Centro de Investigaciones Educativas
Escuela de Educación - UCV

Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI

INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

Audy Salcedo
Compilador

Ediciones de la XIV Jornada de Investigación Educativa y V Congreso Internacional de Educación

XIV JORNADA DE INVESTIGACIÓN EDUCATIVA Y V CONGRESO INTERNACIONAL DE EDUCACIÓN

Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI

UNIVERSIDAD CENTRAL
CARACAS - VENEZUELA

cies
Centro de Investigaciones Educativas
Escuela de Educación - UCV

Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI

Audy Salcedo
(Compilador)

CRÉDITOS

Ediciones de la XIV Jornada de Investigación Educativa y V Congreso Internacional de Educación

Director: Ramón Alexander Uzcátegui

Coordinador Editorial: Audy Salcedo

Centro de Investigaciones Educativas (CIES). Escuela de Educación, Universidad Central de Venezuela

Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI

Compilador: Audy Salcedo

Depósito Legal: MI 2017000254

ISBN: 978-980-000-2847-6

Los artículos fueron seleccionados por arbitraje externo, mediante el sistema doble ciego.

Diseño y diagramación: Audy Salcedo

Portada: Efraín Zapata

Libro digital de acceso libre. Abril 2017

Publicado por: Centro de Investigaciones Educativas. Escuela de Educación, Edif. Trasbordo, P.B., Ciudad Universitaria de Caracas. Universidad Central de Venezuela. Telf. 605-3006 / 605 2953
Apartado de correos Nº 47561-A, Los Chaguaramos. Caracas 1051
Fax: 605-2952. http://web.ucv.ve/cies.
Correo electrónico: cies@ucv.ve

ÍNDICE

EDICIONES DE LA XIV JORNADA DE INVESTIGACIÓN EDUCATIVA Y V CONGRESO INTERNACIONAL DE EDUCACIÓN

Las ediciones de la XIV Jornada de Investigación Educativa y V Congreso Internacional de Educación es un proyecto editorial que busca difundir en la comunidad universitaria y en la sociedad en general los trabajos de investigación presentados en este evento organizado por el Centro de Investigaciones Educativas de la Escuela de Educación de la Universidad Central de Venezuela. Al concepto tradicional en el cual se reúnen en un sólo volumen los trabajos presentados en congresos, simposios o eventos de este tenor, presentamos en esta oportunidad un concepto editorial que canalice el trabajo realizado por los investigadores bajo el formato de libros temáticos, donde se analizan un tema de específico de la educación.

Así tiene el lector más que un libro, una colección de textos en el que se compilan, conforme los ejes y temáticas abordadas en la Jornada, los resultados parciales o finales de los investigadores presentados. Con este concepto queremos propiciar la lectura del trabajo intelectual e investigativos de nuestros ponentes a un número mayor de lectores, abriendo así la oportunidad de conocer los resultados del trabajo realizados más allá de los días propiamente de encuentro. Tiene el lector las ponencias íntegras que se incorporaron al programa del evento, los datos de los autores, sus orientaciones teórico-metodológicas, los resultados y aportes de su trabajo, lo cual facilita su uso posterior para nuevas investigaciones y constituirse definitivamente en referencias para el trabajo intelectual e innovador.

Esta edición es en esencia una colección de libros en la que el Centro de Investigaciones Educativas busca fomentar y dar a conocer los trabajos presentados en el evento. Lo interesante del trabajo es que cada volumen está presentado por un compilador, en su mayoría moderadores en las mesas de ponencias libres del evento, lo que dará una idea de unidad en los textos que integran la obra, además de expresar en buena medida parte de la discusión generada durante el encuentro. Con esta fórmula propiciamos una nueva generación de editores y autores, confiados en la idea de que esta iniciativa puede significar un aporte a la cultura pedagógica venezolana e internacional, además de ser una oportunidad de dar a conocer y crear nuevas redes de investigadores.

El Centro de Investigaciones Educativas de la Escuela de Educación de la Universidad Central de Venezuela se complace en ser puente entre los investigadores y sus comunidades de lectores. Agradecemos la confianza brindada en someter su trabajo investigativo e intelectual a nuestra consideración, y reiteramos una vez más nuestro compromiso por el fomento de la investigación educativa como fórmula para abordar y promover los cambios necesarios que requiere la educación actual de cara a los retos de la sociedad futura.

Ramón Alexander Uzcátegui
Coordinador General de la XIV Jornada de Investigación Educativa y V Congreso Internacional
Jefe del Centro de Investigaciones Educativas

Audy Salcedo
Coordinador del Comité de Académico de la XIV Jornada de Investigación Educativa y V Congreso Internacional

PROEMIO

AUDY SALCEDO

1. INTRODUCCIÓN

En 1792, en el marco de la Revolución Francesa, Condorcet propuso una instrucción laica, obligatoria y gratuita que ofreciera a todos los individuos los medios para proveer sus necesidades, asegurar su bienestar, conocer y ejercer sus derechos, comprender y cumplir sus deberes. Una escuela primaria de cuatro años, donde, desde los seis años de edad, se enseñaría lectura, escritura, las reglas de la aritmética y conocimientos básicos de medición de la tierra; además de primeras ideas morales y reglas de conducta, los principios del orden social que se pueden poner al alcance de los niños (Condorcet, 1792). Era lo que se consideraba la alfabetización de la población, necesaria para establecer los cimientos de la ciudadanía.

