



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICA

# IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO DE ELEMENTO FRONTERA PARA EL ESTUDIO DE LA DEFORMACIÓN DE UNA PLACA EN L.

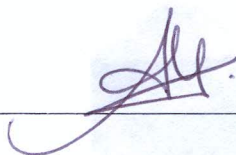
Trabajo Especial de Grado presentado ante la  
ilustre Universidad Central de Venezuela por  
el **Br. Nelson E. Colmenares Leal** para  
optar al título de Licenciado en Matemática.

**Tutor: Dra. Maira Alejandra Valera  
López**

Caracas, Venezuela

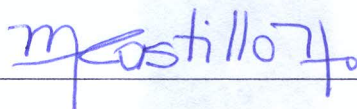
Mayo, 2017

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado **Implementación del Método de Elemento Frontera para el estudio de la deformación de una placa en L**, presentado por el **Br. Nelson E. Colmenares Leal**, titular de la Cédula de Identidad **V-19.066.509**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.



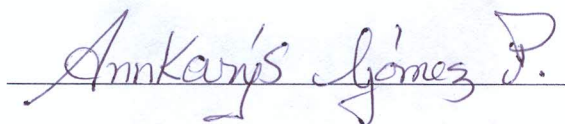
---

Profa. Maira Alejandra Valera López  
Tutor



---

Profa. Mariela Castillo  
Jurado



---

Profa. Annkarays Gómez  
Jurado

## RESUMEN

Se exhibe en el transcurso de este trabajo la formulación teórica del BEM, solucionando un problema general de elasticidad plana modelado por la ecuación de Navier sobre un medio elástico, homogéneo e isotrópico. Tomando en cuenta una geometría general en dos dimensiones, discretizado mediante elementos cuadráticos con interpolación de tipo isoparamétrica. Se presenta la formulación directa del BEM con base en la ecuación integral de Somigliana, obteniendo soluciones para los desplazamientos y las tensiones generando un sistema de ecuaciones. Luego, se proponen ejemplos con tres formas diferentes de disposición (o distribución) de las condiciones de contorno.

*Palabras clave:* BEM, elasticidad plana, integración numérica.

*You see you wouldn't ask why the rose that grew  
from the concrete had damaged petals.*

*On the contrary, we would all celebrate its  
tenacity.*

*We would all love it's will to reach the sun.*

*Well, we are the rose,*

*this is the concrete,*

*and these are my damaged petals.*

*Don't ask me why, thank God nigga,*

*ask me how!*

*Hahahaha..*

*A la memoria de Omar Antonio Leal,*

*por ser un ejemplo de constancia, dedicación, unión familiar.*

*Te voy a extrañar toda la vida,*

*que Dios te tenga en su santa gloria.*

# Agradecimientos.

A mi familia por todo el apoyo y por siempre creer en mí, los amo con todo mi corazón.

A la Escuela de Matemática de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, por permitirme cursar mis estudios de pregrado con éxito.

A todos los profesores de la Facultad de Ciencias que de una u otra manera contribuyeron al enriquecimiento de mis conocimientos, en especial a mi tutora Maira Valera por su paciencia, compromiso, dedicación, apoyo, etc, para poder culminar este trabajo de grado. Por encaminarme cuando en algún momento perdí el rumbo en este difícil camino. Agradecido por haberme permitido trabajar con usted ha sido de gran ejemplo para mí, tanto a nivel profesional como a nivel personal es una excelente persona.

A mis amigos que nos apoyamos mutuamente en nuestra formación profesional y que hasta ahora, seguimos siendo amigos.

# ÍNDICE GENERAL

<b>1</b>	<b>MARCO TEÓRICO.</b>	<b>PÁGINA 5</b>
1.1	Base Matemática.	5
1.2	Notación indicial.	8
1.3	Notación tensorial.	9
1.4	Introducción a la teoría de elasticidad.	9
1.5	Ecuaciones básicas en elasticidad.	12
	Estado de tensión. 12 • Estado de deformación. 14 • Relaciones constitutivas.	15
1.6	Integración numérica.	16
	Reglas de cuadratura básicas. 17 • Reglas de cuadratura compuestas.	18
<b>2</b>	<b>MÉTODO DE ELEMENTOS FRONTERA.</b>	<b>PÁGINA 21</b>
2.1	La identidad de Somigliana.	21
	Identidad de Somigliana para puntos en el contorno.	25
2.2	Soluciones fundamentales.	27
2.3	Análisis en el contorno y en los puntos internos.	30
	Tensiones en el contorno. 30 • Análisis de puntos interiores. 31 • Consideración de fuerzas de dominio. 32	
<b>3</b>	<b>IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA DEL BEM EN ELASTICIDAD PLANA.</b>	<b>PÁGINA 35</b>
3.1	Discretización.	35
3.2	Interpolación.	40
	Tipos de interpolación. 40 • Elementos isoparamétricos.	40
3.3	Representación paramétrica de la geométrica en el contorno.	41
3.4	Sistema de ecuaciones integrales.	41
<b>4</b>	<b>PROGRAMA PARA ANALIZAR PROBLEMAS DE ELASTICIDAD USANDO ELEMENTOS CUADRÁTICOS.</b>	<b>PÁGINA 47</b>
4.1	Introducción a FORTRAN.	47
4.2	Programa principal.	48
4.3	Rutina INPUTEQ.	50
4.4	Rutina GHMATEQ.	51

4.5	Rutina EXTINEQ.	51
4.6	Rutina LOCINEQ.	52
4.7	Rutina INTEREQ.	53
4.8	Rutina OUTPTEQ.	54

## **5** EJEMPLOS DE APLICACIÓN. **PÁGINA 55**

5.1	Ejemplo 1: Primera placa en “L”.	56
5.2	Ejemplo 2: Segunda placa en “L”.	58
5.3	Ejemplo 3: Tercera placa en “L”.	60

## **6** CONCLUSIONES. **PÁGINA 65**

## **7** APÉNDICE. **PÁGINA 67**

7.1	Resultados primer ejemplo	67
7.2	Resultados segundo ejemplo.	69
7.3	Resultados tercer ejemplo.	72
	Bibliografía	75



## Introducción.

Muchos problemas de importancia práctica que comúnmente surgen en ingeniería, resultan de gran complejidad matemática debido a la dificultad que surge al momento de hallar la solución de las ecuaciones diferenciales que gobiernan tales problemas mediante métodos analíticos.

En consecuencia, aunque este tipo de solución es la que más información proporciona sobre el comportamiento de las variables involucradas en un problema dado, se debe recurrir a los métodos numéricos, los cuales permiten elaborar análisis y diseños con un alto grado de sofisticación y precisión.

Aún cuando todos estos métodos numéricos constituyen una poderosa herramienta matemática, no dejan de ser métodos que aproximan la solución, debiéndose tener especial cuidado en su utilización, ya que la calidad de las soluciones que se obtengan depende de varios factores, entre los cuales se pueden destacar la distribución de la discretización espacial de la región en estudio, el tipo de discretización, la aplicación apropiada de las condiciones de contorno, la correcta inclusión en el modelo de las propiedades físicas de los materiales que interviene en el problema, entre otros.

Una de las técnicas que permiten resolver de manera rápida y eficiente estos problemas es el Método de Elementos de Frontera, (BEM, por Boundary Element Method), el cual es un método numérico empleado para resolver ecuaciones en derivadas parciales que han sido formuladas como ecuaciones integrales. Consiste en discretizar la frontera en una serie de elementos unidimensionales (para el caso de dos dimensiones), sobre el cual las tensiones y los desplazamientos varían de acuerdo con la función de interpolación adoptada [4].

La elasticidad plana se refiere al estudio de soluciones particulares del problema elástico general y al estudio del conjunto de aplicaciones técnicas en que aparecen dichos estados elásticos de tensión-deformación reducibles a problemas “planos” o bidimensionales [1]. Las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema de elasticidad plana, se conocen como las ecuaciones de Navier. No obstante, a partir de la simetría de las tensiones y deformaciones de un problema dado, se determina la identidad de Somigliana, la cual permite determinar los campos variables a través de los campos conocidos sobre la frontera del dominio  $\Omega$ . Partiendo de consideraciones básicas en elasticidad, se deriva la ecuación integral de Somigliana, así como la forma que toma cuando es aplicada sobre los puntos de la frontera.

Para determinar la solución del problema, es necesario encontrar las soluciones fundamentales (funciones de Green), que no son más que las funciones que representan los núcleos de las integrales de simple y doble capa, presentes en la ecuación de Somigliana. Primero se determina la solución fundamental correspondiente al campo de desplazamientos, los cuales estarán definidos en un medio homogéneo, isotrópico e infinito, resultante de la aplicación de una carga unitaria en cierto punto del dominio. Posteriormente, al derivar la solución fundamental del desplazamiento, se obtiene la solución fundamental para las tensiones.

Las soluciones fundamentales tienen diferentes tipos de singularidades, que afectan la solución. El núcleo correspondiente al desplazamiento varía de acuerdo a las siguientes funciones:  $\ln(r)$  en dos dimensiones (singularidad débil), y  $1/r$  en tres dimensiones (singularidad fuerte), donde  $r$  representa la

magnitud del vector radio. El núcleo correspondiente a las tensiones, tiene las siguientes singularidades:  $1/r$  en dos dimensiones (singularidad débil) y  $1/r^2$  en tres dimensiones (singularidad fuerte). Las integrales de esta función solo existen en el sentido de valor principal de Cauchy.

Existen dos temas de mayor preocupación cuando se utiliza el BEM: exactitud y velocidad. Se conoce que las integrales singulares o cuasi-singulares presentes en el BEM pueden dar resultados inexactos, incluso en el caso en que se utiliza un gran número de puntos de integración (grandes órdenes de cuadratura). Las integrales son singulares cuando el punto de origen (punto de colocación) pertenece al elemento de integración y cuasi-singulares cuando el punto de origen no pertenece al elemento, pero está muy cerca del mismo. En los casos donde el punto de origen está cerca del elemento, se obtienen resultados inexactos al utilizarse integración numérica. Por otro lado, cuando se utiliza la integración numérica, el usuario debe definir grandes órdenes de cuadraturas de Gauss para obtener resultados razonables. Esto implica largos tiempos de ejecución computacional. En un problema práctico de ingeniería discretizado con doscientos mil elementos de contorno, la necesidad de reducir el tiempo de ejecución computacional se convierte en algo necesario.

El BEM fue utilizado por primera vez para problemas potenciales en 1977 por Brebbia y Dominguez, [4]. Brebbia, junto con otros investigadores, sin duda han desempeñado un papel significativo e importante en la introducción de este método para la investigación en ingeniería, (ver [6]). Al menos 200 artículos de revistas cuyos títulos contenían el término BEM se encuentran en base de datos en la red, a partir de 1985. Para el año 2006, ya existían varios miles, de trabajos relacionados a este tema.

Sin embargo, la historia del método podría remontarse a una época anterior, mucho antes de la década de 1970. Las matemáticas que sentaron las bases teóricas para el desarrollo del método, se podían encontrar en las obras de matemáticos famosos como Laplace, Fourier, Poisson, Green, Stokes, Gauss, Fredholm, Betti, Somigliana, Muskhelishvili y Mikhlin. En la década de 1960, hubo intentos de utilizar las computadoras para administrar soluciones aproximadas de problemas de potenciales a través de la utilización de las ecuaciones integrales de contorno, en particular, los trabajos pioneros de M. Jaswon, [17] y G. Symm, [26]. La obra de F. Rizzo [25], fue considerado por muchos investigadores como el comienzo de un nuevo método integral de contorno directo para la solución numérica de problemas de elasticidad.

Otros adelantos de investigación fueron aportados luego por H. Okada y colaboradores, [20], en 1988, donde proponen una nueva ecuación integral directa para el gradiente de desplazamiento, la cual tiene una singularidad de orden inferior que en la formulación estándar, y es bastante manejable desde un punto de vista numérico. Un año después M. Cerrolaza, [7], presenta una versión p-adaptable del BEM aplicado a problemas de potencial tridimensional y elastostática bidimensional.

Durante las dos últimas décadas, muchos investigadores han dedicado tiempo y esfuerzo para profundizar la implementación del BEM, es por ello que a continuación presentamos algunos trabajos dedicados a esta área de trabajo. E. Pineda-León y colaboradores, [22], en 2006, aplican el método de elemento frontera a problemas no lineales independientes del tiempo; luego, S. P. Zhu y Y. Zhang, [29], en 2007, resuelven el problema de Helmholtz interior directo, en términos de precisión numérica y eficiencia, así como su aplicabilidad y confiabilidad en el dominio de la frecuencia.

Adicionalmente, en el año 2008, D. Ojeda y colaboradores, [19], proponen una solución eficiente para la detección de cavidades en huesos corticales a partir de una técnica de superposición de cargas puntuales empleando el método de elementos de frontera, y Keng-Cheng Ang, [18], presenta una manera sencilla y sistemática de implementar el método de elementos frontera para resolver la ecuación de Laplace usando MATLAB, obteniendo buenos resultados en la implementación sobre los ejemplos que planteó.

L. Ebrahimnejad y colaboradores, [11], en 2010, describen la aplicación de transformadas de onda rápida en el método de elementos frontera para resolver problemas de elasticidad 2D.

En los años 2010 y 2013, se describe una formulación de forma compacta y eficiente de las expresiones que solucionan un problema de elasticidad plana, mediante el BEM de forma analítica usando elementos subparamétricos. Dichos trabajos se les atribuye a M. Valera y colaboradores, [28], [27].

Más adelante, en el año 2011, W. Portilho y colaboradores, [23], plantean una formulación numérica para el análisis de problemas dinámicos de flexión de placas anisotrópicas delgadas, F. Cezario y colaboradores, [9], obtienen una solución fundamental bidimensional general y concisa para problemas viscoelásticos lineales cuasi-estáticos utilizando el método del elemento frontera, Y. M. Zhang y colaboradores, [30], introducen una transformación no lineal sobre elementos de superficie curvos y se aplica al método de los elementos de frontera regularizados para problemas estructurales finos 2-D.

Por último, M. González [15], en 2015, presentó un algoritmo efectivo, (basado en una combinación de la técnica de transformación de variables de Telle y la cuadratura de Gauss adoptativo para mejorar la integración y para disminuir el tiempo de cálculo) para la integración cuasi-singular en el BEM aplicado a estructuras de pared delgada en tres dimensiones.

En esta trabajo especial de grado, nos hemos propuesto aplicar el BEM en una placa en L, con tres formas diferentes de disposición (o distribución) de las condiciones de contorno. Para ellos utilizamos el código desarrollado por C. Brebbia y J. Dominguez en el año 1977, [4], el cual es un esquema escrito en lenguaje FORTRAN con un interés académico, que puede ser manipulado para problemas de mayor complejidad. El interés de realizar implementaciones sobre una placa en L se debe a la utilidad que tiene en estudios correspondientes a mecánica del sólido, por ejemplo, la construcción de edificios, centros comerciales, canchas verticales, taludes, entre otras.

A continuación se presenta un resumen de los capítulos que conformarán este trabajo. El capítulo 1 contempla los conceptos matemáticos, las notaciones necesarias para plantear las definiciones básicas en teoría de elasticidad, así como sus ecuaciones y teoría de integración numérica para la aproximación de integrales definidas, considerando fórmulas básicas y otras un poco más complejas; cerrando el capítulo con un tipo de integración llamada cuadratura gaussiana. En el capítulo 2 se obtendrán las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema de elasticidad y luego, se presentan las soluciones fundamentales para el problema de elasticidad plana y las funciones de distribución de desplazamientos y las tensiones en el punto de un medio isotrópico infinito, resultante de la aplicación de una fuerza unitaria en un punto de dicho medio infinito dado, que son obtenidas a partir de la solución fundamental de Kelvin. En el capítulo 3 se detalla el tipo de discretización a utilizar, así como la interpolación, se presentan los sistemas de ecuaciones integrales. En el capítulo 4 se describe el algoritmo utilizado para la implementación computacional del BEM en elasticidad utilizando elementos cuadráticos. En el capítulo 5 se presentan tres (3) ejemplos de aplicación en una placa en L la cual es sometida a distintas condiciones de contorno. Finalizando este trabajo, se establece un conjunto de conclusiones.



# 1

## Marco teórico.

Partiremos de una base matemática en la cual se sustentarán todas las operaciones y manipulaciones que se llevarán a cabo en el transcurso de este trabajo de investigación. En problemas vectoriales como es el caso de elasticidad, es necesario referirse continuamente a las componentes de tensores, vectores y las operaciones entre ellos. Para evitar la enumeración constante de las componentes de dichas cantidades, que resulta regularmente en una exposición tediosa y prolija, y que tiende a ocultar los aspectos fundamentales de una formulación, se utiliza la notación indicial. Vale la pena que revisemos la notación que utilizaremos ampliamente en el resto de este trabajo. Se dará una introducción a la teoría de elasticidad que permita comprender las características, el comportamiento de los cuerpos sólidos en estudio de la elasticidad, así como relacionar tanto los estados de tensión como los de deformaciones de un cuerpo, que darán lugar a las relaciones constitutivas; estas ecuaciones básicamente tratan de describir las respuestas de un determinado material frente a las cargas exteriores.

Por último, se resuelve un problema clásico del cálculo numérico; la aproximación de integrales definidas. Es habitual que la función que se desea integrar solo se conozca en un conjunto discreto de puntos, en esta situación es necesario considerar métodos numéricos para obtener una aproximación del valor que interesa, independientemente de lo difícil que sea la función a integrar. Comenzaremos considerando fórmulas básicas que utilizan datos uniformemente espaciados, cuya exactitud será posteriormente mejorada a partir de la subdivisión del intervalo de integración y la aplicación de una de las técnicas básicas en cada subintervalo. Concluyendo con una técnica más potente, la cuadratura gaussiana, que utiliza una colección de puntos que son elegidos de forma que se obtenga el mejor resultado posible dentro de una cierta clase de funciones.

### 1.1 Base Matemática.

Para una mejor comprensión de esta investigación es imprescindible disponer de un conocimiento básico de las herramientas matemáticas y utilizarlas en varias situaciones. Es por ello que para desarrollar adecuadamente las secciones siguientes, es necesario conocer y manejar de manera significativa los conceptos de vector, producto vectorial, producto escalar, etc, ya que con ello podemos comprender de manera más efectiva, todos los cálculos que se llevarán a cabo con la finalidad de obtener una expresión para la solución de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema matemático que nos hemos planteado.

**Definición 1.1**

Un *escalar* es una cantidad que es independiente de dirección. Denominamos magnitudes escalares a aquellas en las que las medidas quedan correctamente expresadas por medio de un número y la correspondiente unidad. [13]. Ejemplo de ello son: la masa, la temperatura, la presión y la densidad.

**Definición 1.2**

Un *vector* es una herramienta geométrica utilizada para representar una magnitud física, el cual requiere de longitud, dirección y orientación para ser descrito, [13].

En coordenadas cartesianas, un vector se expresa como:

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y + u_z \vec{e}_z, \quad (1.1)$$

donde  $\vec{e}_x = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{e}_y = (0, 1, 0)$  y  $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$ .

El diferencial de un vector respecto a una dirección dada puede escribirse como:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi} = \frac{\partial u_x}{\partial \xi} e_x + \frac{\partial u_y}{\partial \xi} e_y + \frac{\partial u_z}{\partial \xi} e_z. \quad (1.2)$$

La magnitud de un vector se expresa de la siguiente forma:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}. \quad (1.3)$$

**Definición 1.3**

En una base ortonormal, se llaman *cosenos directores* del vector

$\vec{u} = (x, y)$ , a los cosenos de los ángulos que forma el vector  $\vec{u}$  con los vectores de la base. En las ecuaciones (1.4) y (1.5) se expresan los cosenos directores para el vector  $\vec{u}$ , [13]:

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (1.4)$$

$$\cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (1.5)$$

**Definición 1.4**

Un *vector unitario* es un vector cuya magnitud o módulo es uno y está dado de la siguiente forma, [13]:

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{u_x}{\|\vec{u}\|} \vec{e}_x + \frac{u_y}{\|\vec{u}\|} \vec{e}_y + \frac{u_z}{\|\vec{u}\|} \vec{e}_z. \quad (1.6)$$

**Definición 1.5**

El *producto escalar* (ó producto punto), de dos vectores es definido como el producto de sus magnitudes y el coseno del ángulo entre ellos, (que definiremos  $\theta$ ), y como resultado se obtiene un escalar, [13], es decir:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos(\theta) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (1.7)$$

Por tanto, el ángulo entre dos vectores puede obtenerse a partir del producto escalar de la forma:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (1.8)$$

**Definición 1.6**

El *producto vectorial* (o producto cruz), de dos vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  es un nuevo vector perpendicular  $\vec{c}$ , [13],

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}, \quad (1.9)$$

ó

$$\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin(\theta). \quad (1.10)$$

También puede escribirse en términos de las componentes del vector como:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} e_x & e_y & e_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) e_x + (a_z b_x - a_x b_z) e_y + (a_x b_y - a_y b_x) e_z.$$

Las componentes de los vectores pueden considerarse como una proyección de los vectores sobre las direcciones dadas. Por lo tanto,

$$u_x = \|\vec{u}\| \cos(\alpha_x), \quad (1.11)$$

$$u_y = \|\vec{u}\| \cos(\alpha_y), \quad (1.12)$$

$$u_z = \|\vec{u}\| \cos(\alpha_z). \quad (1.13)$$

donde  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$  representan los ángulos respecto de cada uno de los ejes coordenados.

Estos son llamados *cosenos directores*. Un *vector unitario* se puede escribir en términos de los cosenos directores de la siguiente forma:

$$\hat{u} = \cos \alpha_x e_x + \cos \alpha_y e_y + \cos \alpha_z e_z. \quad (1.14)$$

Por lo tanto, los cosenos directores tienen la siguiente propiedad:

$$\cos^2(\alpha_x) + \cos^2(\alpha_y) + \cos^2(\alpha_z) = 1. \quad (1.15)$$

### Definición 1.7

Un *tensor* es un objeto matemático representado por un cierto conjunto de componentes, que generaliza los conceptos de escalar, vector y matriz de una manera que sea independiente de cualquier sistema de coordenadas elegido, [13].

### Definición 1.8

Sea  $f$  definida en  $a \leq x \leq b$ , excepto posiblemente en un punto interior  $c$ , el cual es un punto singular de  $f$ , (ver [5]). Si  $\int_a^b f(x) dx$  no existe, pero

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \right],$$

existe, esto se llamará *valor principal de Cauchy* de  $\int_a^b f(x) dx$  y se escribirá como:

$$P_c \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \right].$$

No debe interpretarse  $P_c$  como un factor numérico. Al poner la  $P_c$  al principio de la integral se da a entender que es un valor principal.

## 1.2 Notación indicial.

La *notación indicial* es una notación abreviada que se utiliza para facilitar la escritura de ecuaciones. Por ejemplo, un vector referido a un sistema de ejes cartesianos  $\vec{a}$  con tres componentes  $(a_1, a_2, a_3)$  en una notación indicial se representa por  $a_i$ , donde el subíndice toma los valores 1, 2 y 3, (ver [8]).

Si se quiere representar un conjunto de nueve cantidades, se utiliza doble subíndice  $b_{ij}$ , donde ambos subíndices  $i$  y  $j$  toman los valores 1, 2 y 3. Si el conjunto tiene 27 cantidades, se necesitan tres subíndices  $d_{ijk}$ . Finalmente, si se tienen  $3^n$  se utilizan  $n$  subíndices  $d_{ijkl\dots n}$ .

Existen dos tipos de subíndices:

- (i) *Índice libre*: es aquél que aparece sólo una vez y toma los valores 1, 2 y 3. El número de términos que existen en la expresión es  $3^n$ , donde  $n$  es el número de índices libres.
- (ii) *Índice mudo*: aparece dos veces e indica una suma de 1 a 3 lo que constituye el convenio de la suma de Einstein.

Como regla general, un subíndice no puede aparecer repetido más de dos veces en un monomio. Así, la expresión  $a_{ijj}$  está escrita correctamente en notación indicial. El subíndice  $i$  es el índice libre e indica



que dicha expresión representa un conjunto de  $3^1 = 3$  cantidades (por ejemplo, un vector). El subíndice  $j$ , aparece dos veces, es el índice mudo y representa una suma desde  $j = 1$  a  $j = 3$ , es decir:

$$a_{ijj} = a_{i11} + a_{i22} + a_{i33} = \begin{pmatrix} a_{111} + a_{122} + a_{133} \\ a_{211} + a_{222} + a_{233} \\ a_{311} + a_{322} + a_{333} \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Sin embargo, la expresión  $a_{iii}$  no es correcta puesto que el subíndice  $i$  aparece tres veces.

