappa(a_{n+1}-a_n)]}\\
&\geq \frac{\sum_{n=1}^{k}2[\![m_n]\!]\,k_n|b_n-a_n|\,\varphi_n(c)}{\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{k_n}}\\
&= \frac{\sum_{n=1}^{k}\frac{2[\![m_n]\!]\,|b_n-a_n|\,\varphi_n(c)}{m_n|b_n-a_n|}}{\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{k_n}}\\
&= \frac{\sum_{n=1}^{k}\varphi_n(c)\frac{2[\![m_n]\!]}{m_n}}{\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{k_n}}\\
&> \sum_{n=1}^{k}\varphi_n(c).
\end{aligned}$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(c)$ diverge, entonces $c(h\circ u)\notin \kappa BV_\phi[0,1]$, lo cual es una contradicción de haber supuesto que h no es localmente Lipschitz. Ahora se demostrará que $h\circ u\notin \kappa BV[a,b]$. En efecto,

$$\begin{aligned}
V_\kappa(h\circ u;[0,1]) &= \frac{\sum_{n=1}^{k}c|h(u(t_n))-h(u(t_{n-1}))|}{\sum_{n=1}^{k}\kappa(u(t_n)-u(t_{n-1}))}\\
&\geq \frac{\sum_{n=1}^{k}2[\![m_n]\!]\,k_n\,|b_n-a_n|}{\sum_{n=1}^{k}[2[\![m_n]\!]\kappa(b_n-a_n)+\kappa(a_{n+1}-a_n)]}\\
&\geq \frac{\sum_{n=1}^{k}2[\![m_n]\!]\,k_n|b_n-a_n|}{\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{k_n}}\\
&\geq \sum_{n=1}^{k}2[\![m_k]\!]\,k_n(b_n-a_n)\\
&\geq k.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $h \circ u \notin \kappa BV[0,1]$ lo cual es una contradicción de haber supuesto que h no es localmente Lipschitz.

Para demostrar que el operador H es acotado, sea $r > 0$ y consideremos $u \in Lip[0,1]$, tal que $\|u\|_{Lip} \leq r$, entonces de la definición de $\|\cdot\|_{Lip[0,1]}$, se obtiene que

$$\|u\|_\infty \leq |u(0)| + L_0^1(u) \leq r.$$

Sin pérdida de generalidad asumamos que $r = 1$. Como h es localmente Lipschitz, existe $k(1) > 0$, tal que

$$\left|h(x) - h(y)\right| \leq k(1)\left|x - y\right|, \quad |x| \leq 1, \left|y\right| \leq 1.$$

Como la función identidad $I_d : [0,1] \to [0,1]$, pertenece a $Lip[0,1]$, entonces $h \circ I_d \in \kappa BV_\phi[0,1]$. Por el Teorema 1.13 se obtiene que $\|h \circ I_d\|_\infty < \infty$. Sea $\{[a_n, b_n]\}_{n\geq 1} \in F_{\mathbb{N}}[0,1]$ y escojamos λ tal que $k(1)\kappa V_\phi(I_d) < \lambda$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n\left(\frac{|h(u(b_n)) - h(u(a_n))|}{\lambda}\right)}{\sum_{n=1}^{\infty} \kappa\,(b_n - a_n)} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n\left(\frac{k(1)\,|u(b_n) - u(a_n)|}{\lambda}\right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n\left(\frac{k(1)\,(b_n - a_n)}{\lambda}\right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k(1)}{\lambda}\,\varphi_n(b_n - a_n) \\
&\leq \frac{k(1)}{\lambda}\kappa V_\phi(I_d) \\
&< 1.
\end{aligned}$$

Por el Lema 1.8 se tiene que $\mu(h \circ u) < \lambda(r)$. Así se concluye que

$$\|H(u)\|_{\kappa\phi} = |h(u(a))| + \mu(h \circ u) \leq \|h \circ u\|_\infty + \lambda(r).$$

Por lo tanto el operador H es acotado. En el caso que $H(Lip[0,1]) \subset \kappa BV[0,1]$ se procede similarmente.

$\square$

En el siguiente resultado se presenta un Lema de invarianza para el espacio de $\kappa BV_\phi[0,1]$.

Lema 3.4
Sea κ una función distorsión, $\phi = \left\{\varphi_n\right\}_{n\geq 1}$ una ϕ-sucesión y $\nu : [0,1] \to [a,b]$ la función afín que aplica $[0,1]$ en $[a,b]$ $(\nu(t) := (b-a)t + a,\ \ t \in [0,1])$.

1. $u \in \kappa BV_\phi[a,b]$ si y solo si $u \circ \nu \in \kappa BV_\phi[0,1]$.

2. $u \in \kappa BV[a,b]$ si y solo si $u \circ \nu \in \kappa BV_\phi[0,1]$.

Demostración:

1. Sea $u \in \kappa BV_\phi[a,b]$ y $\{[a_n,b_n]\}_{n\geq 1} \in F_{\mathbb{N}}[0,1]$, entonces $\{[v(a_n),v(b_n)]\}_{n\geq 1} \in F_{\mathbb{N}}[a,b]$, además como

$$\begin{aligned}\frac{v(b_n)-v(a_n)}{b-a} &= \frac{[(b-a)b_n+a]-[(b-a)a_n+a]}{b-a}\\ &= \frac{(b-a)(b_n-a_n)}{(b-a)}\\ &= b_n-a_n\end{aligned}$$

entonces

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\left(|u(v(b_n))-u(v(a_n))|\right)}{\sum_{n=1}^{\infty}\kappa(b_n-a_n)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\left(|u(v(b_n))-u(v(a_n))|\right)}{\sum_{n=1}^{n-1}\kappa\left(\frac{v(b_n)-v(a_n)}{b-a}\right)} \leq \kappa V_\phi(u;[a,b]).$$

Por lo tanto $u\circ v \in \kappa BV_\phi[0,1]$.

Recíprocamente, supongamos que $u\circ v \in \kappa BV_\phi[0,1]$ y sea $\{[a_n,b_n]\}_{n\geq 1} \in F_{\mathbb{N}}[a,b]$ una partición del intervalo $[a,b]$. Definamos

$$I_n := \left[v^{-1}(b_n), v^{-1}(a_n)\right] \quad (n\in\mathbb{N}).$$

Así, $\{I_n\}_{n\geq 1} \in F_{\mathbb{N}}[0,1]$ y además como

$$v\left(\frac{b_n-a}{b-a}\right) = (b-a)\left(\frac{b_n-a}{b-a}\right)+a = b_n-a+a = b_n$$

y

$$v\left(\frac{a_n-a}{b-a}\right) = (b-a)\left(\frac{a_n-a}{b-a}\right)+a = a_n-a+a = a_n$$

entonces

$$\frac{\sum_{j=1}^{n-1}\varphi_n\left(|u(b_n)-u(a_n)|\right)}{\sum_{n=1}^{\infty}\kappa\left(\frac{b_n-a_n}{b-a}\right)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\left(\left|u\left(v\left(\frac{b_n-a}{b-a}\right)\right)-u\left(v\left(\frac{a_n-a}{b-a}\right)\right)\right|\right)}{\sum_{n=1}^{\infty}\kappa\left(\frac{b_n-a}{b-a}-\frac{a_n-a}{b-a}\right)} \leq \kappa V_\phi(u\circ v;[0,1]),$$

por lo tanto $u \in \kappa BV_\phi[a,b]$.

2. La demostración es similar a la parte 1. considerando φ_n como la identidad.

□

Como consecuencia del Lema anterior se obtiene el siguiente resultado.

Lema 3.5
Sean κ una función distorsión, $\phi = \{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ una ϕ-sucesión, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y H el operador de composición generado por la función h.

1. $H(Lip[a,b]) \subset \kappa BV_\phi[a,b]$ si y solo si $H(Lip[0,1]) \subset \kappa BV_\phi[0,1]$.

2. $H(Lip[a,b]) \subset \kappa BV[a,b]$ si y solo si $H(Lip[0,1]) \subset \kappa BV[0,1]$.

De estos resultados obtenidos se derivan los siguientes corolarios.

Corolario 3.1
Sean κ una función distorsión, $\phi = \{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ una ϕ-sucesión y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Entonces el operador de composición H generado por la función h, aplica el espacio $Lip[a,b]$ en $\kappa BV_\phi[a,b]$ o en $\kappa BV[a,b]$ si y solo si h es localmente Lipschitz.

Corolario 3.2
Sean κ una función distorsión, $\phi = \{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ una ϕ-sucesión, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espacios normados tales que $Lip[a,b] \subset \mathbb{X} \subset \mathbb{Y}$ donde $\mathbb{Y} \subset \kappa BV_\phi[a,b]$ o $\mathbb{Y} \subset \kappa BV[a,b]$. Entonces el operador de composición H generado por la función h, aplica el espacio $\mathbb{X}$ en el espacio $\mathbb{Y}$ si y solo si h es localmente Lipschitz.

Algunos casos particulares del Corolario 3.2 son los siguientes:

(1) $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$ donde $\mathbb{X}$ es uno de los siguientes espacios:

- $Lip[a,b]$ (Ver [19]).
- $H_\alpha[a,b]$ $(0 < \alpha < 1)$ (Ver [126]).
- $BV_\varphi[a,b]$ (Ver [40]).
- $BV[a,b]$ (Ver [74]).
- HBV (Ver [33]).
- $AC[a,b]$ (Ver [115]).
- $RV_\varphi[a,b]$ (Ver [119]).
- ϕBV (Ver [158]).
- ΛBV (Ver [137]).
- $\kappa BV[a,b]$ (Ver [7]).

(2) $\mathbb{X} = RV_\varphi[a,b]$, $\mathbb{Y} = BV[a,b]$ (Ver [122]).

(3) $\mathbb{X} = Lip[a,b]$, $\mathbb{Y} = BV[a,b]$ (Ver [5]).

Del Corolario 3.2 se obtienen los siguientes nuevos casos:

(1) $\mathbb{X}$ es uno de los siguientes espacios: $Lip[a,b]$, $H_\alpha(0 < \alpha < 1)$, $RV_\varphi[a,b]$, $AC[a,b]$, $BV[a,b]$, $BV_\phi[a,b]$, $\kappa RV_\varphi[a,b]$, $\mathbb{Y}$ es uno de los siguientes espacios $\kappa BV[a,b]$, $\kappa BV_\phi[a,b]$.

(2) $\mathbb{X} = \kappa RV_p[a,b]$, $\mathbb{Y} = \kappa RV_q[a,b]$, $1 < p,\ q < \infty$.

(3) $\mathbb{X} = \kappa BV[a,b]$, $\mathbb{Y} = \kappa BV_\phi[a,b]$.

Mas generalmente,

(1) $\mathbb{X} = \kappa_1 BV[a,b]$, $\mathbb{Y} = \kappa_2 RV_\phi[a,b]$;

(2) $\mathbb{X} = \kappa_1 RV_\varphi[a,b]$, $\mathbb{Y} = \kappa_2 RV_\psi[a,b]$;

(3) $\mathbb{X} = \kappa_1 RV_\phi[a,b]$, $\mathbb{Y} = \kappa_2 RV_\phi[a,b]$;

donde κ_1, κ_2 son funciones distorsión.

3.1.2 En el Espacio $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$.

El objetivo principal de esta sección, como contribución al tema (Ver [111]) es demostrar que h es localmente Lipschitz si y solo si el operador de composición aplica el espacio de las funciones $p(\cdot)$-variación acotada en el sentido de Wiener en sí mismo.

Lema 3.6 (Principio de Invarianza)
Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. El operador de composición (3.1) aplica el espacio $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ en si mismo si aplica, para toda otra escogencia de $c < d$, el espacio $WBV_{p(\cdot)}[c,d]$ en si mismo.

Demostración:

La función $v : [c,d] \to [a,b]$ definida por

$$v(t) = \frac{b-a}{d-c}(t-c) + a$$

es un homeomorfismo afín, con inversa $v^{-1} : [a,b] \to [c,d]$, definida por

$$v^{-1}(s) = \frac{d-c}{b-a}(s-a) + c,$$

tal que $v(c) = a$ y $v(d) = b$. Así, $v : \pi([c,d]) \to \pi([a,b])$ definida por

$$\begin{aligned} v(\pi) &= v(\{t_0, t_1, \ldots, t_m\}) = \{v(t_0), v(t_1), \ldots, v(t_m)\} \\ &= \{v(t_i)\}_{i=1}^m \in \pi([a,b]), \end{aligned}$$

define una correspondencia 1-1 entre todas las particiones $\pi([c,d])$ de $[c,d]$ y toda partición $\pi([a,b])$ de $[a,b]$ ya que v es estrictamente creciente. Consecuentemente, para $u \in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$, se obtiene

$$\begin{aligned} v^W_{p(\cdot)}(u,[a,b]) &= \sup_{\pi([a,b])} \sum_{i=1}^m \left| u(v(t_i)) - u(v(t_{i-1})) \right|^{p(x_{i-1})} \\ &= \sup_{\pi([c,d])} \sum_{i=1}^m \left| (u \circ v)(t_i) - (u \circ v)(t_{i-1}) \right|^{p(x_{i-1})} \\ &= v^W_{p(\cdot)}(u \circ v, [c,d]). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2

Sean $p : [a,b] \to (1,\infty)$ una función y H el operador de composición generado por la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. H aplica el espacio $WBV_{p(\cdot)}(u)[a,b]$ en sí mismo si y solo si h es localmente Lipschitz.

Demostración:

Supongamos sin pérdida de generalidad que $[a,b] = [0,1]$. En primer lugar, sea $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función localmente Lipschitz en $\mathbb{R}$, tal que $u \in WBV_{p(\cdot)}[0,1]$. Entonces $V^W_{p(\cdot)}(\lambda u; [0,1]) < \infty$ para algún $\lambda > 0$. Consideremos la condición localmente Lipschitz

$$|h(u) - h(v)| \leq k(r)|u - v| \quad (u, v \in \mathbb{R},\ |u|, |v| \leq \mathbb{R}) \tag{3.10}$$

para $r := ||u||_\infty$; así, para toda partición $\pi : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ se obtiene la estimación

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\lambda}{k(||u||_\infty)} |h(u(t_j)) - h(u(t_{j-1}))| \right)^{p(t_{j-1})} &\leq \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\lambda}{k(||u||_\infty)} k(||u||_\infty)|u(t_j) - u(t_{j-1})| \right)^{p(t_{j-1})} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\lambda |u(t_j) - u(t_{j-1})| \right)^{p(t_{j-1})} \\
&= V^W_{p(\cdot)}(\lambda u, [0,1]).
\end{aligned}$$

Esto demuestra que para $\mu := \dfrac{\lambda}{k(||u||_\infty)}$, se tiene que $V^W_{p(\cdot)}(\mu H u, [0,1]) < \infty$ y así $Hu \in WBV_{p(\cdot)}[0,1]$.

Para la implicación inversa, Supongamos que h no satisface la condición de Lipschitzidad local (3.10), de esta manera, para toda sucesión creciente de números reales positivos $\{k_j\}_{j\geq 1}$ que converge al infinito, que se definirá más adelante, seleccionemos una sucesión $\{u_j\}_{j\geq 1}$, $\{v_j\}_{j\geq 1}$, con $\delta_j : v_j - u_j < \frac{1}{k_j}$, además

$$|h(v_j) - h(u_j)| > k_j |v_j - u_j| \quad (j \in \mathbb{N},\ u_j < v_j). \tag{3.11}$$

Consideremos una subsucesión si es necesario, asumamos que la sucesión $\{u_j\}_{j\geq 1}$ es monótona. Supongamos sin pérdida de generalidad que la sucesión $\{u_j\}_{j\geq 1}$ es creciente. Como $[0,1]$ es compacto, de la desigualdad (3.11) se tiene que existe una subsucesión de $\{u_j\}_{j\geq 1}$ y $\{v_j\}_{j\geq 1}$ que denotaremos de la misma manera que converge a $u_\infty \in [0,1]$. Como la sucesión $\{u_j\}_{j\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy, se puede asumir que $u_\infty \in [-r, r]$ tal que $|u_j - u_\infty| \leq \frac{1}{2k_j}$ para todo k_j, y así $|u_j - u_{j+1}| \leq \frac{1}{k_j}$. Escojamos $n_j := \frac{1}{k_j \delta_j}$.

Definamos la sucesión $\{t_k\}_{k\geq 1}$ recursivamente por

$$t_1 := 0, \quad t_{k+1} := t_k + |u_{k+1} - u_k| + 2 n_k \delta_k.$$

Esta sucesión es estrictamente creciente y

$$\begin{aligned}
t_j \to t_\infty &:= \sum_{j=1}^{\infty} (t_{j+1} - t_j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} |u_{j+1} - u_j| + 2 \sum_{j=1}^{\infty} n_j \delta_j \\
&\leq 3 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k_j}.
\end{aligned}$$

Para asegurar que $t_\infty \in [0,1]$, es suficiente suponer que $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k_j} \leq \frac{1}{3}$. Definamos la función de zig-zag continua $f:[0,1] \to \mathbb{R}$, como sigue

$$f(t) := \begin{cases} u_j & , \quad t = t_j + 2i(v_j - u_j),\ i = 0,\dots,[\![n_j]\!]. \\ v_j & , \quad t = t_j + (2i+1)(v_j - u_j),\ i = 0,\dots,[\![n_j]\!] - 1. \\ u_\infty & , \quad t_\infty \leq t \leq 1. \\ \textit{afín} & , \quad \text{otro caso.} \end{cases}.$$

Consideremos $t_{j,i} := t_j + i(v_j - u_j), \quad j \in \mathbb{N},\ i = 0,\dots,2[\![n_j]\!]$ y escribamos cada intervalo $I_j = [t_j, t_{j+1}],\ j \in \mathbb{N}$, como la unión de familia no solapadas

$$I_{j,i} := [t_{j,i}, t_{j,i+1}],\ I_{j,2[\![n_j]\!]} := [t_{j,2[\![n_j]\!]}, t_{j+1}]\ \ (i = 0,\dots,[\![n_j]\!] - 1).$$

La función f es definida en $I_{j,i},\ i = 0,\dots,2[\![n_j]\!]$ como sigue:

$$\begin{aligned} f(t) &= \quad t - (t_j + 2i(v_j - u_j)) + u_j && (t \in I_{j,2i}) \\ f(t) &= \quad t - t_j + (2i+1)(v_j - u_j) + v_j && (t \in I_{j,2i+1}) \\ f(t) &= \quad t - t_{j+1} + u_j && (t \in I_{j,2[\![n_j]\!]}) \end{aligned}$$

Sea $0 \leq s < t \leq 1$, entonces las posibilidades para la ubicación de s y t en $[0,1]$ son las siguientes:

Caso 1. Si $s,t \in I_j,\ (j \in \mathbb{N})$ y están en el mismo intervalo $I_{j,i},\ i = 0,...,2[\![n_j]\!]$.

$$V^W_{p(\cdot)}(f,[s,t]) \leq |f(t) - f(s)|^{p(x_{ts})} = |t-s|^{p(x_{ts})} \leq 1.$$

Caso 2. Si $s,t \in I_j,\ (j \in \mathbb{N})$ y están en dos intervalos diferentes $I_{j,i},\ i = 0,...,2[\![n_j]\!]$.
$s \in I_{j,i},\ t \in I_{j,k},\ i < k < 2[\![n_j]\!]$.

$$\begin{aligned} V^W_{p(\cdot)}(f,[s,t]) &\leq 2^{p^+-1}\left(\left|f(t_{j,i+1}) - f(s)\right|^{p(x_{(j,i+1)s})} + \left|f(t) - f(t_{j,i+1})\right|^{p(x_{t(j,i+1)})}\right) \\ &\leq 2^{p^+-1}\left(\left|u_j - v_j\right|^{p(x_{(j,i+1)s})} + \left|u_j - v_j\right|^{p(x_{t(j,i+1)})}\right) \\ &\leq 2^{p^+} \text{máx}\left\{\left|u_j - v_j\right|^{p(x_{(j,i+1)s})}, \left|u_j - v_j\right|^{p(x_{t(j,i+1)})}\right\} \\ &\leq 2^{p^+} \text{máx}\left\{\left|\delta_j\right|^{p(x_{(j,i+1)s})}, \left|\delta_j\right|^{p(x_{t(j,i+1)})}\right\} < \infty. \end{aligned}$$

Caso 3. Si $s \in I_j,\ t \in I_k,\ k,j \in \mathbb{N},\ j < k$.

$$\begin{aligned} V^W_{p(\cdot)}(f,[s,t]) &\leq 2^{p^+-1}\left(\left|f(t_{j,2[n_j]+1}) - f(s)\right|^{p(x_{(j,2[n_j]+1)s})} + \left|f(t) - f(t_{j,i+1})\right|^{p(x_{t(j,i+1)})}\right) \\ &\leq 2^{p^+-1}\left(\left|u_j - v_j\right|^{p(x_{(j,2[n_j]+1)s})} + \left|u_j - v_j\right|^{p(x_{t(j,i+1)})}\right) \\ &\leq 2^{p^+} \text{máx}\left\{\left|\delta_j\right|^{p(x_{(j,2[n_j]+1)s})}, \left|\delta_j\right|^{p(x_{t(j,i+1)})}\right\} < \infty. \end{aligned}$$

Caso 4. Si $s \in I_j,\ j \in \mathbb{N},\ t = t_\infty$.

$$\begin{aligned} V^W_{p(\cdot)}(f,[s,t]) &\leq 2^{p^+-1}\left(\left|f(t_{j,i+1}) - f(s)\right|^{p(x_{(j,i+1)s})} + \left|f(t_\infty) - f(t_{j,i+1})\right|^{p(x_{\infty(j,i+1)})}\right) \\ &\leq 2^{p^+-1}\left(\left|u_j - v_j\right|^{p(x_{(j,i+1)s})} + \left|u_\infty - u_j\right|^{p(x_{\infty(j,i+1)})}\right) \\ &\leq 2^{p^+} \text{máx}\left\{\left|\delta_j\right|^{p(x_{(j,i+1)s})}, \left|\delta_j\right|^{p(x_{\infty(j,i+1)})}\right\} < \infty. \end{aligned}$$

Caso 5. Si $s < t_\infty < t \leq 1$.

$$\begin{aligned} V^W_{p(\cdot)}(f,[s,t]) &\leq 2^{p^+-1}\left(\left|f(t_\infty)-f(s)\right|^{p(x_{\infty s})}+\left|f(t_\infty)-f(t)\right|^{p(x_{\infty t})}\right)\\ &\leq 2^{p^+-1}\left(\left|u_\infty-v_j\right|^{p(x_{\infty s})}+\left|u_\infty-u_j\right|^{p(x_{\infty t})}\right)\\ &\leq 2^{p^+}\text{máx}\left\{\left|\delta_j\right|^{p(x_{\infty s})},\left|\delta_j\right|^{p(x_{\infty t})}\right\}<\infty. \end{aligned}$$

Caso 6: Si $t_\infty \leq s < t \leq 1$.

En esta circunstancia $f(s) = f(t) = f_\infty$ y el caso es inmediato.

Así $f \in WBV_{p(\cdot)}[0,1]$, para cada partición del intervalo $[0,1]$, de la forma

$$\pi : 0 = t_1 < t_1 + (v_1 - u_1) < \cdots < t_1 + 2[\![n_1]\!](v_1 - u_2)$$

$$< t_2 < t_2 + (v_2 - u_2) < \cdots < t_k < \cdots < t_k + 2[\![n_k]\!](v_k - u_k) < 1$$

y haciendo uso de la desigualdad (3.11) y la definición de $n_j,\ j \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\begin{aligned} V^W_{p(\cdot)}((h\circ f),[0,1]) &= \sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{n}(h\circ f(t_j)-h\circ f(t_{j-1}))^{p(x_{j-1})}\\ &= \sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{n}(h(f(t_j))-h(f(t_{j-1})))^{p(x_{j-1})}\\ &\geq \sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{n}(2[\![n_j]\!](h(v_j)-h(u_j)))^{p(x_{j-1})}\\ &\geq \sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{n}\left(2[\![n_j]\!]k_j|v_j-u_j|\right)^{p(x_{j-1})}\\ &\geq \sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{2[\![n_j]\!]|v_j-u_j|}{n_j|v_j-u_j|}\right)^{p(x_{j-1})}\\ &\geq \sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{2[\![n_j]\!]}{n_j}\right)^{p(x_{j-1})}\\ &\geq \sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{n}(1)^{p(x_{j-1})}. \end{aligned}$$

Como la serie $\sum_{j=1}^{n}(1)^{p(x_{j-1})}$ diverge, $h\circ f \notin WBV_{p(\cdot)}[0,1]$, el cual es una contradicción.

□

3.1.3 En el Espacio $\kappa BV^W_{p(\cdot)}[a,b]$.

El objetivo principal de esta sección, como contribución al tema (Ver [112]), es demostrar que h es localmente Lipschitz si y solo si el operador de composición aplica el espacio de las funciones de $p(\cdot)$-variación acotada en el sentido de Wiener-Korenblum en sí mismo; el cual se presenta en el siguiente teorema:

Teorema 3.3

Sean $p : [a,b] \to (1,\infty)$ una función y H el operador de composición generado por la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. H aplica el espacio $\kappa BV^W_{p(\cdot)}[a,b]$ en sí mismo si y solo si h es localmente Lipschitz.

Demostración:

Asumamos sin pérdida de generalidad que $[a,b] = [0,1]$. Sean $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente Lipschitz en $\mathbb{R}$ y $u \in \kappa BV^W_{p(\cdot)}[0,1]$. Entonces $\kappa V^W_{p(\cdot)}(\lambda u; [0,1]) < \infty$ para todo $\lambda > 0$. Consideremos la condición de Lipschitzidad local

$$|h(u) - h(v)| \leq k(r)|u - v| \quad (u, v \in \mathbb{R},\ |u|, |v| \leq \mathbb{R})$$

para $r := ||u||_\infty$ y toda partición $\pi : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$, se obtiene la estimación

$$\begin{aligned}
\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\lambda}{k(||u||_\infty)}|h(u(t_j)) - h(u(t_{j-1}))|\right]^{p(t_{j-1})}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\kappa(t_j - t_{j-1})} &\leq \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\lambda}{k(||u||_\infty)}k(||u||_\infty)|u(t_j) - u(t_{j-1})|\right]^{p(t_{j-1})}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\kappa(t_j - t_{j-1})} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left[\lambda|u(t_j) - u(t_{j-1})|\right]^{p(t_{j-1})}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\kappa(t_j - t_{j-1})} \\
&\leq \kappa V^W_{p(\cdot)}(\lambda u, [0,1]) < \infty.
\end{aligned}$$

Esto demuestra que para $\mu := \dfrac{\lambda}{k(||u||_\infty)}$, $\kappa V^W_{p(\cdot)}(\mu Hu, [0,1]) < \infty$, así $Hu \in \kappa BV^W_{p(\cdot)}[0,1]$.

Para la implicación inversa se demostrará por contradicción, asumamos que $H(Lip[0,1]) \subset \kappa BV^W_{p(\cdot)}[0,1]$ y que h no es localmente Lipschitz. Como la función identidad $I_d : [0,1] \to [0,1]$ pertenece a $Lip[0,1]$, entonces $h \circ I_d \in \kappa BV_\phi[0,1]$, por lo tanto h es acotado en el intervalo $[0,1]$. Sin pérdida de generalidad consideremos que

$$\left\| h\,|_{[0,1]} \right\|_\infty \leq \frac{1}{4}. \tag{3.12}$$

Como h no es localmente Lipschitz en $\mathbb{R}$ existe un intervalo cerrado I tal que h no satisface la condición Lipschitz. A fin de simplificar la demostración sea $I = [0,1]$. De esta manera, para cualquier sucesión creciente de números reales positivos $\{k_n\}_{n\geq 1}$ que converge al infinito, que se definirá más adelante, seleccionemos sucesiones $\{a_n\}_{n\geq 1}$, $\{b_n\}_{n\geq 1}$, tal que

$$|h(b_n) - h(a_n)| > k_n\,|b_n - a_n|, \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{3.13}$$

Adicionalmente, seleccionemos a_n, b_n tal que

$$a_n < b_n, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Consideremos subsucesiones si es necesario, asumamos que la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es monótona y sin pérdida de generalidad que la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es creciente. Como $[0,1]$ es compacto, por la desigualdad (3.13) se tiene que existen subsucesiones de $\{a_n\}_{n\geq 1}$ y $\{b_n\}_{n\geq 1}$ que denotaremos de la misma manera, que converge a $a_\infty \in [0,1]$. Como la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy asumamos que (considerando subsucesiones si es necesario) que

$$|a_m - a_n| < \frac{1}{k_n}, \quad (m > n). \tag{3.14}$$

De nuevo, consideremos subsucesiones si es necesario y propiedades de la función κ donde

$$\text{máx}\{\kappa(b_n - a_n)\,,\kappa(a_m - a_n)\} < \frac{1}{k_n}, \quad (n \in \mathbb{N},\, m \geq n). \tag{3.15}$$

Sea $\{m_n\}_{n\geq 1}$ una nueva sucesión definida por

$$m_n := \frac{1}{k_n(b_n - a_n)}, \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{3.16}$$

De la desigualdad (3.12) y (3.13) se sigue que $m_n > 2$, por lo tanto

$$\frac{m_n}{2} < [\![m_n]\!] \leq m_n, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Consideremos la sucesión definida $\{t_n\}_{n\geq 1}$ recursivamente por

$$t_1 := 0, \quad t_{n+1} := t_n + a_{n+1} - a_n + 2[\![m_n]\!](b_n - a_n), \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Esta sucesión es estrictamente creciente y por las relaciones (3.15) y (3.16), se tiene

$$\begin{aligned} t_n \to t_\infty &:= \sum (t_{n+1} - t_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) + 2\sum_{n=1}^{\infty} [\![m_n]\!](b_n - a_n) \\ &\leq 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n}. \end{aligned}$$

Entonces, para asegurar que $t_\infty \in [0,1]$, es suficiente suponer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n} \leq \frac{1}{3}$.

Definamos la función continua zig-zag $u : [0,1] \to \mathbb{R}$, como se presenta a continuación:

$$u(t) := \begin{cases} a_n &, \quad t = t_n + 2i(b_n - a_n),\ i = 0, \ldots, [\![m_n]\!], \\ b_n &, \quad t = t_n + (2i+1)(b_n - a_n),\ i = 0, \ldots, [\![m_n]\!] - 1, \\ a_\infty &, \quad t_\infty \leq t \leq 1 \\ \textit{afín} &, \quad \text{otro caso.} \end{cases}$$

Consideremos

$$t_{n,i} := t_n + i(b_n - a_n), \quad n \in \mathbb{N},\ i = 0, \ldots, 2[\![m_n]\!].$$

Cada intervalo $I_n = [t_n, t_{n+1}],\ n \in \mathbb{N}$ se puede escribir como la unión de la familia de intervalos no solapados

$$I_{n,i} := [t_{n.i}, t_{n,i+1}],\ i = 0, \ldots, [\![m_n]\!] - 1, \quad I_{n,2[\![m_n]\!]} := [t_{n,2[\![m_n]\!]}, t_{n+1}].$$

Y la función u es definida en $I_{n,i}$, $i = 0, \dots, 2[\![m_n]\!]$, por:

$$u(t) = t - (t_n + 2i(b_n - a_n)) + a_n, \ \ (t \in I_{n,2i}), \tag{3.17}$$

$$u(t) = t - t_n + (2i+1)(b_n - a_n) + b_n, \ \ (t \in I_{n,2i+1}), \tag{3.18}$$

y

$$u(t) = t - t_{n+1} + a_n, \ \ (t \in I_{n,2[\![m]\!]}). \tag{3.19}$$

En todos estos casos las pendientes de estos segmentos de linea son iguales a 1. Por lo tanto, se tiene que para $n \in \mathbb{N}$, el valor absoluto de la pendiente de los segmentos de linea en este rango son acotados por 1,

$$2^{-n}\frac{|b_n - a_n|}{\kappa^{-1}(b_n - a_n)} \leq 2^{-n}k_n(b_n - a_n) \leq 1 \quad \text{y} \quad 2^{-(n+1)}\frac{a_{n+1} - a_n}{t_n + a_{n+1} - a_n} \leq 1.$$

Así se demuestra que $u \in Lip[0,1]$.

Sea $0 \leq s < t \leq 1$, entonces existen las siguientes posibilidades para la localización de s y t en $[0,1]$.

Caso 1: Si $s, t \in I_n$, $(n \in \mathbb{N})$ están en el mismo intervalo $I_{n,i}$, $i = 0, \dots, , 2[\![m_n]\!]$.

De las relaciones (3.17), (3.18) y (3.19) se sigue que $\dfrac{|u(t) - u(s)|}{|t-s|} = 1$.

Caso 2: Si $s, t \in I_n$, $(n \in \mathbb{N})$ están en dos intervalos diferentes $I_{n,i}$, $i = 0, \dots, 2[\![m_n]\!]$.

Existen varios casos:

a) $s \in I_{n,i}$, $t \in I_{n,j}$, $i < j < 2[\![m_n]\!]$.

a_1) $j = i + 1$. Por el Lema 3.2 y las relaciones (3.17) y (3.18) se tiene que

$$\frac{|u(t) - u(s)|}{|t-s|} \leq \frac{\left|u(t_{n,i+1}) - u(s)\right|}{t_{n,i+1} - s} + \frac{\left|u(t) - u(t_{n,i+1})\right|}{t - t_{n,i+1}} \leq 2.$$

a_2) $j > i + 1$. Entonces

$$\frac{|u(t) - u(s)|}{|t-s|} \leq \frac{b_n - a_n}{t_{n,i+2} - t_{n,,i+1}} = 1.$$

b) $s \in I_{n.i}, t \in I_{n,j}, i < j = 2[\![m_n]\!]$.

Si $j = i + 1$ se procede como a_1).

Si $j > i + 1$, de nuevo haciendo uso del Lema 3.2 y las relaciones (3.17), (3.18) y (3.19) se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{|u(t) - u(s)|}{|t-s|} &\leq \frac{\left|u(t_{n,2[\![m_n]\!]}) - u(s)\right|}{t_{n,2[\![m_n]\!]} - s} + \frac{\left|u(t) - u(t_{n,2[\![m_n]\!]})\right|}{t_{n,2[\![m_n]\!]} - t} \\
&\leq \frac{b_n - a_n}{t_{n,2[\![m_n]\!]} - t_{n,2[\![m_n]\!]-1}} + 1 \\
&\leq 2.
\end{aligned}$$

Caso 3: Si $s \in I_n$, $t \in I_m$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$. Del Lema 3.2 y el segundo caso, se concluye

$$\frac{|u(t)-u(s)|}{t-s} \leq \frac{|u(t_{n+1})-u(s)|}{t_{n+1}-s} + \frac{|u(t)-u(t_m)|}{t-t_m} \leq 4.$$

Caso 4: Si $s \in I_n$, $n \in \mathbb{N}$, $t = t_\infty$. Entonces por el Lema 3.2

$$\begin{aligned}\frac{|u(t_\infty)-u(s)|}{t_\infty - s} &\leq \frac{\left|u(t_{n,i+1})-u(s)\right|}{t_{n,i+1}-s} + \frac{\left|a_\infty - u(t_{n,i+1})\right|}{b_n - a_n} \\ &\leq 1 + \frac{a_\infty - a_n}{b_n - a_n} \\ &\leq 2.\end{aligned}$$

Caso 5: Si $s < t_\infty < t \leq 1$. Por el Lema 3.2 y el Caso 4

$$\frac{|u(t)-u(s)|}{t-s} \leq \frac{|u(t_\infty)-u(s)|}{t_\infty - s} \leq 2.$$

Caso 6: Si $t_\infty \leq s < t \leq 1$. En esta circunstancia $u(s) = u(t) = a_\infty$, por lo tanto, se tiene que

$$|u(t)-u(s)| \leq |t-s|, \quad (s, t \in [0,1]).$$

Así u es Lipschitz en $[0,1]$. Además, para cada partición del intervalo $[0,1]$ de la forma

$$\begin{aligned}\pi: 0 = t_1 &< t_1 + (b_1 - a_1) < \cdots < t_1 + 2[\![m_1]\!](b_1 - a_2) < t_2 \\ &< t_2 + (b_2 - a_2) < \cdots < t_k < \cdots < t_k + 2[\![m_k]\!](b_k - a_k) < 1,\end{aligned}$$

$c > 0$, haciendo uso de la desigualdad (3.13), de la convexidad de la función $t \to t^s$ y la definición de m_n, $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\begin{aligned}\kappa V_\phi(h \circ u; [0,1]) &= \frac{\sum_{n=1}^{k} \left|h \circ u(t_j) - h \circ u(t_{j-1})\right|^{p(x_{j-1})}}{\sum_{n=1}^{k} \kappa(u(t_j) - u(t_{j-1}))} \\ &\geq \frac{\sum_{n=1}^{k} [2[\![m_n]\!]\ |h(b_n) - h(a_n)|]^{p(x_{j-1})}}{\sum_{n=1}^{k} [2[\![m_n]\!]\kappa(b_n - a_n) + \kappa(a_{n+1} - a_n)]} \\ &\geq \frac{\sum_{n=1}^{k} [2[\![m_n]\!]\ k_n|b_n - a_n|]^{p(x_{j-1})}}{\sum_{n=1}^{k} [2[\![m_n]\!]\kappa(b_n - a_n) + \kappa(a_{n+1} - a_n)]} \\ &\geq \frac{\sum_{n=1}^{k} \left[2[\![m_n]\!]\ \frac{|b_n - a_n|}{m_n|b_n - a_n|}\right]^{p(x_{j-1})}}{\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{k_n}} \\ &\geq \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{2[\![m_n]\!]}{m_n}\right)^{p(x_{j-1})} \geq \sum_{n=1}^{k} (1)^{p(x_{j-1})}.\end{aligned}$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (1)^{p(x_{j-1})}$ diverge, $h \circ u \notin \kappa BV_{p(\cdot)}^{W}[0,1]$, lo cual es una contradicción.

$\square$

3.1.4 En el Espacio $\Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$.

En la presente sección, como contribución al tema (Ver [57]), se demostrará que el operador de composición no lineal aplica el espacio de funciones de $\Lambda_{p(\cdot)}$-variación acotada en el sentido de Waterman-Shiba en si mismo si y solo si h es localmente Lipschitz.

Teorema 3.4

Sean Λ una Λ-sucesión y H el operador de composición, generado por $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Entonces H aplica el espacio $\Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$ en si mismo si y solo si h es localmente Lipschitz.

Demostración:

Supongamos sin pérdida de generalizad que $[a,b]=[0,1]$. Sean $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ localmente Lipschitz en $\mathbb{R}$ y $u\in\Lambda_{p(\cdot)}BV[0,1]$. Entonces $V_{\Lambda}^{p(\cdot)}(\lambda u;[0,1])<\infty$ para algún $\lambda>0$. Consideremos la condición de Lipschitzidad local

$$|h(u)-h(v)|\le k(r)|u-v| \quad (u,v\in\mathbb{R},\ |u|,|v|\le\mathbb{R}) \tag{3.20}$$

para $r:=\|u\|_\infty$, para toda partición seleccionada $\pi^*: 0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$ del intervalo $[0,1]$, se obtiene la estimación

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{\lambda}{k(\|u\|_\infty)}\right)^{p(x_{j-1})}\frac{|h(u(t_j))-h(u(t_{j-1}))|^{p(x_{j-1})}}{\lambda_j}\right]\\
&\qquad\le \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{\lambda}{k(\|u\|_\infty)}\right)^{p(x_{j-1})}(k(\|u\|_\infty))^{p(x_{j-1})}\frac{|u(t_j)-u(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}}{\lambda_j}\right]\\
&\qquad= \sum_{j=1}^{n}\frac{\left[\lambda|u(t_j)-u(t_{j-1})|\right]^{p(x_{j-1})}}{\lambda_j}\\
&\qquad\le V_{\Lambda}^{p(\cdot)}(\lambda u,[0,1])<\infty.
\end{aligned}$$

Esto demuestra que si $\mu:=\dfrac{\lambda}{k(\|u\|_\infty)}$ entonces $V_{\Lambda}^{p(\cdot)}(\mu Hu,[0,1])<\infty$ y por lo tanto se satisface que $Hu\in\Lambda_{p(\cdot)}BV[0,1]$.

Para la implicación inversa, supongamos que h no satisface la condición de Lipschitzidad local (3.20), de esta manera, para toda sucesión creciente de números reales positivos $\{k_j\}_{j\ge1}$ que converge al infinito, que se definirá luego, seleccionemos sucesiones $\{u_j\}_{j\ge1}$, $\{v_j\}_{j\ge1}$, con $\delta_j: v_j-u_j<\frac{1}{k_j}$ y

$$|h(v_j)-h(u_j)|>k_j|v_j-u_j| \quad (j\in\mathbb{N},\ u_j<v_j). \tag{3.21}$$

Consideremos subsucesiones si es necesario, se puede asumir que la sucesión $\{u_j\}_{j\ge1}$ es monótona. Supongamos, sin pérdida de generalidad que la sucesión $\{u_j\}_{j\ge1}$ es creciente. Como $[0,1]$ es compacto, de la desigualdad (3.21) se tiene que, existen subsucesiones de $\{u_j\}_{j\ge1}$ y $\{v_j\}_{j\ge1}$ que se denotarán de la misma manera, que convergen a $u_\infty\in[0,1]$. Como la sucesión $\{u_j\}_{j\ge1}$ es una sucesión de Cauchy, asumamos que $u_\infty\in[-r,r]$ tal que $|u_j-u_\infty|\le\frac{1}{2k_j}$ para todo j y así $|u_j-u_{j+1}|\le\frac{1}{k_j}$. Escojamos $n_j:=\frac{1}{k_j\delta_j}$.

Sea $\{t_k\}_{k\geq 1}$ la sucesión definida recursivamente por

$$t_1 := 0, \;\; t_{k+1} := t_k + |u_{k+1} - u_k| + 2n_k\delta_k.$$

Esta sucesión es estrictamente creciente y

$$\begin{aligned} t_j \to t_\infty &:= \sum_{j=1}^{\infty}(t_{j+1}-t_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}|u_{j+1}-u_j| + 2\sum_{j=1}^{\infty} n_j\delta_j \\ &\leq 3\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{k_j}. \end{aligned}$$

Así, para asegurar que $t_\infty \in [0,1]$ es suficiente suponer que $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{k_j} \leq \frac{1}{3}$. Definamos la función zig-zag continua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, por

$$f(t) := \begin{cases} u_j & , \quad t = t_j + 2i(v_j - u_j),\; i = 0,\ldots,[\![n_j]\!]. \\ v_j & , \quad t = t_j + (2i+1)(v_j - u_j),\; i = 0,\ldots,[\![n_j]\!]-1. \\ u_\infty & , \quad t_\infty \leq t \leq 1. \\ \textit{afín} & , \quad \text{otro caso.} \end{cases}$$

Definamos $t_{j,i} := t_j + i(v_j - u_j), \quad j \in \mathbb{N},\, i = 0,\ldots,2[\![n_j]\!]$. Cada intervalo $I_j = [t_j, t_{j+1}],\; j \in \mathbb{N}$, puede ser expresada como la unión de una familia de uniones no solapadas

$$I_{j,i} := [t_{j,i}, t_{j,i+1}], \;\; I_{j,2[\![n_j]\!]} := [t_{j,2[\![n_j]\!]}, t_{j+1}] \;\; (i = 0,\ldots,[\![n_j]\!]-1).$$

La función f es definida en $I_{j,i},\; i = 0,\ldots,2[\![n_j]\!]$ como sigue

$$\begin{aligned} f(t) &= \quad t - (t_j + 2i(v_j - u_j)) + u_j \qquad (t \in I_{j,2i}) \\ f(t) &= \quad t - t_j + (2i+1)(v_j - u_j) + v_j \qquad (t \in I_{j,2i+1}) \\ f(t) &= \quad t - t_{j+1} + u_j \qquad (t \in I_{j,2[\![n_j]\!]}) \end{aligned}$$

Sea $0 \leq s < t \leq 1$, entonces las posibilidades para la localización de s y t en $[0,1]$ son las siguientes:

Caso 1. Si $s, t \in I_j$, $(j \in \mathbb{N})$ están en el mismo intervalo $I_{j,i},\; i = 0,...,2[\![n_j]\!]$.

$$V_\Lambda^{p(\cdot)}(f,[s,t]) \leq \frac{|f(t)-f(s)|^{p(x_{ts})}}{\lambda_1} = \frac{|t-s|^{p(x_{ts})}}{\lambda_1} \leq \infty.$$

Caso 2. Si $s, t \in I_j$, $(j \in \mathbb{N})$ están en dos intervalos diferentes $I_{j,i},\; i = 0,...,2[\![n_j]\!]$. $s \in I_{j,i},\; t \in I_{j,k},\; i < k < 2[\![n_j]\!]$.

$$\begin{aligned} V_\Lambda^{p(\cdot)}(f,[s,t]) &\leq 2^{p^+-1}\left(\frac{\left|f(t_{j,i+1}) - f(s)\right|^{p(x_{(j,i+1)s})}}{\lambda_1} + \frac{\left|f(t) - f(t_{j,i+1})\right|^{p(x_{t(j,i+1)})}}{\lambda_1}\right) \\ &\leq 2^{p^+-1}\left(\frac{\left|u_j - v_j\right|^{p(x_{(j,i+1)s})}}{\lambda_1} + \frac{\left|u_j - v_j\right|^{p(x_{t(j,i+1)})}}{\lambda_1}\right) \\ &\leq 2^{p^+}\text{máx}\left\{\frac{\left|u_j - v_j\right|^{p(x_{(j,i+1)s})}}{\lambda_1}, \frac{\left|u_j - v_j\right|^{p(x_{t(j,i+1)})}}{\lambda_1}\right\} \\ &\leq 2^{p^+}\text{máx}\left\{\frac{\left|\delta_j\right|^{p(x_{(j,i+1)s})}}{\lambda_1}, \frac{\left|\delta_j\right|^{p(x_{t(j,i+1)})}}{\lambda_1}\right\} < \infty. \end{aligned}$$

Caso 3. Si $s \in I_j$, $t \in I_k$, $k, j \in \mathbb{N}$, $j < k$.

$$\begin{aligned}
V_{\Lambda}^{p(\cdot)}(f,[s,t]) &\leq 2^{p^+-1}\left(\frac{\left|f(t_{j,2[\![n_j]\!]+1})-f(s)\right|^{p(x_{(j,2[\![n_j]\!]+1)s})}}{\lambda_1}+\frac{\left|f(t)-f(t_{j,i+1})\right|^{p(x_{t(j,i+1)})}}{\lambda_1}\right)\\
&\leq 2^{p^+-1}\left(\frac{\left|u_j-v_j\right|^{p(x_{(j,2[\![n_j]\!]+1)s})}}{\lambda_1}+\frac{\left|u_j-v_j\right|^{p(x_{t(j,i+1)})}}{\lambda_1}\right)\\
&\leq 2^{p^+}\text{máx}\left\{\frac{\left|\delta_j\right|^{p(x_{(j,2[\![n_j]\!]+1)s})}}{\lambda_1},\frac{\left|\delta_j\right|^{p(x_{t(j,i+1)})}}{\lambda_1}\right\}<\infty.
\end{aligned}$$

Caso 4. Si $s \in I_j$, $j \in \mathbb{N}$, $t = t_\infty$.

$$\begin{aligned}
V_{\Lambda}^{p(\cdot)}(f,[s,t]) &\leq 2^{p^+-1}\left(\frac{\left|f(t_{j,i+1})-f(s)\right|^{p(x_{(j,i+1)s})}}{\lambda_1}+\frac{\left|f(t_\infty)-f(t_{j,i+1})\right|^{p(x_{\infty(j,i+1)})}}{\lambda_1}\right)\\
&\leq 2^{p^+-1}\left(\frac{\left|u_j-v_j\right|^{p(x_{(j,i+1)s})}}{\lambda_1}+\frac{\left|u_\infty-u_j\right|^{p(x_{\infty(j,i+1)})}}{\lambda_1}\right)\\
&\leq 2^{p^+}\text{máx}\left\{\frac{\left|\delta_j\right|^{p(x_{(j,i+1)s})}}{\lambda_1},\frac{\left|\delta_j\right|^{p(x_{\infty(j,i+1)})}}{\lambda_1}\right\}<\infty.
\end{aligned}$$

Caso 5. Si $s < t_\infty < t \leq 1$.

$$\begin{aligned}
V_{\Lambda}^{p(\cdot)}(f,[s,t]) &\leq 2^{p^+-1}\left(\frac{\left|f(t_\infty)-f(s)\right|^{p(x_{\infty s})}}{\lambda_1}+\frac{\left|f(t_\infty)-f(t)\right|^{p(x_{\infty t})}}{\lambda_1}\right)\\
&\leq 2^{p^+-1}\left(\frac{\left|u_\infty-v_j\right|^{p(x_{\infty s})}}{\lambda_1}+\frac{\left|u_\infty-u_j\right|^{p(x_{\infty t})}}{\lambda_1}\right)\\
&\leq 2^{p^+}\text{máx}\left\{\frac{\left|\delta_j\right|^{p(x_{\infty s})}}{\lambda_1},\frac{\left|\delta_j\right|^{p(x_{\infty t})}}{\lambda_1}\right\}<\infty.
\end{aligned}$$

Caso 6: Si $t_\infty \leq s < t \leq 1$.

En esta circunstancia $f(s) = f(t) = f_\infty$ y el resultado es inmediato.

