

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

MODELAJE GEOESTADÍSTICO DE UN CAMPO DE PERMEABILIDAD CON INTEGRACIÓN DE DATOS DINÁMICOS

Presentado ante la Ilustre
Universidad Central de
Venezuela para optar al Título
de Ingeniero de Petróleo
Por el Br. Hernández R., Edwin G.

Caracas, Junio 2002

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

MODELAJE GEOESTADÍSTICO DE UN CAMPO DE PERMEABILIDAD CON INTEGRACIÓN DE DATOS DINÁMICOS

TUTORES ACADÉMICOS: Prof. Reinaldo González
Prof. Edgar Parra
TUTOR INDUSTRIAL: Dr. Robert Porjesz

Presentado ante La Ilustre
Universidad Central de
Venezuela para optar al Título
de Ingeniero de Petróleo
Por el Br. Hernández R., Edwin G.

Caracas, Junio 2002

A ti Alexito

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Central de Venezuela por haberme dado la oportunidad de alcanzar una de las mayores metas que me he propuesto en la vida.

A la Facultad de Ingeniería, a mi Escuela de Petróleo y a todos sus profesores por la formación y el apoyo que me han brindado.

A los profesores Reinaldo González y Edgar Parra por haber aceptado formar parte de este trabajo, por sus consejos, por su apoyo y sobre todo por ser parte del grupo de profesores que me han formado.

A Robert Porjesz por proponerme hacer este trabajo, todo un reto para mí, espero no haberte defraudado. Por tus consejos, tu apoyo y tu amistad.

A Intevep por permitirme desarrollar este trabajo en sus instalaciones.

A los señores Gustavo Gedler, Carlos Castillo, Oscar Rondón y Pedro Vaca por toda la ayuda que me brindaron.

Al señor Luis Vierma por su amistad y la oportunidad que me brindó.

A Jesús Reyes por su ayuda, su apoyo y su amistad. A todos mis compañeros que de alguna u otra forma formaron parte de este trabajo.

A mis padres por haberme formado como hombre de bien, a ellos y a mi hermana por su respaldo, solidaridad y por haber soportado conmigo los malos momentos que pasé durante este trabajo.

A mi novia Mary por estar ahí conmigo, por acompañarme todos los años de mi carrera, sobre todo en los peores momentos de ella, por su incondicional apoyo y por su amor, motivo de inspiración.

A todos mis familiares y amigos que siempre me apoyan.

A todas las personas que no menciono pero que también dieron necesarios aportes directos o indirectos.

A Dios por poner en mi vida a todas estas personas.

Hernández R., Edwin G.

MODELAJE GEOESTADÍSTICO DE UN CAMPO DE PERMEABILIDAD CON INTEGRACIÓN DE DATOS DINÁMICOS

Tutores Académicos: Prof. Reinaldo González, Prof. Edgar Parra. **Tutor Industrial:** Dr. Robert Porjesz. **Tesis.** Caracas, U.C.V. Facultad de Ingeniería. Escuela de Petróleo. Año 2002, 104 p.

Palabras Claves: Variograma, Integración, Cokriging, Permeabilidad, Presión.

Resumen. Para elaborar un plan de explotación de un yacimiento es indispensable generar un modelo estático lo más realista posible. Este trabajo se puede realizar mediante la aplicación de métodos estocásticos, los cuales permiten no solamente hacer la descripción de un medio heterogéneo, sino también integrar datos de diferentes disciplinas (sísmica, petrofísica, etc). Sin embargo, dichos modelos pueden ser incompatibles con el comportamiento dinámico de los yacimientos, ya que generalmente no toman en cuenta las variaciones de las propiedades en el tiempo. Existen diferentes enfoques para tratar de evitar este tipo de problema (redes neuronales por ejemplo) los cuales requieren un modelo inicial que será modificado posteriormente (métodos *a posteriori*).

En este trabajo se propone la adaptación para la industria petrolera de un método desarrollado en hidrogeología, el cual permite la estimación de un campo de permeabilidad integrando *a priori* datos dinámicos tales como presión, producción e inyección con la información estática. La idea principal de la integración de datos dinámicos (presión explícitamente, producción implícitamente) al modelaje del campo de permeabilidad consiste en el uso de métodos basados en cokriging.

El variograma de la permeabilidad se determina de la manera tradicional (variograma experimental y después el ajuste del mismo), mientras que los variogramas cruzados, necesarios para el cokriging, entre permeabilidad y presiones en diferentes tiempos se calculan tomando en cuenta la ecuación de

difusividad. Este enfoque permite no solamente tomar en cuenta el tiempo en el modelaje estático por la ecuación de difusividad, sino también el uso de leyes físicas, las cuales son ignoradas generalmente.

Se presenta un estudio con datos sintéticos, lo que permite cuantificar el aporte del método con respecto a la estimación sin la integración de datos dinámicos.

A pesar de ciertas limitaciones del método (campo de permeabilidad estacionario, etc.) y un formalismo matemático relativamente pesado, se puede mencionar que la integración de datos dinámicos en el modelaje estático permite reducir el tiempo de cotejo histórico el cual es uno de los procesos más costosos en cuanto a tiempo de ejecución de un estudio de este tipo.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS	IX
LISTA DE TABLAS	X
INTRODUCCIÓN	1
I MARCO TEÓRICO	3
I.1 GEOESTADÍSTICA	3
I.1.1 Introducción	3
I.1.2 Breve reseña histórica	3
I.1.3 Definición y alcance	4
I.1.4 Patrones espaciales.....	5
I.1.5 Elementos básicos de un estudio geoestadístico	5
I.1.6 Integración de información.....	17
I.2 PERMEABILIDAD. CONCEPTOS BÁSICOS	18
I.2.1 Introducción	18
I.2.2 Conceptos básicos.....	18
I.3 ASPECTOS BÁSICOS DE LA SIMULACIÓN DE YACIMIENTOS.....	22
I.3.1 Introducción	22
I.3.2 Antecedentes	22
I.3.3 Simulación numérica de yacimientos	23
I.3.4 Modelo estático. Distribución de la permeabilidad	24
I.3.5 Ajuste histórico.....	25
II PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	28
II.1 INTRODUCCIÓN	28
II.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	29
II.3 METODOLOGÍA.....	37
II.3.1 Generación del modelo sintético de permeabilidad y selección de las ubicaciones de los pozos.....	37

II.3.2 Generación del campo de presiones.....	37
II.3.3 Cálculo de las matrices de covarianzas.....	38
II.3.4 Cokriging.....	44
II.3.5 Simulación numérica de los campos de presiones.....	45
II.4 EJEMPLOS NUMÉRICOS.....	46
III RESULTADOS.....	52
III.1 INTRODUCCIÓN.....	52
III.2 PRESENTACIÓN DE RESULTADOS.....	52
III.3 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS.....	57
IV CONCLUSIONES.....	60
V LIMITACIONES/RECOMENDACIONES.....	61
VI REFERENCIAS.....	63
VII APÉNDICES.....	71
VII.1 FUNCIONES ALEATORIAS. CONCEPTOS BÁSICOS.....	71
VII.1.1 Función aleatoria.....	71
VII.1.2 Función de distribución y momentos de una función aleatoria.....	71
VII.1.3 Funciones aleatorias estacionarias.....	73
VII.2 ECUACIÓN DE DIFUSIVIDAD.....	74
VII.3 FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA.....	78
VII.4 DESARROLLO NUMÉRICO DE LA INTEGRAL PARA EL CÁLCULO DE LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES DE SENSIBILIDAD.....	89
VII.5 DESARROLLO DE LAS ECUACIONES PARA EL KRIGING Y EL COKRIGING.....	92
VII.5.1 Kriging.....	92
VII.5.2 Cokriging.....	97
VII.5.3 Sistema de ecuaciones del cokriging para este estudio.....	101
VIII ANEXOS.....	104

LISTA DE FIGURAS

Figura N°. 1. Mapas de atributos que presentan media y varianza idénticas.....	6
Figura N°. 2. Variograma experimental.....	7
Figura N°. 3. Covarianza experimental.....	8
Figura N°. 4. Relación entre la covarianza y el variograma.....	9
Figura N°. 5. Ajuste de un variograma teórico a uno experimental.....	10
Figura N°. 6. Variograma exponencial.....	12
Figura N°. 7. Comparación de una estimación (kriging) con su campo real.....	13
Figura N°. 8. Dominio exclusivo de la celda i	33
Figura N°. 9. Malla utilizada para la aplicación de la metodología.....	46
Figura N°. 10. Campo sintético Y (logaritmo de permeabilidad).....	48
Figura N°. 11. Configuración escenario N°. 1.....	50
Figura N°. 12. Configuración escenario N°. 2.....	51
Figura N°. 13. Campo del logaritmo de permeabilidad estimado (cokriging) para el escenario 1.....	53
Figura N°. 14. Campo del logaritmo de permeabilidad estimado (cokriging) para el escenario 2.....	54
Figura N°. 15. Campo del logaritmo de permeabilidad estimado para el escenario 1 mediante kriging.....	55
Figura N°. 16. Campo del logaritmo de permeabilidad estimado para el escenario 2 mediante kriging.....	56
Figura N°. 17. Volumen utilizado para la derivación de la ecuación de difusividad.	74
Figura N°. 18. Dominio (Ω_i) para el caso unidimensional.....	89

LISTA DE TABLAS

Tabla N°. 1. Datos del yacimiento en el que se basaron los escenarios.	49
Tabla N°. 2. Medidas de $\ln(K)$ y observaciones de presión para el escenario N°. 1.	50
Tabla N°. 3. Medidas de $\ln(K)$ y observaciones de presión para el escenario N°. 2.	51
Tabla N°. 4. Error calculado para la estimación del campo $\ln(K)$	57
Tabla N°. 5. Error calculado para el cotejo del campo de presiones.	57
Anexo N°. 1. Ejemplo del contenido de los archivos de covarianzas.	104

INTRODUCCIÓN

El modelaje de yacimientos generalmente contempla dos etapas. En la primera, se genera el modelo estático utilizando datos provenientes de registros de pozos, núcleos, sísmica, etc. En la segunda etapa, el modelo estático generado es modificado con el objeto de ajustar el comportamiento dinámico del modelo matemático a los datos observados en el campo. Esta última, en ocasiones puede ser tan independiente de la primera que el modelo final del yacimiento se ajusta muy bien a los datos de producción, pero el modelo estático deja de ser consistente con la información con que fue generado.

Una fuente de información generalmente excluida en la etapa de generación del modelo estático es la proveniente de los pozos en forma de mediciones de presión y tasas de producción. Estos datos dinámicos contienen información acerca de la extensión, la continuidad y el proceso de flujo del yacimiento, y su integración en esta etapa del modelaje puede dar un mayor alcance a la misma.

La integración de datos dinámicos al modelaje de yacimientos, ha sido materia de muchas investigaciones^{11,12,23,28,30,31,50,61}. Actualmente éstas, continúan desarrollándose con el objetivo de conseguir modelos de yacimientos mucho más confiables que reproduzcan de manera más aproximada el comportamiento real de los mismos.

El presente trabajo ha sido llevado a cabo, con el objeto de adaptar a la industria petrolera, un método⁶¹ desarrollado en el área de hidrogeología que permite la estimación del campo de permeabilidad integrando datos dinámicos como presión, producción e inyección con la información estática a través del método del cokriging.

Este informe tiene como finalidad presentar el fundamento teórico, el desarrollo matemático y las distintas actividades realizadas para cumplir con el objetivo del trabajo.

En el capítulo I, se presentan los fundamentos teóricos de las herramientas geoestadísticas utilizadas en el trabajo. Además se desarrollan ideas básicas sobre permeabilidad y simulación numérica de yacimientos. En esto último, haciendo énfasis en el procedimiento de cotejo histórico.

El planteamiento matemático es desarrollado en el capítulo II. Se presentan las ecuaciones utilizadas a lo largo del trabajo y cuyo desarrollo detallado puede observarse en el capítulo VII de apéndices. También, se desarrollan dos ejemplos, cada uno de los cuales parte de diferentes cantidades de información de un campo sintético generado previamente. Los resultados obtenidos y el análisis derivado de éstos se presentan en el capítulo III. Finalmente, los capítulos IV y V resumen las conclusiones y limitaciones/recomendaciones respectivamente.

I MARCO TEÓRICO

I.1 GEOESTADÍSTICA^{6,7,8,17,45,51}

I.1.1 Introducción

En las ciencias de la tierra, los datos exhiben en mayor o menor grado cierta correlación. Generalmente, a medida que la distancia entre dos puntos de observación de cierta propiedad aumenta, la similitud entre los dos disminuye. La geoestadística ofrece una gran variedad de herramientas, basadas entre otras, en la matemática, la estadística y la teoría de probabilidad, las cuales cuantifican y modelan la variabilidad espacial de cierta propiedad. Esta variabilidad espacial incluye heterogeneidades y direcciones de mayor correlación dentro de un grupo de datos.

Las enormes investigaciones para lograr representar campos heterogéneos y el deseo de mejorar el recobro han obligado a las compañías petroleras a usar técnicas innovadoras de caracterización de yacimientos. La geoestadística es una de las tecnologías que ha sido incorporada a los procesos y durante la última década ha sido de mucha utilidad en la caracterización de yacimientos de hidrocarburos.

I.1.2 Breve reseña histórica

Los orígenes de la geoestadística se consiguen exclusivamente en la industria minera cuando D. C. Krige, ingeniero de minas sudafricano y H. S. Sichel, estadístico, desarrollaron a comienzos de los años 1950s un método de estimación para reservas diseminadas de oro, ya que las herramientas ofrecidas por la estadística no eran suficientes⁷.

George Matheron, ingeniero francés, desarrolló el trabajo de Krige y lo formalizó dentro del marco de su Teoría de Variables Regionalizadas⁵¹. Matheron lideró el uso de la geoestadística minera en los comienzos de 1960 y la palabra Kriging fue establecida en reconocimiento del trabajo realizado por Krige.

En los inicios de los años setentas, este método de estimación había probado ser muy útil en la industria minera. La geoestadística fue introducida a la industria petrolera a mediados de los años setenta a través del primer paquete comercial llamado BLUEPACK. En esta misma época, con la llegada de las computadoras de alta velocidad, la técnica fue extendida hacia muchas otras áreas en las ciencias de la tierra. Sin embargo, no fue hasta finales de los años ochentas que las técnicas geoestadísticas fueron utilizadas en su gran extensión en la industria petrolera y su popularidad ha crecido con los años desde ese entonces.

I.1.3 Definición y alcance

Matheron la definió como⁵¹: “la aplicación del formalismo de las funciones aleatorias al reconocimiento y estimación de fenómenos naturales”. Una *variable aleatoria* es aquella cuyos valores son generados de acuerdo con algún mecanismo probabilístico²¹. Un grupo de valores de una variable aleatoria, cada uno ubicado en un punto del espacio y en los que la dependencia entre uno y otro viene dada por dicho mecanismo probabilístico se conoce como *función aleatoria*. (Ver apéndice VII.1)

El fin de la geoestadística es la caracterización del fenómeno natural, lo que conduce a varios tipos de aplicaciones. Una de éstas es la estimación a partir de un conjunto de medidas que suele producir mapas mucho más suaves que la realidad. Otro tipo de aplicación es la simulación estocástica que, partiendo del mismo conjunto de medidas, puede generar una gran cantidad de realizaciones o

posibles escenarios de la variable estudiada y que permiten cuantificar la incertidumbre asociada a éstos.

I.1.4 Patrones espaciales⁴⁵

Las variables de interés en la industria petrolera (porosidad, permeabilidad, saturación, volúmenes de arena/arcilla, etc.) son el producto de un vasto número de procesos físicos, químicos y geológicos complejos. Estos procesos imponen un patrón espacial en las propiedades de la roca del yacimiento y es importante entender las escalas y tendencias de dichas propiedades para un diseño eficiente del sistema de producción.

I.1.5 Elementos básicos de un estudio geoestadístico

Una vez que un grupo de datos de alguna propiedad es obtenido, dos de las actividades que se realizan son:

- Análisis y modelaje de la continuidad espacial
- Estimación

I.1.5.1 Análisis y modelaje de la continuidad espacial

El análisis de la continuidad espacial permite cuantificar la variabilidad de cierta propiedad con respecto a la distancia y dirección. Cuantificar la información espacial implica comparar el valor de un atributo en una localización con valores del mismo atributo u otros correlacionados con él en otras localizaciones. Por ejemplo, en dos pozos muy cercanos existe mayor probabilidad de tener propiedades similares del yacimiento que dos pozos que se encuentren muy alejados.

Considere las dos imágenes de la figura N°. 1. La figura 1.1 tiene una apariencia aleatoria pero presenta cierta alineación preferencial desde el noroeste hacia el sureste. En la figura 1.2 se resalta una tendencia con mayor grado de continuidad, también en la dirección noroeste-sureste. Visualmente, las imágenes aparentan ser distintas, sin embargo la media y varianza de los datos que representan son idénticas. Un análisis estadístico no puede determinar la continuidad espacial y dirección preferencial de los datos, así, se requiere un modelo que describa lo más aproximadamente posible las propiedades espaciales de éstos.

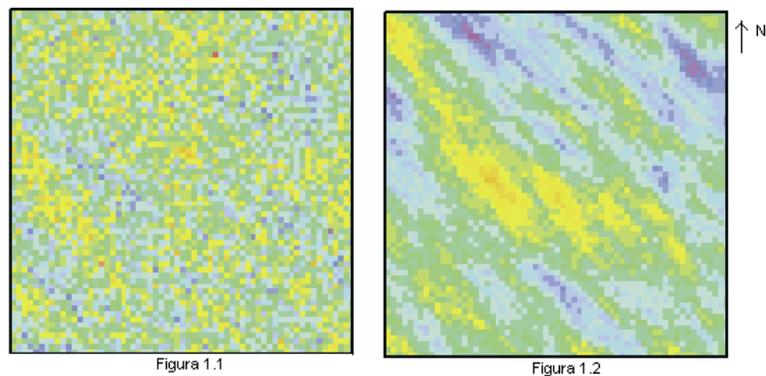


Figura N°. 1. Mapas de atributos que presentan media y varianza idénticas.

El análisis de la correlación espacial comprende dos pasos importantes:

1. Utilización de herramientas que permitan estudiar la continuidad espacial, para determinar anisotropías (variograma o covarianza experimentales).
2. Modelaje del variograma o covarianza experimental que podría ser utilizado en la construcción de mapas.

Estudio de la continuidad espacial. Se lleva a cabo mediante la utilización del variograma o la función de covarianza.

Variograma. Es una herramienta que nos permite medir el grado de *disimilitud* entre las muestras en una determinada dirección y distancias. Considere la variable aleatoria Z , la disimilitud puede ser expresada, siempre y cuando Z sea estacionaria (ver apéndice VII.1), como:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} (z(x_i) - z(x_i + h))^2 \quad 1.1$$

donde $z(x_i)$ es el valor de la muestra en la localización x_i , $z(x_i+h)$ es el valor de la muestra en la localización x_i+h , h es la distancia entre los puntos x_i y x_i+h , y $N(h)$ es el número de pares de puntos que se encuentran separados por una distancia h . Calculando y graficando el variograma (γ) en función de la distancia, resulta el gráfico del variograma experimental, figura N°. 2.

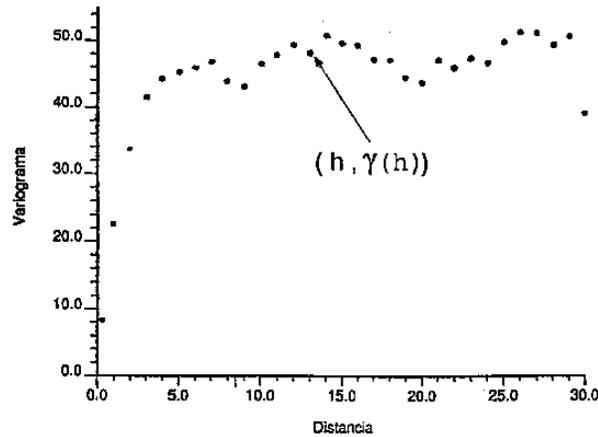


Figura N°. 2. Variograma experimental.

También se puede medir el grado de disimilitud entre muestras de dos propiedades distintas. Considere las variables Z e Y , ambas estacionarias. La herramienta que determina dicha disimilitud se conoce como *variograma cruzado* y está definido como:

$$\gamma_{ZY}(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} (z(x_i) - z(x_i + h))(y(x_i) - y(x_i + h)) \quad 1.2$$

donde $z(x_i)$ y $y(x_i)$ son los valores de las muestras en la localización x_i , $z(x_i+h)$ y $y(x_i+h)$ son los valores de las muestras en la localización x_i+h , h es la distancia entre los puntos, y $N(h)$ es el número de pares de puntos que se encuentran separados por una distancia h .

Covarianza. Es otra medida de dependencia espacial y mide el grado de *similitud* (correlación) entre las muestras en una determinada dirección y distancias. Puede ser expresada como:

$$C(h) = \frac{1}{N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} z(x_i)z(x_i + h) - m_{-h}m_{+h} \quad 1.3$$

donde,

$$m_{+h} = \frac{1}{N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} z(x_i + h) \quad m_{-h} = \frac{1}{N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} z(x_i) \quad 1.4$$

$z(x_i)$ es valor de la muestra en la localización x_i , $z(x_i+h)$ es valor de la muestra en la localización x_i+h , h es la distancia entre los puntos, y $N(h)$ es el número de pares de puntos que se encuentran separados por una distancia h . Calculando y graficando la covarianza, $C(h)$ en función de la distancia, resulta el gráfico de la covarianza experimental, figura N°. 3.

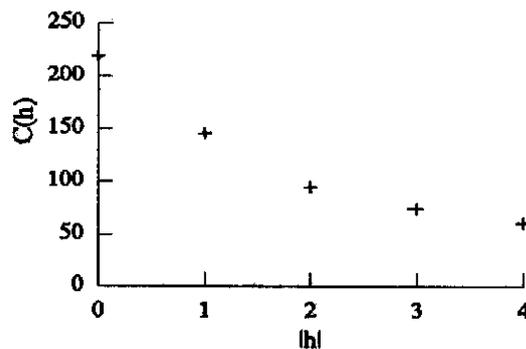


Figura N°. 3. Covarianza experimental.

En este caso también se puede conocer el grado de similitud entre muestras de dos propiedades distintas mediante:

$$C_{ZY}(h) = \frac{1}{N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} z(x_i)y(x_i + h) - m_{-h}m_{+h} \quad 1.5$$

donde,

$$m_{+h} = \frac{1}{N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} y(x_i + h) \quad 1.6$$

y m_{-h} es igual que en la ecuación 1.4.

Relación del variograma con la covarianza. Cuando la función aleatoria Z es estacionaria existe una relación inmediata entre el variograma $\gamma(h)$ y la función de covarianza $C(h)$ dada por:

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= Var(Z(x)) - Cov(h) \\ \text{ó} & \\ \gamma(h) &= \sigma^2 - C(h) = C(0) - C(h) \end{aligned} \quad 1.7$$



Figura N°. 4. Relación entre la covarianza y el variograma.

Bajo estas condiciones, la covarianza alcanza el rango (ver modelos teóricos en la siguiente página) cuando $C(h)=0$. El rango de la covarianza debe ser igual al del variograma para un mismo grupo de datos.