La diferenciación con respecto a las tres variables independientes  $x_1, x_2$  y  $x_3$  se indica mediante la coma

$$a_{i,j} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}, \quad (1.17)$$

Esta expresión está constituida por  $3^2 = 9$  cantidades puesto que, tanto  $i$  como  $j$  son índices libres.

#### Definición 1.9

(El delta de Kronecher) La función  $\delta : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$  definida mediante la regla

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j, \end{cases} \quad (1.18)$$

se llama el *símbolo de Kronecher* o el *delta de Kronecher*, [16]. Es muy útil para manipular expresiones, típicamente se utiliza para cambiar de índice.

### 1.3 Notación tensorial.

La *notación tensorial* es una notación que se utiliza principalmente para ecuaciones en coordenadas cartesianas con el fin de ahorrar espacio y presentar las ecuaciones en una forma más compacta.

Es muy utilizado en mecánica de medios continuos y, en particular, en las ecuaciones integrales. En muchos casos hasta nueve o más ecuaciones pueden representarse por una ecuación simple de tensor.

El orden de un tensor se indica por el número de subíndices que aparecen en sus componentes. El subíndice usado en notación tensorial puede tomar los valores 1, 2 y 3 en problemas tridimensionales. Los siguientes ejemplos dan una indicación de las posibles permutaciones que participan en la elaboración de las variables cartesianas:

- ◇  $u_i$  indica 3 variables,
- ◇  $U_{ij}$  indica 9 variables,
- ◇  $D_{ijk}$  indica 27 variables.

### 1.4 Introducción a la teoría de elasticidad.

Todos los materiales estructurales presentan en cierto grado la propiedad de elasticidad, es decir, si las fuerzas exteriores que deforman la estructura no rebasan un cierto límite, la deformación desaparece cuando se suprimen tales fuerzas. La elasticidad según el tipo de cuerpo se subdivide en cuerpos perfectamente elásticos y parcialmente elásticos.

Al deformar la estructura de las partículas que componen un cuerpo, puede hacerse una clasificación del tipo de deformación las cuales son deformaciones elásticas y deformaciones plásticas. Además de ésto, los cuerpos sólidos se pueden clasificar por su densidad en materiales homogéneos, materiales heterogéneos y, según sea el comportamiento mecánico en materiales isótropos y anisotrópicos.

#### Definición 1.10

La *elasticidad* es la propiedad que tienen los cuerpos de recuperar su forma primitiva al descargarlos de fuerzas externas, [31]. Se divide en dos tipos:

- ◇ Perfectamente elásticos: son aquellos que recuperan su forma inicial después de suprimir las fuerzas.
- ◇ Parcialmente elásticos: son aquellos que cuando desaparecen las fuerzas o momentos no retorna perfectamente a su estado inicial.

#### Definición 1.11

En la física e ingeniería, se denomina *tensión* a la fuerza dividida por unidad de área en el entorno de un punto muestral sobre una superficie real de un cuerpo o medio continuo, [31].

#### Definición 1.12

Se conoce como *deformación* cuando al actuar fuerzas externas sobre un sólido elástico este varía la posición relativa de las partículas que los componen, [31].

La deformación puede clasificarse en:

- ◇ *Deformación elástica o reversible*. Es el tipo de deformación en el que el cuerpo recupera su forma original al retirar la fuerza que le provoca la deformación.
- ◇ *Deformación plástica o irreversible*. Es el modo de deformación en que el material no regresa a su forma original después de retirar la carga aplicada.

Los cuerpos sólidos se clasifican por su densidad y su comportamiento mecánico. Por su densidad se dividen en:

- ◇ *Materiales homogéneos*: son aquellos que tienen la misma densidad en todo su dominio, como por ejemplo: la madera, el suelo por estratos, entre otros.
- ◇ *Materiales heterogéneos*: son aquellos que varían su densidad en todo su dominio.

Según el comportamiento mecánico, los cuerpos sólidos se dividen en:

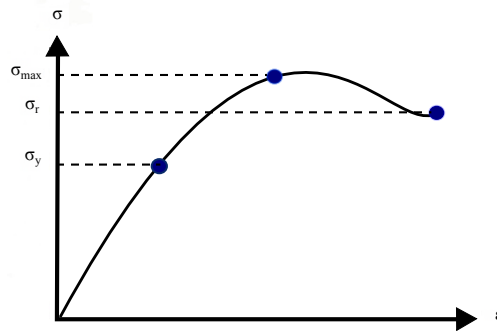
- ◇ *Materiales isótropos*<sup>1</sup>: son aquellos que presentan el mismo comportamiento mecánico en cualquier dirección del material. Por ejemplo, la madera, las rocas, entre otros.
- ◇ *Materiales anisótropos*<sup>2</sup>: son aquellos materiales que presentan comportamientos diferentes en cualquier dirección.

<sup>1</sup> Iso: igual, tropos: dirección.

<sup>2</sup> Ani: negación, Anisotrópo: dicho de un material que no es isótropo

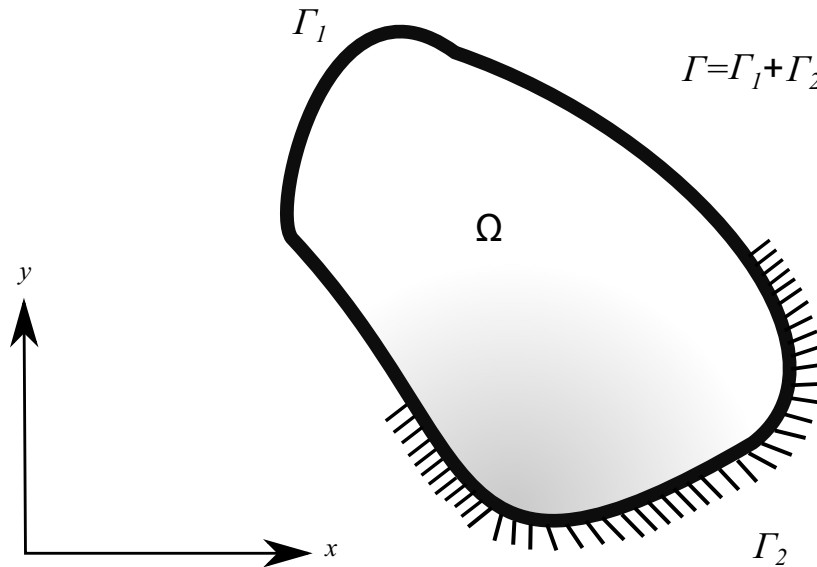
Para el presente trabajo no será considerada la estructura molecular de los cuerpos elásticos. Además, se supondrá que la materia del cuerpo elástico es *homogénea* distribuyéndose con continuidad en su volumen, de forma que cualquier elemento extraído de él, posee sus mismas propiedades físicas. Para simplificar los razonamientos se supondrá también que el cuerpo es *isótropo*, es decir, las propiedades elásticas son las mismas en todas las direcciones, (ver [13]).

Se entiende por material isótropo a aquellos sólidos cuya gráfica, representada por la curva esfuerzo/deformación ( $\sigma/\epsilon$ ), es de forma lineal hasta alcanzar su esfuerzo de cedencia  $\sigma_y$ , ver Figura 1.1.



**Figura 1.1:** Gráfica de esfuerzo  $\sigma$  vs deformación  $\epsilon$  donde  $\sigma_y$  es el esfuerzo de cedencia,  $\sigma_r$  esfuerzo de rotura y  $\sigma_{max}$  esfuerzo máximo.

## 1.5 Ecuaciones básicas en elasticidad.



**Figura 1.2:** La superficie total de la frontera  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ .

En lo que sigue se suponen problemas para los que el material se comporta linealmente y los cambios en la orientación del cuerpo en el estado deformado son insignificantes. Este último supuesto conduce a las relaciones de tensión-desplazamiento, también permite que las ecuaciones de equilibrio se remitirán a la geometría no deformada.

Se utilizará la notación indicial, además de la notación matricial, ya que de otro modo las fórmulas serán difíciles de escribir.

En mecánica sólida se necesita considerar las fuerzas o estados de tensión en el cuerpo y las deformaciones o estados de deformaciones, (ver [4]). Ambos estados están relacionados entre sí, aplicando el comportamiento del material o ecuaciones constitutivas, que establece la relación entre tensión y deformación.

### 1.5.1 Estado de tensión.

Definamos el estado de tensión en un punto  $x$ , en términos de las componentes de tensión. En principio se tienen nueve diferentes componentes que pueden ser agrupadas en un tensor de tensiones, es decir:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Estas componentes no son todas independientes, pero están relacionadas a través de las ecuaciones de equilibrio, que son de dos tipos: ecuaciones de momento y ecuaciones de componentes directas.

La ecuación de equilibrio de momento pueden ser escritas tomando momentos de las componentes de la tensión con respecto a un punto en el elemento diferencial y en el límite producir las llamadas *relaciones de corte complementarias*, es decir:

$$\sigma_{21} = \sigma_{12}; \quad \sigma_{31} = \sigma_{13}; \quad \sigma_{32} = \sigma_{23}. \quad (1.20)$$

El equilibrio de las fuerzas en las direcciones  $x_1, x_2$  y  $x_3$  producen las *ecuaciones de equilibrio de fuerzas* que deben ser satisfechas a través del dominio, es decir:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + b_1 = 0, \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + b_2 = 0, \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 = 0, \quad (1.23)$$

donde  $b_i$ , con  $i = 1, 2, 3$ , son las componentes de las fuerzas del cuerpo.

Para escribir estas ecuaciones de una manera más compacta necesitamos utilizar notación indicial. El conjunto de ecuaciones anteriores pueden ser escritas simplemente como:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0, \quad (1.24)$$

o de la siguiente manera:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0, \quad (1.25)$$

donde  $j = 1, 2, 3$ . Los índices internos, tales como  $j$ , varían primero y luego, el índice  $i$  que producen tres ecuaciones diferentes.

Las componentes de la tensión se proyectan en un diferencial de la frontera  $d\Gamma$  y producen intensidades de fuerza superficial o tracciones que se denotan por  $t_i$ , tal que:

$$t_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3, \quad (1.26)$$

$$t_2 = \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3, \quad (1.27)$$

$$t_3 = \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3, \quad (1.28)$$

donde  $n_1, n_2, n_3$  son los cosenos directores del ángulo que forma el vector normal  $\vec{n}$  con respecto a los ejes  $x_1, x_2, x_3$ , es decir,

$$n_1 = \cos(\vec{n}, x_1), \quad n_2 = \cos(\vec{n}, x_2), \quad n_3 = \cos(\vec{n}, x_3). \quad (1.29)$$

Las ecuaciones de  $t_1, t_2$  y  $t_3$ , pueden ser escritas de una forma más compacta con notación indicial:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j, \quad \text{en } \Gamma, \quad (1.30)$$

donde  $i, j = 1, 2, 3$ .

Las tracciones se supone que deben darse en una parte de la frontera  $\Gamma$ , (supongamos  $\Gamma_2$ , ver Figura 1.2), de la frontera y son las condiciones de contorno naturales para este problema. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} t_1 &= \bar{t}_1, \\ t_2 &= \bar{t}_2, \\ t_3 &= \bar{t}_3, \end{aligned} \quad \text{en } \Gamma_2. \quad (1.31)$$

Estas condiciones implican que las tracciones aplicadas  $\bar{t}_i$ , tienen que estar en equilibrio con las componentes de tracción obtenidas a partir de las tensiones internas en la frontera, es decir:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i, \quad \text{en } \Gamma_2. \quad (1.32)$$

### 1.5.2 Estado de deformación.

Las deformaciones de la frontera son funciones de los desplazamientos, que tienen las componentes,  $u_1, u_2$  y  $u_3$  en todos los puntos. Ellos producen deformación que, para los casos lineales son de dos tipos:

(1) *Deformaciones directas:*

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}. \quad (1.33)$$

(2) *Deformaciones de corte (ecuaciones de compatibilidad):*

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right). \quad (1.34)$$

Esta expresión puede ser escrita en notación indicial de la siguiente manera:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (1.35)$$

donde  $i, j = 1, 2, 3$ . Otra manera de expresar la ecuación anterior es la siguiente:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (1.36)$$

A veces el estado de deformación se define usando las componentes de deformación organizado en un tensor (tensor de deformación), es decir,

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad (1.37)$$

donde  $\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12}$ ,  $\varepsilon_{31} = \varepsilon_{13}$ ,  $\varepsilon_{32} = \varepsilon_{23}$ .

Es más sencillo aplicar condiciones de contorno, en términos de los desplazamientos en lugar de en función de las deformaciones. Por lo tanto, en  $\Gamma_1$  las siguientes condiciones esenciales pueden ser definidas:

$$u_1 = \bar{u}_1, \quad (1.38)$$

$$u_2 = \bar{u}_2, \quad \text{en } \Gamma_1. \quad (1.39)$$

$$u_3 = \bar{u}_3, \quad (1.40)$$

ó

$$u_j = \bar{u}_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad \text{en } \Gamma_1. \quad (1.41)$$

donde  $\bar{u}_i$  son los valores prescritos.

### 1.5.3 Relaciones constitutivas.

El estado de tensión y deformación en un cuerpo están relacionados a través de la tensión-deformación o ecuaciones constitutivas para el material. Para un material isotrópico, elástico y lineal se puede definir dos constantes, llamadas constantes de Lamé,  $\lambda$  y  $\mu$  que están asociadas con los componentes volumétricas y de corte. A continuación, la relación tensión-deformación puede ser expresada como:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (1.42)$$

donde  $\delta_{ij}$  es conocido como *delta de Kronecher*. Note que  $\varepsilon_{kk}$  tiene sólo índices internos, por lo tanto, implica una suma de las tres componentes directas de deformación:

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \quad (1.43)$$

por lo cual se llama la deformación volumétrica.

El inverso de la relación de tensión-deformación puede ser escrita como sigue:

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\lambda \delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}, \quad (1.44)$$

donde  $\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ .

La constante de Lamé puede ser expresada en términos del módulo de corte  $G$ , módulo de elasticidad<sup>3</sup>  $E$  y coeficiente de Poisson  $\nu$ , por las siguientes expresiones:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (1.45)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}. \quad (1.46)$$

<sup>3</sup>El módulo de elasticidad nos indica que tan rígido es un material.

El estrés y la tensión en términos de  $E$  y  $\nu$ , pueden ser escritos como:

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}, \quad (1.47)$$

y

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left[ \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + \varepsilon_{ij} \right]. \quad (1.48)$$

Para algunos problemas particulares (especialmente en mecánica de sólidos), se prefiere utilizar el módulo  $K$  mayor.

En estos casos se definen los componentes de tensión y deformación desviadora:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}, \quad (1.49)$$

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}. \quad (1.50)$$

Así, las ecuaciones constitutivas se expresan como:

$$\sigma'_{ij} = 2G\varepsilon'_{ij}, \quad (1.51)$$

$$p = -K\varepsilon_{kk}. \quad (1.52)$$

donde  $p$  es la presión media:

$$p = -\frac{\sigma_{kk}}{3}, \quad (1.53)$$

y

$$K = \lambda + \frac{2}{3}G = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (1.54)$$

En general, para todos los materiales elásticos isótropos, las constantes del material pueden expresarse en función de dos constantes independientes.

Las ecuaciones de equilibrio, relaciones de tensión-deformación y ecuaciones constitutivas, dan un completo sistema de ecuaciones a partir del cual se puede determinar las componentes de tensión, desplazamientos y deformaciones, (ver [4]).

## 1.6 Integración numérica.

En los cursos de cálculo se describen muchas técnicas para evaluar integrales exactamente, pero estas técnicas apenas pueden utilizarse para evaluar integrales que surgen en los problemas que aparecen en el mundo físico; para esto necesitamos métodos de aproximación de integrales. Estos métodos se llaman genéricamente métodos de cuadratura porque cuadratura es la palabra clásica para denominar el cálculo de áreas.



El problema básico considerado por la integración numérica es calcular una solución aproximada a la integral definida:

$$\int_a^b f(x) dx$$

donde  $f$  es una función integrable en el intervalo acotado  $[a, b]$ .

Ahora describimos tres situaciones en las que es necesario calcular aproximaciones a integrales definidas. La primera, el caso en el que la primitiva de la función  $f$  no se puede expresar en términos de funciones elementales. La segunda situación se debe al caso en que la primitiva se puede escribir, pero es tan complicada que se desea la aplicación de un método de cuadratura para su evaluación numérica. La tercera situación se da cuando el integrando se conoce solo puntualmente; por ejemplo, como resultado de una medición experimental. El último caso también aparece cuando se aplican los métodos de cuadratura al tratamiento numérico de ecuaciones diferenciales o integrales.

Se aproximará  $f$  por un polinomio de interpolación  $p_m$  en un conjunto de nodos  $x_0, x_1, \dots, x_m$  y calcularemos exactamente  $\int_a^b p_m(x) dx$ , de manera que  $\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_m(x) dx$ , obteniéndose así fórmulas de cuadratura numérica. Además, los errores de interpolación tienen una fórmula explícita para las cotas del error, (ver [10]). Se pueden obtener las cotas del error para las fórmulas de cuadratura.

Se introducen algunas fórmulas simples que son casos particulares de una familia mayor de fórmulas de cuadratura conocidas como *fórmulas de Newton-Cotes*. Para un conocimiento más complejo de esta familia de fórmulas se puede consultar [2].

### 1.6.1 Reglas de cuadratura básicas.

Comenzamos considerando un grupo de fórmulas de cuadratura que están basadas en evaluaciones de funciones en nodos equiespaciados. Hay dos tipos básicos, que depende de si los valores de la función en los extremos del intervalo de integración se utilizan o no. La regla del punto medio es el ejemplo más simple de fórmula de Newton-Cotes abierta, en la que los extremos de integración no se utilizan. Las reglas del trapecio de Cavalieri-Simpson son ejemplos de fórmulas de Newton-Cotes cerradas, en las que los extremos de integración se utilizan.

El caso más simple que se puede dar es cuando solo se utiliza un nodo,  $x_0$ . En este caso,  $p_0(x) = f(x_0)$ , por lo que la integral en el intervalo  $[a, b]$  se aproxima por,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_0(x) dx = \int_a^b f(x_0) dx = (b-a)f(x_0).$$

Gráficamente, si  $f$  es no negativa, lo que se hace es aproximar el área bajo la curva  $y = f(x)$ , comprendida entre  $x = a$  y  $x = b$ , por el área del rectángulo de base  $b - a$  y altura  $f(x_0)$ . Las elecciones más usuales son  $x_0 = a$ ,  $x_0 = b$  y  $x_0 = \frac{a+b}{2}$ . En el primer y segundo caso las fórmulas de cuadratura se llaman respectivamente regla del rectángulo a izquierda y regla de rectángulo a derecha. En el último caso la fórmula de cuadratura se llama regla del punto medio.

El error para la regla del punto medio viene dado por la integral de la fórmula del error para polinomio de interpolación  $p_0$ . Puede probarse, (ver [12]), que el error (de truncamiento local) de esta regla de cuadratura es:  $E_{PM} = \frac{f''(w)}{24} (b-a)^3$ , donde  $w \in (a, b)$ , siempre que  $f \in C^2[a, b]$ .

En caso de utilizar dos nodos la fórmula de cuadratura es conocida como regla del trapecio; y si se consideran tres nodos se obtiene una de las fórmulas de cuadratura más importantes la regla de Cavalieri–Simpson [10].

### 1.6.2 Reglas de cuadratura compuestas.

En la subsección anterior hemos tratado las nociones básicas que sustentan la integración numérica, pero las técnicas que hemos estudiado no son satisfactorias en muchos problemas. La hipótesis de que el intervalo sea pequeño para esperar un error pequeño podría ser muy poco razonable. No hay motivo, en general, para suponer que el intervalo  $[a, b]$  sobre en que se integra es pequeño y, si no lo es, la elevada potencia de  $(b - a)$  en la fórmula del error dominará, probablemente, los cálculos.

Se resuelve el problema de un intervalo de integración grande  $[a, b]$  subdividiéndolo en una colección de intervalos que sean lo suficientemente pequeños para que podamos mantener bajo control el error en cada uno de ellos. Al sumar todos los resultados parciales se obtiene una fórmula de aproximación de la integral en  $[a, b]$ , dando lugar así a las llamadas reglas de cuadratura compuestas. El error en las fórmulas de cuadratura compuestas es entonces la suma de los errores de las fórmulas simples usadas en los subintervalos en los que se ha dividido  $[a, b]$ .

#### Cuadratura gaussiana.

Las reglas de cuadratura básicas se han construido integrando polinomios de interpolación. La fórmula de error del polinomio de interpolación de grado  $m$  contiene la derivada de orden  $m + 1$  de la función a aproximar. Puesto que la derivada  $(m + 1)$ -ésima de todo polinomio de grado  $\leq m$  es cero, al aplicar fórmulas de este tipo a dichos polinomios, obtenemos un resultado exacto.

Todas las reglas de cuadratura básicas utilizan valores de la función en puntos igualmente espaciados. Esto resulta conveniente a la hora de combinar las fórmulas para generar las reglas compuestas, pero esta restricción puede disminuir significativamente la exactitud de la aproximación.

Además, las reglas de cuadratura básicas son ejemplos de una fórmula de cuadratura más general de la forma:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^m w_i f(x_i).$$

Los números reales  $\{w_i\}$  son los pesos de cuadratura, mientras que los puntos  $\{x_i\}$  son los nodos de cuadratura. En la cuadratura gaussiana se consideran fórmulas de integración numérica como la anterior, pero utilizando nodos que no están igualmente espaciados en el intervalo; se eligen los nodos  $\{x_i\}$  en el intervalo  $[a, b]$  y los pesos  $\{w_i\}$  de manera que minimice el error que se espera obtener en las aproximaciones. Para minimizar este error esperable, supongamos que la mejor elección de estos valores es la que produce resultados exactos para una clase más amplia de polinomios. Una elección adecuada de los  $m + 1$  nodos proporciona fórmulas de cuadratura numérica exactas para polinomio de grado  $\leq 2m + 1$ , dando lugar así a las fórmulas de cuadratura gaussiana.

Los pesos  $\{w_i\}$  de la fórmula anterior son arbitrarios y la única restricción sobre los nodos  $\{x_i\}$  es que deben estar en el intervalo de integración  $[a, b]$ . Esto da  $2(m + 1)$  parámetros a elegir. Si ahora imponemos que sea exacta para los polinomios  $1, x, x^2, \dots, x^{2m+1}$  (que son los polinomios de grado  $\leq 2m + 1$ ), obtenemos, mediante el método de los coeficientes indeterminados, un sistema no lineal de  $2(m + 1)$  ecuaciones con  $2(m + 1)$  incógnitas.

Ahora bien, la utilización del método de los coeficientes indeterminados no resulta práctica para obtener fórmulas de cuadratura con grado de exactitud superior. Hay un método alternativo para obte-

ner más fácilmente los nodos y los pesos de estas fórmulas que dan resultado exacto para polinomios de grado superior. Se consideran familias de polinomios especiales, llamados *polinomios ortogonales*, que tienen la propiedad de que en cierta integral definida del producto de dos polinomios ortogonales cualesquiera de la familia es cero.

La familia relevante para nuestro problema es la de los *polinomios de Legendre* en el intervalo  $[-1, 1]$ . Estos polinomios pueden calcularse recursivamente mediante la siguiente relación de tres términos:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, & L_1(x) &= x, \\ L_{k+1}(x) &= \frac{2k+1}{k+1}xL_k(x) - \frac{k}{k+1}L_{k-1}(x), & k &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Todo polinomio de grado  $\leq m$ , para cada  $m \geq 0$ , se puede obtener mediante una combinación lineal de los polinomios  $L_0, L_1, \dots, L_m$ . El máximo grado de exactitud es  $2m+1$  y se obtiene para la llamada cuadratura de Gauss-Legendre, cuyo nodos y pesos están dados por:

$$\begin{aligned} x_i &= \text{ceros de } L_{m+1}(x), \\ w_i &= \frac{2}{(1-x_i^2)(L'_{m+1}(x_i))^2}, \quad i = 0, 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Los pesos  $\{w_i\}$  son todos positivos y los nodos  $\{x_i\}$  son interiores al intervalo  $(-1, 1)$ . Si  $f \in C^{(2m+2)}([-1, 1])$ , el correspondiente error es [24]:

$$E_{GL} = \frac{2^{2m+3}((m+1)!)^4}{(2m+3)((2m+2)!)^3} f^{(2m+2)}(\xi), \quad \text{con } \xi \in (-1, 1).$$

Esto completa la solución del problema de aproximación de integrales definidas para funciones en el intervalo  $[-1, 1]$ . Ahora bien, esta solución es suficiente para cualquier intervalo cerrado porque la sencilla relación lineal,

$$t = \frac{2x - a - b}{b - a} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{b - a}{2}t + \frac{b + a}{2},$$

transforma la variable  $x$  del intervalo  $[a, b]$ , en la variable  $t$  del intervalo  $[-1, 1]$ . Entonces podemos utilizar los polinomios de Legendre para aproximar,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right) dt.$$



# 2

## Método de elementos frontera.

Una de las técnicas que permiten resolver de forma rápida y eficaz el problema que hemos planteado en este trabajo, es el Método de Elementos de Frontera, (BEM, por Boundary Element Method), el cual es un método numérico empleado para resolver ecuaciones en derivadas parciales que han sido formuladas como ecuaciones integrales.