Para UNESCO ya no basta con ser capaz de leer y escribir para ser considerada una persona alfabetizada, sino que es necesario que la persona tenga la habilidad de identificar, comprender, interpretar, crear, comunicar y calcular, utilizando materiales impresos y escritos asociados con diversos contextos. Se indica que el alfabetismo involucra un aprendizaje continuo que habilita a las personas a alcanzar sus objetivos, desarrollar sus conocimientos y potenciales y participar plenamente en la comunidad y en la sociedad ampliada (UNESCO, 2005). Con ello se reconoce la formación matemática como un aspecto básico de la alfabetización, necesario para el ciudadano.

Algunas personas, profesionales o no, con frecuencia manifiestan, a veces con cierto orgullo, que no saben nada de matemática y se preguntan para qué me enseñaron fracciones, qué importancia tiene la geometría o para qué me sirve la probabilidad. Entonces, la pregunta lógica es: ¿qué aporta la matemática al ciudadano?

Salcedo, A. (Comp.). *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI*, (pp. 9 – 18). Caracas: Centro de Investigaciones Educativas, Escuela de Educación. Universidad Central de Venezuela.

Los sistemas electorales son un factor que inciden en el tipo y calidad de la representación política, en consecuencia, en la efectividad del gobierno y la capacidad de control de los ciudadanos sobre los gobiernos. ¿Los ciudadanos deben decidir sobre el sistema electoral de su país? Por ejemplo, el sistema d'Hondt se utiliza en procesos electorales de representación proporcional por listas, con él se busca asignar los escaños a las listas de manera proporcional al número de votos recibidos. ¿Es el sistema electoral d'Hondt el más adecuado para asignar escaños en un parlamento? Para poder responder esa pregunta el ciudadano requiere de una mínima base de la aritmética, en particular de las fracciones. Los sistemas electorales son básicamente de dos tipos: mayoritarios o proporcionales, todos con soporte matemático. ¿Puede un ciudadano decidir cuál sistema electoral considera más adecuado para su país sin conocer la base matemática que lo soporta?

En un país latinoamericano se anuncia que en uno de sus puertos más importantes se descargan 30 toneladas de arroz y azúcar, imagine que la noticia se ilustra con varios barcos de carga. ¿Cómo puede un ciudadano evaluar esa información? ¿Eso será suficiente para abastecer a su país? Si el país tiene 30 millones de habitantes y en promedio una familia consume un kilo de arroz y uno de azúcar semanal, ¿en cuánto tiempo se consumirán esas 30 toneladas de arroz y azúcar? Estas son algunas de las preguntas que podría formularse y responder un ciudadano para evaluar una simple noticia como esa.

Si el alcalde de su localidad plantea contratar a la escuela de matemáticas de una universidad para solucionar el problema de la recolección de basura, ¿usted estaría de acuerdo? ¿La matemática puede ayudar con el problema de la recolección de residuos de una ciudad? ¿Es posible optimizar el recorrido de los camiones recolectores de basura? ¿Puede la matemática ayudar a programas rutas más compactas o minimizar el número de camiones a utilizar? Las respuestas a todas esas preguntas es sí, los grafos pueden ayudar en esa tarea. Los grafos son un modelo matemático que se utiliza para estudiar problemas complejos. Están compuesto por un conjunto finito de puntos y enlaces, llamados vértices y aristas, con los cuales se pueden representar el plano de una ciudad, la ruta de recolección de residuos o una red de comunicaciones. Los circuitos que recorren cada arista una sola vez se denominan circuitos de Euler.

Se podría seguir colocando ejemplos para dar evidencias al lector de la relación entre la matemática y la vida del ciudadano, pero igual podría surgir la pregunta, ¿por qué hay personas que consideran que estudiar matemáticas les fue de poca utilidad para su formación? Valero (2004) piensa que, lamentablemente, la experiencia de aprendizaje de la mayoría de las personas les ha llevado a la construcción de una imagen de las matemáticas –escolares– como un área de conocimiento estático y poco relacionado con lo que sucede en el mundo. Esa es parte de la situación que hay que cambiar para el siglo XXI.

La educación matemática para el siglo XXI tiene el reto de trabajar con los llamados *Milenios* o *Millennials*, esa generación nacida después de los 80, que no sabe cómo era la vida sin Internet, pero que en el caso de las escuelas primarias latinoamericanas, tiene al libro de texto como el recurso didáctico de mayor presencia (LLECE, 2013). El docente tiene que trabajar con esas "contradicciones" para lograr la meta de ayudar a formar ciudadanos que puedan usar su conocimiento matemático para conocer y criticar la realidad, además de hacer propuestas de cambio para transformarla, en caso de ser necesario. Las universidades tiene el desafío de formar ese docente.