Aplicación de las herramientas. Durante el estudio de la continuidad espacial se calcula el variograma/covarianza experimental en diversas direcciones y distancias, con la finalidad de detectar el comportamiento espacial de la variable. Como resultado se tiene, en cada dirección utilizada, un conjunto de puntos que representa el valor del variograma/covarianza experimental calculado para distintos valores de distancia. En los gráficos se obtiene una representación discreta (ya que se cuenta con un número finito de muestras de la variable o propiedad en estudio) de como varía el variograma/covarianza experimental en una cierta dirección al variar la distancia (figuras N°. 2 y 3).

Modelos teóricos. El variograma/covarianza experimental es un resumen descriptivo de la continuidad espacial, pero presenta distancias para las que su valor es desconocido. Los métodos de estimación como el kriging, no sólo necesitan los valores del variograma/covarianza entre los datos, sino que también los valores entre puntos donde no los hay. Entonces, para asegurar que estos valores se puedan calcular, es necesario ajustar un modelo teórico al modelo experimental, figura N°. 5.

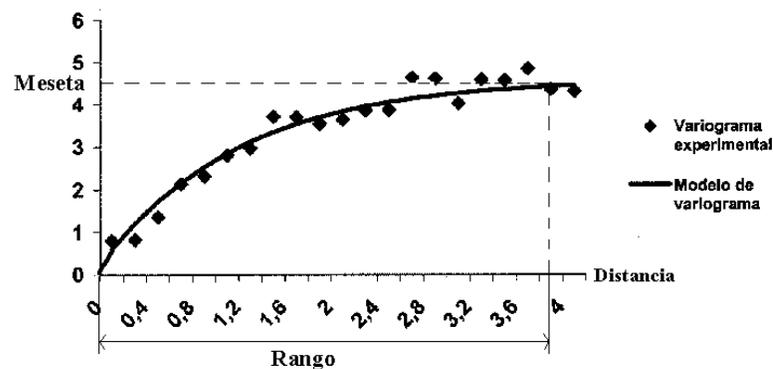


Figura N°. 5. Ajuste de un variograma teórico a uno experimental.

En la figura N°. 5, se puede observar que con el incremento de la distancia, $\gamma(h)$ tiende a alcanzar un valor constante, conocido como la *meseta* (línea punteada horizontal). La meseta es la varianza (σ^2) de los datos y la distancia a

la que es alcanzada es conocida como *rango* o *longitud de correlación* (línea punteada vertical).

Existe una gran cantidad de modelos teóricos. Éstos deben cumplir con algunas condiciones que impiden que se pueda utilizar cualquier función⁶. Algunos de ellos son:

- Efecto pepita puro
- Esférico
- Gaussiano
- Potencia
- Cúbico
- Seno cardinal
- Exponencial

A continuación se presenta el modelo exponencial ya que fue utilizado en este trabajo. Para otros modelos se puede consultar la referencia [6].

*Modelo exponencial*⁶. Se define como:

$$\gamma(h) = s \left(1 - \exp\left(-\frac{|h|}{a}\right) \right) \quad 1.8$$

donde s es el valor de la meseta y a es el rango *aparente*. En este caso a recibe este nombre porque a esta distancia no se estabiliza el variograma. De hecho, el variograma exponencial alcanza la meseta cuando a tiende a infinito. Por esta razón, se suele calcular el *rango experimental*, que se define como la distancia a la cual el variograma alcanza el 95% del valor de la meseta. Para el variograma exponencial el *rango experimental* es $3a$.

Una forma equivalente de escribir la ecuación que define al variograma exponencial es:

$$\gamma(h) = s \left(1 - \exp\left(-\frac{3|h|}{a'}\right) \right) \quad 1.9$$

Escrito en esta forma, la meseta es s y el rango experimental es $a'=3a$. Utilizando esta última ecuación, se obtiene que el variograma exponencial tiene un comportamiento lineal en el origen con pendiente igual a $3s/a$. En la figura N°. 6 se representa un variograma exponencial.

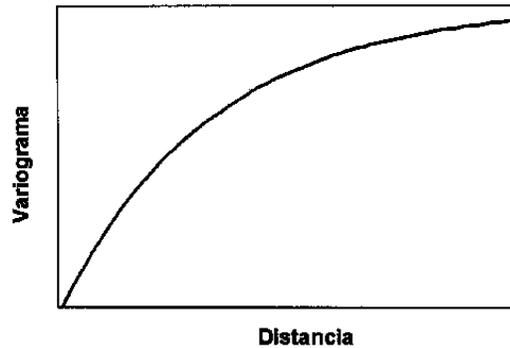


Figura N°. 6. Variograma exponencial.

Ajuste del modelo. El ajuste generalmente se realiza buscando que el modelo pase cerca de todos los puntos del variograma experimental o siga la tendencia de éstos variando parámetros como la meseta o el rango. El criterio ampliamente utilizado para ello es netamente visual.

I.1.5.2 Estimación⁶

En la industria petrolera se presenta el problema de estimar diferentes propiedades (porosidad, permeabilidad, saturación de agua, facies) a lo largo de todo el yacimiento, las cuales están medidas sólo en algunos puntos, por ejemplo en pozos. Existen diferentes métodos para cumplir con este objetivo⁶:

mínimos cuadrados, inverso de la distancia, kriging, etc. Naturalmente, ninguno de estos métodos puede describir el yacimiento, todos los modelos son simplificaciones y/o aproximaciones de la realidad. Eso no significa que los métodos sean inadecuados, ellos describen de cierta manera el yacimiento, sólo se deben tener en cuenta las limitaciones de los mismos. Tampoco se puede decir que existe el mejor método, la escogencia del método utilizado es función de los datos disponibles, del objetivo del estudio, de las características de los métodos, etc.

Los métodos de estimación proporcionan un único resultado al problema inverso que se plantea al tratar de conocer la configuración del yacimiento conociendo sólo algunos valores observados. Por ejemplo, la estimación del comportamiento espacial de la variable $\{z(x); x \in A\}$ el cual es desconocido (donde A representa el yacimiento y $z(x)$ puede ser ejemplo la permeabilidad), es reemplazado por un único conjunto de valores estimados $\{z^*(x); x \in A\}$. Además, ese resultado es generalmente una imagen suavizada de la realidad (figura N°. 7), que no reproduce la variabilidad (heterogeneidad) de la propiedad estudiada. En otras palabras, la varianza de los datos es mayor que la varianza de la estimación.

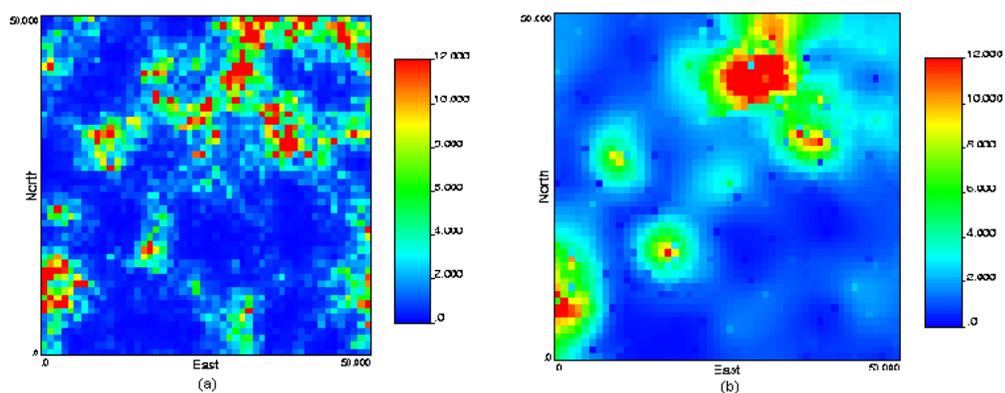


Figura N°. 7. Comparación de una estimación (kriging) con su campo real. (a) campo real (b) estimación.

Kriging. El kriging considera la correlación espacial entre los datos mediante funciones de variograma o de covarianza. Eso permite describir y respetar de cierta manera la continuidad de los cuerpos.

El kriging es un método de estimación lineal, es decir, el valor estimado de la variable aleatoria $Z(x_0)$ es obtenido mediante la combinación lineal de los valores observados de las variables aleatorias $Z(x_\alpha)$.

$$Z^*(x_0) = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha Z(x_\alpha) \quad \text{I.10}$$

Como los valores $Z(x_\alpha)$ son conocidos, el método consiste en determinar los pesos λ_α bajo ciertas hipótesis o condiciones⁶:

- El valor esperado y la varianza del error de estimación deben existir:

$$\begin{aligned} E[Z^*(x) - Z(x)] \\ D^2[Z^*(x) - Z(x)] \end{aligned} \quad \text{I.11}$$

- El valor esperado del error de estimación debe ser cero (estimador insesgado):

$$E[Z^*(x) - Z(x)] = 0 \quad \text{I.12}$$

- La varianza del error de estimación debe ser mínima:

$$\text{Var}[Z^*(x) - Z(x)] = \min \quad \text{I.13}$$

Mediante el desarrollo de estas condiciones (apéndice VII.5), se obtiene un sistema de ecuaciones que permite conocer los pesos de cada uno de los datos involucrados en la estimación:

$$\begin{cases} \lambda^\beta C_{\alpha\beta} + \nu m_\alpha = C_{\alpha 0} \quad \forall \alpha = 1 \dots n \\ \lambda^\beta m_\beta = m_0 \end{cases} \quad 1.14$$

que en forma matricial se puede expresar:

$$\begin{bmatrix} C_{\alpha\beta} & m_\alpha \\ m_\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_\beta \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\alpha 0} \\ m_0 \end{bmatrix}$$

De este sistema de ecuaciones se obtienen los pesos λ_β que permiten la estimación de $Z^*(x)$ en cualquier punto. Cabe destacar que m_α es un vector, entonces el sistema de ecuaciones se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{matrix} & & C & & \cdot & \lambda & = & D \\ \begin{bmatrix} & & & & m_{\alpha=1} \\ & C_{\alpha\beta} & & & \vdots \\ & & & & m_{\alpha=n} \\ m_{\beta=1} & \dots & m_{\beta=n} & & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \lambda_{\beta=1} \\ \vdots \\ \lambda_{\beta=n} \\ \nu \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} C_{\alpha=1,0} \\ \vdots \\ C_{\alpha=n,0} \\ m_0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad 1.15$$

$C_{\alpha\beta}$ representa la matriz de covarianza de los datos, $m_{\alpha,\beta}$ es el valor de la tendencia determinística en el punto α o β , λ_β es el peso para el dato de la posición β , ν multiplicador de Lagrange, $C_{\alpha 0}$ covarianza entre el punto de estimación y cada uno de los datos.

Para hallar los pesos, se multiplica la ecuación 1.15 por C^{-1} (inversa de la matriz que representa el lado izquierdo del sistema) en ambos lados:

$$\begin{aligned}
 C \cdot \lambda &= D \\
 C^{-1} \cdot C \cdot \lambda &= C^{-1} \cdot D \\
 I \cdot \lambda &= C^{-1} \cdot D \\
 \lambda &= C^{-1} \cdot D
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Cokriging. Si se dispone de dos o más propiedades posiblemente relacionadas, es razonable intentar combinarlas para la tarea de estimación de alguna de ellas (o todas).

Considere las variables aleatorias Z e Y , la estimación de la variable Z puede ser escrita como:

$$Z^*(x) = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} Z(x_{\alpha}) + \sum_{\beta=1}^l \mu_{\beta} Y(x_{\beta}) \tag{1.17}$$

Este método parte de las mismas hipótesis o condiciones que el kriging. De la misma manera que para el kriging, se obtiene un sistema de ecuaciones que permite obtener los pesos de cada uno de los datos de las variables involucradas (apéndice VII.5):

$$\begin{bmatrix} C_{ZZ} & C_{ZY} & m_{\alpha} & 0 \\ C_{ZY} & C_{YY} & 0 & n_{\delta} \\ m_{\beta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_{\varepsilon} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{\beta} \\ \mu_{\varepsilon} \\ v_Z \\ v_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{ZZ_0} \\ C_{YZ_0} \\ m_0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

C_{ZZ} representa la matriz de covarianza de los datos de la variable Z , C_{ZY} es la matriz de covarianza cruzada entre los datos de la variable Z y los de la variable Y , $m_{\alpha,\beta}$ es el valor de la tendencia determinística de la variable Z en el punto α o β , $n_{\delta,\varepsilon}$ valor de la tendencia determinística de la variable Y en el punto δ o ε , λ_{β} pesos de los datos de la variable Z , μ_{ε} pesos de los datos de la variable Y , v_i multiplicadores de Lagrange, C_{ZZ_0} vector de covarianza entre los

datos de la variable Z y el punto de estimación, C_{YZ_0} vector de covarianza entre los datos de la variable Y y el punto de estimación, m_0 es la media de la variable a estimar en el punto x_0 .

Como puede observarse este método explota la correlación cruzada entre las variables involucradas.

I.1.6 Integración de información

En la actualidad, se está realizando un gran esfuerzo para integrar la información petrofísica, sísmica, de producción y de presiones en la caracterización de yacimientos para tomar en cuenta, por ejemplo, la buena cobertura areal de la sísmica, la buena resolución vertical de los registros y núcleos en conjunto con la información de conectividad y dificultad para el movimiento de los fluidos contenida en los datos de presión y producción.

Para lograr estos objetivos de integración se han desarrollado una serie de técnicas de estimación y simulación estocástica^{11,12,23,28,30,31,50,61} que permiten describir el medio poroso, respetando las diferentes fuentes de información y asegurando inclusive que el comportamiento de producción y presiones sea coherente con el reportado en los datos.

I.2 PERMEABILIDAD. CONCEPTOS BÁSICOS⁴⁶

I.2.1 Introducción

La permeabilidad es una de las propiedades más importantes del yacimiento, debido a que controla el movimiento de los fluidos que están contenidos en él. Se han definido varios tipos de permeabilidades dependiendo de si es uno o varios fluidos los que saturan la roca. A continuación se presentan cada uno de ellos.

I.2.2 Conceptos básicos

La permeabilidad es la propiedad que posee la roca para dejar pasar fluidos a través de los espacios porosos interconectados, es decir, es una medida de la conductividad de la roca. Existen tres tipos de permeabilidades, dependiendo de las saturaciones (fracción del volumen poroso del yacimiento ocupado por un determinado fluido) de los fluidos que se encuentran presentes dentro de la roca:

- Permeabilidad absoluta
- Permeabilidad efectiva
- Permeabilidad relativa.

I.2.2.1 Permeabilidad absoluta (sistemas monofásicos)

Se denota con la letra K y es el parámetro que cuantitativamente indica la habilidad de la roca para permitir el paso de un fluido a través de los poros interconectados de ésta, siempre y cuando, el medio esté saturado completamente por un mismo fluido (saturación de 100%). Puede ser afectada por la distribución, tamaño, escogimiento, orientación, grado de cementación y consolidación de los granos.

En sus trabajos con sistemas de filtración de agua, Henri Darcy descubrió que la tasa de agua que pasaba a través de un paquete de arena era proporcional a la caída de presión a lo largo del paquete⁵⁴. A continuación se presenta la forma general de la ecuación de Darcy para flujo en sistemas horizontales:

$$q = \frac{-AK(\Delta p)}{\mu L} \quad \text{I.19}$$

Donde:

K : permeabilidad

q : tasa de flujo de fluido

μ : viscosidad del fluido

L : longitud del paquete de arena

A : área transversal del paquete de arena

Δp : diferencial de presión a lo largo del paquete de arena

Las consideraciones hechas para la deducción de esta fórmula fueron:

1. La roca es homogénea
2. El fluido no reacciona con el medio
3. Fluido homogéneo con saturación de 100%
4. Fluido newtoniano
5. Flujo incompresible
6. Flujo laminar, horizontal e isotérmico

I.2.2.2 Permeabilidad efectiva (sistemas multifásicos)

En los yacimientos de hidrocarburos existe alguna cantidad de agua y en algunos casos cierta cantidad de gas. Estas saturaciones de agua y gas no

solo reducen el espacio poroso disponible para el petróleo, sino que también la habilidad de cada fluido para fluir se ve afectada por la presencia de los otros fluidos. En consecuencia, la permeabilidad absoluta no es una medida adecuada de la capacidad de flujo que dentro de la roca o medio poroso tendrá cada fluido en particular. Debido a esto surge el concepto de *permeabilidad efectiva* que es la permeabilidad del medio poroso a cada uno de los fluidos presentes: petróleo, agua y gas cada una de ellas denotadas con: K_o , K_w y K_g respectivamente. En la medida que la saturación de un fluido aumenta, el área de flujo disponible para ese fluido se incrementará y esto resultará en el incremento correspondiente de su permeabilidad efectiva.

La unidad utilizada tanto para la permeabilidad absoluta como la efectiva es la misma: $[L^2]$ (longitud al cuadrado) que pueden ser deducido de la ecuación de Darcy ($1 \text{ darcy} \cong 1 \times 10^{-12} \text{ m}^2$).

Es interesante notar que:

$$0 \leq K_o, K_g, K_w \leq K(\text{absoluta})$$

1.2.2.3 Permeabilidad relativa

Es una práctica común en ingeniería de yacimientos expresar la permeabilidad efectiva como una fracción de alguna permeabilidad base. De acuerdo con esto, se ha definido la *permeabilidad relativa* como la relación de la permeabilidad efectiva de cada fluido: petróleo, agua y gas a la permeabilidad base. Si la permeabilidad base seleccionada es la permeabilidad absoluta, entonces:

$$K_{ro} = \frac{K_o}{K} \quad K_{ra} = \frac{K_a}{K} \quad K_{rg} = \frac{K_g}{K} \quad 1.20$$

Donde K_{ro} es la permeabilidad relativa al petróleo, K_{ra} es la permeabilidad relativa al agua, K_{rg} es la permeabilidad relativa al gas, K_o es la permeabilidad efectiva del petróleo, K_a es la permeabilidad efectiva del agua, K_g es la permeabilidad efectiva del gas y K representa la permeabilidad absoluta.

Como en el caso de la permeabilidad efectiva, la permeabilidad relativa a un fluido en particular depende de la saturación de ese fluido.

Como vemos, estos datos expresan los efectos de las saturaciones de los fluidos, historia de saturación, geometría y distribución de tamaños de poros, sobre el comportamiento del flujo de fluidos en un yacimiento. En consecuencia, la permeabilidad es probablemente una de las propiedades más importantes que afectan los cálculos en la ingeniería de yacimientos.

I.3 ASPECTOS BÁSICOS DE LA SIMULACIÓN DE YACIMIENTOS^{37,45}

I.3.1 Introducción

Los simuladores numéricos de yacimientos han sido usados durante mucho tiempo, ya que permiten describir cuantitativamente el flujo de múltiples fases en yacimientos heterogéneos, considerando las propiedades de la roca y los fluidos, historia de producción, demandas de mercado, estrategias de inversión y regulaciones gubernamentales.

La utilidad de modelos numéricos radica en que permiten atacar problemas complejos con soluciones “simples”. Un modelo realista de yacimientos puede ser una herramienta efectiva para desarrollar planes de explotación en campos nuevos o maduros, evaluar planes que aumenten la productividad de los pozos, incrementar o acelerar la producción, reducir costos operacionales, incrementar el recobro, etc.

I.3.2 Antecedentes

El potencial de la simulación numérica fue reconocido a finales de los años 1940 y a principios de los años 1950 por algunas compañías, las cuales desarrollaron métodos prácticos para ser usados en los computadores disponibles en el momento.

La principal aplicación de los primeros simuladores fue en estudios de yacimientos cuyas dimensiones fueran lo suficientemente grandes como para justificar los costos. La necesidad de aquel momento era poder predecir el comportamiento del yacimiento a corto y largo plazo. Como los resultados obtenidos fueron satisfactorios, se convirtió en una herramienta usada en la mayoría de los grandes yacimientos.

I.3.3 Simulación numérica de yacimientos

La simulación numérica de yacimientos es el proceso de inferir el comportamiento real a partir del comportamiento de un modelo. Un modelo matemático de un sistema físico es un conjunto de ecuaciones de conservación de masa y/o energía que describen adecuadamente los procesos que tienen lugar en los sistemas bajo estudio (pozo, yacimiento, campo, etc.). Los procesos que ocurren en yacimientos de petróleo son, básicamente, flujo de fluidos y transferencias de masa y energía en medios porosos.

Los *simuladores numéricos* son un conjunto de programas de computación que usan métodos numéricos para obtener una solución aproximada del modelo matemático. En estos casos, el yacimiento es visualizado como un conjunto de regiones o bloques que representan volúmenes discretos definidos en una malla. Los simuladores están basados en la ecuación de difusividad. En general, éstas ecuaciones diferenciales parciales complejas no pueden ser resueltas analíticamente y por eso se utilizan métodos numéricos aproximados, donde la ecuación se reemplaza con series de diferencias finitas.

Los métodos numéricos son extremadamente generales en su aplicación y han probado ser altamente satisfactorios para obtener soluciones bajo condiciones complejas de yacimientos. Esto hace de los modelos numéricos de simulación la técnica más completa y flexible disponible hoy para el ingeniero de yacimientos.

La simulación numérica va más allá de las consideraciones netamente matemáticas. Se podría decir que es una herramienta que integra todas las disciplinas involucradas en el desarrollo del yacimiento con el objetivo de comprender el comportamiento actual del mismo y predecir el comportamiento futuro bajo diferentes condiciones.

I.3.4 Modelo estático. Distribución de la permeabilidad en los modelos de simulación

El modelo estático del yacimiento es el punto de partida para un estudio de simulación. En él se describen cuantitativamente propiedades como permeabilidad, porosidad y espesores.

La permeabilidad es una de las propiedades más importantes al momento de predecir el comportamiento futuro de un yacimiento, además, es una de las más difíciles de determinar en la etapa de caracterización. Esto se debe a que presenta mayor variabilidad que las demás y es mucho más difícil de medir³⁷.

Hasta ahora, no existe un método determinado para obtener los datos de permeabilidad y cada caso requiere de consideraciones especiales, dependiendo de las características que presente el yacimiento. Uno de estos métodos es la toma de núcleos, que es una forma de obtener datos directamente del yacimiento. Otra manera de obtener datos de permeabilidad es a través de los registros de pozos. Una vez que se posee un grupo de datos se puede realizar el modelaje geoestadístico, por ejemplo, a través de las herramientas presentadas en la sección I.1 del presente capítulo.

Otro método que se utiliza para obtener la permeabilidad equivalente del yacimiento son las *pruebas de pozos*³⁸. Mediante éstas pruebas se puede obtener el valor equivalente de la permeabilidad en un área dentro de cierto radio de longitud alrededor del pozo conocido como *radio de investigación*. Algunas veces es conveniente hacer estudios geológicos y realizar nuevas pruebas para resolver las diferencias de resultados entre los métodos. Estudios de petrografía y petrofísica detallados pueden revelar fracturas, canales de flujo y barreras de permeabilidad que no están siendo tomadas en cuenta en el análisis de núcleos; también estudios detallados del residuo (ruido) de los registros, efectos de la temperatura en las pruebas, pruebas de pulso³⁸ pueden ser muy útiles al momento

de resolver las discrepancias entre los valores obtenidos mediante cualquiera de los métodos.