En este capítulo se presenta el esquema para representar estas ecuaciones integrales en elasticidad plana, el cual se desarrolla a partir de la simetría de las tensiones y deformaciones de un problema dado, se determina la identidad de Somigliana, la cual permite determinar los campos variables a través de los campos conocidos sobre la frontera del dominio  $\Omega$ . La aplicación de la identidad de Somigliana requiere saber como son las funciones que componen dicha identidad; estas relacionan los campos de desplazamientos y tensiones.

Partiendo de las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y relaciones de tensión- deformación, se obtendrán las ecuaciones de Navier, estas son las ecuaciones que gobiernan el problema de elasticidad plana que nos hemos planteado. Para esta ecuación diferencial debe existir una solución, esta solución se denomina solución fundamental de la función de Green, por lo que se requiere un material homogéneo e isotrópico y con un comportamiento lineal, (ver [13]). La solución fundamental debe satisfacer tres condiciones:

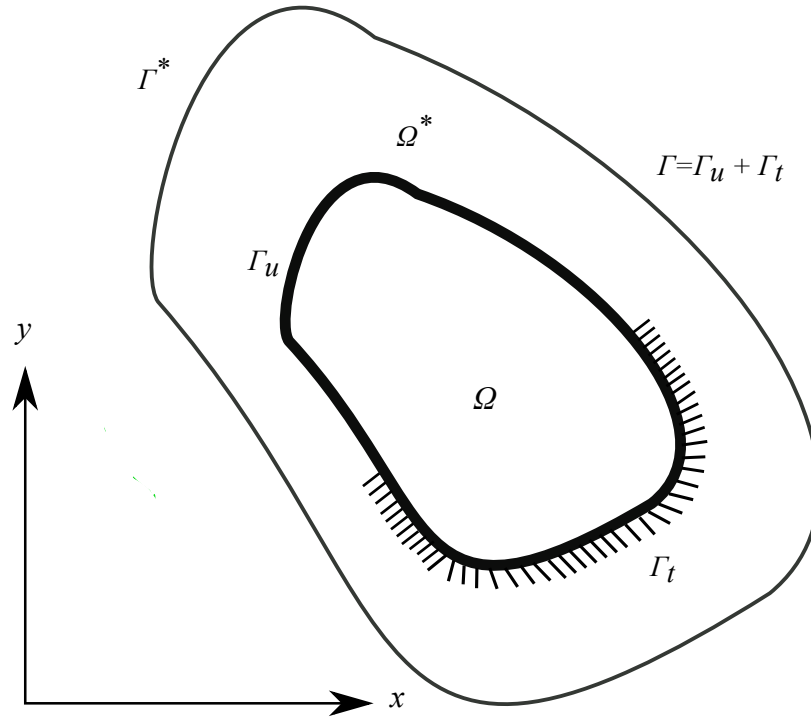
- ◊ La ley constitutiva,
- ◊ Equilibrio de la conservación de la energía,
- ◊ Compatibilidad o continuidad.

Esta solución dará lugar a los campos de desplazamientos y de tensiones en el punto de un medio isotrópico infinito, resultante de la aplicación de una fuerza unitaria en un punto de dicho medio infinito dado.

Adicionalmente, en este capítulo, se desarrollan las soluciones necesarias para el cálculo de los campos variables en puntos internos del dominio y la determinación de tensiones en la frontera.

### 2.1 La identidad de Somigliana.

Considerese un dominio elástico, homogéneo e isotrópico,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , limitado por una frontera  $\Gamma$ . El contorno  $\Gamma$  está, a su vez, dividido en dos subfronteras:  $\Gamma_u$ , conocida como frontera cinemática, en el cual se conocen los campos de desplazamientos, y  $\Gamma_t$ , denominada frontera elástica, donde son conocidos



**Figura 2.1:** Cuerpo finito, elástico, isótropo y homogéneo.

los campos de tensiones, (ver [4], [7]). Nótese que  $\Gamma$  representa la frontera total y es igual a  $\Gamma_u + \Gamma_t$ , según se muestra en la Figura 2.1. Así, las condiciones de contorno pueden ser expresadas como:

$$u_i(\vec{x}) = \bar{u}_i(\vec{x}) \quad \text{en } \Gamma_u, \quad (2.1)$$

$$t_i(\vec{x}) = \bar{t}_i(\vec{x}) \quad \text{en } \Gamma_t, \quad (2.2)$$

donde  $i = 1, 2$  y  $\vec{x} \in \Gamma$ . Adicionalmente, considérese que el medio está sujeto a ciertas fuerzas de masa  $f_i(\vec{x})$ , con  $\vec{x} \in \Omega$ . El equilibrio, bajo estas condiciones, queda establecido con la aparición de campos de desplazamiento  $u_i(\vec{x})$  y de tensiones  $t_i(\vec{x})$  en la frontera con  $x \in \Gamma$ , además de los campos de desplazamiento  $u_i(\vec{x})$ , deformaciones  $\varepsilon_{ij}(\vec{x})$  y tensiones  $\sigma_{ij}(\vec{x})$  en el dominio  $\Omega$ , con  $\vec{x} \in \Omega$ .

Considérese que el dominio  $\Omega$  está incluido en un dominio  $\Omega^*$ , el cual puede ser extendido al infinito. Dicho dominio exhibe las mismas características elásticas que  $\Omega$  cuya frontera definiremos  $\Gamma^*$ , como se muestra en la Figura 2.1. Este nuevo dominio  $\Omega^*$  se supone que está en un estado de equilibrio, caracterizado por los campos  $u_i^*(\vec{x})$ ,  $t_i^*(\vec{x})$ ,  $\sigma_{ij}^*(\vec{x})$  y por las fuerzas de masa  $f_i^*(\vec{x})$ . En consecuencia, considerando la simetría de los tensores de tensiones y deformaciones, es posible escribir:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(\vec{x}) \varepsilon_{ij}^*(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}) = \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\vec{x}) \sigma_{ij}^*(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}), \quad (2.3)$$

expresión que se conoce como el *primer teorema de Betti ó teorema de Maxwell-Betti* (ver [5]), que se enuncia como sigue:

“En un sólido elástico, el trabajo realizado en un sistema de fuerzas  $\vec{f}_i$ , al aplicar un sistema de fuerzas  $\phi_j$ , es igual al trabajo realizado por el sistema  $\phi_j$  al aplicar el sistema  $\vec{f}_i$ ”.

Asumiremos que existe la solución para  $\sigma_{ij}$ , que satisface la ecuación gobernante y la solución en equilibrio elástico. La suposición es válida para aproximar soluciones, pues el estado de la tensión dentro del cuerpo será dado por una combinación de la solución para el campo denotado con \* que se define en equilibrio estático.

Recordando la simetría del tensor de deformaciones:

$$\varepsilon_{ij}(x) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(x) + u_{j,i}(x)),$$

al sustituirlo en (2.3), se obtiene:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(x) u_{i,j}^*(x) d\Omega(x) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^*(x) u_{i,j}(x) d\Omega(x). \quad (2.4)$$

Integrando ambos lados de (2.4) y aplicando el método de integración por partes, tomando en cuenta:

$$\begin{aligned} u &= \sigma_{ij}(\vec{x}), & dv &= u_{i,j}^*(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}), \\ du &= \sigma_{ij,j}(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}), & v &= \int_{\Omega} u_{i,j}^*(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}) = - \int_{\Gamma} u_i^*(\vec{x}) n_j(\vec{x}) d\Gamma(\vec{x}). \end{aligned}$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}(\vec{x}) u_i^*(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}) + \int_{\Gamma} \sigma_{ij}(\vec{x}) n_j(\vec{x}) u_i^*(\vec{x}) d\Gamma(\vec{x}) \\ = \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^*(\vec{x}) u_i(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}) + \int_{\Gamma} \sigma_{ij,j}^*(\vec{x}) n_j(\vec{x}) u_i(\vec{x}) d\Gamma(\vec{x}). \end{aligned}$$

Las ecuaciones de equilibrio, se escriben como  $\sigma_{ij,j}(x) = f_i(x)$ , con  $x \in \Omega$  y  $t_i(x) = \sigma_{ij}(x) n_j$ , con  $x \in \Gamma$ , y sustituyendo en la ecuación integral anterior, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f_i^*(\vec{x}) u_i(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}) + \int_{\Gamma} t_i^*(\vec{x}) u_i(\vec{x}) d\Gamma(\vec{x}) \\ = \int_{\Omega} f_i(\vec{x}) u_i^*(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}) + \int_{\Gamma} t_i(\vec{x}) u_i^*(\vec{x}) d\Gamma(\vec{x}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

expresión que se conoce como el *segundo teorema de Betti*.

Es necesario definir una función auxiliar para expresar  $f_i^*(x)$ , la cual es de la forma:

$$f_i^*(\vec{\xi}) = \Delta(\vec{\xi}, \vec{x}) e_i, \quad i = 1, 2, \quad (2.6)$$

con  $\vec{\xi} \in \Omega$ , según las direcciones  $e_i$  de los ejes cartesianos globales, y la expresión  $\Delta(\vec{\xi}, \vec{x})$  es la delta de Dirac que se define como:

$$\Delta(\vec{\xi}, \vec{x}) \equiv \begin{cases} \infty & \text{si } \vec{x} = \vec{\xi}, \\ 0 & \text{si } \vec{x} \neq \vec{\xi}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Dicha expresión tiene como propiedad que para cualquier función regular  $g(\vec{x})$ , se tiene

$$\int_{\Omega} g(\vec{x}) \Delta(\vec{\xi}, \vec{x}) d\Omega = g(\vec{\xi}). \quad (2.8)$$

El primer miembro de (2.5) puede ser escrito a través de (2.6) y (2.8) como:

$$\int_{\Omega} f_i^*(\vec{x}) u_i(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}) = \int_{\Omega} \Delta(\vec{\xi}, \vec{x}) e_i u_i(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}) = u_i(\vec{\xi}), \quad (2.9)$$

donde  $\vec{x}, \vec{\xi} \in \Omega$ . Por otro lado, los campos de desplazamientos y tensiones,  $u_j^*(\vec{x})$  y  $t_j^*(\vec{x})$ , pueden escribirse como:

$$u_j^*(\vec{x}) = u_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) e_i, \quad t_j^*(\vec{x}) = t_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) e_i, \quad (2.10)$$

siendo  $u_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) e_i$  y  $t_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) e_i$  funciones que proporcionan el desplazamiento y la tensión que se producen en el punto  $\vec{x}$  en dirección  $j$  cuando se aplica una carga unitaria en el punto  $\vec{\xi}$  en dirección  $i$ .

Sustituyendo ahora (2.9) y (2.10) en (2.5), se obtiene:

$$u_i(\vec{\xi}) + \int_{\Gamma} t_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) u_j(\vec{x}) d\Gamma(\vec{x}) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) t_j(\vec{x}) d\Gamma(\vec{x}) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) f_j(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}). \quad (2.11)$$

Finalmente, despejando  $u_i(\vec{\xi})$  de (2.11) se obtiene una ecuación que es conocida como *ecuación de Somigliana* para los desplazamientos:

$$u_i(\vec{\xi}) = \int_{\Gamma} [u_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) t_j(\vec{x}) - t_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) u_j(\vec{x})] d\Gamma(\vec{x}) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) f_j(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}), \quad (2.12)$$

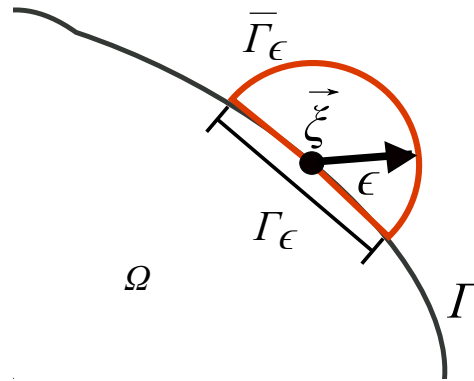
donde  $\vec{\xi}, \vec{x} \in \bar{\Omega}$ .

Así pues, la solución del problema elástico se puede obtener a través de (2.12), en función de los campos de desplazamientos y tensiones en el contorno del dominio  $\Omega$  y de fuerzas de masa  $f_i(\vec{x})$  conocidas. Una vez obtenida la solución en el contorno  $\Gamma$ , se determinan los campos requeridos en el dominio  $\Omega$ , aplicando la ecuación integral (2.12).



### 2.1.1 Identidad de Somigliana para puntos en el contorno.

Dado que el problema elástico va a ser tratado en función de su contorno  $\Gamma$ , se debe obtener una expresión alternativa de (2.12) referida exclusivamente al punto  $\vec{\xi}$  en la frontera. Por tanto, consideremos un punto  $\vec{\xi} \in \Gamma$  en el centro del círculo con radio  $\epsilon$ , como se muestra en la Figura 2.2.



**Figura 2.2:** Caso límite cuando se considera un círculo de radio  $\epsilon$  y centro el punto  $\vec{\xi} \in \Gamma$ .

La ecuación (2.12) puede escribirse de la forma,

$$u_i(\vec{\xi}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_{\epsilon} + \bar{\Gamma}_{\epsilon}} [u_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) t_j(\vec{x}) - t_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) u_j(\vec{x})] d\Gamma(\vec{x}) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) f_j(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}) \right\}. \quad (2.13)$$

En general y para una superficie cualquiera, se cumplirá que,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_{\epsilon} - \Gamma_{\epsilon}} u_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) t_j(\vec{x}) d\Gamma(\vec{x}) = 0, \quad (2.14)$$

con lo cual la expresión (2.13) queda expresada como,

$$u_i(\vec{\xi}) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) t_j(\vec{x}) d\Gamma(\vec{x}) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) f_j(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Gamma - \Gamma_{\epsilon}} t_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) u_j(\vec{x}) d\Gamma(\vec{x}) + \int_{\bar{\Gamma}_{\epsilon}} t_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) u_j(\vec{x}) d\Gamma(\vec{x}) \right]. \quad (2.15)$$

La integración sobre  $\bar{\Gamma}_{\epsilon}$  puede ser transformada sumando y restando la expresión,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_{\epsilon}} t_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) u_j(\vec{x}) d\Gamma(\vec{x}). \quad (2.16)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} t_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) u_j(\vec{x}) d\Gamma(\vec{x}) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} t_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) [u_j(\vec{x}) - u_j(\vec{\xi})] d\Gamma(\vec{x}) \\ &+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} t_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) u_j(\vec{\xi}) d\Gamma(\vec{x}). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Debido a que la función de desplazamientos  $u_j(\vec{x})$  es continua, la primera integral del segundo miembro de (2.17) desaparece,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} t_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) u_j(\vec{x}) d\Gamma(\vec{x}) = u_j(\vec{\xi}) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} t_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) d\Gamma(\vec{x}). \quad (2.18)$$

La tercera integral en (2.15) debe ser considerada en el sentido del valor principal de Cauchy y su existencia se demuestra si  $u_j(\vec{x})$  satisface la *condición de Hölder* en el punto  $\vec{\xi}$ , de tal forma que:

$$|u_j(\vec{x}) - u_j(\vec{\xi})| \leq B \|\vec{x} - \vec{\xi}\|^\alpha, \quad (2.19)$$

donde  $B$  y  $\alpha$  son constantes positivas.

Tomando en cuenta lo anterior, y sustituyendo (2.18) en (2.15), se obtiene la identidad de Somigliana para puntos sobre el contorno  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} c_{ij}(\vec{\xi}) u_j(\vec{\xi}) &= \int_{\Gamma} [u_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) t_j(\vec{x}) - t_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) u_j(\vec{x})] d\Gamma(\vec{x}) \\ &+ \int_{\Omega} u_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) f_j(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}), \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde la integral

$$\int_{\Gamma} t_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) u_j(\vec{x}) d\Gamma(\vec{x}), \quad (2.21)$$

con  $\vec{x}, \vec{\xi} \in \Gamma$ , debe ser también considerada en el sentido del valor principal de Cauchy y

$$c_{ij}(\vec{\xi}) = \delta_{ij} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} t_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) d\Gamma(\vec{x}), \quad (2.22)$$

siendo  $\delta_{ij}$  el delta de Kronecker.

Los elementos de  $c_{ij}(\vec{\xi})$  no tienen mayores dificultades para ser calculados. En el caso más simple, si la normal al contorno  $\Gamma$  en el punto está unívocamente definida, es decir, el contorno es regular en  $\vec{\xi}$ ,  $c_{ij}(\vec{\xi})$  toma los valores:

$$c_{ij}(\vec{\xi}) = \frac{1}{2} \delta_{ij}. \quad (2.23)$$

En el caso contrario, se dispone de fórmulas adecuadas en la literatura técnica para la evaluación de  $c_{ij}(\vec{\xi})$  en contornos bidimensionales y tridimensionales. Adicionalmente, existe la alternativa de evaluar  $c_{ij}(\vec{\xi})$  haciendo uso de consideraciones de movimiento de cuerpo rígido.

## 2.2 Soluciones fundamentales.

La aplicación de la identidad de Somigliana (2.22) requiere saber como son las funciones  $u_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x})$  y  $t_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x})$ , las cuales relacionan los campos de desplazamientos y tensiones, respectivamente, en el punto  $\vec{x}$  con la aplicación de un sistema unitario de cargas sobre el punto  $\vec{\xi}$ . Tales funciones son debidas a Claude-Louis Marie Henri Navier y Sir George Gabriel Stokes<sup>1</sup> y corresponden a las soluciones singulares de la ecuación de Navier, (ver [4], [7]).

Considere la siguiente ecuación,

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0, \quad (2.24)$$

donde  $b_i = \Delta(\vec{\xi}, \vec{x})e_i$ .

Sustituyendo las relaciones tensión-deformación, es decir,

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{mm} + \varepsilon_{ij} \right], \quad (2.25)$$

y las relaciones de tensión-desplazamiento (1.36) en (2.24) obteniendo lo siguiente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ 2\mu \left( \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{1}{2} [u_{m,m}^* + u_{m,m}^*] + \frac{1}{2} [u_{i,j}^* + u_{j,i}^*] \right) \right] + b_i &= 0, \\ 2\mu \left( \frac{\nu}{1-2\nu} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} [\delta_{ij} u_{m,m}^*] + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} [u_{i,j}^* + u_{j,i}^*] + b_i &= 0, \\ 2\mu \left( \frac{\nu}{1-2\nu} \right) \delta_{ij} u_{m,mj}^* + \mu (u_{i,jj}^* + u_{j,ij}^*) + b_i &= 0, \quad \text{si } i = j, \\ \mu \left[ \frac{1}{1-2\nu} - 1 \right] \delta_{ij} u_{m,mj}^* + \mu [u_{i,jj}^* + u_{j,ij}^*] + b_i &= 0, \\ \left( \frac{1}{1-2\nu} \right) u_{m,mj}^* + u_{i,jj}^* + \frac{b_i}{\mu} &= 0, \quad \text{si } i = j. \end{aligned}$$

Luego, la ecuación de Navier, (ver[4],[7],[14]), puede escribirse para una carga puntual en un medio infinito, como,

$$\frac{1}{1-2\nu} u_{j,ji}^* + u_{i,jj}^* + \frac{1}{E} b_i = 0, \quad (2.26)$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad y  $b_i = \Delta e_i$  es el delta de Dirac tomado en el punto de aplicación de la carga unitaria.

A continuación, definiremos una función  $g_i(\vec{x})$ , vector de Galerkin referido al punto  $\vec{x}$ , que se le supondrá continuo hasta la cuarta derivada. Así, el campo de desplazamientos en  $\vec{\xi}$  quedará expresado como:

$$u_i^*(\vec{\xi}, \vec{x}) = g_{i,kk}(\vec{x}) - \frac{1}{2(1-\nu)} g_{k,ik}(\vec{x}). \quad (2.27)$$

<sup>1</sup>En 1822 Navier modifica las ecuaciones de Euler para fluidos; aunque su razonamiento fue incorrecto, obtuvo las ecuaciones y, más tarde, en 1842, Stokes deduce por medio de un razonamiento correcto las ecuaciones que 20 años antes Navier había obtenido y extendió la teoría.

Sustituyendo (2.27) en (2.26), se obtiene:

$$\frac{1}{1-2\nu} \left( g_{j,kkji}(\vec{x}) - \frac{1}{2(1-\nu)} g_{k,jkji}(\vec{x}) \right) + g_{i,kkjj}(\vec{x}) - \frac{1}{2(1-\nu)} g_{k,ikjj}(\vec{x}) + \frac{1}{E} \Delta e_i = 0, \quad (2.28)$$

Haciendo uso de:

$$\begin{aligned} g_{k,jkji}(\vec{x}) &= g_{k,jjki}(\vec{x}), \\ g_{k,ikjj}(\vec{x}) &= g_{k,jjki}(\vec{x}), \end{aligned} \quad (2.29)$$

se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-2\nu} g_{j,kkji}(\vec{x}) - \frac{1}{(1-2\nu)2(1-\nu)} g_{k,jjki}(\vec{x}) + g_{i,kkjj}(\vec{x}) - \frac{1}{2(1-\nu)} g_{k,jjki}(\vec{x}) &= 0, \\ \frac{1}{1-2\nu} g_{j,kkji}(\vec{x}) + g_{i,kkjj}(\vec{x}) - \left[ \frac{1}{(1-2\nu)2(1-\nu)} + \frac{1}{2(1-\nu)} \right] g_{k,jjki}(\vec{x}) &= -\frac{1}{E} \Delta e_i, \\ \frac{1}{1-2\nu} g_{j,kkji}(\vec{x}) + g_{i,kkjj}(\vec{x}) - \frac{1}{1-2\nu} g_{k,jjki}(\vec{x}) &= -\frac{1}{E} \Delta e_i, \\ \frac{1}{1-2\nu} (g_{j,kkji}(\vec{x}) - g_{k,jjki}(\vec{x})) + g_{i,kkjj}(\vec{x}) &= -\frac{1}{E} \Delta e_i. \end{aligned}$$

Finalmente, luego de utilizar el supuesto de continuidad hasta la cuarta derivada, tenemos que:

$$g_{i,kkjj}(\vec{x}) = -\frac{1}{E} \Delta e_i. \quad (2.30)$$

La solución de (2.30) tiene la expresión

$$g_i(\vec{x}) = \frac{1}{8\pi E} \left\| \vec{r}(\vec{\xi}, \vec{x}) \right\|^2 \ln \left[ \frac{1}{\left\| \vec{r}(\vec{\xi}, \vec{x}) \right\|} \right] e_i, \quad (2.31)$$

donde  $\vec{r}$  es el vector posición entre  $\vec{\xi}$  y  $\vec{x}$ .

$$u_i(\vec{\xi}, \vec{x}) = \frac{\partial^2 g_i(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 g_i(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j},$$

donde el vector  $\vec{r}(\vec{\xi}, \vec{x})$  viene dado por,

$$\vec{r}(\vec{\xi}, \vec{x}) = \vec{r}(\vec{x}) - \vec{r}(\vec{\xi}). \quad (2.32)$$

Por otra parte,  $r = \left\| \vec{r}(\vec{\xi}, \vec{x}) \right\|$  es el módulo de la distancia entre  $\vec{\xi}$  y  $\vec{x}$  definida por

$$r = \left\| \vec{r}(\vec{\xi}, \vec{x}) \right\| = \sqrt{(x_{\vec{\xi}} - x_{\vec{x}})^2 + (y_{\vec{\xi}} - y_{\vec{x}})^2}, \quad (2.33)$$

Sustituyendo (2.31) en (2.27), (ver [13], [14]), obtenemos lo siguiente:

$$u_i^* = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{8\pi E} r^2 \ln \left( \frac{1}{r} \right) \right) \right] - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{8\pi E} r^2 \ln \left( \frac{1}{r} \right) \right) \right]. \quad (2.34)$$

Luego de realizar las manipulaciones adecuadas obtenemos una expresión para el vector desplazamiento:

$$u_i^*(\vec{\xi}, \vec{x}) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)E} \left[ (3-4\nu) \ln \left( \frac{1}{r} \right) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right] e_i. \quad (2.35)$$

Es conveniente separar las componentes del vector desplazamiento en un tensor de funciones, es decir,

$$u_i^*(\vec{\xi}, \vec{x}) = u_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) e_j, \quad (2.36)$$

$$u_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)E} \left[ (3-4\nu) \ln \left( \frac{1}{r} \right) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right]. \quad (2.37)$$

Luego, para  $t_{ij}^*$  conviene recordar que,

$$\begin{aligned} t_i^* &= \sigma_{ij}^* n_j, \\ \sigma_{ij}^* &= \frac{2E\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^* \delta_{ij} + 2E\varepsilon_{ij}^*, \\ \varepsilon_{ij}^* &= \frac{1}{2} (u_{i,j}^* + u_{j,i}^*). \end{aligned}$$

Sustituyendo la expresión de  $\sigma_{ij}^*$  en la de  $t_i^*$  obtenemos que:

$$t_i^* = E \left[ u_{i,n}^* + u_{j,i}^* n_j + \frac{2\nu}{1-2\nu} u_{j,j}^* n_i \right]. \quad (2.38)$$

Sustituyendo (2.35) en (2.38), obtenemos la expresión para  $t_{ij}^*$ ,

$$t_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \frac{1}{r} \left[ [(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i} r_{,j}] r_{,n} - (1-2\nu)(r_{,i} n_j - r_{,j} n_i) \right]. \quad (2.39)$$

Para considerar los casos de tensión plana basta sustituir  $\nu := \frac{\nu}{1+\nu}$  en las ecuaciones anteriores. La derivada del vector normal,  $\partial r / \partial n$  está dada por:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial n}, \quad (2.40)$$

donde las derivadas de las coordenadas  $x_i$  e  $x_j$  con respecto al vector normal son las componentes del vector normal unitario exterior en la dirección  $i$  e  $j$ ,  $n_i$  y  $n_j$ , es decir,

$$n_i = \frac{\partial x_i}{\partial n} \quad \text{y} \quad n_j = \frac{\partial x_j}{\partial n}. \quad (2.41)$$

Las derivadas parciales del vector distancia,  $r(\vec{\xi}, \vec{x})$ , son dadas por:

$$r_{,x} = \frac{\partial r(\vec{\xi}, \vec{x})}{\partial x} = \frac{x_{\vec{\xi}} - x_{\vec{x}}}{r} \quad \text{y} \quad r_{,y} = \frac{\partial r(\vec{\xi}, \vec{x})}{\partial y} = \frac{y_{\vec{\xi}} - y_{\vec{x}}}{r}. \quad (2.42)$$

## 2.3 Análisis en el contorno y en los puntos internos.

### 2.3.1 Tensiones en el contorno.

En la literatura técnica existen, básicamente, dos alternativas para evaluar las tensiones en la frontera del dominio. La primera de ellas consiste en obtener una relación límite de la expresión (2.18), haciendo tender el punto de carga  $\vec{\xi}$  hacia la frontera. Sin embargo, este método presenta el inconveniente de que las integrales resultantes exhiben fuertes singularidades y, por tanto, son difícilmente integrables.