Así $f \in \Lambda_{p(\cdot)}BV[0,1]$, para cada partición del intervalo $[0,1]$ de la forma

$$\pi : 0 = t_1 < t_1+(v_1-u_1) < \cdots < t_1+2[\![n_1]\!](v_1-u_2) < t_2 < t_2+(v_2-u_2) < \cdots < t_k < \cdots < t_k+2[\![n_k]\!](v_k-u_k) < 1$$

además, haciendo uso de la desigualdad (3.21) y la definición de n_j, $j \in \mathbb{N}$, se obtiene

$$\begin{aligned}
V_{\Lambda}^{p(\cdot)}((h\circ f),[0,1]) &= \sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{n}\frac{(h\circ f(t_j)-h\circ f(t_{j-1}))^{p(x_{j-1})}}{\lambda_j}\\
&= \sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{n}\frac{(h(f(t_j))-h(f(t_{j-1})))^{p(x_{j-1})}}{\lambda_j}\\
&\geq \sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{n}\frac{(2[\![n_j]\!](h(v_j)-h(u_j)))^{p(x_{j-1})}}{\lambda_j}\\
&\geq \sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{n}\frac{(2[\![n_j]\!]k_j|v_j-u_j|)^{p(x_{j-1})}}{\lambda_j}\\
&\geq \sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{n}\frac{\left(2[\![n_j]\!]\dfrac{|v_j-u_j|}{n_j|v_j-u_j|}\right)^{p(x_{j-1})}}{\lambda_j}\\
&\geq \sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{n}\frac{(1)^{p(x_{j-1})}}{\lambda_j}\\
&\geq \sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\lambda_j}.
\end{aligned}$$

Como la serie $\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\lambda_j}$ diverge, $h\circ f\notin \Lambda_{p(\cdot)}BV[0,1]$, el cual es una contradicción.

□

3.2 Operador de Composición Uniformemente Acotado

Cuando se quiere demostrar la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales, integrales o funcionales en espacios de funciones, muchas veces se aplica el llamado Principio de Contracción de Banach-Caccioppoli (Ver [92]-[97]) a los operadores asociados a tales ecuaciones. En general, uno de los operadores involucrados es el operador de composición asociado a una función $h:[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. En este caso, la condición de contracción se convierte en una condición de Lipschitzidad global para este operador. J. Matkowski (1982) en [97] demostró que el método de Banach-Caccioppoli no puede ser aplicado en el espacio $Lip[a,b]$, para hallar soluciones a ecuaciones no lineales donde aparezca explícitamente el operador de composición. Más precisamente, J. Matkowski demostró que el operador de composición H, generado por $h:[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, actúa y es globalmente Lipschitz en el espacio $Lip[a,b]$ si y solo si la función h tiene la forma

$$h(t,x)=\alpha(t)x+\beta(t)\quad (t\in[a,b],\ x\in\mathbb{R}), \tag{3.22}$$

donde las funciones $\alpha,\beta\in Lip[a,b]$.

Además del espacio $Lip[a,b]$, existe una variedad de espacios que verifican este resultado (Ver [4]). Los espacios de Banach $(\mathbb{X},\|\cdot\|)$ que satisfacen esta propiedad se dice que satisfacen la *Condición de Matkowski* (Ver [5]). J. Matkowski y sus alumnos han demostrado la validez de este resultado en otros espacios, como por ejemplo:

- J. Matkowski (1984), en [98], para el espacio $C^n[a,b]$ de las funciones n-veces continuamente diferenciables.

- A. Matkowska (1984), en [93], para el espacio $H_\alpha[a,b]$ de las funciones Hölderianas en $[a,b]$ de orden $0<\alpha<1$.

- J. Matkowski y J. Miś (1984), en [105], para el espacio $BV[a,b]$ de las funciones de variación acotada en $[a,b]$ y concluyen que la ecuación (3.22) es válida para la regularización izquierda h^- de la función h con respecto a la primera variable, es decir,

  $$h^-(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t), \quad t \in [a,b],\ x \in \mathbb{R},$$

  donde $\alpha, \beta \in BV^-[a,b]$. Los espacios que satisfacen esta condición se dice que verifica la *Condición débil de Matkowski* (Ver [5]).

- M. Lupa (1989), en [89], para el espacio $H_\alpha C^n[a,b]$ de las funciones con n-ésima derivada Hölderiana en $[a,b]$ de orden α, con $0<\alpha<1$.

- A. Sieczko (1989), en [160], para el espacio $AC^n[a,b]$ de las funciones con n-ésima derivada absolutamente continua en $[a,b]$.

- J. Knop (1990), en [77], para el espacio $LipC^n[a,b]$ de las funciones con n-ésima derivada Lipschitziana en $[a,b]$.

En 1991, N. Merentes (Ver [116]), obtuvo el resultado de J. Matkowski para el espacio $RV_\varphi[a,b]$ de las funciones de φ-variación acotada en el sentido de Riesz y en investigaciones conjuntas con J. Matkowski, obtienen los siguientes resultados:

- J. Matkowski y N. Merentes (1993), en [103], para el espacio $RV_{(p,2)}[a,b]$ de las funciones de $(p,2)$-variación acotada en $[a,b]$.

- J. Matkowski y N. Merentes (1993), en [104], para el espacio $W_p^n[a,b]$ de Sobolev unidimensional de orden $n \in \mathbb{N}$.

- A. Matkowska, J. Matkowski y N. Merentes (1994), en [94], para el espacio $C^n[a,b]$ de las funciones n-veces continuamente diferenciable.

En este último resultado se utiliza una técnica de inmersiones entre espacios de funciones, que permite evitar la llamada regla de la cadena para derivadas de orden superior, con lo cual se obtiene una demostración más didáctica y sencilla. En estos resultados el operador de composición H actúa de un espacio en sí mismo, sin embargo, en muchos casos, es interesante estudiar la conducta de este operador entre espacios distintos. En este sentido, N. Merentes y S. Rivas (1995), en [120], verificaron la validez del resultado de J. Matkowski cuando el operador actúa entre los espacios $RV_p[a,b]$ $(1<p<\infty)$ y $BV[a,b]$. Por lo tanto la condición de Lipschitzidad global para el operador de composición H conlleva a que el operador sea afín en la segunda variable en el espacio.

En el año 2010, J. Matkowski sustituye la condición de lipschitzidad global en el operador de composición por la condición de continuidad uniforme (Ver Definición 1 de [99], [100]) obteniendo los mismos resultados que fueron comentados anteriormente, algunos de ellos presentados en los siguientes trabajos:

- A. Azócar, A. Guerrero, J. Matkowski, N. Merentes (2010), en [16] *Uniformly continuous set-valued composition operators in the space of continuous functions of bounded variation in the sense of Wiener.*

- A. Guerrero, H. Leiva, J. Matkowski, N. Merentes (2010), en [62] *Uniformly continuous composition operators in the space of bounded φ-variation functions.*

- J. Matkowski (2010), en [101] *Uniformly continuous superposition operators in the space of bounded variation functions.*

- J. Matkowski (2009), en [100] *Uniformly continuous superposition operators in the Banach space of Hölder functions.*

J. Matkowski (2011), en [96] introduce la noción de operador uniformemente acotado y demuestra que el generador de todo operador de composición uniformemente acotado que actúa entre espacios normados de funciones Lipschitz es una función afín con respecto a la segunda variable.

Definición 3.1

Sea $\mathbb{Y}$ y $\mathbb{Z}$ dos espacios métricos (o normados). Se dice que la aplicación $H : \mathbb{Y} \to \mathbb{Z}$ es *uniformemente acotada* si para todo $t > 0$, existe un número real no negativo $\gamma(t)$ tal que para todo conjunto no vacío $B \subset \mathbb{Y}$ se tiene

$$diam B \leq t \Rightarrow diam H(B) \leq \gamma(t).$$

N Todo operador uniformemente continuo o Lipschitziano es uniformemente acotado.

A continuación se muestran algunos resultados bajo esta condición

- F. Armao, D. Głazowska, S. Rivas, J. Rojas (Ver [10]) en el año 2012 lo demuestran en el espacio $RV_{(p,k)}[a,b]$, con $(1 < p < \infty)$.

- M. Wrobel (Ver [181]) en el año 2012 lo demuestra en el espacio de las funciones de variación acotada n-ésima.

- D. Glazowska, Z. Jesús, J. Matkowski, O. Mejía (Ver [58]) en el año 2013 lo demuestran en el espacio $RV_{(\varphi,k)}[a,b]$.

En esta sección, como contribución al tema, relacionado con la condición de Matkowski (Ver [72], [111], [112]), se demostrará este resultado entre los siguientes espacios.

- $Lip[a,b]$ y $\kappa BV[a,b]$ ó $\kappa BV_\phi[a,b]$.
- $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$.
- $\kappa BV^W_{p(\cdot)}[a,b]$.
- $\Lambda_{p(\cdot)} BV[a,b]$.
- $BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$.

Para este fín, definamos la regularización por la izquierda y por la derecha de una función $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, como sigue:

Definición 3.2

Sean $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función, la regularización izquierda $u^- : (a,b] \to \mathbb{R}$ de la función u es la función dada por

$$u^-(t) := \begin{cases} \lim\limits_{s \to t^-} u(s) & t \in (a,b]; \\ u(a) & t = a. \end{cases}$$

Definición 3.3

Sea $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función, la regularización derecha $u^+ : [a,b) \to \mathbb{R}$ de la función u es la función dada por

$$u^+(t) := \begin{cases} \lim\limits_{s \to t^+} u(s) & t \in [a,b); \\ u(b) & t = b. \end{cases}$$

3.2.1 En el Espacio $\kappa BV_\phi[a,b]$.

En esta sección se presentarán resultados de la condición de Matkowski orientados al espacio $\kappa BV_\phi[a,b]$.

Teorema 3.5

Sea $\kappa : [0,1] \to [0,1]$ una función distorsión, $\phi = \{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ una ϕ-sucesión y $h : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que la función $h(t,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua con respecto a la segunda variable, para cada $t \in (a,b]$. Si el operador de composición H, generado por la función h, aplica $\kappa BV_\phi[a,b]$ en sí mismo y satisface la desigualdad

$$\|H(u) - H(v)\|_{\kappa\phi} \leq \gamma\left(\|u - v\|_{\kappa\phi}\right), \quad (u, v \in \kappa BV_\phi[a,b]), \tag{3.23}$$

entonces existe $\alpha, \beta \in \kappa BV_\phi^-[a,b]$, tal que

$$h^-(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t), \quad (t \in [a,b], x \in \mathbb{R}).$$

Demostración:

Para cada $x \in \mathbb{R}$ fijo, la función $u(t) = x$, $t \in [a,b]$ está en $\kappa BV_\phi[a,b]$, entonces $H(u) = h(\cdot,x) \in \kappa BV_\phi[a,b]$. Por lo tanto existe la regularización izquierda $h^-(\cdot,x)$. De la desigualdad (3.23) y el Lema 1.13, se tiene

$$\kappa V_\phi\left(\frac{H(u) - H(v)}{\gamma\left(\|u - v\|_{\kappa\phi}\right)}\right) < 1, \quad (u, v \in \kappa BV_\phi[a,b]). \tag{3.24}$$

Sea $a < r < a_1 < b_1 < a_2 < \cdots < a_m < b_m = s < b$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$ y considerándose las funciones zig-zag continuas $u_k : [a,b] \to \mathbb{R}$, $k = 1,2$, las cuales se definen de la siguiente manera

$$u_k(t) = \begin{cases} \dfrac{x_k + x_2}{2} & , \quad a \le t \le a_1 \;\text{ ó }\; t = a_i,\ i = 1,\dots,m \\ \dfrac{x_k + x_1}{2} & , \quad b_m \le t \le b \;\text{ ó }\; t = b_i,\ i = 1.\dots,m \\ \textit{afín} & , \qquad \text{otro caso.} \end{cases} \quad , \; k = 1,2.$$

Entonces las funciones $u_k,\ k = 1,2$ son Lipschitz y además pertenecen a $\kappa BV_\phi[a,b]$. De la definición de u_k resulta

$$(u_1 - u_2)(t) = \frac{x_1 - x_2}{2}, \quad (t \in [a,b]).$$

De la desigualdad (3.24) y la definición de $k\phi$-variación, se tiene

$$\frac{\sum_{n=1}^{m} \varphi_n \left(\dfrac{|h(b_n, u_1(b_n)) - h(b_n, u_2(b_n)) - h(a_n, u_1(a_n)) + h(a_n, u_2(a_n))|}{\gamma\left(\|u_1 - u_2\|_{\kappa\phi}\right)} \right)}{\kappa\left(\dfrac{a_1 - a}{b-a}\right) + \sum_{n=1}^{m} \kappa\left(\dfrac{b_n - a_n}{b-a}\right) + \sum_{n=1}^{m-1} \kappa\left(\dfrac{a_{n+1} - b_n}{b-a}\right) + \kappa\left(\dfrac{b - b_m}{b-a}\right)} \le 1.$$

Así, por la construcción de la función $u_k,\ k = 1,2$, resulta que

$$u_1(a_n) = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad u_1(b_n) = \frac{x_1 + x_1}{2} = x_1$$

$$u_2(a_n) = \frac{x_2 + x_2}{2} = x_2, \quad u_2(b_n) = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

por lo tanto

$$\frac{\sum_{n=1}^{m} \varphi_n \left(\dfrac{2h(b_n, x_1) - h(b_n, \frac{x_1+x_2}{2}) - h(a_n, \frac{x_1+x_2}{2}) + h(a_n, x_2)}{\gamma\left(2^{-1}|x_1 - x_2|\right)} \right)}{\kappa\left(\dfrac{a_1 - a}{b-a}\right) + \sum_{n=1}^{m} \kappa\left(\dfrac{b_n - a_n}{b-a}\right) + \sum_{n=1}^{m-1} \kappa\left(\dfrac{a_{n+1} - b_n}{b-a}\right) + \kappa\left(\dfrac{b - b_m}{b-a}\right)} \le 1,$$

Consideremos el límite cuando r tiende a s en la desigualdad anterior, así

$$\sum_{n=1}^{m} \varphi_n \left(\frac{\left| h^-(s, x_1) - 2h^-\left(s, \dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) + h^-(s, x_2) \right|}{\gamma\left(2^{-1}|x_1 - x_2|\right)} \right) \le \kappa\left(\frac{s-a}{b-a}\right) + \kappa\left(\frac{b-s}{b-a}\right), \quad (s \in (a,b]).$$

considerando el límite cuando $m \to \infty$, se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \left(\frac{\left| h^-(s, x_1) - 2h^-(s, \frac{x_1+x_2}{2}) + h^-(s, x_2) \right|}{\gamma\left(2^{-1}|x_1 - x_2|\right)} \right) \le \kappa\left(\frac{s-a}{b-a}\right) + \kappa\left(\frac{b-s}{b-a}\right), \quad (s \in (a,b]).$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ es divergente para cada $x > 0$, necesariamente

$$\left| h^-(s, x_1) - 2h^-(s, \frac{x_1 + x_2}{2}) + h^-(s, x_2) \right| = 0, \quad (s \in (a,b]).$$

Así se concluye que $h^{-}(s,\cdot)$ satisface la ecuación de Jensen en $\mathbb{R}$ (Ver [83], p.315). La continuidad de h con respecto a la segunda variable implica que para todo $t\in[a,b]$ existe $\alpha,\beta:[a,b]\to\mathbb{R}$, tal que

$$h^{-}(t,x)=\alpha(t)x+\beta(t),\quad (t\in[a,b],\ x\in\mathbb{R}).$$

Si $x=0$ se tiene que $\beta(t)=h^{-}(t,0)$, $t\in[a,b]$, y si $x=1$ entonces $\alpha(t)=h^{-}(t,1)-\beta(t)$, como $h^{-}(\cdot,x)\in\kappa BV_{\phi}^{-}$ para cada $x\in\mathbb{R}$, se obtiene que $\alpha,\beta\in\kappa BV_{\phi}[a,b]$.

□

Corolario 3.3
Sean $\kappa:[0,1]\to[0,1]$ una función distorsión, $\phi=\{\varphi_n\}_{n\geq1}$ una ϕ-sucesión y $h:[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Si el operador de composición H, generado por la función h aplica $\kappa BV_{\phi}[a,b]$ en sí mismo y satisface la desigualdad

$$\|H(u)-H(v)\|_{\kappa\phi}\leq\gamma\left(\|u-v\|_{\kappa\phi}\right),\quad (u,v\in\kappa BV_{\phi}[a,b]),\tag{3.25}$$

para toda función $\gamma:[0,\infty)\to[0,\infty)$, que verifica que $\gamma(t)\to\gamma(0)=0$, cuando $t\downarrow0$. Entonces existen $\alpha,\beta\in\kappa BV_{\phi}^{-}[a,b]$, tal que

$$h^{-}(t,x)=\alpha(t)x+\beta(t),\quad (t\in[a,b],\ x\in\mathbb{R}).$$

Demostración:

Sean $x,y\in\mathbb{R}$, $x\neq y$ fijos y definamos $u(t):=x$, $v(t):=y$, $t\in[a,b]$. Entonces $u,v\in\kappa BV_{\phi}[a,b]$ y $\|u-v\|_{\kappa\phi}=\left|x-y\right|$. Entonces de la desigualdad (3.25) y del Lema 1.13, se tiene

$$\varphi_1\left(\frac{\left|h(t,x)-h(t,y)-h(a,x)+h(a,y)\right|}{\gamma\left(\left|x-y\right|\right)}\right)\leq\kappa\left(\frac{t-a}{b-a}\right)+\kappa\left(\frac{b-t}{b-a}\right),\quad (t\in(a,b]).$$

Así

$$\left|h(t,x)-h(t,y)-h(a,x)+h(a,y)\right|\leq\varphi_1^{-1}(2)\,\gamma\left(\left|x-y\right|\right).$$

Procediendo como en la demostración del Teorema 3.5 se tiene que existe la función regularización izquierda $h^{-}(\cdot,x)$, para cada $x\in\mathbb{R}$; y si

$$a\leq r<a_1<b_1<a_2<\cdots<a_m<b_m=s\leq b\,,\ x,y\in\mathbb{R},\ x\neq y$$

definamos las funciones zig-zag continuas $u,v:[a,b]\to\mathbb{R}$, por

$$u(t)=\begin{cases} x & , \quad a\leq t\leq a_1 \ \text{ ó } \ t=a_i, i=1,\ldots,m\\ y & , \quad b_m\leq t\leq b \ \text{ ó } \ t=b_i, i=1.\ldots,m \\ \textit{afín} & , \qquad\qquad \text{otro caso}\end{cases},$$

$$u(t)=\begin{cases} y & , \quad a\leq t\leq a_1 \ \text{ ó } \ t=a_i, i=1,\ldots,m\\ x & , \quad b_m\leq t\leq b \ \text{ ó } \ t=b_i, i=1.\ldots,m \\ \textit{afín} & , \qquad\qquad \text{otro caso}\end{cases}$$

entonces $u, v \in \kappa BV_\phi[a,b]$, $(u-v)(t) = x-y,\ t \in [a,b]$ y para $s \in (a,b]$

$$\begin{aligned}\varphi_m\left(\frac{2\left|h^-(s,x)-h^-(s,y)\right|}{\gamma\left(\left|x-y\right|\right)}\right) &\leq \sum_{n=1}^{m}\varphi_n\left(\frac{2\left|h^-(s,x)-h^-(s,y)\right|}{\gamma\left(\left|x-y\right|\right)}\right)\\ &\leq \kappa\left(\frac{s-a}{b-a}\right)+\kappa\left(\frac{b-s}{b-a}\right)\\ &\leq 2\end{aligned}$$

despejando

$$\left|h^-(s,x)-h^-(s,y)\right| \leq \frac{\overset{-1}{\varphi_m}(2)}{2}\gamma\left(\left|x-y\right|\right), \quad (s \in (a,b]).$$

Así, $h^-(\cdot,x)$ es continua en $(a,b]$. Ahora el resultado es una consecuencia del Teorema 3.5.

□

Corolario 3.4
Sean $\kappa : [0,1] \to [0,1]$ una función distorsión, $\phi = \{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ una ϕ-sucesión, $h : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y H el operador de composición generado por la función h. Supongamos que H aplica $\kappa BV_\phi[a,b]$ en sí mismo y es uniformemente continuo, entonces existe $\alpha, \beta \in \kappa BV_\phi^-[a,b]$, tal que

$$h^-(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t), \quad (t \in [a,b],\ x \in \mathbb{R}),$$

donde $h^-(\cdot,x)$ es la regularización izquierda de $h(\cdot,x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración:

Consideremos el módulo de continuidad asociado a H, es decir

$$\gamma(t) := sup\left\{\|H(u)-H(v)\|_{\kappa\phi} : \|u-v\|_{\kappa\phi} \leq t,\ u, v \in \kappa BV_\phi[a,b]\right\}, \quad (t \geq 0).$$

Entonces $\gamma(t) \geq 0$, $\gamma(0) = 0$. Por lo tanto, si $t > 0$ y $\|u-v\|_{\kappa\phi} \leq t$, se obtiene

$$\|H(u)-H(v)\|_{\kappa\phi} \leq \gamma(t).$$

Particularmente, en casos donde $t = \|u-v\|_{\kappa\phi}$, se tiene

$$\|H(u)-H(v)\|_{\kappa\phi} \leq \gamma\left(\|u-v\|_{\kappa v}\right), \quad (u, v \in \kappa BV_\phi[a,b]).$$

Del Corolario 3.3 se obtiene la conclusión.

□

Corolario 3.5
Sean $\kappa : [0,1] \to [0,1]$ una función distorsión, $\phi = \{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ una ϕ-sucesión y $h : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que la función $h(t,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua con respecto a la segunda variable, para cada $t \in (a,b]$. Si el operador de composición H, generado por la función h, aplica $\kappa BV_\phi[a,b]$ en sí mismo y es uniformemente acotado, entonces existen $\alpha, \beta \in \kappa BV_\phi^-[a,b]$, tal que

$$h^-(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t), \quad (t \in [a,b],\ x \in \mathbb{R}).$$

Demostración:

Para todo $t > 0$ y $u, v \in \kappa BV_\phi[a,b]$ tal que $\|u - v\|_{\kappa\phi} \leq t$. Como $diam\,\{u,v\} \leq t$, por la acotación uniforme de H, se tiene $diam\,H(\{u,v\}) \leq \gamma(t)$, es decir,

$$\|H(u) - H(v)\|_{\kappa\phi} = diam\,H(\{u,v\}) \leq \gamma\left(\|u - v\|_{\kappa\phi}\right).$$

Por el Teorema 3.5 se obtiene que la función $h^-(t,x)$ es afín con respecto a la segunda variable.

□

3.2.2 En el Espacio $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$.

En esta sección, se muestra que si el operador de composición es uniformemente acotado y aplica el espacio $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ en sí mismo, necesariamente satisface la condición débil de Matkowski.

Se denota por $WBV_{p(\cdot)}^-[a,b]$ un subconjunto de $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ el cual consiste en aquellas funciones continuas en $(a,b]$ (La regularización izquierda).

Lema 3.7
Si $u \in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$, entonces $u^- \in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$.

Es decir, si una función u tiene variación Wiener con exponente variable, entonces la regularización es una función continua por la izquierda.

Teorema 3.6
Si el operador de composición H, generado por la función $h : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, aplica $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ en sí mismo y satisface la siguiente desigualdad

$$||Hf_1 - Hf_2||_{p(\cdot)}^W \leq \gamma\left(||f_1 - f_2||_{p(\cdot)}^W\right) \quad (f_1, f_2 \in WBV_{p(\cdot)}^-[a,b]), \tag{3.26}$$

para alguna función $\gamma : [0,\infty) \to [0,\infty)$. Entonces, existen funciones $\alpha, \beta \in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ tal que

$$h^-(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t), \ \ t \in [a,b],\ x \in \mathbb{R},$$

donde $h^-(\cdot,x) : (a,b] \to \mathbb{R}$ es la regularización izquierda de $h(\cdot,x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración:

Por hipótesis, para $x \in \mathbb{R}$ fijo la función constante $f(t) = x, \quad t \in [a,b]$ pertenece a $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$. Como H aplica $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ en sí mismo, se tiene $(Hf)(t) = h(t, f(t)) \in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$. Por el Lema 3.7 la regularización izquierda $h^-(\cdot, x) \in WBV^-_{p(\cdot)}[a,b]$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por la desigualdad (3.26) y la definición de la norma $||\cdot||^W_{p(\cdot)}$ para $f_1, f_2 \in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ se obtiene

$$\begin{aligned} \mu_{p(\cdot)}(H(f_1) - H(f_2)) &\leq ||H(f_1) - H(f_2)||^W_{p(\cdot)} \\ &\leq \gamma\left(||f_1 - f_2||^W_{p(\cdot)}\right). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Por la desigualdad (3.27) y el Lema 3.7, si $\gamma\left(||f_1 - f_2||^W_{p(\cdot)}\right) > 0$ entonces

$$V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{H(f_1) - H(f_2)}{\gamma(||f_1 - f_2||^W_{p(\cdot)})}\right) \leq 1. \tag{3.28}$$

Sea $a \leq s < t \leq b$, y $\pi_m := \{t_0, t_1, ..., t_{2m}\} \in \pi$ una partición equidistante definida por

$$t_0 = s, \;\; t_j - t_{j-1} = \frac{t-s}{2m} \quad (j = 1, 2, ..., 2m).$$

Sea $u, v \in \mathbb{R}$ con $u \neq v$, definamos $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$f_1(x) := \begin{cases} v, & \text{si } x = t_j \;\; \text{para algún par } j, \\ \frac{u+v}{2}, & \text{si } x = t_j \;\; \text{para algún impar } j, \\ lineal, & \text{otro caso} \end{cases}$$

y

$$f_2(x) := \begin{cases} \frac{u+v}{2}, & \text{si } x = t_j \;\; \text{para algún par } j, \\ u, & \text{si } x = t_j \;\; \text{para algún impar } j, \\ lineal, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Entonces la diferencia $f_1 - f_2$ satisface

$$|f_1(x) - f_2(x)| \equiv \frac{|u-v|}{2} \quad (a \leq x \leq b).$$

Por la desigualdad (3.26)

$$\begin{aligned} ||Hf_1 - Hf_2||^W_{p(\cdot)} &\leq \gamma\left(||f_1 - f_2||^W_{p(\cdot)}\right) \\ &\leq \gamma\left(\frac{|u-v|}{2}\right). \end{aligned}$$

Por la desigualdad (3.28) y la definición de $p(\cdot)$-variación en el sentido de Wiener con exponente variable se tiene

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{|(h^- \circ f_1)(t_{2j}) - (h^- \circ f_2)(t_{2j}) - (h^- \circ f_1)(t_{2j-1}) + (h^- \circ f_2)(t_{2j-1})|}{\gamma(2^{-1}|u-v|)}\right)^{p(x_{j-1})} \leq 1.$$

Sin embargo, por la definición de las funciones f_1 y f_2,

$$\begin{aligned} &|(h^- \circ f_1)(t_{2j}) - (h^- \circ f_2)(t_{2j}) - (h^- \circ f_1)(t_{2j-1}) + (h^- \circ f_2)(t_{2j-1})| \\ &= \left|h^-(s,v) - h^-\left(s, \frac{u+v}{2}\right) - h^-\left(s, \frac{u+v}{2}\right) + h^-(s,u)\right| \\ &= \left|h^-(s,v) - 2h^-\left(s, \frac{u+v}{2}\right) + h^-(s,u)\right|. \end{aligned}$$

Entonces
$$\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{|h^-(s,v)-2h^-\left(s,\frac{u+v}{2}\right)+h^-(s,u)|}{\gamma(2^{-1}|u-v|)}\right)^{p(x_{j-1})}\leq 1.$$
Como $1\leq p(x_{j-1})<\infty$ para todo $j=1,2,\ldots,2m$ y considerando el límite cuando $m\to\infty$, necesariamente
$$h^-(s,v)-2h^-\left(s,\frac{u+v}{2}\right)+h^-(s,u)=0.$$
Así se concluye que $h^-(s,\cdot)$ satisface la ecuación de Jensen en $\mathbb{R}$ (Ver [83], pág 315). La continuidad de h^- con respecto a la segunda variable implica que para todo $t\in[a,b]$ existe $\alpha,\beta:[a,b]\to\mathbb{R}$ tal que
$$h^-(t,x)=\alpha(t)x+\beta(t)\quad t\in[a,b],x\in\mathbb{R}.$$
Ya que $\beta(t)=h^-(t,0),\ \ t\in[a,b]$, $\alpha(t)=h^-(t,1)-\beta(t)$ y $h^-(\cdot,x)\in WBV^-_{p(\cdot)}[a,b]$, para cada $x\in\mathbb{R}$, se obtiene que $\alpha,\beta\in WBV^-_{p(\cdot)}[a,b]$.

□

Corolario 3.6
Sean $h:[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y H el operador de composición generado por la función h. Supongamos que H aplica $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ en sí mismo y es uniformemente acotado, entonces existen funciones $\alpha,\beta\in WBV^-_{p(\cdot)}[a,b]$ tal que
$$h^-(t,x)=\alpha(t)x+\beta(t),\quad t\in[a,b],x\in\mathbb{R}.$$
donde $h^-(\cdot,x):(a,b]\to\mathbb{R}$ es la regularización izquierda de $h(\cdot,x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Demostración:

Consideremos cualquier $t\geq 0$ y $u,v\in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ tal que
$$||u-v||^W_{p(\cdot)}\leq diamH(\{u,v\})$$
Como $diam\{u,v\}\leq t$ por la acotación uniforme de H, se tiene que
$$diamH(\{u,v\})\leq\gamma(t),$$
es decir,
$$||H(u)-H(v)||^W_{p(\cdot)}=diamH(\{u,v\})\leq\gamma\left(||u-v||^W_{p(\cdot)}\right),$$
por consiguiente, por el Teorema 3.6 se tiene
$$h^-(t,x)=\alpha(t)x+\beta(t),\quad t\in[a,b],x\in\mathbb{R}.$$

□

3.2.3 En el Espacio $\kappa BV^W_{p(\cdot)}[a,b]$.

En esta sección, como contribución al tema (Ver [112]), se demostrarán resultados referentes a la condición débil de Matkowski en el espacio $\kappa BV^W_{p(\cdot)}[a,b]$.

Denotemos por $\kappa BV^{W-}_{p(\cdot)}[a,b]$ el subconjunto en $\kappa BV^W_{p(\cdot)}[a,b]$ el cual consiste en aquellas funciones que son continuas por la izquierda en $(a,b]$.

Lema 3.8
Si $u \in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$, entonces $u^{-} \in \kappa BV^{W}_{p(\cdot)}[a,b]$.

Demostración:

Por el Lema 3.7, se tiene que $u^{-} \in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$. Entonces, por el Teorema 2.9, $u^{-} \in \kappa BV^{W}_{p(\cdot)}[a,b]$.

Así, si una función $u \in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$, la regularización izquierda es una función continua, es decir, $u^{-} \in WBV^{-}_{p(\cdot)}[a,b]$. En consecuencia, $u^{-} \in \kappa BV^{W-}_{p(\cdot)}[a,b]$.

□

A continuación se presenta el siguiente lema de utilidad para la demostración del teorema principal de esta sección.

Lema 3.9
Sean $\kappa : [0,1] \to [0,1]$, una función distorsión, $u \in \kappa BV^{W}_{p(\cdot)}[a,b]$ y $\lambda > 0$. Entonces $\mu^{\kappa}_{p(\cdot)}(u) < \lambda$ si y solo si $\kappa V^{W}_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1$.

Demostración:

Sea $u \in \kappa BV^{W}_{p(\cdot)}[a,b]$. Supongamos que $\mu^{\kappa}_{p(\cdot)} < \lambda$; entonces por la definición de $\mu^{\kappa}_{p(\cdot)}(u)$ existe k tal que $\lambda > k > \mu^{\kappa}_{p(\cdot)}(u)$ y $\kappa V^{W}_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1$. Como, para $s > 1$ la función $t \geq 0,\ t \to t^{s}$ es convexa, se tiene

$$\kappa V^{W}_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\lambda}\right) = \kappa V^{W}_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{k}\frac{k}{\lambda}\right) = \frac{k}{\lambda}\kappa V^{W}_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{k}\right) \leq \frac{k}{\lambda} \leq 1.$$

Recíprocamente, asumamos que $\kappa V^{W}_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\lambda}\right) < 1$, entonces $\lambda \in \left\{\lambda > 0 : \kappa V^{W}_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\}$; así $\mu^{\kappa}_{p(\cdot)}(u) < \lambda$.

□

Teorema 3.7

Si el operador de composición H, generado por $h : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, aplica $\kappa BV^{W}_{p(\cdot)}[a,b]$ en si mismo y satisface la siguiente desigualdad

$$||Hf_1 - Hf_2||^{W}_{\kappa p(\cdot)} \leq \gamma\left(||f_1 - f_2||^{W}_{\kappa p(\cdot)}\right) \quad \left(f_1, f_2 \in \kappa BV^{W}_{p(\cdot)}[a,b]\right) \tag{3.29}$$

para alguna función $\gamma : [0,\infty) \to [0,\infty)$. Entonces, existen funciones $\alpha, \beta \in \kappa BV^{W}_{p(\cdot)}[a,b]$ tal que

$$h^{-}(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t), \quad t \in [a,b],\ x \in \mathbb{R}$$

donde $h^{-}(\cdot,x) : (a,b] \to \mathbb{R}$ es la regularización izquierda de $h(\cdot,x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración:

Por hipótesis, para $x \in \mathbb{R}$ fijo, la función constante $f(t) = x, \;\; t \in [a,b]$ pertenece a $\kappa BV^W_{p(\cdot)}[a,b]$. Como H aplica $\kappa BV^W_{p(\cdot)}[a,b]$ en sí mismo, se tiene $(Hf)(t) = h(t, f(t)) \in \kappa BV^W_{p(\cdot)}[a,b]$. Por el Lema 3.8 la regularización izquierda $h^-(\cdot, x) \in \kappa BV^{W-}_{p(\cdot)}[a,b]$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por la desigualdad (3.29) y la definición de la norma $||\cdot||^W_{\kappa p(\cdot)}$ se obtiene para $f_1, f_2 \in \kappa BV^W_{p(\cdot)}[a,b]$,

$$\begin{aligned} \mu_{p(\cdot)}(H(f_1) - H(f_2)) &\leq ||H(f_1) - H(f_2)||^W_{\kappa p(\cdot)} \\ &\leq \gamma\left(||f_1 - f_2||^W_{\kappa p(\cdot)}\right). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Por la desigualdad (3.30) y el Lema 3.9, si $\gamma\left(||f_1 - f_2||^W_{\kappa p(\cdot)}\right) > 0$ entonces

$$\kappa V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{H(f_1) - H(f_2)}{\gamma\left(||f_1 - f_2||^W_{\kappa p(\cdot)}\right)}\right) \leq 1. \tag{3.31}$$

Sean $a \leq s < t \leq b$, y $\pi_m := \{t_0, t_1, ..., t_{2m}\} \in \pi$ una partición equidistante definida por

$$t_0 = s, \;\; t_j - t_{j-1} = \frac{t-s}{2m} \;\; (j = 1, 2, ..., 2m).$$

Sea $u, v \in \mathbb{R}$ con $u \neq v$, definamos $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$f_1(x) := \begin{cases} v, & \text{si } x = t_j \;\; \text{para todo par } j, \\ \dfrac{u+v}{2}, & \text{si } x = t_j \;\; \text{para todo impar } j, \\ \text{lineal}, & \text{otro caso} \end{cases}$$

y

$$f_2(x) := \begin{cases} \dfrac{u+v}{2}, & \text{si } x = t_j \;\; \text{para todo par } j, \\ u, & \text{si } x = t_j \;\; \text{para todo impar } j, \\ \text{lineal}, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Entonces la diferencia $f_1 - f_2$ satisface

$$|f_1(x) - f_2(x)| \equiv \frac{|u-v|}{2} \;\; (a \leq x \leq b).$$

Por la desigualdad (3.29)

$$\begin{aligned} ||Hf_1 - Hf_2||^W_{\kappa p(\cdot)} &\leq \gamma\left(||f_1 - f_2||^W_{\kappa p(\cdot)}\right) \\ &\leq \gamma\left(\frac{|u-v|}{2}\right). \end{aligned}$$

Por la desigualdad (3.31) y la definición de $p(\cdot)$-variación en el sentido de Wiener-Korenblum se tiene

$$\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{|(h^- \circ f_1)(t_{2j}) - (h^- \circ f_2)(t_{2j}) - (h^- \circ f_1)(t_{2j-1}) + (h^- \circ f_2)(t_{2j-1})|}{\gamma\left(2^{-1}|u-v|\right)}\right)^{p(x_{j-1})}}{\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\kappa\left(\frac{t_{2j} - t_{2j-1}}{b-a}\right)} \leq 1.$$

Sin embargo, por la definición de las funciones f_1 y f_2,

$$\begin{aligned}
&|(h^- \circ f_1)(t_{2j}) - (h^- \circ f_2)(t_{2j}) - (h^- \circ f_1)(t_{2j-1}) + (h^- \circ f_2)(t_{2j-1})| \\
&\quad = \left| h^-(s,v) - h^-\left(s, \frac{u+v}{2}\right) - h^-\left(s, \frac{u+v}{2}\right) + h^-(s,u) \right| \\
&\quad = \left| h^-(s,v) - 2h^-\left(s, \frac{u+v}{2}\right) + h^-(s,u) \right|.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\left| h^-(s,v) - 2h^-\left(s, \frac{u+v}{2}\right) + h^-(s,u) \right|}{\gamma\left(2^{-1}|u-v|\right)} \right)^{p(x_{j-1})}}{\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \kappa\left(\frac{t_{2j} - t_{2j-1}}{b-a} \right)} \leq 1.$$

Como $1 \leq p(x_{j-1}) < \infty$ para todo $j = 1, 2, \ldots, 2m$, $\sum_{n=1}^{m} \kappa\left(\frac{t_{2j} - t_{2j-1}}{b-a} \right) > 1$, y consideremos el límite cuando $m \to \infty$, se tiene

$$\left(\frac{\left| h^-(s,v) - 2h^-\left(s, \frac{u+v}{2}\right) + h^-(s,u) \right|}{\gamma\left(2^{-1}|u-v|\right)} \right)^{p(x_{j-1})} = 0,$$

así

$$h^-(s,v) - 2h^-\left(s, \frac{u+v}{2}\right) + h^-(s,u) = 0.$$

Por lo tanto se concluye que $h^-(s,\cdot)$ satisface la ecuación de Jensen en $\mathbb{R}$ (Ver [83], pág 315). La continuidad de h^- con respecto a la segunda variable implica que para todo $t \in [a,b]$ existe $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$h^-(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t) \quad t \in [a,b], x \in \mathbb{R}.$$

Como $\beta(t) = h^-(t,0)$, $t \in [a,b]$, $\alpha(t) = h^-(t,1) - \beta(t)$ y $h^-(\cdot,x) \in \kappa BV_{p(\cdot)}^{W-}[a,b]$, para cada $x \in \mathbb{R}$, se obtiene que $\alpha, \beta \in \kappa BV_{p(\cdot)}^{W-}[a,b]$.

□

Corolario 3.7

Sean $h : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y H el operador de composición generado por h. Supongamos que H aplica $\kappa BV_{p(\cdot)}^{W}[a,b]$ en sí mismo y es uniformemente continuo, entonces, existen funciones $\alpha, \beta \in \kappa BV_{p(\cdot)}^{W-}[a,b]$ tal que

$$h^-(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t), \quad t \in [a,b], x \in \mathbb{R}.$$

donde $h^-(\cdot,x) : (a,b] \to \mathbb{R}$ es la regularización izquierda de $h(\cdot,x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración:

Consideremos todo $t \geq 0$ y $u, v \in \kappa BV^{W}_{p(\cdot)}[a,b]$ tal que

$$||u-v||^{W}_{\kappa p(\cdot)} \leq diamH(\{u,v\}).$$

Como $diam\{u,v\} \leq t$, por la acotación uniforme de H, se tiene

$$diamH(\{u,v\}) \leq \gamma(t),$$

que es,

$$||H(u)-H(v)||^{W}_{\kappa p(\cdot)} = diamH(\{u,v\}) \leq \gamma\left(||u-v||^{W}_{\kappa p(\cdot)}\right),$$

por lo tanto, por el Teorema 3.7 se tiene

$$h^{-}(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t), \quad t \in [a,b], x \in \mathbb{R}.$$

□

3.2.4 En el Espacio $\Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$.

En esta sección, se presenta un resultado que demuestra que el operador de composición uniformemente continuo que aplica el espacio $\Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$ en si mismo, necesariamente satisface la llamada condición débil de Matkowski.

Lema 3.10
Sea $u \in \Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$ entonces $\mu_{\Lambda_{p(\cdot)}}(u) < \lambda$ si y solo si $V^{p(\cdot)}_{\Lambda}\left(\frac{u}{\lambda}\right) < 1$.

Demostración:

Sea $u \in \Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$. Supongamos que $\mu_{\Lambda_{p(\cdot)}}(u) < \lambda$; entonces por definición de $\mu_{\Lambda_{p(\cdot)}}$ existe k tal que $\lambda > k > \mu_{\Lambda_{p(\cdot)}}(u)$ y $V^{p(\cdot)}_{\Lambda}\left(\frac{u}{k}\right) \leq 1$. Así, para $s > 1$ la función $t \geq 0$, $t \to t^{s}$ es convexa, por lo que

$$V^{p(\cdot)}_{\Lambda}\left(\frac{u}{\lambda}\right) = V^{p(\cdot)}_{\Lambda}\left(\frac{u}{k}\frac{k}{\lambda}\right) \leq \frac{k}{\lambda}V^{p(\cdot)}_{\Lambda}\left(\frac{u}{k}\right) \leq \frac{k}{\lambda} \leq 1.$$

Recíprocamente, asumamos que $V^{p(\cdot)}_{\Lambda}\left(\frac{u}{\lambda}\right) < 1$, entonces $\lambda \in \left\{\lambda > 0 : V^{p(\cdot)}_{\Lambda}\left(\frac{u}{\lambda}\right) < 1\right\}$; así $\mu_{\Lambda_{p(\cdot)}}(u) < \lambda$.

□

Lema 3.11
Sea $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función tal que $u\in\Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$, entonces u tiene límites por la derecha y por la izquierda en todo punto de (a,b).

Demostración:

Sin pérdida de generalidad, se demostrará que u tiene límite por la izquierda en $x_0\in(a,b]$. Asumamos que $\lim\limits_{x\to x_0^-} u(x)$ no existe y sea π^* una partición seleccionada tal que $\pi^*: a=t_0=x_0<t_1<\cdots<t_m=x<\cdots<t_n=b$. Entonces

Caso 1: Si $\lim\limits_{x\to x_0^-} u(x)\to\pm\infty$. En este caso, sea λ_* la correspondiente λ_i entre x_0 y x de la partición π^*, así, se tiene que

$$\begin{aligned} V_\Lambda^{p(x)}(u;[a,b]) &\geq \sum_{i=1}^{n}\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|^{p(x_{i-1})}}{\lambda_i} \\ &\geq \frac{|u(x)-u(x_0)|^{p(x)}}{\lambda_*} \end{aligned}$$

en consecuencia

$$\begin{aligned} |u(x)-u(x_0)| &\leq \lambda_*^{1/p(x)}\left(V_\Lambda^{p(x)}(u;[a,b])\right)^{1/p(x)} \\ &= M\left(V_\Lambda^{p(x)}(u;[a,b])\right)^{1/p(x)} \end{aligned}$$

por lo tanto $\lim\limits_{x\to x_0^-}|u(x)-u(x_0)|\leq M\left(V_\Lambda^{p(x)}(u;[a,b])\right)^{1/p(x)}$.

Como $u(x_0)=L<\infty$ y $\lim\limits_{x\to x_0^-}u(x)\to\pm\infty$, se tiene que $V_\Lambda^{p(x)}(u;[a,b])=\infty$, lo cual es una contradicción.

Caso 2: Si $\lim\limits_{x\to x_0^-}u(x)$ no existe. Que significa que la función u es oscilante. Sea $\{t_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión tal que $t_n\to t_0$ cuando $n\to\infty$

$$|u(t_i)-u(t_{i-1})|>r \quad \text{para todo} \quad n,m\geq N$$

entonces

$$\begin{aligned} V_\Lambda^{p(\cdot)}(u,[a,b]) &\geq \sum_{i=1}^{n}\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|^{p(x_{i-1})}}{\lambda_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}|u(t_i)-u(t_{i-1})|^{p(x_{i-1})} \\ &> \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}r^{p(x_{i-1})} \\ &\geq r\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\longrightarrow\infty \text{ as } n\to\infty \end{aligned}$$

por lo tanto $V_\Lambda^{p(\cdot)}(u;[a,b])=\infty$, lo cual es una contradicción.

$\square$

Se denotará por $\Lambda_{p(\cdot)}BV^{-}[a,b]$ el subconjunto de $\Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$ que consiste de aquellas funciones que son continuas por la izquierda en $(a,b]$.

Lema 3.12
Si $u \in \Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$, entonces $u^{-} \in \Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$.

Por lo tanto si una función u tiene $\Lambda_{p(\cdot)}$-variación acotada en el sentido de Waterman-Shiba, entonces la regularización por la izquierda es una función continua por la izquierda.

Teorema 3.8

Si el operador de composición H, generado por $h:[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, aplica $\Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$ en si mismo y satisface la siguiente desigualdad

$$||Hf_1 - Hf_2||_{\Lambda_{p(\cdot)}} \leq \gamma\left(||f_1 - f_2||_{\Lambda_{p(\cdot)}}\right) \quad (f_1, f_2 \in \Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]) \tag{3.32}$$

para alguna función $\gamma:[0,\infty)\to[0,\infty)$. Entonces, existen funciones $\alpha,\beta \in \Lambda_{p(\cdot)}BV^{-}[a,b]$ tal que

$$h^{-}(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t), \quad t \in [a,b], \; x \in \mathbb{R} \tag{3.33}$$

donde $h^{-}(\cdot,x):(a,b]\to\mathbb{R}$ es la regularización por la izquierda de $h(\cdot,x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Demostración:

Por hipótesis, para $x \in \mathbb{R}$ fijo, la función constante $f(t) = x, \;\; t \in [a,b]$ pertenece a $\Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$. Como H aplica $\Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$ en si mismo, se tiene que $(Hf)(t) = h(t,f(t)) \in \Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$. Haciendo uso del Lema 3.12 la regularización por la izquierda $h^{-}(\cdot,x) \in \Lambda_{p(\cdot)}BV^{-}[a,b]$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

De la desigualdad (3.32) y la definición de la norma $||\cdot||_{\Lambda_{p(\cdot)}}$ se obtiene que para $f_1, f_2 \in \Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$,

$$\begin{aligned} \mu_{p(\cdot)}(H(f_1) - H(f_2)) &\leq ||H(f_1) - H(f_2)||_{\Lambda_{p(\cdot)}} \\ &\leq \gamma\left(||f_1 - f_2||_{\Lambda_{p(\cdot)}}\right). \end{aligned} \tag{3.34}$$

De la desigualdad (3.34) y el Lema 3.10, si $\gamma\left(||f_1 - f_2||_{\Lambda_{p(\cdot)}}\right) > 0$, entonces

$$V_{\Lambda}^{p(\cdot)}\left(\frac{H(f_1) - H(f_2)}{\gamma(||f_1 - f_2||_{\Lambda_{p(\cdot)}})}\right) \leq 1. \tag{3.35}$$

Sean $a \leq s < t \leq b$ y $\pi_m := \{t_0, t_1, ..., t_{2m}\} \in \pi$ una partición equidistante definida por

$$t_0 = s, \;\; t_j - t_{j-1} = \frac{t-s}{2m} \quad (j = 1,2,...,2m).$$

Dados $u, v \in \mathbb{R}$ con $u \neq v$, definamos $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$f_1(x) := \begin{cases} v, & \text{si } x = t_j \text{ para algún par } j, \\ \frac{u+v}{2}, & \text{si } x = t_j \text{ para algún impar } j, \\ lineal, & \text{otro caso} \end{cases}$$

y

$$f_2(x) := \begin{cases} \frac{u+v}{2}, & \text{si } x = t_j \text{ para algún par } j, \\ u, & \text{si } x = t_j \text{ para algún impar } j, \\ lineal, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, la diferencia $f_1 - f_2$ satisface

$$|f_1(x) - f_2(x)| \equiv \frac{|u-v|}{2} \quad (a \leq x \leq b).$$

Consecuentemente, por (3.32)

$$\begin{aligned} ||Hf_1 - Hf_2||_{\Lambda_{p(\cdot)}} &\leq \gamma(||f_1 - f_2||_{\Lambda_{p(\cdot)}}) \\ &\leq \gamma\left(\frac{|u-v|}{2}\right). \end{aligned}$$

De la desigualdad (3.35) y la definición de $\Lambda_{p(\cdot)}$-variación en el sentido de Waterman-Shiba se tiene que

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\left(\frac{|(h^- \circ f_1)(t_{2j}) - (h^- \circ f_2)(t_{2j}) - (h^- \circ f_1)(t_{2j-1}) + (h^- \circ f_2)(t_{2j-1})|}{\gamma(2^{-1}|u-v|)}\right)^{p(x_{j-1})}}{\lambda_j} \leq 1.$$

Sin embargo, por la definición de las funciones f_1 y f_2,

$$\begin{aligned} &|(h^- \circ f_1)(t_{2j}) - (h^- \circ f_2)(t_{2j}) - (h^- \circ f_1)(t_{2j-1}) + (h^- \circ f_2)(t_{2j-1})| \\ &= \left|h^-(s,v) - h^-\left(s, \frac{u+v}{2}\right) - h^-\left(s, \frac{u+v}{2}\right) + h^-(s,u)\right| \\ &= \left|h^-(s,v) - 2h^-\left(s, \frac{u+v}{2}\right) + h^-(s,u)\right|. \end{aligned}$$

Entonces

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\left(\frac{|h^-(s,v) - 2h^-\left(s, \frac{u+v}{2}\right) + h^-(s,u)|}{\gamma(2^{-1}|u-v|)}\right)^{p(x_{j-1})}}{\lambda_j} \leq 1.$$

Como $1 \leq p(x_{j-1}) < \infty$ para todo $j = 1, 2, \dots, 2m$, $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ es no decreciente, $\sum(1/\lambda_i) = \infty$ y pasando el límite cuando $m \to \infty$, necesariamente se obtiene que

$$\left(\frac{|h^-(s,v) - 2h^-\left(s, \frac{u+v}{2}\right) + h^-(s,u)|}{\gamma(2^{-1}|u-v|)}\right)^{p(x_{j-1})} = 0$$

entonces

$$h^-(s,v) - 2h^-\left(s, \frac{u+v}{2}\right) + h^-(s,u) = 0.$$

Así, se concluye que $h^-(s,\cdot)$ satisface la ecuación de Jensen en $\mathbb{R}$ (Ver [83], pág. 315). La continuidad de h^- con respecto a la segunda variable implica que para todo $t \in [a,b]$ existen $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$h^-(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t) \;\; t \in [a,b], \; x \in \mathbb{R}.$$

Ya que $\beta(t) = h^-(t,0)$, $t \in [a,b]$, $\alpha(t) = h^-(t,1) - \beta(t)$ y $h^-(\cdot,x) \in \Lambda_{p(\cdot)}BV^-[a,b]$, para cada $x \in \mathbb{R}$, se obtiene que $\alpha, \beta \in \Lambda_{p(\cdot)}BV^-[a,b]$.