I.3.5 Ajuste histórico

El objetivo fundamental de un modelo numérico es el de predecir el comportamiento futuro del yacimiento. Los errores que generalmente se obtienen en las simulaciones se deben a diferencias entre los valores de las propiedades en el modelo y los valores reales de éstas en el yacimiento. Desafortunadamente, rara vez, se tienen suficientes datos para desarrollar modelos aceptables, por lo que los valores de las propiedades de éstos tienen que ser modificados hasta que el modelo se ajuste al comportamiento del yacimiento real. La manera de lograr que el modelo se ajuste es simulando el comportamiento pasado del yacimiento y comparando el resultado con el real. A este procedimiento se le conoce como *ajuste histórico*.

Simulando el comportamiento histórico del yacimiento se pueden identificar las debilidades del modelo que luego permiten hacer los cambios necesarios para mejorarlo. Si estos cambios se hacen de la manera adecuada, es decir, guardando cierta lógica con el comportamiento del modelo y del yacimiento, este procedimiento es una herramienta poderosa en la etapa de descripción del yacimiento.

El ajuste histórico es un procedimiento que consume mucho tiempo y que suele ser muy frustrante debido a que el comportamiento del yacimiento es complejo e involucra procesos que juntos pueden ser muy difíciles de comprender. En la actualidad se han desarrollado métodos para realizar el ajuste histórico automáticamente³⁷, aunque los ingenieros prefieren hacer el ajuste manualmente, debido a las limitaciones de los métodos disponibles. Uno de los objetivos implícitos en el presente trabajo es reducir el tiempo del ajuste histórico.

I.3.5.1 Información que generalmente es ajustada. Efecto de la permeabilidad en el ajuste histórico

En la mayoría de los estudios, la información que es ajustada es el comportamiento de la presión, la relación agua-petróleo (RAP), la relación gas-petróleo (RGP), tiempos de irrupción del agua y el gas, saturaciones de los fluidos, entre otros.

En un yacimiento, generalmente se obtienen observaciones de presión en el fondo de los pozos en diferentes intervalos de tiempo, pero éstas no son tan confiables como las obtenidas en el cabezal del mismo cuyo uso está condicionado a un preciso conocimiento de los gradientes de pozo para corregir estas presiones a las condiciones de fondo.

La permeabilidad es la principal variable utilizada para realizar el ajuste histórico de las presiones. Generalmente, los datos de porosidad no son cambiados, ya que se ha demostrado que no es una propiedad cuyos cambios provean de ajustes satisfactorios³⁷. Los contactos de los fluidos, son en muchos casos, mejor definidos que la porosidad y la permeabilidad, al igual que los espesores. En general, la permeabilidad es la más difícil de conocer, como se mencionó en secciones anteriores, y su adecuado conocimiento es muy importante en la predicción o en el desarrollo de cualquier proceso de recobro³⁷.

El ajuste de las relaciones agua-petróleo y gas-petróleo es usualmente una de las mejores maneras de confirmar la validez de la distribución de propiedades como la permeabilidad. Si éste es el caso, generalmente en los yacimientos que se encuentran en sus primeras etapas de desarrollo no existe información directa acerca del movimiento de los fluidos, por lo que se recurre al análisis de núcleos, registros y ambiente de depositación para estimar este factor. Esta información no es suficiente para determinar la complejidad del

yacimiento y predecir la llegada del agua o gas a los pozos. Como consecuencia, en la mayoría de yacimientos en sus primeras etapas de desarrollo se estiman erróneamente los tiempos de irrupción de estos fluidos. La disponibilidad de perfiles de producción e inyección podrían proveer de información muy importante para mejorar la distribución de la permeabilidad y de esta manera obtener ajustes mucho más satisfactorios.

Como se puede observar, la permeabilidad es uno de los factores que controla el movimiento de los fluidos en el yacimiento por lo que su distribución en el modelo juega un papel muy importante en la etapa del ajuste histórico, en la que se busca reproducir el comportamiento pasado del yacimiento para obtener estimados confiables del comportamiento futuro de éste.

II PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

II.1 INTRODUCCIÓN

Se plantea la solución del problema inverso de estimación de permeabilidad. Para ésto, partiendo de datos sintéticos de permeabilidad y presión, se propone un modelo geoestadístico que integre esta información a través de las herramientas presentadas anteriormente y respetando las leyes físicas que controlan el movimiento de los fluidos en el yacimiento.

En términos generales, el nombre de problema inverso proviene de que, en cierto modo, representa el opuesto al problema directo. Mientras que el directo tiene como objetivo el cálculo de las presiones suponiendo conocidos parámetros como permeabilidad, el inverso pretende calcular los parámetros a partir de las observaciones de presión y algunos datos puntuales. Existe una extensa literatura acerca del problema inverso^{11,23,28,61}.

Para obtener la solución al problema, se propone la aplicación del cokriging (apéndice VII.5), que es una técnica de estimación lineal que explota la correlación entre dos o más propiedades que han sido muestreadas con el objetivo de estimar alguna de ellas o todas¹⁷. Normalmente, para la aplicación de este método, debe determinarse la covarianza de cada una de las propiedades en estudio y la covarianza cruzada entre las mismas. En el presente caso, es necesario conocer la covarianza de los datos de permeabilidad, la covarianza cruzada entre permeabilidad y presión en cada tiempo y por último la covarianza cruzada de la presión en diferentes tiempos.

Si la covarianza de la permeabilidad es conocida, $Cov[K(x_i), K(x_j)]$, la covarianza entre la permeabilidad y la presión $Cov[k(x_i), P(x_j, t_m)]$ y la covarianza de la presión $Cov[P(x_i, t_m), P(x_j, t_n)]$ pueden hallarse respetando de alguna forma la ecuación de difusividad.

II.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Partiendo de:

- mediciones de permeabilidad en M puntos:

$$x_1, x_2, \dots, x_M \quad \text{II.1}$$

- mediciones de presión en L puntos y en U diferentes tiempos:

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_L; \quad t_1, t_2, \dots, t_U \quad \text{II.2}$$

el problema que se plantea es estimar el campo K (permeabilidad) utilizando las mediciones de permeabilidad II.1 y las observaciones de presión II.2.

En otras palabras, se propone utilizar cokriging para integrar datos dinámicos en la estimación de la permeabilidad.

Se requiere la matriz de covarianzas Q_D (ecuación II.3) en la cual no sólo se toma en cuenta la covarianza de las medidas de permeabilidad, de las observaciones de presión y la cruzada entre las medidas de permeabilidad y las observaciones de presión en cada tiempo, sino también se toma en cuenta la covarianza cruzada entre las observaciones de presión hechas en diferentes tiempos la cual no puede ser ignorada.

$$Q_D = \begin{bmatrix} Q_{PP(t_{u1}, t_{u1})} & Q_{PP(t_{u1}, t_{u2})} & \cdots & Q_{PP(t_{u1}, t_U)} & Q_{PY(t_{u1})} \\ Q_{PP(t_{u2}, t_{u1})} & Q_{PP(t_{u2}, t_{u2})} & \cdots & Q_{PP(t_{u2}, t_U)} & Q_{PY(t_{u2})} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{PP(t_U, t_{u1})} & Q_{PP(t_U, t_{u2})} & \cdots & Q_{PP(t_U, t_U)} & Q_{PY(t_U)} \\ Q_{PY(t_{u1})} & Q_{PY(t_{u2})} & \cdots & Q_{PY(t_U)} & Q_{YY} \end{bmatrix} \quad \text{II.3}$$

donde:

$Q_{PP(t_{ui}, t_{ui})}$: Matriz de covarianza ($L \times L$) de las observaciones de presión en un mismo tiempo

$Q_{PP(t_{ui}, t_{uj})}$: Matriz de covarianza ($L \times L$) de las observaciones de presión en distintos tiempos

$Q_{PY(t_{ui})}$: Matriz de covarianza cruzada ($L \times M$) entre las observaciones de presión y permeabilidad

Q_{YY} : Matriz de covarianza ($M \times M$) de las medidas de permeabilidad

Se definen $Y(x,y,z)$ y $P(x,y,z,t)$ como las funciones que describen el *logaritmo de la permeabilidad* y las *presiones* en el yacimiento (en el presente caso se utilizará una discretización de W celdas) respectivamente. En el desarrollo que se presenta a continuación (desarrollo detallado en apéndice VII.3) se supondrá que tanto Y como P son funciones aleatorias que pueden expresarse como la suma de su valor esperado (media) más un residuo de media cero, es decir:

$$Y = \ln(K) = F + f \quad P = H + h \quad \text{II.4}$$

donde:

Y : Logaritmo de la permeabilidad

F : Valor esperado de Y , $E[Y]$. Media de los datos $\ln(K)$

f : Residuo de Y

P : Presión

H : Valor esperado de P , $E[P]$

h : Residuo de P

El campo Y está caracterizado por los siguientes parámetros:

$$E[Y] = F \quad \text{II.5}$$

$$\text{cov}_{YY}(x_i, x_j) = \sigma_Y^2 \exp\left(\frac{-d_{ij}}{l_y}\right) \quad \text{II.6}$$

donde:

$E[Y]$: valor esperado de Y

F : media de los datos $\ln(K)$

$\text{cov}_{YY}(x_i, x_j)$: covarianza de $\ln(K)$ entre los puntos x_i, x_j

σ_Y^2 : varianza de $\ln(K)$

d_{ij} : distancia entre los puntos x_i, x_j

l_y : rango de la covarianza

Cada una de las submatrices de la matriz Q_D (ecuación II.3) pueden ser calculadas como se muestra a continuación:

- Q_{yy} se calcula a partir de la función de covarianza descrita en la ecuación II.6, en la cual la distancia se puede calcular como:

$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \quad \text{II.7}$$

donde:

d_{ij} : distancia entre los puntos x_i y x_j ,

x_i, x_j : coordenada x de la celdas i y j ,

y_i, y_j : coordenada y de la celdas i y j .

z_i, z_j : coordenada z de la celdas i y j .

- $Q_{pp}(t_{ui}, t_{ui})$ puede ser calculada como⁵¹:

$$Q_{PP}(t_{ui}, t_{ui}) = E[h(t_{ui})h^T(t_{ui})] = J(t_{ui})E[ff^T]J^T(t_{ui}) \quad \text{II.8}$$

- $Q_{pp}(t_{ui}, t_{uj})$ puede ser calculada como⁵¹:

$$Q_{PP}(t_{ui}, t_{uj}) = E[h(t_{ui})h^T(t_{uj})] = J(t_{ui})E[ff^T]J^T(t_{uj}) \quad \text{II.9}$$

- $Q_{py}(t_{ui})$ puede ser calculada como⁵¹:

$$Q_{PY}(t_{ui}) = E[h(t_{ui})f^T] = J(t_{ui})E[ff_D^T] \quad \text{II.10}$$

T representa la función transpuesta de una matriz, $E[ff^T]$ es la matriz (dimensiones $W \times W$) de covarianza de Y entre todas y cada una de las celdas y $E[ff_D^T]$ es la matriz (dimensiones $W \times M$) de covarianza entre todas las celdas y las mediciones de Y , la cual es una submatriz de $E[ff^T]$. Estas últimas pueden ser calculadas a partir de la ecuación II.6

La matriz $J(t_{ui})$ es la matriz jacobiana⁵¹ (de dimensiones $L \times W$) de coeficientes de sensibilidad. Ésta representa cuantitativamente la variación del residuo de la presión con respecto al residuo de la permeabilidad en cada uno de los tiempos de observación, ecuación II.11 (ver apéndice VII.3):

$$J(t_u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial f^{(1)}} & \frac{\partial h_1}{\partial f^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial f^{(w)}} \\ \frac{\partial h_2}{\partial f^{(1)}} & \frac{\partial h_2}{\partial f^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial f^{(w)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial h_L}{\partial f^{(1)}} & \frac{\partial h_L}{\partial f^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial h_L}{\partial f^{(w)}} \end{bmatrix} \quad \text{II.11}$$

donde:

L : Número de observaciones de presión.

W : Número de celdas.

h : residuo de la presión.

f : residuo de la permeabilidad.

Cada uno de los componentes de la matriz de coeficientes de sensibilidad pueden ser calculados mediante (ver desarrollo en el apéndice VII.4):

$$\frac{\partial h(x_i, t_u)}{\partial f} = \int_0^{t_u} \int_{\Omega_i} e^F \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial z} \right) dx dy dz dt \quad \text{II.12}$$

donde Ω_i es el dominio exclusivo de la celda i , figura N°. 8.

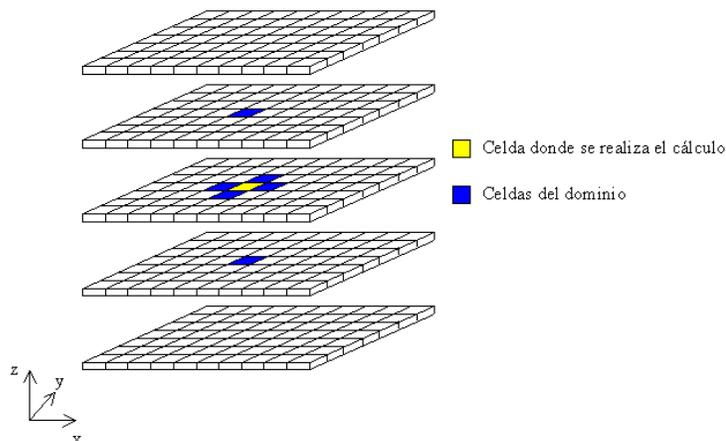


Figura N°. 8. Dominio exclusivo de la celda i (celda de color amarillo)

En la ecuación II.12, H representa el valor esperado (tendencia) del campo de presión del yacimiento. Este campo está representado por la ecuación diferencial II.14, resultado de la combinación de la ecuación de difusividad (ecuación II.13) y las aproximaciones definidas en la ecuación II.4:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K_x}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{K_y}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{K_z}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \frac{Q}{V} \right] = \phi c_o \frac{\partial P}{\partial t} \quad \text{II.13}$$

donde:

P : presión;

K_i : permeabilidad en la dirección i ;

μ : viscosidad;

Q : tasa;

V : volumen;

ϕ : porosidad;

c_o : compresibilidad;

x, y, z : variables espaciales;

t : tiempo;

Se considera a ϕ , μ y c_o como conocidas en todo el yacimiento y $K_x=K_y=K_z=K$.

$$\phi c_r \frac{\partial H}{\partial t} = e^F \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial H}{\partial z} \right) \right] + \frac{Q}{V} \quad \text{II.14}$$

Ψ representa el *estado adjunto*⁶¹ de la ecuación de difusividad (ecuación II.13), y se puede hallar mediante:

$$\phi c_r \frac{\partial \Psi}{\partial t} + e^F \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial R}{\partial h} \quad \text{II.15}$$

que puede ser resuelta utilizando el mismo algoritmo utilizado para resolver la ecuación II.14.

En la ecuación II.15 se impone:

$$R(x,t) = h(x - x_l)\delta(x - x_l)\delta(t - t_u) \quad \text{II.16}$$

donde x_l representa un punto de observación (pozo), t_u representa un tiempo en el que se realizó una observación de presión y $\delta(\)$ representa la función de Dirac.

Derivando la ecuación II.16 con respecto a h se obtiene:

$$\frac{\partial R(x,t)}{\partial h} = \delta(x - x_l)\delta(t - t_u) \quad \text{II.17}$$

Mediante el desarrollo anterior, se puede observar que para resolver la ecuación II.12, sólo son necesarias $(L+1)$ simulaciones numéricas, de las cuales una es para determinar el campo de presión $H(x,y,z,t)$ y las restantes para obtener el estado adjunto, $\Psi(x,y,z,t)$, correspondiente a cada uno de los puntos de observación de la presión.

Una vez conocidas todas las matrices de covarianza, se puede estimar el campo $\ln(K)$ como:

$$Y_{x_0}^* = \sum_{u=1}^U \sum_{l=1}^L \mu_{l,u} (P_{l,u} - H_{l,u}) + \sum_{m=1}^M \lambda_m Y_m \quad \text{II.18}$$

donde λ_m y $\mu_{l,u}$ son la solución al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{u=1}^U \sum_{l=1}^L \mu_{l,u} \text{cov}[P(x_i, t_j), P(x_l, t_u)] + \sum_{m=1}^M \lambda_m \text{cov}[P(x_i, t_j), Y(x_m)] = \text{cov}[P(x_i, t_j), Y(x_0)] \quad \text{II.19a}$$

$$i = 1, 2, \dots, L \quad j = 1, 2, \dots, U$$

$$\sum_{u=1}^U \sum_{l=1}^L \mu_{l,u} \text{cov}[Y(x_i), P(x_l, t_u)] + \sum_{m=1}^M \lambda_m \text{cov}[Y(x_m), Y(x_n)] = \text{cov}[Y(x_m), Y(x_0)] \quad \text{II.19b}$$

$$i = 1, 2, \dots, L$$

$$\sum_{m=1}^M \lambda_m = 1 \quad \text{II.19c}$$

donde:

x_0 : punto de estimación.

$\text{Cov}[P(x_i, t_j), P(x_l, t_u)]$: covarianza entre la observación de presión del punto x_i y el tiempo t_j y la del punto x_l y el tiempo t_u .

$\text{Cov}[P(x_i, t_j), Y(x_m)]$: covarianza entre la observación de presión del punto x_i y el tiempo t_j y la medición del logaritmo de la permeabilidad del punto x_m .

$\text{Cov}[Y(x_i), Y(x_m)]$: covarianza entre la medición del logaritmo de la permeabilidad del punto x_i y la del punto x_m .

En sistema de ecuaciones II.19 consta de $(M+LU+1)$ ecuaciones con $(M+LU)$ incógnitas o coeficientes del cokriging, λ_m y $\mu_{l,u}$.

II.3 METODOLOGÍA

Se generó un yacimiento sintético (campo de permeabilidad, presión, etc.) en el cual se asignaron arbitrariamente algunos pozos. El objetivo es reproducir los campos sintéticos de permeabilidad y presión a partir de los datos obtenidos de los pozos seleccionados. A continuación se presentan las actividades realizadas.

II.3.1 Generación del modelo sintético de permeabilidad y selección de las ubicaciones de los pozos.

Fue necesario contar con un campo de permeabilidad conocido, con el objetivo de comparar los resultados de las estimaciones.

Una vez elegido un mallado (se utilizó una malla de dimensiones $10 \times 7 \times 5$), se decidió generar un campo aleatorio, Y , gaussiano por el método de bandas rotantes⁶ en el paquete geoestadístico ISATIS. Se usó un variograma exponencial con valores definidos para el rango y la meseta (detalles en la sección de ejemplos numéricos), escogidos arbitrariamente. El campo de permeabilidad K se halló mediante:

$$K = \exp(Y) \quad \text{II.20}$$

El siguiente paso fue seleccionar la ubicación de los pozos, los cuales fueron utilizados para obtener los datos del yacimiento. Conociendo la importancia de la cantidad de información se plantearon dos escenarios, cada una de ellos con diferentes cantidades de puntos con información.

II.3.2 Generación del campo de presiones.

Para este punto se exportó el campo de permeabilidad desde ISATIS al paquete ECLIPSE.

En el simulador se definió un modelo monofásico (petróleo) cuyas propiedades y sus valores numéricos, elegidos arbitrariamente, se presentan en la tabla N°. 1 de la sección de ejemplos numéricos.

Se realizó una corrida con el campo original de permeabilidad y se obtuvo el campo sintético de presiones del yacimiento para tres años. Luego, conociendo las ubicaciones de los pozos, se tomaron los datos de la presión al final de cada año. Los datos de presión se utilizaron como variables secundarias y sólo se tomaron tres en cada pozo debido a que el paquete geoestadístico que se utilizó para realizar el cokriging, GSLIB, permite utilizar solo cuatro variables, una primaria, permeabilidad, y tres secundarias, presión en tres tiempos distintos.

II.3.3 Cálculo de las matrices de covarianzas.

El cálculo de las matrices de covarianzas involucró una serie de actividades las cuales se llevaron a cabo de manera secuencial dentro de un código FORTRAN y que serán descritas a continuación.

II.3.3.1 Cálculo de las matrices de covarianza de la permeabilidad.

El primer paso que se llevó a cabo dentro del código FORTRAN, fue el cálculo de las matrices de covarianza de la permeabilidad, las cuales fueron utilizadas para el cálculo de la covarianza entre las presiones en función del tiempo y el cálculo de la covarianza cruzada entre la permeabilidad y la presión.

En los casos de las covarianzas entre las presiones se utilizó la matriz $E[ff^T]$ que es la matriz de covarianza de la permeabilidad en *todas* las celdas de la malla, es decir la covarianza de cada una de las celdas con ella misma y con todas las demás. Se calculó a partir de la covarianza descrita en la ecuación II.6:

$$\text{cov}_{YY}(x_i, x_j) = \sigma_Y^2 \exp\left(\frac{-d_{ij}}{l_y}\right)$$

En el caso de la covarianza cruzada entre la permeabilidad y presión se utilizó la matriz $E[ff^T_D]$ que representa la covarianza entre cada una de las *observaciones* (datos) de permeabilidad y todas las demás celdas del sistema, la cual es una submatriz de la matriz $E[ff^T]$.

II.3.3.2 Cálculo de la tendencia de la presión.

Una vez conocidas las matrices de covarianza de la permeabilidad, el siguiente paso fue calcular la tendencia de la presión (H) en el yacimiento.

Para esto fue necesario resolver la ecuación II.14:

$$\phi c_r \frac{\partial H}{\partial t} = e^F \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial H}{\partial z} \right) \right] + \frac{Q}{V}$$

Esta ecuación es similar a la ecuación de difusividad, por lo que fue utilizado el simulador de yacimientos ECLIPSE para su resolución. En este caso se utilizó el mismo archivo de entrada que para el cálculo del campo sintético de presiones del yacimiento, con la diferencia de que en éste no se incluyó un campo de permeabilidad sino que se tomó un valor promedio de la misma para todo el yacimiento y que fue obtenido de los datos tomados de los pozos. Como en el caso del campo original de presiones, se tomaron los datos de la tendencia de la presión para las mismas celdas y para los mismos tiempos que éste.

Como puede observarse en la ecuación II.18, para resolver el cokriging, no sólo fueron necesarias las observaciones de presión sino también la tendencia de la presión en cada bloque del yacimiento.

II.3.3.3 Cálculo del estado adjunto para cada uno de los puntos de observación de presión.

La metodología exige el cálculo del estado adjunto para cada uno de los puntos de observación de presión. Para esto fue necesario resolver la ecuación II.15:

$$\phi c_r \frac{\partial \Psi}{\partial t} + e^F \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial R}{\partial h}$$

Esta ecuación puede ser resuelta de la misma manera que la ecuación II.14, por lo que fue utilizado de nuevo el simulador de yacimientos.

Esta vez se hicieron tantas corridas como puntos de observación de presión existían. Para cada una de ellas se utilizó un archivo de entrada similar al utilizado para el cálculo de la tendencia de la presión, es decir, especificando un valor promedio de permeabilidad para todo el yacimiento. En este caso, en la sección donde se reportan los pozos sólo se especificaron los datos del punto de observación para el que se haría la corrida.