El segundo método, consiste en definir un sistema local de ejes auxiliares  $\bar{e}_i$ , donde el plano definido por  $\bar{e}_1$  y  $\bar{e}_2$  sea tangente a la frontera en el punto  $\vec{\xi}$  y  $\bar{e}_3 = n(\vec{\xi})$ , ( $\bar{e}_3$  es el vector normal exterior al plano que forman  $\bar{e}_1$  y  $\bar{e}_2$ ). Así, las componentes del tensor de deformaciones puede ser evaluado en tales ejes locales, obteniendo,

$$\bar{\epsilon}_{ij}(\vec{\xi}) = \frac{1}{2} \left( \bar{u}_{i,j}(\vec{\xi}) + \bar{u}_{j,i}(\vec{\xi}) \right), \quad i = 1, 2, \quad (2.43)$$

donde  $\bar{u}_{i,j}(\vec{\xi})$  se obtiene derivando el campo de desplazamiento  $u_i(\vec{\xi})$ , obtenido al resolver el problema, con respecto a los ejes auxiliares locales  $\bar{e}_j$  con  $j = 1, 2, 3$ .

Al introducir (2.21) en las relaciones tensión-deformación se obtienen las componentes del tensor de tensiones en el contorno.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij}(\vec{\xi}) &= 2G \left[ \bar{\epsilon}_{ij}(\vec{\xi}) + \delta_{ij} \frac{\nu}{1-2\nu} \bar{\epsilon}_{kk}(\vec{\xi}) \right], \\ \bar{\sigma}_{ij}(\vec{\xi}) &= 2G \left[ \bar{\epsilon}_{ij}(\vec{\xi}) + \delta_{ij} \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \bar{\epsilon}_{11}(\vec{\xi}) + \bar{\epsilon}_{22}(\vec{\xi}) + \bar{\epsilon}_{33}(\vec{\xi}) \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{si } i \neq j &\implies \sigma_{ij}(\vec{\xi}) = 2G \bar{\epsilon}_{ij}(\vec{\xi}) \\ \text{si } i = j &\implies \sigma_{ii}(\vec{\xi}) = 2G \left[ \bar{\epsilon}_{ij}(\vec{\xi}) + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \bar{\epsilon}_{11}(\vec{\xi}) + \bar{\epsilon}_{22}(\vec{\xi}) + \bar{\epsilon}_{33}(\vec{\xi}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Así, para el caso de elasticidad plana (deformación plana), (ver [4]), se tiene:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{11}(\vec{\xi}) &= \frac{1}{(1-\nu)} \left[ \nu \bar{\sigma}_{22}(\vec{\xi}) + 2G\bar{\varepsilon}_{11}(\vec{\xi}) \right], \\ \bar{\sigma}_{12}(\vec{\xi}) &= \bar{t}_1(\vec{\xi}), \\ \bar{\sigma}_{22}(\vec{\xi}) &= \bar{t}_2(\vec{\xi}),\end{aligned}\quad (2.45)$$

y para tensión plana se debe hacer la respectiva sustitución:

$$\nu := \frac{\bar{\nu}}{1+\bar{\nu}}. \quad (2.46)$$

### 2.3.2 Análisis de puntos interiores.

Los campos de desplazamientos en puntos  $\vec{\xi}$  pertenecientes al dominio  $\Omega$  pueden ser evaluados directamente mediante la ecuación de Somigliana (2.12).

Sin embargo, para la determinación de los campos de tensiones en puntos interiores del dominio  $\Omega$  es necesario obtener el tensor de deformaciones  $\varepsilon_{ij}(\vec{\xi})$  derivando (2.12).

Así, se puede escribir,

$$\varepsilon_{ij}(\vec{\xi}) = \int_{\Gamma} [u_{ijk}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) t_k(\vec{x}) - t_{ijk}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) u_k(\vec{x})] d\Gamma(\vec{x}) + \int_{\Omega} u_{ijk}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) f_k(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}), \quad (2.47)$$

donde los operadores  $u_{ijk}^*(\vec{\xi}, \vec{x})$  y  $t_{ijk}^*(\vec{\xi}, \vec{x})$  son el resultado de derivar las funciones  $u_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x})$  y  $t_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x})$  respecto de las direcciones  $e_k$  y tomados en el punto de carga  $\vec{\xi}$ .

Introduciendo (2.47) en las relaciones tensión-deformación, las cuales se expresan como:

$$\sigma_{ij}(\vec{\xi}) = 2E \left[ \varepsilon_{ij}(\vec{\xi}) + \delta_{ij} \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}(\vec{\xi}) \right], \quad (2.48)$$

se obtiene la expresión deseada para determinar las tensiones  $\sigma_{ij}(\vec{\xi})$ :

$$\sigma_{ij}(\vec{\xi}) = \int_{\Gamma} [D_{ijk}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) t_k(\vec{x}) - S_{ijk}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) u_k(\vec{x})] d\Gamma(\vec{x}) + \int_{\Omega} D_{ijk}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) f_k(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}), \quad (2.49)$$

donde los tensores de tercer orden  $D_{ijk}^*(\vec{\xi}, \vec{x})$  y  $S_{ijk}^*(\vec{\xi}, \vec{x})$ , tienen las siguientes expresiones:

$$D_{ijk}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) = \frac{1}{4\alpha\pi r^\alpha(1-\nu)} [(1-2\nu)(\delta_{jk}r_{,i} + \delta_{ik}r_{,j} - \delta_{ij}r_{,k}) + \beta r_{,i}r_{,j}r_{,k}], \quad (2.50)$$

y

$$\begin{aligned}S_{ijk}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) &= \frac{E}{2\alpha\pi r^\beta(1-\nu)} \{ \beta r_{,n} [(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) \\ &\quad - \gamma r_{,i}r_{,j}r_{,k}] + \beta\nu(n_i r_{,j}r_{,k} + n_j r_{,i}r_{,k}) + (1-2\nu)(\beta n_k r_{,i}r_{,j} \\ &\quad + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \},\end{aligned}\quad (2.51)$$

siendo  $\alpha = 1, 2$ ;  $\beta = 2, 3$  y  $\gamma = 4, 5$  en dos y tres dimensiones, respectivamente. Más información acerca de estas expresiones pueden encontrarse en la siguientes bibliográficas ([4],[7],[13]).

### 2.3.3 Consideración de fuerzas de dominio.

La ecuación integral de Somigliana (2.20) presenta un término correspondiente al dominio del cuerpo, el cual se denominará de ahora en adelante  $F_i(\vec{\xi})$ , donde:

$$F_i(\vec{\xi}) = \int_{\Omega} u_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) f_j(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}). \quad (2.52)$$

La ecuación (2.52) refleja la contribución de las fuerzas de masa que actúan sobre el volumen de un cuerpo deformable, conocidas como  $f_i$ , sobre la solución de contorno (2.20), provocando la necesidad de dividir el dominio en celdas de integración para poder evaluar tal contribución.

Sin embargo, en algunos casos particulares como peso propio, fuerzas centrífugas y régimen estacionario de variación de temperaturas, es posible transformar (2.52) en una integral de frontera.

Aquí sólo nos limitaremos a describir el caso de peso propio, aunque los otros dos casos de fuerzas de masa pueden ser tratados de forma similar.

La ecuación (2.52) donde se define la solución fundamental  $u_{ij}^*$  a través de un vector de Galerkin  $g_{ij}^*$ ,

$$u_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) = g_{ij,kk}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) - \frac{1}{2(1-\nu)} g_{ik,kj}^*(\vec{\xi}, \vec{x}), \quad (2.53)$$

donde para el caso bidimensional, se tiene,

$$g_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) = \frac{1}{8\pi E} \left\| \vec{r}(\vec{\xi}, \vec{x}) \right\|^2 \ln \left( \frac{1}{\left\| \vec{r}(\vec{\xi}, \vec{x}) \right\|} \right) \delta_{ij}. \quad (2.54)$$

La sustitución de (2.54) produce una solución fundamental distinta de la obtenida en (2.37), por lo tanto,

$$u_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) = \frac{1}{8\pi E(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln(r^{-1}) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} - \left( \frac{7-8\nu}{2} \right) \delta_{ij} \right]. \quad (2.55)$$

El término adicional  $((7-8\nu)/2)\delta_{ij}$  debe ser considerado cuando se evalúen las fuerzas de masa. En el caso de peso propio, se tiene que un cuerpo de densidad de masa  $\rho$  sometido a un campo gravitacional constante  $G_j(\vec{\xi}, \vec{x})$ , experimenta una fuerza de volumen constante igual a

$$f_j(\vec{\xi}, \vec{x}) = \rho G_j(\vec{\xi}, \vec{x}). \quad (2.56)$$

Sustituyendo ahora (2.53) en (2.52) y en vista de (2.56), se obtiene

$$\begin{aligned} F_i(\vec{\xi}) &= \int_{\Gamma} \left[ g_{ij,k}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) - \frac{1}{2(1-\nu)} g_{ik,j}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) \right] f_j(\vec{x}) d\Gamma(\vec{x}), \\ F_i(\vec{\xi}) &= f_j(\vec{x}) \int_{\Gamma} \left[ g_{ij,k}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) - \frac{1}{2(1-\nu)} g_{ik,j}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) \right] n_k d\Gamma(\vec{x}), \end{aligned} \quad (2.57)$$



la cual puede ser reescrita como:

$$F_i(\vec{\xi}) = \int_{\Gamma} B_i^*(\vec{\xi}, \vec{x}) d\Gamma(\vec{x}), \quad (2.58)$$

donde, para el caso de dos dimensiones (deformación plana), se tiene:

$$B_i^*(\vec{\xi}, \vec{x}) = \frac{r}{8\pi E} \left[ (2\ln(r^{-1}) - 1)(f_i n_k r_{,k} - \frac{1}{2(1-\nu)} f_k r_{,k} n_i) \right]. \quad (2.59)$$

La determinación de tensiones en puntos interiores del dominio se realiza mediante la expresión (2.49), modificando previamente la integral extendida al dominio  $\Omega$ . Así, (2.49) quedaría como:

$$\sigma_{ij}(\vec{\xi}) = \int_{\Gamma} [D_{ijk}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) t_k(\vec{x}) - S_{ijk}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) u_k(\vec{x})] d\Gamma(\vec{x}) + \int_{\Gamma} \bar{D}_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) d\Gamma(\vec{x}), \quad (2.60)$$

en la cual, para elasticidad (deformación) plana, se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{D}_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) = & \frac{1}{8\pi} \left\{ 2n_k r_{,k} (f_i r_{,j} + f_j r_{,i}) + \frac{1}{1-\nu} [\nu \delta_{ij} (2n_k r_{,k} f_s r_{,s}) \right. \\ & + (1 - 2\ln(r^{-1})) f_k n_k] - f_k r_{,k} (n_i r_{,j} + n_j r_{,i}) \\ & \left. + \frac{1-2\nu}{2} (1 - 2\ln(r^{-1})) (f_i n_j + f_j n_i) \right\}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

De nuevo, aquí todas las derivadas  $r_{,i}$  y las normales  $n_i$  son tomadas respecto al punto del campo  $\vec{x}$ .



# 3

## Implementación numérica del BEM en elasticidad plana.

El algoritmo numérico empleado para el desarrollo e implementación del modelo teórico en el computador, es un aspecto que reviste especial importancia por diversas razones entre las cuales se puede destacar dos: (i) reducir errores derivados de la aproximación de la geometría y las condiciones de contorno en el problema real; y (ii) la evaluación suficientemente precisa de las integrales singulares que aparecen por causa de la solución fundamental.

En este capítulo se describe un algoritmo apropiado para la implementación del BEM, que satisfaga los requerimientos usuales de rapidez, precisión y optimización en el uso de la memoria del computador.

Adicionalmente, se indica la manera de interpolar los campos de variables desconocidas sobre la frontera a través de una familia de funciones de forma.

El sistema de ecuaciones integrales que se deriva de la aplicación de la identidad de Somigliana es descrito en detalle. De la misma manera, se presentan nuevas fórmulas de integración numérica que permiten reducir sustancialmente los errores derivados de la evaluación de las integrales singulares.

Finalmente, se detalla la forma de obtener los campos de variables en el dominio y en la frontera, una vez obtenida la solución en el contorno del problema.

### 3.1 Discretización.

El proceso de discretización es el primer paso para buscar la solución. Como su nombre lo indica este proceso permite pasar de funciones continuas como incógnitas, a valores discretos. Los elementos unidimensionales son usados para la descripción de un contorno en el plano  $xy$ . El primer paso en la descripción es especificar un número de nodos sobre la frontera como se muestra en la Figura 3.1. Empezaremos explicando el caso de elementos de contorno lineales, donde cada uno de ellos conectan dos nodos, cuyas posiciones son definidas en coordenadas cartesianas. Para cada elemento es conveniente definir una coordenada local (intrínseca)  $\xi$ , la cual indica la dirección del elemento, que vale cero en el centro y  $\pm 1$  en los extremos.

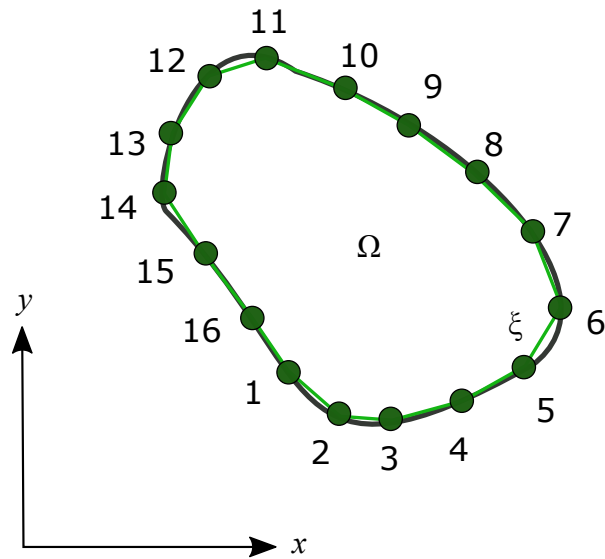


Figura 3.1: Dominio aproximado por elementos lineales.

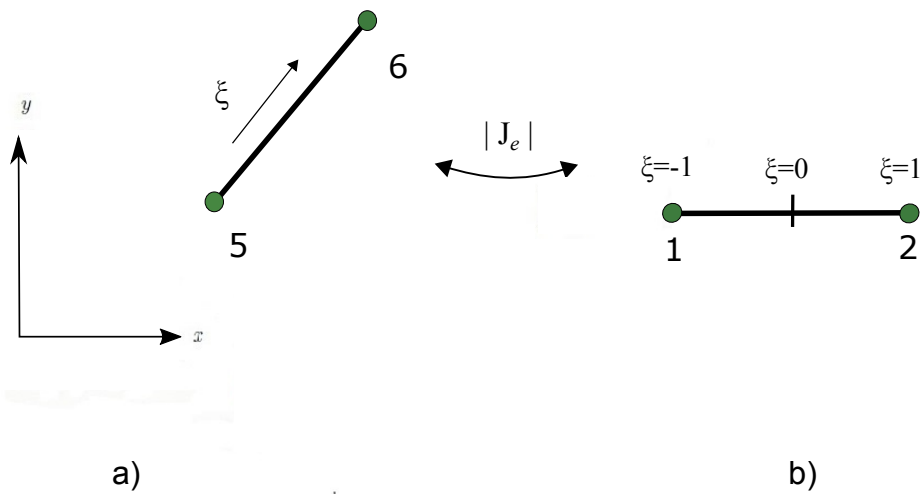


Figura 3.2: Elementos lineales con coordenadas: a) globales y b) locales.

Es fácil verificar que las coordenadas cartesianas de un punto sobre un elemento genérico  $e$  con la coordenada intrínseca  $\xi$  son dadas por:

$$x(\xi) = \frac{x_5 + x_6}{2} + \frac{x_6 - x_5}{2}\xi \quad y \quad y(\xi) = \frac{y_5 + y_6}{2} + \frac{y_6 - y_5}{2}\xi. \quad (3.1)$$

Estas ecuaciones pueden verificarse sustituyendo  $\xi = -1$  y  $\xi = +1$  para obtener las coordenadas de

los nodos 5 y 6. Si se realiza,

$$\left. \begin{array}{l} x_5 = x_1^e \\ y_5 = y_1^e \end{array} \right\} = \text{Nodo 1 del elemento } e, \quad \left. \begin{array}{l} x_6 = x_2^e \\ y_6 = y_2^e \end{array} \right\} = \text{Nodo 2 del elemento } e,$$

se establece un vínculo entre la numeración local y la global de los nodos.

Los números globales de los nodos que pertenecen al elemento están referidos al denominado *elemento de incidencia ó elemento de conectividad*. En el ejemplo de la Figura 3.2, la conectividad del elemento genérico  $e$  es 5, 6. La secuencia en que los números de los nodos del elemento son introducidos, más adelante serán significativos, pues esto afectará la dirección del vector normal. De ahora en adelante se trabajará con la numeración global del sistema y se usará el elemento de incidencia para llevar las coordenadas a valores globales.

Podemos escribir la ecuación (3.1) como sigue:

$$x(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)x_1^e + \frac{1}{2}(1 + \xi)x_2^e, \quad y(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)y_1^e + \frac{1}{2}(1 + \xi)y_2^e, \quad (3.2)$$

ó de forma abreviada,

$$\left\{ \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right\} = \sum_{n=1}^L F^{(n)}(\xi) \left\{ \begin{array}{l} x_n^e \\ y_n^e \end{array} \right\}, \quad (3.3)$$

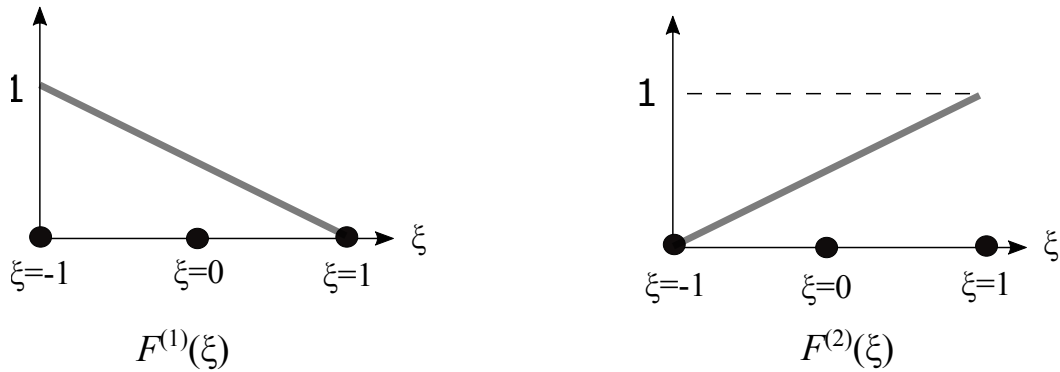
donde  $L$  es el número de nodos sobre el elemento y  $F^{(n)}$  son las funciones de forma del elemento. La ecuación (3.3) puede escribirse en notación matricial como,

$$\vec{x} = \sum_{n=1}^L F^{(n)}(\xi) \vec{x}_n^e. \quad (3.4)$$

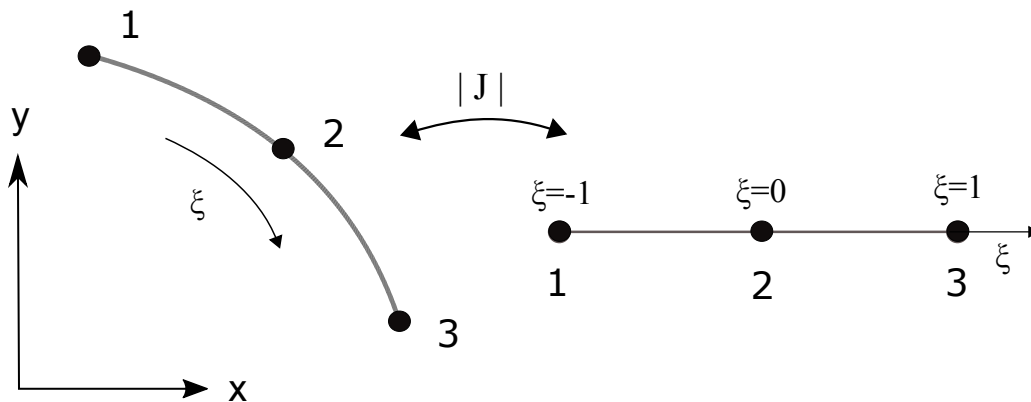
donde  $\vec{x}$  es un vector que indica las coordenadas de un punto sobre el elemento  $e$  y  $\vec{x}_n^e$  es un vector que indica las coordenadas del  $n$ -ésimo nodo del elemento  $e$ .