□

3.2.5 En el Espacio $BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$.

En lo que sigue se demostrará, como contribución al tema (Ver [114]), que si el operador de composición es uniformemente acotado y aplica el espacio $BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$ en si mismo satisface la condición de Matkowski.

Teorema 3.9

Si el operador de composición H, generado por h, aplica $BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$ en si mismo y satisface la siguiente desigualdad

$$\|Hf_1 - Hf_2\|^W_{(p(\cdot),2)} \le \gamma\big(\|f_1 - f_2\|^W_{(p(\cdot),2)}\big), \qquad \Big(f_1, f_2 \in BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]\Big), \tag{3.36}$$

para toda función $\gamma : [0,\infty) \to [0,\infty)$. Entonces existen funciones $\alpha, \beta \in BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$ tal que

$$h(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t), \qquad t \in [a,b],\ x \in \mathbb{R}. \tag{3.37}$$

Demostración:

Por hipótesis, para $x \in \mathbb{R}$ fijo, la función constante $f(t) = x$, $t \in [a,b]$ pertenece a $BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$. Como H aplica $BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$ en si mismo, se tiene que $(Hf)(t) = h(t, f(t)) \in BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$.

De la desigualdad (3.36) y la definición de la norma $\|\cdot\|^W_{(p(\cdot),2)}$, se obtiene que para $f_1, f_2 \in BV^W_{(p(\cdot),2)}[a,b]$,

$$\text{ínf}\left\{\lambda > 0;\ V^W_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{Hf_1 - Hf_2}{\lambda}; [a,b]\right) \le 1\right\} \le \|Hf_1 - Hf_2\|^W_{(p(\cdot),2)} \le \gamma\left(\|f_1 - f_2\|^W_{(p(\cdot),2)}\right).$$

De la desigualdad y la observación previa, si $\gamma\left(\|f_1 - f_2\|^W_{(p(\cdot),2)}\right) > 0$, entonces

$$V^W_{(p(\cdot),2)}\left(\frac{Hf_1 - Hf_2}{\gamma\left(\|f_1 - f_2\|^W_{(p(\cdot),2)}\right)}\right) \le 1. \tag{3.38}$$

Consideremos $a \le s < t \le b$ y sea $\pi_m := \{t_0, t_1, \ldots, t_{2m}\} \in \pi$ una partición equidistante definida por

$$t_0 = s,\ \ t_j - t_{j-1} = \frac{t-s}{2m}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2m).$$

Dadas $u, v \in \mathbb{R}$ con $u \neq v$, Definamos $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$f_1(x) := \begin{cases} v, & \text{si } x = t_j \ \text{ para algún par } \ j, \\ \frac{u+v}{2}, & \text{si } x = t_j \ \text{ para algún impar } \ j, \\ \text{lineal}, & \text{otro caso} \end{cases}$$

y

$$f_2(x) := \begin{cases} \frac{u+v}{2}, & \text{si } x = t_j \ \text{ para algún par } \ j, \\ u, & \text{si } x = t_j \ \text{ para algún impar } \ j, \\ \text{lineal}, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, la diferencia $f_1 - f_2$ satisface que $|f_1(x) - f_2(x)| = \dfrac{|u-v|}{2}$ para todo $x \in [a,b]$. Por lo tanto, por la desigualdad (3.36)

$$\|Hf_1 - Hf_2\|^{W}_{(p(\cdot),2)} \leq \gamma\left(\|f_1 - f_2\|^{W}_{(p(\cdot),2)}\right) \leq \gamma\left(\frac{|u-v|}{2}\right).$$

De la desigualdad (3.38) y la definición de $(p(\cdot),2)$-variación acotada en el sentido de De La Vallée Poussin-Wiener se sigue que

$$\sum_{j=1}^{m-1} \left| \frac{h(f_1)(t_{2j}) - h(f_2)(t_{2j}) - h(f_1)(t_{2j-1}) + h(f_2)(t_{2j-1})}{|t_{2j} - t_{2j-1}|\gamma\left(\frac{|u-v|}{2}\right)} \right.$$
$$\left. - \frac{h(f_1)(t_{2j-1}) - h(f_2)(t_{2j-1}) - h(f_1)(t_{2j-2}) + h(f_2)(t_{2j-2})}{|t_{2j-1} - t_{2j-2}|\gamma\left(\frac{|u-v|}{2}\right)} \right|^{p(x_{j-1})} \leq 1.$$

Sin embargo, por la definición de f_1 y f_2, se obtiene que

$$\sum_{j=1}^{m-1} \left| \frac{h(f_1)(t_{2j}) - h(f_2)(t_{2j}) - h(f_1)(t_{2j-1}) + h(f_2)(t_{2j-1})}{|t_{2j} - t_{2j-1}|\gamma\left(\frac{|u-v|}{2}\right)} \right.$$
$$\left. - \frac{h(f_1)(t_{2j-1}) - h(f_2)(t_{2j-1}) - h(f_1)(t_{2j-2}) + h(f_2)(t_{2j-2})}{|t_{2j-1} - t_{2j-2}|\gamma\left(\frac{|u-v|}{2}\right)} \right|^{p(x_{j-1})}$$
$$= \sum_{j=1}^{m-1} \left(\frac{2|h(s,v) + h(s,u) - 2h(s,\frac{u+v}{2})|}{\frac{t-s}{2m}\gamma\left(\frac{|u-v|}{2}\right)} \right)^{p(x_{j-1})}$$
$$= \sum_{j=1}^{m-1} \left(\frac{4m}{t-s} \frac{|h(s,v) + h(s,u) - 2h(s,\frac{u+v}{2})|}{\gamma\left(\frac{|u-v|}{2}\right)} \right)^{p(x_{j-1})} \leq 1.$$

Entonces, ya que $1 < p(x_{j-1}) < \infty$ para todo $j = 1,2,\ldots,2m$ se sigue que

$$\sum_{j=1}^{m-1} \left(\frac{4}{t-s} \frac{|h(s,v) + h(s,u) - 2h(s,\frac{u+v}{2})|}{\gamma\left(\frac{|u-v|}{2}\right)} \right)^{p(x_{j-1})} \leq 1.$$

Por lo tanto, necesariamente

$$h(s,v) + h(s,u) - 2h\left(s,\frac{u+v}{2}\right) = 0.$$

Así, se concluye que $h(s,\cdot)$ satisface la ecuación de Jensen en $\mathbb{R}$ (Ver [83], pág. 315). La continuidad de h con respecto a la segunda variable implica que para todo $t \in [a,b]$ existen $\alpha,\beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$h(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t), \qquad (t \in [a,b], x \in \mathbb{R}).$$

Como $\beta(t) = h(t,0)$, $t \in [a,b]$, $\alpha(t) = h(t,1) - \beta(t)$ y $h(\cdot,x) \in BV^{W}_{(p(\cdot),2)}[a,b]$ para cada $x \in \mathbb{R}$ se obtiene que $\alpha,\beta \in BV^{W}_{(p(\cdot),2)}[a,b]$.

$\square$

Teorema 3.10

Sean $h : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y H el operador de composición asociado a h. Supongamos que H aplica $BV^{W}_{(p(\cdot),2)}[a,b]$ en si mismo y es uniformemente continuo, entonces existen funciones $\alpha, \beta \in BV^{W}_{(p(\cdot),2)}[a,b]$, tal que

$$h(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t), \qquad (t \in [a,b], x \in \mathbb{R})$$

Demostración:

Se obtiene el resultado haciendo uso de [111, Theorem 7] por el Teorema 3.9.

□

3.3 Operador de Composición Localmente Lipschitz

E. P. Sobolevskij (1984) en [164] demostró la siguiente afirmación:

“El operador de composición autónomo, generado por la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es localmente Lipschitz en el espacio $Lip[a,b]$ si y solo si la derivada h' existe y es localmente Lipschitz”.

En artículos recientes de J. Appell, N. Merentes, J. L. Sánchez (2011) en [8] y N. Merentes, S. Rivas y J. L. Sánchez (2012) en [124], obtienen resultados del tipo Sobolevskij. Como los autores explican en la introducción, la importancia de estos resultados yace en el hecho de que en la mayoría de las aplicaciones a muchos problemas no lineales, es suficiente imponer la condición de Lipschitzidad local, en lugar de la condición de Lipschitzidad global. De hecho, se demostró que el resultado de Sobolevskij es válido en los espacios $BV_{\varphi}[a,b]$ (Ver [40]), $HBV[a,b]$ (Ver [33]), $RV_{\varphi}[a,b]$ (Ver [116]), $\Lambda BV[a,b]$ (Ver [174]) y $BV_{\phi}[a,b]$ (Ver [124]).

Motivado por el trabajo realizado por J. Appell et al. y N. Merentes et al. en los artículos [8] y [124], respectivamente, como contribución a este tema (Ver [60] y [110]), se establece un resultado similar al dado por Sobolevskij, en el espacio de las funciones $\kappa\Phi BV[a,b]$ y $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$.

3.3.1 En el Espacio $\kappa BV_{\phi}[a,b]$.

En la demostración del resultado principal de esta sección, se emplea un resultado de compacidad, entre ellos, el Principio de la Selección de Helly o segundo Teorema de Helly. El Teorema de Helly para las funciones de variación generalizada ha sido de cierta importancia durante mucho tiempo. El Principio de selección de Helly es objeto de intensa investigación, muchas aplicaciones y generalizaciones (Véase, por ejemplo, [37], [139] y las referencias de ellos).

D. S. Cyphert y J. A. Kelingos (1985), en [43], demostraron un Teorema tipo Helly para una familia infinita arbitraria de funciones definidas en $[0,1]$, que es uniformemente acotada y uniformemente κ-decreciente. En la demostración del Teorema principal de esta sección se hará uso del Teorema de Selección de Helly para funciones $\kappa\Phi$-decrecientes.

Teorema 3.11 (Principio de Selección de Helly)

Una familia $\mathscr{F}$ infinita arbitraria de funciones definidas en $[0,1]$ tal que es uniformemente acotada y uniformemente $\kappa\Phi$-decreciente, entonces contiene una subsucesión la cual converge en todo punto de $[0,1]$ a una función $\kappa\Phi$-decreciente.

Demostración:

Sea $\mathscr{F}$ una familia infinita arbitraria de funciones definidas en $[0,1]$, que es uniformemente acotada y uniformemente $\kappa\Phi$-decreciente. Entonces, existe una constante $c>0$ tal que para toda $u \in \mathscr{F}$ y todo par x, y tal que $0 \le x < y \le 1$

$$|u(x)| \le c, \tag{3.39}$$

y

$$\varphi_n(u(y)-u(x)) \le c\kappa(y-x). \tag{3.40}$$

Por (3.39) y haciendo uso de la técnica de diagonalización de Cantor, existe una suceción de funciones u_k en $\mathscr{F}$ que converge puntualmente en cada punto racional de $[0,1]$, a una función g. Como cada u_k satisface (3.40), también lo satisface la función g, para todo números racionales $x, y \in [0,1]$.

Definamos a la función g, en puntos irracionales x, por

$$g(x) = \lim_{y\to x^-} g(y), \quad \text{donde} \quad y \quad \text{es racional.} \tag{3.41}$$

La existencia de este límite puede garantizarse de la manera siguiente

$$A = \liminf_{\mathbb{Q}\ni y\to x^-} g(y) \le \limsup_{\mathbb{Q}\ni y\to x^-} g(y) = B \quad \text{cuando} \quad y \to x^-, \quad y \text{ racional.}$$

Sea y_i y y_i' dos sucesiones de puntos racionales que convergen al punto x, de manera que $y_1 < y_1' < y_2 < y_2' < \cdots < x$ tal que $g(y_i) \to A$ y $g(y_i') \to B$ cuando $i \to \infty$. Entonces

$$\varphi_n(g(y_i') - g(y_i)) \le c\kappa(y_i' - y_i)$$

y

$$\begin{aligned} \varphi_n(g(y_i') - g(y_i)) &= \varphi_n\left(\lim_{y\to y_i'^-} g(y) - \lim_{y\to y_i^-} g(y)\right) \\ &= \varphi_n(B-A) \le 0. \end{aligned}$$

Entonces $\varphi_n(B-A) = 0$, así $A = B$.

Por (3.41), consideremos el límite de puntos racionales en la desigualdad (3.40), se obtiene que g satisface (3.40) para todo par de números positivos, es decir g es $\kappa\Phi$-decreciente con constante c en $[0,1]$. Por el Teorema 1.30, g es de $\kappa\Phi$-variación acotada y continua; así, por otro proceso de diagonalización de Cantor se puede encontrar una subsucesión de funciones u_k convergente.

Ahora bien, consideremos $0 < t < 1$ y $\varepsilon > 0$. Entonces, fijando dos números racionales y_1 y y_2 con $y_1 < t < y_2$ tal que

$$|g(y_i) - g(t)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad i = 1, 2, \tag{3.42}$$

y

$$c\kappa(|y_i - t|) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad i = 1, 2. \tag{3.43}$$

Como la sucesión $\{u_k\}$, $k \geq 1$ converge a g en los números racionales, existe $N > 0$ tal que

$$|u_k(y_i) - g(y_i)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad i = 1, 2, \ k \geq N. \tag{3.44}$$

Por lo tanto, de las desigualdades (3.42), (3.43) y (3.44) se obtiene

$$\begin{aligned} g(t) - u_k(t) &= (u_k(y_2) - u_k(t)) + (g(t) - g(y_2)) + (g(y_2) - u_k(y_2)) \\ &\leq c\kappa(|y_2 - t|) + (g(t) - g(y_2)) + (g(y_2) - u_k(y_2)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} u_k(t) - g(t) &= (u_k(t) - u_k(y_1)) + (g(y_1) - g(t)) + (u_k(y_1) - g(y_1)) \\ &\leq c\kappa(|t - y_1|) + (g(y_1) - g(t)) + (u_k(y_1) - g(y_1)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Entonces, $|u_k - g(t)| < \varepsilon$.

$\square$

El resultado principal de esta sección viene enunciado y demostrado de la siguiente manera:

Teorema 3.12

Si el operador de composición H, generado por la función h, aplica el espacio $\kappa BV_\phi[a,b]$ en sí misma. Entonces H es localmente Lipschitz si y solo si h' existe y es localmente Lipschitz en $\mathbb{R}$.

Demostración:

Asumamos que h' es localmente Lipschitz en $\mathbb{R}$. Dado $u \in \kappa BV_\phi[a,b]$, para $r > 0$ denotemos por $K_1(r)$ la mínima constante Lipschitz de h' y por $K_2(r)$ el supremo de $|h'|$ en el conjunto acotado

$$B_r := \bigcup_{a \leq t \leq b} \{u(t) : ||u||_{\kappa\phi} \leq r\} \subset \mathbb{R}.$$

La acotación de $K_2(r)$ implica que H satisface una condición de Lipschitzidad local con la norma $||\cdot||_\infty$; así, queda demostrar una condición de Lipschitzidad local para H con respecto a la norma de $\kappa\Phi$-variación. Esto se demostrará aplicando dos veces el Teorema de valor medio.

De hecho, para $u, v \in \kappa BV_\phi[a,b]$ fijos con $u \neq v$ y $||u||_{\kappa\phi}, ||v||_{\kappa\phi} \leq r$. Dada una partición $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\}$ de $[a,b]$, dividiendo el conjunto de indices $\{1, ..., m\}$ en una unión disjunta $I \cup J$ de conjuntos disjuntos I y J, por definición, como sigue

$j \in I$ sí

$$|u(t_j) - v(t_j)| + |u(t_{j-1}) - v(t_{j-1})| \leq |u(t_j) - u(t_{j-1})| + |v(t_j) - v(t_{j-1})|$$

y $j \in J$ sí

$$|u(t_j) - v(t_j)| + |u(t_{j-1}) - v(t_{j-1})| > |u(t_j) - u(t_{j-1})| + |v(t_j) - v(t_{j-1})|.$$

Por el clásico Teorema de Valor Medio, existe α_j entre $v(t_j)$ y $u(t_j)$ tal que

$$Hu(t_j) - Hv(t_j) = h'(\alpha_j)[u(t_j) - v(t_j)] \quad (j = 1, 2, ..., m).$$

Ahora bien, por definición de I se tiene

$$|\alpha_j - \alpha_{j-1}| \leq 2|u(t_j) - u(t_{j-1})| + 2|v(t_j) - v(t_{j-1})| \quad (j \in I).$$

Realizando un cálculo se demuestra entonces que

$$\begin{aligned}
&|Hu(t_j) - Hv(t_j) - Hu(t_{j-1}) + Hv(t_{j-1})| \\
&\qquad = |h'(\alpha_j)[u(t_j) - v(t_j)] - h'(\alpha_{j-1})[u(t_{j-1}) - v(t_{j-1})]| \\
&\qquad = |(h'(\alpha_j) - h'(\alpha_{j-1}))[u(t_j) - v(t_j)] + h'(\alpha_{j-1})[u(t_j) - v(t_j) - u(t_{j-1}) + v(t_{j-1})]| \\
&\qquad \leq K_1(r)|\alpha_j - \alpha_{j-1}|\, ||u - v||_\infty + K_2(r)|u(t_j) - v(t_j) - u(t_{j-1}) + v(t_{j-1})| \\
&\qquad \leq [2K_1(r)||u - v||_\infty + K_2(r)][|u(t_j) - u(t_{j-1})| + |v(t_j) - v(t_{j-1})|] \\
&\qquad = K_3(r)[|u(t_j) - u(t_{j-1})| + |v(t_j) - v(t_{j-1})|].
\end{aligned}$$

Como $\varphi_n(t_1) \leq \varphi_n(t_2)$ para $t_1 \leq t_2$, se obtiene que

$$\varphi_n(|Hu(t_j) - Hv(t_j) - Hu(t_{j-1}) + Hv(t_{j-1})|) \leq \varphi_n(K_3[|u(t_j) - u(t_{j-1})|| + |v(t_j) - v(t_{j-1})|]),$$

dividiendo por $\sum_{j=1}^{m} \kappa\left(\dfrac{|t_j - t_{j-1}|}{b-a}\right)$ y sumando en $j \in I$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j\in I}\left(\frac{\varphi_j(|Hu(t_j)-Hv(t_j)-Hu(t_{j-1})+Hv(t_{j-1})|)}{\sum_{j=1}^{m}\kappa\left(\frac{|t_j-t_{j-1}|}{b-a}\right)}\right)\\
&\qquad\le \sum_{j\in I}\left(\frac{\varphi_j(K_3[|u(t_j)-u(t_{j-1})|+|v(t_j)-v(t_{j-1})|])}{\sum_{j=1}^{m}\kappa\left(\frac{|t_j-t_{j-1}|}{b-a}\right)}\right)\\
&\qquad\le \sum_{j\in I}\left(\frac{\left(\frac{K_3(r)}{2K_3(r)}\right)\varphi_j(2K_3(r)[|u(t_j)-u(t_{j-1})|]}{\sum_{j=1}^{m}\kappa\left(\frac{|t_j-t_{j-1}|}{b-a}\right)}+\frac{\left(\frac{K_3(r)}{2K_3(r)}\right)\varphi_j(2K_3(r)[|v(t_j)-v(t_{j-1})|])}{\sum_{j=1}^{m}\kappa\left(\frac{|t_j-t_{j-1}|}{b-a}\right)}\right)\\
&\qquad= \frac{1}{2}\kappa\sigma_{\phi}(2K_3(r)u,P)+\frac{1}{2}\kappa\sigma_{\phi}(2K_3(r)v,P)\\
&\qquad\le K_3(r)\left(||u||_{\kappa\phi}+||v||_{\kappa\phi}\right)\\
&\qquad\le K_4(r)||u-v||_{\kappa\phi}.
\end{aligned}
$$

De nuevo, por el Teorema de de Valor Medio, existe β_j entre $u(t_j)$ y $u(t_{j-1})$ y γ_j entre $v(t_j)$ y $v(t_{j-1})$ tal que

$$Hu(t_j)-Hu(t_j)=h'(\beta_j)[u(t_j)-u(t_j)] \quad (j=1,2,...,m)$$

y

$$Hv(t_j)-Hv(t_j)=h'(\gamma_j)[v(t_j)-v(t_j)] \quad (j=1,2,...,m).$$

Por definición de J se tiene

$$|\beta_j-\gamma_j|\le 2|u(t_j)-v(t_j)|+2|u(t_{j-1})-v(t_{j-1})|.$$

Así, se demuestra que

$$
\begin{aligned}
&|Hu(t_j)-Hv(t_j)-Hu(t_j)+Hv(t_j)|\\
&\quad=|h'(\beta_j)[u(t_j)-u(t_{j-1})]-h'(\gamma_j)[v(t_j)-v(t_{j-1})]|\\
&\quad=|(h'(\beta_j)-h'(\gamma_j))[u(t_j)-u(t_{j-1})]-h'(\gamma_j)[u(t_j)-u(t_{j-1})-v(t_j)+v(t_{j-1})]|\\
&\quad\le K_1(r)|\beta_j-\gamma_j||u(t_j)-u(t_{j-1})|+K_2(r)|u(t_j)-v(t_j)-u(t_{j-1})+v(t_{j-1})|\\
&\quad\le 2K_1(r)[|u(t_j)-v(t_j)|+|u(t_{j-1})-v(t_{j-1})|]\,|u(t_j)-u(t_{j-1})|+K_2(r)[|u(t_j)-u(t_{j-1})|+|v(t_j)-v(t_{j-1})|]\\
&\quad\le 4K_1(r)||u-v||_{\infty}|u(t_j)-u(t_{j-1})|+K_2(r)|u(t_j)-u(t_{j-1})|+K_2(r)|v(t_j)-v(t_{j-1})|\\
&\quad\le 4K_1(r)||u-v||_{\infty}+K_2(r)|u(t_j)-u(t_{j-1})|+K_2(r)|v(t_j)-v(t_{j-1})|\\
&\quad\le K_5|u(t_j)-u(t_{j-1})|+K_2(r)|v(t_j)-v(t_{j-1})|
\end{aligned}
$$

Como $\varphi_n(t_1)\le\varphi_n(t_2)$ para $t_1\le t_2$, se obtiene que

$$\varphi_n(|Hu(t_j)-Hv(t_j)-Hu(t_{j-1})+Hv(t_{j-1})|)\le\varphi_n(K_5(r)[|u(t_j)-v(t_j)|+K_2(r)|v(t_j)-v(t_{j-1})|,$$

dividiendo por $\sum_{j=1}^{m} \kappa\left(\frac{|t_j - t_{j-1}|}{b-a}\right)$ y sumando en $j \in J$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j\in J}\left(\frac{\varphi_j(|Hu(t_j) - Hv(t_j) - Hu(t_{j-1}) + Hv(t_{j-1})|)}{\sum_{j=1}^{m} \kappa\left(\frac{|t_j - t_{j-1}|}{b-a}\right)}\right)\\
&\quad\le \sum_{j\in J}\left(\frac{\varphi_n(K_5(r)[|u(t_j) - u(t_{j-1})| + K_2(r)|v(t_j) - v(t_{j-1})|])}{\sum_{j=1}^{m} \kappa\left(\frac{|t_j - t_{j-1}|}{b-a}\right)}\right)\\
&\quad\le \sum_{j\in J}\left(\frac{(1/2)\varphi_n(2K_5(r)|u(t_j) - u(t_{j-1})|)}{\sum_{j=1}^{m} \kappa\left(\frac{|t_j - t_{j-1}|}{b-a}\right)} + \frac{(1/2)\varphi_j(2K_2(r)|v(t_j) - v(t_{j-1})|)}{\sum_{j=1}^{m} \kappa\left(\frac{|t_j - t_{j-1}|}{b-a}\right)}\right)\\
&\quad= \frac{1}{2}\kappa\sigma_\phi(2K_5(r)u, P) + \frac{1}{2}\kappa\sigma_\phi(2K_2(r)v, P)\\
&\quad\le K_6(r)(||u||_{\kappa\phi} + ||v||_{\kappa\phi})\\
&\quad\le K_7||u - v||_{\kappa\phi}.
\end{aligned}
$$

Simplificando ambas sumas parciales y observando que $K_4(r)$ y $K_7(r)$ no dependen de la partición P se concluye que

$$\kappa V_\Phi\left(\frac{Hu - Hv}{(K_4(r) + K_7(r))||u - v||_{\kappa\phi}}\right) \le 1$$

lo cual demuestra la afirmación.

Recíprocamente, supongamos que H satisface la condición de Lipschitzidad. Por hipótesis, la constante

$$K(r) := \sup\left\{\frac{||Hu - Hv||_{\kappa\phi}}{||u - v||_{\kappa\phi}} : u, v \in \kappa BV_\phi[a,b],\ ||u||_{\kappa\phi}, ||v||_{\kappa\phi} \le r,\ u \ne v\right\} \tag{3.45}$$

es finito para cada $r > 0$. Consideremos, en particular, ambas funciones u y v en (3.45) constante, se concluye que

$$|h(u) - h(v)| \le K(r)|u - v| \quad (u, v \in \mathbb{R},\ |u|,\ |v| \le r).$$

Esto demuestra que h es localmente Lipschitz, y así la derivada h' existe en casi todas partes en $\mathbb{R}$. Queda demostrar que h' existe en todas partes de $\mathbb{R}$ y es localmente Lipschitz. Para la demostración del primer requerimiento, se demuestra que h' existe en todo intervalo cerrado $I = [a,b]$.

Sea $r > 0$, consideremos $z \in \kappa BV_\phi[a,b]$ con $||z||_{\kappa\phi} \le \frac{r}{2}$. Sea $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de números reales positivos que converge a 0; sin perdida de generalidad, asumamos que $\alpha_n \le \frac{r}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definamos una sucesión de funciones $h_{\alpha_n,z} : [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$h_{\alpha_n,z}(t) = \frac{h(z(t) + \alpha_n) - h(z(t))}{\alpha_n} \quad (t \in [a,b]). \tag{3.46}$$

Como el operador de composición H, generado por la función h, actúa en el espacio $\kappa BV_\phi[a,b]$, por hipótesis, las funciones $h_{\alpha_n,z}$ dadas por (3.46) pertenece a $\kappa BV_\phi[a,b]$.

Ahora bien, se demostrará que la sucesión $\{h_{\alpha_n,z}\}_{n=1}^{\infty}$ tiene $\kappa\phi$-variación acotada uniformemente para todo $z \in \kappa BV_\phi[a,b]$ con $||z||_{\kappa\phi} \leq \frac{r}{2}$. En efecto, sea $\pi = \{t_0, t_1, ..., t_m\}$ una partición del intervalo $[a,b]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se definen las funciones u_n y v por

$$u_n(t) = z(t) + \alpha_n, \quad v(t) = z(t) \quad (t \in [a,b]). \tag{3.47}$$

Entonces $||u_n||_{\kappa\phi} \leq r$ y $||v||_{\kappa\phi} \leq r$. Además, por el Lema 1.11, (3.46) y (3.47), se tiene la estimación siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{j=1}^{m} \phi_n\left(\frac{|\alpha_n[h_{\alpha_n,z}(t_j) - h_{\alpha_n,z}(t_{j-1})]|}{||H_{u_n} - H_v||_{\kappa\phi}}\right)}{\sum_{j=1}^{m} \kappa\,(b-a)}
&= \frac{\sum_{j=1}^{m} \phi_n\left(\frac{|h(z(t_j)+\alpha_n) - h(z(t_j)) - h(z(t_{j-1})+\alpha_n) + h(z(t_{j-1}))|}{||H_{u_n} - H_v||_{\kappa\phi}}\right)}{\sum_{j=1}^{m} \kappa\,(b-a)} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^{m} \phi_n\left(\frac{|h(u_n(t_j)) - h(v(t_j)) - h(u_n(t_{j-1})) + h(v(t_{j-1}))|}{||H_{u_n} - H_v||_{\kappa\phi}}\right)}{\sum_{j=1}^{m} \kappa\,(b-a)} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^{m} \phi_n\left(\frac{Hu_n - Hv}{||H_{u_n} - H_v||_{\kappa\phi}}\right)}{\sum_{j=1}^{m} \kappa\,(b-a)} \\
&\leq \kappa V_\Phi\left(\frac{Hu_n - Hv}{||H_{u_n} - H_v||_{\kappa\phi}}; [a,b]\right) \leq 1.
\end{aligned}$$

Como la partición $\pi = \{t_0, t_1, ..., t_m\}$ es arbitraria, la desigualdad

$$\kappa V_\Phi\left(\frac{\alpha_n h_{\alpha_n,z}}{||H_{u_n} - H_v||_{\kappa\phi}}; [a,b]\right) \leq 1$$

se satisface para todo $n \in \mathbb{N}$ y cada $z \in \kappa BV_\phi[a,b]$ con $||z||_{\kappa\phi} \leq \frac{r}{2}$. Por el Lema 1.11, la definición de la función $h_{\alpha_n,z}$ en (3.46), y la definición de las funciones u_n y v en (3.47), se tiene que

$$\begin{aligned}
||\alpha_n h_{\alpha_n,z}||_{\kappa\phi} &= ||h(z+\alpha_n) - h(z)||_{\kappa\phi} \\
&= ||h(u_n) - h(v)||_{\kappa\phi} \\
&\leq K(r)||u_n - v||_{\kappa\phi} \\
&= K(r)\alpha_n
\end{aligned}$$

por lo tanto $||h_{\alpha_n,z}||_{\kappa\phi} \leq K(r)$. Por el Lema 1.11, se concluye que

$$\kappa V_\Phi(h_{\alpha_n,z}) \leq K(r), \tag{3.48}$$

el cual demuestra que la sucesión $\{h_{\alpha_n,z}\}_{n=1}^\infty$ satisface la hipótesis del Teorema 3.11, el cual asegura la existencia de una subsucesión puntualmente convergente de $\{h_{\alpha_n,z}\}_{n=1}^\infty$; sin perdida de generalidad asumamos que toda sucesión $\{h_{\alpha_n,z}\}_{n=1}^\infty$ converge puntualmente en $[a,b]$ a alguna función $f \in \kappa\phi BV[a,b]$.

Ahora, definamos $z(t) := \lambda t$, donde $\lambda > 0$ es tan pequeña que $||z||_{\kappa\phi} \leq \frac{r}{2}$. Por (3.47) se tiene que

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{n\to\infty} \frac{h(z(t)+\alpha_n) - h(z(t))}{\alpha_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{h(\lambda t+\alpha_n) - h(\lambda t)}{\alpha_n} \\ &= \lambda h'(\lambda t) \end{aligned} \tag{3.49}$$

para casi todo $t \in [a,b]$. Como la primitiva de f y la función $t \mapsto h(\lambda t)$ son ambas absolutamente continuas y existen las derivadas en $[a,b]$, así, se concluye que difieren en solo alguna constante en $[a,b]$, y así h' existe en casi todas partes en $[a,b]$. Por el principio de invarianza (Lema 3.1) se deduce que la derivada h' de h existe en todo el intervalo, y así en todas partes de $\mathbb{R}$.

Queda por demostrar que h' satisface una condición de Lipschitzidad local. Denotemos por F el operador de composición generado por la función f de (3.49), se concluye que, para $z \in \kappa BV_\phi[a,b]$ con $||z||_{\kappa\phi} \leq \frac{r}{2}$,

$$||Fz||_{\kappa\phi} \leq K(r), \tag{3.50}$$

donde $K(r)$ es la constante Lipschitz de (3.45). En efecto

$$||f||_{\kappa\phi} \leq \lim_{n\to\infty} \inf ||h_n||_{\kappa\phi},$$

siempre que la sucesión $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ de funciones $h_n \in \kappa BV_\phi[a,b]$ converge puntualmente en $[a,b]$ a alguna función f. Combinando esto con (3.48) y la observación que la sucesión $\{h_{\alpha_n,z}(a)\}$ converge cuando $n \to \infty$; así, se obtiene (3.50). Por lo tanto, se concluye que el operador de composición F aplica el espacio $\kappa BV_\phi[a,b]$ en sí mismo, y de esta manera la función correspondiente f es localmente Lipschitz en $\mathbb{R}$. Por (3.49), el resultado también es cierto para la función h'.

□

3.3.2 En el Espacio $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$.

En la presente sección se demuestra que es válido un resultado de Sobolevskij para el espacio $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ de $p(\cdot)$-variación acotada en el sentido de Wiener con exponente variable.

Teorema 3.13

Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Si el operador de composición H generado por h aplica el espacio $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ en si mismo entonces H es localmente Lipschitz si y solo si h' existe y es localmente Lipschitz en $\mathbb{R}$.

Demostración:

Asumamos que h' es localmente Lipschitz en $\mathbb{R}$. Para $r > 0$ se denota por $K_1(r)$ la mínima constante Lipschitz de h' y por $K_2(r)$ el supremo de $|h'|$ en el conjunto acotado

$$B_r := \bigcup_{a\leq t\leq b} \left\{ f(t) : \ ||f||^W_{p(\cdot)} \leq r \right\} \subset \mathbb{R}.$$

La acotación de $K_2(r)$ implica que H satisface una condición de Lipschitz local en la norma $||\cdot||_\infty$ (norma del supremo), así, solo queda por demostrar una condición de Lipschitzidad local para H con respecto a la $p(\cdot)$-norma (Definición 2.3). Se realizará aplicando dos veces el Teorema de Valor Medio.

Sean $f, g \in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ con $||f||^W_{p(\cdot)}$, $||g||^W_{p(\cdot)} \leq r$. Dada una partición $\pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ de $[a,b]$, se divide el conjunto de indices {1,...,m} en una unión $I \cup J$ de conjuntos disjuntos I y J por definición se sigue que

- $j \in I$ si
$$|f(t_j) - g(t_j)| + |f(t_{j-1}) - g(t_{j-1})| \leq |f(t_j) - f(t_{j-1})| + |g(t_j) - g(t_{j-1})|,$$

- $j \in J$ si
$$|f(t_j) - g(t_j)| + |f(t_{j-1}) - g(t_{j-1})| > |f(t_j) - f(t_{j-1})| + |g(t_j) - g(t_{j-1})|.$$

Por el clásico Teorema de Valor Medio existe α_j entre $g(t_j)$ y $f(t_j)$ tal que

$$Hf(t_j) - Hg(t_j) = h'(\alpha_j)[f(t_j) - g(t_j)], \quad (j = 1, \ldots, m).$$

Ahora bien, por definición de I se tiene que

$$|\alpha_j - \alpha_{j-1}| \leq 2|f(t_j) - f(t_{j-1})| + 2|g(t_j) - g(t_{j-1})| \quad (j \in I).$$

Haciendo un cálculo

$$\begin{aligned}
&|Hf(t_j) - Hg(t_j) - Hf(t_{j-1}) + Hg(t_{j-1})| \\
&\qquad = |h'(\alpha_j)[f(t_j) - g(t_j)] - h'(\alpha_{j-1})[f(t_{j-1}) - g(t_{j-1})]| \\
&\qquad = |(h'(\alpha_j) - h'(\alpha_{j-1}))[f(t_j) - g(t_j)] + h'(\alpha_{j-1})[f(t_j) - g(t_j) - f(t_{j-1}) + g(t_{j-1})]| \\
&\qquad \leq K_1(r)|\alpha_j - \alpha_{j-1}|||f - g||_\infty + K_2(r)|f(t_j) - g(t_j) - f(t_{j-1}) + g(t_{j-1})| \\
&\qquad \leq [2K_1(r)||f - g||_\infty + K_2(r)]\, |f(t_j) - g(t_j) - f(t_{j-1}) + g(t_{j-1})| \\
&\qquad = K_3(r)|f(t_j) - g(t_j) - f(t_{j-1}) + g(t_{j-1})|.
\end{aligned}$$

Ya que $p:[a,b]\to(1,\infty)$ y además en $j\in I$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\in I}|Hf(t_j)-Hg(t_j)-Hf(t_{j-1})+Hg(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}\\
&\qquad\le \sum_{j\in I}K_3(r)^{p(x_{j-1})}|f(t_j)-g(t_j)-f(t_{j-1})+g(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}\\
&\qquad\le K_4(r)\sum_{j\in I}|(f-g)(t_j)-(f-g)(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}\\
&\qquad\le K_4(r)V^W_{p(\cdot)}(f-g)\\
&\qquad\le K_4(r)||f-g||^W_{p(\cdot)}.
\end{aligned}$$

De nuevo por el Teorema de Valor Medio existe β_j entre $f(t_j)$ y $f(t_{j-1})$ y γ_j entre $g(t_j)$ y $g(t_{j-1})$ tal que

$$Hf(t_j)-Hf(t_j)=h'(\beta_j)[f(t_j)-f(t_j)]\quad (j=1,2,\ldots,m)$$

y

$$Hg(t_j)-Hg(t_j)=h'(\gamma_j)[g(t_j)-g(t_j)]\quad (j=1,2,\ldots,m).$$

Por definición de J se tiene

$$|\beta_j-\gamma_j|\le 2|f(t_j)-g(t_j)|+2|f(t_{j-1})-g(t_{j-1})|.$$

De nuevo haciendo un cálculo se demuestra que

$$\begin{aligned}
&|Hf(t_j)-Hg(t_j)-Hf(t_j)+Hg(t_j)|\\
&\qquad=|h'(\beta_j)[f(t_j)-f(t_{j-1})]-h'(\gamma_j)[g(t_j)-g(t_{j-1})]|\\
&\qquad=|(h'(\beta_j)-h'(\gamma_j))[f(t_j)-f(t_{j-1})]-h'(\alpha_{j-1})[f(t_j)-f(t_{j-1})-g(t_j)+g(t_{j-1})]|\\
&\qquad\le K_5(r)|\beta_j-\gamma_j||f(t_j)-f(t_{j-1})|+K_6(r)|f(t_j)-g(t_j)-f(t_{j-1})+g(t_{j-1})|\\
&\qquad\le[4K_5(r)||f||_\infty+K_6(r)]\,|f(t_j)-g(t_j)-f(t_{j-1})+g(t_{j-1})|\\
&\qquad=K_7(r)|f(t_j)-g(t_j)-f(t_{j-1})+g(t_{j-1})|.
\end{aligned}$$

Como $p:[a,b]\to(1,\infty)$ y además en $j\in J$ se obtiene

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\in I}|Hf(t_j)-Hg(t_j)-Hf(t_j)+Hg(t_j)|^{p(x_{j-1})}\\
&\qquad=\sum_{j\in I}K_7(r)^{p(x_{j-1})}|f(t_j)-g(t_j)-f(t_{j-1})+g(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}\\
&\qquad=K_8(r)\sum_{j\in I}|f(t_j)-g(t_j)-f(t_{j-1})+g(t_{j-1})|^{p(x_{j-1})}\\
&\qquad=K_8(r)V^W_{p(\cdot)}(f-g)\\
&\qquad=K_8(r)||f-g||^W_{p(\cdot)}.
\end{aligned}$$

Aplicando ambos lados la suma parcial y observándose que $K_4(r)$ y $K_8(r)$ no dependen de la partición π se concluye que

$$V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{Hu-Hv}{(K_4(r)+K_8(r))||u-v||^W_{p(\cdot)}}\right)\le 1$$

el cual se obtiene la afirmación.

Recíprocamente, supongamos que H satisface la condición de Lipschitzidad. Por suposición, la constante

$$K(r) := \sup\left\{ \frac{||Hu - Hv||^W_{p(\cdot)}}{||u - v||^W_{p(\cdot)}} : u, v \in WBV_{p(\cdot)}[a, b],\ ||u||^W_{p(\cdot)}, ||v||^W_{p(\cdot)} \leq r,\ u \neq v \right\} \tag{3.51}$$

es finita para cada $r > 0$. Consideremos, en particular, ambas funciones u y v en (3.51) constantes, se tiene que

$$|h(u) - h(v)| \leq K(r)|u - v| \quad (u, v \in \mathbb{R}, |u|, |v| \leq r).$$

Esto demuestra que h es localmente Lipschitz y así la derivada h' existe en casi todas partes en $\mathbb{R}$. Queda por demostrar que h' existe en casi todas partes en $\mathbb{R}$ y es localmente Lipschitz. Para la demostración del primer punto se demostrará que h' existe en todo intervalo cerrado $I = [a, b]$.

Sea $r > 0$ y consideremos $z \in WBV_{p(\cdot)}[a, b]$ con $||z||^W_{p(\cdot)} \leq \frac{r}{2}$. Sea $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de números reales positivos que convergen a 0; sin pérdida de generalidad, asumamos que $\alpha_n \leq \frac{r}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definamos una sucesión de funciones $h_{\alpha_n, z} : [a, b] \to \mathbb{R}$ por

$$h_{\alpha_n, z}(t) = \frac{h(z(t) + \alpha_n) - h(z(t))}{\alpha_n} \quad (t \in [a, b]). \tag{3.52}$$

Como el operador de composición H, generado por h, actúa en el espacio $WBV_{p(\cdot)}[a, b]$, por suposición, las funciones $h_{\alpha_n, z}$ dadas por (3.52) pertenecen a $WBV_{p(\cdot)}[a, b]$.

Ahora, se demostrará que la sucesión $\{h_{\alpha_n, z}\}_{n=1}^{\infty}$ tiene $p(\cdot)$-variación acotada uniformemente en el sentido de Wiener para todo $z \in WBV_{p(\cdot)}[a, b]$ con $||z||^W_{p(\cdot)} \leq \frac{r}{2}$. En efecto, sea $\pi = \{t_0, t_1, ..., t_m\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos las funciones u_n y v por

$$u_n(t) = z(t) + \alpha_n, \quad v(t) = z(t) \quad (t \in [a, b]). \tag{3.53}$$

Entonces $||u_n||^W_{p(\cdot)} \leq r$ y $||v||^W_{p(\cdot)} \leq r$. Además, por el Lema 2.3, (3.52) y (3.53), se obtienen las estimaciones

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m} \frac{|\alpha_n[h_{\alpha_n,z}(t_j) - h_{\alpha_n,z}(t_{j-1})]|^{p(x_j)}}{||H_{u_n} - H_v||^W_{p(\cdot)}} \\
&\quad = \sum_{j=1}^{m} \frac{|h(z(t_j) + \alpha_n) - h(z(t_j)) - h(z(t_{j-1}) + \alpha_n) + h(z(t_{j-1}))|^{p(x_j)}}{||H_{u_n} - H_v||^W_{p(\cdot)}} \\
&\quad = \sum_{j=1}^{m} \frac{|h(u_n(t_j)) - h(v(t_j)) - h(u_n(t_{j-1})) + h(v(t_{j-1}))|^{p(x_j)}}{||H_{u_n} - H_v||^W_{p(\cdot)}} \\
&\quad = \sum_{j=1}^{m} \frac{|Hu_n - Hv|}{||H_{u_n} - H_v||^W_{p(\cdot)}} \\
&\quad \leq V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{Hu_n - Hv}{||H_{u_n} - H_v||^W_{p(\cdot)}}; [a, b] \right) \leq 1.
\end{aligned}$$

Como la partición $\pi = \{t_0, t_1, ..., t_m\}$ es arbitraria, la desigualdad

$$V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{\alpha_n h_{\alpha_n,z}}{||H_{u_n} - H_v||^W_{p(\cdot)}}; [a, b] \right) \leq 1$$

se satisface para todo $n \in \mathbb{N}$ y cada $z \in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ con $||z||^W_{p(\cdot)} \leq \frac{r}{2}$. Por el Lema 2.3, la definición de la función $h_{\alpha_n,z}$ en (3.52) y las definiciones de las funciones u_n y v en (3.53), se obtiene que

$$\begin{aligned} ||\alpha_n h_{\alpha_n,z}||^W_{p(\cdot)} &= ||h(z+\alpha_n)-h(z)||^W_{p(\cdot)} \\ &= ||h(u_n)-h(v)||^W_{p(\cdot)} \\ &\leq K(r)||u_n - v||^W_{p(\cdot)} \\ &= K(r)\alpha_n \end{aligned}$$

por lo tanto $||h_{\alpha_n,z}||^W_{p(\cdot)} \leq K(r)$. Por el Lema 2.3, se concluye que

$$V^W_{p(\cdot)}(h_{\alpha_n,z}) \leq K(r), \tag{3.54}$$

el cual demuestra que la sucesión $\{h_{\alpha_{n,z}}\}_{n=1}^{\infty}$ satisface las hipótesis del Teorema 2.6. El Teorema 2.6 asegura la existencia de una subsucesión puntualmente convergente de $\{h_{\alpha_n,z}\}_{n=1}^{\infty}$; sin pérdida de generalidad asumamos que toda la sucesión $\{h_{\alpha_n,z}\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente en $[a,b]$ a alguna función $f \in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$.

Ahora, considerando $z(t) := \lambda t$, donde $\lambda > 0$ suficientemente pequeño tal que $||z||^W_{p(\cdot)} \leq \frac{r}{2}$. Por (3.53) notemos que

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{n\to\infty} \frac{h(z(t)+\alpha_n)-h(z(t))}{\alpha_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{h(\lambda t+\alpha_n)-h(\lambda t)}{\alpha_n} \\ &= \lambda h'(\lambda t) \end{aligned} \tag{3.55}$$

para casi todo $t \in [a,b]$. Como la primitiva de f y la función $t \mapsto h(\lambda t)$ son ambas absolutamente continuas y tienen la misma derivada en $[a,b]$, se concluye que ellas difieren solo en alguna constante en $[a,b]$, y así h' existen en casi todas partes en $[a,b]$. Por el principio de invarianza (Lema 3.6) se deduce que la derivada h' de h existe en todo intervalo, y así en todas parte en $\mathbb{R}$.

Queda por demostrar que h' satisface una condición de Lipschitzidad local. Denotemos por F el operador de composición generado por la función f definida en (3.55), para $z \in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ con $||z||^W_{p(\cdot)} \leq \frac{r}{2}$, se obtiene

$$||Fz||^W_{p(\cdot)} \leq K(r), \tag{3.56}$$

donde $K(r)$ es la constante Lipschitz de (3.51). En efecto, por el Teorema 2.6 se concluye que

$$||f||^W_{p(\cdot)} \leq \lim_{n\to\infty} \inf ||h_n||^W_{p(\cdot)},$$

siempre que la sucesión $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones $h_n \in WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ converge puntualmente en $[a,b]$ a alguna función f. Combinando este hecho con (3.54) y la observación que $h_{\alpha_n,z}(a) \to g(a)$ cuando $n \to \infty$ se obtiene (3.56). Se concluye que el operador de composición F aplica el espacio $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$ en si mismo, por lo que la función correspondiente f es localmente Lipschitz en $\mathbb{R}$. Por (3.55), también lo satisface la función h'.

□

3.4 Operador Localmente Definido

En relación a los operadores localmente definidos, dados X e Y dos espacios de funciones reales definidas en un intervalo I, la aplicación $K : X \to Y$ es un operador localmente definido si y solo si para cada intervalo abierto $J \subset \mathbb{R}$ y para todas las funciones $u, v \in X$ con $u|_{I\cap J} = v|_{I\cap J}$ resulta que $K(u)|_{I\cap J} = K(v)|_{I\cap J}$. En 1985 F. Newman (23-th International Symposio on Functional Equation, Gargnano-Italy, June 2-11) planteó la siguiente interrogante:

¿Todo operador localmente definido $K : C^n(I) \to C^0(I)$ es de la forma

$$K(u)(I) = h(t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(n)}(t)), \quad u \in C^n(I), \; t \in I$$

para una cierta función $h : I \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$?.

K. Lichawski, J. Matkowski y J. Miś (1988), en [87], definen los operadores localmente definidos unilateralmente de la siguiente manera:

El operador $K : C^n(I) \to C^0(I)$ es localmente definido por la izquierda si para todo $t_0 \in I$ y para cada par de funciones $u, v \in C^n(I)$ se satisface la siguiente implicación:

$$u|_{I\cap(-\infty,t_0)} = v|_{I\cap(-\infty,t_0)} \;\Rightarrow\; K(u)|_{I\cap(-\infty,t_0)} = K(v)|_{I\cap(-\infty,t_0)}$$

y es localmente definido por la derecha si para todo $t_0 \in I$ y para cada par de funciones $u, v \in C^n(I)$ se satisface la siguiente implicación:

$$u|_{I\cap(t_0,\infty)} = v|_{I\cap(t_0,\infty)} \;\Rightarrow\; K(u)|_{I\cap(t_0,\infty)} = K(v)|_{I\cap(t_0,\infty)}.$$

Haciendo uso de los operadores localmente definidos unilateralmente, el cual es una versión más débil que los operadores locales, Lichawski, Matkowski y Miś dan una respuesta afirmativa a la inquietud de Neuman. Existe una vasta literatura relacionada con estos operadores locales actuando en diferentes espacios, por ejemplo en los trabajos [11], [15], [19] y [28] para espacios de medida y en los trabajos [20], [24] y [25], entre otros, para espacios topológicos.

En esta sección se presenta un resultado relacionado con la noción del operador localmente definido, el cual ha sido sujeto a intensas investigaciones y muchas de sus aplicaciones se pueden encontrar en la literatura (Ver, por ejemplo [13], [102] y las referencias de ellos); el cual, se define a continuación:

Definición 3.4

Sean $I = [a, b]$ y $\mathbb{X} = \mathbb{X}(I)$, $\mathbb{Y} = \mathbb{Y}(I)$ espacios de funciones $\varphi : I \to \mathbb{R}$. Un operador $K : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ es llamado localmente definido o $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$-Operador local, brevemente, un operador local, si para todo intervalo abierto $J \subset \mathbb{R}$ y para cada par de funciones $f, g \in \mathbb{X}$, la implicación

$$f|_{J\cap I} = g|_{J\cap I} \;\Rightarrow\; K(f)|_{J\cap I} = K(g)|_{J\cap I}$$

se satisface.