De estas corridas se obtuvo varios archivos (tantos como puntos de observación de presión existían), en los que se reportó el estado adjunto en cuatro tiempos (inicial, final año uno, final año dos, final año tres), los cuales fueron utilizados para el cálculo de los elementos de la matriz de coeficientes de sensibilidad representada en la ecuación II.12.

II.3.3.4 Cálculo de los elementos de la matriz de coeficientes de sensibilidad.

La matriz de coeficientes de sensibilidad ($J(t_u)$) es la representación cuantitativa de la variación del residuo de la presión con respecto al residuo de la permeabilidad. Cada uno de sus elementos fue calculado a partir de la

ecuación II.12 y existe una matriz $J(t_u)$ para cada uno de los tiempos de observación.

El cálculo se llevó a cabo mediante la solución numérica de la ecuación II.12:

$$\frac{\partial h(x_l, t_u)}{\partial f} = \int_0^{t_u} \int_{\Omega_i} e^F \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial H}{\delta x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial H}{\delta y} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial H}{\delta z} \right) dx dy dz dt$$

cuyo desarrollo numérico puede ser observado en el apéndice VII.4.

Cada una de las matrices $J(t_u)$ es de dimensiones $L \times W$, donde L representa el número de puntos de observación y W el número de celdas del sistema, por lo que para su cálculo fue necesaria la lectura de los datos registrados en los archivos de salida de las corridas donde se obtuvieron la tendencia de la presión y el estado adjunto de cada punto de observación de la presión.

Como dominio de cada celda se utilizaron las celdas adyacentes, excepto las que se encontraban en diagonal, como puede observarse en la figura N°. 8. Una vez conocidos los componentes de las matrices $J(t_u)$ para cada uno de los tiempos de observación, fueron halladas sus respectivas traspuestas.

Los elementos de cada una de estas matrices se guardaron en diferentes archivos que fueron nombrados haciendo referencia al tiempo para el que se habían calculado. Estos resultados se utilizaron para el cálculo de las matrices de covarianza para la solución del cokriging.

II.3.3.5 Cálculo de los elementos de las matrices de covarianza.

Una vez calculadas las matrices de covarianza de la permeabilidad y las matrices de coeficientes de sensibilidad, se calcularon las matrices de covarianza con las que se resolvió el cokriging.

Inicialmente se calculó la matriz de covarianza de entre los *datos* de permeabilidad. Para esto se resolvió la ecuación:

$$\text{cov}_{YY}(x_i, x_j) = \sigma_Y^2 \exp\left(\frac{-d_{ij}}{l_y}\right)$$

Para el cálculo de la matriz de covarianza entre las observaciones de presión en un mismo tiempo:

$$Q_{PP}(t_{u1}, t_{u1}) = J(t_{u1})E[ff^T]J^T(t_{u1})$$

se multiplicaron las matrices $J(t_u)$ (leída desde un archivo externo) y $E[ff^T]$ (guardada en memoria) mediante una subrutina destinada para esto. El resultado anterior se multiplicó por $J^T(t_u)$, lo que permitió obtener la matriz de covarianza entre las observaciones de presión en los mismos tiempos. Este procedimiento se realizó para cada uno de los tiempos donde había observaciones de presión.

A continuación, se realizó el cálculo de las matrices de covarianza cruzada de la presión en diferentes tiempos:

$$Q_{PP}(t_{u1}, t_{u2}) = J(t_{u1})E[ff^T]J^T(t_{u2})$$

en este caso se multiplicaron las matrices $J(t_u)$ (leída desde un archivo externo) de cada tiempo y $E[ff^T]$ (guardada en memoria). El resultado anterior se multiplicó por cada una de las matrices $J^T(t_u)$, lo que permitió obtener la matriz de covarianza cruzada entre las observaciones de presión en diferentes tiempos.

De esta manera ya se habían calculado las covarianzas entre los datos de presión y las covarianzas entre los datos de permeabilidad, por lo que lo único

que faltaba era encontrar las matrices de covarianza cruzada entre los datos de permeabilidad y los datos de presión en cada tiempo:

$$Q_{PY}(t_{u1}) = J(t_{u1})E[ff_D^T]$$

Para ésto, se llevó a cabo el mismo procedimiento; para cada tiempo se realizó la multiplicación de la matriz $J(t_u)$ correspondiente con la matriz de covarianza de las observaciones de presión $E[ff_D^T]$, sin la necesidad de multiplicar su resultado con las traspuestas de las matrices $J(t_u)$.

Todas las matrices de covarianza fueron guardadas en archivos externos identificados con nombres que hacían referencia a las propiedades que involucraban y en los casos donde era necesario, al tiempo para el que se habían calculado. Además, en estos archivos fueron guardadas las coordenadas de los dos puntos de observación para los cuales se había calculado cada valor de covarianza (Ver ejemplo de estos archivos en el anexo N°. 1).

Los valores de estas matrices de covarianza fueron usados para construir el lado izquierdo del sistema de ecuaciones II.19, con el que se resolvió el cokriging.

El sistema de ecuaciones no estaría completo sin el vector del lado derecho del sistema de ecuaciones II.19, en el cual se representa la covarianza entre el punto de estimación y los datos, esto indica que existe un vector diferente para cada celda.

Estos vectores fueron hallados de la misma manera que las matrices de covarianza anteriormente descritas. Los valores de la covarianza entre cada punto y los datos de permeabilidad se hallaron a través de la covarianza de la ecuación II.6. Los valores de la covarianza entre los puntos de estimación y los

datos de presión se hallaron mediante la multiplicación de las matrices $J(t_u)$ y la matriz $E[ff^T]$ para cada uno de los tiempos para los que se realiza el estudio. Es importante acotar que la matriz $E[ff^T]$, en este caso, representó los valores de la covarianza entre la celda donde se estaba estimando y todas las demás celdas, por lo que sus dimensiones fueron de $1 \times W$, donde W representa el número total de celdas.

II.3.4 Cokriging.

Los paquetes geoestadísticos disponibles actualmente requieren una función de covarianza ajustada (modelo, rango, meseta, etc). En el caso de este estudio, no se tiene dicha función, ya que los valores de las covarianzas se determinaron de la manera descrita anteriormente.

El paquete GSLIB (Geoestatistical Software LIBrary) es una librería de programas geoestadísticos desarrollada en la universidad de Stanford. Sus códigos están programados en ANSI Standard Fortran 77 y son de dominio público, lo que permitió que pudieran ser modificados y adaptados a las necesidades del presente trabajo. Sus programas requieren la preparación de un archivo de parámetros donde se especifican todos los datos necesarios para sus ejecuciones y un archivo de datos.

En este caso especial, se utilizó el programa conocido con el nombre de newcokb3d que es utilizado para realizar el cokriging. A continuación se presentan de manera resumida los procedimientos que lleva a cabo el programa¹⁵, debido a que éste fue modificado para adaptarlo a las necesidades del presente trabajo:

1. *Lectura del archivo de parámetros.* Se presentan el número de variables, nombre del archivo con los datos, nombres de los archivos de salida, radios máximos de búsqueda entre otros.

Al final del archivo de parámetros se encuentra la sección donde se definen las diferentes funciones de covarianza. En el presente caso no se han definido las funciones de covarianza ya que se habían calculado los valores de ésta previamente.

2. *Lectura del archivo de datos.* En este archivo se encuentran las coordenadas de cada uno de los puntos y el valor de las propiedades muestreadas en cada uno de ellos.
3. *Solución del cokriging.* El cokriging es un método de estimación lineal, que estima el valor de una propiedad en cierto punto del espacio partiendo de la información disponible de la misma y de otras propiedades correlacionadas con ella. Aquí los valores de las covarianzas no son calculados sino que son leídos desde los archivos generados previamente.

Como se ha visto, en la estimación de la permeabilidad se establece un sistema de ecuaciones para cada celda en los que el lado izquierdo (del sistema) es, en este caso particular, exactamente el mismo para cada una de ellas. Algo que no ocurre con el lado derecho de cada sistema donde se ven representados los valores de covarianza entre *cada* una de las celdas y todos los datos.

Para finalizar, el programa resolvió cada sistema de ecuaciones, cuyos resultados fueron los pesos que determinaron la influencia de cada uno de los datos en el estimado de la permeabilidad en cada celda.

II.3.5 Simulación numérica de los campos de presiones.

Una vez obtenidos los valores de $\ln(K)$ de cada una de las celdas de la malla, se les aplicó la función exponencial para obtener el campo de permeabilidad. Los valores de permeabilidad fueron exportados al ECLIPSE y así, mediante la simulación numérica se obtuvo el campo de presiones correspondiente.

II.4 EJEMPLOS NUMÉRICOS

Tomando en cuenta que una malla muy grande podía causar problemas a nivel computacional, debido al tamaño de las matrices que se manejan en el trabajo; se decidió utilizar una malla de dimensiones $10 \times 7 \times 5$, es decir 10 celdas en la dirección x, cada una de 328 pies (100 m), 7 en la dirección y, también de 328 pies y 5 en la dirección z de 33 pies (10 m) cada una; un total de 350 celdas. Ver figura N°. 9.

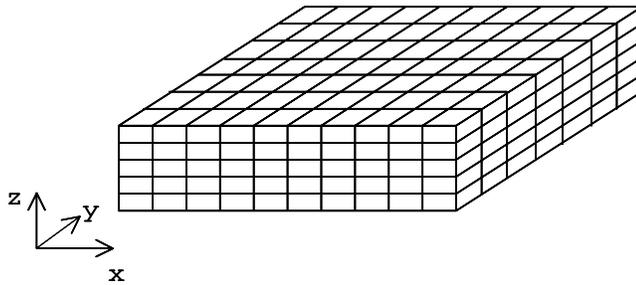


Figura N°. 9. Malla utilizada para la aplicación de la metodología.

El campo aleatorio gaussiano (campo sintético) de $Y=ln(K)$ fue generado tomando en cuenta los siguientes parámetros estadísticos:

- Covarianza exponencial,
- varianza= 1,
- Rango= 1640,42 pies (500 m).

Con esta información, la función de covarianza de los campos Y puede representarse a través de la siguiente fórmula:

$$Cov_{YY}(x_i, x_l) = \exp\left(\frac{-d_{ij}}{1640,42}\right) \quad \text{II.21}$$

donde:

$Cov_{YY}(x_i, x_j)$: covarianza del logaritmo de permeabilidad entre los puntos x_i y x_j ,

d_{ij} : distancia entre los puntos x_i y x_j .

El campo sintético, Y , de cada capa, se presenta en la figura N°. 10.

Con el objetivo de estimar el campo Y y realizar el cotejo de las presiones, se plantearon dos escenarios partiendo de la misma malla y del mismo campo original de logaritmo de permeabilidad Y , cada uno de ellos con distintas cantidades de información. Las características del yacimiento en el que se desarrollaron los ejemplos se presentan en la tabla N°. 1. En el primer escenario se contó con la siguiente información, ver figura N°. 11:

- Tres (3) pozos verticales con una tasa de 50 bls/d cada uno, cuyos cabezales se ubicaron en las celdas (5,5,5), (3,3,5) y (8,6,5) y los intervalos productores en las celdas (5,5,3), (3,3,4) y (8,6,4),
- siete (7) mediciones de permeabilidad en las celdas (5,5,3), (3,3,4), (5,5,4), (8,6,4), (3,3,5) (5,5,5), y (8,6,5),
- observaciones de presión en las celdas (5,5,3), (3,3,4) y (8,6,4) realizadas en los tiempos: $t = 360$ días, $t = 720$ días y $t = 1080$ días. En la tabla N°. 2 puede observarse un resumen de los datos.

En el segundo escenario se contó con la siguiente información, ver figura N°. 12:

- tres (3) pozos verticales con una tasa de 50 bls/d cada uno, cuyos cabezales se ubicaron en las celdas (5,5,5), (3,3,5) y (8,6,5) y los intervalos productores en las celdas (5,5,3), (3,3,4) y (8,6,4),

- ocho (8) mediciones de permeabilidad en las celdas (7,2,2), (5,5,3), (3,3,4), (5,5,4), (8,6,4), (3,3,5) (5,5,5), y (8,6,5),
- observaciones de presión en las celdas (7,2,1), (7,2,2), (5,5,2), (7,2,3), (5,5,3), (7,2,4), (3,3,4), (8,6,4) y (7,2,5) realizadas en los tiempos: $t = 360$ días, $t = 720$ días y $t = 1080$ días. En la tabla N°. 3 puede observarse un resumen de los datos.

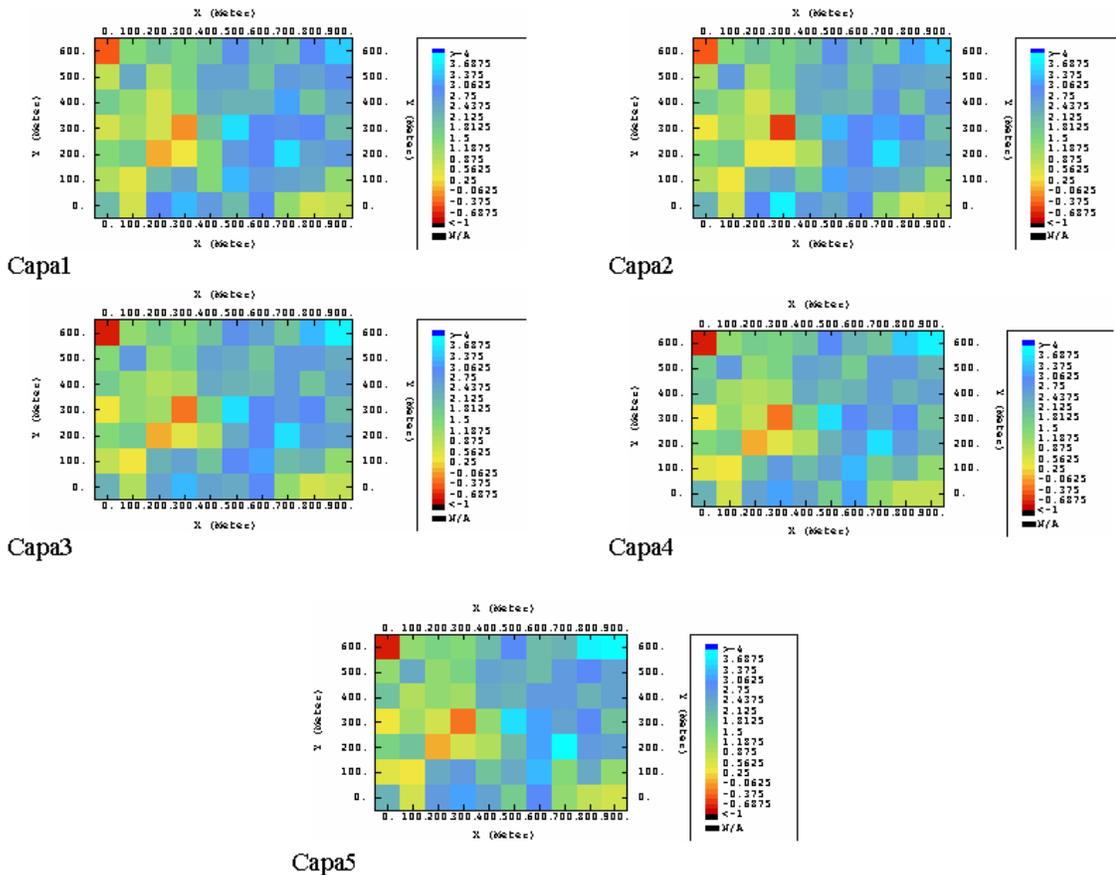


Figura N°. 10. Campo sintético Y (logaritmo de permeabilidad).

Tabla N°. 1. Datos del yacimiento en el que se basaron los escenarios (elección arbitraria).

Propiedad	Valor
ϕ , fracción	0,039
<i>Tope</i> , pies	1590
C_r , lpc ⁻¹	$7,2 \times 10^{-6}$
ρ_o , lbs/pies ³	49
β_{ob} @3600 lpc, BY/BF	1,12
C_o , lpc ⁻¹	$1,6 \times 10^{-5}$
μ_o , cp	0,88
<i>Datum</i> , pies	1635
P_o , lpc @datum	7000

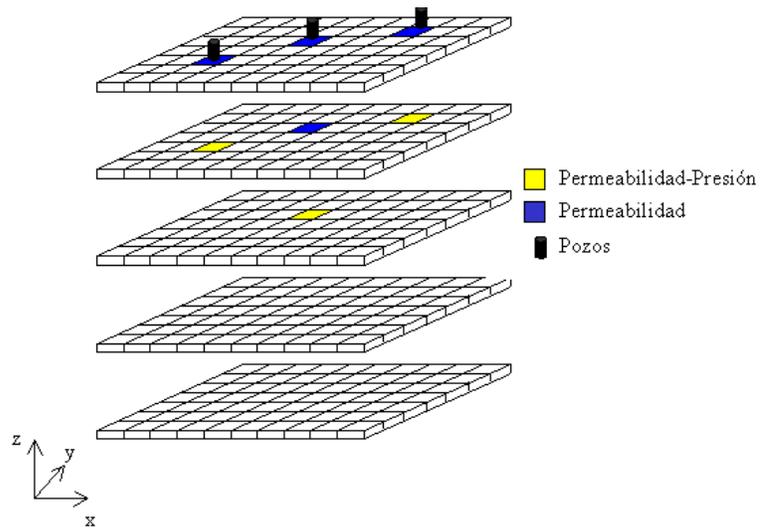


Figura N°. 11. Configuración escenario N°. 1.

Tabla N°. 2. Medidas de $\ln(K)$ y observaciones de presión para el escenario N°. 1.

Medidas de permeabilidad			Observaciones de presión, lpc			
Celdas	$\ln(K)$	K, md	Celdas	$t = 360 d$	$t = 720 d$	$t = 1080 d$
(5,5,3)	0,940	2,560	(5,5,3)	6013,806	5085,734	4137,326
(3,3,4)	0,875	2,399	(3,3,4)	5988,361	5060,012	4111,306
(5,5,4)	0,944	2,570	(8,6,4)	6051,067	5123,640	4175,905
(8,6,4)	1,708	5,518				
(3,3,5)	1,300	3,669				
(5,5,5)	0,944	2,570				
(8,6,5)	1,493	4,450				

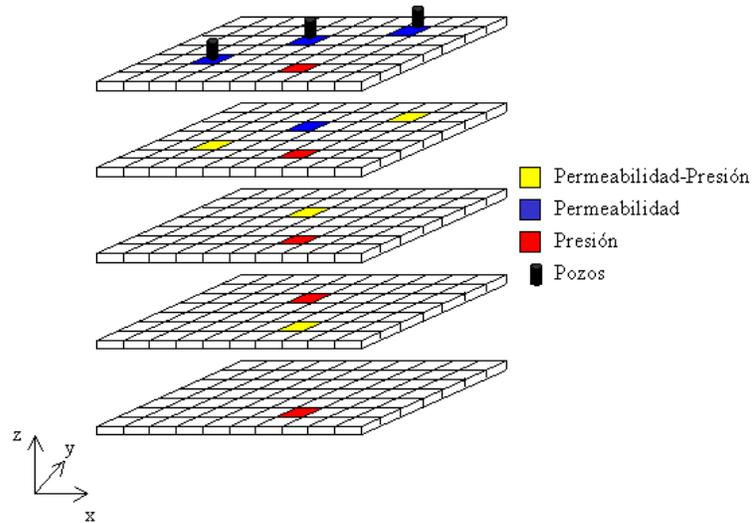


Figura N°. 12. Configuración escenario N°. 2.

Tabla N°. 3. Medidas de $\ln(K)$ y observaciones de presión para el escenario N°. 2.

Medidas de permeabilidad			Observaciones de presión, lpc			
Celdas	$\ln(K)$	K, md	Celdas	$t = 360 d$	$t = 720 d$	$t = 1080 d$
(7,2,2)	1,947	7,008	(7,2,1)	6102,263	5175,341	4228,114
(5,5,3)	0,940	2,560	(7,2,2)	6099,096	5172,222	4225,041
(3,3,4)	0,875	2,399	(5,5,2)	6017,633	5089,525	4141,080
(5,5,4)	0,944	2,570	(7,2,3)	6095,930	5169,102	4221,968
(8,6,4)	1,708	5,518	(5,5,3)	6013,806	5085,734	4137,326
(3,3,5)	1,300	3,669	(7,2,4)	6092,763	5165,981	4218,895
(5,5,5)	0,944	2,570	(3,3,4)	5988,361	5060,012	4111,306
(8,6,5)	1,493	4,450	(8,6,4)	6051,067	5123,640	4175,905
			(7,2,5)	6089,595	5162,860	4215,821

III RESULTADOS

III.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se cuantifican las diferencias entre los campos estimados y los campos sintéticos (reales), tanto para el logaritmo de la permeabilidad como para la presión. Se presentan tablas comparativas de los errores calculados para cada uno de los escenarios y el análisis de dichos resultados.

III.2 PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

Una vez que la metodología fue aplicada a los dos escenarios planteados en la sección de ejemplos numéricos del capítulo anterior, se obtuvieron sus respectivas estimaciones (permeabilidad, presión). Los campos de permeabilidad estimados para ambos escenarios se muestran en las figuras N°. 13 y 14. Éstos fueron exportados al simulador numérico ECLIPSE para obtener las presiones de cada uno de ellos y así poder comparar con el campo sintético inicial.

Con la información que se ha manejado en este trabajo y como punto de comparación para los resultados obtenidos con la metodología propuesta, el campo del logaritmo de la permeabilidad también fue estimado mediante el método del kriging ordinario⁵¹, partiendo de los mismos escenarios. La razón de utilizar kriging ordinario es que sus resultados permiten verificar cual es la influencia de la integración de datos dinámicos en la estimación del campo $\ln(K)$.

Para la aplicación del kriging ordinario solo fue necesario utilizar los datos de $\ln(K)$ y un variograma. Se utilizaron los dos escenarios planteados en la sección de ejemplos numéricos sin tomar en cuenta la información dinámica (producción, presiones, etc), debido a que el kriging no toma en cuenta variables secundarias. Ésto se realizó en el paquete geoestadístico ISATIS tomando en cuenta los siguientes parámetros estadísticos:

- Variograma exponencial,
- Meseta= 1,
- Rango= 1640,42 pies (500 m).