Para un elemento de dos nodos, (ver Figura 3.3), las funciones de forma se definen como:

$$F^{(1)}(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad F^{(2)}(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi). \quad (3.5)$$



**Figura 3.3:** Funciones de forma para elementos lineales.



**Figura 3.4:** Elementos cuadráticos con coordenadas *a)* global y *b)* local.

Las funciones de forma pueden ser también expresadas por,

$$F^{(n)}(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi_n \xi), \quad (3.6)$$

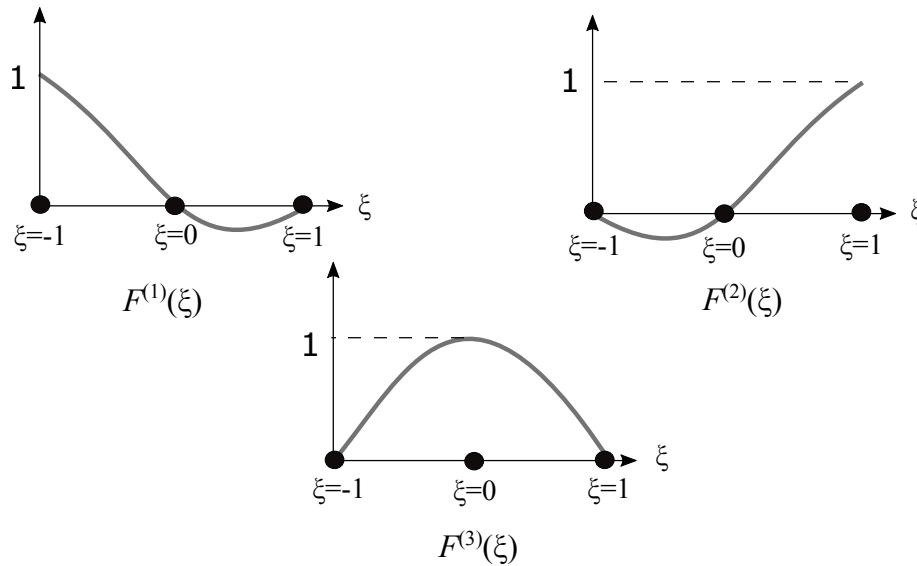
donde las coordenadas locales del segundo nodo son,

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -1 \\ \xi_2 &= 1. \end{aligned}$$

Funciones de formas más complicadas aparecen cuando agregamos más nodos al elemento, como es el caso de elementos con tres nodos y consideramos funciones de forma cuadrática. La coordenada  $\xi$  sigue la función de forma, curvilínea y el nodo medio está ubicado en  $\xi = 0$ . La función de forma asociada

es una parábola, la cual vale uno en el nodo medio y cero en los nodos de los extremos, (como se muestra en la Figura 3.5), esto es,

$$F^{(3)}(\xi) = 1 - \xi^2, \quad (3.7)$$



**Figura 3.5:** Funciones de forma para elementos cuadráticos.

Las funciones de forma para un elemento cuadrático son:

$$F^{(1)}(\xi) = \frac{1}{2}(\xi - 1)\xi, \quad F^{(3)}(\xi) = 1 - \xi^2, \quad F^{(2)}(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi)\xi. \quad (3.8)$$

Las funciones de forma de los nodos de las esquinas se obtiene restando la mitad de la función de forma del nodo central de cada una de las funciones de forma lineales como sigue:

$$F^{(n)}(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi_n \xi) - \frac{1}{2}\xi \quad n = 1, 2, 3. \quad (3.9)$$

Hasta ahora las funciones de forma presentadas no han sido obtenidas matemáticamente pero si intuitivamente. La función de forma obtenida de esta manera son llamadas *funciones Serendipia*<sup>1</sup>. Se puede ver que las funciones de forma obtenidas hasta ahora cumplen con las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} F^{(n)}(\xi_n) &= 1, \\ F^{(n)}(\xi_i) &= 0, \quad \text{para } i \neq n, \\ \sum_{n=1}^3 F^{(n)}(\xi) &= 1. \end{aligned} \quad (3.10)$$

<sup>1</sup>Una serendipia es un descubrimiento o un hallazgo afortunado e inesperado que se produce cuando se está buscando otra cosa distinta

Es posible obtener la deducción matemática de funciones que satisfacen las condiciones definidas en (3.10), usando polinomios de Lagrange. Para un elemento parabólico las funciones de forma de Lagrange son definidas como:

$$L_i(\xi) = A_{i1}A_{i2}A_{i3},$$

donde,

$$\begin{aligned} A_{in} &= \frac{\xi - \xi_n}{\xi_i - \xi_n}, \quad \text{para } i \neq n, \\ A_{in} &= 1, \quad \text{para } i = n. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Las funciones de forma Serendipia y las de Lagrange son idénticas en el caso unidimensional. Sin embargo, los polinomios de Lagrange serán usados para construir las funciones de forma para los elementos en dos dimensiones, el cual difiere de las funciones de forma de Serendipia.

En resumen, la formulación presentada anteriormente permite definir elementos de contornos que varían desde segmentos rectos con 2 nodos hasta segmentos de tercer orden con 4 nodos con el simple requerimiento de adicionar los nodos intermedios necesarios.

Cabe destacar que en el caso de nuestro trabajo se utilizarán elementos cuadráticos, ya que permiten modelar la geometría del problema matemático que nos hemos planteado de manera más eficaz.

## 3.2 Interpolación.

Con la finalidad de establecer la interpolación del elemento, para así definir la geometría del sólido deformable que se quiere modelar, es necesario especificar la variación de los desplazamientos y las tensiones en un elemento. A continuación se presenta los tres tipos de interpolación que se pueden considerar, así como una descripción de elementos isoparamétricos que es el tipo de interpolación a considerar en este trabajo.

### 3.2.1 Tipos de interpolación.

1. Si la discretización de geometría en coordenadas globales es de orden menor a la discretización en coordenadas locales se conoce como una interpolación *subparamétrica*.
2. Si la discretización de geometría en coordenadas globales es de orden igual a la discretización en coordenadas locales se conoce como una interpolación *isoparamétrica*.
3. Si la discretización de geometría en coordenadas globales es de orden mayor a la discretización en coordenadas locales se conoce como una interpolación *superparamétrica*.

### 3.2.2 Elementos isoparamétricos.

En lo que sigue los desplazamientos y tensiones pueden ser interpoladas para los valores en los puntos nodales de la siguiente forma llamada interpolación isoparamétrica,

$$u_i(\xi) = \sum_{n=1}^L F^{(n)}(\xi) u_i^{(n)} \text{ en } \Gamma_u, \quad (3.12)$$

$$t_i(\xi) = \sum_{n=1}^L F^{(n)}(\xi) t_i^{(n)} \text{ en } \Gamma_t, \quad (3.13)$$



y

$$x_i(\xi) = \sum_{n=1}^L F^{(n)}(\xi) x_i^{(n)} \text{ en } \Gamma, \quad (3.14)$$

donde  $u_i^{(n)}, t_i^{(n)}$  y  $x_i^{(n)}$  son los valores de las cantidades en el  $n$ -ésimo nodo del elemento, el índice  $i$  indica los grados de libertad<sup>2</sup> que posee cada punto sobre el elemento, por lo que, como este trabajo se desarrolla en elasticidad plana,  $i = 1, 2$ , y  $F^{(n)}(\xi)$  son las funciones de forma.

### 3.3 Representación paramétrica de la geometría en el contorno.

Es necesario disponer de una expresión para determinar el vector normal a la frontera y una expresión para el jacobiano.

Si se calcula la derivada de la expresión (3.14) con respecto a la variable intrínseca  $\xi$ , se obtendrá la expresión para el vector tangente al contorno:

$$s_i(\xi) = \frac{dx_i(\xi)}{d\xi} = \sum_{n=1}^L \frac{dF^{(n)}(\xi)}{d\xi} x_i^{(n)}, \quad (3.15)$$

y, en consecuencia, al calcular el determinante del vector obtenido, tenemos el jacobiano de forma inmediata, esto es,

$$J(\xi) = |s_i(\xi)| = \left[ \left( \frac{dx_1(\xi)}{d\xi} \right)^2 + \left( \frac{dx_2(\xi)}{d\xi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.16)$$

Por lo tanto, en el problema que se puede plantear serán las componentes de la normal exterior a la frontera:

$$n_1(\xi) = \frac{s_2(\xi)}{J(\xi)}, \quad n_2(\xi) = \frac{s_1(\xi)}{J(\xi)}. \quad (3.17)$$

### 3.4 Sistema de ecuaciones integrales.

Consideremos la discretización de la frontera presentada anteriormente en la identidad de Somigliana (2.12), donde se supone las fuerzas de masa nulas. Por lo tanto,

$$c_{ij}(\vec{\xi}) u_j(\vec{\xi}) = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Gamma_e} [u_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) t_j(\vec{x}) - t_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) u_j(\vec{x})] d\Gamma(\vec{x}). \quad (3.18)$$

Obsérvese que la notación explícita se ha empleado en esta ecuación, mostrando que las soluciones fundamentales son dos funciones del punto fuente  $\vec{\xi}$  (punto de integración) y del punto de muestra superficial  $\vec{x}$  (punto de colocación), consideremos las integrales:

$$\int_{\Gamma_e} u_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) t_j(\vec{x}) d\Gamma(\vec{x}), \quad (3.19)$$

<sup>2</sup>Grado de libertad matemática o dimensión, es un número relacionado con las propiedades métricas o topológicas de un objeto matemático.

y

$$\int_{\Gamma_e} t_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) u_j(\vec{x}) d\Gamma(\vec{x}). \quad (3.20)$$

Implementando la discretización de los campos de variables conocidas sobre la frontera, tenemos,

$$\int_{\Gamma_e} u_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) t_j(\vec{x}) d\Gamma_e(\vec{x}) = \int_{\Gamma_e} u_{ij}^* \left[ \sum_{n=1}^3 F^{(n)}(\xi) t_i^{(n)} \right] d\Gamma_e(\vec{x}), \quad (3.21)$$

$$\int_{\Gamma_e} t_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) u_j(\vec{x}) d\Gamma_e(\vec{x}) = \int_{\Gamma_e} t_{ij}^* \left[ \sum_{n=1}^3 F^{(n)}(\xi) u_i^{(n)} \right] d\Gamma_e(\vec{x}). \quad (3.22)$$

En estas expresiones, se puede observar que los valores del punto nodal en la  $i$ -ésima componente del desplazamiento y la tensión no son funciones de la variable de integración, por lo tanto, estas pueden salir de la integral.

La evaluación de estos términos requiere el uso del jacobiano debido al cambio de coordenadas globales del sistema cartesiano a coordenadas locales del sistema gaussiano. Para una curva como la presentada en la Figura 3.4, la transformación es simple, usando (3.23),

$$d\Gamma_e = \left[ \left( \frac{dx_1(\xi)}{d\xi} \right)^2 + \left( \frac{dx_2(\xi)}{d\xi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\xi = J d\xi. \quad (3.23)$$

Por lo tanto, (3.21) y (3.22) se reescriben de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} u_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) t_j(\vec{x}) d\Gamma(\vec{x}) &= \left\{ \int_{-1}^1 u_{ij}^* F^{(1)} J d\xi \right\}^{(e)} t_i^{(1)} + \left\{ \int_{-1}^1 u_{ij}^* F^{(2)} J d\xi \right\}^{(e)} t_i^{(2)} \\ &+ \left\{ \int_{-1}^1 u_{ij}^* F^{(3)} J d\xi \right\}^{(e)} t_i^{(3)} \\ &= \left\{ \int_{\Gamma_e} u_{ij}^* [F^{(1)} \quad F^{(2)} \quad F^{(3)}] J d\xi \right\}^{(e)} \left\{ \begin{matrix} t_i^{(1)} \\ t_i^{(2)} \\ t_i^{(3)} \end{matrix} \right\}^{(e)}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} t_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{x}) u_j(\vec{x}) d\Gamma(\vec{x}) &= \left\{ \int_{-1}^1 t_{ij}^* F^{(1)} J d\xi \right\}^{(e)} u_i^{(1)} + \left\{ \int_{-1}^1 t_{ij}^* F^{(2)} J d\xi \right\}^{(e)} u_i^{(2)} \\ &+ \left\{ \int_{-1}^1 t_{ij}^* F^{(3)} J d\xi \right\}^{(e)} u_i^{(3)} \\ &= \left\{ \int_{\Gamma_e} t_{ij}^* [F^{(1)} \quad F^{(2)} \quad F^{(3)}] J d\xi \right\}^{(e)} \left\{ \begin{matrix} u_i^{(1)} \\ u_i^{(2)} \\ u_i^{(3)} \end{matrix} \right\}^{(e)}, \end{aligned}$$

Es importante notar que las ecuaciones anteriores contienen una mezcla de notación indicial y matricial. El índice  $i$  en estas ecuaciones es un índice repetido que requiere ser sumado, mientras que el índice  $j$  es un índice libre representando la dirección de la coordenada en el cual la carga unitaria asociada a la solución fundamental actual. Esta notación puede ser homogeneizada para producir un formato puramente matricial, considerando la siguiente relación:

$$\begin{aligned}
 t_{ij}^* [F^{(1)} \quad F^{(2)} \quad F^{(3)}] \begin{Bmatrix} u_i^{(1)} \\ u_i^{(2)} \\ u_i^{(3)} \end{Bmatrix} &= t_{1j}^* [F^{(1)} \quad F^{(2)} \quad F^{(3)}] \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_1^{(3)} \end{Bmatrix} \\
 &\quad + t_{2j}^* [F^{(1)} \quad F^{(2)} \quad F^{(3)}] \begin{Bmatrix} u_2^{(1)} \\ u_2^{(2)} \\ u_2^{(3)} \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} t_{1j}^* & t_{2j}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^{(1)} & 0 & F^{(2)} & 0 & F^{(3)} & 0 \\ 0 & F^{(1)} & 0 & F^{(2)} & 0 & F^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} t_{11}^* & t_{21}^* \\ t_{12}^* & t_{22}^* \end{pmatrix} [F] \{u\} \\
 &= [T]^T [F] \{u\}.
 \end{aligned}$$

En la expresión anterior,  $[T]^T$  es la matriz transpuesta de la matriz de soluciones fundamentales de tensiones,  $[F]$  es una matriz de funciones de interpolación y  $\{u\}$  es el vector columna de desplazamientos con seis componentes, dos por nodo para un elemento particular  $e$ .

Un proceso análogo, puede establecerse para la expresión restante, involucrando  $[U]^T$  y el vector  $\{t\}$ , donde  $[U]^T$  es la matriz transpuesta de la matriz de soluciones fundamentales para el desplazamiento y  $\{t\}$  es un vector columna de tensiones de seis componentes, dos por nodo para un elemento  $e$ .

La discretización completa de la ecuación integral de frontera puede ser escrita como,

$$\sum_{e=1}^{N_e} [B]^{(d,e)} \{t\}^{(e)} = \sum_{e=1}^{N_e} [A]^{(d,e)} \{u\}^{(e)} + [C]^T \{u(\xi)\}, \quad (3.24)$$

donde,

$$[A]^{(d,e)} = \left\{ \int_{-1}^1 [T]^T [F] J d\xi \right\}^{(e)}, \quad (3.25)$$

$$[B]^{(d,e)} = \left\{ \int_{-1}^1 [U]^T [F] J d\xi \right\}^{(e)}, \quad (3.26)$$

$$(\{u\}^{(e)})^T = \left\{ u_1^{(1)} \quad u_2^{(1)} \quad u_1^{(2)} \quad u_2^{(2)} \quad u_1^{(3)} \quad u_2^{(3)} \right\}^{(e)}, \quad (3.27)$$

$$\{\mathbf{t}\}^{(e)T} = \left\{ t_1^{(1)} \quad t_2^{(1)} \quad t_1^{(2)} \quad t_2^{(2)} \quad t_1^{(3)} \quad t_2^{(3)} \right\}^{(e)}, \quad (3.28)$$

$$[C] = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

y

$$\{\mathbf{u}(\xi)\} = \begin{Bmatrix} u_1(\xi) \\ u_2(\xi) \end{Bmatrix}. \quad (3.30)$$

Obsérvese que las matrices  $[A]$  y  $[B]$  en (3.25) y (3.26), respectivamente, son  $2 \times 6$ . Esto significa que las integrales representan realmente veinticuatro (24) integrales (doce por cada una de las matrices).

Si las funciones restantes aparecen dentro de la integral en estas ecuaciones son todas conocidas, estas integraciones se pueden calcular para producir las relaciones algebraicas que implican las matrices  $[A]^{(d,e)}$  y  $[B]^{(d,e)}$ . Es importante mencionar, que estas integraciones implican integrandos que son los productos de soluciones fundamentales, funciones de interpolación y jacobianos. Cuando el punto fuente o de carga de la solución fundamental se encuentra cerca o sobre el elemento de contorno a considerar, este producto experimenta dramáticas variaciones en estos valores. De esta manera, se debe ser cuidadoso con este comportamiento en el proceso de integración.

Es también posible desarrollar una discretización de la formulación sobre el contorno en la notación indicial. Realmente, la forma en notación indicial del proceso de discretización tiene un aspecto más aerodinámico. La forma de la matriz fue presentada primero pues, es la más usada en la literatura de BEM. Para desarrollar la forma indicial, la convención de suma es aplicada a la ecuación (3.14).

Sustituyendo la ecuación (3.14) en el lado izquierdo de la ecuación (3.21) y (3.22), tenemos:

$$A_{ijn}^{(d,e)} \left( u_i^{(n)} \right)^{(e)} = \left\{ \int_{-1}^1 t_{ij}^* F^{(n)} J d\xi \right\}^{(e)} \left( u_i^{(n)} \right)^{(e)}, \quad (3.31)$$

$$B_{ijn}^{(d,e)} \left( t_i^{(n)} \right)^{(e)} = \left\{ \int_{-1}^1 u_{ij}^* F^{(n)} J d\xi \right\}^{(e)} \left( t_i^{(n)} \right)^{(e)}, \quad (3.32)$$

donde no se realiza ninguna suma sobre el elemento  $(e)$ . Además,

- ◇  $i$  es la  $i$ -ésima dirección de la respuesta,
- ◇  $j$  es la  $j$ -ésima dirección del punto de colocación  $\vec{x}$ ,
- ◇  $n$  indica el  $n$ -ésimo nodo sobre el elemento,
- ◇  $d$  indica la  $d$ -ésima posición del punto de colocación  $\vec{x}$ ,
- ◇  $e$  indica el  $e$ -ésimo elemento a considerar.

Sustituyendo estas dos ecuaciones en la ecuación (3.18) obtenemos,

$$\sum_{e=1}^{N_e} B_{ijn}^{(d,e)} \left( t_i^{(n)} \right)^{(e)} = \sum_{e=1}^{N_e} A_{ijn}^{(d,e)} \left( u_i^{(n)} \right)^{(e)} + c_{ik} u_i(\xi). \quad (3.33)$$

La expresión (3.24) o la expresión (3.33), se puede escribir de forma general usando notación matricial como,

$$Au - Bt = 0, \quad (3.34)$$

donde los coeficientes de  $A$  y  $B$  están dados por  $A_{ijn}^{(d,e)}$  y  $B_{ijn}^{(d,e)}$ , (ver [3]), respectivamente.

A continuación, la imposición de las condiciones de contorno conduce a un sistema de ecuaciones lineales ( $N_d \cdot N \times N_d \cdot N$ ) donde  $N_d \cdot N$  es el número total de grados de libertad ( $N_d = 2$  en problemas bidimensionales), el cual puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} A_u & A_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \bar{u} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_u & B_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{t} \\ t \end{bmatrix} = 0. \quad (3.35)$$

Reorganizando,

$$\begin{bmatrix} A_u & -B_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_t & B_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{t} \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

ó bien

$$\mathbf{Kx} = \mathbf{F}, \quad (3.37)$$

siendo,

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} A_u & B_t \end{bmatrix} & := & \text{matriz de influencia del sistema,} \\ \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} u \\ t \end{bmatrix} & := & \text{vector de las incógnitas,} \\ \mathbf{F} &= -A_t \bar{u} + B_u \bar{t} & := & \text{vector de términos independientes.} \end{aligned}$$



# 4

## Programa para analizar problemas de elasticidad usando elementos cuadráticos.

En este capítulo daremos una introducción al lenguaje de programación llamado FORTRAN, describiendo algunas de sus características significativas. Posteriormente se detalla el código en elasticidad utilizando elementos cuadráticos para el Método de Elemento Frontera.

### 4.1 Introducción a FORTRAN.

FORTRAN (contracción del inglés Formula Translating System), es un lenguaje de programación de alto nivel de propósito general, procedimental e imperativo, que está especialmente adaptado al cálculo numérico y a la computación científica. Desarrollado originalmente por IBM en 1957 para el equipo IBM 704, y usado para aplicaciones científicas y de ingeniería, FORTRAN vino a dominar esta área de la programación desde el principio y ha estado en uso continuo por más de medio siglo en áreas de cómputo intensivo tales como la predicción numérica del tiempo, análisis de elementos finitos, dinámica de fluidos computacional (CFD), física computacional y química computacional. Es uno de los lenguajes más populares en el área de la computación de alto rendimiento y es el lenguaje usado para programas que evalúan el desempeño (benchmark) y el ranking de los supercomputadores más rápidos del mundo.

El lenguaje fue ampliamente adoptado por los científicos para escribir programas numéricamente intensivos, que incentivó a producir compiladores que pudieran generar un código más rápido y más eficiente. La inclusión en el lenguaje de un tipo de datos y de la aritmética de números complejos amplió la gama de aplicaciones para las cuales, el lenguaje se adaptaba especialmente, e hizo al FORTRAN adecuado para aplicaciones técnicas tales como la ingeniería eléctrica [21].

Lo que fue la primera tentativa de proyección de un lenguaje de programación de alto nivel, tiene una sintaxis considerada arcaica por muchos programadores que aprenden lenguajes más modernos. Es difícil escribir un bucle “for”, y errores en la escritura de sólo un carácter pueden llevar a errores durante el tiempo de ejecución en vez de errores de compilación, en el caso de que no se usen las construcciones más frecuentes. Algunas de las versiones anteriores no poseían facilidades que son consideradas muy útiles, tal como la asignación dinámica de memoria.

Se debe tener en cuenta que la sintaxis de FORTRAN fue orientada para el uso en trabajos numéricos y científicos. Muchas de sus deficiencias han sido abordadas en revisiones recientes del lenguaje. Por ejemplo, FORTRAN 95 posee comandos mucho más breves para efectuar operaciones matemáticas con matrices. Esto no sólo mejora mucho la lectura del programa sino que, además, aporta información útil

al compilador.

Por estas razones FORTRAN no es casi usado fuera de los campos científicos y del análisis numérico, pero permanece como el lenguaje preferido para desarrollar aplicaciones de computación numérica de alto rendimiento.

## 4.2 Programa principal.

En lo que sigue, se emplea la teoría descrita en los capítulos 2 y 3 en un código escrito en FORTRAN, el cual se emplea para el problema de elasticidad plana que se presenta más adelante. El código es válido para un material isotrópico usando elementos cuadráticos. El programa puede ser corrido en cualquier computador personal.

Los códigos en elemento frontera son sustancialmente diferentes de los programas en elemento finito. La organización interna es algo simple, ya que no requieren un ensamblador. También produce todos los valores de frontera ( $u$  y  $t$ ), dando, por lo general, una gran precisión de la solución. El programa permite que los valores de tracción, en ambos lados de los nodos de conexión de dos elementos, sea diferente. Para cada dirección particular:

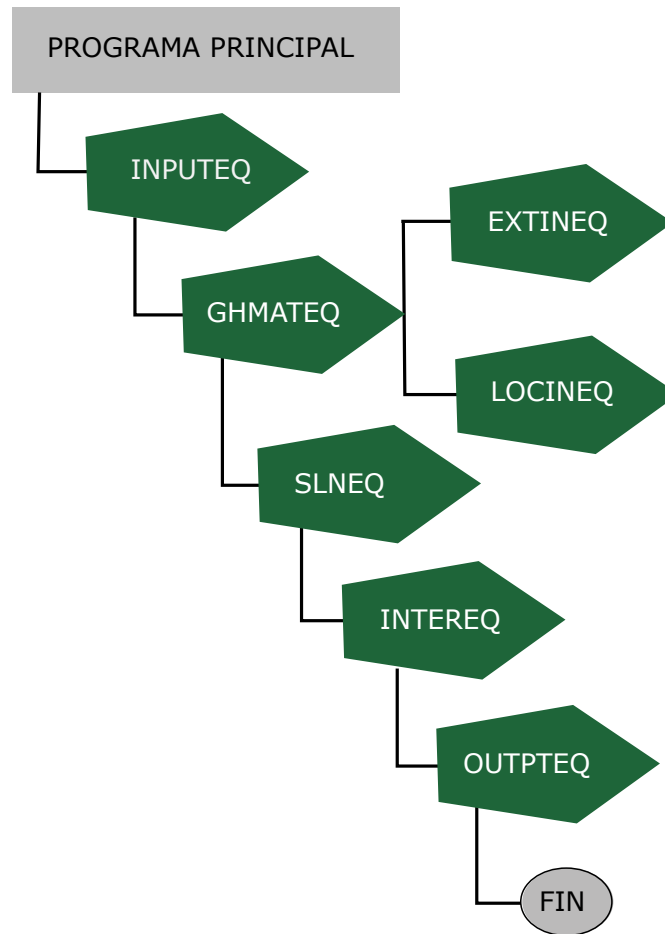
1. Cuando las tracciones se prescriben como diferentes a ambos lados del nodo el desplazamiento es la única incógnita.
2. Cuando el desplazamiento y una tracción es prescrita una al lado de la otra, la tracción es desconocida.
3. Si sólo se describe el desplazamiento, un sólo valor de la tracción es la única incógnita y este será el mismo en ambos lados del nodo.

En problemas con una sola región, en caso de tener más incógnitas que las condiciones de contorno en un punto esquina (rara vez ocurre), no presentan dificultades. Si el desplazamiento es conocido sobre dos elementos de frontera, que converge en una esquina, la derivada a lo largo de estas dos direcciones es conocida, así como sus deformaciones, tensiones y tracciones también lo son. Solo se necesita prescribir dos variables a lo largo de cada dirección y dejar el tercero (desplazamiento y tracción antes del nodo ó después del nodo), para probar que coincide con su valor conocido. Lo mismo sucede en medios no homogéneos. Un procedimiento simple es el usado para elementos discontinuos, es decir, elementos que tienen uno de los nodos dentro del elemento desplazado, de tal manera que un nodo diferente será creado para cada elemento que converge en la esquina.