N Existen algunos resultados en los que obtienen la forma de los operadores locales $K:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ para algún par de espacios de funciones $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ (o teoremas de representación); por ejemplo cuando

1. $\mathbb{X}=C^n(I)$ y $\mathbb{Y}=C(I)$ o $\mathbb{Y}=C^1(I)$ (Ver [87]).
2. $\mathbb{X}$ y $\mathbb{Y}$ son espacios de funciones n-veces (k-veces respectivamente) Whitney diferenciable (Ver [106], [107], [178]).
3. $\mathbb{X}$ es el espacio de las funciones Hölder y $\mathbb{Y}=C(I)$ (Ver [180], [108]).
4. $\mathbb{X}$ y $\mathbb{Y}$ son espacios de funciones monótonas y continuas (Ver [179]).
5. $\mathbb{X}=CW_\varphi(I)$ para funciones de φ-variación acotada en el sentido de Wiener y $\mathbb{Y}=C(I)$ (Ver [182]).
6. $\mathbb{X}=RV_p(I)$ para funciones de variación acotada en el sentido de Riesz y $\mathbb{Y}=C(I)$ (Ver [15]).

Definición 3.5 (Ver [87])

Un operador $K:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ se dice que es

(a) Definido por la izquierda si y solo si para todo $s_0\in I$ y para todo par de funciones $f,\ g\in\mathbb{X}$,

$$f|_{(-\infty,s_0)\cap I}=g|_{(-\infty,s_0)\cap I}\quad\Rightarrow\quad K(f)|_{(-\infty,s_0)\cap I}=K(g)|_{(-\infty,s_0)\cap I}.$$

(b) Definido por la derecha si y solo si para todo $s_0\in I$ y para todo par de funciones $f,\ g\in\mathbb{X}$,

$$f|_{I\cap(s_0,\infty)}=g|_{I\cap(s_0,\infty)}\quad\Rightarrow\quad K(f)|_{I\cap(s_0,\infty)}=K(g)|_{I\cap(s_0,\infty)}.$$

De ahora en adelante se considera la siguiente notación

$$CWBV_{p(\cdot)}(I)=WBV_{p(\cdot)}(I)\cap C(I),$$

donde $C(I)$ representa el espacio de las funciones continuas definidas en I.

Teorema 3.14 (Ver [87])

El operador $K:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ es localmente definido si y solo si el operador es definido por la derecha y por la izquierda.

3.4.1 En el Espacio $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$.

En esta sección, como contribución al tema (Ver [60]) se demuestra que todo operador localmente definido aplica el espacio de las funciones continuas y de $p(\cdot)$-variación acotada en el sentido de Wiener en si mismo es un operador de composición (Operador de Nemytskij).

Teorema 3.15

Sea $p : I = [a,b] \to (1,\infty)$ una función admisible. Si el operador localmente definido K aplica $CWBV_{p(\cdot)}(I)$ en $C(I)$ entonces existe una única función $h : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $u \in CWBV_{p(\cdot)}(I)$,

$$K(u)(t) = h(t, u(t)), \quad t \in I.$$

Demostración:

Se iniciará demostrando que para todo $u, v \in CWBV_{p(\cdot)}(I)$ y para todo $s_0 \in int(I)$ la condición

$$u(s_0) = v(s_0) \tag{3.57}$$

implica que

$$K(u)(s_0) = K(v)(s_0).$$

Para ello, escojamos $s_0 \in int(I)$ arbitrario y consideremos el par de funciones arbitrarias $u, v \in CWBV_{p(\cdot)}(I)$ que satisfacen (3.57). La función $\gamma : I \to \mathbb{R}$ definida por

$$\gamma(t) := \begin{cases} u(t) & \text{para} \quad t \in [a, x_0]; \\ v(t) & \text{para} \quad t \in (x_0, b] \end{cases}$$

pertenece a $CWBV_{p(\cdot)}(I)$. En efecto, definamos las funciones $u_1, v_1 : I \to \mathbb{R}$ por

$$u_1(t) = \begin{cases} u(t) - u(x_0) & \text{para} \quad t \in [a, x_0]; \\ 0 & \text{para} \quad t \in (x_0, b] \end{cases}$$

y

$$v_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad t \in [a, x_0]; \\ v(t) - v(x_0) & \text{para} \quad t \in (x_0, b]. \end{cases}$$

Como $u, v \in CWBV_{p(\cdot)}(I)$, entonces u, v son continuas en I y además $V^W_{p(\cdot)}(u) < \infty$ y $V^W_{p(\cdot)}(v) < \infty$. Sea $\pi = \{t_i\}_{i=0}^m$ una partición de I tal que $t_{\ell-1} \leq s_0 < t_\ell$ para algún $1 \leq \ell \leq m$. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} |u_1(t_i) - u_1(t_{i-1})|^{p(x_{i-1})} &= \sum_{i=1}^{\ell-1} |u(t_i) - u(t_{i-1})|^{p(x_{i-1})} + |u(s_0) - u(t_{\ell-1})|^{p(x_k)} \\ &\leq V^W_{p(\cdot)}(u). \end{aligned}$$

Por lo tanto $V^W_{p(\cdot)}(u_1) < \infty$. Por un razonamiento similar, se tiene que $V^W_{p(\cdot)}(v_1) < \infty$. Finalmente $u_1 + v_1 \in CWBV_{p(\cdot)}(I)$, es decir, $CWBV_{p(\cdot)}(I)$ es un espacio lineal. En consecuencia

$$V^R_{p(\cdot)}(u_1 + v_1) < \infty. \tag{3.58}$$

Para todo $t, t' \in I$ se tiene

$$(u_1 + v_1)(t) - (u_1 + v_1)(t') = \gamma(t) - \gamma(t'),$$

la condición (3.58) implica que $\gamma \in CWBV_{p(\cdot)}(I)$. Ya que

$$u|_{(-\infty,s_0)\cap I} = \gamma|_{(-\infty,s_0)\cap I} \quad \text{y} \quad v|_{(s_0,\infty)\cap I} = \gamma|_{(s_0,\infty)\cap I}$$

por la Definición 3.5, se tiene que

$$K(u)|_{(-\infty,s_0)\cap I} = K(\gamma)|_{(-\infty,s_0)\cap I} \quad \text{y} \quad K(v)|_{(s_0,\infty)\cap I} = K(\gamma)|_{(s_0,\infty)\cap I}.$$

Así, por la continuidad de $K(u)$, $K(v)$ y $K(\gamma)$ en s_0, se obtiene que

$$K(u)(s_0) = K(\gamma)(s_0) = K(v)(s_0).$$

Supongamos ahora que s_0 es el extremo izquierdo del intervalo I (es decir, $s_0 = a$). Por la continuidad de u y v en s_0, existe una sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $s_0 < t_{n+1} < t_n$, $|t_n - s_0| < (b - s_0)/n$, $n \in \mathbb{N}$ y

$$|u(t_n) - u(s_0)| < \frac{1}{n^2}, \quad |v(t_n) - v(s_0)| < \frac{1}{n^2} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.59}$$

Definamos la sucesión de funciones $\gamma_n : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, por

$$\gamma_{2k}(t) = \begin{cases} \dfrac{u(s_{2k}) - u(s_0)}{s_{2k} - s_0}(t - s_0) + u(s_0) & \text{para} \quad t \in [s_0, s_{2k}]; \\[2ex] \dfrac{v(s_{2i-1}) - u(s_{2i})}{s_{2i-1} - s_{2i}}(t - s_{2i}) + u(s_{2i}) & \text{para} \quad t \in (s_{2i}, s_{2i-1}],\ i \in \{1,\ldots,k\}; \\[2ex] \dfrac{u(s_{2i}) - v(s_{2i+1})}{s_{2i} - s_{2i+1}}(t - s_{2i+1}) + v(s_{2i+1}) & \text{para} \quad t \in (s_{2i+1}, s_{2i}],\ i \in \{1,\ldots,k-1\}; \\[2ex] v(s_1) & \text{para} \quad t \in (s_1, b] \end{cases}$$

$$\gamma_{2k-1}(t) = \begin{cases} \dfrac{v(s_{2k-1}) - v(s_0)}{s_{2k-1} - s_0}(t - s_0) + v(s_0) & \text{para} \quad t \in [s_0, s_{2k-1}]; \\[2ex] \dfrac{u(s_{2i-2}) - v(s_{2i-1})}{s_{2i-2} - s_{2i-1}}(t - s_{2i-1}) + v(s_{2i-1}) & \text{para} \quad t \in (s_{2i-1}, s_{2i-2}],\ i \in \{2,\ldots,k\}; \\[2ex] \dfrac{v(s_{2i-3}) - u(s_{2i-2})}{s_{2i-3} - s_{2i-2}}(t - s_{2i-2}) + u(s_{2i-2}) & \text{para} \quad t \in (s_{2i-2}, s_{2i-3}],\ i \in \{2,\ldots,k-1\}; \\[2ex] v(s_1) & \text{para} \quad t \in (s_1, b] \end{cases}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, pertenece al espacio $WBV_{p(\cdot)}(I)$. En efecto, por la definición de γ_{2k}, $k \in \mathbb{N}$, la desigualdad triangular, (3.57) y (3.59), se tiene que

$$|\gamma_{2k}(t_i) - \gamma_{2k}(s_0)|^{p(x_{i-1})} \leq \left(\frac{2}{i^2}\right)^{p(x_{i-1})}$$

y

$$\begin{aligned}|\gamma_{2k}(t_i)-\gamma_{2k}(t_j)|^{p(x_{i-1})} &\leq |\gamma_{2k}(t_i)-\gamma_{2k}(s_0)|^{p(x_{i-1})}+|\gamma_{2k}(t_j)-\gamma_{2k}(s_0)|^{p(x_{i-1})}\\ &< \left(\frac{2}{i^2}\right)^{p(x_{i-1})}\end{aligned}$$

para todo $i, j \in \{1,\ldots,2k\},\ i<j,\ k\in\mathbb{N}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2k}|\gamma_{2k}(t_j)-\gamma_{2k}(s_0)|^{p(x_{i-1})} &\leq \sum_{i=1}^{2k}\left(\frac{2}{i^2}\right)^{p(x_{i-1})}\\ &\leq M\sum_{i=1}^{2k}\frac{1}{i^{2p(x_{i-1})}},\quad \left(1<M=2^{p(x_{i-1})}<+\infty\right),\end{aligned}$$

así

$$V_{p(\cdot)}^{W}(\gamma_{2k},I)\leq M\sum_{i=1}^{2k}\frac{1}{i^{2p(x_{i-1})}},\ \ k\in\mathbb{N}. \tag{3.60}$$

Con un razonamiento similar se demuestra que

$$V_{p(\cdot)}^{W}(\gamma_{2k-1},I)\leq M\sum_{i=1}^{2k-1}\frac{1}{i^{2p(x_{i-1})}},\ \ k\in\mathbb{N}. \tag{3.61}$$

Por (3.60) y (3.61) se obtiene que $\gamma_n\in WBV_{p(\cdot)}(I)$ y

$$V_{p(\cdot)}^{W}(\gamma_{n},I)\leq M\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^{2p(x_{i-1})}},\ \ k\in\mathbb{N}. \tag{3.62}$$

Observemos que

$$\gamma_{2k-1}(s_0)=\gamma_{2k}(s_0)=u(s_0)=v(s_0),\ \ k\in\mathbb{N}, \tag{3.63}$$

para todo $k, i\in\mathbb{N}$,

$$\gamma_{2k}(t_{2k})=u(t_{2k})=\gamma_{2k+i}(t_{2k}),\qquad \gamma_{2k-1}(t_{2k-1})=v(t_{2k-1})=\gamma_{2k-1+i}(t_{2k-1}), \tag{3.64}$$

y para todo $t\in I\backslash\{t_k\ :\ k\in\mathbb{N}\}$ existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\gamma_n(t)=\gamma_{n_0}(t),\quad n\geq n_0,\ \ n\in\mathbb{N}. \tag{3.65}$$

Definamos

$$\gamma(t):=\lim_{n\to+\infty}\gamma_n(t),\quad t\in I.$$

Por (3.63), (3.64) y (3.65) la función γ está bien definida y además

$$\begin{aligned}|\gamma(t)-\gamma(t_{2k})| &\leq |v(t_{2k+1})-u(t_{2k})|\\ &\leq |v(t_{2k+1})-v(s_0)|+|u(t_{2k})-u(s_0)|,\quad \text{para todo}\quad t\in[t_{2k+1},t_{2k})\end{aligned} \tag{3.66}$$

y

$$\begin{aligned} |\gamma(t)-\gamma(t_{2k})| &\leq |v(t_{2k-1})-u(t_{2k})| \\ &\leq |v(t_{2k-1})-v(s_0)|+|u(t_{2k})-u(s_0)|, \quad \text{para todo} \quad t\in[t_{2k},t_{2k-1}). \end{aligned} \tag{3.67}$$

Para demostrar que γ es continua en s_0, se considera $\epsilon>0$ fijo. Por la continuidad de u y v en s_0, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$|v(t_n)-v(s_0)|<\epsilon/3, \quad |u(t_n)-u(s_0)|<\epsilon/3, \quad n\in\mathbb{N}, \ \ n\geq n_0. \tag{3.68}$$

Consideremos $t\in(s_0,s_{n_0})$ arbitrario. Existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $2k-1>n_0$ y se satisface $t\in[t_{2k+1},t_{2k})$ ó $t\in[t_{2k},t_{2k-1})$. Ya que, por la desigualdad triangular y (3.63)

$$\begin{aligned} |\gamma(t)-\gamma(s_0)| &\leq |\gamma(t)-\gamma(t_{2k})|+|\gamma(t_{2k})-\gamma(s_0)| \\ &\leq |\gamma(t)-\gamma(t_{2k})|+|u(t_{2k})-u(s_0)|, \end{aligned}$$

por lo tanto, por (3.66) y (3.68)

$$|\gamma(t)-\gamma(s_0)|\leq|v(t_{2k+1})-v(s_0)|+2|u(t_{2k})-u(s_0)|<\epsilon$$

en el caso cuando $t\in[t_{2k+1},t_{2k})$, y por (3.67) y (3.68)

$$|\gamma(t)-\gamma(s_0)|\leq|v(t_{2k-1})-v(s_0)|+2|u(t_{2k})-u(s_0)|<\epsilon$$

en el caso cuando $t\in[t_{2k},t_{2k-1})$. Ya que la continuidad de γ en los puntos restantes es obvio, γ es continuo.

Por la semicontinuidad inferior de $V^W_{p(\cdot)}$ (Proposición 2.3) y (3.62)

$$V^W_{p(\cdot)}(\gamma,I)\leq\liminf_{n\to+\infty} M\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^{2p(x_{i-1})}},$$

y la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^{2p(x_{i-1})}}$ implica que $\gamma\in WBV_{p(\cdot)}(I)$.

En consecuencia existe una función $\gamma\in CWBV_{p(\cdot)}(I)$ y una sucesión $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\gamma(t_{2k-1})=v(t_{2k-1}), \quad \gamma(t_{2k})=u(t_{2k}), \ \ t_k\in I, \ \ k\in\mathbb{N}.$$

De acuerdo con la primera parte de la demostración, se tiene

$$K(\gamma)(t_{2k-1})=K(v)(t_{2k-1}) \ \text{ y } \ K(\gamma)(t_{2k})=K(u)(t_{2k}), \ \ k\in\mathbb{N}.$$

Así, por la continuidad de $K(\gamma)$, $K(u)$ y $K(v)$ en s_0, cuando $k\to\infty$, se tiene que

$$K(f)(s_0)=K(\gamma)(s_0)=K(g)(s_0).$$

Cuando s_0 es el extremo derecho de I, el argumento es similar.

Para definir la función $h : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se fija arbitrariamente un $y_0 \in \mathbb{R}$, definamos una función $P_{y_0} : I \to \mathbb{R}$ por

$$P_{y_0}(t) := y_0, \quad t \in I. \tag{3.69}$$

De esta manera P_{y_0} es una función constante, la cual pertenece a $CWBV_{p(\cdot)}(I)$. Para $s_0 \in I,\ y_0 \in \mathbb{R}$, definamos

$$h(s_0, y_0) := K(P_{y_0})(s_0).$$

De esta manera, por (3.69), para toda función u,

$$u(s_0) = P_{u(s_0)}(s_0),$$

de acuerdo a lo que ya se ha demostrado, se tiene que

$$K(u)(s_0) = K(P_{u(s_0)})(s_0) = h(s_0, u(s_0)). \tag{3.70}$$

Para demostrar la unicidad de h, asumamos que $\overline{h} : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que

$$K(u)(t) = \overline{h}(t, u(t))$$

para todo $u \in CWBV_{p(\cdot)}(I)$ y $t \in I$. Para demostrar que $h = \overline{h}$, sea $t \in I,\ y \in \mathbb{R}$ fijo arbitrariamente y consideremos $u \in CWBV_{p(\cdot)}(I)$ con $u(t) = y$. Por (3.70), se obtiene que

$$\overline{h}(t, y) = \overline{h}(t, u(t)) = K(u)(t) = h(t, u(t)) = h(t, y),$$

lo cual demuestra la unicidad de h.

□

4 Ecuaciones Integrales de Hammerstein y Volterra-Hammerstein en el Espacio de Variación Acotada con Exponente Variable

El nombre *ecuación integral* fue introducido por Emil Heinrich Du Bois-Reymond en 1888, para toda ecuación que involucra una función incógnita dentro del signo de la integral. Sin embargo, los inicios de las ecuaciones integrales se remonta cuando Pierre-Simon Laplace, en 1782, usó lo que hoy se conoce como transformada de Laplace, dada por

$$u(t) = \int_0^\infty e^{-ts}\phi(s)\,ds, \tag{4.1}$$

para resolver ecuaciones en diferencia lineal y ecuaciones diferenciales. En conexión con el uso de series trigonométricas para la solución de problemas de conducción de calor, Fourier en 1822 encontró la fórmula recíproca a la ecuación (4.1), las cuales contienen funciones trigonométricas en la parte integral. Un poco más tarde, en 1826, Niels Henrik Abel resuelve la ecuación integral

$$u(t) = \int_a^t (t-s)^{-\alpha}\phi(s)\,ds,$$

donde $u(t)$ es una función continua, que satisface que $u(a) = 0$, ϕ es una función incógnita y $0 < \alpha < 1$. Y Siméon Denis Poisson en 1826 en una memoria sobre la teoría del magnetismo estudia la ecuación integral

$$\phi(t) = u(t) + \lambda \int_0^t k'(t-s)\phi(s)\,ds,$$

en la cual ϕ es una función incógnita y t aparece como uno de los límites de la integral.

En 1896, Vito Volterra[1] da la primera solución general de la clase de ecuaciones integrales lineales, el cual lleva su nombre y está caracterizada por la variable t que aparece como uno de los límites de la integral. Erik Ivan Fredholm, en 1900, estudió el siguiente tipo de ecuación lineal que lleva su nombre

$$\phi(t) = u(t) + \int_a^b K(t,s)\phi(s)\,ds, \tag{4.2}$$

[1] Las ecuaciones integrales de Volterra fueron presentadas por el físico y matemático italiano Vito Volterra (1860-1940) y luego estudiadas por Trajan Lalescu en su tesis en el año 1908, *Sur l'équation de Volterra* (Ver [85]), escrita bajo la dirección de Émile Picard.

la cual contiene a las ecuaciones consideradas por Volterra, al considerar $K(t,s) = 0$ para $s > t$ (Ver introducción de [125]). Las ecuaciones integrales de Volterra encuentran aplicaciones en demografía[2], el estudio de los materiales viscoelásticos[3] y en materiales de seguros[4].

Una vez que las ecuaciones integrales se estudiaron en el espacio de las funciones continuas o derivables empleando la integral de Riemann, resulta natural considerar las mencionadas ecuaciones en otras clases de espacios de funciones y con otros tipos de integrales; por ejemplo, tal como lo estudian R. P. Kanwal (1971), en [75] o A. N. Kolmogorov (1961), en [78]. Otro ejemplo se puede citar es el artículo de C. S. Hönig (1975), en [68], en el que se demuestra la existencia y unicidad de la ecuación

$$v(t) - v(t_0) + \int_{t_0}^{t} d_\sigma K(t,\sigma) v(\sigma) = u(t) - u(t_0),$$

en el espacio de las funciones regulares en espacios de Banach, donde el símbolo de la integral, se refiere a un operador del tipo Riemann-Stieltjes definido sobre el mencionado espacio de funciones. En D. Bugajewski (2003), en [27] se demuestra la existencia y unicidad de la solución, en un intervalo cerrado de la recta, de la ecuación integral del tipo Volterra

$$u(t) = g(t) + \int_{a}^{t} K(t,s) f(u(s))\, ds,$$

en el espacio de las funciones reales continuas y con la norma del espacio de las funciones de variación acotada; tal que el núcleo de la ecuación integral $K(t,s)$ es de variación acotada en la primera variable.

Los tres tipos de ecuaciones integrales que han sido estudiadas con más frecuencia son las de Volterra, Fredholm y Hammerstein[5]. Por ejemplo, sirve como modelo matemático de muchos fenómenos físicos tal como el comportamiento de fluidos electromagnéticos; además la solución de algunos problemas con frontera, de las ecuaciones en derivadas parciales, se suele expresar como la solución de una ecuación integral de Hammerstein.

En el análisis matemático el Teorema de Punto Fijo de Banach (también llamado teorema de la aplicación contractiva) es una de las herramientas más usadas para demostrar la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales, en el análisis de sistemas dinámicos e incluso en el estudio de métodos iterativos utilizados en el cálculo numérico. El teorema que a continuación se presenta, garantiza la existencia y unicidad de puntos fijos de ciertas funciones definidas en espacios de Banach, haciendo uso de aplicaciones contractivas[6] y debe su nombre a Stefan Banach (1892-1945) quien fue el primero en enunciarlo.

[2] La demografía es la ciencia que tiene como objetivo el estudio de las poblaciones humanas, en su dirección, estructura, evolución y características generales.

[3] Los materiales Viscoelásticos son materiales que exhiben tanto propiedades viscosas como propiedades elásticas.

[4] Los materiales de seguro es la disciplina que aplica modelos estadísticos y matemáticos para la evaluación de riesgo.

[5] Adolf Hammerstein (1888-1941) matemático alemán que proporcionó resultados principalmente en el cálculo variacional, ecuaciones diferenciales parciales y en la teoría de ecuaciones integrales no lineales.

[6] Las aplicaciones contractivas son aquellas aplicaciones T de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tal que $|T(x) - T(y)| \leq c|x - y|$ donde $c < 1$

Teorema 4.1 (Principio de Contracción de Banach)

Sea T una contracción en un espacio de Banach X. Entonces T tiene un único punto fijo en X, es decir, existe una única solución $x \in X$ a la ecuación

$$x = T(x).$$

El principio Leray-Schauder hace que sea posible prescindir de las condiciones el Teorema de Punto Fijo de Schauder[7] y solo requiere que una "condición de acotación" se satisfaga. Ahora se presenta el Principio de Leray-Schauder y se muestra una versión aplicada a fin de obtener resultados de existencia para soluciones continuas de ecuaciones integrales (Ver [133]).

Teorema 4.2 (Principio de Leray-Shauder)

Sea U un subconjunto abierto de un espacio de Banach $(X, ||\cdot||)$ con $0 \in U$ y $\bar{U}$ la clausura de U en X. Supongamos que $F : \bar{U} \to X$ y asumamos que existe una función continua no decreciente $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ que satisface que $\phi(z) < z$ para $z > 0$ tal que para $x, y \in \bar{U}$ se tiene que $||F(x) - F(y)|| \leq \phi(||x - y||)$. Adicionalmente asumamos que $F(\bar{U})$ es acotada y $x \neq \lambda F(x)$ para $x \in \partial U$ y $\lambda \in (0,1]$, donde ∂U denota la acotación de U en X. Entonces F tiene un punto fijo en U.

En el presente capítulo, como contribución al tema, se demuestra la existencia, y algunas veces unicidad, de la ecuación no lineal Hammerstein y Volterra-Hammerstein en el espacio de las funciones de $p(\cdot)$-variación acotada en el sentido de Wiener con exponente variable (Ver [55]).

4.1 Ecuación Integral de Hammerstein

Esta investigación está conectada de alguna manera con la teoría de las ecuaciones integrales en espacios de Orlicz-Musielak. La idea principal de esta teoría consiste en construir el espacio de soluciones de una ecuación integral dependiente del núcleo de esta ecuación y no de un espacio fijo, como se hacía en la teoría clásica de las ecuaciones integrales (Ver [71], [127] y sus referencias).

El interés por los espacios definidos a través de la noción de exponente variable está motivado por sus aplicaciones a varios problemas, por ejemplo, en restauración de imágenes, dinámica de fluidos, teoría de elasticidad y ecuaciones diferenciales con condiciones de crecimiento no estándar (Ver, por ejemplo, [25], [34], [154], [183], [186]).

En esta sección se estudia la existencia y unicidad de soluciones de la ecuación integral de Hammerstein

$$u(t) = g(t) + \nu \int_I K(t,s) f(u(s)) ds \text{ para } t \in I,\ \nu \in \mathbb{R} \tag{4.3}$$

en el espacio de Banach $WBV_{p(\cdot)}(I)$ con la norma $||\cdot||^W_{p(\cdot)}$. En lo que sigue, asumamos que $I = [0, a]$, $a = 1$ y que se satisfacen las siguientes condiciones:

[7] Las condiciones del Teorema del principio del punto fijo de Schauder son que la condición de invarianza $T(D) \subset D$ debe garantizarse para un subconjunto D convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach

(1^0) g es una $WBV_{p(\cdot)}$-función.

(2^0) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función localmente Lipschitz.

(3^0) $K: I\times I\to\mathbb{R}$ es una función tal que $K(t,\cdot)$ es L-integrable para todo $t\in I$, $K(0,s)=0$ y existe un número $\alpha>0$ tal que $V^W_{p(\cdot)}(K(\cdot,s)/\alpha)\leq M(s)$ para $s\in I$ a.e., donde $M: I\to\mathbb{R}_+$ es una función L-integrable.

Teorema 4.3

Bajo las suposiciones (1^0), (2^0) y (3^0) existe un número $\rho>0$ tal que para todo v con $|v|<\rho$, la ecuación (4.3) tiene una única $WBV_{p(\cdot)}$-solución, definida en I.

Demostración:

Sea π^* una partición seleccionada del intervalo I. Por (3^0)

$$\text{ínf}\left\{\varepsilon>0:\ \int_I V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{K(\cdot,s)}{\varepsilon}\right)ds\leq 1\right\}=:c<\infty.$$

Además,

$$\int_I V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{K(\cdot,s)}{\alpha}\right)ds<\infty.$$

Sea $\beta=\int_I V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{K(\cdot,s)}{\alpha}\right)ds$ y $\gamma=\text{máx}\{1,\beta\}\alpha$. De las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{K(\cdot,s)}{\text{máx}\{1,\beta\}\alpha}\right)ds &\leq \frac{1}{\text{máx}\{1,\beta\}}\int_I V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{K(\cdot,s)}{\alpha}\right)ds\\
&= \frac{\beta}{\text{máx}\{1,\beta\}}\\
&\leq 1
\end{aligned}$$

se sigue que

$$\int_I V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{K(\cdot,s)}{\gamma}\right)ds\leq 1$$

por lo tanto

$$\text{ínf}\left\{\varepsilon>0:\ \int_I V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{K(\cdot,s)}{\varepsilon}\right)ds\leq 1\right\}=:c\leq\gamma.$$

Sea $r>0$ tal que $||g||^W_{p(\cdot)}<r$ y L_r denota la constante Lipschitz la cual corresponde a la función f y el intervalo $[-r,r]$. Seleccionemos un número $\rho>0$ tal que

$$||g||^W_{p(\cdot)}+\rho c\sup_{t\in[-r,r]}|f(t)|<r \tag{4.4}$$

y

$$\rho L_r c\hat{c}<1$$

donde $\hat{c}$ es un número suficientemente pequeño que satisface la desigualdad

$$||u||_\infty\leq\hat{c}||u||^W_{p(\cdot)}.$$

Denotemos por $\bar{B}_r$ la bola cerrada de centro cero y radio r en el espacio $WBV_{p(\cdot)}(I)$. Sea $|v| < \rho$ fijo. Definamos

$$G(u)(t) := g(t) + vF(u)(t)$$

donde

$$F(u)(t) = \int_I K(t,s) f(u(s)) ds \quad u \in \bar{B}_r, \ t \in I.$$

Ya que $f \in Lip(I) \subset WBV_{p(\cdot)}(I)$ (Ver [72]), es decir $f \in WBV_{p(\cdot)}(I)$. Por la Proposición 2.4 la función f es medible y por el Lema 2.6 es acotado. Así, las aplicaciones F y G están bien definidas. Ahora se verificará que $G(\bar{B}_r) \subset \bar{B}_r$. En efecto, para todo $u \in \bar{B}_r$ se tiene

$$\begin{aligned}
||G(u)||^W_{p(\cdot)} &= ||g + vF(u)||^W_{p(\cdot)} \\
&\leq ||g||^W_{p(\cdot)} + ||vF(u)||^W_{p(\cdot)} \\
&= ||g||^W_{p(\cdot)} + \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \ V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{vF(u)}{\lambda}\right) \leq 1\right\}.
\end{aligned}$$

Así, por la desigualdad de Jensen

$$\begin{aligned}
V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{vF(u)}{\lambda}\right) &= \sup_{\pi^*} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|v|}{\lambda}|F(u)(t_i) - F(u)(t_{i-1})|\right)^{p(x_{i-1})} \\
&\leq \sup_{\pi^*} \left(\int_I \frac{|v|}{\lambda}|K(t_i,s) - K(t_{i-1},s)||f(u(s))|ds\right)^{p(x_{i-1})} \\
&\leq \sup_{\pi^*} \left(\int_I \frac{|v|}{\lambda} \sup_{s\in I}|f(u(s))||K(t_i,s) - K(t_{i-1},s)|ds\right)^{p(x_{i-1})} \\
&\leq \sup_{\pi^*} \int_I \left(\frac{|v|}{\lambda} \sup_{t\in[-r,r]} |f(t)||K(t_i,s) - K(t_{i-1},s)|\right)^{p(x_{i-1})} ds \\
&\leq \int_I V^W_{p(\cdot)}\left(|v| \sup_{t\in[-r,r]} |f(t)| \frac{K(\cdot,s)}{\lambda}\right) ds
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
&\text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \ V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{vF(u)}{\lambda}\right) \leq 1\right\} \\
&\quad \leq \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \int_I V^W_{p(\cdot)}\left(|v| \sup_{t\in[-r,r]} |f(t)| \frac{K(\cdot,s)}{\lambda}\right) ds \leq 1\right\} \\
&\quad = |v| \sup_{t\in[-r,r]} |f(t)| \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \int_I V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{K(\cdot,s)}{\lambda}\right) ds \leq 1\right\} \\
&\quad = |v| \sup_{t\in[-r,r]} |f(t)| c.
\end{aligned}$$

Consecuentemente, como $|v| < \rho$ entonces por (4.4)

$$||G(u)||^W_{p(\cdot)} \leq ||g||^W_{p(\cdot)} + |v| \sup_{t\in[-r,r]} |f(t)| c < r.$$

Por lo tanto $G(\bar{B}_r) \subset B_r$. Ahora se demostrará que G es una contracción. Así, para todo $u, v \in \bar{B}_r$,

$$\begin{aligned}
V_{p(\cdot)}^{W}&\left(\frac{\nu(F(u)-F(v))}{\lambda}\right)\\
&\leq \sup_{\pi^*}\sum_{i=1}^{n}\left(\int_I \frac{|\gamma|}{\lambda}|K(t_i,s)-K(t_{i-1})||f(u(s))-f(v(s))|ds\right)^{p(x_{i-1})}\\
&\leq \sup_{\pi^*}\sum_{i=1}^{n}\left(\int_I \frac{|\gamma|}{\lambda}\sup_{s\in I}|f(u(s))-f(v(s))||K(t_i,s)-K(t_{i-1})|ds\right)^{p(x_{i-1})}\\
&\leq \sup_{\pi^*}\sum_{i=1}^{n}\left(\int_I \frac{|\gamma|}{\lambda}\sup_{s\in I}L_r|u(s)-v(s)||K(t_i,s)-K(t_{i-1})|ds\right)^{p(x_{i-1})}\\
&\leq \int_I V_{p(\cdot)}^{W}\left(|\nu|L_r\sup_{s\in I}|u(s)-v(s)|\frac{K(\cdot,s)}{\lambda}\right)ds
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
G(u)-G(v) &= g(t)+\nu F(u)(t)-(g(t)+\nu F(v)(t))\\
&= \nu(F(u)(t)-F(v)(t)).
\end{aligned}$$

Entonces se obtiene

$$\begin{aligned}
||G(u)-G(v)||_{p(\cdot)}^{W} &= \text{ínf}\left\{\lambda>0:\ V_{p(\cdot)}^{W}\left(\frac{\nu(F(u)-F(v))}{\lambda}\right)\leq 1\right\}\\
&\leq \text{ínf}\left\{\lambda>0:\ \int_I V_{p(\cdot)}^{W}\left(|\nu|L_r\sup_{s\in I}|u(s)-v(s)|\frac{K(\cdot,s)}{\lambda}\right)ds\leq 1\right\}\\
&\leq \text{ínf}\left\{\lambda>0:\ \int_I V_{p(\cdot)}^{W}\left(|\nu|L_r\hat{c}||u-v||_{p(\cdot)}^{W}\frac{K(\cdot,s)}{\lambda}\right)ds\leq 1\right\}\\
&\leq \text{ínf}\left\{\lambda>0:\ |\nu|L_r\hat{c}||u-v||_{p(\cdot)}^{W}\int_I V_{p(\cdot)}^{W}\left(\frac{K(\cdot,s)}{\lambda}\right)ds\leq 1\right\}\\
&= |\nu|L_r||u-v||_{p(\cdot)}^{W}c\hat{c}.
\end{aligned}$$

Aplicando el principio de contracción de Banach se deduce que G tiene un único punto fijo en $\bar{B}_r$ el cual es únicamente una $WBV_{p(\cdot)}$-solución de (4.3).

□

Ejemplo 4.1

Si $K: I\times I \to \mathbb{R}$ está definido por $K(t,s) = K_1(t)K_2(s)$ para $(t,s)\in I\times I$, donde $K_1(0)=0$, $K_1 \in WBV_{p(\cdot)}(I)$ y K_2 es una función medible Lebesgue, no constante y acotada, entonces $K(t,\cdot)$ es integrable en I y

$$V_{p(\cdot)}^{W}\left(\frac{K(\cdot,s)}{\lambda}\right) = V_{p(\cdot)}^{W}\left(\frac{K_1(\cdot)K_2(s)}{\lambda}\right)\leq \frac{|K_2(s)|}{\lambda}V_{p(\cdot)}^{W}(K_1)$$

donde $\lambda = \sup_{s\in I}|K_2(s)|$.

En particular $V_{p(\cdot)}^{W}\left(\frac{K(\cdot,s)}{\lambda}\right)$ es integrable Lebesgue en I y K satisface la condición (3^0).

Ahora consideremos la $WBV_{p(\cdot)}$-solución continua de la ecuación (4.3); asumamos adicionalmente que:

(4^0) $g : I \to \mathbb{R}$ es una $WBV_{p(\cdot)}$-función continua;

(5^0) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $t, \tau, s \in I$,

$$|t-\tau| < \delta \ \Rightarrow \ |K(\tau,s) - K(t,s)| < \varepsilon.$$

Teorema 4.4

Supongamos que las condiciones (2^0-5^0) se satisfacen. Entonces existe un número $\rho > 0$ tal que para todo λ con $|\lambda| < \rho$, la ecuación (4.3) tiene una $WBV_{p(\cdot)}$-solución continua, definida en I.

Demostración:

Consideremos el espacio $WBV^C_{p(\cdot)}(I) = WBV_{p(\cdot)}(I) \cap C(I)$ con la norma $||\cdot||^W_{p(\cdot)}$. Sea $\{u_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión en $WBV^C_{p(\cdot)}(I)$ tal que

$$||u_n - u||^W_{p(\cdot)} \to 0 \ \text{ donde } \ u \in WBV_{p(\cdot)}(I).$$

Entonces, se tiene que

$$||u_n - u||_C \to 0 \ \text{ por consiguiente } \ u \in C(I).$$

Por lo tanto $WBV^C_{p(\cdot)}(I)$ con la norma $||\cdot||^W_{p(\cdot)}$ es un espacio de Banach. Sean $r > 0$ tal que $||g||^W_{p(\cdot)} < r$ y $\bar{B}_r$ la bola cerrada de centro cero y radio r en $WBV^C_{p(\cdot)}(I)$. Entonces

$$\begin{aligned}
|G(u)(t) - G(u)(\tau)| &= |g(t) + \nu F(u)(t) - g(\tau) - \nu F(u)(\tau)| \\
&\leq |g(t) - g(\tau)| + |\nu(F(u)(t) - F(u)(\tau))| \\
&= |g(t) - g(\tau)| + \left|\nu\left(\int_I K(t,s) f(u(s))ds - \int_I K(\tau,s) f(u(s))ds\right)\right| \\
&\leq |g(t) - g(\tau)| + \left|\nu\left(\int_I \sup_{s\in I} |f(u(s))|(K(t,s) - K(\tau,s))ds\right)\right| \\
&\leq |g(t) - g(\tau)| + |\nu| \sup_{t\in[-r,r]} |f(t)| \int_I |K(t,s) - K(\tau,s)| ds
\end{aligned}$$

para $u \in \bar{B}_r$, $t, \tau \in I$, por (4^0) y (5^0) se tiene que $G(u)$ es una función continua. Por lo tanto G aplica $\bar{B}_r$ en si mismo. Haciendo uso del mismo razonamiento del Teorema 4.3 se obtiene el resultado.

□

4.2 Ecuación Integral de Volterra-Hammerstein

En esta sección se demuestra la existencia local de soluciones de la ecuación integral de Volterra - Hammerstein

$$u(t) = g(t) + \int_0^t K(t,s) f(u(s))\, ds \ \text{ for } \ t \in I. \tag{4.5}$$

Asumamos que

(6^0) $p : I \to (1,\infty)$ es una función continua. $T = \{(t,s): \ 0 \le t \le 1, \ 0 \le s \le t\}$, $K : T \to \mathbb{R}$ es una función tal que $K(t,\cdot)$ es L-integrable en $[0,t]$ para todo $t \in I$ y existe un número $\alpha > 0$ tal que

$$\left(\frac{|K(s,s)|}{\alpha}\right)^{p(x_s)} + V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{K(\cdot,s)}{\alpha},[s,1]\right) \le m(s)$$

para $s \in I$ en casi todas partes, donde $m : I \to \mathbb{R}_+$ es una función L-integrable para cada $s \in I$, $x_s \in I$ seleccionado de manera que $|K(s,s)|^{p(x_s)}$ es el máximo para la función $t \to |K(s,s)|^{p(t)}$.

Teorema 4.5

Supongamos que las condiciones (1^0), (2^0) y (6^0) se satisfacen. Entonces existe un intervalo $J \subset I$ tal que la ecuación (4.5) tiene una única $WBV_{p(\cdot)}$-solución, definida en J.

Demostración:

Sean r, L_r y $\hat{c}$ definidos como en la demostración del Teorema 4.3. Escojamos un entero positivo N tal que

$$\sup_{t\in[-r,r]} |f(t)|\left(\frac{\alpha}{2^N}\right) + ||g||^W_{p(\cdot)} < r \tag{4.6}$$

y

$$L_r\hat{c}\left(\frac{\alpha}{2^N}\right) < 1. \tag{4.7}$$

Sea $0 < d \le 1$ y $L := 2^{max\{p(t):\, t\in I\}}$ tal que

$$\int_0^d \left[\left(\frac{2^N|K(s,s)|}{\alpha}\right)^{p(x_s)} + V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{2^N K(\cdot,s)}{\alpha},[s,d]\right)\right] ds \le L^N \int_0^d m(s)ds \le 1. \tag{4.8}$$

Escojamos d como en (6^0) y por la continuidad absoluta de la integral de Lebesgue existe $0 \le d \le 1$ tal que

$$\int_0^d \left[\left(\frac{|K(s,s)|}{\alpha}\right)^{p(x_s)} + V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{K(\cdot,s)}{\alpha},[s,d]\right)\right] ds \le \int_0^d m(s)ds \le 1$$

y

$$\int_0^d \left[\left(\frac{2|K(s,s)|}{\alpha}\right)^{p(x_s)} + V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{2K(\cdot,s)}{\alpha},[s,d]\right)\right] ds \le L\int_0^d m(s)ds \le 1$$

por lo que podemos seleccionar d de tal manera que $L\int_0^d m(s)ds \le 1$. Argumentando de manera similar a lo anterior, se puede afirmar que para cada $N \in \mathbb{N}$ existe un número $0 < d < 1$ que satisface (4.8). Por (4.8) se obtiene la desigualdad

$$\text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \ \int_0^d \left[\left(\frac{|K(s,s)|}{\lambda}\right)^{p(x_s)} + V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{K(\cdot,s)}{\lambda},[s,d]\right)\right] ds \le 1\right\} \le \frac{\alpha}{2^N}. \tag{4.9}$$

Consideremos

$$\hat{K}(t,s) := \begin{cases} K(t,s), & 0 \le s \le t \\ 0, & t < s \le d. \end{cases}$$

y $J=[0,d]$. Definamos $G(u)(t) := g(t) + F(u)(t)$, donde

$$F(u)(t) := \int_0^t K(t,s) f(u(s))\,ds \ \text{ para } \ u \in \bar{B}_r,\ t \in J$$

de manera que $\bar{B}_r$ está definido como en la demostración del Teorema 4.3.

En lo que sigue se verificará que G aplica $\bar{B}_r$ en si mismo. Para $u \in \bar{B}_r$ se tiene que

$$\begin{aligned} ||G(u)||^W_{p(\cdot)} &= ||g+F(u)||^W_{p(\cdot)} \\ &\le ||g||^W_{p(\cdot)} + ||F(u)||^W_{p(\cdot)} \\ &\le ||g||^W_{p(\cdot)} + \left|\left|\int_0^t K(t,s) f(u(s))\,ds\right|\right|^W_{p(\cdot)} \\ &= ||g||^W_{p(\cdot)} + \text{ínf}\left\{\lambda > 0 :\ V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{F(u)}{\lambda}\right) \le 1\right\}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Entonces

$$\begin{aligned} V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{F(u)}{\lambda}\right) &= \sup_{\pi^*} \sum_{j=1}^n \left|\frac{F(u)(t_j) - F(u)(t_{j-1})}{\lambda}\right|^{p(x_{j-1})} \\ &= \sup_{\pi^*} \sum_{j=1}^n \left|\frac{\int_0^{t_j} K(t_j,s) f(u(s))\,ds - \int_0^{t_{j-1}} K(t_{j-1},s) f(u(s))\,ds}{\lambda}\right|^{p(x_{j-1})} \\ &= \sup_{\pi^*} \sum_{j=1}^n \left|\int_0^d \frac{1}{\lambda}(\hat{K}(t_j,s) - \hat{K}(t_{j-1},s)) f(u(s))\,ds\right|^{p(x_{j-1})} \\ &\le \sup_{\pi^*} \sum_{j=1}^n \left|\int_0^d \frac{1}{\lambda} \sup_{s\in J} |f(u(s))||\hat{K}(t_j,s) - \hat{K}(t_{j-1},s)|\,ds\right|^{p(x_{j-1})} \\ &\le \sup_{\pi^*} \sum_{j=1}^n \int_0^d \left|\sup_{t\in[-r,r]} |f(t)| \frac{|\hat{K}(t_j,s) - \hat{K}(t_{j-1},s)|}{\lambda}\right|^{p(x_{j-1})} ds \\ &\le \int_0^d V^W_{p(\cdot)}\left(\sup_{t\in[-r,r]} |f(t)| \frac{\hat{K}(\cdot,s)}{\lambda}\right) ds \end{aligned}$$

así, aplicando inf, se tiene

$$\begin{aligned} \text{ínf}\left\{\lambda > 0 :\ V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{F(u)}{\lambda}\right) \le 1\right\} &\le \text{ínf}\left\{\lambda > 0 :\ \int_0^d V^W_{p(\cdot)}\left(\sup_{t\in[-r,r]} |f(t)| \frac{\hat{K}(\cdot,s)}{\lambda}\right) ds \le 1\right\} \\ &\le \sup_{t\in[-r,r]} |f(t)|\, \text{ínf}\left\{\lambda > 0 :\ \int_0^d V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{\hat{K}(\cdot,s)}{\lambda}\right) ds \le 1\right\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_0^d V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{\hat{K}(\cdot,s)}{\lambda}\right) ds = \int_0^d \left[\left(\frac{|K(s,s)|}{\lambda}\right)^{p(x_s)} + V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{K(\cdot,s)}{\lambda}, [s,d]\right)\right] ds$$

En efecto, ya que $\widehat{K}(t,s)=0$ para $t<s$, se obtiene que si $t_0<s<t_1$ con $t_0,t_1\in[0,d]$, entonces la continuidad de p implica que existe un $x_s\in[0,d]$ tal que

$$|\widehat{K}(t_1,s)-\widehat{K}(t_0,s)|^{p(x_0)}\leq|K(t_1,s)-K(s,s)|^{p(x_0)}+|K(s,s)|^{p(x_s)}.$$

Por lo tanto, por la Definición 2.1 obtenemos que

$$\begin{aligned}
V^W_{p(\cdot)}(\widehat{K}(\cdot,s)) &= \sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{n}|\widehat{K}(t_j,s)-\widehat{K}(t_{j-1},s)|^{p(x_{j-1})}\\
&= \sup_{s\in\pi^*}\sum_{j=1}^{n}|\widehat{K}(t_j,s)-\widehat{K}(t_{j-1},s)|^{p(x_{j-1})}\\
&= V^W_{p(\cdot)}(K(\cdot,s),[s,d])+|K(s,s)|^{p(x_s)}
\end{aligned}$$

para algún $x_s\in[0,d]$.

Entonces, por (4.9) se obtiene

$$\text{ínf}\left\{\lambda>0:\ V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{F(u)}{\lambda}\right)\leq 1\right\}\leq\sup_{t\in[-r,r]}|f(t)|\frac{\alpha}{2^N}.$$

Por (4.6) y (4.10)

$$||G(u)||^W_{p(\cdot)}\leq||g||^W_{p(\cdot)}+\sup_{t\in[-r,r]}|f(t)|\frac{\alpha}{2^N}<r$$

por lo que $G(\bar{B}_r)\subset\bar{B}_r$.

Ahora se demostrará que G es una contracción. Para todo $u,v\in\bar{B}_r$, se tiene

$$\begin{aligned}
||G(u)-G(v)||^W_{p(\cdot)} &= ||(g+F(u))-(g+F(v))||^W_{p(\cdot)}\\
&= ||F(u)-F(v)||^W_{p(\cdot)}\\
&= \text{ínf}\left\{\lambda>0:\ V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{F(u)-F(v)}{\lambda}\right)\leq 1\right\}
\end{aligned}$$

por definición de $\hat{K}$ y F y haciendo uso del hecho de que f es Lipschitz, se tiene

$$
\begin{aligned}
V_{p(\cdot)}^{W}\left(\frac{F(u)-F(v)}{\lambda}\right) &= \sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda}\left|F(u)(t_j)-F(u)(t_{j-1})-F(v)(t_j)-F(v)(t_{j-1})\right|\right)^{p(x_{j-1})} \\
&= \sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda}\left|\int_0^{t_i} K(t_j,s)(f(u(s))-f(v(s)))ds\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left.-\int_0^{t_{j-1}} K(t_{j-1},s)(f(u(s))-f(v(s)))ds\right|\right)^{p(x_{j-1})} \\
&\le \sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda}\int_0^{d}|\hat{K}(t_j,s)-\hat{K}(t_{j-1},s)||f(u(s))-f(v(s))|ds\right)^{p(x_{j-1})} \\
&\le \sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{n}\int_0^{d}\left(\frac{1}{\lambda}\sup_{s\in J}|f(u(s))-f(v(s))||\hat{K}(t_j,s)-\hat{K}(t_{j-1},s)|\right)^{p(x_{j-1})} ds \\
&\le \sup_{\pi^*}\sum_{j=1}^{n}\int_0^{d}\left(\frac{1}{\lambda}L_r\sup_{s\in J}|u(s)-v(s)||\hat{K}(t_j,s)-\hat{K}(t_{j-1},s)|\right)^{p(x_{j-1})} ds \\
&\le \int_0^{d} V_{p(\cdot)}^{W}\left(L_r\sup_{s\in J}|u(s)-v(s)|\frac{\hat{K}(\cdot,s)}{\lambda}\right)ds
\end{aligned}
$$

por (4.9) se obtiene

$$
\begin{aligned}
||G(u)-G(v)||_{p(\cdot)}^{W} &= \inf\left\{\lambda>0:\ V_{p(\cdot)}^{W}\left(\frac{F(u)-F(v)}{\lambda}\right)\le 1\right\} \\
&\le \inf\left\{\lambda>0:\ \int_0^{d} V_{p(\cdot)}^{W}\left(L_r\sup_{s\in J}|u(s)-v(s)|\frac{\hat{K}(\cdot,s)}{\lambda}\right)ds\le 1\right\} \\
&\le L_r\sup_{s\in J}|u(s)-v(s)|\frac{\alpha}{2^N} \\
&\le L_r\hat{c}||u(s)-v(s)||_{p(\cdot)}^{W}\frac{\alpha}{2^N}.
\end{aligned}
$$

Aplicando el principio de contracción de Banach se deduce que G tiene un único punto fijo en $\bar{B}_r$ el cual es una $WBV_{p(\cdot)}$-solución de (4.5).