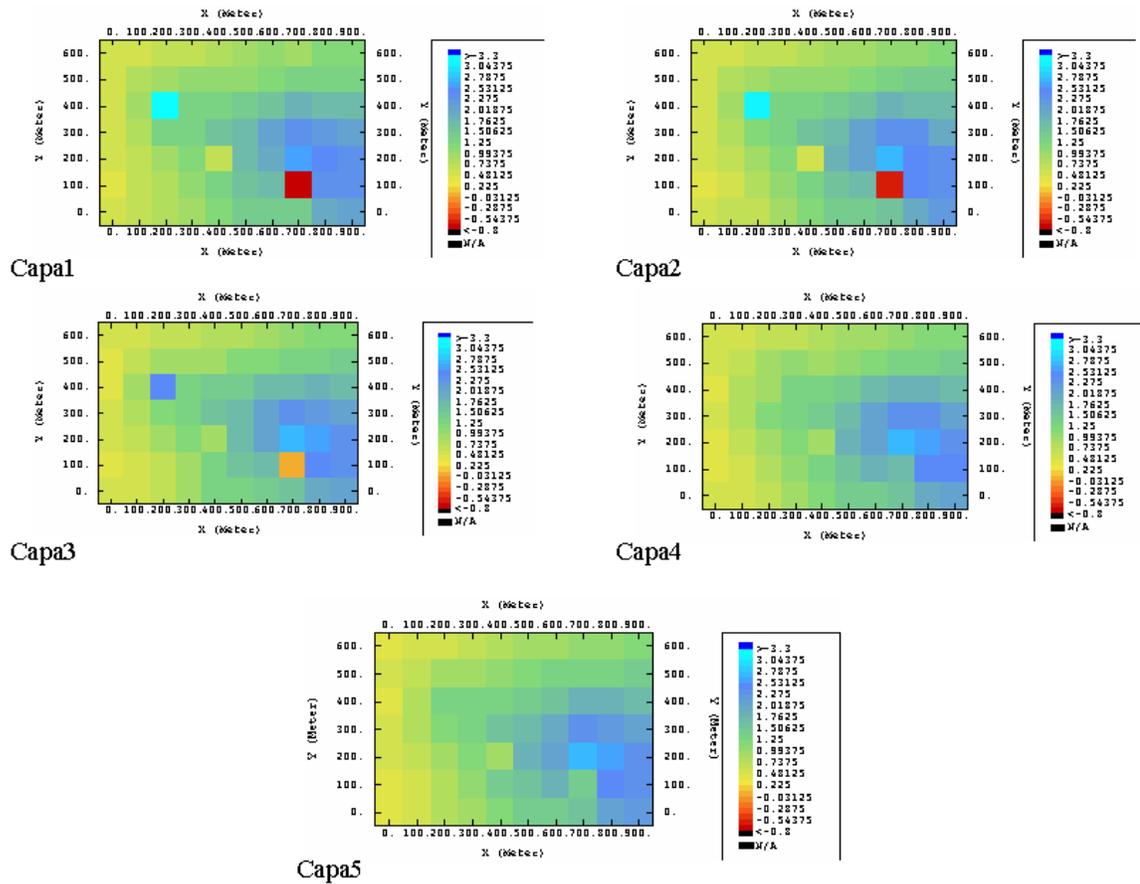


Figura Nº. 13. Campo del logaritmo de permeabilidad estimado (cokriging) para el escenario 1.

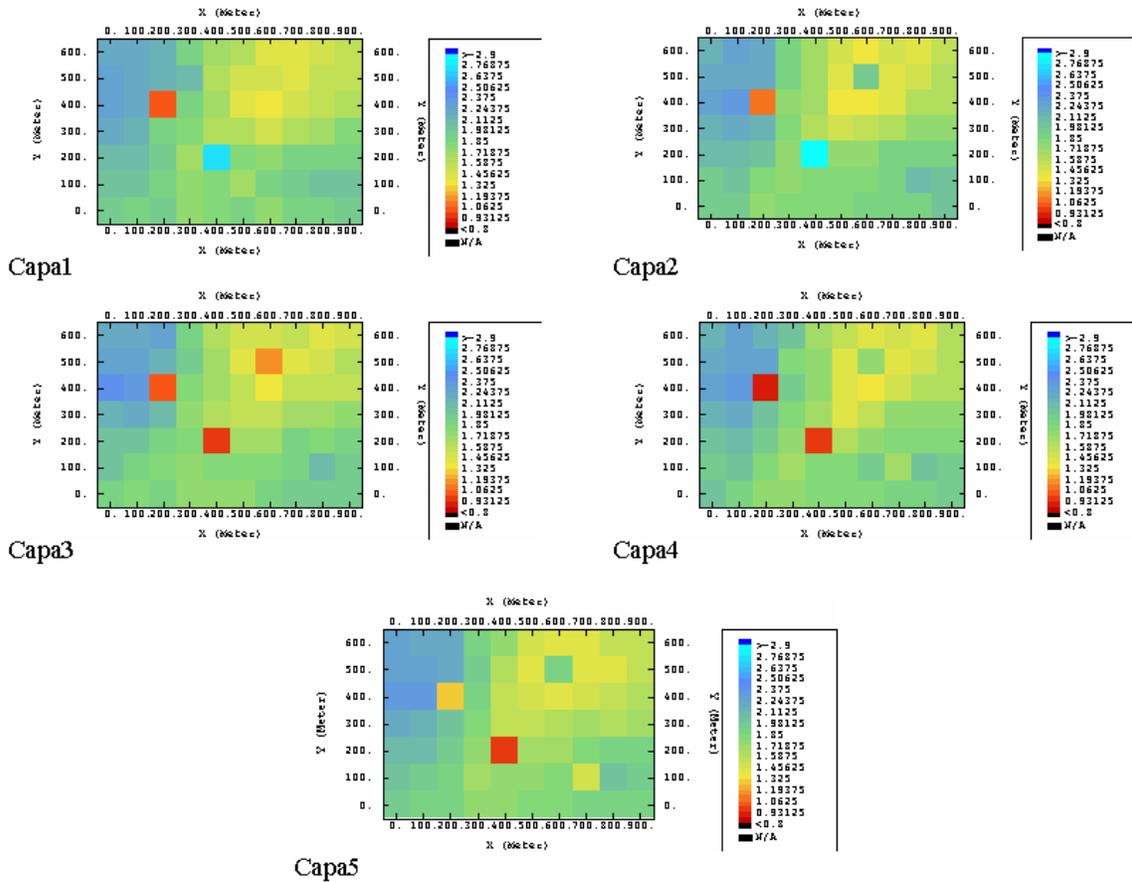


Figura N°. 14. Campo del logaritmo de permeabilidad estimado (cokriging) para el escenario 2.

Los mapas de los campos obtenidos con el kriging se muestran en las figuras N°. 15 y 16. Los valores de éstos, también fueron exportados al simulador numérico para obtener sus presiones.

Para comparar los resultados obtenidos con el campo sintético, se utilizaron los siguientes dos criterios:

1. La norma L_2 de la diferencia entre los campos Y y Y^* :

$$CY = \|Y - Y^*\|_{L_2} = \left[\frac{1}{W} \sum_{w=1}^W (Y_i - Y_i^*)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{III.1}$$

donde:

Y : valores de $\ln(K)$ del modelo sintético

\hat{Y} : valores de $\ln(K)$ en los modelos estimados

W : número de celdas de la malla.

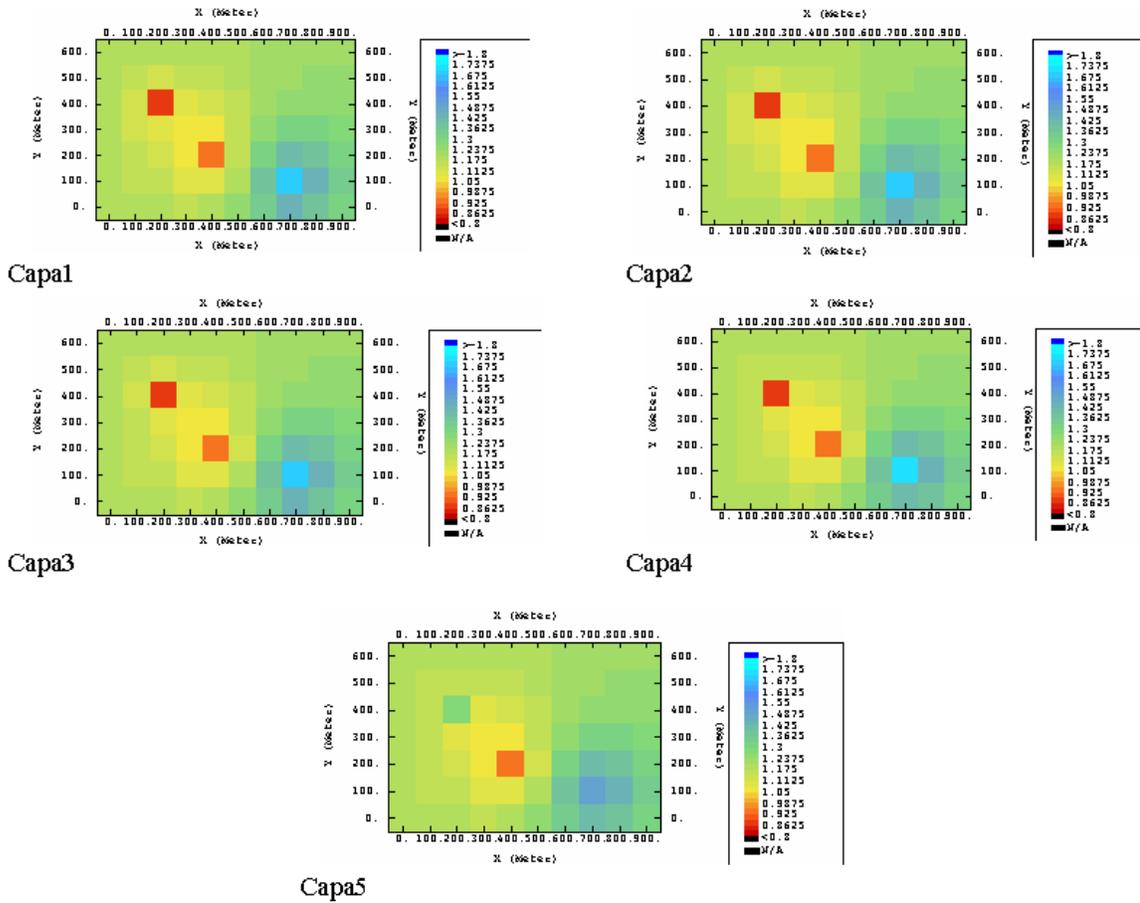


Figura N°. 15. Campo del logaritmo de permeabilidad estimado para el escenario 1 mediante kriging.

2. La norma L_2 de la diferencia entre el campo de presión sintético y los campos de presión estimados:

$$CF_2 = \|P_{ob}(Y) - P_{ob}\|_{L_2} = \left[\frac{1}{U} \sum_{t=1}^U \frac{1}{W} \sum_{l=1}^W (P_{ob}(Y) - P_{ob})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{III.2}$$

donde:

$P_{ob}(Y)$: valores de la presión en los modelos estimados.

P_{ob} : valores de la presión en el modelo sintético.

U : número de pasos de tiempos.

W : número de celdas de la malla.

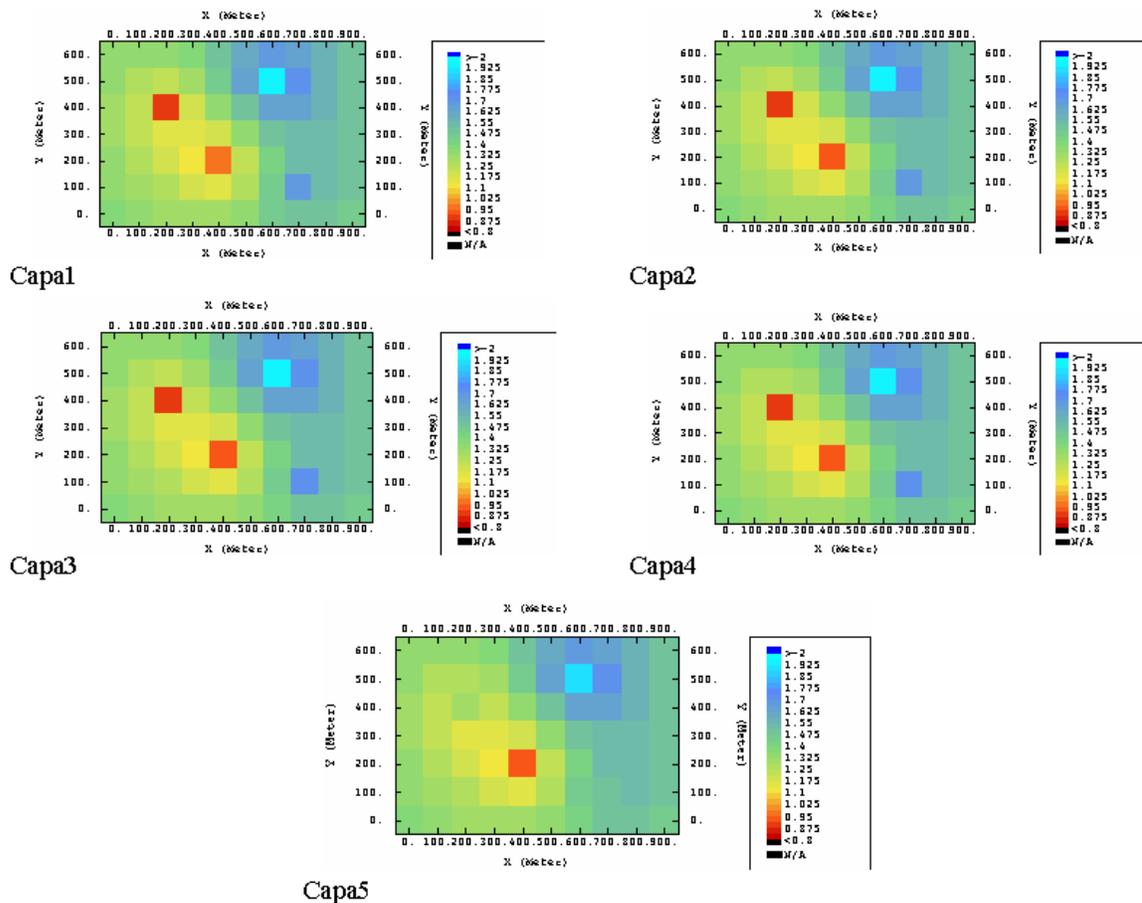


Figura N°. 16. Campo del logaritmo de permeabilidad estimado para el escenario 2 mediante kriging.

Los errores calculados para cada uno de los métodos en sus diferentes escenarios pueden observarse en las tablas N°. 4 y 5.

Tabla N°. 4. Error calculado para la estimación del campo $\ln(K)$.

		Método de Estimación	CY
Escenario 1		Kriging. 7 datos $\ln(K)$.	1,17
		Metodología. 7 datos $\ln(K)$. 3 puntos P .	1,16
Escenario 2		Kriging. 8 datos $\ln(K)$.	1,04
		Metodología. 8 datos $\ln(K)$. 9 puntos P .	1,11

Tabla N°. 5. Error calculado para el cotejo del campo de presiones.

		Método de Estimación	CF ₂
Escenario 1		Kriging. 7 datos $\ln(K)$.	22,74
		Metodología. 7 datos $\ln(K)$. 3 puntos P .	14,55
Escenario 2		Kriging. 8 datos $\ln(K)$.	16,55
		Metodología. 8 datos $\ln(K)$. 9 puntos P .	15,34

III.3 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

En la tabla N°. 4 se muestra el error calculado entre los campos del logaritmo de permeabilidad estimados y el campo sintético. Se puede observar que en el escenario 1, el resultado obtenido para el modelo con integración de datos dinámicos (IDD; 1,16) es mejor que el de kriging (1,17), aunque la diferencia entre sus errores no es significativa. Algo similar ocurre para el escenario 2 (1,11 IDD; 1,04 kriging), la diferencia entre los errores calculados en cada uno de los métodos no es significativa, pero en este caso se obtiene una mejor aproximación con kriging.

Si se analizan los resultados obtenidos con la aplicación de cada uno de los métodos, éstos son mejores para el escenario 2, siendo consistentes con la idea de que mientras mayor sea la cantidad de información mejores son los estimados. En este trabajo se utilizó un campo sintético de permeabilidad por lo que los

valores de las observaciones son exactos y no presentan errores, algo a tener en cuenta en los problemas reales donde la calidad de las observaciones juegan un papel muy importante en los estimados.

Se nota que el valor estimado Y^* siempre será diferente al valor real Y lo cual puede deberse, entre otros, a:

- Error al hacer la elección del modelo de correlación espacial.
- Errores en los datos.
- Y^* es mucho más suave que Y .

En el presente trabajo, las dos primeras fuentes de error presentadas se descartan. La única que afecta los resultados es la suavidad de los mismos. Ésto se debe a una condición implícita en el cokriging que establece la varianza mínima de los datos estimados.

En la tabla N°. 5 se muestra el error calculado entre los campos de presiones estimados y el campo sintético. En este caso se puede observar una mejor aproximación en los modelos IDD (14,55 escenario 1, 15,34 escenario 2) con respecto a los modelos de kriging (22,74 escenario 1, 16,55 escenario 2). Si se observa el error de los modelos de kriging para cada uno de los escenarios, en el caso donde se tiene mayor cantidad de información (escenario 2), el cotejo de las presiones es mejor que en el escenario 1. Esto no se observa en los modelos IDD, en donde el error es mayor en el caso donde hay más información, aunque se mantiene en el mismo rango que en el de menos información. Esta diferencia puede deberse a la configuración de los escenarios planteados, ya que el modelo es relativamente pequeño.

Se resalta que las diferencias obtenidas entre el modelo sin integrar presiones/producción y el de IDD no son notables utilizando criterios estáticos. Sin embargo, el uso de los criterios dinámicos (comparación de campo de presiones)

señala cierta mejora en los modelos IDD, lo que se puede traducir en la disminución del tiempo y costos del procedimiento de ajuste histórico en los modelos de simulación.

IV CONCLUSIONES

- Para predecir con confiabilidad el comportamiento de un yacimiento es necesario modelar de la manera más aproximada posible, su comportamiento pasado, por lo que se considera que un mejor ajuste histórico es el resultado de la mejora de su modelo estático. En este caso una mejor aproximación del campo de permeabilidad.
- Se pueden integrar leyes físicas (ecuación de difusividad) en la determinación del modelo de correlación espacial (variograma/covarianza).
- La integración se hace durante la etapa de caracterización (integración *a priori* de datos dinámicos). Lo que podría ser más rápido que la integración *a posteriori*.
- Se ha logrado modelar la covarianza 4D (espacio-temporal). La covarianza cruzada entre los datos de presión en diferentes tiempos es tomada en cuenta para la solución del cokriging.
- Implícitamente se ha realizado el cotejo histórico de presiones. El cokriging es un método condicional, es decir, respeta la información en los puntos donde es conocida.

V LIMITACIONES/RECOMENDACIONES

- El trabajo fue desarrollado en un modelo monofásico. Se recomienda implementarlo en modelos multifásicos y evaluar su aporte en la estimación.
- Se desarrollan modelos de correlación espacial isotrópicos. Es necesario extender el método a problemas anisotrópicos, porque generalmente, las propiedades del yacimiento presentan comportamientos de este tipo.
- La exigencia computacional es considerable debido a las dimensiones de las matrices que se manejan en el trabajo. Es necesario y recomendable optimizar el código para así reducir la exigencia computacional.
- Se integran mediciones de presión, sólo de tres tiempos. En problemas reales es posible contar con muchas más mediciones de presión que deben ser integradas al modelo. El programa de cokriging es lo suficientemente flexible para poder modificarlo y permitir la integración de mucha más información.
- Se considera el campo de permeabilidad estacionario. Esto facilitó el planteamiento y desarrollo del problema. Se recomienda desarrollar la metodología considerando la permeabilidad no estacionaria. Los cálculos pueden complicarse aún más pero no existen impedimentos teóricos para hacerlo.
- Se realiza solo estimación, imposibilitando el análisis de la incertidumbre de los modelos. Se recomienda realizar simulación estocástica para realizar análisis de incertidumbre y mejorar el alcance de la metodología.
- Se aplicó la metodología a un modelo pequeño. Se recomienda desarrollar un modelo mayor, lo que permitiría detectar ventajas/limitaciones adicionales.

- La aplicación en un modelo sintético permitió obtener datos exactos sin errores. Con la aplicación a datos reales podría efectuarse un análisis de sensibilidad de los errores en los datos. Además, la aplicación a datos reales podría identificar el potencial del método para su aplicación en futuros proyectos de desarrollo de yacimientos.

VI REFERENCIAS

1. Al Qassab, H., Fitzmaurice, J., Al-Ali, Z., Al-Khalifa, M., Aktas, G., Glover, P. “Cross-Discipline Integration in Reservoir Modeling: The Impact on Fluid Flow Simulation and Reservoir Management”, Paper SPE 62902, 2000.
2. Bear, J. “Dynamics of Fluids in Porous Media”, American Elsevier Publishing Company, New York, 1967, 764 páginas.
3. Carter, R. “Discussion of Comparison of Sensitivity Coefficient Calculation Methods in Automatic History Matching”, Paper SPE 10873, 1982.
4. Carter, R., Kemp, L., Pierce, A. “Discussion of Comparison of Sensitivity Coefficient Calculation Methods in Automatic History Matching”, Paper SPE 10873, 1982.
5. Carter, R., Kemp, L., Pierce, A., Williams, D. “Performance Matching With Constraints”, Paper SPE 4260, 1973.
6. Castillo, C., Gedler, G., Porjesz, R., Rondón, O. “Curso de Geoestadística”, INTEVEP, Los Teques, 2000.
7. Chambers, R., Yarus, J., Hird, K. “Petroleum Geostatistics for Nongeostatisticians”, Geologic Column, Part 1, páginas 474-479, 2000.
8. Chambers, R., Yarus, J., Hird, K. “Petroleum Geostatistics for Nongeostatisticians”, Geologic Column, Part 2, páginas 474-479, 2000.
9. Chavent, G., Dupuy, M. “History Matching by Use of Optimal Theory”, Paper SPE 4627, 1975.

10. Craft, C., Hawkins, M. "Ingeniería Aplicada de Yacimientos Petrolíferos", Editorial Tecnos, Madrid, 1977, 560 páginas.
11. Dagan, D., Rubin Y. "Stochastic Identification of Recharge, Transmissivity, and Storativity in Aquifer Transient Flow: A quasi-steady approach", Water Resources Research, Vol. 24, N°. 10, páginas 1698-1710, 1988.
12. Dagan, G. "Stochastic Modeling of Groundwater Flow by Unconditional And Conditional Probabilities: The Inverse Problem", Water Resources Research, Vol. 21, N°. 1, páginas 65-72, 1985.
13. De Fouquet, C. "Joint Simulation of a Random Function and its Derivatives", WJ Kleingeld y DG Krige (eds), Geostats 2000 Cape Town, 2000.
14. Desbarats, A., Srivastava, R. "Geostatistical Characterization of Groundwater Flow Parameters in a Simulated Aquifer", Water Resources Research, Vol. 27, N°. 5, páginas 687-698, 1991.
15. Deutsch, C., Journel A. "GSLIB Geostatistical Software Library and User's Guide", Oxford University Press, Ney York, 1992, 369 páginas.
16. Gavalas, G., Shah, P., Seinfeld, J. "Reservoir History Matching by Bayesian Estimation", Paper SPE 5740, 1975.
17. González, R. "Introducción a la Geoestadística", Curso, 1996.
18. Gouyon, R. "Integración y Distribuciones", Editorial Reverté, Barcelona, 1979, 180 páginas.

19. Hoeksema, R., Kitanidis P. "An Application of the Geostatistical Approach to the Inverse Problem in Two-dimensional Groundwater Modeling", *Water Resources Research*, Vol. 20, N°. 7, páginas 1003-1020, 1984.

20. Hoeksema, R., Kitanidis P. "Analysis of the Spatial Structure of Properties of Selected Aquifers", *Water Resources Research*, Vol. 21, N°. 4, páginas 563-572, 1984.