El programa principal del código que utilizaremos define las dimensiones máximas del sistema de ecuaciones que en este caso es 100. Este programa principal llama a las siguientes cinco rutinas, ver Figura 4.1:

1. *INPUTEQ*: Esta rutina lee las entradas del programa.
2. *GHMATEQ*: Esta subdividida en dos subrutinas *EXTINEQ* y *LOCINEQ*, las cuales se encargan de formar los sistemas de matrices  $H$  y  $G$  y las reorganiza con las condiciones de frontera dentro de una matriz  $A$ . Esto a su vez genera un vector  $F$  a mano derecha del sistema.
3. *SLNEQ*: Esta es una rutina para resolver el sistema de ecuaciones, con pivoteo.
4. *INTEREQ*: Esta rutina calcula los valores de los desplazamientos y las tensiones en los puntos internos.





**Figura 4.1:** Programa principal.

5. *OUTPTEQ*: Salida de los resultados.

En la rutina principal también se leen y abren los archivos para la entrada y salida de datos. Las variables utilizadas en el programa y su significado se enuncian a continuación:

**N** : Número de elementos en la frontera.

**L** : Número de puntos internos.

**M** : Número de superficies diferentes, (5 máximo).

**NC** : Número del último nodo de cada superficie.

**GE** : Módulo de forma.

**XNU** : Radio de Poisson para deformación plana.

**X,Y** : Arreglos unidimensionales con  $x_1$  y  $x_2$  coordenadas de los puntos extremos del elemento.

**XM,YM** : Arreglo unidimensional con coordenadas de los nodos.

**G** : Matriz definida en la ecuación  $HU = GP + B$ . Después de aplicar las condiciones de contorno de la matriz  $A$ .

**H** : Matriz definida por la ecuación  $HU = GP + B$ .

**KODE** : Arreglo unidimensional que indica el tipo de condición en los nodos del elemento. **KODE** = 0 significa que se prescribe un desplazamiento y **KODE** = 1 tracción prescrita.

**FI** : Vector donde se almacena los valores prescritos de las condiciones de contorno.

**DFI** : Contiene los valores desconocidos del sistema.

**CX,CY** : Arreglos unidimensionales con coordenadas de los puntos internos, (máximo 20).

**DSOL** : Valores del desplazamiento en los puntos internos (2 desplazamientos por punto).

**SSOL** : Valores de estrés en los puntos internos (3 estreses por punto).

### 4.3 Rutina INPUTEQ.

Todas las entradas requeridas por el programa es leída en el programa **INPUTEQ** e introducidos en un archivo cuyo nombre es requerido por el programa principal. El archivo deberá contener las siguientes líneas de entrada:

1. *Línea de título*: una línea que contiene el título del programa.
2. *Línea de parámetros básicos*: contiene el número de elementos de frontera, el número de puntos internos, el módulo de elasticidad lineal (o módulo de Young) y el radio de Poisson).
3. *Líneas de las coordenadas de nodos en la frontera*: las coordenadas son leídas en sentido contrario a las agujas del reloj para puntos de fronteras externos y en sentido de las agujas del reloj para los puntos internos.
4. *Líneas de las condiciones de frontera*: tendrá tantas líneas como elementos de frontera. Seis valores conocidos son leídos para cada elemento correspondientes a los tres nodos y dos direcciones por nodo. En este sentido, un valor de una tracción puede prescribirse para un nodo como parte de un elemento y un valor diferente como parte del orden del elemento. Este desplazamiento debe ser unido para cualquier código.
5. *Líneas de coordenadas de puntos internos*: las coordenadas  $x_1$  y  $x_2$  de los puntos internos son leídos en una o más líneas. Esto tomará dos o más líneas si es necesario, es decir, si los puntos internos son definidos.

Estas subrutinas primero imprimen el título y los parámetros básicos. Luego, las coordenadas de los nodos y las condiciones de contorno dadas por elemento, con código y valores prescritos. Las coordenadas de los puntos internos serán impresos en la subrutina **OUTPTEQ**.

#### 4.4 Rutina GHMATEQ.

Esta rutina calcula las matrices  $G$  y  $H$  mediante las subrutinas **EXTINEQ** y **LOCINEQ**.

- ◊ **EXTINEQ**: Calcula las submatrices  $GW$  y  $HW$ , ambas  $(2 \times 6)$  submatrices las cuales relaciona un punto de colocación con un elemento definido por sus tres nodos.
- ◊ **LOCINEQ**: Calcula las submatrices  $GW$   $(2 \times 6)$  para el caso cuando el punto de colocación es uno de los nodos sobre el elemento en consideración (es decir, la singularidad esta en el mismo elemento). Note que la submatriz  $HW$   $(2 \times 6)$  es calculada usando **EXTINEQ** excepto por la parte en que relaciona un nodo con el mismo el cual es calculado usando consideraciones de cuerpo rígido, lo cual resulta en una fila de coeficientes adicional.

Las submatrices  $GW$  y  $HW$  resultantes son ensambladas en las matrices  $G$  y  $H$  del sistema. La matriz  $G$  ahora es rectangular ya que cada nodo extremo de un elemento puede tener diferentes tracciones, es decir, una antes y otra después de que el nodo.

Una vez que las matrices  $G$  y  $H$  estén ensambladas, el sistema de ecuaciones necesitan ser reorganizados en concordancia con las condiciones de frontera para formar el sistema:

$$AX = F,$$

donde  $X$  es un vector de  $2N$  incógnitas, siendo  $N$  el número de nodos;  $A$  es una matriz  $(2N \times 2N)$  cuyas columnas son una combinación de columnas de  $H$  y  $G$  dependiendo las condiciones de frontera o dos columnas consecutivas de  $G$  cuando la única incógnita es la tracción en ambos lados de los extremos del nodo del elemento;  $F$  es un vector conocido calculado al multiplicar los valores preescritos de las condiciones de contorno por los correspondientes términos de las filas de  $G$  o  $H$ .

Al final las subrutinas **GHMATEQ** y después de reorganizar  $H$  contiene la matriz  $A$  y  $F$  el vector  $F$ .

#### 4.5 Rutina EXTINEQ.

Esta subrutina calcula usando la integración numérica, las submatrices  $GW$  y  $HW$   $(2 \times 6)$  que corresponden a un elemento cuando el punto de colocación es otro nodo diferente de los tres nodos del elemento. Las coordenadas de los puntos de colocación son  $XP$  y  $YP$ . Las integrales son de la forma:

$$HW = \int_{\Gamma_j} t^* F d\xi = \int_{-1}^1 t^* F |J| d\xi,$$

$$GW = \int_{\Gamma_j} u^* F |J| d\xi = \int_{-1}^1 u^* F |J| d\xi.$$

$$HW = \int_{\Gamma_j} \begin{pmatrix} t_{11}^* & t_{12}^* \\ t_{21}^* & t_{22}^* \end{pmatrix} \begin{bmatrix} F^{(1)} & 0 & F^{(2)} & 0 & F^{(3)} & 0 \\ 0 & F^{(1)} & 0 & F^{(2)} & 0 & F^{(3)} \end{bmatrix} |J| d\xi,$$

$$GW = \int_{\Gamma_j} \begin{pmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{pmatrix} \begin{bmatrix} F^{(1)} & 0 & F^{(2)} & 0 & F^{(3)} & 0 \\ 0 & F^{(1)} & 0 & F^{(2)} & 0 & F^{(3)} \end{bmatrix} |J| d\xi.$$

Los jacobianos son calculados tomando las derivadas de las expresiones para las coordenadas  $x_1$  y  $x_2$ .

#### 4.6 Rutina LOCINEQ.

Esta subrutina calcula usando cuadratura de Gauss y una cuadratura especial, las submatrices  $(2 \times 6)$ ,  $GW$ , cuando el punto de colocación es uno de los nodos sobre el elemento en consideración.

Las integrales son divididas en dos partes: uno con singularidad el cual es integrado usando la fórmula usual; y la otra parte logarítmica, es integrado usando una fórmula de cuadratura especial.

Tres casos son considerados dependiendo sobre la posición del punto de colocación, es decir, NODO = 1, 2 ó 3, ver Figura 4.2.

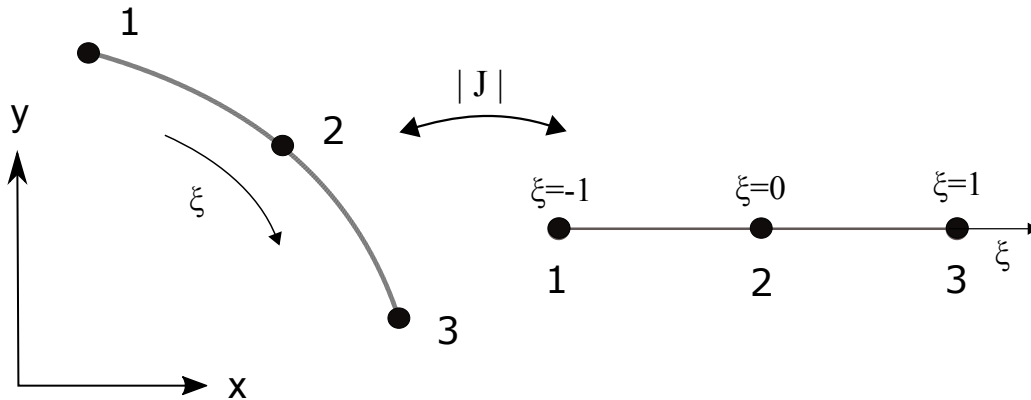


Figura 4.2: Elementos cuadráticos.

- ◇ Punto de colocación sobre el nodo 1: primero se considera un cambio de coordenadas de  $x_1$  y  $x_2$  a  $\xi$  definido de la misma forma que en **EXTINEQ**. Luego, en orden a integrar la singularidad, se lleva a cabo un nuevo cambio de variables, es decir,

$$\eta = \frac{\xi + 1}{2}.$$

- ◇ La integral se obtiene en dos partes, una con un término singular  $\ln\left(\frac{1}{\eta}\right)$  y la otra no singular.

La primera parte es integrada mediante una fórmula de integración especial del tipo:

$$I = \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) f(\eta) d\eta \cong \sum_{i=1}^n \omega_i f(\eta_i).$$

La segunda parte es integrando por la cuadratura de Gauss en términos de la variable  $\xi$ . Las funciones de forma  $F_1, F_2, F_3$  en términos de  $\xi$  y  $FL_1, FL_2, FL_3$  en términos de  $\eta$ .

- ◇ Punto de colocación sobre el nodo 2: Para integrar las dos singularidades que aparecen en ambos lados de los nodos, la integral es dividida en dos partes,

$$GW = \int (1)^{(3)} u^* F |J| d\xi = \int_{(1)}^{(2)} u^* F |J| d\xi + \int_{(2)}^{(3)} u^* F |J| d\xi.$$

Entonces, la primera parte es cambiada por la variable  $\eta = -\xi$  y la segunda parte con  $\eta = \xi$ . Ahora cada parte singular de estas dos integrales es calculada usando la integración especial, y las dos partes no singulares son integradas usando la cuadratura de Gauss usual con 10 puntos.

- ◇ Punto de colocación sobre el nodo 3: Este caso es similar al primer caso pero con la variable de integración logarítmica como,

$$\eta = \frac{1 - \xi}{2}.$$

#### 4.7 Rutina INTEREQ.

Esta subrutina primero vuelve a organizar los vectores  $DFI$  y  $FI$  de tal manera que todos los desplazamientos de la frontera se almacenan en  $FI$  y todas las cargas en el  $DFI$ . A continuación, se calculan los desplazamientos y tensiones en los puntos internos.

El desplazamiento en cualquier punto interno está dado por

$$u^i = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} u^* F d\Gamma \right\} t^j - \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} t^* F d\Gamma \right\} u^j, \quad (4.1)$$

donde las integrales sobre el elemento de frontera son calculadas numéricamente llamando nuevamente a la subrutina **EXTINEQ**.

Análogamente, las tensiones son dadas por,

$$\sigma_{kl}^i = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} D_{kl} F d\Gamma \right\} t^j - \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} S_{kl} F d\Gamma \right\} u^j, \quad (4.2)$$

donde  $D_{kl} = [D_{1kl}, D_{2kl}]$  y  $S_{kl} = [S_{1kl}, S_{2kl}]$ .

Los valores de  $D_{mkl}$  y  $S_{mkl}$  están dados por,

$$D_{ijk}^* (\vec{\xi}, \vec{x}) = \frac{1}{4\alpha\pi r^\alpha(1-\nu)} [(1-2\nu)(\delta_{jk}r_{,i} + \delta_{ik}r_{,j} - \delta_{ij}r_{,k}) + \beta r_{,i}r_{,j}r_{,k}],$$

y

$$S_{ijk}^* (\vec{\xi}, \vec{x}) = \frac{E}{2\alpha\pi r^\beta(1-\nu)} \{ \beta r_{,n} [(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - \gamma r_{,i}r_{,j}r_{,k}] + \beta\nu(n_i r_{,j}r_{,k} + n_j r_{,i}r_{,k}) + (1-2\nu)(\beta n_k r_{,i}r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \},$$

siendo  $\alpha = 1, 2$ ;  $\beta = 2, 3$  y  $\gamma = 4, 5$  en dos y tres dimensiones, respectivamente. Las integrales a lo largo de los elementos en la ecuación para  $\sigma_{kl}^i$  son calculados mediante otra subrutina.

#### 4.8 Rutina OUTPTEQ.

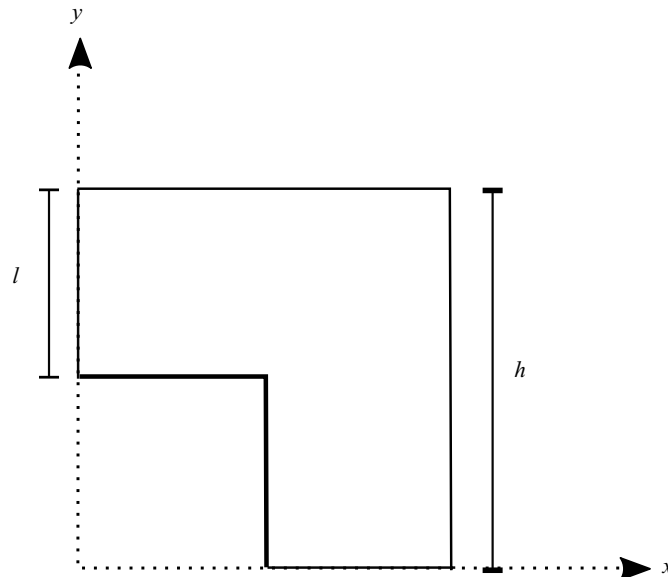
Esta subrutina imprime los resultados en el siguiente orden:

1. Desplazamientos en los nodos de la frontera.
2. Tracciones en los nodos de la frontera (tracciones antes y después de cada nodo son impresos).
3. Desplazamientos en los puntos internos.
4. Tensiones en los puntos internos.

# 5

## Ejemplos de aplicación.

En este capítulo se presentan tres ejemplos de placas en “L” de lados  $l = 5m$ ,  $h = 10m$  tal como podemos evidenciarlas en la Figura 5.1; a cada una de ellas se somete a diferentes condiciones de contorno, donde se verifica la eficacia del BEM sobre este tipo de geometría. La implementación del BEM y su posterior análisis se realiza mediante el uso de tablas, además de gráficos donde se evidencia el comportamiento de la placa en “L” luego de ser sometida a las diferentes condiciones. Para el análisis



**Figura 5.1:** Geometría de una placa en “L”.

de los ejemplos que en este capítulo se presentan, se utilizó el código creado por Brebbia y Dominguez, (ver [4]), se utilizaron 12 elementos de contorno cuadráticos, 24 nodos, 8 puntos internos, módulo de elasticidad  $E = 100MPa$  (mega pascal) y módulo de Poisson  $\nu = 0$ .

### 5.1 Ejemplo 1: Primera placa en "L".

Se analizará una placa en "L" sometida a las siguientes condiciones de contorno: Se prescribe desplazamientos nulos en el eje de las abscisas en los nodos 1, 2, 3, 4 y 5; por otra parte en los nodos 6, 7, 8 y 9 se aplica una carga horizontal de  $f = 1 \text{ MPa}$ , además para el nodo 13 se prescribe desplazamientos nulos en las dos direcciones coordenadas, el resto de los nodos se encuentran libres. Se definen 8 puntos internos, que se encuentran en la diagonal y fueron posicionados con un ángulo  $\varphi = 45$  respecto de la horizontal, adicionalmente se tomo el nodo 21, como nodo de control; como se muestra en la Figura 5.2.

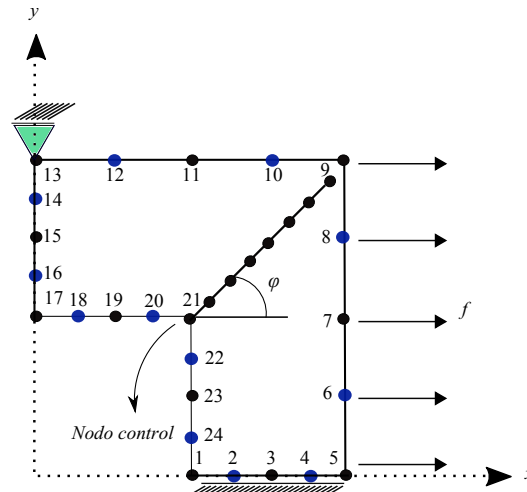


Figura 5.2: Geometría de una placa en "L" con condiciones de contorno.

En este ejemplo se discretizará dicha placa en "L" utilizando doce (12) elementos de contorno cuadráticos, por lo cual, posee veinticuatro (24) nodos cuyas coordenadas se expresan en el Cuadro 5.1. Las condiciones de contorno a las cuales fue sometida la placa se encuentran en el Cuadro 5.2, se considera "0" cuando se refiere a desplazamientos prescritos y en caso de ser "1" se refiere a cargas aplicadas.

NODE	x	y
1	0.500000E+01	0.000000E+00
2	0.625000E+01	0.000000E+00
3	0.750000E+01	0.000000E+00
4	0.875000E+01	0.000000E+00
5	0.100000E+02	0.000000E+00
6	0.100000E+02	0.250000E+01
7	0.100000E+02	0.500000E+01
8	0.100000E+02	0.725000E+01
9	0.100000E+02	0.100000E+02
10	0.750000E+01	0.100000E+02
11	0.500000E+01	0.100000E+02
12	0.250000E+01	0.100000E+02
13	0.000000E+00	0.100000E+02
14	0.000000E+00	0.875000E+01
15	0.000000E+00	0.750000E+01
16	0.000000E+00	0.625000E+01
17	0.000000E+00	0.500000E+01
18	0.125000E+01	0.500000E+01
19	0.250000E+01	0.500000E+01
20	0.375000E+01	0.500000E+01
21	0.500000E+01	0.500000E+01
22	0.500000E+01	0.375000E+01
23	0.500000E+01	0.250000E+01
24	0.500000E+01	0.125000E+01

Cuadro 5.1: Coordenadas de los nodos en la placa en "L" del Ejemplo 1.



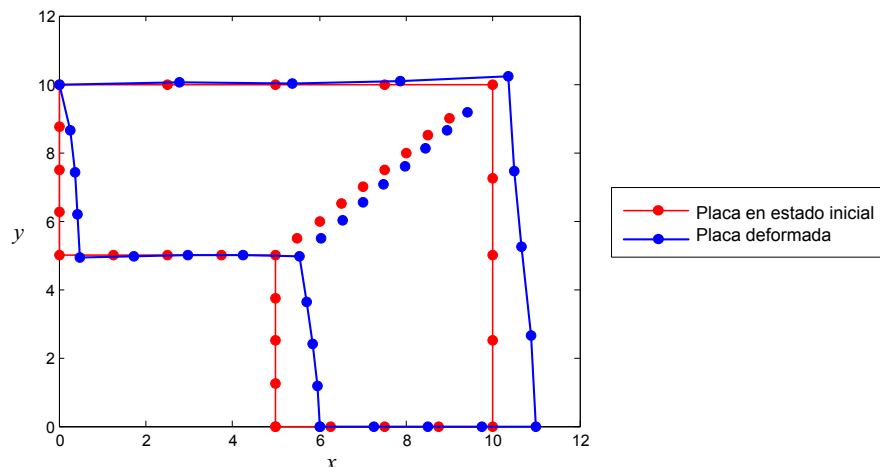
## 5.1 Ejemplo 1: Primera placa en "L".

BOUNDARY CONDITIONS												
---FIRST NODE---				---SECOND NODE---				---THIRD NODE---				
ELE	X DIR.	C	Y DIR.	C	X DIR.	C	Y DIR.	C	X DIR.	C	Y DIR.	C
1	1.000	0	0.000	0	1.000	0	0.000	0	1.000	0	0.000	0
2	1.000	0	0.000	0	1.000	0	0.000	0	1.000	0	0.000	0
3	1.000	0	0.000	0	1.000	1	0.000	1	1.000	1	0.000	1
4	1.000	1	0.000	1	1.000	1	0.000	1	1.000	1	0.000	1
5	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
6	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	0	0.000	0
7	0.000	0	0.000	0	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
8	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
9	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
10	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
11	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
12	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	1.000	0	0.000	0

**Cuadro 5.2:** Condiciones de contorno para la Placa en "L" del Ejemplo 1, donde C=0 indica desplazamientos y C=1 indica cargas.

En la Figura 5.3 se puede evidenciar una simulación del efecto que produce el sometimiento de la placa a las condiciones de contorno antes expuestas. Podemos notar que existe una tendencia a deformarse la estructura, ya que se prescribió para los nodos 1, 2, 3, 4 y 5 desplazamientos verticales nulos, la placa se mantiene fija en esa dirección, así como sucede en el nodo 13. En estos nodos la tensión se incrementa. Adicionalmente, se observan los desplazamientos de los ocho (8) puntos internos que fueron definidos.

Se puede observar en la Figura 5.4 se realiza una gráfica de la posición de los puntos internos respecto de las tensiones  $\sigma_x$ . Se tomó el nodo veintiuno (21) como nodo de control, ya que es un punto de interés debido a la vinculación dada por las condiciones de contorno. Es evidente como a medida que nos alejamos del nodo de control las tensiones tienden a cero, es decir, este representa un punto de máximo esfuerzo de la estructura en estudio (ver Figura 1.1).



**Figura 5.3:** Desplazamientos en la placa en "L" del Ejemplo 1 sometida a tensiones laterales.

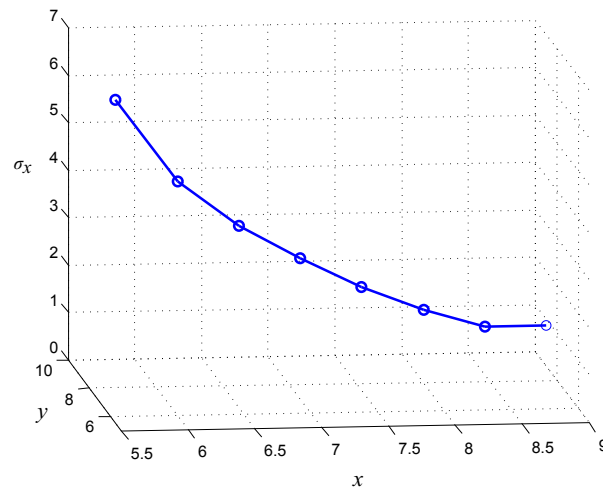


Figura 5.4: Curva de tensiones del Ejemplo 1 en puntos internos.

## 5.2 Ejemplo 2: Segunda placa en "L".

Consideremos una placa en "L", sometida a las siguientes condiciones de contorno: Se prescribe desplazamientos nulos en el eje de las abscisas en los nodos 1, 2, 3, 4 y 5; así como en los nodos 6, 7, 8 y 9 se aplica una carga en sentido vertical de  $g_2 = -20MPa$ , además para el nodo 13 se prescribe desplazamientos nulos en las dos direcciones coordenadas, y por último, en los nodos 14, 15, 16 y 17 se aplica una carga en sentido vertical de  $g_1 = 10MPa$ , a diferencia del Ejemplo 1, el nodo control ahora es el que está ubicado en la esquina superior derecha (nodo 9). Además, de que se sigue manteniendo los puntos sobre la diagonal, como se muestra en la Figura 5.5.