□

Ejemplo 4.2

Si $p: I\to(1,\infty)$ es una función continua y K, K_1, K_2 están definidas como en el Ejemplo 4.1 entonces K satisface la condición (6^0), donde $m(s)=\left(\frac{K(s,s)}{\alpha}\right)^{p(x_s)}+\frac{|K_2(s)|}{\lambda}V_{p(\cdot)}^{W}(K_1)$ y $\lambda=\sup_{s\in I}|K_2(s)|$.

Ahora, consideremos $WBV_{p(\cdot)}$-soluciones continuas de la ecuación (4.5). Asumamos una condición adicional:

(7^0) Para cada $t\in I$ y para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que para todo $\tau\in I$ y $s\in[0,t]\cap[0,\tau]$,

$$|\tau-t|<\delta \ \Rightarrow\ |K(\tau,s)-K(t,s)|<\varepsilon.$$

Teorema 4.6

Supongamos que las condiciones (2^0), (4^0), (6^0) y (7^0) se satisfacen. Entonces existe un intervalo $J \subset I$ tal que la ecuación (4.5) tiene una única $WBV_{p(\cdot)}$-solución continua, definida en J.

Demostración:

Sean $r > 0$ tal que $||g||^W_{p(\cdot)} < r$ y $\bar{B}_r$ una bola cerrada de centro cero y radio r en $WBV^C_{p(\cdot)}(I)$. Entonces las condiciones (4^0) y (7^0) garantizan que G aplica funciones continuas en funciones continuas. Así G aplica $\bar{B}_r$ en si mismo. Haciendo uso del mismo razonamiento del Teorema 4.2 se obtiene el resultado.

□

Ejemplo 4.3

Si K_1, K_2 están definidos como en el Ejemplo 4.1 y además K_1 es continua en I se obtiene que K satisface la condición (5^0) y (7^0).

4.3 Soluciones Globales de Ecuaciones

Consideremos la ecuación integral de Hammerstein

$$u(t) = g(t) + \int_I K(t,s) f(u(s))ds \quad \text{para} \quad t \in I. \tag{4.11}$$

Para simplicidad, asumamos que $a = 1$ y que la condición (1^0) y (3^0) se satisfacen. Además, asumamos que:

(8^0) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(9^0) Existe $\Psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ con $\Psi(u) > 0$ y

$$\sup_{s\in[0,1]} |f(u(s))| \leq \Psi\left(||u||^W_{p(\cdot)}\right) \quad \text{para todo} \quad u \in WBV_{p(\cdot)}(I).$$

(10^0) Existe $M_0 > 0$ con

$$\frac{M_0}{||g||^W_{p(\cdot)} + \Psi(M_0)c} > 1$$

donde c es una constante definida por

$$\text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \int_I V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{K(\cdot,s)}{\lambda}\right) ds \leq 1\right\} =: c.$$

(11^0) Existe $\phi_{M_0} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ continua y no decreciente donde $c\phi_{M_0}(\hat{c}z) < z$ para $z > 0$ y con $|f(u) - f(v)| \leq \phi_{M_0}(|u - v|)$ para $|u|, |v| \leq M_0$ y $\hat{c}$ como se definió anteriormente.

Teorema 4.7

Bajo las suposiciones anteriores, la ecuación (4.11) tiene una $WBV_{p(\cdot)}$-solución, definida en I.

Demostración:

Denotemos por $\bar{B}_{M_0}$ la bola cerrada de centro cero y radio M_0 en el espacio $WBV_{p(\cdot)}(I)$. Definamos

$$G(u)(t) := g(t) + \int_I K(t,s)f(u(s))ds \text{ para } u \in \bar{B}_{M_0} \text{ y } t \in I.$$

Para todo $u, v \in \bar{B}_{M_0}$ se tiene

$$\begin{aligned}
&V_{p(\cdot)}^W\left(\frac{\int_I K(\cdot,s)(f(u(s)) - f(v(s)))ds}{\lambda}\right) \\
&= \sup_{\pi^*} \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{\lambda}\int_I |K(t_j,s) - K(t_{j-1},s)|(f(u(s)) - f(v(s)))ds\right)^{p(x_{j-1})} \\
&\leq \sup_{\pi^*} \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{\lambda}\int_I \sup_{s\in I}(f(u(s)) - f(v(s)))|K(t_j,s) - K(t_{j-1},s)|ds\right)^{p(x_{j-1})} \\
&\leq \sup_{\pi^*} \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{\lambda}\int_I \sup_{s\in I}\phi_{M_0}(u(s) - v(s))|K(t_j,s) - K(t_{j-1},s)|ds\right)^{p(x_{j-1})} \\
&\leq \int_I V_{p(\cdot)}^W\left(\sup_{s\in I}\phi_{M_0}(u(s) - v(s))\frac{|K(\cdot,s)|}{\lambda}\right)ds
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
||G(u) - G(v)||_{p(\cdot)}^W &= \left|\left|g(t) + \int_I K(t,s)f(u(s))ds - g(t) - \int_I K(t,s)f(v(s))ds\right|\right|_{p(\cdot)}^W \\
&= \left|\left|\int_I K(t,s)(f(u(s)) - f(v(s)))ds\right|\right|_{p(\cdot)}^W \\
&\leq \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \int_I V_{p(\cdot)}^W\left(\sup_{s\in I}\phi_{M_0}(u(s) - v(s))\frac{|K(\cdot,s)|}{\lambda}ds\right) \leq 1\right\} \\
&\leq \sup_{s\in I}\phi_{M_0}(u(s) - v(s))\,\text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \int_I V_{p(\cdot)}^W\left(\frac{|K(\cdot,s)|}{\lambda}\right)ds \leq 1\right\} \\
&= c\sup_{s\in I}\phi_{M_0}(u(s) - v(s)) \\
&\leq c\phi_{M_0}\left(\hat{c}||u(s) - v(s)||_{p(\cdot)}^W\right).
\end{aligned}$$

Así, en particular, $G(\bar{B}_{M_0})$ es acotada. Como $u \in \bar{B}_{M_0}$ entonces existe una sucesión $\{u_n\} \subset B_{M_0}$ de funciones que convergen a u. En particular, esta sucesión converge uniformemente a u. Por lo tanto

$$V_{p(\cdot)}^W\left(\frac{\int_I K(\cdot,s)(f(u_n(s))ds}{\lambda}\right) \leq \sup_n \sup_{s\in I}|f(u_n(s))|c.$$

De este modo, se concluye que G aplica $\bar{B}_{M_0}$ en $WBV_{p(\cdot)}(I)$.

Supongamos que $u \in WBV_{p(\cdot)}(I)$ donde $||u||^W_{p(\cdot)} = M_0$ es una solución de

$$u(t) = \lambda\left(g(t) + \int_I K(t,s) f(u(s))ds\right) \quad \text{para} \quad t \in I \;\; \text{y} \;\; \lambda \in (0,1].$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{\int_I K(\cdot,s) f(u(s))ds}{\lambda}\right) &\leq \sup_{\pi^*} \sum_{j=1}^{n} \left(\int_I \frac{1}{\lambda} |K(t_j,s) - K(t_{j-1},s)| f(u(s))ds\right)^{p(x_{j-1})} \\
&\leq \sup_{\pi^*} \sum_{j=1}^{n} \left(\int_I \frac{1}{\lambda} \sup_{s\in I} |f(u(s))||K(t_j,s) - K(t_{j-1},s)|ds\right)^{p(x_{j-1})} \\
&\leq \sup_{s\in I} |f(u(s))| \int_I V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{K(\cdot,s)}{\lambda}\right) ds
\end{aligned}$$

así, por la condición (9^0) obtenemos que

$$\begin{aligned}
||u||^W_{p(\cdot)} &= \left|\left| g(t) + \int_I K(t,s) f(u(s))ds \right|\right|^W_{p(\cdot)} \\
&\leq ||g(t)||^W_{p(\cdot)} + \left|\left| \int_I K(t,s) f(u(s))ds \right|\right|^W_{p(\cdot)} \\
&= ||g(t)||^W_{p(\cdot)} + \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \; V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{\int_I K(t,s) f(u(s))ds}{\lambda}\right) \leq 1\right\} \\
&\leq ||g(t)||^W_{p(\cdot)} + \sup_{s\in I} |f(u(s))| c \\
&\leq ||g(t)||^W_{p(\cdot)} + \Psi\left(||u||^W_{p(\cdot)}\right) c
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{||u||^W_{p(\cdot)}}{||g(t)||^W_{p(\cdot)} + \Psi\left(||u||^W_{p(\cdot)}\right) c} \leq 1.$$

Considerando $||u||^W_{p(\cdot)} = M_0$ en la ecuación anterior implica que

$$\frac{M_0}{||g(t)||^W_{p(\cdot)} + \Psi\left(||u||^W_{p(\cdot)}\right) c} \leq 1$$

el cual contradice la condición (10^0). Al aplicar la alternativa no linear del tipo Leray-Schauder (Teorema 4.2) se deduce que G tiene un punto fijo en $B_{M_0} = \left\{u \in WBV_{p(\cdot)}(I) : \; ||u||^W_{p(\cdot)} < M_0\right\}$, el cual es una $WBV_{p(\cdot)}$-solución de (4.11).

□

N

La ecuación (4.5) es un caso especial de la ecuación (4.11). Si consideramos

$$\hat{K}(t,s) := \begin{cases} K(t,s), & 0 \le s \le t \\ 0, & t < s \le d, \end{cases}$$

la ecuación (4.5) se puede escribir de las siguientes formas equivalentes

$$u(t) = g(t) + \int_I \hat{K}(t,s) f(u(s)) ds \quad \text{para} \quad t \in I. \tag{4.12}$$

Teorema 4.8

Supongamos que las condiciones (1^0), (6^0), (8^0) y (9^0) se satisfacen. Más aún, asumamos que

(12^0) Existe $M_0 > 0$ con $M_0/(||g||^W_{p(\cdot)} + \Psi(M_0)\bar{c}) > 1$, donde

$$\bar{c} = \text{ínf}\left\{\lambda > 0: \int_0^1 \left[\left(\frac{|K(s,s)|}{\lambda}\right)^{p(x_s)} + V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{K(\cdot,s)}{\lambda}, [s,1]\right)\right] ds \le 1\right\}$$

y la condición (11^0) se satisface con $\bar{c}$ en lugar de c. Entonces la ecuación (4.12) tiene una $WBV_{p(\cdot)}$-solución, definida en I.

Demostración:

El resultado se sigue del Teorema 4.3. En efecto

$$\begin{aligned} V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{\hat{K}(\cdot,s)}{\lambda}, I\right) &= \sup_{\pi^*} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\hat{K}(t_j,s) - \hat{K}(t_{j-1},s)|^{p(x_n)}}{\lambda} \\ &= \frac{|K(s,s)|^{p(x_s)}}{\lambda} + V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{K(\cdot,s)}{\lambda}, [s,1]\right) \\ &\le m(s) \quad \text{a.e.} \quad s \in I, \end{aligned}$$

así $\hat{K}$ satisface (3^0). Además

$$\begin{aligned} &\text{ínf}\left\{\lambda > 0: \int_I V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{\hat{K}(\cdot,s)}{\lambda}\right) ds \le 1\right\} \\ &\quad = \text{ínf}\left\{\lambda > 0: \int_I \left(\frac{|K(s,s)|}{\lambda}\right)^{p(x_s)} + V^W_{p(\cdot)}\left(\frac{\hat{K}(\cdot,s)}{\lambda}, [s,1]\right) ds \le 1\right\} \\ &\quad = \bar{c} \end{aligned}$$

y se considera $c = \bar{c}$.

□

5 Espacios Intermedios Entre El Espacio de (p,k)-Variación Acotada en el Sentido de Riesz-Popoviciu y la Clase de Riesz.

F. Riesz (1910), en [143] establece una relación entre la clase de Riesz[1] y la clase de funciones de p-variación acotada; luego A. P. Terehin (1965), en [165], da otra caracterización del espacio de Riesz en términos del módulo de continuidad fraccional de orden $1-1/p$. Más tarde, N. Merentes (1992), en [118], introduce la clase de funciones de segunda $(p,1/p')$-variación acotada, demuestra un resultado similar al dado por Riesz y da una caracterización del espacio de Riesz en términos de las funciones de segunda $(p,1/p')$-variación acotada. M. Lind (2013), en [88], estudia dos funcionales, la variación acotada en el sentido de Riesz y el módulo de p-continuidad. Estos funcionales generan espacios intermedios[2] conectando la clase de funciones de p-variación y el espacio de Riesz, además demuestra algunas relaciones con límites en estos espacios intermedios y encuentra la mejor estimación en términos del módulo fraccional de orden $1-1/p$. S. Barza y P. Silvestre (2014), en [21] demuestran que los funcionales generalizados del tipo Merentes generan espacios intermedios que conectan la clase de funciones de segunda p-variación acotada con el espacio de Riesz de funciones con segunda derivada p-integrable, además demuestran algunas relaciones con límites para estos funcionales y obtienen la mejor estimación en términos del módulo fraccional de orden $2-1/p$; extendiendo los resultados de Lind para funciones de variación acotada.

Este capítulo está dedicado al estudio de diferentes generalizaciones del concepto clásico de las funciones de variación acotada. Inspirados por los resultados de F. Riesz (1910), en [143], A. P. Terehin (1965) y (1972) en [165] y [166], respectivamente, N. Merentes (1992), en [118], M. Lind (2013) en [88] y S. Barza y P. Silvestre en (2014) [21], como contribución a este tema (Ver [113]) se considera la relación entre el espacio de (p,k)-variación acotada en el sentido de Riesz-Popoviciu y el p-módulo de continuidad. Con estos funcionales se generan espacios intermedios que conectan el espacio de funciones de (p,k)-variación acotada y el espacio de Riesz de funciones con k-ésima derivada p-integrable. Y por último, se demuestran algunas relaciones con límites para estos funcionales y se obtiene la mejor estimación en

[1] La clase de Riesz, fue introducido por F. Riesz (1910), en [143], para denotar aquellas funciones 1-periódica absolutamente continuas cuya derivada está en L_p. Este espacio funcional es un caso particular (o variante) de lo que se conoce en el análisis contemporáneo como espacios de Sobolev, introducidos por Serguei. L. Sobolev (1938), en [162] (Para más información referente a los espacios de Sobolev, referimos al lector interesado a [2], [147], [163]).

[2] En la literatura, los espacios intermedios, también se denominan escala de espacios

términos del módulo fraccional de orden $k-1/p$.

5.1 Preliminares

Para iniciar esta sección se presentaran algunas notaciones usadas a lo largo del capítulo:

1. Sea u una función periódica de período igual a 1 (o simplemente 1-periódica) sobre los reales.
2. Un conjunto $\pi = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de puntos, tales que $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ donde $t_n = t_0 + 1$ se denomina partición de un periodo (o simplemente una partición).
3. Para una partición π, se denota por $\|\pi\| = \max\limits_j (t_{j+1} - t_j)$ su diámetro.
4. Sean $p' := \frac{p}{(p-1)}$ y $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{p'}$.

Definición 5.1

Sean u una función 1-periódica, $1 < p < \infty$ y $0 \leq \alpha$. Para toda partición π, se define

$$v_{p,\alpha}(u;\pi) := \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\left| u(t_{j+1}) - u(t_j) \right|^p}{(t_{j+1} - t_j)^{\alpha p}} \right)^{1/p}.$$

Se denota por $V_{p,\alpha}$ la clase de todas las funciones 1-periódica u tal que $\sup\limits_{\pi} v_{p,\alpha}(u;\pi) < \infty$, donde el supremo se considera sobre todas las particiones del intervalo $[0,1]$.

5.1.1 Resultados de F. Riesz

F. Riesz (1910), en [143], cuando define el concepto de p-variación acotada ($1 < p < \infty$), introduce la llamada clase de Riesz $W_p^1[a,b]$ ($1 < p < \infty$) de la siguiente manera:

$u \in W_p^1[a,b]$ si y solo si u es una función 1-periódica absolutamente continua en $[a,b]$ y $u' \in L_p[a,b]$.

y en ese artículo obtiene el siguiente resultado:

Lema 5.1

Una función real u definida en el intervalo $[0,1]$ pertenece a la clase W_p^1 ($1 < p < \infty$) si y solo si $V_{p,1/p'}(u) < \infty$. Más aún

$$v_{p,1/p'}(u) = ||u'||_p.$$

5.1.2 Resultados de A. P. Terehin

A. P. Terehin (1965), en [165], introduce una nueva caracterización del espacio W_p^1 en términos del p-módulo de continuidad de orden $1-1/p$ introducido por N. Wiener (1924), en [177], de la manera siguiente:

Definición 5.2 (Ver [177])

Sea π una partición del intervalo $[a,b]$, se define la función

$$\omega_{1-1/p}(u,\delta) = \sup_{||\pi||\leq\delta} v_p(u,\pi) \quad 0 \leq \delta \leq 1 \tag{5.1}$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones con $||\pi|| \leq \delta$. La función (5.1) es llamado el p-módulo de continuidad de la función u.

N Si $1 < p < \infty$, entonces la igualdad

$$\lim_{\delta\to 0+} \omega_{1-1/p}(u,\delta) = 0 \tag{5.2}$$

se satisface para funciones no triviales. Si una función u satisface (5.2) se denomina p-continua. Se denotará por C_p la clase de todas las funciones p-continuas.

A. P. Terehin demuestra lo siguiente:

Teorema 5.1 (Ver [165])

Si $u \in W_p^1$ entonces $\omega_{1-1/p}(u;\delta) \leq \delta^{1/p'}\|u'\|_p$. Recíprocamente, si $\omega_{1-1/p}(u;\delta) = O(\delta^{1/p'})$ entonces $u \in W_p^1$.

Y estudió propiedades de la función

$$\omega_{k-1/p}(u;\delta) = \sup_{0<h\leq\delta} \omega_{1-1/p}(\Delta_h^{k-1}u;h) \qquad (0<\delta\leq 1),$$

donde $\Delta_h u(x) = u(x+h) - u(x)$, $\Delta_h^k u(x) = \Delta_h \Delta_h^{k-1} u(x)$. La función $\omega_{k-1/p}(u;\delta)$ es llamada módulo fraccional de orden $k-1/p$. Y proporcionó una caracterización del espacio W_p^k en términos de $\omega_{k-1/p}(u;\delta)$ como sigue:

Teorema 5.2

Sea $1 < p < \infty$ y $k \geq 2$. Entonces $\omega_{k-1/p}(u;\delta) = O(\delta^{k-1/p})$ si y solo si $u \in W_p^k$.

5.1.3 Resultados de N. Merentes

N. Merentes (1992), en [118], motivado por el resultado de F. Riesz, introduce la clase $V_{p,1/p'}^{(2)}$ de funciones de segunda $(p,1/p')$-variación acotada, para $p > 1$, de la siguiente manera:

Definición 5.3

Sean $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $1 < p < \infty$. Para una partición π de la forma

$$\pi : a = x_1 < y_1 \leq z_1 = x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < y_k \leq z_k < x_{k+1} = b$$

se definen

$$\sigma_p^2(u,\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{u(x_{k+1}) - u(z_{k+1})}{x_{k+1} - z_{k+1}} - \frac{u(y_{k+1}) - u(x_k)}{y_{k+1} - x_k} \right|^p \frac{1}{(x_{k+1} - x_k)^{p/p'}}$$

$$V^{(2)}_{p,1/p'}(u;[a,b])^p := \sup_{\pi} \sigma_p^2(u,\pi)$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones π del intervalo $[a,b]$. El número $V^{(2)}_{p,1/p'}(u)$ es llamada la segunda $(p,1/p')$-variación en el sentido de Riesz de la función u en $[a,b]$. Si $V^{(2)}_{p,1/p'}(u)^p < \infty$, la función se dice que tiene segunda $(p,1/p')$-variación acotada en el sentido de Riesz.

El conjunto de las funciones tales que $V^{(2)}_{p,1/p'}(u)^p < \infty$ es denotado por $BV^2_{p,1/p'}[a,b]$.

N. Merentes demostró un resultado similar para el resultado de F. Riesz (Ver [118, Teorema, p.122]) y presentó una caracterización del espacio W_p^2 en términos de las funciones de segunda $(p,1/p')$-variación acotada, de la siguiente manera:

Teorema 5.3

Sea $1 < p < \infty$. Una función real u definida en el intervalo $[a,b]$ pertenece a la clase W_p^2 si y solo si $u \in V^{(2)}_{p,1/p'}$. Además, $V^{(2)}_{p,1/p'}(u) = \|u''\|_p$.

N Observemos que de las caracterizaciones de F. Riesz y N. Merentes se deriva que

$$V_{p,1/p'}(u') = V^{(2)}_{p,1/p'}(u)$$

(Al lector interesado sobre este tema ver [3]).

5.1.4 Resultados de M. Lind

M. Lind (2013), en [88], motivado por los resultados de Riesz y Terehin, estudia dos funcionales, la variación acotada en el sentido de Riesz y el módulo de p-continuidad. Estos funcionales generan espacios intermedios conectando la clase de funciones de p-variación y la clase de Riesz, además demuestra algunas relaciones con límites en estos espacios intermedios y encuentra la mejor estimación en términos del módulo fraccional de orden $1 - 1/p$.

N Sea $p' := \frac{p}{p-1}$, entonces

1. Si $\alpha > \frac{1}{p'}$ entonces $V_{p,\alpha}$ contiene solo funciones constantes.
2. Si $\alpha = \frac{1}{p'}$ el Teorema de Riesz establece que una función u pertenece a la clase $V_{p,\frac{1}{p'}}$ si y solo si $u \in W_p^1$.
3. Si $\alpha = 0$ se obtiene la clase V_p^R.

Por lo tanto, $V_{p,\alpha}$ para $0 < \alpha < \frac{1}{p'}$ forma los espacios intermedios más pequeños entre V_p y W_p^1.

M. Lind obtiene relaciones entre $v_{p,\alpha}(u)$ y el p-módulo de continuidad y estudia límites en los espacios intermedios generados por $v_{p,\alpha}(u)$ y $\omega_{1-\frac{1}{p}}(u,\delta)$; el cual se resumirán a continuación.

Sea Ω_γ, $(0 < \gamma \le 1)$ la clase de todas las funciones continuas ω definida en $[0,1]$ tal que $\omega(0) = 0$, $\omega(t)$ es no decreciente y $\omega(t)/t^\gamma$ es no creciente.

Lema 5.2
Sean $0 < \gamma \le 1$, $\omega \in \Omega_\gamma$ el cual satisface que $\lim\limits_{t \to 0+} \omega(t)/t^\gamma = \infty$, $1 \le q < \infty$ y $0 < \beta < q\gamma$ son números dados. Entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{n_k \beta} \omega_{n_k}^q \le 2\omega_0^q + \frac{2^{q+2}}{q\gamma}\beta(q\gamma - \beta)\int_0^1 t^{-\beta}\omega(t)^q \frac{dt}{t}.$$

Sea $u \in L^1$, para todo $0 < h \le 1$, se denomina

$$u_h(x) = \frac{1}{h}\int_0^h u(x+t)\,dt$$

el Average de Steklov de la función u.

Lema 5.3
Sea $1 < p < \infty$ y $u \in V_p$. Entonces

$$\omega_{1-\frac{1}{p}}(u_h, t) \le \omega_{1-\frac{1}{p}}(u,t), \quad 0 \le t \le 1,$$

$$\|u_h'\|_p \le h^{\frac{-1}{p'}}\omega_{1-\frac{1}{p}}(u,h)$$

y

$$v_p(u - u_h) \le 6\omega_{1-\frac{1}{p}}(u,h).$$

Los funcionales generan espacios intermedios que conectan la clase v_p de las funciones de p-variación acotada y el espacio W_p^1, en términos del L^p-módulo de continuidad de una función $u \in L^p$, el cual viene definido por:

$$\omega(u;\delta)_p = \sup_{0 \le h \le \delta}\left(\int_0^1 |u(x+h) - u(x)|^p\, dx\right)^{1/p}, \quad 0 \le \delta \le 1.$$

A. P. Terehin demuestra que para $\delta \in [0,1]$,

$$\omega(u,\delta)_p \leq \delta^{1/p}\omega_{1-1/p}(u;\delta) \quad (1 < p < \infty).$$

En los siguientes resultados (proposición 3.1, teorema 3.2 y teorema 3.4 de [88]), se presenta una relación entre el p-módulo de continuidad y $v_{p,\alpha}(u)$.

Proposición 5.1

Sea $u \in W_p^1$ $(1 < p < \infty)$. Entonces

$$\lim_{h\to 0+} \frac{\omega_{1-\frac{1}{p}}(u,h)}{h^{\frac{1}{p'}}} = ||f'||_p.$$

Teorema 5.4

Sea u una función 1-periódica

1. Si $u \in W_p^1$ $(1 < p < \infty)$, entonces

$$\lim_{s\to 1/p'-} (1/p'-s)^{1/p}\left(\int_0^1 \left[t^{-s}\omega_{1-1/p}(u;t)\right]^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p} = \left(\frac{1}{p}\right)^{1/p} ||u'||_p.$$

2. Si $u \in C_p$ $(1 < p < \infty)$ y

$$\overline{\lim_{s\to 1/p'-}}(1/p'-s)\int_0^1 \left[t^{-s}\omega_{1-1/p}(u;t)\right]^p \frac{dt}{t} < \infty,$$

entonces $u \in W_p^1$.

En el siguiente resultado se presentan algunas relaciones con límite para el funcional $v_{p,\alpha}(u)$.

Teorema 5.5

Sean u una función 1-periódica y $1 < p < \infty$

1. Para todo u se tiene

$$\lim_{\alpha\to\frac{1}{p'}-} v_{p,\alpha}(u) = v_{p,\frac{1}{p'}}(u).$$

2. Si $u \in V_p^{\alpha_0}$ para algún $\alpha_0 > 0$, entonces

$$\lim_{\alpha\to 0+} v_{p,\alpha}(u) = v_p(u).$$

Y por último, M. Lind, obtiene una estimación de $v_{p,\alpha}(u)$ en términos del p-módulo de continuidad $\omega_{1-\frac{1}{p}}(u,\delta)$, como se muestra a continuación:

Teorema 5.6

Sean $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{1}{p'}$, $u \in V_p$ y

$$I_{p,\alpha}(u) = \left(\int_0^1 \left[t^{-\alpha} \omega_{1-\frac{1}{p}}(u,t) \right]^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Entonces $u \in V_p^{\alpha}$ y

$$v_{p,\alpha}(u) \leq A \left[v_p(u) + c_{p,\alpha} I_{p,\alpha}(u) \right],$$

donde A es una constante absoluta y

$$c_{p,\alpha} = p' \alpha^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{p' - \alpha} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

5.1.5 Resultados de S. Barza y P. Silvestre

S. Barza y P. Silvestre (2014), en [21], extienden los resultados obtenidos por M. Lind (Ver [88]) en el caso de las funciones de segunda p-variación acotada, demuestran que los funcionales generalizados del tipo Merentes generan espacios intermedios que conectan la clase de funciones de segunda p-variación acotada con el espacio de Riesz de funciones con segunda derivada p-integrable, además demuestran algunas relaciones con límites para estos funcionales y obtienen la mejor estimación en términos del módulo fraccional de orden $2 - 1/p$. A continuación se presentan dichos resultados:

Teorema 5.7 (Ver [21])

Sean $1 < p < \infty$ y $0 < \alpha \leq \frac{1}{p'}$.

(i) Si $u \in V_{p,\alpha}^{(2)}$, entonces u' existe en casi todas partes y

$$v_{p,\alpha}^{(2)}(u) \geq v_{p,\alpha}(u').$$

(ii) Si $v_{p,\alpha}(u') < \infty$, entonces

$$v_{p,\alpha}^{(2)}(u) \leq v_{p,\alpha}(u').$$

Proposición 5.2 (Ver [21])

Sea $p \geq 1$ y asumamos que u' existe en casi todas partes. Entonces

$$v_p^{(2)}(u) = v_p(u').$$

Lema 5.4 (Ver [21])
Sea $p>1$ y $u \in V_p^{(2)}$. Entonces

(i)
$$\omega_{2-\frac{1}{p}}(u_h,t) \le \omega_{2-\frac{1}{p}}(u,t) \quad (0 \le t \le 1),$$

(ii)
$$||u''_{h,h}||_p \le h^{-\left(2-\frac{1}{p}\right)}\omega_{2-\frac{1}{p}}(u,h) \quad (0 \le h \le 1),$$

(iii)
$$v_p^{(2)}(u-u_{h,h}) \le 12\frac{\omega_{2-\frac{1}{p}}(u,h)}{h}.$$

Teorema 5.8 (Ver [21])

Sea $1<p<\infty$. Si u es una función 1-periódica arbitraria, entonces

(i)
$$\lim_{\alpha \to \frac{1}{p'}-} v_{p,\alpha}^{(2)}(u) = v_{p,\frac{1}{p'}}^{(2)}(u).$$

(ii) Si $u \in V_{p,\alpha}^{(2)}$ para algún $\alpha>0$, entonces
$$\lim_{\alpha \to 0+} v_{p,\alpha}^{(2)}(u) = v_p^{(2)}(u).$$

En [123] los autores extienden los resultados de Riesz y Merentes y demuestran lo siguiente:

Teorema 5.9

Sea $1<p<\infty$ y $k \ge 2$. Entonces $u \in W_p^k$ si y solo si $u \in V_{p,1/p'}^{(k)} = RV_{(p,k)}$.

5.2 Propiedades del Espacio de (p,k)-variación acotada

A continuación se extenderá el resultado mostrado por S. Barza y P. Silvestre (2014) en [21] y M. Lind (2013) en [88] al caso de las funciones de (p,k)-variación acotada en el sentido de Riesz-Popoviciu. De esta manera, se estudiarán los espacios intermedios que conectan la clase de funciones de (p,k)-variación acotada en el sentido de Riesz-Popoviciu con el espacio de Riesz de funciones con k-ésima derivada p-integrable. Luego, se demuestran algunas relaciones con límites para estos funcionales y se obtiene la mejor estimación en términos del módulo fraccional de orden $k-1/p$.

Definición 5.4 (Ver [21] y [123])
Sean $p>1$ y $0\le\alpha\le 1/p'$. Sea π una partición de la forma

$$\begin{aligned} x_0 &= t_{1,1}<t_{1,2}<\cdots<t_{1,k}\le t_{1,k+1}<\cdots<t_{1,2k}\le\cdots\le t_{2,k+1}<\cdots \\ &\le \cdots<t_{3,1}<\cdots<t_{j,1}<\cdots<t_{j,k}\le t_{j,k+1}<\cdots<t_{j,2k}\le\cdots \\ &\le t_{m,1}<\cdots<t_{m,k}\le t_{m,k+1}<\cdots<t_{m,2k}=x_0+1. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Para todo $k\in\mathbb{N}$

$$v_{p,\alpha}^{(k)}(u;\pi)^p=\sum_{j=1}^{m}\left|u[t_{j,k+1},\dots,t_{j,2k}]-u[t_{j,1},\dots,t_{j,k}]\right|^p\frac{1}{(t_{j,2k}-t_{j,1})^{\alpha p}},$$

donde la k-ésima diferencia dividida, viene dada por

$$u[t_0,t_1,\dots,t_k]:=\sum_{j=0}^{k}\frac{u(t_j)}{(t_j-t_0)\dots(t_j-t_{j-1})(t_j-t_{j+1})\dots(t_j-t_k)}.$$

Se define el espacio $V_{p,\alpha}^{(k)}$ ($k\in\mathbb{N}$) como el espacio de funciones 1-periódica u tal que

$$v_{p,\alpha}^{(k)}(u)=\sup_{\pi}v_{p,\alpha}^{(k)}(u;\pi)<\infty,$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones del tipo (5.3).

El número $v_{p,\alpha}^{(k)}(u)$ denota la k-ésima (p,α)-variación de u en el intervalo $[x_0,x_0+1]$.

N Para $\alpha=0$, se denota como $v_p^{(k)}(u)$ y se denomina la (p,k)-variación de u. Así, $V_{p,1/p'}^{(k)}$ es el espacio de $RV_{(p,k)}$ (Ver [123]).

Los espacios $V_{p,\alpha}^{(k)}$ forman espacios intermedios entre el espacio de funciones de (p,k)-variación acotada y el espacio W_p^k.

Denotemos por C_p la clase de las funciones p-continuas, es decir, si $u\in C_p$ entonces u satisface

$$\lim_{\delta\to 0+}\omega_{1-1/p}(u;\delta)=0.$$

Lema 5.5 ([171, Lema 1])
Sea $p>1$ y $u\in C_p$ tal que $u^{(r)}\in C_p$ para $k,r\in\mathbb{N}$. Entonces

$$\omega_{k+r-1/p}(u;\delta)\le\delta^r\omega_{k-1/p}(u^{(r)};\delta)\qquad(0<\delta\le 1).$$

N Sea π una partición definida como en (5.3). Como $0<\alpha\leq\frac{1}{p'}$ $\left(p'=\frac{p}{p-1}\right)$, entonces $0<\alpha p<p-1$ y como $|t_{j,2k}-t_{j,1}|\leq 1$, se cumple que

$$|t_{j,2k}-t_{j,1}|^{\alpha p}>|t_{j,2k}-t_{j,1}|^{p-1}.$$

Entonces, $v^{(k)}_{p,\alpha}(u;[0,1])\leq v^{(k)}_{p,\frac{1}{p'}}(u;[0,1])$. El espacio $V^{(k)}_{p,\frac{1}{p'}}[0,1]$ es el espacio $RV_{(p,k)}[0,1]$ en [123]. Así, $RV_{(p,k)}[0,1]\subset V^{(k)}_{p,\alpha}[0,1]$.

Proposición 5.3

Sea $1<p<\infty$, $k\geq 2$, y $0<\alpha\leq 1/p'$. Si $u\in V^{(k)}_{p,\alpha}[0,1]$, entonces $u^{(k-1)}$ existe en todas partes y es continua sobre $[0,1]$.

Demostración:

Supongamos que $u\in V^{(k)}_{p,\alpha}[0,1]$. Entonces, existe una constante $M>0$ tal que

$$M\geq v^{(k)}_{p,\alpha}(u;[0,1])\geq\frac{\left|u[t_{j,k+1},\cdots,t_{j,2k}]-u[t_{j,1},\cdots,t_{j,k}]\right|^p}{|t_{j,2k}-t_{j,1}|^{\alpha p}},\tag{5.4}$$

para toda partición definida como en (5.3) y $1\leq j\leq m$. Sea $x_0\in(0,1)$. Por (5.4) se tiene que

$$|t_{j,2k}-t_{j,1}|^{\alpha}M^{1/p}\geq\left|u[t_{j,k+1},\cdots,t_{j,2k}]-u[t_{j,1},\cdots,t_{j,k}]\right|,$$

para toda partición del tipo (5.3) tal que $t_{j,k+1}=x_0$ y $1\leq j\leq m$. Luego, por el criterio de convergencia de Cauchy que establece la existencia de la derivada del lado derecho $u^{(k-1)}_{+}(x_0)$ cuando $0\leq x_0<1$. Similarmente, la derivada del lado izquierdo $u^{(k-1)}_{-}(x_0)$ existe cuando $0<x_0\leq 1$. Consideremos la siguiente partición

$$\begin{aligned}0 &\leq t_{1,1}<\cdots<t_{1,k}\leq t_{1,k+1}<\cdots<t_{1,2k}\leq\cdots<t_{j,k}=x_0=t_{j,k+1}\\ &\leq \cdots<t_{j,2k}\leq\cdots<t_{m-1,2k}\leq t_{m,1}<\cdots<t_{m,2k}.\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}\left|u[t_{j,k+1},\ldots,t_{j,2k}]-u[t_{j,1},\ldots,t_{j,k}]\right| &\leq M^{1/p}|t_{j,2k}-t_{j,1}|^{\alpha}\\ &\leq M^{1/p}(|t_{j,2k}-x_0|+|x_0-t_{j,1}|)^{\alpha}\\ &\leq 2^{\alpha}M^{1/p}\left(|t_{j,2k}-x_0|^{\alpha}+|x_0-t_{j,1}|^{\alpha}\right),\end{aligned}$$

el cual tiende a cero cuando $t_{j,1}\to x_0^-$ y $t_{j,2k}\to x_0^+$. Entonces, se obtiene que $u^{(k-1)}_{+}(x_0)=u^{(k-1)}_{-}(x_0)$ por lo que, $u^{(k-1)}(x_0)$ existe.

Consideremos $y\in[x_0,1]$ y el siguiente tipo de partición

$$\begin{aligned}0 &\leq t_{1,1}<\cdots<t_{1,k}\leq t_{1,k+1}<\cdots\leq t_{j,1}=x_0-\frac{k-1}{k}h\\ &< t_{j,2}=x_0-\frac{k-2}{k}h<\cdots<t_{j,k}=x_0\leq t_{j,k+1}=y\\ &< t_{j,k+2}=y+\frac{1}{k}h<\cdots<t_{j,2k}=y+\frac{k-1}{k}h\leq\cdots<t_{m,2k},\end{aligned}$$

donde $0 \le h < \text{mín}\{x_0, 1-y\}$. Entonces, por (5.4),

$$\begin{aligned}
\left|u\left[y, y+\frac{1}{k}h, \ldots, y+\frac{k-1}{k}h\right] - u\left[x_0 - \frac{k-1}{k}h, \ldots, x_0\right]\right| &= |u[t_{j,k+1}, \ldots, t_{j,2k}] - u[t_{j,1}, \ldots, t_{j,k}]| \\
&\le M^{1/p}|t_{j,2k} - t_{j,1}|^{\alpha} \\
&= M^{1/p}\left|y - x_0 + 2\frac{k-1}{k}h\right|^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Tendiendo $h \to 0$, se obtiene que

$$|u^{(k-1)}(y) - u^{(k-1)}(x_0)| \le M^{1/p}|y - x_0|^{\alpha},$$

así, la continuidad de $u^{(k-1)}$ en $(0,1)$ se satisface. Además, $u^{(k-1)}$es continua a la derecha e izquierda en 0 y 1, respectivamente.

□

N Sea $1 < p < \infty$, $k \ge 2$, y $0 < \alpha \le 1/p'$. Si $u \in V^{(k)}_{p,\alpha}[0,1]$, entonces se cumple que

$$u[t_0, t_1, \cdots, t_k] = \frac{u^{(k-1)}(\psi)}{(k-1)!} \tag{5.5}$$

para algún $\psi \in conv\{t_0, ..., t_k\}$. De hecho, por la Proposición 5.3 se tiene que $u^{(k-1)}$ existe en todas partes en $[0,1]$ y es continua. Entonces, $u \in C^{(k-1)}[0,1]$. La igualdad (5.5) se cumple por el resultado de N. Merentes (2012) en [123, (2.8)].

Teorema 5.10

Sea $p > 1$ y $0 < \alpha \le 1/p'$.

(i) Si $u \in V^{(k)}_{p,\alpha}[0,1]$, entonces

$$v^{(k)}_{p,\alpha}(u; [0,1]) \ge \frac{1}{(k-1)!} v_{p,\alpha}(u^{(k-1)}; [0,1]).$$

(ii) Si $v_{p,\alpha}(u^{(k-1)}; [0,1]) < \infty$, entonces

$$v^{(k)}_{p,\alpha}(u; [0,1]) \le \frac{1}{(k-1)!} v_{p,\alpha}(u^{(k-1)}; [0,1]).$$

Demostración:

(i) Si $u \in V^{(k)}_{p,\alpha}[0,1]$, entonces $v^{(k)}_{p,\alpha}(u; [0,1]) < \infty$ y $u^{(k-1)}$ existe en todas partes de $[0,1]$ por la Proposición 5.3 y es continua. Para demostrar la desigualdad, sea $\pi = \{0 = t_0, \ldots, t_n = 1\}$ una partición de $[0,1]$ y se considera $0 < h \le \min\limits_{0 \le j \le m-1}\left\{\frac{t_{j+1} - t_j}{2}\right\}$. Definamos la partición π_j del subintervalo $[t_j, t_{j+1}]$ como

$$t_j = t_{j,1} < t_{j,2} < \cdots < t_{j,k} = t_j + h \le t_{j,k+1} = t_{j+1} - h < \cdots < t_{j,2k} = t_{j+1}.$$

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} v_{p,\alpha}^{(k)}(u;[0,1])^p &:= \sup_\pi v_{p,\alpha}^{(k)}(u;\pi)^p \\ &\geq \sum_{j=1}^m \frac{\left|u[t_{j,k+1},\cdots,t_{j,2k}]-u[t_{j,1},\cdots,t_{j,k}]\right|^p}{|t_{j,2k}-t_{j,1}|^{\alpha p}} \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\left|u[t_{j+1}-h,\cdots,t_{j+1}]-u[t_j,\cdots,t_j+h]\right|^p}{|t_{j+1}-t_j|^{\alpha p}}. \end{aligned}$$

Así, existe $\psi_j \in conv\{t_{j+1}-h,\cdots,t_{j+1}\}$ y $\psi_{j-1} \in conv\{t_j,\cdots,t_j+h\}$ tal que

$$v_{p,\alpha}^{(k)}(u;[0,1])^p \geq \frac{1}{(k-1)!^p}\sum_{j=1}^m \frac{\left|u^{(k-1)}(\psi_j)-u^{(k-1)}(\psi_{j-1})\right|^p}{|t_{j+1}-t_j|^{\alpha p}}.$$

Tendiendo $h \to 0$, como $u^{(k-1)}$ es continua, se cumple que

$$v_{p,\alpha}^{(k)}(u;[0,1])^p \geq \frac{1}{(k-1)!^p}\sum_{j=1}^m \frac{\left|u^{(k-1)}(t_{j+1})-u^{(k-1)}(t_j)\right|^p}{|t_{j+1}-t_j|^{\alpha p}}.$$

Considerando el supremo sobre todas las particiones, se tiene que

$$v_{p,\alpha}^{(k)}(u;[0,1]) \geq \frac{1}{(k-1)!} v_{p,\alpha}(u^{(k-1)};[0,1]).$$

(ii) Dado $\varepsilon > 0$, existe una partición del tipo (5.3) de la manera siguiente

$$0 = t_{1,1} < t_{1,2} < \cdots < t_{1,k} \leq t_{1,k+1} < \cdots < t_{1,2k} \leq \cdots < t_{j,2k} \leq t_{m,1} < \cdots < t_{m,k} \leq t_{m,k+1} < \cdots < t_{m,2k} = 1$$

tal que

$$v_{p,\alpha}^{(k)}(u;[0,1])^p - \varepsilon < \sum_{j=1}^m \frac{\left|u[t_{j,k+1},\cdots,t_{j,2k}]-u[t_{j,1},\cdots,t_{j,k}]\right|^p}{|t_{j,2k}-t_{j,1}|^{\alpha p}}.$$

Como $v_{p,\alpha}(u^{(k-1)};[0,1]) < \infty$, se tiene que $u^{(k-1)} \in V_{p,\alpha}[0,1]$. Por otra parte, por el Teorema 5.7 se obtiene que

$$v_1^{(2)}(u^{(k-2)};[0,1]) \leq v_{p,\alpha}^{(2)}(u^{(k-2)};[0,1]) \leq v_{p,\alpha}(u^{(k-1)};[0,1]).$$

De manera similar, por la Proposición 5.2, se cumple que $v_1^{(2)}(u^{(k-2)};[0,1]) = v_1(u^{(k-1)};[0,1])$. Por lo tanto, $u^{(k-1)} \in BV[0,1]$. Por consiguiente, $u^{(k-1)}$ es integrable Riemann sobre $[0,1]$. En efecto, se puede escribir como la diferencia de dos funciones monótonas y así $u^{(k-1)}$ es Riemann integrable. Usando [123, Proposition 2.5], como $u^{(k-1)}$ es continua, para $\psi_j \in conv\{t_{j,k+1},\cdots,t_{j,2k}\}$ y $\psi_{j-1} \in conv\{t_{j,1},\cdots,t_{j,k}\}$, se cumple que

$$\begin{aligned} v_{p,\alpha}^{(k)}(u;[0,1])^p - \varepsilon &< \sum_{j=1}^m \frac{\left|u[t_{j,k+1},\cdots,t_{j,2k}]-u[t_{j,1},\cdots,t_{j,k}]\right|^p}{|t_{j,2k}-t_{j,1}|^{\alpha p}} \\ &\leq \frac{1}{(k-1)!^p}\sum_{j=1}^m \frac{\left|u^{(k-1)}(\psi_j)-u^{(k-1)}(\psi_{j-1})\right|^p}{|\psi_j-\psi_{j-1}|^{\alpha p}} \\ &\leq \frac{1}{(k-1)!^p} v_{p,\alpha}(u^{(k-1)};[0,1])^p. \end{aligned}$$

Tendiendo ε a cero, se obtiene

$$v_{p,\alpha}^{(k)}(u;[0,1]) \leq \frac{1}{(k-1)!} v_{p,\alpha}(u^{(k-1)};[0,1]).$$

□

Proposición 5.4

Sea $p \geq 1$ y asumamos que $u^{(k-1)}$ existe en todas partes. Entonces[a]

$$\begin{aligned} v_p^{(k)}(u) &= v_p^{(k)}(u;[0,1]) \\ &= \frac{1}{(k-1)!} v_p(u^{(k-1)};[0,1]) \\ &:= \frac{1}{(k-1)!} v_p(u^{(k-1)}). \end{aligned}$$

[a] Por simplicidad, de ahora en adelante se omite el dominio $[0,1]$ en el funcional $v_{p,\alpha}^{(k)}$.

Demostración:

La igualdad se cumple como en el Teorema 5.10.

□

Sea $u \in L^1$ y u_h el Average de Steklov de la función u (Ver [88]) viene dado por

$$u_h(x) := \frac{1}{h}\int_0^h u(x+t)dt \qquad (0 < h \leq 1).$$

Se define el k-ésimo Average de Steklov de u como el Average de Steklov del $(k-1)$-ésimo Average de Steklov de u,

$$u_{h,\ldots^{(k)},h}(x) := \frac{1}{h}\int_0^h u_{h,\ldots^{(k-1)},h}(x+t)dt \qquad (0 < h \leq 1).$$

Lema 5.6

Sea $p > 1$ y $u \in V_p^{(k)}$. Entonces

(i)
$$\omega_{k-1/p}(u_h;t) \leq \omega_{k-1/p}(u;t) \qquad (0 \leq t \leq 1),$$

(ii)
$$\| u_{h,\ldots^{(k)},h}^{(k)} \|_p \leq h^{-(k-1/p)}\omega_{k-1/p}(u;h) \qquad (0 < h \leq 1),$$

(iii)
$$v_p^{(k)}(u - u_{h,\ldots^{(k)},h}) \leq \frac{6k}{(k-1)!}\frac{\omega_{k-1/p}(u;h)}{h^{k-1}}.$$

Demostración:

El argumento es inductivo.

(i) La desigualdad resulta por la primera desigualdad del Lema 5.3 y la definición de $\omega_{k-1/p}(u;t)$. Ciertamente, como $(\Delta_\delta^{k-1}u_h)(x) = (\Delta_\delta^{k-1}u)_h(x)$ y $u_h \in V_p^{(k)}$ se cumple que

$$\begin{aligned}
\omega_{k-1/p}(u_h;t) &= \sup_{0<\delta\le t} \omega_{1-1/p}(\Delta_\delta^{k-1}u_h;\delta)\\
&= \sup_{0<\delta\le t} \omega_{1-1/p}((\Delta_\delta^{k-1}u)_h;\delta)\\
&\le \sup_{0<\delta\le t} \omega_{1-1/p}(\Delta_\delta^{k-1}u;\delta)\\
&= \omega_{k-1/p}(u;t).
\end{aligned}$$

(ii) Sea $u \in V_p^{(k)}$. Así, $(u')_h = u'_h$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(u_{h,h})(x) &= \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{h}\int_0^h u_h(x+t)dt\Big)\\
&= \frac{\int_0^h u'_h(x+u)du}{h}\\
&= (u'_h)_h(x),
\end{aligned}$$

y

$$\frac{d^2}{dx^2}(u_{h,h})(x) = \frac{d}{dx}(u'_h)_h(x) = \left(\frac{\Delta_h u(x)}{h}\right)'_h.$$

Por el Lema 5.4, se tiene que

$$\|u''_{h,h}\|_p \le h^{-2+1/p}\omega_{1-1/p}(\Delta_h u;h). \tag{5.6}$$

Obteniéndose así,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(u_{h,h,h})(x) &= \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{h}\int_0^h u_{h,h}(x+t)dt\Big)\\
&= \frac{\int_0^h u'_{h,h}(x+u)du}{h}\\
&= (u'_{h,h})_h(x)\\
&= \frac{\Delta_h u_{h,h}(x)}{h}\\
&= \frac{(\Delta_h u)_{h,h}(x)}{h},
\end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned}
\Delta_h u_{h,h}(x) &= \frac{1}{h}\int_0^h \Delta_h u_h(x+t)dt\\
&= \frac{1}{h}\int_0^h (\Delta_h u)_h(x+t)dt\\
&= (\Delta_h u)_{h,h}(x).
\end{aligned}$$

Entonces, se cumple que

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{dx^3}(u_{h,h,h})(x) &= \frac{d^2}{dx^2}\Big[\frac{(\Delta_h u)_{h,h}(x)}{h}\Big] \\ &= \Big(\frac{(\Delta_h u)_{h,h}}{h}\Big)''(x).\end{aligned}$$

Por consiguiente, por (5.6) (ver [21, Lemma 2.5])

$$\begin{aligned}\|u'''_{h,h,h}\|_p &= \Big\|\frac{d^2}{dx^2}\Big[\frac{(\Delta_h u)_{h,h}(x)}{h}\Big]\Big\|_p \\ &= \frac{1}{h}\Big\|(\Delta_h u)''_{h,h}\Big\|_p \\ &\le h^{-3+1/p}\omega_{1-1/p}(\Delta_h^2 u;h) \\ &\le h^{-(3-1/p)}\omega_{3-1/p}(u;h),\end{aligned}$$

y la desigualdad se satisface para la tercera derivada.