21. Isaaks, E., Srivastava R. "An Introduction to Applied Geoestatics", Oxford University Press, Oxford, 1989, 537 páginas.

22. Jacquard, P., Jain, C. "Permeability Distribution From Field Pressure Data", Paper SPE 1307, 1965.

23. Jansen, F., Kelkar, M. "Non-Stationary Estimation of Reservoir Properties Using Production Data", Paper SPE 38729, 1997.

24. Journel, A. "Geostatistics for Reservoir Characterization", Paper SPE 20750, 1990.

25. Karpouzou, D., Delay F., Katsifarakis, L., Marsily de, G. "A Multipopulation Genetic Algorithm to Solve the Inverse Problem in Hydrogeology", *Water Resources Research*, Vol. 37, N°. 9, páginas 2291-2302, 2001.

26. King, G., David, W., Tokar, T., Pape, W., Newton, S., Wadosky, J., Williams, M. Murdoch, R., Humphrey, M. "Takula Field: Data Acquisition, Interpretation, and Integration for Improved Simulation and Reservoir Management", Paper SPE 66400, 2001.

27. Kitanidis, P. "Recent Advances in Geostatistical Inference on Hydrogeological Variables", *Rev. Geophys.*, Vol. 33, 1995.

28. Kitanidis, P., Vomvoris, E., "A Geostatistical Approach to the Inverse Problem in Groundwater Modeling (Steady State) and One-Dimensional Simulations", *Water Resources Research*, Vol. 19, N°. 3, páginas 677-690, 1983.
29. Kyriakidis, P., Journel, A. "Geostatistical Space-Time Models: A Review", *Mathematical Geology*, Vol. 31, N°. 6, páginas 651-684, 1999.
30. Landa, J. "Technique to Integrate Production and Static Data in a Self-Consistent Way", Paper SPE 71597, 2001.
31. Landa, J., Horne, R. "A Procedure to Integrate Well Test Data, Reservoir Performance History and 4-D Seismic Information into a Reservoir Description", Paper SPE 38653, 1997.
32. Lee, D., "Stochastic Modeling for the Heterogeneous Anisotropic Reservoir System by Using Geostatistics", Paper SPE 54310, 1999.
33. Lee, J. "Well Testing", SPE Monograph Series, Texas, 1982, 149 páginas.
34. Liu, J., Enwall, R., Davis, R., Douglas, J., Barber, R. "Integration of Engineering Data and Geostatistics in Simulation of a Complex Carbonate Reservoir", Paper SPE 25598, 1993.
35. Loaicigia, H., Marino, A. "Error analysis and stochastic differentiability in subsurface flow modeling", *Water Resources Research*, Vol. 25, N°. 12, páginas 2897-2902, 1990.
36. Mariotti, P., De Fouquet, C., Bruno, R. "Geoestatistical Charaterization of an Aquifer By Joint Simulation of a Random Function and its Partial Derivatives", WJ Kleingeld y DG Krige (eds), *Geostats 2000 Cape Town*, 2000.

37. Mattax, C., Dalton, R. "Reservoir Simulation", SPE Monograph Series, Texas, 1990, 173 páginas.
38. Matthews C., Russell, D. "Pressure Buildup and Flow Test in Wells", SPE Monograph Series, Texas, 1967, 167 páginas.
39. Narasimhan, T., Witherspoon P. "An Integrated Finite Difference Method for Analyzing Flow in Porous Media", Water Resources Research, Vol. 12, N°. 1, páginas 57-64, 1976.
40. Neuman, S. "A Statistical Approach to the Inverse Problem of Aquifer Hydrology 3. Improved Solution Method and Added Perspective", Water Resources Research, Vol. 16, N°. 2, páginas 331-346, 1980.
41. Neuman, S. "Adjoint-State Finite Element Equations for Parameter Estimation", MS: School of Engineering, University of Mississippi, páginas 2.66-2.75, 1980.
42. Nyhoff, L., Lesstma, S. "Fortran 77 for Engineers and Scientists", Prentice Hall, New Jersey, 1996, 884 páginas.
43. O'Rourke, S. "The Benefits of Enhanced Integration Capabilities in 3-D Reservoir Modelling and Simulation", Paper SPE 36539, 1996.
44. Penney, E. "Ecuaciones Diferenciales Elementales", Prentice Hall, México, 1994, 773 páginas.
45. Pereira, E. "Influencia de las Heterogeneidades en el Recobro de Crudo por Inyección de Agua para el Yacimiento LL-7, Campo Lagunillas, Estado Zulia", Informe Tesis, Caracas, 1999, 195 páginas.
46. Pino, H. "Guía Yacimientos I", Universidad Central de Venezuela.

47. Purcell, E., Varberg, D. "Cálculo con Geometría Analítica", Prentice Hall, México, 1992, 924 páginas.
48. Rachford, H. "A Sampling of Variational Methods", Paper SPE 5720, 1976.
49. Rouhani, S., Wackernagel, H. "Multivariate Geostatistical Approach to Space-Time Data Analysis", Water Resources Research, Vol. 26, N°. 4, páginas 585-1591, 1990.
50. Rubin, Y., Dagan, G. "Stochastic Identification of Transmissivity and Effective Recharge in Steady Groundwater Flow, 1, Theory". Water Resources Research, Vol. 23, N°. 7, páginas 1185-1192, 1987.
51. Samper, F., Carrera, J. "Geoestadística. Aplicaciones a la hidrología subterránea", Gráficas Torres, Barcelona, 484 páginas.
52. Shah, P., Gavalas, G. "Error Analysis in History Matching: The Optimum Level of Parametrization", Paper SPE 6508, 1978.
53. Smith, C. "Collins Diccionario English-Spanish", Ediciones Grijalbo, Barcelona, 1979, 640 páginas.
54. Smith, C., Tracy, G. Farrar, L. "Applied Reservoir Engineering", OGCI Publications, Tulsa, 1992, Volúmenes 1 y 2.
55. Sod, G. "Numerical Methods in Fluid Dynamics", Cambridge University Press, New York, 1989, 442 páginas.
56. Spiegel, M. "Ecuaciones Diferenciales Aplicadas", Prentice Hall, México, 1983, 668 páginas.

-
57. Spiegel, M. "Estadística", McGraw Hill, México, 1983, 556 páginas.
58. Subyani, A. "On the Space-Time Variogram Models. An Application to Seasonal Precipitation", Scientific Publishing Center, King Abdulaziz University, Saudi Arabia, 20 páginas, 2000.
59. Sun, N., Jeng M., Yeh, W. "A Proposed Geological Parameterization method for Parameter Identification in Three-Dimensional Groundwater Modeling", Water Resources Research, Vol. 31, N°. 1, páginas 89-102, 1995.
60. Sun, N., Yeh, W. "A Proposed Upstream Weight Numerical Method for Simulating Pollutant Transport in Groundwater", Water Resources Research, Vol. 19, N°. 6, páginas 1489-1500, 1983.
61. Sun, N.-Z., Yeh, W. "A Stochastic Inverse Solution for Transient Groundwater Flow: Parameter Identification and Reliability Analysis", Water Resources Research, Vol. 28, N°. 12, páginas 3269-3280, 1992.
62. Sun, N.-Z., Yeh, W. "Couple Inverse Problems in Groundwater Modeling. 1. Sensitivity Analysis and Parameter Identification", Water Resources Research, Vol. 26, N°. 10, páginas 2507-2525, 1990.
63. Sun, N.-Z., Yeh, W. "Identification of Parameter Structure in Groundwater Inverse Problem", Water Resources Research, Vol. 21, N°. 6, páginas 869-883, 1985.
64. Taheri, M., Vilorio, R. "Caracterización Geoestadística y Simulación de Yacimientos, Norte de Monagas", Informe INT-STE-00611,96, Intevep, Los Teques, 1996, 211 páginas.

65. Walpole, R., Myers, R., Myers, S. "Probabilidad y Estadística para Ingenieros", Prentice Hall, México, 1999, 739 páginas.
66. Yeh, W. "Review of Parameter Identification Procedures in Groundwater Hydrology: The Inverse Problem", Water Resources Research, Vol. 22, N°. 1, páginas 95-108, 1986.
67. Yeh, W., Sun, N. "An Extended Identifiability in Aquifer Parameter Identification and Optimal Pumping Test Design", Water Resources Research, Vol. 20, N°. 12, páginas 1837-1847, 1984.
68. Zimmerman, D. "A Comparison of Seven Geostatistically Based Inverse Approaches to Estimate Transmissivities for Modeling Advective Transport by Groundwater Flow", Water Resources Research, Vol. 34, N°. 6, páginas 1373-1413, 1998.

VII APÉNDICES

VII.1 FUNCIONES ALEATORIAS. CONCEPTOS BÁSICOS^{21,51,57,65}

VII.1.1 Función aleatoria

En teoría de probabilidad una serie de k variables aleatorias dependientes Z_1, Z_2, \dots, Z_k definen un vector aleatorio $Z=(Z_1, Z_2, \dots, Z_k)$ con k componentes. Análogamente, cuando el valor de una función $Z(x)$ es una variable aleatoria, al variar x en el espacio R^n de n dimensiones, $Z(x)$ define una familia de variables aleatorias. A cada punto x_0 del espacio le corresponde una variable aleatoria $Z(x_0)$. La función aleatoria $Z(x)$ puede también interpretarse como una función del punto x , cuyo valor en x_0 no es un número sino una variable aleatoria. Nótese que en general las variables aleatorias correspondientes a dos puntos $Z(x_1)$ y $Z(x_2)$ no tienen porque ser independientes.

De la misma manera que al tomar una muestra aleatoria ω de una variable aleatoria Y se obtiene un valor numérico $Y(\omega)$, al tomar una muestra aleatoria de una función aleatoria $Z(x)$ se obtiene una función $Z(x, \omega)$ denominada realización u observación de la función aleatoria $Z(x)$.

VII.1.2 Función de distribución y momentos de una función aleatoria

Considérese una función aleatoria $Z(x)$ definida en R^n . Para cualesquiera k puntos x_1, x_2, \dots, x_k , el vector aleatorio $[Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_k)]$ se caracteriza por su función de distribución k -variable.

$$F_{x_1, x_2, \dots, x_k}(Z_1, Z_2, \dots, Z_k) = \text{Prob}[Z(x_1) \leq Z_1, Z(x_2) \leq Z_2, \dots, Z(x_k) \leq Z_k] \quad \text{VII.1.1}$$

En la mayoría de las aplicaciones prácticas son suficientes los dos primeros momentos de la distribución de $Z(x)$. Generalmente, la información disponible no permite inferir momentos de orden mayor a dos (2).

El momento de primer orden es la esperanza matemática definida como:

$$E[Z(x)] = m(x) \quad \text{VII.1.2}$$

La función $m(x)$ se conoce como deriva o tendencia.

Los momentos de segundo orden considerados en geoestadística son:

La varianza o momento de segundo orden de $Z(x)$ respecto a $m(x)$:

$$\sigma^2 = \text{var}[Z(x)] = E\{[Z(x) - m(x)]^2\} \quad \text{VII.1.3}$$

En general, $\text{var}[Z(x)]$ es una función de x .

La covarianza de dos variables aleatorias $Z(x_i)$ y $Z(x_j)$, $C(x_i, x_j)$, definida como:

$$C(x_i, x_j) = E\{[Z(x_i) - m(x_i)][Z(x_j) - m(x_j)]\} \quad \text{VII.1.4}$$

Es en general una función de x_i y x_j . Cuando $x_i = x_j$ esta función se llama autocovarianza.

El variograma $\gamma(x_i, x_j)$ que se define como:

$$\gamma(x_i, x_j) = \frac{1}{2} \text{Var}\{[Z(x_i) - Z(x_j)]^2\} \quad \text{VII.1.5}$$

VII.1.3 Funciones aleatorias estacionarias

Se dice que una función aleatoria es estrictamente estacionaria si su función de distribución (VII.1.1) es invariante respecto a cualquier traslación del vector h , o lo que es lo mismo, la función de distribución del vector aleatorio $[Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_k)]$ es idéntica a la del vector $[Z(x_1+h), Z(x_2+h), \dots, Z(x_k+h)]$ para cualquier h . Sin embargo, puesto que la geostatística lineal se basa en los dos primeros momentos de la función aleatoria, es suficiente suponer que estos dos momentos existen y limitar la hipótesis de estacionariedad a los dos primeros momentos. Se dice que una función aleatoria $Z(x)$ es estacionaria si:

- $E[Z(x)]$ existe y no depende de x , es decir:

$$E[Z(x)] = m \quad \text{para todo } x \quad \text{VI.1.6}$$

Para toda pareja de variables aleatorias $\{Z(x+h), Z(x)\}$ su covarianza existe y sólo depende del vector separación h , es decir,

$$C(x+h, x) = E[Z(x+h)Z(x)] - m^2 = C(h) \quad \text{VI.1.7}$$

La estacionariedad de la covarianza implica que la varianza $\text{var}[Z(x)]$ existe, es finita y no depende de x , es decir, $\text{var}[Z(x)] = C(0)$. Asimismo bajo esta hipótesis el variograma también es estacionario y se cumple que:

$$\gamma(x+h, x) = \gamma(h) = \frac{1}{2} E\{[Z(x+h) - Z(x)]^2\} \quad \text{VI.1.8}$$

VII.2 ECUACIÓN DE DIFUSIVIDAD³⁸

La descripción matemática del flujo de fluidos en medios porosos puede ser obtenida a partir de las siguientes consideraciones físicas: (1) ley de conservación de la masa, (2) ley de flujo (ley de Darcy) y (3) ecuación de estado. A continuación se presenta la deducción para el caso de flujo monofásico a través de un medio poroso:

Partiendo de la figura N°. 17:

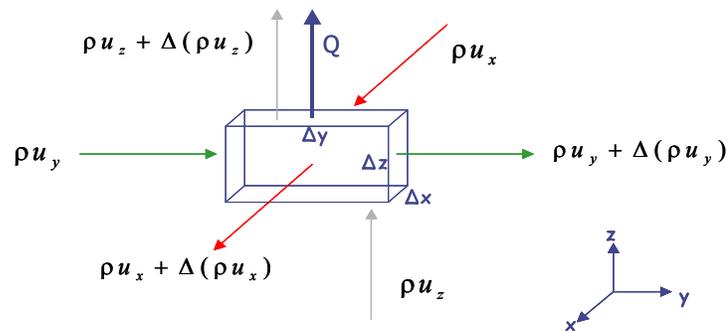


Figura N°. 17. Volumen utilizado para la derivación de la ecuación de difusividad.

Donde:

u_i : Tasa de flujo volumétrico por unidad de área. i : x, y, z

ρ : Densidad del fluido.

$\Delta(\rho u_i)$: Cambio de masa que ocurre dentro del elemento.

La tasa de flujo que entra en la dirección x :

$$\rho u_x \Delta y \Delta z \quad \text{VII.2.1}$$

La tasa de flujo másico que sale en la dirección x :

$$[\rho u_x + \Delta(\rho u_x)] \Delta y \Delta z \quad \text{VII.2.2}$$

El flujo neto en la dirección x :

$$\rho u_x \Delta y \Delta z - [\rho u_x + \Delta(\rho u_x)] \Delta y \Delta z = -\Delta(\rho u_x) \Delta y \Delta z \quad \text{VII.2.3}$$

En las direcciones y y z se pueden obtener ecuaciones equivalentes.

El cambio neto de masa en el elemento en un incremento de tiempo Δt puede escribirse como:

$$-\Delta t [\Delta y \Delta z \Delta(\rho u_x) + \Delta x \Delta z \Delta(\rho u_y) + \Delta x \Delta y \Delta(\rho u_z) + Q\rho] = \rho\phi \Delta x \Delta y \Delta z|_{t+\Delta t} - \rho\phi \Delta x \Delta y \Delta z|_t$$

VII.2.4

Donde el término Q representa el término fuente (producción o inyección de los pozos). Si se divide la ecuación anterior entre $\Delta x \Delta y \Delta z$:

$$-\left[\frac{\Delta(\rho u_x)}{\Delta x} + \frac{\Delta(\rho u_y)}{\Delta y} + \frac{\Delta(\rho u_z)}{\Delta z} + \frac{Q\rho}{V} \right] = \frac{\rho\phi|_{t+\Delta t} - \rho\phi|_t}{\Delta t} \quad \text{VII.2.5}$$

Tomando límites cuando Δx , Δy , Δz y Δt tienden a cero se obtiene la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z}{\partial z} + \frac{Q\rho}{V} = -\frac{\partial \rho\phi}{\partial t} \quad \text{VII.2.6}$$

La ley de Darcy se puede expresar como:

$$u_i = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial i} \quad \text{VII.2.7}$$

Donde i puede representar cualquiera de las tres direcciones x , y o z .

Sustituyendo en la ecuación de continuidad (VII.2.6):

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K_x \rho}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{K_y \rho}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{K_z \rho}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \frac{Q\rho}{V} \right] = \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} \quad \text{VII.2.8}$$

Tomando en cuenta la ecuación de estado que describe la dependencia de la densidad de un fluido de la presión y la temperatura, la cual puede ser obtenida partiendo de la ecuación de compresibilidad (se asumen condiciones isotérmicas):

$$c = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \quad \text{VII.2.9}$$

Asumiendo c (compresibilidad) como una constante, se obtiene:

$$\rho = \rho_0 e^{c_0(P-P_0)} \quad \text{VII.2.10}$$

Donde:

ρ : Densidad del fluido a la presión P .

ρ_0 : Densidad del fluido a una presión de referencia P_0 .

c_0 : Compresibilidad del fluido.

En el lado derecho de la ecuación VII.2.8, resolviendo la derivada:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} = \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{VII.2.11}$$

Asumiendo que la porosidad no varía en el tiempo, el término que involucra la derivada de la porosidad en el tiempo desaparece. Escribiendo la ecuación de estado en series de Taylor y despreciando los términos de segundo orden y superiores se obtiene:

$$\rho = \rho_0(1 + c_o \Delta P) \quad \text{VII.2.12}$$

Sustituyendo en la ecuación VII.2.11, queda:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} = \phi \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0(1 + c_o \Delta P)) \quad \text{VII.2.13}$$

Derivando con respecto al tiempo y sustituyendo en la ecuación VII.2.8 se obtiene la ecuación de difusividad:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K_x}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{K_y}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{K_z}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \frac{Q}{V} \right] = \phi c_o \frac{\partial P}{\partial t} \quad \text{VII.2.14}$$

Donde:

ϕ : Porosidad (*fracción*);

K_i : Permeabilidad del medio en la dirección i (L^2);

Q : Término fuente (L^3/T);

V : Volumen (L^3);

P : Presión (M/LT^2);

μ : Viscosidad (M/LT).

VII.3 FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA

Considere la ecuación de difusividad o ecuación de flujo derivada en la sección anterior:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \frac{Q}{V} \right] = \phi c_r \frac{\partial P}{\partial t} \quad \text{VII.3.1}$$

Tomando los campos aleatorios Y y P , los cuales en el presente desarrollo se supondrá que son funciones aleatorias que pueden ser expresadas como la suma de una componente estocástica estacionaria de media cero f y h , y otra componente determinística F y H respectivamente, se tiene:

$$Y=F+f \quad P=H+h \quad \text{VII.3.2}$$

donde:

$$Y=\ln(K),$$

$$F=E[Y], \text{ valor esperado del campo aleatorio de } \ln(K),$$

$$E[f]=0, \text{ valor esperado de la perturbación de permeabilidad,}$$

$$H(x,t)=E[P(x,t)], \text{ valor esperado del campo aleatorio de presión,}$$

$$E[h]=0, \text{ valor esperado de la perturbación de presión.}$$

Sustituyendo la ecuación VII.3.2 en la ecuación de difusividad y multiplicando en resultado por $e^{(-F-f)}$. Por cuestiones de simplificación se presenta el caso unidireccional:

$$e^{-F-f} \left(\phi c_r \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) - \frac{Q}{V} \right) = e^{-F-f} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(e^{F+f} \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right) \right) \quad \text{VII.3.3}$$

Como F no depende de x (es una constante), se simplifica el lado derecho:

$$e^{-F-f} \left(\phi c_r \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) - \frac{Q}{V} \right) = e^{-f} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(e^f \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right) \right) \quad \text{VII.3.4}$$

Aplicando la regla de la cadena en el lado derecho:

$$e^{-F-f} \left(\phi c_r \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) - \frac{Q}{V} \right) = e^{-f} \left\{ e^f \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right) + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} (e^f) \right\} \quad \text{VII.3.5}$$

Como $(e^{-f})^*(e^f)=1$, se tiene:

$$e^{-F-f} \left(\phi c_r \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) - \frac{Q}{V} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right) + e^{-f} \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} (e^f)$$

VII.3.6

Utilizando la siguiente relación:

$$\frac{d}{dx} (e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

se obtiene:

$$e^{-F-f} \left(\phi c_r \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) - \frac{Q}{V} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right) + e^{-f} e^f \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{VII.3.7}$$

simplificando de nuevo por $(e^{-f})^*(e^f)=1$:

$$e^{-F-f} \left(\phi c_r \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) - \frac{Q}{V} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right) + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{VII.3.8}$$

Loaiciga y Marino³⁵ presentan condiciones suficientes para despreciar el siguiente término:

$$\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x}$$

por lo que se obtiene:

$$e^{-F-f} \left(\phi c_r \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) - \frac{Q}{V} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right) + \frac{1}{\mu} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{VII.3.9}$$

se asume también que la perturbación f es suficientemente pequeña como para que e^{-f} pueda sustituirse por $(1-f)$:

$$e^{-F} (1-f) \left(\phi c_r \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) - \frac{Q}{V} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right) + \frac{1}{\mu} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{VII.3.10}$$

desarrollando:

$$e^{-F} \left(\phi c_r \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) - \frac{Q}{V} \right) - f e^{-F} \left(\phi c_r \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) - \frac{Q}{V} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right) + \frac{1}{\mu} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\text{VII.3.11}$$

Finalmente se asume que (Loaiciga y Marino³⁵):

$$f \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

sustituyendo en VII.3.11:

$$e^{-F} \left(\phi c_r \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) - \frac{Q}{V} - f \phi c_r \frac{\partial H}{\partial t} + f \frac{Q}{V} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right) + \frac{1}{\mu} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{VII.3.12}$$

Pasando todo para un mismo lado:

$$e^{-F} \left(\frac{Q}{V} - \phi c_r \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) - f \frac{Q}{V} + f \phi c_r \frac{\partial H}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right) + \frac{1}{\mu} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

VII.3.13

El valor esperado de la Ec. VII.3.13 sabiendo que $E[f]=0$, $E[h]=0$:

$$e^{-F} \left(\phi c_r \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{Q}{V} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial H}{\partial x} \right) \quad \text{VII.3.14}$$

O en forma de ecuación de difusividad (tendencia de la presión):

$$\phi c_r \frac{\partial H}{\partial t} = e^F \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial H}{\partial x} \right) \right] + \frac{Q}{V} \quad \text{VII.3.15}$$

La diferencia entre VII.3.13 y VII.3.15 (en su forma VII.3.14):

$$e^{-F} \left(\frac{Q}{V} - \phi c_r \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) - f \frac{Q}{V} + f \phi c_r \frac{\partial H}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right) + \frac{1}{\mu} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} - e^{-F} \left(\phi c_r \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{Q}{V} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial H}{\partial x} \right) = 0$$