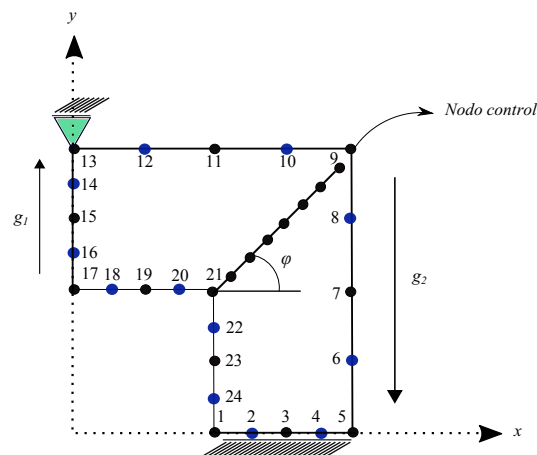


Figura 5.5: Geometría de una placa en "L" con condiciones de contorno.

La frontera de la placa en "L" se discretizará utilizando doce (12) elementos de contorno cuadráticos, por lo cual, posee veinticuatro (24) nodos cuyas coordenadas se expresan en el Cuadro 5.3. Las condiciones de contorno a las cuales fue sometida la placa se encuentran en el Cuadro 5.4.

NODE	X	Y
1	0.500000E+01	0.000000E+00
2	0.625000E+01	0.000000E+00
3	0.750000E+01	0.000000E+00
4	0.875000E+01	0.000000E+00
5	0.100000E+02	0.000000E+00
6	0.100000E+02	0.250000E+01
7	0.100000E+02	0.500000E+01
8	0.100000E+02	0.725000E+01
9	0.100000E+02	0.100000E+02
10	0.750000E+01	0.100000E+02
11	0.500000E+01	0.100000E+02
12	0.250000E+01	0.100000E+02
13	0.000000E+00	0.100000E+02
14	0.000000E+00	0.875000E+01
15	0.000000E+00	0.750000E+01
16	0.000000E+00	0.625000E+01
17	0.000000E+00	0.500000E+01
18	0.125000E+01	0.500000E+01
19	0.250000E+01	0.500000E+01
20	0.375000E+01	0.500000E+01
21	0.500000E+01	0.500000E+01
22	0.500000E+01	0.375000E+01
23	0.500000E+01	0.250000E+01
24	0.500000E+01	0.125000E+01

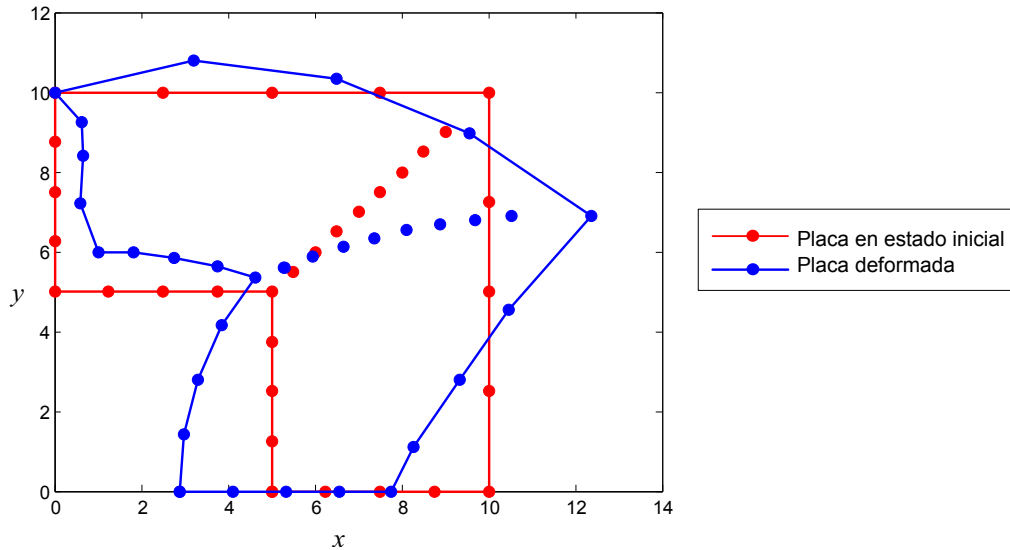
**Cuadro 5.3:** Coordenadas de los nodos en la placa en "L" del Ejemplo 2.

ELE	BOUNDARY CONDITIONS											
	---FIRST NODE---				---SECOND NODE---				---THIRD NODE---			
X DIR.	C	Y DIR.	C	X DIR.	C	Y DIR.	C	X DIR.	C	Y DIR.	C	
1	0.000	1	0.000	0	0.000	1	0.000	0	0.000	1	0.000	0
2	0.000	1	0.000	0	0.000	1	0.000	0	0.000	1	0.000	0
3	0.000	1	-20.000	1	0.000	1	-20.000	1	0.000	1	-20.000	1
4	0.000	1	-20.000	1	0.000	1	-20.000	1	0.000	1	-20.000	1
5	0.000	1	-20.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
6	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	0	0.000	0
7	0.000	1	10.000	1	0.000	1	10.000	1	0.000	1	10.000	1
8	0.000	1	10.000	1	0.000	1	10.000	1	0.000	1	10.000	1
9	1.000	0	1.000	0	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
10	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
11	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
12	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	0

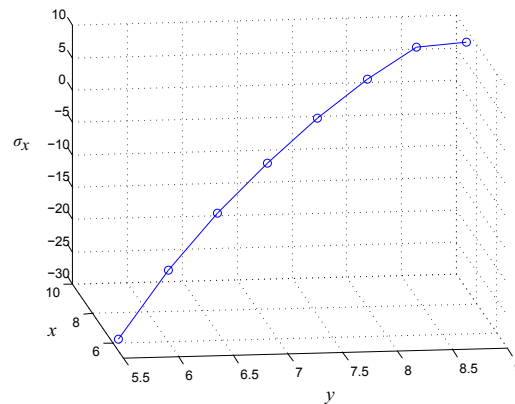
**Cuadro 5.4:** Condiciones de contorno para la Placa en "L" del Ejemplo 2, donde C=0 indica desplazamientos y C=1 indica tracciones.

En la Figura 5.6 se muestra una simulación del efecto que produce el sometimiento de la placa a las condiciones de contorno antes expuestas, las fuerzas verticales y en sentidos opuestos a la cual es sometida la placa en los laterales producen un efecto de deformación, además la placa se mantiene sin movimientos verticales en los nodos 1, 2, 3, 4 y 5, así como sucede en el nodo 13, para el cual se prescribieron nulos los desplazamientos en ambos sentidos de los ejes coordenados. En la Figura 5.7 se realiza una gráfica de la posición de los puntos internos respecto de las tensiones  $\sigma_x$ . Se tomó el nodo nueve (9) como nodo de control, ya que es un punto de interés de acuerdo a la concentración de esfuerzos ocasionado por las condiciones de contorno prescritas. Podemos evidenciar como a medida que nos aproximamos al nodo de control las tensiones incrementan, así como en el ejemplo anterior

este representa un punto de máximo esfuerzo.



**Figura 5.6:** Desplazamientos en la placa en "L" del Ejemplo 2 sometida a tensiones laterales.

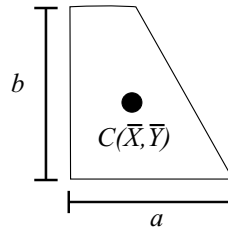


**Figura 5.7:** Curva de tensiones en puntos internos del Ejemplo 2.

### 5.3 Ejemplo 3: Tercera placa en "L".

Consideremos una placa en "L", sometida a las siguientes condiciones de contorno: Se prescribe desplazamientos nulos en el eje de las coordenadas para el nodo nueve (9), desplazamientos nulos en ambos sentidos coordenados en el nodo trece (13). Se disponen 8 puntos internos sobre el nodo 21 formando

un ángulo de  $90^\circ$  con respecto de la horizontal, el cual será considerado como un nodo de control. Además de esto se aplica una fuerza en sentido horizontal  $|h| = A$ , como sigue en Figura 5.9, el punto de aplicación de  $h$  es el centroide del trapecio rectangular, además  $A$  representa el área de dicho trapecio cuyas dimensiones se describen a continuación:



**Figura 5.8:** Geometría del Trapecio rectangular.

Centroide de un trapecio rectangular de lados  $a, b$ , como se puede observar en la Figura 5.8, esta definido como sigue:

$$C(\bar{X}, \bar{Y}) = (b(3b + (a - b)^2), 3b^2 + 2(a - b)^2)$$

Supongamos que  $b = a/2$ ,

$$C(\bar{X}, \bar{Y}) = \left( \frac{a^3}{24}, \frac{10a}{36} \right)$$

Para que el punto de aplicación de la fuerza  $h$  este situado en la posición del nodo veintitrés (23), se debe considerar lo siguiente:

$$\frac{10a}{36} = \frac{5}{2} \Rightarrow a = 9.$$

Así el centroide del trapecio rectangular es:

$$C(\bar{X}, \bar{Y}) = \left( \frac{729}{24}, \frac{5}{2} \right),$$

Por lo tanto, el área del trapecio es,

$$A = \frac{\frac{a}{2}(a + \frac{a}{2})}{2} = \frac{3^5}{2^3}.$$

La frontera de la placa en "L" se discretizará utilizando doce (12) elementos de contorno cuadráticos, por lo cual, posee veinticuatro (24) nodos cuyas coordenadas se expresan en el Cuadro 5.5. Las condiciones de contorno a las cuales fue sometida la placa se encuentran en el Cuadro 5.6.

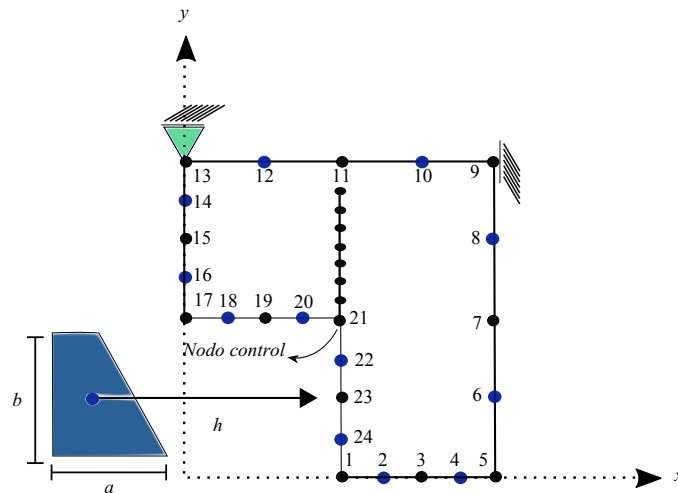


Figura 5.9: Geometría de una placa en "L" con condiciones de contorno.

NODE	X	Y
1	0.5000000E+01	0.0000000E+00
2	0.6250000E+01	0.0000000E+00
3	0.7500000E+01	0.0000000E+00
4	0.8750000E+01	0.0000000E+00
5	0.1000000E+02	0.0000000E+00
6	0.1000000E+02	0.2500000E+01
7	0.1000000E+02	0.5000000E+01
8	0.1000000E+02	0.7250000E+01
9	0.1000000E+02	0.1000000E+02
10	0.7500000E+01	0.1000000E+02
11	0.5000000E+01	0.1000000E+02
12	0.2500000E+01	0.1000000E+02
13	0.0000000E+00	0.1000000E+02
14	0.0000000E+00	0.8750000E+01
15	0.0000000E+00	0.7500000E+01
16	0.0000000E+00	0.6250000E+01
17	0.0000000E+00	0.5000000E+01
18	0.1250000E+01	0.5000000E+01
19	0.2500000E+01	0.5000000E+01
20	0.3750000E+01	0.5000000E+01
21	0.5000000E+01	0.5000000E+01
22	0.5000000E+01	0.3750000E+01
23	0.5000000E+01	0.2500000E+01
24	0.5000000E+01	0.1250000E+01

Cuadro 5.5: Coordenadas de los nodos en la placa en "L" del Ejemplo 3.

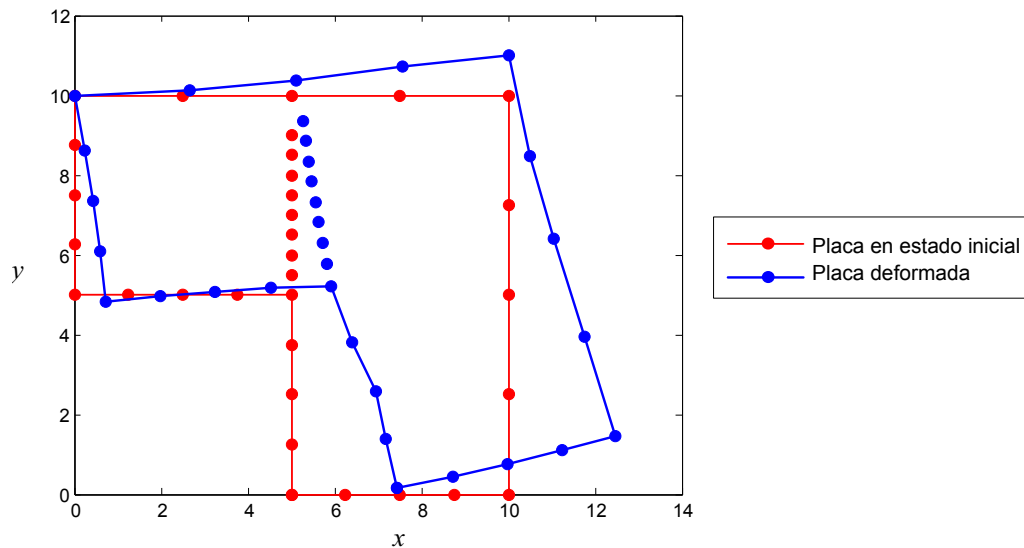
En la Figura 5.10 podemos observar el efecto producido por la implementación de las condiciones de contorno antes descritas, al mantenerse fija la placa en el nodo trece (13) y prescribirse desplazamientos nulos en el eje de las ordenadas al nodo nueve (9), el efecto que produce en ese punto será de un rodillo, se mantiene fijo en el eje de las coordenadas, pero produce desplazamientos en el eje de las abscisas, todo esto producido por la fuerza en sentido horizontal aplicada en el punto donde se encuentra ubicado el nodo veintitrés (23), adicionalmente se muestran los desplazamientos de los puntos internos que fueron considerados para este ejemplo. En la Figura 5.11 se realiza una gráfica de la posición de los puntos internos respecto de las tensiones  $\sigma_x$ . Se tomó el nodo veintiuno (21) como nodo de control, ya que

## 5.3 Ejemplo 3: Tercera placa en "L".

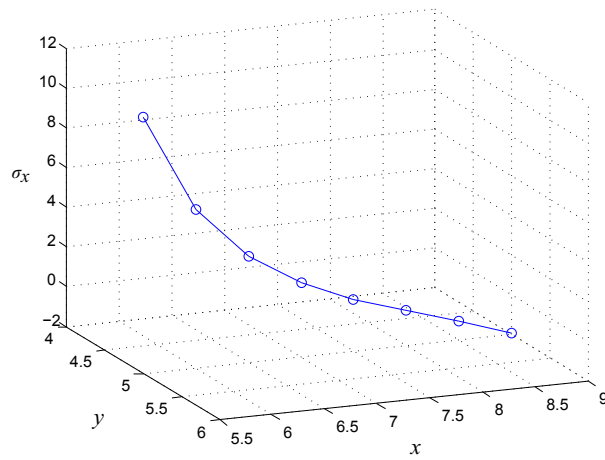
BOUNDARY CONDITIONS												
---FIRST NODE---				---SECOND NODE---				---THIRD NODE---				
ELE	X DIR.	C	Y DIR.	C	X DIR.	C	Y DIR.	C	X DIR.	C	Y DIR.	C
1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
2	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
3	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
4	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	0	1.000	0
5	0.000	0	1.000	0	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
6	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	0	0.000	0
7	0.000	0	0.000	0	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
8	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
9	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
10	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
11	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	30.375	1	0.000	1
12	30.375	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1

**Cuadro 5.6:** Condiciones de contorno para la Placa en "L" del Ejemplo 3, donde C=0 indica desplazamientos y C=1 indica tracciones.

es un punto de interés de acuerdo a la concentración de esfuerzos ocasionado por las condiciones de contorno prescritas. Podemos evidenciar como a medida que nos aproximamos al nodo de control las tensiones incrementan, en ese punto la tendencia del material será a romperse debido a las tensiones aplicadas.



**Figura 5.10:** Desplazamientos en la placa en "L" del Ejemplo 3 sometida a tensiones laterales.



**Figura 5.11:** Curva de tensiones en puntos internos del Ejemplo 3.



# 6

## Conclusiones.

Los métodos numéricos son herramientas poderosas capaces de manejar sistemas de ecuaciones grandes y complicadas que son difíciles de resolver analíticamente, además de ser un medio para reducir problemas matemáticos superiores mediante operaciones aritméticas básicas. Otra característica destacable de los métodos numéricos es que son un vehículo eficiente para aprender a explorar las bondades que nos ofrecen las computadoras para resolver problemas. Debido a ello una de las herramientas que permite resolver de manera rápida y eficiente problemas que surgen al momento de hallar la solución de las ecuaciones diferenciales que modelan un problema mediante un método analítico, es el Método de Elementos Frontera. Entre las mayores ventajas que trae consigo la implementación del BEM, es que se reduce la dimensión del problema en estudio, por lo tanto, genera menos dificultad a la hora de modelar geometrías más complicadas.

Se exhibió en el transcurso de este trabajo la formulación teórica del BEM, solucionando un problema general de elasticidad plana modelado por la ecuación de Navier sobre un medio elástico, homogéneo e isotrópico. Tomando en cuenta una geometría general en dos dimensiones, discretizado mediante elementos cuadráticos con interpolación de tipo isoparamétrica. Se presenta la formulación directa del BEM con base en la ecuación integral de Somigliana, obteniendo soluciones para los desplazamientos y las tensiones generando un sistema de ecuaciones.

Dada la utilización de los elementos cuadráticos en cada uno de los ejemplos planteados, estos permiten la aproximación eficaz de la geometría de la placa en L. El BEM presenta cierta complejidad matemática a la hora de plantear las ecuaciones integrales que modelan nuestro problema. Pero debido a la implementación de los recursos computacionales esto se ve compensado gracias a la facilidad con la cual se aplican las condiciones de contorno sobre el problema planteado, así como también el dinamismo en cuanto al modelado de las geometrías que se puedan definir. Esto conlleva a maximizar la cantidad de ejemplos académicos que pueden ser estudiados.

Una vez realizada la implementación numérica se logró obtener la solución requerida para cada uno de los ejemplos que fueron planteados en este trabajo. Se evidenció que en cada una de las placas hay tendencia del material a la deformación; así como ciertos nodos no sufrieron desplazamientos, esto fue dado por el buen planteamiento de las condiciones de contorno.

Al realizar el estudio de los nodos de control para los ejemplos era evidente como las tensiones a medida que se aproximaba al nodo de control incrementaban, esto nos permite concluir que en caso de realizar un aumento en las proporciones de las fuerzas aplicadas a cada una de las placas, la tendencia

de estas tensiones en los nodos de control sería a crecer exponencialmente. Debido a esto, dichos nodos van a ser puntos de singularidad geométrica.

La implementación del BEM en las placas en L se caracterizó por las pruebas hechas en los ejemplos que fueron planteados, garantizando la obtención de buenos resultados en las distintas situaciones que fueron recreadas, esto permitió comprobar que el BEM es óptimo a la hora de implementarlo en el tipo de placa que fue considerada en este trabajo de investigación.

## 7

## Apéndice.

A continuación se muestran los resultados obtenidos luego de aplicar el código creado por Brebbia y Dominguez presentado en el libro *Boundary Elements: An Introductory Course* [4].

### 7.1 Resultados primer ejemplo

```

PLACA EN L DEFORMACIONES PLANAS (12 QUADRATIC ELEMENTS)
DATA
NUMBER OF BOUNDARY ELEMENTS= 12
NUMBER OF INTERNAL POINTS= 8
SHEAR MODULUS= 0.1000000E+03
POISSON RATIO= 0.0000000E+00

```

#### BOUNDARY NODES COORDINATES

NODE	X	Y
1	0.5000000E+01	0.0000000E+00
2	0.6250000E+01	0.0000000E+00
3	0.7500000E+01	0.0000000E+00
4	0.8750000E+01	0.0000000E+00
5	0.1000000E+02	0.0000000E+00
6	0.1000000E+02	0.2500000E+01
7	0.1000000E+02	0.5000000E+01
8	0.1000000E+02	0.7250000E+01
9	0.1000000E+02	0.1000000E+02
10	0.7500000E+01	0.1000000E+02
11	0.5000000E+01	0.1000000E+02
12	0.2500000E+01	0.1000000E+02
13	0.0000000E+00	0.1000000E+02
14	0.0000000E+00	0.8750000E+01
15	0.0000000E+00	0.7500000E+01
16	0.0000000E+00	0.6250000E+01
17	0.0000000E+00	0.5000000E+01
18	0.1250000E+01	0.5000000E+01
19	0.2500000E+01	0.5000000E+01
20	0.3750000E+01	0.5000000E+01
21	0.5000000E+01	0.5000000E+01
22	0.5000000E+01	0.3750000E+01
23	0.5000000E+01	0.2500000E+01
24	0.5000000E+01	0.1250000E+01

## 7.1 Resultados primer ejemplo

BOUNDARY CONDITIONS												
---FIRST NODE---				---SECOND NODE---				---THIRD NODE---				
ELE	X DIR.	C	Y DIR.	C	X DIR.	C	Y DIR.	C	X DIR.	C	Y DIR.	C
1	1.000	0	0.000	0	1.000	0	0.000	0	1.000	0	0.000	0
2	1.000	0	0.000	0	1.000	0	0.000	0	1.000	0	0.000	0
3	1.000	0	0.000	0	1.000	1	0.000	1	1.000	1	0.000	1
4	1.000	1	0.000	1	1.000	1	0.000	1	1.000	1	0.000	1
5	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
6	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	0	0.000	0
7	0.000	0	0.000	0	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
8	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
9	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
10	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
11	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
12	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	1.000	0	0.000	0

## RESULTS

## BOUNDARY NODES

X	Y	DISPLACEMENT X	DISPLACEMENT Y
0.500000E+01	0.000000E+00	0.100000E+01	0.000000E+00
0.625000E+01	0.000000E+00	0.100000E+01	0.000000E+00
0.750000E+01	0.000000E+00	0.100000E+01	0.000000E+00
0.875000E+01	0.000000E+00	0.100000E+01	0.000000E+00
0.100000E+02	0.000000E+00	0.100000E+01	0.000000E+00
0.100000E+02	0.250000E+01	0.869278E+00	0.160071E+00
0.100000E+02	0.500000E+01	0.657446E+00	0.233667E+00
0.100000E+02	0.725000E+01	0.504249E+00	0.223433E+00
0.100000E+02	0.100000E+02	0.365780E+00	0.213032E+00
0.750000E+01	0.100000E+02	0.365400E+00	0.962896E-01
0.500000E+01	0.100000E+02	0.373312E+00	0.244895E-01
0.250000E+01	0.100000E+02	0.279349E+00	0.462008E-01
0.000000E+00	0.100000E+02	0.000000E+00	0.000000E+00
0.000000E+00	0.875000E+01	0.252463E+00	-0.845961E-01
0.000000E+00	0.750000E+01	0.379585E+00	-0.794219E-01
0.000000E+00	0.625000E+01	0.435235E+00	-0.695052E-01
0.000000E+00	0.500000E+01	0.477245E+00	-0.650579E-01
0.125000E+01	0.500000E+01	0.474654E+00	-0.257855E-01
0.250000E+01	0.500000E+01	0.471376E+00	0.132343E-02
0.375000E+01	0.500000E+01	0.482225E+00	-0.668795E-02
0.500000E+01	0.500000E+01	0.556477E+00	-0.461466E-01
0.500000E+01	0.375000E+01	0.723469E+00	-0.105796E+00
0.500000E+01	0.250000E+01	0.852736E+00	-0.100942E+00
0.500000E+01	0.125000E+01	0.947070E+00	-0.634815E-01

## 7.2 Resultados segundo ejemplo.

X	Y	TRACTION X BEFORE NODE	TRACTION Y BEFORE NODE	TRACTION X AFTER NODE	TRACTION Y AFTER NODE
0.50000E+01	0.00000E+00	0.78569E+00	0.63361E+01	0.78569E+00	0.63361E+01
0.62500E+01	0.00000E+00	0.28360E+01	0.24976E+01	0.28360E+01	0.24976E+01
0.75000E+01	0.00000E+00	0.29877E+01	-0.30893E+01	0.29877E+01	-0.30893E+01
0.87500E+01	0.00000E+00	0.31626E+01	-0.84854E+01	0.31626E+01	-0.84854E+01
0.10000E+02	0.00000E+00	0.47061E+00	-0.73033E+01	0.47061E+00	-0.73033E+01
0.10000E+02	0.25000E+01	0.10000E+01	0.00000E+00	0.10000E+01	0.00000E+00
0.10000E+02	0.50000E+01	0.10000E+01	0.00000E+00	0.10000E+01	0.00000E+00
0.10000E+02	0.72500E+01	0.10000E+01	0.00000E+00	0.10000E+01	0.00000E+00
0.10000E+02	0.10000E+02	0.10000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.75000E+01	0.10000E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.50000E+01	0.10000E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.25000E+01	0.10000E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.10000E+02	-0.18302E+02	0.12954E+02	-0.18302E+02	0.12954E+02
0.00000E+00	0.87500E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.75000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.62500E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.50000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.12500E+01	0.50000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.25000E+01	0.50000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.37500E+01	0.50000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.50000E+01	0.50000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.50000E+01	0.37500E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.50000E+01	0.25000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.50000E+01	0.12500E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