Asumamos que

$$\Big\|u^{(k-1)}_{h,\dots^{(k-1)},h}\Big\|_p \le h^{-(k-1)+1/p}\omega_{1-1/p}(\Delta_h^{k-2}u;h) \tag{5.7}$$

y se tiene que la desigualdad se cumple para k. Así

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(u_{h,\dots^{(k)},h})(x) &= \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{h}\int_0^h u_{h,\dots^{(k-1)},h}(x+t)\,dt\Big)(x) \\ &= \frac{\Delta_h u_{h,\dots^{(k-1)},h}(x)}{h} \\ &= \frac{(\Delta_h u)_{h,\dots^{(k-1)},h}(x)}{h},\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{dx^k}(u_{h,\dots^{(k)},h})(x) &= \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\Big[\frac{(\Delta_h u)_{h,\dots^{(k-1)},h}(x)}{h}\Big] \\ &= \Big(\frac{(\Delta_h u)_{h,\dots^{(k-1)},h}(x)}{h}\Big)^{(k-1)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, por la desigualdad (5.7), se cumple que

$$\begin{aligned}\|u^{(k)}_{h,\dots^{(k)},h}\|_p &= \Big\|\Big(\frac{(\Delta_h u)_{h,\dots^{(k-1)},h}(x)}{h}\Big)^{(k-1)}\Big\|_p \\ &= \frac{1}{h}\Big\|(\Delta_h u)^{(k-1)}_{h,\dots^{(k-1)},h}\Big\|_p \\ &\le \frac{1}{h}h^{-(k-1)+1/p}\omega_{1-1/p}(\Delta_h^{(k-2)}(\Delta_h u);h) \\ &\le h^{-(k-1/p)}\omega_{k-1/p}(u;h).\end{aligned}$$

(iii) La desigualdad se cumple para $k=2$ por el Lema 5.4. Notemos que

$$v_p^{(3)}(u-u_{h,h,h}) \le v_p^{(3)}(u-u_{h,h}) + v_p^{(3)}(u_{h,h}-u_{h,h,h}).$$

Por el Teorema 5.10 y la Proposición 5.2 se sigue que,

$$\begin{aligned} v_p^{(3)}(u-u_{h,h,h}) &\le v_p^{(3)}(u-u_{h,h}) + v_p^{(3)}(u_{h,h}-u_{h,h,h}) \\ &= \frac{1}{2!}\Big[v_p^{(2)}(u'-u'_{h,h}) + v_p^{(2)}(u'_{h,h}-u'_{h,h,h})\Big] \\ &\le \frac{1}{2!}\Big[2v_p^{(2)}(u'_h-u'_{h,h}) + v_p^{(2)}(u'_{h,h}-u'_{h,h,h})\Big], \end{aligned}$$

ya que $v_p^{(2)}(u'-u'_{h,h}) \le 2v_p^{(2)}(u'_h-u'_{h,h})$ entonces por [21, Lema 2.5 (iii)],

$$v_p^{(2)}(u-u_{h,h}) \le 2v_p^{(2)}(u_h-u_{h,h}).$$

Por lo tanto, en virtud del Lema 5.4 se observa que $v_p^{(2)}(u-u_h) \le v_p^{(2)}(u_h-u_{h,h})$, obteniendo así

$$v_p^{(2)}(u'_h-(u'_h)_h) \le v_p^{(2)}((u'_h)_h-(u'_h)_{h,h}).$$

Luego,

$$\begin{aligned} v_p^{(3)}(u-u_{h,h,h}) &\le \frac{1}{2!}\Big[2v_p^{(2)}(u'_h-u'_{h,h}) + v_p^{(2)}(u'_{h,h}-u'_{h,h,h})\Big] \\ &= \frac{1}{2!}\Big[2v_p^{(2)}(u'_h-(u'_h)_h) + v_p^{(2)}(u'_{h,h}-u'_{h,h,h})\Big] \\ &\le \frac{1}{2!}\Big[2v_p^{(2)}((u'_h)_h-(u'_h)_{h,h}) + v_p^{(2)}(u'_{h,h}-u'_{h,h,h})\Big] \\ &= \frac{3}{2!}v_p^{(2)}(u'_{h,h}-u'_{h,h,h}) = \frac{3}{2!}v_p(u''_{h,h}-u''_{h,h,h}) \qquad (5.8) \\ &= \frac{3}{2!}v_p\Big[\big(\frac{\Delta_h u}{h}\big)'_h - \big(\frac{\Delta_h u}{h}\big)'_{h,h}\Big] \\ &= \frac{3}{2!}v_p\Big[\big(\frac{\Delta_h u}{h}\big)'_h - \Big[\big(\frac{\Delta_h u}{h}\big)'_h\Big]_h\Big] \\ &= \frac{3}{2!}v_p(v-v_h) \end{aligned}$$

para $v = \frac{(\Delta_h u)'_h}{h} \in V_p$. Por el Lema 5.3 se tiene que

$$v_p(v-v_h) \le 6\omega_{1-1/p}(v;h),$$

entonces como, $(\Delta_h u)'_h = \dfrac{\Delta_h^2 u}{h}$, se cumple que

$$\begin{aligned} v_p^{(3)}(u-u_{h,h,h}) &\le \frac{3}{2!}v_p(v-v_h) \\ &\le \frac{18}{2!}\omega_{1-1/p}\Big(\frac{(\Delta_h u)'_h}{h};h\Big) \\ &= \frac{18}{2!}\omega_{1-1/p}\Big(\frac{(\Delta_h^2 u)}{h^2};h\Big) \\ &\le \frac{18}{2!}\frac{1}{h^2}\omega_{1-1/p}\big((\Delta_h^2 u);h\big) \\ &\le \frac{18}{2!}h^{-2}\omega_{3-1/p}(u;h). \end{aligned}$$

Así se cumple la desigualdad para $k=3$. En particular, se observa que por el Lema 5.4

$$\begin{aligned} v_p^{(2)}(u-u_{h,h}) &= v_p^{(2)}(u-u_{h,..^{(2)},h}) \\ &\leq 2v_p(u_h'-u_{h,h}') \\ &= 2v_p(u_{h,..^{(2-1)},h}^{(2-1)}-u_{h,..^{(2)},h}^{(2-1)}), \end{aligned}$$

y se demuestra que

$$v_p^{(3)}(u-u_{h,..^{(3)},h}) \leq \frac{3}{2!}v_p(u_{h,...^{(3-1)},h}^{(3-1)}-u_{h,..^{(3)},h}^{(3-1)}).$$

Asumamos que la desigualdad se cumple para $k-1$. Por el mismo tipo de argumento para 3, se observa que, por (5.8)

$$\begin{aligned} v_p^{(k)}(u-u_{h,...^{(k)},h}) &\leq v_p^{(k)}(u-u_{h,...^{(k-1)},h})+v_p^{(k)}(u_{h,...^{(k-1)},h}-u_{h,...^{(k)},h}) \\ &\leq v_p^{(k)}(u-u_{h,...^{(k-1)},h})+\frac{v_p(u_{h,...^{(k-1)},h}^{(k-1)}-u_{h,...^{(k)},h}^{(k-1)})}{(k-1)!} \\ &\leq \frac{k}{(k-1)!}v_p\left[u_{h,...^{(k-1)},h}^{(k-1)}-\left(u_{h,...^{(k-1)},h}^{(k-1)}\right)_h\right] \\ &\leq \frac{6k}{(k-1)!}\omega_{1-1/p}(u_{h,...^{(k-1)},h}^{(k-1)};h), \end{aligned} \tag{5.9}$$

como $u_{h,...^{(k-1)},h}^{(k-1)} \in V_p^R$. Recordemos que

$$(\Delta_h u)_h' = \frac{\Delta_h(\Delta_h u)}{h}. \tag{5.10}$$

Entonces $u_{h,h}''(x)=\frac{(\Delta_h u)_h'}{h}=\frac{\Delta_h^2 u}{h^2}$. Por lo tanto, $u_{h,h,h}'''(x)=\left(\frac{\Delta_h^2 u}{h^2}\right)_h'=\frac{\Delta_h^3 u}{h^3}$. Se asume que este tipo de identidad se satisface para $k-2$, es decir, $u_{h,...^{(k-2)},h}^{(k-2)}=\frac{\Delta_h^{k-2}u}{h^{k-2}}$. Por (5.10), se obtiene que

$$\begin{aligned} u_{h,...^{(k-1)},h}^{(k-1)} &= \left(u_{h,...^{(k-2)},h}^{(k-2)}\right)_h' \\ &= \left(\frac{\Delta_h^{k-2}u}{h^{k-2}}\right)_h' \\ &= \frac{\Delta_h\left(\frac{\Delta_h^{k-2}u}{h^{k-2}}\right)}{h} \\ &= \frac{\Delta_h^{k-1}u}{h^{k-1}} \end{aligned}$$

y la misma identidad se cumple para cualquier $k\in\mathbb{N}$. Por lo que, debido a (5.9) y la identidad anterior, se obtiene que

$$\begin{aligned} v_p^{(k)}(u-u_{h,...^{(k)},h}) &\leq \frac{6k}{(k-1)!}\omega_{1-1/p}\left(\frac{\Delta_h^{k-1}u}{h^{k-1}};h\right) \\ &\leq \frac{6k}{(k-1)!}\frac{\omega_{k-1/p}(u;h)}{h^{k-1}}. \end{aligned}$$

□

En la siguiente proposición se da una descripción exacta de la K-funcional de Peetre para el par $(V_p^{(k)}, W_p^k)$ para $k \in \mathbb{N}$. Por [47, p.172]

$$K(u,t;V_p^{(k)},W_p^k) := \inf_{g\in W_p^k}\left\{\|u-g\|_{V_p^{(k)}} + t\|g^{(k)}\|_p\right\} \quad (t>0),$$

con $\|u\|_{V_p^{(k)}} = |u(0)| + |u'(0)| + \ldots + |u^{(k-1)}(0)| + v_p^{(k)}(u)$ para todo $u \in V_p^{(k)}$.

Proposición 5.5

Sea $u \in V_p^{(k)}$. Para todo $t \in (0,1]$

$$\frac{1}{(k-1)!}\frac{\omega_{k-1/p}(u;t^{p'})}{t^{p'(k-1)}} \le K(u,t;V_p^{(k)},W_p^k) \le k\left(1+\frac{6}{(k-1)!}\right)\frac{\omega_{k-1/p}(u;t^{p'})}{t^{p'(k-1)}}.$$

Demostración:

Para $t \in (0,1]$ sean $h = t^{p'}$ y $g = u_{h,\ldots^{(k)},h}$. Como $u \in W_p^k$, entonces $g \in W_p^k$. Por lo tanto, por la parte (ii) y (iii) del Lema 5.6 se tiene que

$$\begin{aligned}
&|u(0)-g(0)| + \ldots + |u^{(k-1)}(0) - g^{(k-1)}(0)| + v_p^{(k)}(u-g) + h^{1/p'}\|g^{(k)}\|_p \\
\le\;& (k-1)\frac{\omega_{k-1/p}(u;h)}{h^{k-1}} + \frac{6k}{(k-1)!}\frac{\omega_{k-1/p}(u;h)}{h^{k-1}} + h^{1/p'}h^{-(k-1/p)}\omega_{k-1/p}(u;h) \\
\le\;& k\frac{\omega_{k-1/p}(u;h)}{h^{k-1}} + \frac{6k}{(k-1)!}\frac{\omega_{k-1/p}(u;h)}{h^{k-1}}.
\end{aligned}$$

Por lo que,

$$\|u-g\|_{V_p^{(k)}} + h^{1/p'}\|g^{(k)}\|_p \le k\left(1+\frac{6}{(k-1)!}\right)\frac{\omega_{k-1/p}(u;h)}{h^{k-1}},$$

y considerando el ínfimo sobre toda $g \in W_p^k$, resulta que

$$K(u,t;V_p^{(k)},W_p^k) \le k\left(1+\frac{6}{(k-1)!}\right)\frac{\omega_{k-1/p}(u;t^{p'})}{t^{p'(k-1)}}.$$

Ahora se demostrará la desigualdad izquierda. Sea $g \in W_p^k$. por [171, pag.19], resulta que

$$\begin{aligned}
\frac{\omega_{k-1/p}(u;t^{p'})}{t^{p'(k-1)}} &\le \frac{\omega_{k-1/p}(u-g;t^{p'})}{t^{p'(k-1)}} + \frac{\omega_{k-1/p}(g;t^{p'})}{t^{p'(k-1)}} \\
&\le \frac{t^{p'(k-1)}\omega_{1-1/p}((u-g)^{(k-1)};t^{p'})}{t^{p'(k-1)}} + \frac{t^{p'(k-1)}\omega_{1-1/p}(g^{(k-1)};t^{p'})}{t^{p'(k-1)}} \\
&= \omega_{1-1/p}(u^{(k-1)} - g^{(k-1)};t^{p'}) + t||g^{(k)}||_p \\
&\le v_p(u^{(k-1)} - g^{(k-1)}) + t||g^{(k)}||_p \\
&= (k-1)!v_p^{(k)}(u-g) + t||g^{(k)}||_p,
\end{aligned}$$

como $g^{(k-1)} \in W_p$. Se considera el ínfimo sobre todas las g, obteniéndose así

$$\frac{\omega_{k-1/p}(u;t^{p'})}{t^{p'(k-1)}} \le (k-1)!K(u,t;V_p^{(k)},W_p^k).$$

□

5.3 Espacios Intermedios

Proposición 5.6

Sea $p > 1$ y $u \in W_p^k$. Entonces

$$\lim_{\delta \to 0_+} \frac{\omega_{k-1/p}(u;\delta)}{\delta^{k-1/p}} = \|u^{(k)}\|_p.$$

Demostración:

Por el Lema 5.5 y la Proposición 5.1 se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta \to 0_+} \frac{\omega_{k-1/p}(u;\delta)}{\delta^{k-1/p}} &\leq \lim_{\delta \to 0_+} \frac{\omega_{1-1/p}(u^{(k-1)};\delta)}{\delta^{1-1/p}} \\
&= \|u^{(k)}\|_p.
\end{aligned}$$

Ahora se demuestra la desigualdad inversa. Sea $\Delta_\delta u(x) = u(x+\delta) - u(x)$, $\Delta_\delta^2 u(x) = \Delta_\delta(\Delta_\delta u)(x)$ y $\Delta_\delta^k u(x) = \Delta_\delta(\Delta_\delta^{(k-1)} u)(x)$. Entonces

$$\|u^{(k)}\|_p \leq \left\| u^{(k)} - \frac{\Delta_\delta u^{(k-1)}}{\delta} \right\|_p + \left\| \frac{\Delta_\delta u^{(k-1)}}{\delta} - \frac{\Delta_\delta^2 u^{(k-2)}}{\delta^2} \right\|_p + \cdots + \left\| \frac{\Delta_\delta^{k-1} u'}{\delta^{k-1}} - \frac{\Delta_\delta^k u}{\delta^k} \right\|_p + \left\| \frac{\Delta_\delta^k u}{\delta^k} \right\|_p. \quad (5.11)$$

Se define $\omega_k(u;\delta)_p := \sup_{0<h\leq\delta} \left\|\Delta_h^k u\right\|_p$, el cual es el k-ésimo L^p-módulo de continuidad (Ver [21, 88]). Por la desigualdad de Hölder y el Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
\left\| u^{(k)} - \frac{\Delta_\delta u^{(k-1)}}{\delta} \right\|_p &= \Big(\int_0^1 \Big| u^{(k)}(x) - \frac{1}{\delta} \int_0^\delta u^{(k)}(x+t)\,dt \Big|^p dx \Big)^{1/p} \\
&\leq \Big(\frac{1}{\delta} \int_0^\delta \Big(\int_0^1 |u^{(k)}(x) - u^{(k)}(x+t)|^p dx \Big) dt \Big)^{1/p} \\
&\leq \Big(\frac{1}{\delta} \int_0^\delta \|\Delta_t u^{(k)}\|_p^p dt \Big)^{1/p} \\
&\leq \Big(\frac{1}{\delta} \int_0^\delta \sup_{0\leq t\leq\delta} \|\Delta_t u^{(k)}\|_p^p dt \Big)^{1/p} \\
&\leq \omega(u^{(k)};\delta)_p.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por la desigualdad de Hölder y el teorema de Fubini

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{\Delta_\delta u^{(k-1)}}{\delta} - \frac{\Delta_\delta^2 u^{(k-2)}}{\delta^2} \right\|_p &= \left\| \Delta_\delta \Big(\frac{u^{(k-1)}}{\delta} \Big) - \Delta_\delta^2 \Big(\frac{u^{(k-2)}}{\delta^2} \Big) \right\|_p \\
&= \Big(\int_0^1 \Big| \frac{\Delta_\delta u^{(k-1)}}{\delta}(x) - \frac{1}{\delta^2} \int_0^\delta \Delta_\delta u^{(k-1)}(x+t)\, dt \Big|^p dx \Big)^{1/p} \\
&= \Big(\int_0^1 \frac{1}{\delta^p} \Big| \int_0^\delta \Big[\frac{\Delta_\delta u^{(k-1)}}{\delta}(x) - \frac{\Delta_\delta u^{(k-1)}(x+t)}{\delta} \Big] dt \Big|^p dx \Big)^{1/p} \\
&\le \Big(\int_0^1 \frac{1}{\delta^p} \Big(\int_0^\delta \Big| \frac{\Delta_\delta u^{(k-1)}}{\delta}(x) - \frac{\Delta_\delta u^{(k-1)}(x+t)}{\delta} \Big|^p dt \Big) \Big(\int_0^\delta dt \Big)^{p-1} dx \Big)^{1/p} \\
&= \Big(\frac{1}{\delta} \int_0^\delta \int_0^1 \Big| \frac{\Delta_\delta u^{(k-1)}}{\delta}(x) - \frac{\Delta_\delta u^{(k-1)}(x+t)}{\delta} \Big|^p dx\, dt \Big)^{1/p} \\
&\le \Big(\frac{1}{\delta} \int_0^\delta \Big\| \Delta_t \Big[\frac{\Delta_\delta u^{(k-1)}}{\delta} \Big] \Big\|_p^p dt \Big)^{1/p} \\
&\le \Big(\frac{1}{\delta} \int_0^\delta \sup_{0 \le t \le \delta} \Big\| \Delta_t \Big[\frac{\Delta_\delta u^{(k-1)}}{\delta} \Big] \Big\|_p^p dt \Big)^{1/p} \\
&\le \Big(\frac{1}{\delta} \int_0^\delta \omega \Big(\frac{\Delta_\delta u^{(k-1)}}{\delta}; \delta \Big)_p dt \Big)^{1/p} \\
&\le \omega \Big(\frac{\Delta_\delta u^{(k-1)}}{\delta}; \delta \Big)_p .
\end{aligned}
$$

Se procede de igual forma con este argumento para los demás términos en la suma del lado derecho de la desigualdad (5.11), exceptuando la última. Es decir, en el último caso, se puede notar que

$$
\left\| \frac{\Delta_\delta^{k-1} u'}{\delta^{k-1}} - \frac{\Delta_\delta^k u}{\delta^k} \right\|_p \le \omega \Big(\frac{\Delta_\delta^{k-1} u'}{\delta^{k-1}}; \delta \Big)_p .
$$

Como $u^{(k)}, \dfrac{\Delta_\delta u^{(k-1)}}{\delta}, \cdots, \dfrac{\Delta_\delta^{k-1} u'}{\delta^{k-1}}$ pertenece a L^p, entonces para todas las desigualdades anteriores se deduce que todos los términos intermedios, excepto la última en la suma de la derecha en (5.11) tiende a cero cuando $\delta \to 0_+$. Ya que $\omega_k(u;\delta)_p \le \delta^{1/p} \omega_{k-1/p}(u;\delta)$ (Ver [166]); entonces

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{\Delta_\delta^k u}{\delta^k} \right\|_p &\le \frac{\omega_k(u;\delta)_p}{\delta^k} \\
&\le \frac{\delta^{1/p} \omega_{k-1/p}(u;\delta)}{\delta^k} \\
&= \frac{\omega_{k-1/p}(u;\delta)}{\delta^{k-1/p}}
\end{aligned}
$$

y

$$
\left\| u^{(k)} \right\|_p \le \lim_{\delta \to 0_+} \frac{\omega_{k-1/p}(u;\delta)}{\delta^{k-1/p}} .
$$

$\square$

Teorema 5.11

Sea $1 < p < \infty$ y u una función 1-periódica.

(i) Si $u \in W_p^k$, entonces

$$\lim_{s\to 1/p'-} (1/p' - s)^{1/p} \left(\int_0^1 \left[t^{-s-(k-1)} \omega_{k-1/p}(u;t) \right]^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} = \left(\frac{1}{p} \right)^{1/p} \left\| u^{(k)} \right\|_p .$$

(ii) Si $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \frac{\omega_{k-1/p}(u;t)}{t^{k-1}} = 0$ y

$$\overline{\lim_{s\to 1/p'-}} (1/p' - s)^{1/p} \left(\int_0^1 \left[t^{-s-(k-1)} \omega_{k-1/p}(u;t) \right]^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} < \infty,$$

entonces $u \in W_p^k$.

Demostración:

(i) Sea $u \in W_p^k$ y $0 < s < 1/p'$. Por la Proposición 5.6, se tiene que, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left\| u^{(k)} \right\|_p^p - \varepsilon < \frac{\omega_{k-1/p}(u;t)^p}{t^{kp-1}} < \left\| u^{(k)} \right\|_p^p + \varepsilon \quad (0 < t < \delta). \tag{5.12}$$

Multiplicando (5.12) por t^{p-sp-2}, integrando desde 0 hasta δ y restando $\|u^{(k)}\|_p^p$ en ambos lados, se deduce que

$$\begin{aligned} &(\delta^{p-sp-1} - 1) \left\| u^{(k)} \right\|_p^p - \varepsilon \delta^{p-sp-1} \\ &\leq \quad (p - sp - 1) \int_0^\delta \left(t^{-s-(k-1)} \omega_{k-1/p}(u;t) \right)^p \frac{dt}{t} - \left\| u^{(k)} \right\|_p^p \\ &\leq \quad (\delta^{p-sp-1} - 1) \left\| u^{(k)} \right\|_p^p + \varepsilon \delta^{p-sp-1}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Por otro lado, como $u \in W_p^k$, entonces $u \in V_p^{(k)}$ y por el Lema 5.5 y el Teorema 5.10 se tiene que

$$\begin{aligned} \omega_{k-1/p}(u;t) &\leq t^{k-1} \omega_{1-1/p}(u^{(k-1)};t) \\ &\leq t^{k-1} v_p(u^{(k-1)}) \\ &:= t^{k-1} v_{p,0}(u^{(k-1)}) \\ &\leq t^{k-1} (k-1)! v_{p,0}^{(k)}(u) \\ &= (k-1)! t^{k-1} v_p^{(k)}(u) < \infty. \end{aligned}$$

Por lo que se deduce que

$$p(1/p' - s) \int_\delta^1 \left(t^{-s-(k-1)} \omega_{k-1/p}(u;t) \right)^p \frac{dt}{t} \leq p(1/p' - s) \delta^{-sp-1} v_p^{(k)}(u)^p. \tag{5.14}$$

Sumando (5.13) y (5.14) se obtiene

$$\begin{aligned} &\left| p(1/p' - s) \int_0^1 [t^{-s-(k-1)} \omega_{k-1/p}(u;t)]^p \frac{dt}{t} - \left\| u^{(k)} \right\|_p^p \right| \\ &\qquad \leq (1 - \delta^{p-sp-1}) \left\| u^{(k)} \right\|_p^p + \varepsilon \delta^{p-1-sp} + p(1/p' - s) \delta^{-sp-1} v_p^{(k)}(u)^p. \end{aligned}$$

Como $s \to 1/p'-$, el lado derecho tiende a ε. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, tendiendo a cero se obtiene la primera parte del teorema.

(ii) Aplicando la primera parte del teorema a u_h y el Lema 5.6 (i), se tiene que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\left\|u_h^{(k)}\right\|_p^p &= \lim_{s\to(1-1/p)-}(1/p'-s)\int_0^1\left[t^{-s-(k-1)}\omega_{k-1/p}(u_h;t)\right]^p\frac{dt}{t}\\ &\leq \overline{\lim}_{s\to(1-1/p)-}(1/p'-s)\int_0^1\left[t^{-s-(k-1)}\omega_{k-1/p}(u;t)\right]^p\frac{dt}{t}=C\end{aligned}$$

y entonces

$$\|u_h^{(k)}\|_p^p=\int_0^1\left(\frac{|u^{(k-1)}(x+h)-u^{(k-1)}(x)|}{h}\right)^p dx\leq C\quad (0<h\leq 1).$$

Como $\sup_h h^{-1}\|\Delta_h u^{(k-1)}\|_p < \infty$, entonces por un resultado de Hardy y Littlewood (Ver [65, Teorema 24]) se deduce que $u \in W_p^k$.

□

En el siguiente teorema se demuestra la continuidad en los extremos del punto del espacio intermedio determinada por $v_{p,\alpha}^{(k)}(u)$ siguiendo la idea de los resultados de S. Barza et al. en [21] y M. Lind (2013) en [88].

Teorema 5.12

Sea $1 < p < \infty$. Si u es una función 1-periódica entonces,

(i) $\lim_{\alpha\to 1/p'^-} v_{p,\alpha}^{(k)}(u) = v_{p,1/p'}^{(k)}(u)$, y

(ii) Si $u \in V_{p,a}^{(k)}$ para algún $a > 0$, entonces

$$\lim_{\alpha\to 0+} v_{p,\alpha}^{(k)}(u) = v_p^{(k)}(u). \tag{5.15}$$

Demostración:

La demostración de (i) y (ii) son similares a la demostración del Teorema 5.5 ([88, Teorema 3.4], ver también [21, Teorema 3.3]). Es suficiente con definir para una partición π del tipo (5.3),

$$t_{1,1}<\cdots<t_{1,2k}\leq t_{2,1}<\cdots\leq t_{m,k+1}<\cdots<t_{m,2k}$$

$$I_l=\left\{j:2^{-l-1}<t_{j,2k}-t_{j,1}\leq 2^{-l}\right\}$$

y

$$S_l^{(k)}(u)=\left(\sum_{l\in I_l}|u[t_{l,k+1},\dots,t_{l,2k}]-u[t_{l,1},\dots,t_{l,k}]|^p\right)^{1/p}.$$

Sumando por partes, el resultado se obtiene en virtud del Teorema 5.8.

□

La condición $u \in V_{p,a}^{(k)}$ para algún $a > 0$ es necesaria para que (5.15) se satisfaga. Si $u \in V_p^{(k)}$ tiene una $(k-1)$-derivada discontinua, entonces $v_{p,\alpha}(u^{(k-1)}) = \infty$ para todo $\alpha > 0$. Por lo tanto, $v_{p,\alpha}^{(k)}(u) = \infty$ para todo $\alpha > 0$, así $v_p^{(k)}(u) < \infty$. A. P. Terehin (1972) en [166] demuestra que para cada función $u \in C_p$, el módulo $\omega_{1-1/p}(u;t)$, es equivalente a una función no decreciente sobre $[0,1]$ dado por

$$\omega_1(u;t) = t^{1/p'} \inf_{0<u\leq t} \frac{\omega_{1-1/p}(u;u)}{u^{1/p'}}.$$

Claramente, $t^{-1/p'}\omega_1(u;t)$ es una función decreciente (Ver [88])

$$\omega_1(t) \leq \omega_{1-1/p}(u;t) \leq 2^{1/p'}\omega_1(t) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Similarmente, para cualquier función u tal que $\lim_{t\to 0+} \dfrac{\omega_{k-1/p}(u;t)}{t^{k-1}} = 0$, es posible demostrar que la función ω definida por

$$\omega(t) := \omega(u;t) = t^{1/p'} \inf_{0<u\leq t} \frac{\omega_{k-1/p}(u;u)}{u^{(k-1)+1/p'}}$$

es creciente y $t^{-1/p'}\omega(t)$ es decreciente. Por lo tanto, como

$$\frac{\omega_{k-1/p}(u;t)}{t^{(k-1)+1/p'}} \leq 2^{k-1/p} \frac{\omega_{k-1/p}(u;s)}{s^{(k-1)+1/p'}}$$

para todo $s < t$ (Ver [172]), se tiene que

$$\omega(t) \leq \frac{\omega_{k-1/p}(u;t)}{t^{k-1}} \leq 2^{k-1/p}\omega(t) \quad (0 \leq t \leq 1). \tag{5.16}$$

□

En el próximo teorema se demostrará una estimación de $v_{p,\alpha}^{(k)}(u)$ en términos de $\omega_{k-1/p}(u;t)$, en particular este resultado implica el resultado obtenido por N. Merentes (1992) en [118].

Teorema 5.13

Sea $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < 1/p'$ y u una función 1-periódica en $V_p^{(k)}$. Se asume que

$$I_{p,\alpha}^{(k)}(u) = \left(\int_0^1 [t^{-\alpha-(k-1)}\omega_{k-1/p}(u;t)]^p \frac{dt}{t}\right) < \infty. \tag{5.17}$$

Entonces, $u \in V_{p,\alpha}^{(k)}$ y

$$v_{p,\alpha}^{(k)}(u) \leq A(v_p^{(k)} + p'\,\alpha^{1/p}\left(\frac{1}{p'} - \alpha\right)^{1/p} I_{p,\alpha}^{(k)}(u)), \tag{5.18}$$

donde A es una constante que depende de k y p.

Demostración:

La condición (5.17) implica que $\lim_{t\to 0+} \dfrac{\omega_{k-1/p}(u;t)}{t^{k-1}} = 0$. Sin pérdida de generalidad, por Teorema 5.6, supongamos que

$$\lim_{t\to 0_+} \frac{\omega(u;t)}{t^{1/p'}} = \infty.$$

Sea $\omega_n = \omega(u;2^{-n})$ y $\overline{\omega}_n = 2^{n/p'}\omega(u;2^{-n})$, $n \in \mathbb{N}$. Definamos la sucesión de números naturales n_k de la siguiente forma:

$$n_0 = 0 \quad \text{y} \quad n_{l+1} = \text{mín}\left(n; \text{máx}\left(\frac{\omega_n}{\omega_{n_l}}, \frac{\overline{\omega}_{n_l}}{\overline{\omega}_n}\right) \leq 1/2\right), \qquad l \geq 0$$

Por la propiedad de la monotonía de $\omega(u,t)$ se tiene que

$$\omega_{n_l} < 4\omega_{n_{l+1}} \tag{5.19}$$

o

$$\overline{\omega}_{n_{l+1}} < 4\overline{\omega}_{n_l}. \tag{5.20}$$

Asumamos en primer lugar que (5.19) se satisface. Ahora definamos

$$g_l(x) = u_{2^{-n_l},\dots^{(k)},2^{-n_l}}(x) = 2^{n_l}\int_0^{2^{-n_l}} u_{2^{-n_l},\dots^{(k-1)},2^{-n_l}}(x+t)\,dt.$$

Para una partición fija π, consideremos

$$J_l = \left\{j : 2^{-n_{l+1}} < t_{j,2k} - t_{j,1} \leq 2^{-n_l}\right\}.$$

Y definamos

$$R_{l,\alpha}(u) := \left(\sum_{j\in J_l} |u[t_{j,k+1},\dots,t_{j,2k}] - u[t_{j,1},\dots,t_{j,k}]|^p \frac{1}{(t_{j,2k}-t_{j,1})^{\alpha p}}\right)^{1/p}$$

luego

$$R_l(u) := \left(\sum_{j\in J_l} |u[t_{j,k+1},\dots,t_{j,2k}] - u[t_{j,1},\dots,t_{j,k}]|^p\right)^{1/p}.$$

Para cada $j \in J_l$, se tiene que $g_l \in C^{(k)}$ y por [123, Proposición 2.3],

$$g_l[t_0,\dots,t_k] = \frac{g_l^{(k)}(\psi)}{k!} \qquad (\psi \in conv\{t_0,\dots,t_k\}).$$

Luego, por la desigualdad de Hölder se sigue que

$$\begin{aligned} |g_l[t_{j,k+1},\dots,t_{j,2k}] - g_l[t_{j,1},\dots,t_{j,k}]|^p \frac{1}{(t_{j,2k}-t_{j,1})^{\alpha p}} &= \frac{|g_l^{(k)}(\psi'_j) - g_l^{(k)}(\psi_j)|^p}{k!|t_{j,2k}-t_{j,1}|^{\alpha p}} \\ &\leq \frac{2^{-n_l(p-1-\alpha p)}}{k!}\int_{\psi_j}^{\psi'_j} |g_l^{(k)}|^p, \end{aligned}$$

donde $\psi_j \in conv\{t_{j,1},\dots,t_{j,k}\}$ y $\psi'_j \in conv\{t_{j,k+1},\dots,t_{j,2k}\}$.

Por lo que, por la parte (ii) del Lema 5.6 y por (5.16), se puede deducir que

$$\begin{aligned} R_{l,\alpha}(g_l) &\leq 2^{-n_l(1/p'-\alpha)}\|g_l^{(k)}\|_p \\ &\leq 2^{-n_l(1/p'-\alpha)}2^{n_l/p'}2^{(k-1)n_l}\omega_{k-1/p}(u;2^{-n_l}) \\ &\leq 2^{-n_l(1/p'-\alpha)}2^{n_l/p'}2^{k-1/p}\omega_{n_l}. \end{aligned}$$

Entonces

$$R_{l,\alpha}(g_l) \leq 2^{n_l\alpha+k}\omega_{n_l} \tag{5.21}$$

por lo tanto

$$R_{l,\alpha}(u-g_l) \leq 2^{n_{l+1}\alpha}R_l(u-g_l). \tag{5.22}$$

Por (5.21) y (5.22), se tiene que

$$v^{(k)}_{p,\alpha}(u,\Pi) \quad \leq \quad 2^k\Big(\sum_{l=0}^{\infty}2^{n_l\alpha p}\omega^p_{n_l}\Big)^{1/p}+\Big(\sum_{l=0}^{\infty}2^{n_{l+1}\alpha p}R_l(u-g_l)^p\Big)^{1/p}.$$

Estimando el segundo término de la suma, se obtiene que $R_l(u-g_k) \leq v^{(k)}_p(u-g_l)$. Por la parte (ii) del Lema 5.6, las desigualdades (5.16) y (5.19), se deduce que

$$\begin{aligned}
2^{n_{l+1}\alpha p}R_l(u-g_l)^p &\leq 2^{n_{l+1}\alpha p}v^{(k)}_p(u-g_l)^p\\
&\leq 2^{n_{l+1}\alpha p}\Big(\frac{6k}{(k-1)!}\Big)^p\Big(\frac{\omega_{k-1/p}(u;2^{-n_l})}{2^{-n_l(k-1)}}\Big)^p\\
&\leq 2^{n_{l+1}\alpha p}\Big(\frac{6k}{(k-1)!}\Big)^p2^{kp-1+2p}\omega^p_{n_{l+1}}.
\end{aligned}$$

Así se tiene que,

$$\begin{aligned}
v^{(k)}_{p,\alpha}(u,\Pi) &\leq 2^k\Big(\sum_{l=0}^{\infty}2^{n_l\alpha p}\omega^p_{n_l}\Big)^{1/p}+\Big(\sum_{l=0}^{\infty}2^{n_{l+1}\alpha p}R_l(u-g_l)^p\Big)^{1/p}\\
&\leq \Big(2^k+2^{k-1/p+2}\frac{6k}{(k-1)!}\Big)\Big(\sum_{l=0}^{\infty}2^{n_l\alpha p}\omega^p_{n_l}\Big)^{1/p}.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Asumamos que (5.20) se satisface. Definamos

$$\hat{g}_l(x)=u_{2^{-n_{l+1}},\dots^{(k)},2^{-n_{l+1}}}(x)=2^{n_{l+1}}\int_0^{2^{-n_{l+1}}}u_{2^{-n_{l+1}},\dots^{(k-1)},2^{-n_{l+1}}}(x+t)\,dt.$$

Por la parte (ii) del Lema 5.6, la desigualdad (5.16), la definición de $\omega(u,t)$ y la desigualdad (5.20)

$$\begin{aligned}
R_{l,\alpha}(\hat{g}_l) &\leq 2^{-n_l(1/p'-\alpha)}2^{n_{l+1}(k-1/p)}\omega_{k-1/p}(u;2^{-n_{l+1}})\\
&\leq 2^{-n_l(1/p'-\alpha)}2^{n_{l+1}(k-1/p)}2^{k-1/p}\omega_{n_{l+1}}\\
&\leq 4\cdot 2^{-n_l(1/p'-\alpha)}2^{k-1/p}\overline{\omega}_{n_l}\\
&\leq 4\cdot 2^{-n_l(1/p'-\alpha)}2^{k-1/p}2^{n_l/p'}\omega_{n_l}\\
&\leq 4\cdot 2^{n_l\alpha+k}\omega_{n_l}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$R_{l,\alpha}(\hat{g}_l) \leq 4\cdot 2^{n_l\alpha+k}\omega_{n_l} \tag{5.24}$$

y además

$$R_{l,\alpha}(u-\hat{g}_l) \leq 2^{n_{l+1}\alpha}R_l(u-\hat{g}_k). \tag{5.25}$$

Por (5.24) y (5.25), se tiene que

$$v_{p,\alpha}^{(k)}(u,\pi) \quad \leq \quad 4\cdot 2^k\Big(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{n_l\alpha p}\omega_{n_l}^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{n_{l+1}\alpha p} R_l(u-\hat{g}_l)^p\Big)^{1/p}.$$

Para estimar el segundo término de la suma se tiene $R_l(u-\hat{g}_l) \leq v_p^{(k)}(u-\hat{g}_l)$. Por la parte (iii) del Lema 5.6 y la desigualdad (5.16) se obtiene que

$$\begin{aligned} 2^{n_{l+1}\alpha p} R_l(u-\hat{g}_l)^p \quad &\leq \quad 2^{n_{l+1}\alpha p} v_p^{(k)}(u-\hat{g}_l)^p \\ &\leq \quad 2^{n_{l+1}\alpha p}\Big(\frac{6k}{(k-1)!}\Big)^p\Big(\frac{\omega_{k-1/p}(u;2^{-n_{l+1}})}{2^{-n_{l+1}(k-1)}}\Big)^p \\ &\leq \quad \Big(\frac{2^k 6k}{(k-1)!}\Big)^p 2^{n_{l+1}\alpha p}\omega_{n_{l+1}}^p. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} v_{p,\alpha}^{(k)}(u,\pi) \quad &\leq \quad 4\cdot 2^k\Big(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{n_l\alpha p}\omega_{n_l}^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{n_{l+1}\alpha p} R_l(u-\hat{g}_l)^p\Big)^{1/p} \\ &\leq \quad 2^k\left(4+\frac{6k}{(k-1)!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{n_l\alpha p}\omega_{n_l}^p\right)^{1/p}. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Por (5.23) y (5.26),

$$v_{p,\alpha}^{(k)}(u,\pi) \leq 2^{k+2}\left(1+\frac{6k}{(k-1)!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{n_l\alpha p}\omega_{n_l}^p\right)^{1/p}.$$

Aplicando el Lema 5.2 con $q=p$, $\beta = p\alpha$ y $\gamma = 1/p'$, se tiene que

$$\begin{aligned} v_{p,\alpha}^{(k)}(u,\pi) &\leq 2^{k+2}\left(1+\frac{6k}{(k-1)!}\right)\Big(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{n_l\alpha p}\omega_{n_l}^p\Big)^{1/p} \\ &\leq \quad 2^{k+2}\left(1+\frac{6k}{(k-1)!}\right)\left[2\omega_0^p + \frac{2^{p+2}p'}{p} p\alpha(p/p'-\alpha p)\int_0^1 t^{-\alpha p}\omega(t)^p\frac{dt}{t}\right]^{1/p} \\ &\leq \quad 2^{k+6}\left(1+\frac{6k}{(k-1)!}\right)\left[\omega_0 + p'\alpha^{1/p}(1/p'-\alpha)^{1/p}\Big(\int_0^1 t^{-\alpha p}\omega(t)^p\frac{dt}{t}\Big)^{1/p}\right], \end{aligned}$$

como $p^{1/p} \leq 2$ y $(p')^{1/p} \leq p'$.

Por otro lado, por (5.16),

$$\begin{aligned} \omega_0 \quad := \quad & \omega(1) \leq \frac{\omega_{k-1/p}(u;1)}{1} \\ \leq \quad & \omega_{1-1/p}(u^{(k-1)};1) \\ \leq \quad & v_p(u^{(k-1)}) \\ = \quad & v_p^{(k)}(u), \end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 t^{-\alpha p}\omega(t)^p\frac{dt}{t}\right)^{1/p} &\leq \left(\int_0^1\left(t^{-\alpha-(k-1)}\omega_{k-1/p}(u;t)\right)^p\frac{dt}{t}\right)^{1/p}\\ &= I_{p,\alpha}^{(k)}(u).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$v_{p,\alpha}^{(k)}(u,\pi)\leq 2^{k+6}\left(1+\frac{6k}{(k-1)!}\right)\left[v_p^{(k)}(u)+p'\alpha^{1/p}(1/p'-\alpha)^{1/p}I_{p,\alpha}^{(k)}(u)\right].$$

□

N Si $u\in W_p^k$, entonces por la parte (i) del Teorema 5.11, se tiene que

$$\lim_{s\to 1/p'-}(1/p'-s)^{1/p}\left(\int_0^1\left[t^{-s-(k-1)}\omega_{k-1/p}(u;t)\right]^p\frac{dt}{t}\right)^{1/p}=\left(\frac{1}{p}\right)^{1/p}\|u^{(k)}\|_p.$$

Por lo tanto, por el resultado de F. Riesz y el Teorema 5.10,

$$\begin{aligned}v_p^{(k)}(u) &= \lim_{\alpha\to 0}v_{p,\alpha}^{(k)}(u)\leq v_{p,1/p'}^{(k)}(u)\\ &= \frac{1}{(k-1)!}v_{p,1/p'}(u^{(k-1)})\\ &= \frac{1}{(k-1)!}\left\|u^{(k)}\right\|_p.\end{aligned}$$

El límite superior cuando $\alpha\to 1/p'_-$ del lado derecho de (5.18) es menor que

$$2^{k+6}\left(1+\frac{6k}{(k-1)!}\right)\left[\frac{1}{(k-1)!}+p'\left(\frac{1}{p'}\right)^{1/p}\left(\frac{1}{p}\right)^{1/p}\right]\|u^{(k)}\|_p.$$

Así, por la parte (i) del Teorema 5.12, el lado izquierdo de (5.18) tiende a $v_{p,1/p'}^{(k)}(u)$. Por lo que, se considera el límite cuando $\alpha\to 1/p'_-$, cumpliéndose que

$$v_{p,1/p'}^{(k)}(u)\leq C(p,k)\|u^{(k)}\|_p.$$

Esto implica que el resultado de Merentes en [118] establece que $W_p^k\subset V_{p,1/p'}^{(k)}$ y esto demuestra que el orden de la constante es óptima.

Asumamos que $I_{p,\alpha_0}^{(k)}(u)<\infty$ para algún $0<\alpha_0<1/p'$. Como $I_{p,\alpha}^{(k)}(u)\leq I_{p,\alpha_0}^{(k)}(u)$ para $0<\alpha<\alpha_0$, se sigue que

$$\lim_{\alpha\to 0_+}\alpha^{1/p}I_{p,\alpha}^{(k)}(u)\leq\lim_{\alpha\to 0_+}\alpha^{1/p}I_{p,\alpha_0}^{(k)}(u)=0.$$

Por lo tanto, como $I_{p,\alpha_0}^{(k)}(u)<\infty$, por Teorema 5.13, $u\in V_{p,\alpha_0}^{(k)}$. Así, $v_{p,\alpha}^{(k)}(u)$ tiende a $v_p^{(k)}(u)$ cuando $\alpha\to 0_+$ por la parte (ii) del Teorema 5.12. Luego, el lado izquierdo de (5.18) coincide con el comportamiento del lado derecho cuando $\alpha\to 0_+$ lo cual significa que el orden de la constante también es óptima.

5.4 Resultados Adicionales y Aplicaciones

El siguiente lema es usado para demostrar el resultado principal de esta sección, el cual se refiere a la proposición 5.7.

Lema 5.7
Sean $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < 1/p'$ y u una función 1-periódica. Asumamos que

$$I_{p,\alpha}^{(k)}(u) = \left(\int_0^1 [t^{-\alpha-(k-1)}\omega_{k-1/p}(u;t)]^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p} < \infty.$$

Entonces

$$\begin{aligned} I_{p,\alpha}^{(k)}(u) &\leq \left(\int_0^1 [t^{-\alpha}\omega_{1-1/p}(u^{(k-1)};t)]^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p} \\ &= I_{p,\alpha}(u^{(k-1)}) \\ &\leq C(p,\alpha,k) I_{p,\alpha}^{(k)}(u). \end{aligned}$$

donde

$$C(p,\alpha,k) = C2^{1-1/p}\left(\frac{(k-1)^p}{\alpha^p} + 2^{kp-1}C(p)\right)^{1/p} \quad \text{si} \quad 1 \leq p \leq 2$$

y

$$C(p,\alpha,k) = C2^{1-1/p}\left(\frac{(k-1)^p}{\alpha^p} + \frac{1}{p-\alpha p-1}\right)^{1/p} \quad \text{si} \quad p \geq 2.$$

Demostración:

A partir de la estimación puntual del Lema 5.5, se tiene que

$$I_{p,\alpha}^{(k)}(u) \leq \left(\int_0^1 [t^{-\alpha-(k-1)}t^{k-1}\omega_{1-1/p}(u^{(k-1)};t)]^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p} = I_{p,\alpha}(u^{(k-1)}).$$

Se demostrará ahora la segunda desigualdad. Como $I_{p,\alpha}^{(k)}(u) < \infty$, se sigue que $I_{p,\alpha}(u^{(k-1)}) < \infty$. Entonces, $u^{(k-1)} \in C_p$. Supongamos que el siguiente tipo de desigualdad del tipo Marchaud-Timan (Ver [172, Teorema 4]).

$$\omega_{1-1/p}(u^{(k-1)};t) \leq C\left((k-1)\int_0^t \frac{\omega_{k-1/p}(u;v)}{v^k}dv + t^{1-1/p}\left(\int_t^1 \frac{\omega_{k-1/p}(u;v)^s}{v^{s(k-1/p)+1}}dv\right)^{1/s}\right), \tag{5.27}$$

donde C es una constante absoluta independiente de p y $s = \text{máx}\{p,2\}$.

Asumamos que $s = p$, es decir $p \geq 2$. Sea $t > 0$. Considerando (5.27) elevado a la p, multiplicando ambos lados por $t^{-\alpha p-1}$ e integrando desde 0 hasta 1 se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^1 [t^{-\alpha}\omega_{1-1/p}(u^{(k-1)};t)]^p \frac{dt}{t} &\leq C^p 2^{p-1}\left[(k-1)^p \int_0^1 t^{-\alpha p-1}\left(\int_0^t \frac{\omega_{k-1/p}(u;v)}{v^k}dv\right)^p dt \right. \\ &+ \left. \int_0^1 t^{p-\alpha p-2}\left(\int_t^1 \frac{\omega_{k-1/p}(u;v)^p}{v^{kp}}dv\right)dt\right]. \end{aligned}$$

Estimando el primer término de la suma anterior, por el uso de la desigualdad de Hardy con peso (Ver [22, Lema 3.9]) se obtiene

$$\int_0^1 t^{-\alpha p-1}\Big(\int_0^t \frac{\omega_{k-1/p}(u;v)}{v^k}dv\Big)^p dt \le \frac{1}{\alpha^p}\int_0^1 [t^{-\alpha-(k-1)}\omega_{k-1/p}(u;t)]^p \frac{dt}{t}. \tag{5.28}$$

Para el segundo término, por el teorema de Fubini se tiene,

$$\int_0^1 t^{p-\alpha p-2}\Big(\int_t^1 \frac{\omega_{k-1/p}(u;v)^p}{v^{kp}}dv\Big)dt = \frac{1}{p-\alpha p-1}\int_0^1 [t^{-\alpha}\frac{\omega_{k-1/p}(u;t)}{t^{k-1}}]^p \frac{dt}{t}. \tag{5.29}$$

Por consiguiente, (5.28) y (5.29) implican la siguiente estimación

$$\int_0^1 [t^{-\alpha}\omega_{1-1/p}(u^{(k-1)};t)]^p\frac{dt}{t} \le C^p 2^{p-1}\Big(\frac{(k-1)^p}{\alpha^p}+\frac{1}{p-\alpha p-1}\Big)\int_0^1 [t^{-\alpha-(k-1)}\omega_{k-1/p}(u;t)]^p\frac{dt}{t}.$$

Supongamos que $s=2$, es decir $1<p\le 2$. Por (5.27) elevado a la p, multiplicando ambos lados por $t^{-\alpha p-1}$ e integrando desde 0 hasta 1 se tiene que

$$\begin{aligned}\int_0^1 [t^{-\alpha}\omega_{1-1/p}(u^{(k-1)};t)]^p\frac{dt}{t} &\le C^p 2^{p-1}\left[(k-1)^p\int_0^1 t^{-\alpha p-1}\left(\int_0^t \frac{\omega_{k-1/p}(u;v)}{v^k}dv\right)^p dt\right.\\ &+ \left.\int_0^1 t^{p-\alpha p-2}\left(\int_t^1 \frac{\omega_{k-1/p}(u;v)^2}{v^{2(k-1/p)+1}}dv\right)^{p/2} dt\right].\end{aligned}$$

El primer término del lado derecho de la desigualdad se puede estimar como el caso anterior (Ver (5.28)), y el segundo término se puede estimar por el hecho de que para cada $v>t$, se tiene la siguiente desigualdad

$$\Big(\frac{\omega_{k-1/p}(u;v)}{v^{k-1/p}}\Big)^2 = \Big(\frac{\omega_{k-1/p}(u;v)}{v^{(k-1)+1/p'}}\Big)^2 \le \Big(2^{k-1/p}\frac{\omega_{k-1/p}(u;t)}{t^{(k-1)+1/p'}}\Big)^2.$$

Entonces,

$$\int_0^1 t^{p-\alpha p-2}\Big(\int_t^1 \Big(\frac{\omega_{k-1/p}(u;v)}{v^{k-1/p}}\Big)^2\frac{dv}{v}\Big)^{p/2}dt \quad\le\quad 2^{kp-1}C(p)\int_0^1 [t^{-\alpha-(k-1)}\omega_{k-1/p}(u;v)]^p\frac{dt}{t}.$$

Por lo que,

$$\int_0^1 [t^{-\alpha}\omega_{1-1/p}(u^{(k-1)};t)]^p\frac{dt}{t} \le C^p 2^{p-1}\Big(\frac{(k-1)^p}{\alpha^p}+2^{kp-1}C(p)\Big)\int_0^1 [t^{-\alpha-(k-1)}\omega_{k-1/p}(u;t)]^p\frac{dt}{t}.$$

$\square$

N El Teorema 5.13 se deriva del Teorema 5.6 y el lema anterior, pero la constante no tendrá un comportamiento asintótico. De hecho, como $u \in V_p^{(k)}$, entonces

$$v_{p,\alpha}^{(k)}(u) \leq A\Big(v_p^k(u) + c_{p,\alpha}\frac{C(p,\alpha,k)}{(k-1)!}I_{p,\alpha}^{(k)}(u)\Big).$$

Proposición 5.7

Sean $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < 1/p'$ y u una función 1-periódica tal que $u^{(k-1)} \in V_p$. Asumamos que

$$I_{p,\alpha}^{(k)}(u) = \left(\int_0^1 [t^{-\alpha-(k-1)}\omega_{k-1/p}(u;t)]^p \frac{dt}{t}\right) < \infty. \tag{5.30}$$

Entonces, $u \in V_{p,\alpha}^{(k)}$ y

$$v_{p,\alpha}^{(k)}(u) \leq A(v_p^{(k)}(u) + \frac{c_{p,\alpha}C(p,\alpha,k)}{(k-1)!}I_{p,\alpha}^{(k)}(u)),$$

donde A es una constante absoluta,

$$C(p,\alpha,k) = C2^{1-1/p}\left(\frac{(k-1)^p}{\alpha^p} + 2^{kp-1}C(p)\right)^{1/p} \quad \text{si} \quad 1 \leq p \leq 2$$

y

$$C(p,\alpha,k) = C2^{1-1/p}\Big(\frac{(k-1)^p}{\alpha^p} + \frac{1}{p-\alpha p-1}\Big)^{1/p} \quad \text{si} \quad p \geq 2.$$

Demostración:

El resultado se deduce del Teorema 5.6, el Lema 5.7 y el Teorema 5.10. Ciertamente, como $u^{(k-1)} \in V_p^R$ y $I_{p,\alpha}^{(k)}(u) < \infty$, entonces por el Teorema 5.6 se cumple que $u^{(k-1)} \in V_{p,\alpha}$. Entonces, $u \in V_{p,\alpha}^{(k)}$ por el Teorema 5.10. De nuevo por el Teorema 5.6 y el Lema 5.7, se satisface

$$\begin{aligned} v_{p,\alpha}(u^{(k-1)}) &\leq A\big(v_p(u^{(k-1)}) + c_{p,\alpha}I_{p,\alpha}(u^{(k-1)})\big) \\ &\leq A\big((k-1)!v_p^k(u) + c_{p,\alpha}C(p,\alpha,k)I_{p,\alpha}^{(k)}(u)\big), \end{aligned}$$

donde A es una constante absoluta en [88, Teorema 4.1]. Finalmente, aplicando de nuevo el Teorema 5.10, se cumple que

$$v_{p,\alpha}^{(k)}(u) \leq A\left(v_p^k(u) + c_{p,\alpha}\frac{C(p,\alpha,k)}{(k-1)!}I_{p,\alpha}^{(k)}(u)\right).$$

La desigualdad es fuerte en el sentido que (5.30) no puede ser reemplazado.