VII.3.16

desarrollando se obtiene:

$$e^{-F} \left(-\phi c_r \frac{\partial h}{\partial t} - f \frac{Q}{V} + f \phi c_r \frac{\partial H}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{1}{\mu} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{VII.3.17}$$

Ordenando,

$$\phi c_r \frac{\partial h}{\partial t} = e^F \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] + e^F \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \right) + f \left(\phi c_r \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{Q}{V} \right) \quad \text{VII.3.18}$$

Algunos conceptos que serán utilizados de ahora en adelante¹⁸:

Producto escalar:

$$\langle A, B \rangle = \int (AB) dx \quad \text{VII.3.19}$$

Variación:

$$\delta A(x, t) = \frac{\partial A}{\partial x} \delta x + \frac{\partial A}{\partial t} \delta t \quad \text{VII.3.20}$$

Formula de Green:

$$\langle \delta A, B \rangle = -\langle A, \delta B \rangle \quad \text{VII.3.21}$$

Tomando la variación de la ecuación VII.3.18:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial h} \left(\phi c_r \frac{\partial h}{\partial t} \right) \delta h + \frac{\partial}{\partial f} \left(\phi c_r \frac{\partial h}{\partial t} \right) \delta f = \\ & \frac{\partial}{\partial h} \left[e^F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] \delta h + \frac{\partial}{\partial h} \left[e^F \frac{1}{\mu} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \right] \delta h + \frac{\partial}{\partial h} \left[f \left(\phi c_r \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{Q}{V} \right) \right] \delta h + \\ & \frac{\partial}{\partial f} \left[e^F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] \delta f + \frac{\partial}{\partial f} \left[e^F \frac{1}{\mu} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \right] \delta f + \frac{\partial}{\partial f} \left[f \left(\phi c_r \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{Q}{V} \right) \right] \delta f \end{aligned} \quad \text{VII.3.22}$$

esta ecuación puede simplificarse ya que del lado derecho, el segundo y el tercer término no dependen de h :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial h} \left(\phi_{c_r} \frac{\partial h}{\partial t} \right) \delta h + \frac{\partial}{\partial f} \left(\phi_{c_r} \frac{\partial h}{\partial t} \right) \delta f &= \frac{\partial}{\partial h} \left[e^F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] \delta h + \frac{\partial}{\partial f} \left[e^F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] \delta f + \\ \frac{\partial}{\partial f} \left[e^F \frac{1}{\mu} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \right] \delta f + \frac{\partial}{\partial f} \left[f \left(\phi_{c_r} \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{Q}{V} \right) \right] \delta f & \end{aligned} \quad \text{VII.3.23}$$

se multiplica por $\Psi(x,t)$ y se integra en el espacio y tiempo. Ψ es una función arbitraria (será definida posteriormente):

$$\begin{aligned} \iint \frac{\partial}{\partial h} \left(\phi_{c_r} \frac{\partial h}{\partial t} \right) \delta h \Psi dx dt + \iint \frac{\partial}{\partial f} \left(\phi_{c_r} \frac{\partial h}{\partial t} \right) \delta f \Psi dx dt &= \\ \iint \frac{\partial}{\partial h} \left[e^F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] \delta h \Psi dx dt + \iint \frac{\partial}{\partial f} \left[e^F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] \delta f \Psi dx dt &+ \\ \iint \frac{\partial}{\partial f} \left[e^F \frac{1}{\mu} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \right] \delta f \Psi dx dt + \iint \frac{\partial}{\partial f} \left[f \left(\phi_{c_r} \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{Q}{V} \right) \right] \delta f \Psi dx dt & \end{aligned} \quad \text{VII.3.24}$$

utilizando la notación de producto escalar (VII.3.19) dada anteriormente:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial h} \left(\phi_{c_r} \frac{\partial h}{\partial t} \right) \delta h, \Psi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial f} \left(\phi_{c_r} \frac{\partial h}{\partial t} \right) \delta f, \Psi \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial h} \left[e^F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] \delta h, \Psi \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial f} \left[e^F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] \delta f, \Psi \right\rangle \\ - \left\langle \frac{\partial}{\partial f} \left[e^F \frac{1}{\mu} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \right] \delta f, \Psi \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial f} \left[f \left(\phi_{c_r} \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{Q}{V} \right) \right] \delta f, \Psi \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad \text{VII.3.25}$$

resolviendo las derivadas:

$$\begin{aligned} \left\langle \phi_{c_r} \frac{\partial \cdot}{\partial t} \delta h, \Psi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial f} \left(\phi_{c_r} \frac{\partial h}{\partial t} \right) \delta f, \Psi \right\rangle - \left\langle e^F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \cdot}{\partial x} \right) \delta h, \Psi \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial f} \left[e^F \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] \delta h, \Psi \right\rangle - \\ \left\langle e^F \frac{1}{\mu} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \cdot}{\partial x} \delta f, \Psi \right\rangle - \left\langle \left(\phi_{c_r} \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{Q}{V} \right) \delta f, \Psi \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad \text{VII.3.26}$$

se aplica la fórmula de Green al segundo y cuarto término:

$$\begin{aligned} & \left\langle \phi_{c,r} \frac{\partial \cdot}{\partial t} \delta h, \Psi \right\rangle - \left\langle \left(\phi_{c,r} \frac{\partial h}{\partial t} \right) \delta f, \frac{\partial \Psi}{\partial f} \right\rangle - \left\langle e^F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \cdot}{\partial x} \right) \delta h, \Psi \right\rangle - \left\langle e^F \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \delta h, \frac{\partial \Psi}{\partial f} \right\rangle \\ & - \left\langle e^F \frac{1}{\mu} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \cdot}{\partial x} \delta f, \Psi \right\rangle - \left\langle \left(\phi_{c,r} \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{Q}{V} \right) \delta f, \Psi \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad \text{VII.3.27}$$

como $\Psi(x,t)$ no depende de f (se impone), los términos donde esté contenida la derivada de está con respecto a f van a ser 0:

$$\begin{aligned} & \left\langle \phi_{c,r} \frac{\partial \cdot}{\partial t} \delta h, \Psi \right\rangle - \left\langle e^F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \cdot}{\partial x} \right) \delta h, \Psi \right\rangle - \left\langle e^F \frac{1}{\mu} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \cdot}{\partial x} \delta f, \Psi \right\rangle - \left\langle \left(\phi_{c,r} \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{Q}{V} \right) \delta f, \Psi \right\rangle = 0 \\ & \text{VII.3.28} \end{aligned}$$

se aplica la formula de Green (derivada en tiempo y en espacio):

$$\begin{aligned} & - \left\langle \delta h, \phi_{c,r} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{\mu} \frac{\partial \cdot}{\partial x} \delta h, e^F \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \delta f, e^F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \Psi \frac{\partial H}{\partial x} \right) \right\rangle - \\ & \left\langle \delta f, \left(\phi_{c,r} \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{Q}{V} \right) \Psi \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad \text{VII.3.29}$$

se aplica la formula de Green al segundo término por segunda vez y se multiplica por -1 la ecuación:

$$\begin{aligned} & \left\langle \delta h, \phi_{c,r} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \delta h, e^F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \right\rangle - \left\langle \delta f, e^F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \Psi \frac{\partial H}{\partial x} \right) \right\rangle + \\ & \left\langle \delta f, \left(\phi_{c,r} \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{Q}{V} \right) \Psi \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad \text{VII.3.30}$$

devolviendo de nuevo de la notación de producto escalar:

$$\begin{aligned} & \iint \left(\phi c_r \frac{\partial \Psi}{\partial t} + e^F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \right) \delta h dx dt - \\ & \iint \left(e^F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \Psi \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \left(\phi c_r \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{Q}{V} \right) \Psi \right) \delta f dx dt = 0 \end{aligned} \quad \text{VII.3.31}$$

Se define la función J (performance function⁶¹), como:

$$J(h, f) = \iint R(x, t, h, f) dx dt \quad \text{VII.3.32}$$

donde R es una función cualquiera y, que como se verá más adelante, representará las medidas de presión. La derivada total de J será:

$$\delta J(h, f) = \iint \left(\frac{\partial R}{\partial h} \delta h + \frac{\partial R}{\partial f} \delta f \right) dx dt \quad \text{VII.3.33}$$

se impone que la función Ψ (en su condición de arbitraria) deba satisfacer la siguiente ecuación:

$$\phi c_r \frac{\partial \Psi}{\partial t} + e^F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial R}{\partial h} \quad \text{VII.3.34}$$

restando la ecuación VII.3.33 de la ecuación VII.3.31 y se reagrupan los términos por δh y δf :

$$\begin{aligned} & \iint \left(\phi c_r \frac{\partial \Psi}{\partial t} + e^F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial R}{\partial h} \right) \delta h dx dt - \\ & \iint \left(e^F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \Psi \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \left(\phi c_r \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{Q}{V} \right) \Psi + \frac{\partial R}{\partial f} \right) \delta f dx dt = -\delta J \end{aligned} \quad \text{VII.3.35}$$

Utilizando la ecuación VII.3.34 y multiplicando lo que queda por -1 , se puede simplificar esta última ecuación:

$$\iint \left(e^F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \Psi \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \left(\phi c_r \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{Q}{V} \right) \Psi + \frac{\partial R}{\partial f} \right) \delta f dx dt = \delta J \quad \text{VII.3.36}$$

derivando con respecto a f :

$$\iint \left(e^F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \Psi \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \left(\phi c_r \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{Q}{V} \right) \Psi + \frac{\partial R}{\partial f} \right) dx dt = \frac{\partial J}{\partial f} \quad \text{VII.3.37}$$

de la ecuación VII.3.15 se sabe que:

$$\phi c_r \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{Q}{V} = e^F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial H}{\partial x} \right) \quad \text{VII.3.38}$$

se obtiene entonces:

$$\iint \left(e^F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \Psi \frac{\partial H}{\partial x} \right) - e^F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial H}{\partial x} \right) \Psi + \frac{\partial R}{\partial f} \right) dx dt = \frac{\partial J}{\partial f} \quad \text{VII.3.39}$$

Utilizando la regla de la cadena, conociendo que $(AB)' = A'B + AB'$ y estableciendo el siguiente cambio:

$$A = \Psi$$

$$B = \frac{1}{\mu} \frac{\partial H}{\partial x}$$

se tiene:

$$\iint \left(e^F \frac{\partial}{\partial x} (AB) - e^F \frac{\partial B}{\partial x} A + \frac{\partial R}{\partial f} \right) dxdt = \frac{\partial J}{\partial f} \quad \text{VII.3.40}$$

Resolviendo:

$$\iint \left(e^F \frac{\partial A}{\partial x} B + \frac{\partial R}{\partial f} \right) dxdt = \frac{\partial J}{\partial f} \quad \text{VII.3.41}$$

Sustituyendo A y B:

$$\iint \left(e^F \frac{1}{\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial f} \right) dxdt = \frac{\partial J}{\partial f} \quad \text{VII.3.42}$$

Se impone que la función R represente las medidas de presión:

$$R(h, f, x, t) = h(x, t) \delta(x - x_l) \delta(t - t_k) \quad \text{VII.3.43}$$

donde x_l representa un punto de observación, t_k representa un tiempo de observación y $\delta(\cdot)$ representa la función de Dirac.

Habiendo definido la función J como (ecuación VII.3.32):

$$J(h, f) = \iint R(x, t, h, f) dxdt$$

derivándola con respecto a f se obtiene el lado derecho de la ecuación VII.3.42:

$$\frac{\partial J(h, f)}{\partial f} = \frac{\partial}{\partial f} \iint h(x, t) \delta(x - x_l) \delta(t - t_u) dx dt \quad \text{VII.3.44}$$

Realizando la integral:

$$\frac{\partial J(h, f)}{\partial f} = \frac{\partial h(x_l, t_u)}{\partial f} \quad \text{VII.3.45}$$

Igualando el lado izquierdo de la ecuación VII.3.42 con el lado derecho de la ecuación VII.3.45, se obtiene:

$$\frac{\partial h(x_l, t_k)}{\partial f} = \int_0^{t_u} \int_{\Omega_i} e^F \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} \right) dx dt \quad \text{VII.3.46}$$

En tres dimensiones:

$$\frac{\partial h(x_l, t_k)}{\partial f} = \int_0^{t_u} \int_{\Omega_i} e^F \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial z} \right) dx dy dz dt \quad \text{VII.3.47}$$

La solución numérica de la ecuación VII.3.47 se presenta en el apéndice VII.4.

VII.4 DESARROLLO NUMÉRICO DE LA INTEGRAL PARA EL CÁLCULO DE LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES DE SENSIBILIDAD

Una vez conocidas las variables $H(x,y,z,t)$ y $\Psi(x,y,z,t)$, las constantes F (promedio de las medidas de permeabilidad), μ (viscosidad del crudo) y el dominio de cada celda (Ω_i), figura N°. 8 (dominio de cada celda); la ecuación VII.3.47 puede ser resuelta numéricamente como se presenta a continuación.

Para simplificar, el desarrollo se hará solo para la dirección x (ecuación VII.3.46) pudiendo extender los resultados al espacio tridimensional.

$$\frac{\partial h(x_i, t_k)}{\partial f} = \int_0^{t_k} \int_{\Omega_i} e^F \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} \right) dx dt \quad \text{VII.4.1}$$

Considere la figura N°. 18 en donde se presenta el dominio (Ω_i) utilizado para resolver la ecuación VII.4.1.

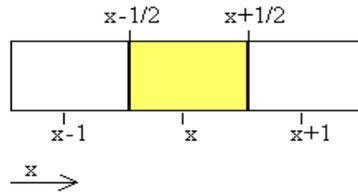


Figura N°. 18. Dominio (Ω_i) para el caso unidimensional.

El factor $\delta\Psi/\delta x$ puede ser escrito en forma de diferencias finitas, en el dominio como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x} &\approx \frac{\Delta \Psi}{\Delta x} \approx \frac{\Delta \Psi_{x+\frac{1}{2}} - \Delta \Psi_{x-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \approx \frac{\left(\frac{(\Psi_x + \Psi_{x+1})}{2} - \frac{(\Psi_{x-1} + \Psi_x)}{2} \right)}{\Delta x} = \\ &\frac{1}{2} \frac{((\Psi_x + \Psi_{x+1}) - (\Psi_{x-1} + \Psi_x))}{\Delta x} = \frac{1}{2} \frac{(\Psi_{x+1} - \Psi_{x-1})}{\Delta x} \end{aligned} \quad \text{VII.4.2}$$

De la misma manera se obtiene para $\delta H/\delta x$:

$$\frac{\partial H}{\partial x} \approx \frac{\Delta H}{\Delta x} \approx \frac{1}{2} \frac{(H_{x+1} - H_{x-1})}{\Delta x} \quad \text{VII.4.3}$$

El producto de los factores anteriores:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} \approx \frac{1}{4\Delta x^2} (\psi_{x+1} - \psi_{x-1})(H_{x+1} - H_{x-1}) \quad \text{VII.4.4}$$

Multiplicando por el volumen (en este caso Δx):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} \Delta x &= \frac{1}{4\Delta x^2} (\psi_{x+1} - \psi_{x-1})(H_{x+1} - H_{x-1}) \Delta x = \\ &= \frac{1}{4\Delta x} (\psi_{x+1} - \psi_{x-1})(H_{x+1} - H_{x-1}) \end{aligned} \quad \text{VII.4.5}$$

En el tiempo se tiene:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\Delta x} (\psi_{x+1} - \psi_{x-1})(H_{x+1} - H_{x-1}) \Big|_t \\ &\frac{1}{4\Delta x} (\psi_{x+1} - \psi_{x-1})(H_{x+1} - H_{x-1}) \Big|_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad \text{VII.4.6}$$

Desarrollando:

$$\frac{\frac{1}{4\Delta x} (\psi_{x+1} - \psi_{x-1})(\psi_{x+1} - \psi_{x-1}) \Big|_t + \frac{1}{4\Delta x} (\psi_{x+1} - \psi_{x-1})(\psi_{x+1} - \psi_{x-1}) \Big|_{t+\Delta t}}{2} \Delta t \quad \text{VII.4.7}$$

Finalmente en “x” se tiene:

$$\frac{1}{8\Delta x} \left[(\psi_{x+1}^t - \psi_{x-1}^t)(H_{x+1}^t - H_{x-1}^t) + (\psi_{x+1}^{t+\Delta t} - \psi_{x-1}^{t+\Delta t})(H_{x+1}^{t+\Delta t} - H_{x-1}^{t+\Delta t}) \right] \Delta t \quad \text{VII.4.8}$$

En todas las direcciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(x_i, t_k)}{\partial t} &= \frac{e^F \Delta t}{8\mu} \sum_{t=0}^{t_k} \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} \left[(\psi_{x+1,y,z}^t - \psi_{x-1,y,z}^t)(H_{x+1,y,z}^t - H_{x-1,y,z}^t) + (\psi_{x+1,y,z}^{t+\Delta t} - \psi_{x-1,y,z}^{t+\Delta t})(H_{x+1,y,z}^{t+\Delta t} - H_{x-1,y,z}^{t+\Delta t}) \right] + \\ &\frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y} \left[(\psi_{x,y+1,z}^t - \psi_{x,y-1,z}^t)(H_{x,y+1,z}^t - H_{x,y-1,z}^t) + (\psi_{x,y+1,z}^{t+\Delta t} - \psi_{x,y-1,z}^{t+\Delta t})(H_{x,y+1,z}^{t+\Delta t} - H_{x,y-1,z}^{t+\Delta t}) \right] + \\ &\frac{\Delta x \Delta y}{\Delta z} \left[(\psi_{x,y,z+1}^t - \psi_{x,y,z-1}^t)(H_{x,y,z+1}^t - H_{x,y,z-1}^t) + (\psi_{x,y,z+1}^{t+\Delta t} - \psi_{x,y,z-1}^{t+\Delta t})(H_{x,y,z+1}^{t+\Delta t} - H_{x,y,z-1}^{t+\Delta t}) \right] \end{aligned} \quad \text{VII.4.9}$$

VII.5 DESARROLLO DE LAS ECUACIONES PARA EL KRIGING Y EL COKRIGING⁶

VII.5.1 Kriging

A continuación se derivan las ecuaciones del kriging. Considere que el fenómeno estudiado, por ejemplo permeabilidad en el yacimiento, se describe por una función aleatoria estacionaria $Z(x)$. Se quiere obtener una estimación $Z^*(x)$ como una combinación lineal de los valores medidos Z_α en los puntos de observación x_α .

El desarrollo de las ecuaciones del kriging se basa, en todos los casos, en las siguientes características:

- Lineal: El kriging es un estimador lineal. El valor estimado de la variable $Z(x_0)$ se quiere obtener por combinación lineal de los valores observados $Z(x_\alpha)$. El kriging consiste entonces en determinar los pesos λ_α bajo ciertas hipótesis o condiciones.

$$Z^*(x) = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha Z(x_\alpha) \quad \text{VII.5.1}$$

o en notación de Einstein:

$$Z^*(x) = \lambda^\alpha Z_\alpha \quad \text{VII.5.2}$$

- Autorización: Existe la esperanza y varianza del error de estimación. Como se introducirán restricciones sobre la esperanza y la varianza del error de estimación (diferencia entre la variable aleatoria real $Z(x_0)$ y estimada $Z^*(x_0)$ en el punto x_0), se tiene que asegurar la existencia de las mismas.

$$\left. \begin{array}{l} E[Z^*(x) - Z(x)] \\ D^2[Z^*(x) - Z(x)] \end{array} \right\} \text{ existen} \quad \text{VII.5.3}$$

- Universalidad: La esperanza del error de estimación debe ser cero. Se quiere obtener un estimador tal que la esperanza el error sea cero (estimador insesgado) es decir:

$$E[Z^*(x) - Z(x)] = 0 \quad \text{VII.5.4}$$

- Optimalidad: La varianza de estimación es mínima. Entonces, se busca un estimador lineal ($Z^* = \lambda^\alpha Z_\alpha$) de tal manera que la varianza del error de estimación sea mínima:

$$\text{Var}[Z^*(x) - Z(x)] \text{ sea mínima} \quad \text{VII.5.5}$$

En la literatura existen varios tipos de kriging, todos basados en estas cuatro condiciones antes mencionadas. A continuación se presenta el desarrollo de las ecuaciones del caso más general y luego basándose en éste, se desarrollan las del cokriging, que es el método utilizado en el presente trabajo.

Considerando la formación hipotética de un yacimiento: inicialmente la permeabilidad $Y(x)$ oscila alrededor de un promedio constante a lo largo de todo el yacimiento. Después, por diferentes razones (procesos diagenéticos, tectónica, etc.), esta permeabilidad cambia: en una parte del yacimiento se puede alterar la permeabilidad original, mientras que en otra parte no hay cambio. Este proceso se describe en forma matemática por una función $m(x)$, donde no hay cambio de la propiedad $m(x)=0$ y, al contrario, donde hay, $m(x)$ tiene cierto valor. Entonces la permeabilidad original $Y(x)$ del yacimiento cambiará a $Z(x)=Y(x)+m(x)$. En terminología probabilística se dice entonces que la función aleatoria no estacionaria $Z(x)$ se descompone en una función aleatoria estacionaria $Y(x)$ y una tendencia determinística $m(x)$. El objetivo del estudio es determinar la

permeabilidad $Z(x)$ afectada por diferentes procesos. Aquí, por simplificaciones matemáticas, se supone que la esperanza de $Y(x)$ es cero. Aunque no tiene sentido que la esperanza de la permeabilidad original sea cero, se supone sencillamente que el verdadero promedio de permeabilidad está integrado a la función $m(x)$.

Para definir el sistema del kriging se tienen que escribir los cuatro puntos descritos en el marco teórico:

- Lineal:

$$Z^*(x) = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} Z(x_{\alpha}) \quad \text{VII.5.6}$$

La permeabilidad estimada es la combinación lineal de las permeabilidades medidas (en los pozos).

- Autorización: Se tiene que asegurar primero que $E[Z^*_o - Z_o]$ y $Var(Z^*_o - Z_o)$ existan. Como $Y(x)$ es una función aleatoria estacionaria y $m(x)$ es determinístico, la esperanza y la varianza del error existen.
- Universalidad: Se desea que la esperanza del error $E[Z^*_o - Z_o]$ sea cero.

$$E[Z^*_o - Z_o] = E[\lambda^{\alpha} Z_{\alpha} - Z_o] = E[\lambda^{\alpha} (Y_{\alpha} + m_{\alpha}) - (Y_o + m_o)] = \lambda^{\alpha} m_{\alpha} - m_o \quad \text{VII.5.7}$$

Aquí se usó la propiedad de $Y(x)$, de ser una función aleatoria estacionaria con media cero, $E[Y(x)] = 0$ y que la función $m(x)$ es determinística.

Para que la esperanza del error sea cero se impone entonces que:

$$\lambda^{\alpha} m_{\alpha} = m_o \quad \text{VII.5.8}$$

Esto indica que los pesos λ_α no pueden ser cualesquiera y esa debe ser integrada como una restricción al momento de determinar los mismos.