## INTERNAL POINTS DISPLACEMENTS

X	Y	DISPLACEMENT X	DISPLACEMENT Y
0.5500000E+01	0.5500000E+01	0.5446005E+00	-0.1011741E-01
0.6000000E+01	0.6000000E+01	0.5282440E+00	0.1834289E-01
0.6500000E+01	0.6500000E+01	0.5100415E+00	0.4386335E-01
0.7000000E+01	0.7000000E+01	0.4910015E+00	0.6819388E-01
0.7500000E+01	0.7500000E+01	0.4715246E+00	0.9226186E-01
0.8000000E+01	0.8000000E+01	0.4516570E+00	0.1164305E+00
0.8500000E+01	0.8500000E+01	0.4312978E+00	0.1406890E+00
0.9000000E+01	0.9000000E+01	0.4103501E+00	0.1649660E+00

## INTERNAL POINTS STRESSES

X	Y	SIGMA X	TAU XY	SIGMA Y
0.5500000E+01	0.5500000E+01	0.6622521E+01	-0.2629576E+01	0.5054616E+01
0.6000000E+01	0.6000000E+01	0.4795326E+01	-0.2186640E+01	0.3211744E+01
0.6500000E+01	0.6500000E+01	0.3725522E+01	-0.1748601E+01	0.2167083E+01
0.7000000E+01	0.7000000E+01	0.2883989E+01	-0.1187848E+01	0.1414670E+01
0.7500000E+01	0.7500000E+01	0.2152825E+01	-0.5999054E+00	0.8219790E+00
0.8000000E+01	0.8000000E+01	0.1527743E+01	-0.1086014E+00	0.3429804E+00
0.8500000E+01	0.8500000E+01	0.1046432E+01	0.2084171E+00	-0.4442332E-01
0.9000000E+01	0.9000000E+01	0.9220859E+00	0.8247780E+00	-0.5416631E+00

**7.2 Resultados segundo ejemplo.**

PLACA EN L DEFORMACIONES PLANAS (12 QUADRATIC ELEMENTS)

DATA

NUMBER OF BOUNDARY ELEMENTS= 12

## 7.2 Resultados segundo ejemplo.

NUMBER OF INTERNAL POINTS= 8  
 SHEAR MODULUS= 0.1000000E+03  
 POISSON RATIO= 0.0000000E+00

## BOUNDARY NODES COORDINATES

NODE	X	Y
1	0.5000000E+01	0.0000000E+00
2	0.6250000E+01	0.0000000E+00
3	0.7500000E+01	0.0000000E+00
4	0.8750000E+01	0.0000000E+00
5	0.1000000E+02	0.0000000E+00
6	0.1000000E+02	0.2500000E+01
7	0.1000000E+02	0.5000000E+01
8	0.1000000E+02	0.7250000E+01
9	0.1000000E+02	0.1000000E+02
10	0.7500000E+01	0.1000000E+02
11	0.5000000E+01	0.1000000E+02
12	0.2500000E+01	0.1000000E+02
13	0.0000000E+00	0.1000000E+02
14	0.0000000E+00	0.8750000E+01
15	0.0000000E+00	0.7500000E+01
16	0.0000000E+00	0.6250000E+01
17	0.0000000E+00	0.5000000E+01
18	0.1250000E+01	0.5000000E+01
19	0.2500000E+01	0.5000000E+01
20	0.3750000E+01	0.5000000E+01
21	0.5000000E+01	0.5000000E+01
22	0.5000000E+01	0.3750000E+01
23	0.5000000E+01	0.2500000E+01
24	0.5000000E+01	0.1250000E+01

## BOUNDARY CONDITIONS

ELE	---FIRST NODE---				---SECOND NODE---				---THIRD NODE---			
	X DIR.	C	Y DIR.	C	X DIR.	C	Y DIR.	C	X DIR.	C	Y DIR.	C
1	0.000	1	0.000	0	0.000	1	0.000	0	0.000	1	0.000	0
2	0.000	1	0.000	0	0.000	1	0.000	0	0.000	1	0.000	0
3	0.000	1	-20.000	1	0.000	1	-20.000	1	0.000	1	-20.000	1
4	0.000	1	-20.000	1	0.000	1	-20.000	1	0.000	1	-20.000	1
5	0.000	1	-20.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
6	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	0	0.000	0
7	0.000	1	10.000	1	0.000	1	10.000	1	0.000	1	10.000	1
8	0.000	1	10.000	1	0.000	1	10.000	1	0.000	1	10.000	1
9	1.000	0	1.000	0	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
10	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
11	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
12	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	0

RESULTS

BOUNDARY NODES

## 7.2 Resultados segundo ejemplo.

X	Y	DISPLACEMENT X	DISPLACEMENT Y
0.500000E+01	0.000000E+00	-0.2128808E+01	0.0000000E+00
0.625000E+01	0.000000E+00	-0.2130764E+01	0.0000000E+00
0.750000E+01	0.000000E+00	-0.2151332E+01	0.0000000E+00
0.875000E+01	0.000000E+00	-0.2190259E+01	0.0000000E+00
0.100000E+02	0.000000E+00	-0.2229308E+01	0.0000000E+00
0.100000E+02	0.250000E+01	-0.1734930E+01	-0.1397674E+01
0.100000E+02	0.500000E+01	-0.6713843E+00	-0.2212998E+01
0.100000E+02	0.725000E+01	0.4582886E+00	-0.2704319E+01
0.100000E+02	0.100000E+02	0.2363667E+01	-0.3116007E+01
0.750000E+01	0.100000E+02	0.2067137E+01	-0.1018982E+01
0.500000E+01	0.100000E+02	0.1493898E+01	0.3217411E+00
0.250000E+01	0.100000E+02	0.7165446E+00	0.7884139E+00
0.000000E+00	0.100000E+02	0.0000000E+00	0.0000000E+00
0.000000E+00	0.875000E+01	0.6248945E+00	0.5026506E+00
0.000000E+00	0.750000E+01	0.6466681E+00	0.8987113E+00
0.000000E+00	0.625000E+01	0.5992227E+00	0.9485010E+00
0.000000E+00	0.500000E+01	0.1000000E+01	0.1000000E+01
0.125000E+01	0.500000E+01	0.5598710E+00	0.9989452E+00
0.250000E+01	0.500000E+01	0.2509284E+00	0.8314806E+00
0.375000E+01	0.500000E+01	0.5317945E-02	0.6474590E+00
0.500000E+01	0.500000E+01	-0.3659377E+00	0.3571136E+00
0.500000E+01	0.375000E+01	-0.1156944E+01	0.4031188E+00
0.500000E+01	0.250000E+01	-0.1694810E+01	0.3025830E+00
0.500000E+01	0.125000E+01	-0.2016252E+01	0.1585536E+00

X	Y	TRACTION X	TRACTION Y	TRACTION X	TRACTION Y
		BEFORE NODE	BEFORE NODE	AFTER NODE	AFTER NODE
0.5000E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	-0.11838E+02	0.0000E+00	-0.11838E+02
0.6250E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.51128E+01	0.0000E+00	0.51128E+01
0.7500E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.40403E+02	0.0000E+00	0.40403E+02
0.8750E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.70138E+02	0.0000E+00	0.70138E+02
0.1000E+02	0.0000E+00	0.0000E+00	0.16550E+03	0.0000E+00	-0.2000E+02
0.1000E+02	0.2500E+01	0.0000E+00	-0.2000E+02	0.0000E+00	-0.2000E+02
0.1000E+02	0.5000E+01	0.0000E+00	-0.2000E+02	0.0000E+00	-0.2000E+02
0.1000E+02	0.7250E+01	0.0000E+00	-0.2000E+02	0.0000E+00	-0.2000E+02
0.1000E+02	0.1000E+02	0.0000E+00	-0.2000E+02	0.0000E+00	-0.2000E+02
0.7500E+01	0.1000E+02	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.5000E+01	0.1000E+02	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.2500E+01	0.1000E+02	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.0000E+00	0.1000E+02	-0.47144E+02	-0.77436E+02	0.0000E+00	0.1000E+02
0.0000E+00	0.8750E+01	0.0000E+00	0.1000E+02	0.0000E+00	0.1000E+02
0.0000E+00	0.7500E+01	0.0000E+00	0.1000E+02	0.0000E+00	0.1000E+02
0.0000E+00	0.6250E+01	0.0000E+00	0.1000E+02	0.0000E+00	0.1000E+02
0.0000E+00	0.5000E+01	0.0000E+00	0.1000E+02	0.97183E+02	0.30735E+02
0.1250E+01	0.5000E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.2500E+01	0.5000E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.3750E+01	0.5000E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.5000E+01	0.5000E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.5000E+01	0.3750E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.5000E+01	0.2500E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.5000E+01	0.1250E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00

INTERNAL POINTS DISPLACEMENTS

## 7.3 Resultados tercer ejemplo.

X	Y	DISPLACEMENT X	DISPLACEMENT Y
0.5500000E+01	0.5500000E+01	-0.1998080E+00	0.1083969E+00
0.6000000E+01	0.6000000E+01	-0.3524539E-01	-0.1254507E+00
0.6500000E+01	0.6500000E+01	0.1484585E+00	-0.3758383E+00
0.7000000E+01	0.7000000E+01	0.3581428E+00	-0.6531674E+00
0.7500000E+01	0.7500000E+01	0.5985316E+00	-0.9631259E+00
0.8000000E+01	0.8000000E+01	0.8734301E+00	-0.1309416E+01
0.8500000E+01	0.8500000E+01	0.1185998E+01	-0.1694932E+01
0.9000000E+01	0.9000000E+01	0.1537541E+01	-0.2121408E+01

## INTERNAL POINTS STRESSES

X	Y	SIGMA X	TAU XY	SIGMA Y
0.5500000E+01	0.5500000E+01	-0.2834515E+02	0.1953697E+01	-0.4744244E+01
0.6000000E+01	0.6000000E+01	-0.1894277E+02	-0.2030756E+01	-0.3822686E+01
0.6500000E+01	0.6500000E+01	-0.1153061E+02	-0.5160472E+01	-0.4888202E+01
0.7000000E+01	0.7000000E+01	-0.5120072E+01	-0.7842829E+01	-0.6625237E+01
0.7500000E+01	0.7500000E+01	0.4251062E+00	-0.9998330E+01	-0.8638395E+01
0.8000000E+01	0.8000000E+01	0.5083683E+01	-0.1158642E+02	-0.1080660E+02
0.8500000E+01	0.8500000E+01	0.8754283E+01	-0.1258382E+02	-0.1311555E+02
0.9000000E+01	0.9000000E+01	0.8139297E+01	-0.1079903E+02	-0.1301712E+02

## 7.3 Resultados tercer ejemplo.

PLACA EN L DEFORMACIONES PLANAS (12 QUADRATIC ELEMENTS)  
 DATA  
 NUMBER OF BOUNDARY ELEMENTS= 12  
 NUMBER OF INTERNAL POINTS= 8  
 SHEAR MODULUS= 0.1000000E+03  
 POISSON RATIO= 0.0000000E+00

## BOUNDARY NODES COORDINATES

NODE	X	Y
1	0.5000000E+01	0.0000000E+00
2	0.6250000E+01	0.0000000E+00
3	0.7500000E+01	0.0000000E+00
4	0.8750000E+01	0.0000000E+00
5	0.1000000E+02	0.0000000E+00
6	0.1000000E+02	0.2500000E+01
7	0.1000000E+02	0.5000000E+01
8	0.1000000E+02	0.7250000E+01
9	0.1000000E+02	0.1000000E+02
10	0.7500000E+01	0.1000000E+02
11	0.5000000E+01	0.1000000E+02
12	0.2500000E+01	0.1000000E+02
13	0.0000000E+00	0.1000000E+02
14	0.0000000E+00	0.8750000E+01
15	0.0000000E+00	0.7500000E+01
16	0.0000000E+00	0.6250000E+01
17	0.0000000E+00	0.5000000E+01
18	0.1250000E+01	0.5000000E+01
19	0.2500000E+01	0.5000000E+01
20	0.3750000E+01	0.5000000E+01
21	0.5000000E+01	0.5000000E+01
22	0.5000000E+01	0.3750000E+01
23	0.5000000E+01	0.2500000E+01
24	0.5000000E+01	0.1250000E+01



## 7.3 Resultados tercer ejemplo.

BOUNDARY CONDITIONS												
---FIRST NODE---				---SECOND NODE---				---THIRD NODE---				
ELE	X DIR.	C	Y DIR.	C	X DIR.	C	Y DIR.	C	X DIR.	C	Y DIR.	C
1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
2	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
3	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
4	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	0	1.000	0
5	0.000	0	1.000	0	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
6	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	0	0.000	0
7	0.000	0	0.000	0	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
8	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
9	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
10	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1
11	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	30.375	1	0.000	1
12	30.375	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1	0.000	1

## RESULTS

## BOUNDARY NODES

X	Y	DISPLACEMENT X	DISPLACEMENT Y
0.500000E+01	0.000000E+00	0.2441640E+01	0.1428801E+00
0.625000E+01	0.000000E+00	0.2463027E+01	0.4395453E+00
0.750000E+01	0.000000E+00	0.2474334E+01	0.7702161E+00
0.875000E+01	0.000000E+00	0.2476803E+01	0.1114360E+01
0.100000E+02	0.000000E+00	0.2481084E+01	0.1467550E+01
0.100000E+02	0.250000E+01	0.1761323E+01	0.1457899E+01
0.100000E+02	0.500000E+01	0.1047886E+01	0.1387227E+01
0.100000E+02	0.725000E+01	0.5076145E+00	0.1227439E+01
0.100000E+02	0.100000E+02	0.000000E+00	0.100000E+01
0.750000E+01	0.100000E+02	0.7263405E-01	0.7200371E+00
0.500000E+01	0.100000E+02	0.1277152E+00	0.3536994E+00
0.250000E+01	0.100000E+02	0.1506392E+00	0.1254726E+00
0.000000E+00	0.100000E+02	0.000000E+00	0.000000E+00
0.000000E+00	0.875000E+01	0.2357693E+00	-0.1224878E+00
0.000000E+00	0.750000E+01	0.4350005E+00	-0.1617457E+00
0.000000E+00	0.625000E+01	0.5937291E+00	-0.1654573E+00
0.000000E+00	0.500000E+01	0.7364008E+00	-0.1630232E+00
0.125000E+01	0.500000E+01	0.7338210E+00	-0.2953104E-01
0.250000E+01	0.500000E+01	0.7392183E+00	0.8764756E-01
0.375000E+01	0.500000E+01	0.7708304E+00	0.1695528E+00
0.500000E+01	0.500000E+01	0.9065107E+00	0.2153172E+00
0.500000E+01	0.375000E+01	0.1407049E+01	0.7156005E-01
0.500000E+01	0.250000E+01	0.1944852E+01	0.9312787E-01
0.500000E+01	0.125000E+01	0.2175268E+01	0.1439911E+00

X	Y	TRACTION X BEFORE NODE	TRACTION Y BEFORE NODE	TRACTION X AFTER NODE	TRACTION Y AFTER NODE
0.5000E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.6250E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.7500E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.8750E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.1000E+02	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.1000E+02	0.2500E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.1000E+02	0.5000E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.1000E+02	0.7250E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.1000E+02	0.1000E+02	-0.51606E+01	-0.10257E+02	-0.51606E+01	-0.10257E+02
0.7500E+01	0.1000E+02	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.5000E+01	0.1000E+02	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.2500E+01	0.1000E+02	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.0000E+00	0.1000E+02	-0.12579E+02	0.14961E+02	-0.12579E+02	0.14961E+02
0.0000E+00	0.8750E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.0000E+00	0.7500E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.0000E+00	0.6250E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.0000E+00	0.5000E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.1250E+01	0.5000E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.2500E+01	0.5000E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.3750E+01	0.5000E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.5000E+01	0.5000E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.5000E+01	0.3750E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.5000E+01	0.2500E+01	0.30375E+02	0.0000E+00	0.30375E+02	0.0000E+00
0.5000E+01	0.1250E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00

## 7.3 Resultados tercer ejemplo.

## INTERNAL POINTS DISPLACEMENTS

X	Y	DISPLACEMENT X	DISPLACEMENT Y
0.5000000E+01	0.5500000E+01	0.8071192E+00	0.2617955E+00
0.5000000E+01	0.6000000E+01	0.7186940E+00	0.2894729E+00
0.5000000E+01	0.6500000E+01	0.6338012E+00	0.3100385E+00
0.5000000E+01	0.7000000E+01	0.5518318E+00	0.3257910E+00
0.5000000E+01	0.7500000E+01	0.4729725E+00	0.3377674E+00
0.5000000E+01	0.8000000E+01	0.3975875E+00	0.3465387E+00
0.5000000E+01	0.8500000E+01	0.3259913E+00	0.3524522E+00
0.5000000E+01	0.9000000E+01	0.2582200E+00	0.3557366E+00

## INTERNAL POINTS STRESSES

X	Y	SIGMA X	TAU XY	SIGMA Y
0.5000000E+01	0.5500000E+01	0.1087068E+02	-0.6087766E+01	0.1313778E+02
0.5000000E+01	0.6000000E+01	0.5965303E+01	-0.4628479E+01	0.9417624E+01
0.5000000E+01	0.6500000E+01	0.3359910E+01	-0.3938249E+01	0.7170381E+01
0.5000000E+01	0.7000000E+01	0.1731382E+01	-0.3372250E+01	0.5496974E+01
0.5000000E+01	0.7500000E+01	0.6119763E+00	-0.2760951E+01	0.4120841E+01
0.5000000E+01	0.8000000E+01	-0.2453701E+00	-0.2041855E+01	0.2918631E+01
0.5000000E+01	0.8500000E+01	-0.1028377E+01	-0.1197385E+01	0.1827042E+01
0.5000000E+01	0.9000000E+01	-0.1953916E+01	-0.2676552E+00	0.8144085E+00

## Bibliografía

- [1] ATKIN R. J., FOX N., (1993). An Introduction to the Theory of Elasticity, ed. Dover, 1980.
- [2] AUBANELL A., BENSENY A., DELSHAMS A., (1993). Útiles básicos de cálculo numérico. Labor, Barcelona-España.
- [3] BECKER A. The Boundary Element Method In Engineering. McGraw Hill. 1992.
- [4] BREBBIA C., DOMINGUEZ J., (1989). Boundary Elements: An Introductory Course. Southampton, UK. WIT Press. Segunda edición. (Computational Mechanics Publications).
- [5] BERROCAL L., (1990). Resistencia de materiales. Catedrático de elasticidad y resistencia de materiales. Escuela técnica superior de Ingenieros Industriales. Universidad politécnica de Madrid. McGraw-Hill Madrid- España.
- [6] BREBBIA C., TELLES J.F., WROBEL, L.C., (1984). Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering. Belin, Alemania. Spring. (Computational Mechanics Publications).
- [7] CERROLAZA M., (1989). Elementos de Contorno p-adaptables: Desarrollo y aplicaciones en teoría de potencial y elastostática. Caracas, Venezuela. Universidad Central de Venezuela.
- [8] CELA LÓPEZ J., (2000). Mecanica de los Medios Continuos. Caracas, Venezuela. Universidad Central de Venezuela. Universidad De Castilla-la Mancha. Codigo ISBN: 9788484270300.
- [9] CEZARIO F., SANTIAGO J.A.F, OLIVEIRA R.F., (2010). Two-dimensional version of Sternberg and Al-Khozaie fundamental solution for viscoelastic analysis using the boundary element method. Engineering analysis with boundary elements, ISSN 0955-7997, Vol. 35, Nro. 6, págs. 836-844.
- [10] EZQUERRO J. A., (2012). Iniciación a los métodos numéricos. Universidad de la Rioja, Servicios de publicaciones. ISBN 978-84-695-2800-6.
- [11] EBRAHIMNEJAD L., ATTARNEJAD R., EBRAHIMNEJAD H., (2010). Applying wavelets to improve the boundary element method for elasticity problems. Engineering analysis with boundary elements, ISSN 0955-7997, Vol. 34, Nro. 9, págs. 810-818.
- [12] FAIRE J. B., BURDEN R., (2004). Métodos numéricos, 3era edición. Thomson, Madrid.
- [13] BEER. G., SMITH, I., DUENSER, C., (2008). The Boundary Element Method with Programming. For ingineers and scientists. Springer-Verlag/Wien.

- [14] GUILHERME P., PARREIRA V., (1987). Análise do erro no Método dos elementos de fronteira en Elasticidade. Lisboa, Portugal. Universidade Técnica de Lisboa.
- [15] GONZÁLEZ DE LEÓN M. A., WROBEL LUIZ C., DEL JESÚS- MARTINEZ M., (1987). A new algorithm for near-singular integration of 3D Boundary Element Integrals for thin-walled elements. Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia, núm. 74, marzo, pp. 96-107, Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.
- [16] HABERMAN R., (1984). Ecuaciones en derivadas parciales con series de Fourier y problemas de contorno. Prentice Hall.
- [17] MA JASWON, (1963). Integral equation methods in potential theory I. Proceedings of the Royal Society of London Series A, volume 275, page 23.
- [18] KENG-CHENG ANG, (2008). Introducing the boundary element method with MATLAB. International journal of mathematical education in science and technology, ISSN 0020-739X, Vol. 39, Nro. 4, 2008, págs. 505-519.
- [19] OJEDA D., DIVO E., KASSAB A., CERROLAZA M., (2008). Locating defects in cortical bone using the boundary element method and genetic algorithms., Instituto de Materiales y Modelos Estructurales. Facultad de Ingeniería. Universidad Central de Venezuela, ISSN 0376-723X.
- [20] OKADA H., RAJIYAH H. AND ATLURI S. N., (1988). A Novel Displacement Gradient Boundary Element Method for Elastic Stress Analysis With High Accuracy. J. Appl. Mech 55(4), 786-794, (9 pages) doi:10.1115/1.3173723.
- [21] Fundación Wikimedia, Inc.,(2016) *Fortran*, <https://es.wikipedia.org/wiki/Fortran>.
- [22] PINEDA-LEÓN E., ALIABADI M.H., (2006). Boundary Element Analysis of Elasto-Plastic Problems, Científica, vol. 11, núm. 1, enero-marzo, 2007, pp. 17-26, Instituto Politécnico Nacional, Distrito Federal, México.
- [23] PORTILHO PAIVA W., SOLLERO P., LIMA ALBUQUERQUE E., (2011). Modal analysis of anisotropic plates using the boundary element method. Engineering analysis with boundary elements, ISSN 0955-7997, Vol. 35, Nro. 12, págs. 1248-1255.
- [24] QUARTERONI A., SALERI F., (2006). Cálculo científico con MATLAB y Octave, Springer- Verlag. Milano- Italia.
- [25] FJ RIZZO, (1967). An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. Quarterly of Applied Mathematics, volume 25, page 83.
- [26] GT SYMM, (1963). Integral equation methods in potential theory II. Proceedings of the Royal Society of London Series A, volume 275, page 33.
- [27] VALERA M., VIDELA L., (2010). Integración analítica sobre un elemento de contorno cuadrático subparamétrico en elasticidad plana. Modelos Computacionales en Ingeniería: Desarrollos Novedosos y aplicaciones. Sociedad Venezolana de Métodos numéricos en Ingeniería. pp, MM37-MM42.

- [28] VALERA M., VIDELA L., CERROLAZA M., (2013). Formulación eficientes y compacta para un elemento de contorno cuadrático para elasticidad en 2D. Revista de la Facultad de Ingeniería UCV. Vol. 28. Nro1. pp, 15-24.
- [29] SONG-PING Z., YINGLONG Z., (2007). A comparative study of the direct boundary element method and the dual reciprocity boundary element method in solving the Helmholtz equation. Anziam journal: The Australian and New Zealand industrial and applied mathematics journal, ISSN 1446-1811, Vol. 49, Nro 1, págs. 131-150.
- [30] ZHANG Y. M., GU Y., CHEN J. T., (2011). Boundary element analysis of 2D thin walled structures with high-order geometry elements using transformation. Engineering analysis with boundary elements, ISSN 0955-7997, Vol. 35, Nro. 3 págs. 581-586.
- [31] TIMOSHENKO S., GOODIER J. N., (2004). Teoría de la elasticidad. I.S.B.N. 84-314-0231-8, España.