□

6 Espacio de Funciones de $\kappa\Phi$-Variación Acotada en el Sentido de Schramm-Korenblum en $\mathbb{R}^2$

Durante las últimas décadas, algunas extensiones y generalizaciones han sido consideradas para el concepto clásico de la variación de una función. Tales extensiones y generalizaciones juegan un papel importante y se encuentran en muchas aplicaciones en diferentes áreas de las matemáticas. Poco después del trabajo de Jordan, muchos matemáticos comenzaron a estudiar nociones de variación acotada de funciones de varias variables. Las definiciones de variación acotada para funciones de dos variables han sido halladas principalmente por el deseo de tener una clase de funciones que tenga propiedades análogas a algunas propiedades particulares de una función de variación acotada de una variable. No hay manera única para extender la noción de variación a funciones de más de una variable. J. A. Clarkson y R. Adams (1933), en [42] estudian seis de tales generalizaciones y R. Adams y J. A. Clarkson (1934), en [1] mencionan dos más. Dos de estas definiciones son relevantes para nuestro propósito. Clarkson y Adams atribuyen el primero a Vitali, Lebesgue, Fréchet y De la Vallée Poussin, y el segundo a G. H. Hardy (1904/05), en [63] y M. Krause (1903), en [81]. A. B. Owen (2014), en [135] proporciona una discusión muy útil de los conceptos de variación de Vitali y de Hardy-Krause (Otra referencia útil es E. W. Hobson (1927), en [67]). A principio del siglo pasado G. H. Hardy (1905/06) en [63] generaliza el criterio de Jordan para la serie doble de Fourier y demostró que si una función continua de dos variables tiene variación acotada (en el sentido de Hardy), entonces tiene serie de Fourier uniformemente convergente.

A. Guerrero, N. Merentes y J. L. Sánchez (2015), en [61] introducen el espacio $\kappa BV(I_a^b,\mathbb{R})$ de las funciones de dos variables de κ-variación acotada en en el sentido de Hardy-Vitali-Korenblum y demostraron que el espacio $\kappa BV(I_a^b,\mathbb{R})$ es un espacio de Banach.

Motivados por los resultados de A. Guerrero et al. (2015), en [61] y S. K. Kim y J. Kim (1986), en [76], como contribución al tema, siguiendo la definición de variación de Vitali y Hardy-Krause, se introduce la definición de $\kappa\Phi$-variación acotada en el sentido de Schramm-Korenblum para funciones reales definidas en un subconjunto no vacío de un rectángulo en el plano, el cual es una combinación de las nociones de Φ-variación acotada en en el sentido de Schramm y κ-variación acotada en en el sentido de Korenblum (Ver [17]).

6.1 Preliminares

Se iniciará esta sección presentando y recordando algunas notaciones y definiciones generales, usadas a lo largo de este capítulo.

1. Si A y B son conjuntos no vacío, el símbolo A^B denota la familia de funciones $u : B \to A$.

2. Se denota por S_n al conjunto de todas las permutaciones σ del conjunto $\{1, \ldots, n\}$ con n entero positivo.

3. Sea $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo no vacío. Para $u \in \mathbb{R}^I$, definimos $\|u\|_\infty := \sup_{x \in B} |u(x)|$, y si $||u||_\infty < \infty$, se dice que u es acotado.

4. Se denota por $\mathscr{P}(I)$ la clase de todas las particiones del intervalo I.

5. Sea $u \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ y $\xi = \{t_i\}_{i=1}^k \in \mathscr{P}(I)$, así
$$\Delta t_{i+1} = t_{i+1} - t_i \text{ , } \Delta u(t_{i+1}) = u(t_{i+1}) - u(t_i), \quad i = 1, \ldots, k-1.$$

6. $a = (a_1, b_1), b = (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $I = [a_1, a_2]$, $J = [b_1, b_2]$, $I_a^b = I \times J$ y $k_1, k_2 \geq 2$ entero. Si $u \in \mathbb{R}^{I_a^b}$, $\xi = \{t_i\}_{i=1}^{k_1}$ y $\eta = \{s_j\}_{j=1}^{k_2}$ son particiones de los intervalos I, J, respectivamente, se denota por
$$\begin{aligned}
\Delta_{10} u(t_i, s_j) &:= u(t_{i+1}, s_j) - u(t_i, s_j) \\
\Delta_{01} u(t_i, s_j) &:= u(t_i, s_{j+1}) - u(t_i, s_j) \\
\Delta_{11} u(t_i, s_j) &:= u(t_{i-1}, s_{j-1}) - u(t_{i-1}, s_j) - u(t_i, s_{j-1}) + u(t_i, s_j).
\end{aligned}$$

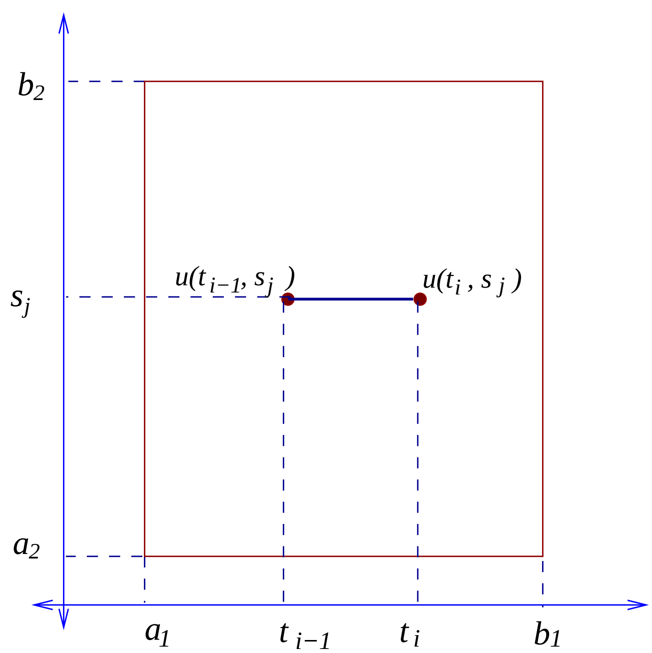

Figura 6.1: $\Delta_{10} u(t_i, s_j) := u(t_{i+1}, s_j) - u(t_i, s_j)$

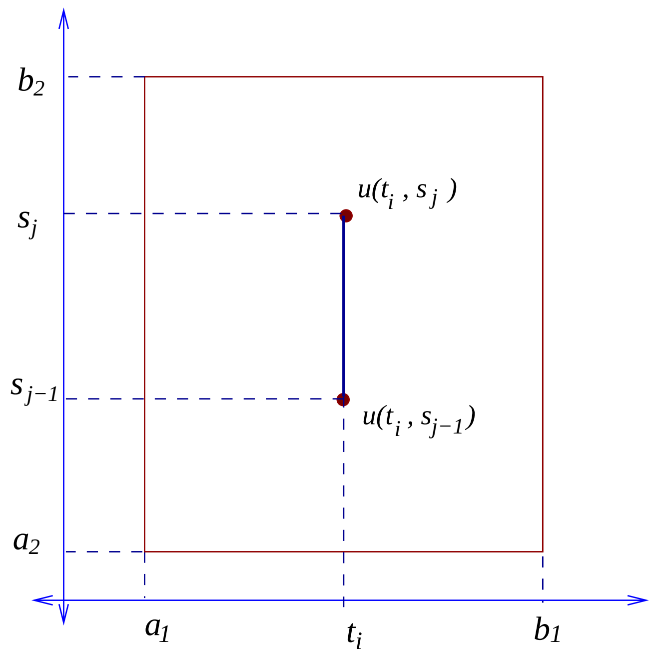

Figura 6.2: $\Delta_{01}u(t_i,s_j) := u(t_i,s_{j+1}) - u(t_i,s_j)$

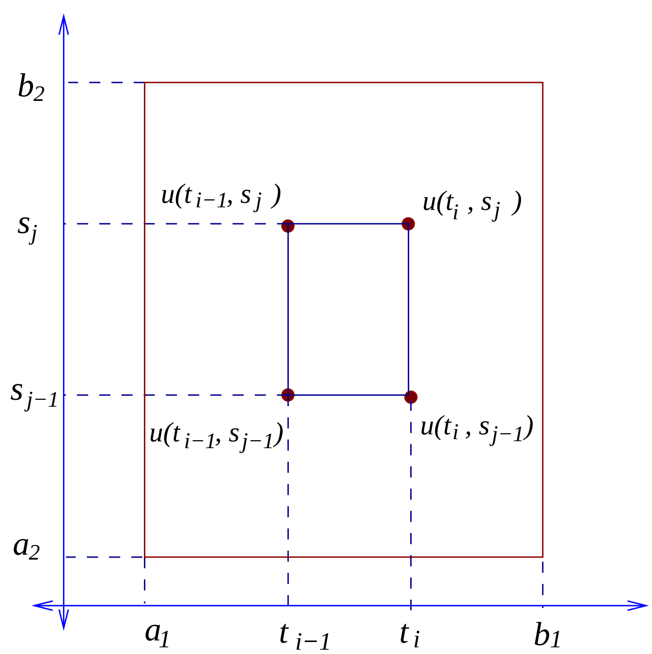

Figura 6.3: $\Delta_{11}u(t_i,s_j) := u(t_{i-1},s_{j-1}) - u(t_{i-1},s_j) - u(t_i,s_{j-1}) + u(t_i,s_j)$

7. La doble sucesión $\phi = \{\varphi_{i,j}\}_{i,j\geq 1}$ será una ϕ-sucesión si para i o j fijos $\phi = \{\varphi_{i,j}\}_{i,j\geq 1}$ es una Φ-sucesión (Los primeros trabajos sobre la doble sucesión se pueden conseguir en los resultados de T. J. Bromwich (1965) en [23] y G. H. Hardy (1917) en [64]).

La noción de variación presentada por C. Jordan en el año 1881 en el caso unidimensional fue generalizada por G. Vitali y G. Hardy para funciones de dos variables entre los años 1904-1906 (Ver [63] y [168]) el cual se presentan en la siguiente definición:

Definición 6.1 (G. Vitali y G. Hardy [63] y [168])

Sean $u \in \mathbb{R}^{I_a^b}$ y $y \in J$ fijo. La variación de Jordan de la función $u(\cdot, y) \in \mathbb{R}^I$ se define como

$$V(u(\cdot,y)) = V_I(u(\cdot,y)) = \sup_{\mathscr{P}(I)} \sum_{i=1}^{k_1-1} \left|\Delta_{10} u(t_{i+1}, y)\right|,$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones $\{t_i\}_{i=1}^{k_1} \in \mathscr{P}(I)$.

Para $x \in I$ fijo, la función de variación de Jordan $u(x,\cdot) \in \mathbb{R}^J$ se define como

$$V(u(x,\cdot)) = V_J(u(x,\cdot)) = \sup_{\mathscr{P}(J)} \sum_{j=1}^{k_2-1} \left|\Delta_{01} u(x, s_{j+1})\right|,$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones $\{s_j\}_{j=1}^{k_2} \in \mathscr{P}(J)$.

La variación u en el sentido de Hardy-Vitali es definido en el rectángulo I_a^b como

$$V_{I_a^b}(u) := \sup_{\mathscr{P}(I),\mathscr{P}(J)} \sum_{i=1}^{k_1-1}\sum_{j=1}^{k_2-1} \left|\Delta_{11} u(t_{i+1}, s_{j+1})\right|,$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones $\{t_i\}_{i=1}^{k_1} \in \mathscr{P}(I)$, $\{s_j\}_{j=1}^{k_2} \in \mathscr{P}(J)$.

La variación total de la función u, se define como

$$TV(u) = TV(u, I_a^b) := V_I(u(\cdot, a_2)) + V_J(u(a_1,\cdot)) + V_{I_a^b}(u).$$

Se denota por $BV(I_a^b)$ al espacio de todas las funciones que tienen variación acotada finita.

La noción de κ-variación que introdujo B. Korenblum en el año 1975 (Ver [79]), en el caso unidimensional, fué generalizada por J. A. Guerrero, N. Merentes y J. L. Sánchez en el año 2015 (Ver [61]) en el caso de dos dimensiones como se muestra a continuación:

Definición 6.2 (J. Guerrero, N. Merentes, J. L. Sánchez [61])

Sean κ una función distorsión, $u \in \mathbb{R}^{I_a^b}$ y $y \in J$ fijo, la función de κ-variación de Jordan $u(\cdot, y) \in \mathbb{R}^I$ se define como

$$\kappa V(u(\cdot,y)) = \kappa V_I(u(\cdot,y)) = \underset{\mathscr{P}(I)}{sup} \frac{\sum_{i=1}^{k_1-1} \left|\Delta_{10} u(t_{i+1}, y)\right|}{\sum_{i=1}^{k_1-1} \kappa\left(\frac{\Delta t_{i+1}}{a_2-a_1}\right)},$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones $\{t_i\}_{i=1}^{k_1} \in \mathscr{P}(I)$.

Para $x \in I$ fijo, la función κ-variación de Jordan $u(x, \cdot) \in \mathbb{R}^J$ se define como

$$\kappa V(u(x,\cdot)) = \kappa V_J(u(x,\cdot)) = \underset{\mathscr{P}(J)}{sup} \frac{\sum_{j=1}^{k_2-1} \left|\triangle_{01} u(x, s_{j+1})\right|}{\sum_{j=1}^{k_2-1} \kappa\left(\frac{\Delta s_{j+1}}{b_2-b_1}\right)},$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones $\left\{s_j\right\}_{j=1}^{k_2} \in \mathscr{P}(J)$.

La κ-variación de Hardy-Vitali en dos dimensiones u en el rectángulo I_a^b se define como

$$\kappa V_{I_a^b}(u) := \underset{\mathscr{P}(I),\mathscr{P}(J)}{sup} \frac{\sum_{i=1}^{k_1-1}\sum_{j=1}^{k_2-1} \left|\triangle_{11} u(t_{i+1}, s_{j+1})\right|)}{\sum_{i=1}^{k_1-1}\sum_{j=1}^{k_2-1} \kappa\left(\frac{\Delta t_{i+1}\Delta s_{i+1}}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}\right)},$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones $\{t_i\}_{i=1}^{k_1} \in \mathscr{P}(I)$, $\left\{s_j\right\}_{j=1}^{k_2} \in \mathscr{P}(J)$.

La κ-variación total de la función u, se define como

$$\kappa TV(u) = \kappa TV(u, I_a^b) := \kappa V_I(u(\cdot, b_2)) + \kappa V_J(u(a_1, \cdot)) + \kappa V_{I_a^b}(u).$$

Se denota por $\kappa BV(I_a^b)$ el espacio de todas las funciones que tienen κ-variación total acotada.

La noción de Φ-variación que introdujo M. Schramm en el año 1985 (Ver [158]), en el caso unidimensional, fue generalizada por T. Ereú, N. Merentes y J. L. Sánchez en el año 2010 (Ver [51]), en el caso bidimensional, como sigue:

Definición 6.3 (T. Ereú, N. Merentes, J. L. Sánchez [51])

Sean $\phi = \{\varphi_{i,j}\}_{i,j\geq 1}$ una ϕ-sucesión, $u \in \mathbb{R}^{I_a^b}$ y $y \in J$ fijo, la Φ-variación en el sentido de Schramm de la función $u(\cdot, y) \in \mathbb{R}^I$ se define como

$$V_\phi^S(u(\cdot,y)) = V_{\phi,I}^S(u(\cdot,y)) = \sup_{\mathscr{P}(I)} \sum_{i=1}^{k_1-1} \varphi_{i,1}\left(\left|\Delta_{10}u(t_{\sigma_1(i)+1}, y)\right|\right),$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones $\{t_i\}_{i=1}^{k_1} \in \mathscr{P}(I)$ y $\sigma_1 \in S_{k_1-1}$.

Para $x \in I$ fijo, la Φ-variación en el sentido Schramm de la función $u(x,\cdot) \in \mathbb{R}^J$, se define como

$$V_\phi^S(u(x,\cdot)) = V_{\phi,J}^S(u(x,\cdot)) = \sup_{\mathscr{P}(J)} \sum_{j=1}^{k_2-1} \varphi_{1,j}\left(\left|\Delta_{01}u(x, s_{\sigma_2(j)+1})\right|\right),$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones $\{s_j\}_{j=1}^{k_2} \in \mathscr{P}(J)$ y $\sigma_2 \in S_{k_2-1}$.

La variación bidimensional en el sentido de Schramm de la función u en el rectángulo I_a^b se define como

$$V_{\phi,I_a^b}^S(u) := \sup_{\mathscr{P}(I),\mathscr{P}(J)} \sum_{i=1}^{k_1-1}\sum_{j=1}^{k_2-1} \varphi_{i,j}\left(\left|\Delta_{11}u(t_{\sigma_1(i)+1}, s_{\sigma_2(j)+1})\right|\right),$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones $\{t_i\}_{i=1}^{k_1} \in \mathscr{P}(I)$ y $\{s_j\}_{j=1}^{k_2} \in \mathscr{P}(J)$ de los intervalos I, J respectivamente y $\sigma_1 \in S_{k_1+1}$, $\sigma_2 \in S_{k_2+1}$.

La Φ-variación total de la función u se define como

$$TV_{\phi,I_a^b}^S(u) = TV_\phi^S(u, I_a^b) := V_{\phi,I}^S(u(\cdot,a_2)) + V_{\phi,J}^S(u(a_1,\cdot)) + V_{\phi,I_a^b}^S(u).$$

La clase de las funciones con Φ-variación total acotada se denota como $V_\phi^S(I_a^b)$ y este espacio generado por esta clase se denota por $BV_\Phi^S(I_a^b)$.

6.2 Funciones de $\kappa\phi$-Variación Acotada en el Sentido de Schramm-Korenblum Bidimensional

En el resultado principal de esta sección, como contribución al tema, se generaliza el concepto de $\kappa\Phi$-variación sobre el intervalo $[a,b]$, el cual fué presentado por S. K. Kim, J. Kim (1986), en [76], definiéndose la clase de las funciones de $\kappa\Phi$-variación total bidimensional en I_a^b en el sentido de Schramm-Korenblum. Además, se demuestran algunas propiedades para este tipo de funciones y por último se demuestra que el espacio $\kappa BV_\phi^S(I_a^b)$ es un álgebra de Banach (Ver [17]).

Definición 6.4

Sean $\phi = \{\varphi_{i,j}\}_{i,j\geq 1}$ una ϕ-sucesión, κ una función distorsión, $u \in \mathbb{R}^{I_a^b}$ y $y \in J$ fijo. La variación de la función u en el sentido de Schramm-Korenblum de la función $u(\cdot, y) \in \mathbb{R}^I$ se define como

$$\kappa V_\phi^S(u(\cdot,y)) = \kappa V_{\phi,I}^S(u(\cdot,y)) = \sup_{\mathscr{P}(I)} \frac{\sum\limits_{i=1}^{k_1-1} \varphi_{i,1}\left(\left|\Delta_{10} u(t_{\sigma_1(i)+1}, y)\right|\right)}{\sum\limits_{i=1}^{k_1-1} \kappa\left(\frac{\Delta t_{i+1}}{a_2-a_1}\right)},$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones $\{t_i\}_{i=1}^{k_1} \in \mathscr{P}(I)$, y $\sigma_1 \in S_{k_1-1}$.

Para $x \in I$ fijo, la variación de Schramm-Korenblum de la función $u(x,\cdot) \in \mathbb{R}^J$, se define como

$$\kappa V_\phi^S(u(x,\cdot)) = \kappa V_{\phi,J}^S(u(x,\cdot)) = \sup_{\mathscr{P}(J)} \frac{\sum\limits_{j=1}^{k_2-1} \varphi_{1,j}\left(\left|\Delta_{01} u(x, s_{\sigma_2(j)+1})\right|\right)}{\sum\limits_{j=1}^{k_2-1} \kappa\left(\frac{\Delta s_{j+1}}{b_2-b_1}\right)},$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones $\{s_j\}_{j=1}^{k_2} \in \mathscr{P}(J)$, $\sigma_2 \in S_{k_2-1}$.

La variación bidimensional en el sentido Schramm-Korenblum de u en el rectángulo I_a^b se define como

$$\kappa V_{\phi,I_a^b}^S(u) := \sup_{\mathscr{P}(I),\mathscr{P}(J)} \frac{\sum\limits_{i=1}^{k_1-1}\sum\limits_{j=1}^{k_2-1} \varphi_{i,j}\left(\left|\Delta_{11} u(t_{\sigma_1(i)+1}, s_{\sigma_2(j)+1})\right|\right)}{\sum\limits_{i=1}^{k_1-1}\sum\limits_{j=1}^{k_2-1} \kappa\left(\frac{\Delta t_{i+1}\,\Delta s_{j+1}}{(a_2-a_1)\,(b_2-b_1)}\right)},$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones $\{t_i\}_{i=1}^{k_1} \in \mathscr{P}(I)$ y $\{s_j\}_{j=1}^{k_2} \in \mathscr{P}(J)$ de los intervalos I, J respectivamente, y $\sigma_1 \in S_{k_1-1}$, $\sigma_2 \in S_{k_2-1}$.

La $\kappa\Phi$-variación bidimensional total en el sentido de Schramm-Korenblum de la función $u \in \mathbb{R}^{I_a^b}$ se define por

$$\kappa TV_{\phi,I_a^b}^S(u) = \kappa TV_\phi^S(u, I_a^b) := \kappa V_{\phi,I}^S(u(\cdot,a_2)) + \kappa V_{\phi,J}^S(u(a_1,\cdot)) + \kappa V_{\phi,I_a^b}^S(u).$$

Las clases de las funciones $u \in \mathbb{R}^{I_a^b}$ con $\kappa\Phi$-variación acotada en el sentido de Schramm-Korenblum se denota como $\kappa V_\phi^S(I_a^b)$ y el espacio generado por esta clase es denotado por $\kappa BV_\phi^S(I_a^b)$.

N

(1) Si $\varphi_{i,j}(t) = t,\ t \geq 0,\ i, j \geq 1$, entonces la $\kappa\Phi$-variación en el sentido Schramm-Korenblum coincide con la variación Hardy-Vitali-Korenblum estudiada por J. Guerrero, N. Merentes, J. L. Sánchez (Ver [61]).

(2) Si $\varphi_{i,j} = \varphi,\ i,j \geq 1$, donde φ es una función de Young, entonces la $\kappa\Phi$-variación en el sentido de Schramm-Korenblum es una combinación de los conceptos de φ-variación en el sentido de Wiener y variación bidimensional Korenblum-Hardy-Vitali.

(3) Para $\varphi_{i,j}(t) = \dfrac{t}{\lambda_i\lambda_j},\ t \geq 0,\ i,j \geq 1$, donde $\{\lambda_i\}_{i\geq 1}$ es una Λ- sucesión en el sentido de Waterman, esta noción es una combinación de variación bidimensional en el sentido de Waterman[a], con la variación en el sentido de Korenblum (Ver [79]).

[a] La noción de variación bidimensional en el sentido de Waterman la introdujo A. A. Sahakyan en el año 1986 y a la vez estudiado por A. I. Sablim en el año 1987 (Ver [156]-[155])

Los siguientes resultados presentan algunas propiedades del espacio $\kappa BV_\phi^S(I_a^b)$.

Teorema 6.1

Sea $u \in \mathbb{R}^{I_a^b}$. Entonces

(1) $\kappa TV_\phi^S(u, I_a^b) \geq 0$ y $\kappa TV_\phi^S(u) = 0$ si y solo si $u = ctte$.

(2) $\kappa V_\phi^S(I_a^b)$ es un conjunto convexo y simétrico.

(3) $\kappa BV_\phi^S(I_a^b) = \left\{u \in \mathbb{R}^{I_a^b} : \exists\lambda > 0, \kappa V_\phi^S(\lambda u) < \infty\right\}$.

(4) Si κ_1, κ_2 son funciones distorsión y $\kappa_1 \leq \kappa_2$, entonces $\kappa_1 V_\phi^S(I_a^b) \subset \kappa_2 V_\phi^S(I_a^b)$. En particular $\kappa_1 BV_\phi^S(I_a^b) \subset \kappa_2 BV_\phi^S(I_a^b)$.

(5) $BV(I_a^b) \subset V_\phi^s(I_a^b) \subset \kappa V_\phi^s(I_a^b)$ y por consiguiente $BV(I_a^b) \subset BV_\phi^S(I_a^b) \subset \kappa BV_\phi^S(I_a^b)$.

(6) Si $\kappa TV_\phi^S(u, I_a^b) < \infty$, entonces u es acotada y

$$\|u\|_\infty \leq |u(a_1, b_1)| + 3\varphi_{1,1}^{-1}\left(4\kappa TV^S_{\phi, I_a^b}(u)\right).$$

Demostración:

(1) Supongamos que $\kappa TV_\phi^S(u) = 0$ entonces $\kappa V_{\phi,I}^S(u) = \kappa V_{\phi,J}^S(u) = 0$. En particular $u(t, b_1) - u(a_1, b_1) = 0$ y $u(t,s) - u(t,b_1) = 0,\ (s,t) \in I \times J$, por lo que

$$u(t,s) = u(t,s) - u(t,b_1) + u(t,b_1) = u(a_1,b_1).$$

La condición necesaria es inmediata.

Las partes (2) y (4) se deduce de la Definición 6.4.

(3) es consecuencia de (2).

(5) Sea $u \in BV(I_a^b)$ y $\sigma \in S_{k-1}$. Consideremos una partición $\{t_i\}_{i=1}^k \in \mathscr{P}(I)$ y se establecerá el conjunto

$$A := \left\{ i : \Delta_{10}(u(t_{\sigma(i)+1}, b_2) \leq 1 \right\}.$$

Como las funciones $\varphi_{i,j}, \;\; i,j \geq 1$ son convexas y $V^S_{\phi,I} u(\cdot, b_2) < \infty$, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k-1} \varphi_{i,1}\left(\left|\Delta_{10} u(t_{\sigma(i)+1}, b_2)\right|\right) &= \sum_{i\in A} \varphi_{i,1}\left(\left|\Delta_{10} u(t_{\sigma(i)+1}, b_2)\right|\right) + \sum_{i\notin A} \varphi_{i,1}\left(\left|\Delta_{10} u(t_{\sigma(i)+1}, b_2)\right|\right) \\
&\leq \sum_{i\in A} \varphi_{1,1}(1) \left|\Delta_{10} u(t_{\sigma(i)+1}, b_2)\right| + \sum_{i\notin A} \varphi_{i,1}\left(\left|\Delta_{10} u(t_{\sigma(i)+1}, b_2)\right|\right) \\
&\leq \varphi_{1,1}(1)\, V_I u(\cdot, b_2) + \sum_{i\notin A} \varphi_{i,1}\left(\left|\Delta_{10} u(t_{\sigma(i)+1}, b_2)\right|\right).
\end{aligned}$$

La última suma contiene a lo sumo $\lfloor V^S_{\phi,I} u(\cdot, b_2)\rfloor$ términos; porque de otra manera existiría al menos $\lfloor V^S_{\phi,I} u(\cdot, b_2)\rfloor + 1$ términos,

$$\begin{aligned}
V^S_{\phi,I}(u(\cdot, b_2)) &\geq \sum_{i\notin A} \Delta_{10} u(t_{\sigma(i)+1}, b_2) \\
&\geq \lfloor V^S_{\phi,I}(u(\cdot, b_2))\rfloor + 1,
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Por lo que

$$\begin{aligned}
\sum_{i\notin A} \varphi_{i,1}(\left|\Delta_{10} u(t_{\sigma(i)+1}, b_2)\right|) &\leq \sum_{i\notin A} \varphi_{i,1}(2\,\|u\|_\infty) \\
&\leq \varphi_{1,1}(4\,\|u\|_\infty) \lfloor V_I(u(\cdot, b_2))\rfloor,
\end{aligned}$$

y

$$V^S_\phi u(\cdot, b_1) \leq \left(\varphi_{1,1}(1) + \varphi_{1,1}(4\,\|u\|_\infty)\right) \lfloor V^S_{\phi,I}(u(\cdot, b_2))\rfloor.$$

Similarmente

$$V^S_\phi u(a_1, \cdot) \leq \left(\varphi_{1,1}(1) + \varphi_{1,1}(4\,\|u\|_\infty)\right) \lfloor V^S_{\phi,J}(u(a_1, \cdot))\rfloor$$

y

$$V^S_{\phi, I_a^b}(u) \leq \left(\varphi_{1,1}(1) + \varphi_{1,1}(4\,\|u\|_\infty)\right) V_{I_a^b}(u).$$

Finalmente

$$TV^S_{\phi, I_a^b}(u) \leq \left(\varphi_{1,1}(1) + \varphi_{1,1}(4\,\|u\|_\infty)\right) V_{I_a^b}(u),$$

por lo que, la primera contención $BV(I_a^b) \subset V^S_\phi(I_a^b)$ se satisface.

La otra inclusión $V^S_\phi(I_a^b) \subset \kappa V^S_\phi(I_a^b)$ es una consecuencia de la subaditividad de la función κ.

(6) Sea $(x,y)\in I_a^b$, entonces

$$\begin{aligned}\left|u(x,y)-u(a_1,b_2)\right| &\leq \left|u(x,y)-u(a_1,y)-u(x,b_2)+u(a_1,b_2)\right|\\ &\quad+\left|u(a_1,y)+u(x,b_2)-2u(a_1,b_2)\right|\\ &\leq \left|u(x,y)-u(a_1,y)-u(x,b_2)+u(a_1,b_2)\right|\\ &\quad+\left|u(a_1,y)-u(a_1,b_2)\right|+|u(x,b_2)-u(a_1,b_2)|.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\frac{\varphi_{1,1}\left(|u(x,b_2)-u(a_1,b_2)|\right)}{\kappa\left(\frac{|x-a_1|}{a_2-a_1}\right)+\kappa\left(\frac{|a_2-x|}{a_2-a_1}\right)}\leq \kappa V_{\phi,I}^S(u(\cdot,b_2)).$$

Como $0\leq\kappa(t)\leq 1$, se tiene que

$$\varphi_{1,1}\left(|u(x,b_2)-u(a_1,b_2)|\right)\leq 2\kappa V_{\phi,I}^S(u(\cdot,b_2))$$

por lo tanto

$$|u(x,b_2)-u(a_1,b_2)|\leq\varphi_{1,1}^{-1}\left(2\kappa V_{\phi,I}^S(u(\cdot,b_2))\right). \tag{6.1}$$

Similarmente

$$\left|u(a_1,y)-u(a_1,b_2)\right|\leq\varphi_{1,1}^{-1}\left(2\kappa V_{\phi,J}^S(u(a_1,\cdot))\right), \tag{6.2}$$

y

$$\left|u(x,y)-u(a_1,y)-u(x,b_2)+u(a_1,b_2)\right|\leq\varphi_{1,1}^{-1}\left(4\kappa V_{\phi,I_a^b}^S(u)\right). \tag{6.3}$$

Por las desigualdeades (6.1), (6.2), (6.3) y la definición de $\kappa\Phi$-variación total bidimensional en el sentido de Schramm-Korenblum, se tiene que

$$\|u\|_\infty\leq|u(a_1,b_2)|+3\varphi_{1,1}^{-1}(4\kappa TV_{\phi,I_a^b}^S(u)).$$

□

La siguiente proposición permite calcular la $\kappa\Phi$-variación total bidimensional en el sentido Schramm-Korenblum de la suma de funciones monótonas.

Proposición 6.1

Sean $\phi = \{\varphi_{i,j}\}_{i,j\geq 1}$ una ϕ-sucesión, κ una función distorsión, $I_a^b = I \times J$ y $u \in \mathbb{R}^{I_a^b}$, tal que $u(t,s) = g(t) + h(s)$, $(t,s) \in I \times J$, donde $g \in \mathbb{R}^I$ y $h \in \mathbb{R}^J$ son funciones monótonas. Entonces

(a) $\kappa V_\phi^S u(\cdot, y) = \varphi_{1,1}\left(\left|g(a_2) - g(a_1)\right|\right)$, $y \in J$.

(b) $\kappa V_\phi^S u(x, \cdot) = \varphi_{1,1}\left(\left|h(b_2) - h(b_1)\right|\right)$, $x \in J$.

(c) $\kappa V_{\phi, I_a^b}^S(u) = 0$.

(d) $\kappa TV_{\phi, I_a^b}^S(u) = \varphi_{1,1}\left(\left|g(a_2) - g(a_1)\right|\right) + \varphi_{1,1}\left(\left|h(b_2) - h(b_1)\right|\right)$.

Demostración:

Como las funciones $\varphi_{i,j}$, $i,j \geq 1$ son convexas, entonces las funciones $t \to \dfrac{\varphi_{i,j}(t)}{t}$, $t > 0$, $i,j \geq 1$ son crecientes.
(a) Sea $y \in J$, $\sigma \in S_{k_1-1}$ y $\{t_i\}_{i=1}^{k_1}$, $\{s_j\}_{j=1}^{k_2}$ particiones de los intervalos I, J, respectivamente. Entonces

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{k_1-1} \varphi_{i,1}\left(\left|\Delta_{10} u(t_{\sigma(i)+1}, y)\right|\right)}{\sum\limits_{i=1}^{k_1-1} \kappa\left(\frac{\Delta t_{i+1}}{a_2 - a_1}\right)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k_1-1} \frac{\varphi_{1,1}\left(\left|\Delta g(t_{\sigma(i)+1})\right|\right)\left|\Delta g(t_{\sigma(i)+1})\right|}{\left|\Delta g(t_{\sigma(i)+1})\right|}}{\sum\limits_{i=1}^{k_1-1} \kappa\left(\frac{\Delta t_{i+1}}{a_2 - a_1}\right)}.$$

Como g es monótona y κ es subaditiva, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\sum\limits_{i=1}^{k_1-1} \varphi_{1,1}\left(\left|\Delta g(t_{\sigma(i)+1})\right|\right)}{\sum\limits_{i=1}^{k_1-1} \kappa\left(\frac{\Delta t_{i+1}}{a_2 - a_1}\right)} &\leq \frac{\varphi_{1,1}\left(\left|g(a_2) - g(a_1)\right|\right)}{\left|g(a_2) - g(a_1)\right|} \sum_{i=1}^{k_1-1} \left|\Delta g(t_{\sigma(i)+1})\right| \\
&= \varphi_{1,1}\left(\left|g(a_2) - g(a_1)\right|\right).
\end{aligned}$$

Como g es monótona y κ es subaditiva, entonces

$$\sum_{i=1}^{k_1-1} \varphi_{1,1}\left(\left|\Delta g(t_{\sigma(i)+1})\right|\right) = \varphi_{1,1}\left(\left|g(a_2) - g(a_1)\right|\right), \quad \kappa(1) \leq \sum_{i=1}^{k_1-1} \kappa\left(\frac{\Delta t_{i+1}}{a_2 - a_1}\right).$$

Por lo tanto,

$$\kappa V_\phi^S(u(\cdot, y)) \leq \varphi_{1,1}\left(\left|g(a_2) - g(a_1)\right|\right), \quad y \in J.$$

Recíprocamente,

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,1}\left(\left|g(a_2) - g(a_1)\right|\right) &= \varphi_{1,1}(u(a_2, y) - u(a_1, y)) \\
&\leq \kappa V_\phi^S u(\cdot, y), \quad y \in J.
\end{aligned}$$

Por lo que,

$$\kappa V_{\phi}^{S}(u(\cdot,y)) = \varphi_{1,1}\left(\left|g(a_2)-g(a_1)\right|\right), \quad y \in J.$$

(b) Con un razonamiento similar de (a) se tiene que

$$\kappa V_{\phi}^{S}(u(x,\cdot)) = \varphi_{1,1}\left(|h(b_2)-h(b_1)|\right), \quad x \in I.$$

(c) Si $\sigma_1 \in S_{k_1-1}$ $\sigma_2 \in S_{k_2-1}$, entonces

$$\begin{aligned}\triangle_{11} u(t_{\sigma_1(i)+1}, s_{\sigma_2(j)+1}) &= u(t_{\sigma_1(i)}, s_{\sigma_2(j)}) - u(t_{\sigma_1(i)}, s_{\sigma_2(j)+1}) u(t_{\sigma_1(i)+1}, s_{\sigma_2(j)+1}) - u(t_{\sigma_1(i)+1}, s_{\sigma_2(j)})\\ &= 0,\end{aligned}$$

$i \in \{1,\dots,k_1-1\}$, $j \in \{1,\dots,k_2-1\}$. Por lo tanto, $V_{\phi,I_a^b}^{S}(u) = 0$.

(d) Es una consecuencia de la Definición 6.4.

□

Ejemplo 6.1

Algunos casos particulares del resultado anterior se pueden obtener si se considera la función $u:[0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

1. $u(t,s) = -5t+9s^2+7$, entonces $\kappa TV_{\phi}^{S}(u) = \varphi_{1,1}(5)+\varphi_{1,1}(9)$.
2. $u(t,s) = 3\sqrt{t}+ln(t+1)-5\sqrt[3]{s^2}$, entonces $\kappa TV_{\phi}^{S}(u) = \varphi_{1,1}(3\,ln2)+\varphi_{1,1}(5)$.

A continuación se presentan dos lemas que juegan un rol importante en el resultado principal de este capítulo.

Lema 6.1

Sean $\phi = \{\varphi_{i,j}\}_{i,j\geq 1}$ una ϕ-sucesión y κ una función distorsión. Entonces el operador κTV_{ϕ}^{S} : $\kappa V_{\phi}^{S}(I_a^b) \to [0,\infty)$, definido por $\kappa TV_{\phi}^{S}(u) := \kappa TV_{\phi,I_b^a}^{S}(u)$ es convexo y el conjunto

$$\kappa A_{\phi}^{S}(I_a^b) := \left\{u \in \kappa BV_{\phi}^{S}(I_a^b) : \kappa TV_{\phi,I_a^b}^{S}(u) \leq 1\right\},$$

es convexo, simétrico y absorbente.

Para detalles de la demostración del lema anterior ver [46].

El funcional Minkowski asociado a $\kappa A_{\phi}^{S}(I_a^b)$, $\kappa\mu_{\phi}^{S} : \kappa BV_{\phi}^{S}(I_a^b) \to [0,\infty)$, definido por

$$\kappa\mu_{\phi}^{S}(u) := inf\left\{\lambda > 0 : \kappa TV_{\phi,I_a^b}^{S}\left(\frac{u}{\lambda}\right) < 1\right\},\ u \in \kappa BV_{\phi}^{S}(I_a^b)$$

es una seminorma.

Lema 6.2
Sea $u \in \kappa BV_\phi^S(I_a^b)$. Entonces existe $\lambda > 0$, tal que $\kappa\mu_\phi^S(u) \le \lambda$ si y solo si $\kappa TV_{\phi,I_a^b}^S\left(\frac{u}{\lambda}\right) < 1$.

Demostración:

Si $\kappa\mu_\phi^S(u) < \lambda,\ \lambda > 0$, entonces existe $0 < k < \lambda$, tal que $\kappa TV_{\phi,I_a^b}^S\left(\dfrac{u}{k}\right) \le 1$. Así

$$\begin{aligned}\kappa TV_{\phi,I_a^b}^S\left(\frac{u}{\lambda}\right) &= \kappa TV_{\phi,I_a^b}^S\left(\frac{k}{\lambda}\frac{u}{k}\right)\\ &\le \frac{k}{\lambda}\kappa TV_{\phi,I_a^b}^S\left(\frac{u}{k}\right) \le 1.\end{aligned}$$

Si $\kappa\mu_\phi^S(u) = \lambda, \lambda > 0$, entonces $\kappa\mu_\phi^S(u) < \lambda_n$. Por lo tanto, existe una sucesión $\{\lambda_n\}_{n\ge1}$, tal que $\lambda_n \downarrow \lambda$, entonces

$$\kappa TV_{\phi,I_a^b}^S\left(\frac{u}{\lambda_n}\right) < 1.$$

Considerando el límite cuando $n \to \infty$ se obtiene el resultado. La otra parte es una consecuencia de la definición de $\kappa TV_{\phi,I_a^b}^S(\cdot)$ y la continuidad de las funciones, $\varphi_{i,j},\ i, j \ge 1$ y considerando el límite cuando $n \to \infty$ se tiene el resultado deseado.
La parte necesaria es consecuencia de la definición de $\kappa\mu_\phi^S$.

□

En el próximo teorema se demostrará que el funcional $\kappa\|\cdot\|_\phi^s : \kappa BV_\phi^S(I_a^b) \to [0,\infty)$, que se define como

$$\kappa\|u\|_\phi^s := |u(a_1, b_2)| + \kappa\mu_\phi^S(u),$$

es una norma.

Teorema 6.2
$\left(\kappa BV_\phi^S(I_a^b), \kappa\|\cdot\|_\phi^s\right)$ es un espacio normado.

Demostración:

Como $\kappa||\cdot||_\phi^s$ es una seminorma solo se necesita demostrar que si $\kappa\|u\|_\phi^s = 0$ entonces $u \equiv 0$.

Si $\kappa\mu_\phi^S(u) = 0$, entonces $u(a_1, b_2) = 0$ y $\kappa\mu_\phi^S(u) < \frac{1}{n}$, para todo $n \ge 1$. De manera que

$$n\kappa TV_{\phi,I_a^b}^S(u) \le \kappa TV_{\phi,I_a^b}^S(nu) < 1,\ n \ge 1.$$

Así $\kappa TV_{\phi,I_a^b}^S(u) = 0$. Por la parte (a) del Teorema 6.1, $u = ctte$. Como $u(a_1, b_2) = 0$, se obtiene que $u \equiv 0$.

□

El siguiente lema será usado en varios resultados de esta sección.

Lema 6.3
Sea $\{t_i\}_{i=1}^{k_1} \in \mathscr{P}(I)$, $\{s_j\}_{j=1}^{k_2} \in \mathscr{P}(J)$ y $u, v : I_a^b \to \mathbb{R}$ funciones acotadas. Entonces:

(a) $\Delta_{10}(uv)(t_{i+1}, y) \leq \|v\|_\infty \triangle_{10} u(t_{i+1}, y) + \|u\|_\infty \triangle_{10} v(t_{i+1}, y)$,
$y \in J$, $i = 1, \ldots, k_1 - 1$.

(b) $\Delta_{01}(uv)(x, s_{j+1}) \leq \|v\|_\infty \triangle_{01} u(x, s_{j+1}) + \|u\|_\infty \triangle_{01} v(x, s_{j+1})$,
$x \in I$, $j = 1, \ldots, k_2 - 1$.

(c) $\Delta_{11}(uv)(t_{i+1}, s_{j+1}) \leq \|v\|_\infty \triangle_{11} u(t_{i+1}, s_{j+1}) + \|u\|_\infty \triangle_{11} v(t_{i+1}, s_{j+1})$,
$i = 1, \ldots, k_1 - 1$, $j = 1, \ldots, k_2 - 1$.

Demostración:
(a)

$$\begin{aligned}
\Delta_{10}(uv)(t_{i+1}, y) &= (uv)(t_{i+1}, y) - (uv)(t_i, y) \\
&= u(t_{i+1}, y)v(t_{i+1}, y) - u(t_i, y)v(t_i, y) \\
&= u(t_{i+1}, y)v(t_{i+1}, y) - u(t_i, y)v(t_i, y) \\
&\quad + u(t_i, y)v(t_{i+1}, y) - u(t_i, y)v(t_{i+1}, y) \\
&= (u(t_{i+1}, y) - u(t_i, y))v(t_{i+1}, y) \\
&\quad + (v(t_{i+1}, y) - v(t_i, y))u(t_i, y) \\
&= v(t_{i+1}, y)\triangle_{10} u(t_{i+1}, y) + u(t_i, y)\triangle_{10} v(t_{i+1}, y) \\
&\leq ||v||_\infty \triangle_{10} u(t_{i+1}, y) + ||u||_\infty \triangle_{10} v(t_{i+1}, y).
\end{aligned}$$

(b) Se calcula como en la parte (a).

(c) Para i, j fijo, se obtiene

$$\begin{aligned}
\Delta_{11}(uv)(t_{i+1}, s_{j+1}) &= (uv)(t_i, s_j) - (uv)(t_i, s_{j+1}) - (uv)(t_{i+1}, s_j) + (uv)(t_{i+1}, s_{j+1}) \\
&= u(t_i, s_j)v(t_i, s_j) - u(t_i, s_{j+1})v(t_i, s_{j+1}) \\
&\quad - u(t_{i+1}, s_j)v(t_{i+1}, s_j) + u(t_{i+1}, s_{j+1})v(t_{i+1}, s_{j+1}) \\
&= u(t_i, s_j)v(t_i, s_j) - u(t_i, s_{j+1})v(t_i, s_{j+1}) \\
&\quad + u(t_{i+1}, s_j)v(t_i, s_j) - u(t_{i+1}, s_j)v(t_i, s_j) \\
&\quad + u(t_i, s_{j+1})v(t_{i+1}, s_{j+1}) - u(t_i, s_{j+1})v(t_{i+1}, s_{j+1}) \\
&\quad - u(t_{i+1}, s_j)v(t_{i+1}, s_j) + u(t_{i+1}, s_{j+1})v(t_{i+1}, s_{j+1}) \\
&= (u(t_i, s_j) - u(t_{i+1}, s_j))v(t_i, s_j) \\
&\quad + (u(t_{i+1}, s_{j+1}) - u(t_i, s_{j+1}))v(t_{i+1}, s_{j+1}) \\
&\quad + (v(t_{i+1}, s_{j+1}) - v(t_i, s_{j+1}))u(t_i, s_{j+1}) \\
&\quad + (v(t_i, s_j) - v(t_{i+1}, s_j))u(t_{i+1}, s_j) \\
&\leq (u(t_i, s_j) - u(t_{i+1}, s_j))||v||_\infty + (u(t_{i+1}, s_{j+1}) - u(t_i, s_{j+1}))||v||_\infty \\
&\quad + (v(t_{i+1}, s_{j+1}) - v(t_i, s_{j+1}))||u||_\infty + (v(t_i, s_j) - v(t_{i+1}, s_j))||u||_\infty \\
&= \Delta_{11} u(t_{i+1}, s_{j+1})||v||_\infty + \Delta_{11} v(t_{i+1}, s_{j+1})||u||_\infty
\end{aligned}$$

□

Teorema 6.3

$\kappa BV_{\phi}^{S}(I_a^b)$ es una álgebra.