- Optimalidad: Se impone que la varianza del error $Var(Z_0^* - Z_0)$ sea mínima:

$$\begin{aligned} Var(Z_0^* - Z_0) &= D^2[\lambda^\alpha Z_\alpha - Z_0] = E[(\lambda^\alpha Z_\alpha - Z_0)^2] - E^2[\lambda^\alpha Z_\alpha - Z_0] = \\ &E[\lambda^\alpha \lambda^\beta (Y_\alpha + m_\alpha)(Y_\beta + m_\beta) + (Y_0 + m_0)^2 - 2\lambda^\alpha (Y_\alpha + m_\alpha)(Y_0 + m_0)] \\ &- E^2[\lambda^\alpha (Y_\alpha + m_\alpha) - (Y_0 + m_0)] \end{aligned} \quad \text{VII.5.9}$$

El segundo término es cero ya que $\lambda^\alpha m_\alpha = m_0$ y $E[Y(x)] = 0$:

$$E[\lambda^\alpha (Y_\alpha + m_\alpha) - (Y_0 + m_0)] = E[\lambda^\alpha Y_\alpha - Y_0] + E[\lambda^\alpha m_\alpha + m_0] \quad \text{VII.5.10}$$

por lo que se considera sólo el primer término:

$$\begin{aligned} D^2[\lambda^\alpha Z_\alpha - Z_0] &= \\ &E[\lambda^\alpha \lambda^\beta (Y_\alpha + m_\alpha)(Y_\beta + m_\beta) + (Y_0 + m_0)^2 - 2\lambda^\alpha (Y_\alpha + m_\alpha)(Y_0 + m_0)] = \\ &E[\lambda^\alpha \lambda^\beta (Y_\alpha Y_\beta + Y_\alpha m_\beta + Y_\beta m_\alpha + m_\alpha m_\beta)] + E[Y_0^2 + 2Y_0 m_0 + m_0^2] - \\ &E[2\lambda^\alpha (Y_\alpha Y_0 + Y_\alpha m_0 + Y_0 m_\alpha + m_\alpha m_0)] = \\ &\lambda^\alpha \lambda^\beta E[Y_\alpha Y_\beta] + \lambda^\alpha \lambda^\beta m_\alpha m_\beta + E[Y_0^2] + m_0^2 - 2\lambda^\alpha E[Y_\alpha Y_0] - 2\lambda^\alpha m_\alpha m_0 \end{aligned} \quad \text{VII.5.11}$$

Sabiendo que $\lambda^\alpha m_\alpha = m_0$ y $E[Y_\alpha Y_\beta] = C_{\alpha\beta}$ ($Y(x)$ es una función aleatoria estacionaria con media cero y covarianza $C_{\alpha\beta}$), la varianza del error de estimación se simplifica:

$$D^2[\lambda^\alpha Z_\alpha - Z_0] = \lambda^\alpha \lambda^\beta C_{\alpha\beta} + C_{00} - 2\lambda^\alpha C_{\alpha 0} \quad \text{VII.5.12}$$

Esta varianza de error se quiere minimizar en función de los pesos λ^α con la restricción $\lambda^\alpha m_\alpha = m_0$. Esto se logra por la introducción de los multiplicadores de Lagrange⁴⁷, así se minimizará la cantidad Q_L :

$$Q_L = \lambda^\alpha \lambda^\beta C_{\alpha\beta} + C_{00} - 2\lambda^\alpha C_{\alpha 0} + 2v(\lambda^\alpha m_\alpha - m_0) \quad \text{VII.5.13}$$

Derivando Q_L con respecto a los λ^α y v :

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_L}{\partial \lambda_\alpha} = 2\lambda^\beta C_{\alpha\beta} - 2C_{\alpha 0} + 2vm_\alpha & \forall \alpha = 1 \dots n \\ \frac{\partial Q_L}{\partial v} = 2(\lambda^\beta m_\beta - m_0) \end{cases} \quad \text{VII.5.14}$$

Como Q_L es una función cuadrática y los $C_{\alpha\alpha} \geq 0$, el mínimo de la misma se obtiene igualando sus derivadas a cero lo que da:

$$\begin{cases} \lambda^\beta C_{\alpha\beta} + vm_\alpha = C_{\alpha 0} & \forall \alpha = 1 \dots n \\ \lambda^\beta m_\beta = m_0 \end{cases} \quad \text{VII.5.15}$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} C_{\alpha\beta} & m_\alpha \\ m_\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_\beta \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\alpha 0} \\ m_0 \end{bmatrix} \quad \text{VII.5.16}$$

De este sistema de ecuaciones se obtienen los pesos λ que permiten la estimación de $Z^*(x)$ en cualquier punto (permeabilidad en todo el yacimiento). Cabe destacar que m_α es un vector, entonces el sistema de ecuaciones se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} & & & m_{\alpha=1} \\ & C_{\alpha\beta} & & \vdots \\ & & & m_{\alpha=n} \\ m_{\beta=1} & \dots & m_{\beta=n} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{\beta=1} \\ \vdots \\ \lambda_{\beta=n} \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\alpha=1,0} \\ \vdots \\ C_{\alpha=n,0} \\ m_0 \end{bmatrix} \quad \text{VII.5.17}$$

VII.5.2 Cokriging

El cokriging permite la estimación de una variable (permeabilidad) no solamente a partir de las medidas de permeabilidad sino utilizando (integrando) otras variables (saturación, *presión*, etc.). La deducción del sistema de ecuaciones del cokriging no es más complicado que el presentado en la sección anterior, solo se trata de una notación más pesada. A continuación se presenta el sistema en el caso de dos funciones aleatorias cualesquiera, pero no existe ninguna restricción teórica para usar más de dos variables.

$$\begin{aligned} Z(x) &= Y(x) + m(x) \\ W(x) &= X(x) + n(x) \end{aligned} \quad \text{VII.5.18}$$

Las Funciones Aleatorias (FA) $Z(x)$ y $W(x)$ son no estacionarias, $Y(x)$ y $X(x)$ son estacionarias con media cero y $m(x)$ y $n(x)$ son sus respectivas medias determinísticas.

Se quiere estimar $Z(x)$ en un punto cualquiera en función de valores observados $Z(x_\alpha)$ y $W(x_\delta)$. Los cuatro pasos del kriging son los mismos presentados al principio:

- Lineal:

$$Z_0^* = \lambda^\alpha Z_\alpha + \mu^\delta W_\delta \quad \text{VII.5.19}$$

- Autorización: La esperanza y varianza del error existen, ya que las FA $Z(x)$ y $W(x)$ son la suma de FA estacionarias con una media determinística.

- Universalidad:

$$E[Z_0^* - Z_0] = E[\lambda^\alpha Z_\alpha + \mu^\delta W_\delta - Z_0] = \lambda^\alpha m_\alpha - m_0 - \mu^\delta n_\delta \quad \text{VII.5.20}$$

Se impone que la esperanza del error de estimación sea cero por lo que para cualquier λ y μ se tiene que cumplir entonces:

$$\begin{aligned} \lambda^\alpha m_\alpha &= m_0 \\ \mu^\delta n_\delta &= 0 \end{aligned} \quad \text{VII.5.21}$$

- Optimalidad: Se minimiza la varianza del error de estimación con las restricciones de universalidad:

$$\begin{aligned} D^2[\lambda^\alpha Z_\alpha + \mu^\delta W_\delta - Z_0] &= D^2[\lambda^\alpha Z_\alpha \lambda^\beta Z_\beta] + D^2[\mu^\delta W_\delta \mu^\epsilon W_\epsilon] + D^2[Z_0^2] + \\ &Cov[\lambda^\alpha Z_\alpha \mu^\epsilon W_\epsilon] + Cov[\mu^\delta W_\delta \lambda^\alpha Z_\alpha] - 2Cov[\lambda^\alpha Z_\alpha Z_0] - Cov[\mu^\delta W_\delta Z_0] - Cov[Z_0 \mu^\delta W_\delta] \end{aligned}$$

VII.5.22

Se sabe también que:

$$\begin{aligned} Cov[Z_\alpha, Z_\beta] &= C_{Y_\alpha Y_\beta} \\ Cov[W_\delta, W_\epsilon] &= C_{X_\delta X_\epsilon} \\ Cov[Z_\alpha, W_\delta] &= C_{Y_\alpha X_\delta} \end{aligned} \quad \text{VII.5.23}$$

Ahora la varianza se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} C_{Y_0 Y_0} + \lambda^\alpha \lambda^\beta C_{Y_\alpha Y_\beta} + \mu^\delta \mu^\epsilon C_{X_\delta X_\epsilon} + \lambda^\alpha \mu^\delta C_{Y_\alpha X_\delta} + \mu^\delta \lambda^\alpha C_{X_\delta Y_\alpha} - 2\lambda^\alpha C_{Y_\alpha Y_0} - \\ \mu^\delta C_{X_\delta Y_0} - \mu^\delta C_{Y_0 X_\delta} \end{aligned} \quad \text{VII.5.24}$$

La cantidad a minimizar, incluyendo las condiciones de universalidad, será entonces:

$$C_{Y_0 Y_0} + \lambda^\alpha \lambda^\beta C_{Y_\alpha Y_\beta} + \mu^\delta \mu^\varepsilon C_{X_\delta X_\varepsilon} + \lambda^\alpha \mu^\delta C_{Y_\alpha X_\delta} + \mu^\delta \lambda^\alpha C_{X_\delta Y_\alpha} - 2\lambda^\alpha C_{Y_\alpha Y_0} - \mu^\delta C_{X_\delta Y_0} - \mu^\delta C_{Y_0 X_\delta} + 2v_z (\lambda^\alpha m_\alpha - m_0) + 2v_W (\mu^\delta n_\delta) \quad \text{VII.5.25}$$

Después de la derivación con respecto a los λ_α , μ_δ , v_z y v_W se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} \lambda^\beta C_{Y_\alpha Y_\beta} + \frac{1}{2} \mu^\delta (C_{Y_\alpha X_\delta} + C_{X_\delta Y_\alpha}) + v_z m_\alpha = C_{Y_\alpha Y_0} \quad \forall \alpha \\ \frac{1}{2} \lambda^\alpha (C_{Y_\alpha X_\delta} + C_{X_\delta Y_\alpha}) + \mu^\varepsilon C_{X_\delta X_\varepsilon} + v_W n_\delta = \frac{1}{2} (C_{X_\delta Y_0} + C_{Y_0 X_\delta}) \quad \forall \delta \\ \lambda^\beta m_\beta = m_0 \\ \mu^\varepsilon n_\varepsilon = 0 \end{cases} \quad \text{VII.5.26}$$

En forma matricial se consigue:

$$\begin{bmatrix} C_{Y_\alpha Y_\beta} & \frac{1}{2}(C_{Y_\alpha X_\varepsilon} + C_{X_\delta Y_\varepsilon}) & m_\alpha & 0 \\ \frac{1}{2}(C_{Y_\beta X_\delta} + C_{X_\delta Y_\beta}) & C_{X_\delta X_\varepsilon} & 0 & n_\delta \\ m_\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_\varepsilon & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_\beta \\ \mu_\varepsilon \\ v_z \\ v_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{Y_\alpha Y_0} \\ \frac{1}{2}(C_{X_\delta Y_0} + C_{Y_0 X_\delta}) \\ m_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{VII.5.27}$$

En la práctica, se considera que la covarianza cruzada es simétrica, y en este caso se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{bmatrix} C_{Y_\alpha Y_\beta} & C_{Y_\alpha X_\varepsilon} & m_\alpha & 0 \\ C_{Y_\beta X_\delta} & C_{X_\delta X_\varepsilon} & 0 & n_\delta \\ m_\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_\varepsilon & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_\beta \\ \mu_\varepsilon \\ v_z \\ v_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{Y_\alpha Y_0} \\ C_{X_\delta Y_0} \\ m_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{VII.5.28}$$

VII.5.2.1 Observaciones sobre el cokriging

La generalización del sistema de cokriging es relativamente sencilla para tantas variables como se quiera:

$$\begin{bmatrix} (Cov_{datos}) & (M_{datos}) \\ (M_{datos}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\Lambda) \\ (N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Cov_{datos,0}) \\ (M_0) \end{bmatrix} \quad \text{VII.5.29}$$

donde:

Cov_{datos} es una matriz que contiene todas las matrices de covarianzas y covarianzas cruzadas entre las observaciones,

M_{datos} es una matriz con los elementos de la tendencia en los puntos de las observaciones,

Λ es el vector de los pesos,

N es el vector de los multiplicadores de Lagrange,

$Cov_{datos,0}$ es el vector de las covarianzas (cruzadas y no) entre las observaciones y el punto a estimar,

M_0 es un vector que contiene la deriva (media) de la variable a estimar en el punto x_0 , y los elementos restantes son cero.

Si no existe correlación espacial entre las dos variables ($C_{YX}(h)=0$) el sistema de ecuaciones se simplifica a un sistema de kriging con una variable, la segunda variable no interviene a la estimación de la primera variable:

$$\begin{cases} \lambda^\beta C_{Y_\alpha Y_\beta} + 0 + v_Z m_\alpha = C_{Y_\alpha Y_0} \quad \forall \alpha \\ 0 + \mu^\varepsilon C_{X_\delta X_\varepsilon} + v_W n_\delta \quad \forall \delta \\ \lambda^\beta m_\beta = m_0 \\ \mu^\varepsilon n_\varepsilon = 0 \end{cases} \quad \text{VII.5.30}$$

$$\begin{bmatrix} C_{X_\delta X_\varepsilon} & n_\delta \\ n_\varepsilon & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_\varepsilon \\ v_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{X,0} \\ n_0 \end{bmatrix} \quad \text{VII.5.31}$$

Naturalmente, cuando se intenta modelar la covarianza cruzada, se ve inmediatamente la falta de correlación espacial entre las variables y en este caso no se propone el uso del cokriging.

VII.5.3 Sistema de ecuaciones del cokriging para este estudio

Se han desarrollado las ecuaciones para el caso general del kriging y para el cokriging. Estos casos presentados anteriormente son la base del caso especial planteado en este trabajo.

Se plantea estimar $Y(x_0)$ a partir de las medidas del logaritmo de la permeabilidad y las observaciones de presión en varios puntos y diferentes tiempos:

$$Y_{x_0}^* = \sum_{u=1}^U \sum_{l=1}^L \mu_{l,u} (P_{l,u} - H_{l,u}) + \sum_{m=1}^M \lambda_m Y_m \quad \text{VII.5.32}$$

Se puede observar, en el primer término de la ecuación VII.5.32, que a las observaciones de presión se les resta la tendencia. Esto se debe a que la función $P(x,y,z,t)$ es no estacionaria, pero, como se ha planteado, puede expresarse como la suma de una componente estocástica estacionaria de media cero h , y otra componente determinística H :

$$P=H+h \quad \text{VII.5.33}$$

donde:

$H(x,t)=E[P(x,t)]$, valor esperado del campo aleatorio de presión,
 $E[h]=0$, valor esperado del residuo de la presión.

Esto indica, que la diferencia entre las observaciones y la tendencia de la presión es una función estacionaria de media cero.

Tomando en cuenta que el valor esperado de la variable secundaria es cero ($n_\delta=0$), la condición de universalidad (ecuación VII.5.21), en este caso establece que para cualquier λ se tiene que cumplir que:

$$\begin{aligned} \lambda^m m_m &= m_0 \\ \text{ó} & \\ \sum_{m=1}^M \lambda_m m_m &= m_0 \end{aligned} \quad \text{VII.5.34}^*$$

sin condiciones para los pesos μ .

Como Y es estacionaria entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \lambda_\alpha m &= m \\ \Rightarrow \sum_{m=1}^M \lambda_m &= 1 \end{aligned} \quad \text{VII.5.35}$$

En este caso particular:

$$m = E[Y] = F \quad \text{VII.5.36}$$

* La m en el subíndice indica posición y no tiene relación con la m normal que representa un promedio.

Mediante el mismo desarrollo de ecuaciones de la sección anterior se obtiene un sistema de ecuaciones cuya solución son los pesos de cada uno de los datos:

$$\begin{bmatrix} Q_{PP(t_{u1},t_{u1})} & Q_{PP(t_{u1},t_{u2})} & \cdots & Q_{PP(t_{u1},t_U)} & Q_{PY(t_{u1})} & 0 \\ Q_{PP(t_{u2},t_{u1})} & Q_{PP(t_{u2},t_{u2})} & \cdots & Q_{PP(t_{u2},t_U)} & Q_{PY(t_{u2})} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{PP(t_U,t_{u1})} & Q_{PP(t_U,t_{u2})} & \cdots & Q_{PP(t_U,t_U)} & Q_{PY(t_U)} & 0 \\ Q_{PY(t_{u1})} & Q_{PY(t_{u2})} & \cdots & Q_{PY(t_U)} & Q_{YY} & F \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & F & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{t_{u1}} \\ \mu_{t_{u2}} \\ \cdots \\ \mu_{t_U} \\ \lambda_m \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{P(t_{u1})Y_0} \\ Q_{P(t_{u2})Y_0} \\ \cdots \\ Q_{P(t_U)Y_0} \\ Q_{Y_iY_0} \\ F \end{bmatrix} \quad \text{VII.5.37}$$

donde:

$Q_{PP(t_{ui},t_{ui})}$: Matriz de covarianza ($L \times L$) de las observaciones de presión en un mismo tiempo.

$Q_{PP(t_{ui},t_{uj})}$: Matriz de covarianza ($L \times L$) de las observaciones de presión en distintos tiempos.

$Q_{PP(t_{ui})}$: Matriz de covarianza cruzada ($L \times M$) entre las observaciones de presión y permeabilidad.

Q_{YY} : Matriz de covarianza ($M \times M$) de las medidas de permeabilidad.

$\mu_{(t_{ui})}$: Vector de los pesos de los datos de presión en el tiempo t_{ui} .

λ_m : Vector de los pesos de los datos de permeabilidad.

v : Vector de los multiplicadores de Lagrange.

$Q_{P(t_{ui})Y_0}$: Vector de covarianza entre el punto de estimación y los datos de la presión en el tiempo t_{ui} .

$Q_{Y_iY_0}$: Vector de covarianza entre el punto de estimación y los datos de permeabilidad.

F : Media de los datos $\ln(K)$.

VIII ANEXOS

Anexo N°. 1. Ejemplo del contenido de los archivos de covarianzas. (a) valor de la covarianza, (b) coordenada x del primer punto, (c) coordenada y del primer punto, (d) coordenada z del primer punto, (e) coordenada x del segundo punto, (f) coordenada y del segundo punto, (g) coordenada z del segundo punto, (h) distancia entre ambos puntos.

4.80E-02	1640.00	1640.00	984.00	1640.00	1640.00	984.00	0.00
2.60E-02	1640.00	1640.00	984.00	984.00	984.00	1312.00	984.00
3.90E-02	1640.00	1640.00	984.00	1640.00	1640.00	1312.00	328.00
2.50E-02	1640.00	1640.00	984.00	2624.00	1968.00	1312.00	1087.85
2.40E-02	1640.00	1640.00	984.00	984.00	984.00	1640.00	1136.23
3.20E-02	1640.00	1640.00	984.00	1640.00	1640.00	1640.00	656.00
2.30E-02	1640.00	1640.00	984.00	2624.00	1968.00	1640.00	1227.26
2.60E-02	984.00	984.00	1312.00	1640.00	1640.00	984.00	984.00
4.80E-02	984.00	984.00	1312.00	984.00	984.00	1312.00	0.00
2.70E-02	984.00	984.00	1312.00	1640.00	1640.00	1312.00	927.72
1.50E-02	984.00	984.00	1312.00	2624.00	1968.00	1312.00	1912.55
3.90E-02	984.00	984.00	1312.00	984.00	984.00	1640.00	328.00
2.60E-02	984.00	984.00	1312.00	1640.00	1640.00	1640.00	984.00
1.50E-02	984.00	984.00	1312.00	2624.00	1968.00	1640.00	1940.47
3.90E-02	1640.00	1640.00	1312.00	1640.00	1640.00	984.00	328.00
2.70E-02	1640.00	1640.00	1312.00	984.00	984.00	1312.00	927.72
4.80E-02	1640.00	1640.00	1312.00	1640.00	1640.00	1312.00	0.00
2.60E-02	1640.00	1640.00	1312.00	2624.00	1968.00	1312.00	1037.23
2.60E-02	1640.00	1640.00	1312.00	984.00	984.00	1640.00	984.00
3.90E-02	1640.00	1640.00	1312.00	1640.00	1640.00	1640.00	328.00
2.50E-02	1640.00	1640.00	1312.00	2624.00	1968.00	1640.00	1087.85
2.50E-02	2624.00	1968.00	1312.00	1640.00	1640.00	984.00	1087.85
1.50E-02	2624.00	1968.00	1312.00	984.00	984.00	1312.00	1912.55
2.60E-02	2624.00	1968.00	1312.00	1640.00	1640.00	1312.00	1037.23
4.80E-02	2624.00	1968.00	1312.00	2624.00	1968.00	1312.00	0.00
1.50E-02	2624.00	1968.00	1312.00	984.00	984.00	1640.00	1940.47
2.50E-02	2624.00	1968.00	1312.00	1640.00	1640.00	1640.00	1087.85
3.90E-02	2624.00	1968.00	1312.00	2624.00	1968.00	1640.00	328.00
2.40E-02	984.00	984.00	1640.00	1640.00	1640.00	984.00	1136.23
3.90E-02	984.00	984.00	1640.00	984.00	984.00	1312.00	328.00
2.60E-02	984.00	984.00	1640.00	1640.00	1640.00	1312.00	984.00
1.50E-02	984.00	984.00	1640.00	2624.00	1968.00	1312.00	1940.47
4.80E-02	984.00	984.00	1640.00	984.00	984.00	1640.00	0.00
2.70E-02	984.00	984.00	1640.00	1640.00	1640.00	1640.00	927.72
1.50E-02	984.00	984.00	1640.00	2624.00	1968.00	1640.00	1912.55
3.20E-02	1640.00	1640.00	1640.00	1640.00	1640.00	984.00	656.00
2.60E-02	1640.00	1640.00	1640.00	1640.00	984.00	1312.00	984.00
3.90E-02	1640.00	1640.00	1640.00	1640.00	1640.00	1312.00	328.00
2.50E-02	1640.00	1640.00	1640.00	2624.00	1968.00	1312.00	1087.85
2.70E-02	1640.00	1640.00	1640.00	984.00	984.00	1640.00	927.72
4.80E-02	1640.00	1640.00	1640.00	1640.00	1640.00	1640.00	0.00
2.60E-02	1640.00	1640.00	1640.00	2624.00	1968.00	1640.00	1037.23
2.30E-02	2624.00	1968.00	1640.00	1640.00	1640.00	984.00	1227.26
1.50E-02	2624.00	1968.00	1640.00	984.00	984.00	1312.00	1940.47
2.50E-02	2624.00	1968.00	1640.00	1640.00	1640.00	1312.00	1087.85
3.90E-02	2624.00	1968.00	1640.00	2624.00	1968.00	1312.00	328.00
1.50E-02	2624.00	1968.00	1640.00	984.00	984.00	1640.00	1912.55
2.60E-02	2624.00	1968.00	1640.00	1640.00	1640.00	1640.00	1037.23
4.80E-02	2624.00	1968.00	1640.00	2624.00	1968.00	1640.00	0.00
(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)