Demostración:

Sea $u, v \in \kappa BV_{\phi}^{S}(I_a^b)$ (u y v no idénticamente igual a cero) y $\phi = \{\varphi_{i,j}\}_{i,j\geq 1}$ una Φ-sucesión, entonces existe $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ tal que

$$\kappa TV_{\phi, I_a^b}^{S}(\alpha u) < \infty, \quad \kappa TV_{\phi, I_a^b}^{S}(\beta v) < \infty.$$

Se define λ_1, λ_2 y λ_2 de la siguiente manera

$$\lambda := \frac{\alpha\beta}{\alpha||u||_\infty + \beta||v||_\infty}, \quad \lambda_1 := \frac{\beta||v||_\infty}{\alpha||u||_\infty + \beta||v||_\infty}, \quad \lambda_2 := \frac{\alpha||u||_\infty}{\alpha||u||_\infty + \beta||v||_\infty}.$$

Ahora, $x \in I$, $y \in J$ fijos, $\{t_i\}_{i=1}^{k_1} \in \mathscr{P}(I)$, $\{s_j\}_{j=1}^{k_2} \in \mathscr{P}(J)$, $\sigma_1 \in S_{k_1-1}$ y $\sigma_2 \in S_{k_2-1}$. Entonces por el Lema 6.3 se tiene

$$\begin{aligned}
\Delta_{10}(\lambda uv)(t_{\sigma_1(i)+1}, y) &\leq \lambda||v||_\infty \Delta_{10} u(t_{\sigma_1(i)+1}, y) + \lambda||u||_\infty \Delta_{10} v(t_{\sigma_1(i)+1}, y) \\
&= \frac{\beta||v||_\infty}{\alpha||u||_\infty + \beta||v||_\infty}\alpha\Delta_{10} u(t_{\sigma_1(i)+1}, y) + \frac{\alpha||u||_\infty}{\alpha||u||_\infty + \beta||v||_\infty}\beta\Delta_{10} v(t_{\sigma_1(i)+1}, y)
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\Delta_{10}(\lambda uv)(t_{\sigma_1(i)+1}, y) \leq \lambda_1\alpha\Delta_{10} u(t_{\sigma_1(i)+1}, y) + \lambda_2\beta\Delta_{10} v(t_{\sigma_1(i)+1}, y). \tag{6.4}$$

Similarmente

$$\Delta_{01}(\lambda uv)(x, s_{\sigma_2(j)+1}) \leq \lambda_1\alpha\Delta_{01} u(x, s_{\sigma_2(j)+1}) + \lambda_2\beta\Delta_{01} v(x, s_{\sigma_2(j)+1}). \tag{6.5}$$

Y

$$\begin{aligned}
\Delta_{11}(\lambda uv)(t_{\sigma_1(i)+1}, s_{\sigma_2(j)+1}) &= \lambda\left[\Delta_{11} u(t_{\sigma_1(i)+1}, s_{\sigma_2(j)+1})||v||_\infty + \Delta_{11} v(t_{\sigma_1(i)+1}, s_{\sigma_2(j)+1})||u||_\infty\right] \\
&= \frac{\beta||v||_\infty}{\alpha||u||_\infty + \beta||v||_\infty}\alpha\Delta_{11} u(t_{\sigma_1(i)+1}, s_{\sigma_2(j)+1}) \\
&\quad + \frac{\alpha||u||_\infty}{\alpha||u||_\infty + \beta||v||_\infty}\beta\Delta_{11} v(t_{\sigma_1(i)+1}, s_{\sigma_2(j)+1});
\end{aligned}$$

así, se tiene que

$$\begin{aligned}
\Delta_{11}(\lambda uv)(t_{\sigma_1(i)+1}, s_{\sigma_2(j)+1}) &\leq \lambda_1\alpha\Delta_{11} u(t_{\sigma_1(i)+1}, s_{\sigma_2(j)+1}) \\
&\quad + \lambda_2\beta\Delta_{11} v(t_{\sigma_1(i)+1}, s_{\sigma_2(j)+1}).
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Ahora, combinando (6.4), (6.5), (6.6) y con el hecho de que las funciones $\varphi_{i,j}$ $i, j \geq 1$ son crecientes y convexas $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\kappa TV_{\phi, I_a^b}(\lambda uv) &\leq \lambda_1\kappa V_{\phi, I}^{S}(\alpha u) + \lambda_2\kappa V_{\phi, I}^{S}(\beta v) \\
&\quad + \lambda_1\kappa V_{\phi, J}^{S}(\alpha u) + \lambda_2\kappa V_{\phi, J}^{S}(\beta v) \\
&\quad + \lambda_1\kappa V_{\phi, I_a^b}^{S}(\alpha u) + \lambda_2\kappa V_{\phi, I_a^b}^{S}(\beta v) \\
&= \lambda_1\kappa TV_{\phi, I}^{S}(\alpha u) + \lambda_2\kappa TV_{\phi, I}^{S}(\beta v) \\
&< \infty;
\end{aligned}$$

por lo tanto $uv \in \kappa BV_{\phi}^{S}(I_a^b)$.

□

Los resultados principales de este capítulo se presentan en los siguientes Teoremas.

Teorema 6.4

$\left(\kappa BV_{\phi}^{S}(I_a^b), \kappa\|\cdot\|_{\phi}^{s}\right)$ es un espacio de Banach.

Demostración:

Sea $\{u_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $\kappa BV_{\phi}^{S}(I_a^b)$; entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe N_ε, tal que si $n, m \geq N_\varepsilon$, entonces

$$|u_n(a_1, b_2) - u_m(a_1, b_2)| < \varepsilon, \tag{6.7}$$

y por el Lema 6.2 se tiene

$$m\acute{a}x\left\{\kappa V_{\phi,I}^{S}\left(\left(\frac{u_n - u_m}{\varepsilon}\right)(\cdot, b_2)\right),\ \kappa V_{\phi,J}^{S}\left(\left(\frac{u_n - u_m}{\varepsilon}\right)(a_1, \cdot)\right),\ \kappa V_{\phi,I_a^b}^{S}\left(\frac{u_n - u_m}{\varepsilon}\right)\right\} < \varepsilon.$$

Por definición de $\kappa V_{\phi,I}^{S}\left(\left(\frac{u_n - u_m}{\varepsilon}\right)(\cdot, b_2)\right)$ y considerando $a_1 < x \leq a_2$ se tiene

$$\frac{\varphi_{1,1}\left(\dfrac{|(u_n - u_m)(x, b_2) - (u_n - u_m)(a_1, b_2)|}{\varepsilon}\right)}{\kappa\left(\frac{x-a_1}{a_2-a_1}\right) + \kappa\left(\frac{a_2-x}{a_2-a_1}\right)} < 1, \quad n, m \geq N_\varepsilon,\ \ a_1 < x \leq a_2.$$

Debido a que $0 \leq \kappa(t) \leq 1,\ t \in [0,1]$, y (6.7), se obtiene

$$|(u_n - u_m)(x, b_2)| < \left(\varphi_{1,1}^{-1}(2) + 1\right)\varepsilon, \quad n, m \geq N_\varepsilon, x \in I.$$

Similarmente, se considera la definición de $\kappa V_{\phi,J}^{S}\left(\left(\frac{u_n - u_m}{\varepsilon}\right)(a_1, \cdot)\right)$, así

$$\left|(u_n - u_m)(a_1, y)\right| < \left(\varphi_{1,1}^{-1}(2) + 1\right)\varepsilon, \quad n, m \geq N_\varepsilon, y \in J.$$

Por la definición de $\kappa V_{\phi,I_a^b}^{S}\left(\frac{u_n - u_m}{\varepsilon}\right)$

$$\frac{\varphi_{1,1}\left(\dfrac{\left|(u_n - u_m)(a_1, y) - (u_n - u_m)(x, y) - (u_n - u_m)(a_1, b_2) + (u_n - u_m)(x, b_2)\right|}{\varepsilon}\right)}{\kappa\left(\frac{(x-a_1)(y-b_1)}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}\right) + \kappa\left(\frac{(x-a_1)(b_2-y)}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}\right) + \kappa\left(\frac{(a_2-x)(y-b_1)}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}\right) + \kappa\left(\frac{(a_2-x)(b_2-y)}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}\right)} < 1,$$

$n, m \geq N_\varepsilon$, $(t,s) \in I \times J$, $a_1 < x \leq a_2$. Consideremos

$$\left|(u_n - u_m)(x,y)\right| < 3(\varphi_{1,1}^{-1}(4)+1)\varepsilon, \quad n, m > N_\varepsilon,\ (x,y) \in I \times J.$$

Por lo tanto $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy uniforme sobre $I \times J$; así, existe $u \in \mathbb{R}^{I_a^b}$, tal que $u_n(x,y) \to u(x,y)$, por $n \to \infty$. Por la continuidad de las funciones $\varphi_{i,j}$ $i,j \geq 1$ y la Definición 6.4 se concluye que $\kappa TV^S_{\varphi_{i,j,I_a^b}}(u) < \infty$, cuando $n \to \infty$.

Con un argumento similar

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \kappa TV^S_{\varphi_{i,j},I_a^b}(u_n - u_m) = \lim_{n\to\infty} \kappa TV^S_{\varphi_{i,j},I_a^b}(u_n - u) = 0.$$

□

Teorema 6.5

El espacio $\kappa BV^S_\phi(I_a^b)$ equipado con la norma $\kappa||\cdot||^s_\phi$ es un álgebra de Banach.

Demostración:

Sean $u, v \in \kappa BV^S_\phi(I_a^b)$ tal que no son idénticamente igual a cero o igual a una función constante y

$$\lambda := \kappa\mu^s_\phi(u)\,\|v\|_\infty + \kappa\mu^s_\phi(v)\,\|u\|_\infty.$$

Por el Lema 6.2 y $\kappa\mu^S_\phi\left(\frac{u}{\kappa\|u\|^s_\phi}\right) < 1$ se tiene que

$$\begin{aligned}\triangle_{10}\left(\frac{uv}{\lambda}\right)(t_{\sigma_1(i)+1}, y) &\leq \frac{\|v\|_\infty}{\lambda}\triangle_{10}u(t_{\sigma_1(i)+1}, y) + \frac{\|u\|_\infty}{\lambda}\triangle_{10}v(t_{\sigma_1(i)+1}, y) \\ &= \frac{\kappa\mu^s_\phi(u)\,\|v\|_\infty}{\lambda}\frac{\triangle_{10}u(t_{\sigma_1(i)+1}, y)}{\kappa\mu^s_\phi(u)} + \frac{\kappa\mu^s_\phi(v)\,\|u\|_\infty}{\lambda}\frac{\triangle_{10}v(t_{\sigma_1(i)+1}, y)}{\kappa\mu^s_\phi(v)}.\end{aligned} \tag{6.8}$$

Similarmente

$$\triangle_{01}\left(\frac{uv}{\lambda}\right)\left(x, s_{\sigma_2(j)+1}\right) \leq \frac{\kappa\mu^s_\phi(u)\,\|v\|_\infty}{\lambda}\frac{\triangle_{01}u(x, s_{\sigma_2(j)+1})}{\kappa\mu^s_\phi(u)} + \frac{\kappa\mu^s_\phi(v)\,\|u\|_\infty}{\lambda}\frac{\triangle_{01}v(x, s_{\sigma_2(j)+1})}{\kappa\mu^s_\phi(v)}, \tag{6.9}$$

y

$$\begin{aligned}\triangle_{11}\left(\frac{uv}{\lambda}\right)\left(t_{\sigma_1(i)+1}, s_{\sigma_2(j)+1}\right) &\leq \frac{\kappa\mu^s_\phi(u)\,\|v\|_\infty}{\lambda}\frac{\triangle_{11}u(t_{\sigma_1(i)+1}, s_{\sigma_2(j)+1})}{\kappa\mu^s_\phi(u)} \\ &\quad + \frac{\kappa\mu^s_\phi(v)\,\|u\|_\infty}{\lambda}\frac{\triangle_{11}v(t_{\sigma_1(i)+1}, s_{\sigma_2(j)+1})}{\kappa\mu^s_\phi(v)}.\end{aligned} \tag{6.10}$$

Por lo que

$$\frac{\kappa\mu_{\phi}^{s}(u)\,\|v\|_{\infty}}{\lambda}+\frac{\kappa\mu_{\phi}^{s}(v)\,\|u\|_{\infty}}{\lambda}=1.$$

Por las desigualdades (6.8) (6.9) (6.10), la definición de la función distorsión, la convexidad de funciones $\varphi_{i,j},\ i,j\geq 1$ y la continuidad del operador $\kappa TV^{S}_{\phi,I_a^b}$ se tiene

$$\kappa TV^{S}_{\phi,I_a^b}\left(\frac{uv}{\lambda}\right)\leq\frac{\kappa\mu_{\phi}^{s}(u)\,\|v\|_{\infty}}{\lambda}\kappa TV^{S}_{\phi,I_a^b}\left(\frac{u}{\kappa\mu_{\phi}^{S}(u)}\right)+\frac{\kappa\mu_{\phi}^{s}(v)\,\|u\|_{\infty}}{\lambda}\kappa TV^{s}_{\phi,I_a^b}\left(\frac{v}{\kappa\mu_{\phi}^{s}(v)}\right).$$

También se tiene por el Lema 6.2 que

$$\kappa TV^{S}_{\phi,I_a^b}\left(\frac{u}{\kappa\mu_{\phi}^{S}(u)}\right)<1\quad\text{y}\quad\kappa TV^{S}_{\phi,I_a^b}\left(\frac{v}{\kappa\mu_{\phi}^{S}(v)}\right)<1.$$

Así $\kappa TV^{S}_{\phi,I_a^b}\left(\frac{uv}{\lambda}\right)<1$. Usando el Lema 6.2 nuevamente

$$\kappa\mu_{\phi}^{s}(uv)\leq\lambda=\kappa\mu_{\phi}^{s}(u)\,\|v\|_{\infty}+\kappa\mu_{\phi}^{s}(v)\,\|u\|_{\infty}.$$

y

$$\begin{aligned}\kappa\,\|uv\|_{\phi}^{s} &\leq 2\left|u(a_1,b_2)\right||v(a_1,b_2)|+\kappa\mu_{\phi}^{s}(u)\,\|v\|_{\infty}+\kappa\mu_{\phi}^{s}(v)\,\|u\|_{\infty}\\ &\leq |u(a_1,b_2)|\,\|v\|_{\infty}+|v(a_1,b_2)|\,\|u\|_{\infty}+\kappa\mu_{\phi}^{s}(u)\,\|v\|_{\infty}+\kappa\mu_{\phi}^{s}(v)\,\|u\|_{\infty}\\ &= \kappa\,\|u\|_{\phi}^{s}\,\|v\|_{\infty}+\kappa\,\|v\|_{\phi}^{s}\,\|u\|_{\infty}.\end{aligned}$$

Claramente, todas las condiciones de la sección 4.1 de L. Maligranda, W. Orlicz (1987), en [91] se satisfacen. Por lo tanto se asegura que el espacio $\kappa BV_{\phi}^{S}(I_a^b)$ es una álgebra de Banach equipado con la norma $\|\cdot\|_{\infty}+\kappa\|\cdot\|_{\phi}^{s}$ y por la parte (6) del Teorema 6.1 y el Lema 6.3, esta norma es equivalente a la norma $\kappa\|\cdot\|_{\phi}^{s}$, completando así la demostración.

$\square$

Conclusiones y Recomendaciones

En esta tesis doctoral se realizaron varios aportes al tema de variación acotada y se obtuvieron 11 artículos de investigación los cuales fueron distribuidos en 6 capítulos de la siguiente manera:

En el primer capítulo se estudió el espacio de las funciones de variación acotada y se presentaron 12 generalizaciones del concepto clásico de variación dado por Jordan, los cuales son el espacio de funciones de segunda variación acotada en el sentido de De La Vallée Poussin, el espacio de funciones de p-variación acotada en el sentido de Riesz, el espacio de funciones de p-variación acotada en el sentido de Wiener, el espacio de funciones de segunda variación acotada en el sentido de De La Vallée Poussin-Wiener, el espacio de funciones de k-variación acotada en el sentido de Popoviciu, el espacio de funciones de φ-variación acotada en el sentido de Wiener, el espacio de funciones de φ-variación acotada en el sentido de Riesz, el espacio de funciones de κ-variación acotada en el sentido de Korenblum, el espacio de funciones de Λ-variación acotada en el sentido de Waterman, el espacio de funciones de Λ_p-variación acotada en el sentido de Waterman-Shiba, el espacio de funciones de Φ-variación acotada en el sentido de Schramm y el espacio de funciones de $\kappa\varphi$-variación acotada en el sentido de Schramm-Korenblum subdividido en los espacios de funciones de κp y $\kappa\phi$-variación acotada en el sentido de Riesz-Korenblum.

En el segundo capítulo, se presentaron cuatro secciones los cuales se definieron los espacios de variación acotada en el sentido de Wiener, Wiener-Korenblum, Waterman-Shiba y De La Vallée Poussin-Wiener con exponente variable; el cual; en cada uno de estos espacios, se presentaron propiedades de la clase y su caracterización vía composición.

El tercer capítulo trató sobre el operador de composición de Nemytskij, actuación, uniformemente continuo, Lipschitzidad local y localmente definido en los espacios de funciones de variación acotada generalizada con exponente variable, el cual fueron estudiados en el capítulo anterior.

En el cuarto capítulo se demostró la existencia y unicidad de soluciones de las ecuaciones integrales de Hammerstein y Volterra-Hammerstein en el espacio de las funciones de variación acotada en el sentido de Wiener con exponente variable.

En el quinto capítulo se consideró la relación entre el espacio de (p,k)-variación acotada en el sentido de Riesz-Popoviciu y el p-módulo de continuidad, estos funcionales generan espacios intermedios que conecta el espacio de funciones de (p,k)-variación acotada y el espacio W_p^k.

Y por último, en el sexto capítulo, se definió el espacio de $\kappa\varphi$-variación acotada en el sentido de Schramm-Korenblum bidimensional, presentando la definición y propiedades del espacio.

Algunos problemas que se plantearon y que pueden dar continuidad a la investigación desarrollada para la realización de esta tesis son:

1. Demostrar un resultado del tipo Sobolevskij para los espacios:

   a) $\kappa BV^W_{p(\cdot)}[a,b]$

   b) $\Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$
   c) $BV^{W}_{(p(\cdot),2)}[a,b]$

2. Estudiar el comportamiento del operador localmente definido en los espacios:
   a) $\kappa BV_{\phi}[a,b]$
   b) $\kappa BV^{W}_{p(\cdot)}[a,b]$
   c) $\Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$
   d) $BV^{W}_{(p(\cdot),2)}[a,b]$

3. Demostrar la existencia y unicidad de soluciones de las ecuaciones integrales de Hammerstein y Volterra-Hammerstein en los espacios:
   a) $\kappa BV_{\phi}[a,b]$
   b) $\kappa BV^{W}_{p(\cdot)}[a,b]$
   c) $\Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$
   d) $BV^{W}_{(p(\cdot),2)}[a,b]$

4. Encontrar la relación entre los espacios $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$, $\kappa BV_{\phi}[a,b]$, $\kappa BV^{W}_{p(\cdot)}[a,b]$, $\Lambda_{p(\cdot)}BV[a,b]$ y $BV^{W}_{(p(\cdot),2)}[a,b]$ y el espacio W^{k}_{p}.

5. Generalizar los espacios de variación acotada con exponente variable en un intervalo $[a,b]$ al caso de dos dimensiones y n-dimensional.

6. Definir el espacio de $p(\cdot)$-variación acotada en el sentido de Riesz y así:
   a) Demostrar un Teorema de Representación tipo Riesz para este espacio.
   b) Demostrar un Teorema Estructural del tipo Chistyakov que caracterice este tipo de funciones vía composición.
   c) Encontrar condiciones necesarias y suficientes para que el operador de Nemytskij actúe en este espacio.
   d) Demostrar la existencia y unicidad de soluciones de las ecuaciones integrales de Hammerstein y Volterra-Hammerstein en este espacio.
   e) Escontrar relación entre el espacio W^{1}_{p} y este espacio.

Bibliografía

[1] R. Adams, J. A. Clarkson, Properties of Functions $f(x,y)$ of Bounded Variation, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 36, (1934), 711-730.

[2] R. A. Adams, Sobolev spaces, Academic Press, New York, 1975.

[3] J. Appell, J. Banas, N. Merentes, Bounded variation and around. Berlin, Boston: De Gruyter. 2015.

[4] J. Appell, N. Guanda, N. Merentes, J. L. Sánchez, Some boundedness and continuity properties of nonlinear composition operators: A survey, Comm. Applied Anal. vol. 15, no. 2,3 y 4, (2011), 153-182.

[5] J. Appell, N. Guanda, M. Väth, Function spaces with the Matkowski property and degeneracy phenomena for composition operator, Fixed Point Theory, vol. 12, no. 2, (2011), 265-284.

[6] J. Appell, J. Jesús, O. Mejía, Some Remarks on nonlinear composition operators in spaces of differentiable function. Bollettino U. M. I. vol. 9, no. IV, (2011), 321-336.

[7] J. Appell, N. Merentes, Composing functions of bounded Koremblum variation. Dynam. Systems Appl. vol. 22, (2013), 197-206.

[8] J. Appell, N. Merentes, J. L. Sánchez, Locally Lipschitz composition operator in spaces of functions of bounded variation, Annali di Matematica, vol. 190, (2011), 33-43.

[9] J. Appell, P. P. Zabreĭko, Nonlinear superposition operators, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[10] F. Armao, D. Głazowska, S. Rivas, J. Rojas, Uniformly bounded composition operators in the Banach space of bounded (p,k)-variation in the sense of Riesz-Popoviciu, Cent. Eur. J. Math. (Por aparecer).

[11] M. Avdispahić, Concepts of generalized bounded variation and the theory of Fourier series. Internat. J. Math. Math. Sci. vol. 9, no. 2, (1986), 223-244.

[12] L. Avila, Funciones de p-variación acotada en el sentido de Wiener y Riesz, Trabajo de Pasantía, Universidad Nacional Abierta, Pto. Fijo, Venezuela, 1994.

[13] N. V. Azbelev, P. M. Simonov, Stability of differential equation with aftereffect, New York, Taylor & Francis, 2003.

[14] W. Aziz, J. A. Guerrero, N. Merentes, On nonlinear integral equations in the space $\Phi BV(I)$, Journal of fixed point theory and applications. (2015) (Por aparecer).

[15] W. Aziz, J. A. Guerrero, K. Maldonado, N. Merentes, Locally defined operators in the space of functions of bounded Riesz-variation, Journal of Mathematics, vol. 2015, (2015) 1-4.

[16] A. Azócar, A. Guerrero, J. Matkowski, N. Merentes, Uniformly continuous set-valued composition operators in the space of continuous functions of bounded variation in the sense of Wiener, Opuscula Math. vol. 30, (2010), 53-60.

[17] A. Azócar, O. Mejía, N. Merentes, S. Rivas, The space of functions of two variables of bounded $\kappa\Phi$-variation in the sense of Schramm-Korenblum, Journal of function spaces, vol. 2015, (2015) 1-11.

[18] E. Azroul, A. Barbara, H. Redwane, Existence and nonexistence of a solution for a nonlinear $p(x)$-Eliptic problem with right-hand side measure. International journal of analysis, vol. 2014, (2014) 1-15.

[19] A. A. Babaev, On the structure of a certain nonlinear operator and its application (Russian), Uchen. Zap. Azerbajdzh. Gos. Univ. vol. 4, (1961), 13-16.

[20] S. Banach, Sur les lignes rectifiables et les surface dont l'aire est finite, Fund. Math, vol. 7, (1925), 225-236.

[21] S. Barza, P. Silvestre, Functions of bounded second p-variation, Rev. Mat. Complutense, vol. 27, no.1, (2014), 69-91.

[22] C. Bennett, R. Sharpley, Interpolation of Operators, Academic Press, Boston, 1988.

[23] T. J. Bromwich, An introduction to the theory of infinite series. Macmillan Co., New York, 1965.

[24] D. Bugajewska, On the superposition operator in the space of functions of bounded variation, revisited, Mathematical and Computer Modelling, vol. 52, (2010) 791-796.

[25] D. Bugajewska, D. Bugajewski, H. Hudzik, BV_φ-solutions of nonlinear integral equations, J. Math. Anal. Appl. vol. 287, (2003) 265-278.

[26] D. Bugajewska, D. O'Regan, On nonlinear integral equations and Λ-bounded variation, Acta Math. Hung., vol. 107, no. 4, (2005) 295-306.

[27] D. Bugajewski, On BV-solutions of some nonlinear integral equations, Integr. equa. oper. theory 46 (2003), 387-398.

[28] P. S. Bullen, An inequalities for variations, Amer. Math. Monthly, vol. 90, (1983), 561.

[29] R. L. Burden, J. D. Faires, Numerical analysis, Books-Cole, edition 7, 2004.

[30] R. Castillo, N. Merentes, H. Rafeiro, Bounded variation spaces with p-variable, Mediterr. J. Math. vol. 11, (2014), 1069-1079.

[31] M. Castillo, S. Rivas, M. Sanoja, I. Zea, Functions of bounded $\kappa\varphi$-variation in the sense of Riesz-Korenblum. Journal of Function Spaces and Application, vol. 2013, Article ID 718507, (2013) 1-12.

[32] M. Castillo, M. Sanoja, I. Zea, The spaces of functions of bounded κ-variation in the sense of Riesz-Korenblum, J. Math. Control Sci. Appl. (JMCSA), (Por aparecer)

[33] M. Chaika, D. Waterman, On the invariance of certain classes of functions under composition, Proc. Amer Math. Soc. vol. 43, no. 2, (1974), 345-348.

[34] Y. Chen, S. Levine, M. Rao, Variable exponent, Linear growth functionals in image restoration. SIAM J. Appl. Math. vol. 66, (2006) 1383-1406.

[35] V. V. Chistyakov, Lipschitzian superposition operators between spaces of functions of bounded generalized variation with weight, J. Appl. Anal., vol. 6, no. 2, (2000), 173-186.

[36] V. V. Chistyakov, Superposition Operators in the Algebra of Functions of two Variables with Finite Total Variation, Monatshefte für Mathematik, vol. 137, (2002), 99-114.

[37] V. V. Chistyakov, Selections of bounded variation, Journal of Applied Analysis, vol. 10, no. 1, (2004), 1-82.

[38] V. V. Chistyakov, O. E. Galkin, On maps of bounded p-variation with $p > 1$, Positivity. vol. 2, (1998), 19-45.

[39] V. V. Chistyakov, O. E. Galkin, *Mapping of bounded Φ-variation with arbitrary function Φ*, vol. 4, no. 2, (1998), 217-247.

[40] J. Ciemnozołowski, W. Orlicz, Composing functions of bounded φ-variation, Proc. Amer. Math. Soc. vol. 96, no. 3, (1986), 431-436.

[41] M. Cotlar, R. Cignoli, An introducction to functional analysis, Noth-Holland Publishing Company, 1974.

[42] J. A. Clarkson, R. Adams, On definitions of bounded variation for functions of two variables, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 35, no. 4, (1933), 824-854.

[43] D. Cyphert, J. Kelingos, The decomposition of functions of bounded q-variation into difference of q-decreasing functions, Studia Math, vol. LXXXI, (1985), 185-195.

[44] Z. Cybertowicz, W. Matuszewska, Functions of bounded generalized variations, Comment. Math. Prace. Mat. vol. 20, (1977), 29-52.

[45] B. E. J. Dahlberg, A note on Sobolev spaces. Proc. Symp. Pure Math. vol. 35, no. 1, (1979), 183-185.

[46] C. L. DeVito, Functional analysis, Academic Press, USA, 1978.

[47] R. A. DeVore and G. G. Lorentz, Constructive Approximation, Springer-Verlag, Berlin Helidelberg, 1993.

[48] L. Diening, Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$. Math. Inequal. Appl., vol. 7, no. 2, (2004) 245-253.

[49] H. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Ruzicka, Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2017, Springer, Heidelberg, 2011.

[50] J. P. G. L. Dirichlet, Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données, J. Reine Angew. Math. 4 (1829), 157-169.

[51] T. Ereú, N. Merentes, J. L. Sánchez, Some remarks on the algebra of functions of two variables with bounded total Φ-variation in Schramm sense, Coment. Math, vol. 50, no. 1, (2010), 23-33.

[52] X. L. Fan, Y. Z. Zhao, D. Zhao, Compact imbedding theorems with symmetry of Strauss-Lions type for the space $W^{1,p(x)}(\omega)$. Journal of mathematical analysis and applications, vol. 255, (2001) 333-348.

[53] H. Federer, Geometric Measure theory. Heidelberg. Springer-Verlag, 1969.

[54] J. B. J. Fourier, Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corpes solides (extrait), Nouv. Bull. Sci. Soc. Phil. de Paris, no. 6, (1808), 112-116.

[55] J. Giménez, O. Mejía, N. Merentes, $WBV_{p(\cdot)}$-solutions of Volterra-Hammerstein type equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications (Enviado a publicación).

[56] J. Giménez, O. Mejía, N. Merentes, L. Rodríguez, Functions of Waterman-Shiba bounded variation with variable exponent, Mathematica Aeterna, vol. 6, no. 2, (2016) 203-218.

[57] J. Giménez, O. Mejía, N. Merentes, L. Rodríguez, Non-linear composition operator in the space of functions of bounded $\Lambda_{p(\cdot)}$-variation, JP Journal of Mathematical Sciences, vol. 17, no. 1, (2016) 1-21.

[58] D. Glazowska, Z. Jesús, J. Matkowski, O. Mejía, Uniformly bounded composition operators in the Banach space of functions of bounded (φ, k)-variation in the sense of Riesz-Popoviciu, (Enviado a publicación).

[59] N. Guanda, Propiedades analíticas y topológicas del operador de composición y aplicaciones a varios problemas no lineales, tesis doctoral, Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela, 2012.

[60] J. A. Guerrero, O. Mejía, N. Merentes, Locally defined operators and locally Lipschitz composition operators in the space $WBV_{p(\cdot)}[a,b]$, Advances in Pure Mathematics, vol. 6, no. 10, (2016) 1-17.

[61] A. Guerrero, N. Merentes, J. L. Sánchez, The bi-dimensional space of Korenblum and composition operator, Tatra Mountain Mathematical Publications, vol. 62, (2015) 1-12.

[62] A. Guerrero, H. Leiva , J. Matkowski, N. Merentes, Uniformly continuous composition operators in the space of bounded φ-variation functions, Nonlinear Analysis, vol. 72, (2010), 3119-3123.

[63] G. H. Hardy, On double Fourier series, and especially those which represent the double zeta–function width real and inconmesurable parameters, Quart. J. Math. Oxford. vol. 37, (1905/06), 53-79.

[64] G. H. Hardy, On the convergence of certain multiple series. Proc. Camb. Philos. Soc. vol. 19, (1917), 86-95.

[65] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some properties of fractional integrals, I. Math. Z. vol. 27, (1928), 565-606.

[66] A. Hernández, Espacio de Φ-variación acotada en el sentido de Schramm ($\Phi BV[a,b]$). Trabajo de Ascenso para optar a la categoría de profesor asistente. Facultad de Ingeniería, Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela, 1996.

[67] E. W. Hobson, The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series, 3era edición. vol. I, Cambridge Univ. Press, London New York, 1927.

[68] C. S. Hönig, Volterra-Stieltjes integral equations with linear constraints and discontinuous solutions, Bulletin of the American mathematical Society. vol. 81, no. 3, 1975.

[69] F. N. Huggins, A generalization of theorem of F. Riesz, Pacific J. Math. vol. 39, no. 3, (1971), 695-701.

[70] E. Isaacson, B. Keller, Analysis of Numerical Methods, Dover Publication, Inc, New York, 1966.

[71] T. M. Jędryka, J. Musielak, On a modular equation I, Funct. Approx. vol. 2, (1976) 101-111.

[72] Z. Jesús, O. Mejía, N. Merentes, S. Rivas, The composition operator and the space of the functions of bounded variation in Schramm-Koremblum's sense. J. Funct. spaces. Appl. vol. 2013, Article ID 284389, (2013), 1-13.

[73] C. Jordan, Sur la série de Fourier, C. R. Acad. Sci. París (1881), 228-230.

[74] M. Josephy, Composition functions of bounded variation, Proc. Amer. Math. Soc. vol. 83, no. 2, (1981), 354-356.

[75] R. P. Kanwal, Linear Integral Equations. Theory and Technique, Academic Press, 1971.

[76] S. K. Kim, J. Kim, Functions of $\kappa\phi$-bounded variation, Bull. Korean Math. Soc. vol. 23, no. 2, (1986), 171-175.

[77] J. Knop, On globally Lipschitzien Nemytskij operator in special Banach space of functions, Fasciculi Math. vol. 21, (1990), 79-85.

[78] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, vol. 2, Greylock Press, Albany N.Y., 1961.

[79] B. Korenblum, An extension of the Nevalinna theory, Acta Math. vol. 135, (1975), 187- 219.

[80] O. Kováčik, J. Rákosník, On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$, Czechoslovak Mathematical Journal, vol. 41, no. 4, (1991) 592-618.

[81] M. Krause, Über fouriersche reihen mit zwei veränderlichen grössen, Ber. Verhandl. Sächs. Gesell. Wiss. Leipzig, vol. 55, (1903), 164-197.

[82] M. A. Krasnosel'sk$\check{i}$, Ya. R. Rutick$\check{i}$, Convex functions and Orlicz Spaces, P. Noordhoff Ltd-Gronigen The Netherkands, 1961.

[83] M. Kuczma, An introduction to the Theory of functional equations and Inequalities, Polish Scientific Editors and Silesian University, Warszawa- Krakow-Katowise, 1885.

[84] A. Kufner, O. John, S. Fučik, Functions spaces, Academia publishing house of the Czecholovak academy of sciences, Praga, 1977.

[85] T. Lalesco, Sur l'équation de Volterra, Journal de mathématiques pures et appliquées 6^e série, tome 4 (1908) 127-202.

[86] H. Leiva, N. Merentes, J. Sánchez, S. Rivas, On functions of bounded (φ, k)-variation. (Enviado a publicación).

[87] K. Lichawski, J. Matkowski, J. Miś, Locally defined operators in the space of differentiable functions, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. vol. 37, (1989), 315-325.

[88] M. Lind, On fractional smoothness of functions related to p-variation, Math. Inequal. Appl. vol. 16, no. 1, (2013), 21-39.

[89] M. Lupa, From of Lipschitzian operator of subtitution in some class of functions, Zeszyty Nauk. Politek. Tódz, vol. 21, (1989), 87-96.

[90] W. A. J. Luxemburg, Banach function spaces, PhD Thesis, Technische Hogeschool te Delft, 1955.

[91] L. Maligranda, W. Orlicz, On some properties of functions of generalized variation, Mh. Math. vol. 104, (1987), 53-65.

[92] R. H. Martin, Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney-Toronto, 1976.

[93] A. Matkowska, On the characterization of Lipschitzian operator of substitution in the class Hölder's funtions, Zeszyty Nauk. Politech. Tódz. Mat. vol. 17, (1984), 81-85.

[94] A. Matkowska, J. Matkowski, N. Merentes, Remark on globally Lipschitzian composition operators, Demostratio Math. vol. 27, no. 4, (1994) 171-175.

[95] J. Matkowski, Functional equations and Nemytskij operators, Funkcial. Ekvac. vol. 25, (1982), 127-132.

[96] J. Matkowski, Uniformly bounded composition operators between general Lipschitz function normed spaces. Topol. Methods Nonlinear Anal. vol. 38, no. 2, (2011), 395-406.

[97] J. Matkowski, Functional equation and Nemytskij operators, Funkcial Ekv. vol. 25, (1982), 127-132.

[98] J. Matkowski, Form of Lipschitz operators of substitution in Banach spaces of differentiable functions. Sci. Bull. Lódz Techn. Univ. vol. 17, (1984), 5-10.

[99] J. Matkowski, Uniformly continuous superposition operators in the space of differentiable functions and absolutely continuous functions, Internat. Ser. Numer. Math. vol. 157, (2008), 155-156.

[100] J. Matkowski, Uniformly continuous superposition operators in the space of Hölder functions, J. Math. Anal. App. vol. 359, (2009), 56-61.

[101] J. Matkowski, Uniformly continuous superposition operators in the space of bounded variation functions, Math. Nach. vol. 283, no. 7, (2010), 1060-1064.

[102] J. Matkowski, Local Operators and a characterization of the Volterra operator, Ann. Funct. Anal. vol. 1, no. 1, (2010) 36-40.

[103] J. Matkowski, N. Merentes, Characterization of Globally Lipschitzian composition operators in the Banach space $BV_p^2[a,b]$, Archivum Math. vol. 28, no. 3-4, (1992), 181-186.

[104] J. Matkowski, N. Merentes, Characterization of Globally Lipschitzian composition operators in the Sobolev space $W_p^n[a,b]$, Zeszyty Nauk. Politech. Lódz. Mat. vol. 24, (1993), 90-99.

[105] J. Matkowski, J. Miś, On a characterization of Lipschitzian operators of substitution in the space $BV[a,b]$, Math. Nachr., vol. 117, (1984), 155-159.

[106] J. Matkowski, M. Wróbel, Locally defined operators in the space of Whitney differentiable functions, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, vol. 68, no. 10, (2008) 2933-2942.

[107] J. Matkowski, M. Wróbel, Representation theorem for locally defined operators in the space of Whitney differentiable functions, Manuscripta Mathematica, vol. 129, no. 4, (2009) 437-448.

[108] J. Matkowski, M. Wróbel, The Bounded Local Operators in the Banach Space of Höolder Functions, vol. 15 of Scientific Issues, Mathematics, Jan Dlugosz University in Czestochowa, 2010.

[109] Yu. T. Medveded, A generalization of a theorem of F. Riesz (en ruso), Uspekhi Mat, Nauk. vol. 8, no. 6, (1953), 115-118.

[110] O. Mejía, N. Merentes, B. Rzepka, Locally Lipschitz composition operators in space of the functions of bounded $\kappa\Phi$-variation, Journal of Function Spaces, vol. 2014, Article ID 606307, (2014), 1-12, doi:10.1155/2014/606307.

[111] O. Mejía, N. Merentes, J. L. Sánchez, The space of bounded $p(\cdot)$-variation in Wiener's sense with variable exponent, Advances in Pure Mathematics, vol. 5, (2015) 703-713.

[112] O. Mejía, N. Merentes, J. L. Sánchez, M. Valera-López, The space of bounded $p(\cdot)$-variation in the sense of Wiener-Korenblum with variable exponent. Advances in Pure Mathematics, vol. 6, no. 1, (2016) 21-40.

[113] O. Mejía, P. Silvestre, Functions of bounded kth p-variation and continuity modulus, Journal of Functions Spaces, vol. 2015, (2015) 1-13.

[114] O. Mejía, P. Silvestre, M. Valera-López, Functions of bounded $(p(\cdot),2)$-variation in De La Vallée Poussin-Wiener's sense with variable exponent, Advances in Pure Mathematics (2017) (Aceptado).

[115] N. Merentes, On the composition operator in $AC[a,b]$, Collect. Math. vol. 42, no. 3, (1991), 231-238.

[116] N. Merentes, On a characterization of Lipschitzian operators of substitution in the space of bounded Riesz φ-variation, Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math. vol. 34, (1991), 139-144.

[117] N. Merentes, Functions of bounded $(\varphi, 2)$-variation, Annales Univ. Sci. Budapest, vol. 34, (1991), 145-154.

[118] N. Merentes, On functions of bounded $(p, 2)$-variation, Collect.Math. vol. 43, no. 2, (1992), 117-123.

[119] N. Merentes, On the composition operator in $RV_{\varphi}[a, b]$, Collect. Math. vol. 46, no. 3, (1995), 231-238.

[120] N. Merentes, S. Rivas, Characterization of globally Lipschitzian composition operators between set-values fuctions on $RV_p[a, b]$ and $RV_q[a, b]$, Publ. Math. Debrecen, vol. 47, no. 1-2, (1995) 15-27.

[121] N. Merentes, S. Rivas, El operador de composición en espacios con algún tipo de variación acotada, IX Escuela Venezolana de Matemáticas, Mérida, Venezuela, 1996.

[122] N. Merentes, S. Rivas, On the composition operator between $RV_p[a, b]$ and $BV[a, b]$, Sci. Math. vol. 1, no. 3, (1998), 237-292.

[123] N. Merentes, S. Rivas, J. L. Sánchez, On functions of bounded (p, k)-variation, J. Funct. Spaces and Applications, vol. 2012, (2012), 1-9.

[124] N. Merentes, S. Rivas, J. L. Sánchez, Locally Lipschitz composition operator in spaces of $\Phi BV[a, b]$. Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods & Applications. vol. 75, no. 4, (2012), 1751-1757.

[125] B. L. Moiseiwitsch, Integral equations, Longman Mathematical Texts, 1977.

[126] Kh. Sh. Mukhtarov, On the properties of the operator $Fu = f(u(x))$ in the space H_{φ}(Russian), Sbornik Nauchm. Rabot Mat. Kaf. Dagestan Univ. (1967), 145-150.

[127] J. Musielak, Orlicz Spaces and Modular Spaces, Lecture Notes Math., vol. 1034, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[128] J. Musielak, W. Orlicz, On modular spaces, Studia Math. vol. 18, (1959), 49-65.

[129] H. Nakano, Modulared Semi-ordered Linear Spaces, Maruzen Co., Ltd., Tokyo, 1950.

[130] H. Nakano, Topology and Topological Linear Spaces, Maruzen Co., Ltd., Tokyo, 1951.

[131] I. P. Natanson, Theory of functions of a real variable, Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1955.

[132] M. T. Neves, φ-variación en el sentido de Wiener y Riesz y el operador de composición, Trabajo de Pasantía, Universidad Nacional Abierta, Aragua, Venezuela, 1994.

[133] D. O'Regan, R. Precup, Theorems of Leray-Schauder Type and Applications, Gordon and Breach, Amsterdam, 2001.

[134] W. Orlicz, Über konjugierte exponentenfolgen, Studia Math. vol. 3, (1931) 200-211.

[135] A. B. Owen, Multidimensional variation for quasi-monte Carlo, Technical Report no. 2004-02, Department of statistics, Stanford University, 2004.

[136] J. Park, On the functions of bounded $\kappa\phi$-variation (I), J. Appl. Math. & Informatics, vol. 28, no. 1-2, (2010), 487-498.

[137] P. B. Pierce, D. Waterman, On the inariance of classes ϕBV, ΛBV under composition, Proc. Amer. Math. Soc. vol. 132, no. 3, (2003), 735-760.

[138] M. T. Popoviciu, Sur les fonctions convexes d'une variable réelle, C. R. Sci. Paris, vol. 190, (1930) 1481-83.

[139] J. E. Porter, Helly's Selection Principle for Functions of Bounded p-Variation, Rocky Mountain Journal of Mathematics vol. 35, no. 2, (2005), 675-679.

[140] V. D. Rădulescu, D. D. Repovš, Partial differential equations with variable exponent: variational methods and qualitative analysis, CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton FL, 2015.

[141] M. M. Rao, Z. D. Ren, Applications of Orlicz spaces, Marcel Dekker, Inc, New York. Basel, 2002.

[142] T. M. Rassias, V. Gupta, Mathematical analysis, approximation theory and their applications, Springer Optimization and Its Applications 111, New York, 2016.

[143] F. Riesz, Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Matematishe Annalen, vol. 69, (1910), 449 - 497.

[144] F. Riesz, Sur certain systeme singuliers d'equations integrales, Ann. Ecole Norm. Sup. Paris. vol. 3, no. 28, (1911), 33-68.

[145] S. Rivas, El operador de composición entre espacios de Riesz, Tesis de Maestría, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela, 1991.

[146] S. Rivas, Algunas generalizaciones de la noción de variación acotada en el sentido de Riesz y un teorema de representación de Riesz, Tesis Doctoral, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela, 2012.

[147] J. M. Rodríguez, Aproximation by polynomials and smooth functions in Sobolev spaces with respect to measures, Journal of Approximation Theory, vol. 120 (2003) 185-216.

[148] J. Rojas, Sobre operadores de composición uniformemente acotados en espacios de funciones de variación acotada en el sentido de Riesz-Popoviciu. Trabajo especial de grado, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela, Caracas-Venezuela, 2011.

[149] W. Rudin, Functional analysis, Tata McGraw-Hill publishing company LTD, New Delhi, 1973.

[150] A. M. Russell, Functions of bounded second variation and Stieltjes-type integrals, J. London Math. Soc. vol. 2, no. 2, (1970), 193-208.

[151] A. M. Russell, Function of bounded kth-variation, Proc. London Math Soc. vol. 3 no. 26 (1973), 547-563.

[152] A. M. Russell, A Banach space of functions kth-variation, Bull. Austral. Math. Soc. vol. 15, (1976), 431-438.

[153] A. M. Russell, Futher results on integral representation of functions of generalized variation, Bull, Austral Math. Soc. vol. 18, (1978), 407-420.

[154] M. Růžička, Electrorheological fluids: Modeling and mathematical theory. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[155] A. I. Sablim, Λ-variation and Fourier series. (Russian) Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 1987, no. 10, 66-68; English trasl., Soviet Math. (Iz. VUZ), vol. 31, no. 10, (1987), 87-90.

[156] A. A. Sahakyan, On the convergence of double Fourier series of functions of bounded harmonic variation. (Russian) Izv. Akad. Nauk Armyan. SSr. Ser. Mat. 21 (1986), no. 6, 517-529; English trasl., Soviet J. Contemp. Math. Anal. 21 no. 6, (1986), 1-13.

[157] M. Sanoja, Funciones de $\kappa\varphi$-variación acotada en el sentido de Riesz-Koremblum, Tesis de Maestría, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela, 2016.

[158] M. Schramm, Functions of bounded Φ-variation and Riemann-Stieltjes integration, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 287, no. 1, (1985), 49-63.

[159] M. Shiba, On the absolute convergence of Fourier series of functions class $\Lambda_p BV$, Sci. Rep. Fukushima Univ. no. 30, (1980), 7-10.

[160] A. Sieczko, Characterization of globally lipschitzian Nemytskij operators in the Banach space, $ACr-1$, Math. Nach. vol. 141, (1989), 7-11.

[161] W. Sierpiński, Sur une propriété des fonctions qui n'ont que des discontinuités de première espèce, Bull. Acad. Sci. Roumaine vol. 16, (1933), 1-4.

[162] S. L. Sobolev, On a theorem of functional analysis, Mat. Sb. Alb. vol. 46, (1938), 471-497.

[163] S. L. Sobolev, Applications of functional analysis in mathematical physics, Leningrad 1950. [English transl.: Amer. Math. Soc. Transl., Math. Mono, vol. 7, 1963].

[164] E. P. Sovolevskij, The superposition operator in Hölder spaces. (Russian), VINITI no. 3765-84, Voronezh, 1984.

[165] A. P. Terehin, Approximation of functions of bounded p-variations (Russian), Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. vol. 2, (1965), 171-187.

[166] A. P. Terehin, Functions of bounded p-variations with a given modulus of continuity, Mat. Zametki, vol. 53, no. 6, (1972), 523 - 530 (Russian); English transl. in Math. Notes, vol. 12, (1972), 751-755.

[167] Ch. J. De La Vallée Poussin, Sur la convergence des formules d'interpolation entre ordennées equidistantes, Bull. Acad. Sci. Belg. (1908), 314 - 410.

[168] G. Vitali, Sulle funzioni integrali, Atti Accad. Schi. Torino CI Sci. Fis. Mat. Natur. vol. 40, (1904/05), 1021-1034.

[169] R. G. Vyas, On the absolute convergence of small gaps Fourier series of functions of $\Lambda BV^{(p)}$, J. Inequal. Pure Appl. Math, vol. 23, no. 6 (1), (2005), 1-6.

[170] R. G. Vyas, Properties of functions of generalized bounded variation, Mat. Vesnik, no. 58, (2006), 91-96.

[171] S. S. Volosivets, Asymptotic properties of one compact set of smooth functions in the space of functions of bounded p-varition, Mathematical Notes, vol. 57, no. 1-2, (1995), 148 -157.

[172] S. S. Volosivets, The best approximation polynomials and relation between continuity modules in spaces of functions of a bounded p-variation, Russian mathematics (Iz.VUZ), vol. 40, no. 9, (1996), 21-26.

[173] D. Waterman, On the convergence of Fourier series of Functions of generalizad bounded variation, Studia Math. vol. 44, (1972), 107-117.

[174] D. Waterman, On $\Lambda-$bounded variation, Studia Math. vol. 52, (1976), 33-45.

[175] D. Waterman, Fourier series of functions of Λ-bounded variation. American Mathematic Society, vol. 74, no. 1, (1979), 119-123.

[176] Kyu-Bok Whang, Some properties of generalized functions of bounded variation, Doctoral Dissertation, Kyung Hee University, Seoul Korea, 1992.

[177] N. Wiener, The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients, J. Math. Phys. vol. 3, (1924), 72-94.

[178] M. Wróbel, Locally defined operators and a partial solution of a conjecture, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, vol. 72, no. 1, (2010) 495-506.

[179] M. Wróbel, Representation theorem for local operators in the space of continuous and monotone functions, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 372, no. 1, (2010) 45-54.

[180] M. Wróbel, Locally defined operators in the Hölder's spaces, Nonlinear Analysis. Theory,Methods & Applications, vol. 74, no. 1, (2011) 317-323.

[181] M. Wróbel, Uniformly bounded Nemytskij operators beteween the Banach space of functions of bounded *n-th* variation, J. Math. Appl. vol. 391, no. 2, (2012) 451-456.

[182] M. Wróbel, Locally defined operators in the space of functions of bounded φ-variation, Real Analysis Exchange, vol. 38, no. 1, (2013) 79-94.

[183] T. Wunderli, On time flows of minimizers of general convex functionals of linear growth with variable exponent in BV space and stability of pseudo-solutions. J. Math. Anal. Appl. vol. 364, no. 2, (2010) 591-598.

[184] L. Yin, Y. Liang, Q. Zhang, C. S. Zhao, Existence of solutions for a variable exponent system without PS conditions, Journal of Differential Equations, vol. 2015, (2015) 1-23.

[185] L. C. Young, Sur une généralisation de la notion de variation de Pussance Pieme borneé de N. Wiener et sur la convergence des serie de Fourier, C. R. Acad. Sci. París, Ser A-B, no. 240, (1937), 470-472.

[186] V. V. Zhikov, Meyer-type estimates for solving the non-linear Stokes system. Differ. Equat. vol. 33, no. 1, (1997), 108-115.