Este libro reúne una serie de trabajos, donde los autores exponen desde diversas perceptivas, la educación matemática para el siglo XXI. Obviamente, no exponen recetas o soluciones mágicas, como tampoco se trata de la opinión de los autores. Las ideas que se exponen en cada capítulo son el resultado de al menos una investigación sobre algún tópico de educación matemática. Solo se tocan una pequeña parte de los múltiples temas que tiene la educación matemática, con el ánimo del ofrecer al lector interesado un material que puede analizar y utilizar en su formación o en la investigación.

En la siguiente sección se hace una breve presentación de cada capítulo que compone el libro.

2. LOS CAPÍTULOS

La profesora Claudia Vásquez Ortiz, de la Pontificia Universidad Católica de Chile, presenta algunos elementos a considerar en la formación de docentes de educación infantil y primaria para la enseñanza de la probabilidad. En el trabajo se analizan las principales investigaciones referidas al aprendizaje de la probabilidad en Educación Infantil y Primaria, con el objetivo de alertar a los docentes sobre el alto grado de abstracción que involucran los conceptos de probabilidad; los cuales deben ser considerados al momento de diseñar e implementar el proceso de enseñanza y aprendizaje sobre este tema. ¿Cómo aprenden probabilidad los niños?, ¿cómo se desarrolla el razonamiento probabilístico en los niños?, ¿cuáles son los errores y dificultades a los que sus alumnos pueden verse enfrentados? Son algunas de las preguntas a las que se trata de responder en el artículo de la Dra. Vásquez Ortiz, con el propósito de entregar orientaciones a ser consideradas en la formación del profesorado y de este modo contribuir al desarrollo de una enseñanza idónea de la probabilidad en el aula. Una revisión de distintas investigaciones sobre el aprendizaje de la probabilidad que será de mucha ayuda a los responsables de formar docentes en la Educación Infantil y Primaria.

Un estudio documental realizado con el propósito de establecer los referentes contextuales e institucionales en materia de desarrollo profesional de los profesores de matemática de educación media en Venezuela es presentado por las profesoras Zoraida Pérez-Sánchez y Sandra Castillo Vallejo (Universidad Nacional Experimental de Guayana de Venezuela). Se realizó una investigación documental con la revisión de material bibliográfico y hemerográfico, fuentes de acontecimientos y situaciones del contexto, sobre políticas públicas y lineamientos institucionales relacionados con el desarrollo profesional del docente en Venezuela. Los documentos fueron tratados mediante el análisis del contenido lo que permitió, entre otros aspectos, comprender el fenómeno e identificando problemas medulares en este ámbito y explorar acerca de las políticas públicas de la formación docente en Venezuela. Las autoras consideran que la planificación y diseño de programas de profesionalización de los docentes de matemática sin involucrar a los profesores corren el riesgo de alejarse de sus necesidades y expectativas. Los interesados en la formación de docentes en Venezuela tienen en este trabajo un excelente material de consulta.

El trabajo *Diseño de Tareas y Desarrollo de una Mirada Profesional sobre la Enseñanza de las Matemáticas de Estudiantes para Maestro* es el trabajo que presenta los profesores Pere Ivars, Àngela Buforn y Salvador Llinares, de la Universidad de Alicante, España. En este capítulo sus autores describen algunas aproximaciones que han logrado mediante la investigación para dar respuesta a lo que creen es el doble desafío de los programas de formación de maestros en la enseñanza de las matemáticas: (a) desarrollar la competencia docente "mirar profesionalmente" las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la educación primaria (b) conseguir que los estudiantes sean capaces de discernir aspectos relevantes de la situación de enseñanza de las matemáticas que no eran capaces de hacerlo antes de su ingreso al programa. Para ello es necesario que los estudiantes de los programas de formación de maestros comprendan que no hay soluciones milagrosas en la enseñanza de las matemáticas y que la información teórica en las situaciones de enseñanza de las matemáticas es pertinente. Proponen que las tareas y los entornos de aprendizaje que se generen en el programa busquen el "uso del conocimiento". Para los autores es necesario superar la dicotomía teoría-practica, aunque saben que no es tarea fácil. La clave parece estar en llevar registros de la práctica a la universidad y generar oportunidades para que el conocimiento teórico interactúe con el análisis de la práctica. Sin duda, Ivars, Buforn y Llinares proponen un reto por demás interesante, donde hay mucho que investigar.

El aula invertida (Flipped Classroom) es un modelo pedagógico en cual el estudiante realiza un conjunto de actividades para preparar la materia que le corresponde trabajar en su clase ordinaria. Para ello el estudiante se apoya en lecturas, videos, audios, actividades en línea, etc. Todo ello le brinda una base para las discusiones que sobre el tema se darán en el aula, siempre con la guía del profesor en el salón. Una experiencia de aula invertida en la formación de profesores de matemáticas es el trabajo que presenta el profesor Yerikson Suárez Huz, adscrito a la Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Se trata de un estudio descriptivo sustentado en el paradigma socio-crítico, de campo, bajo la modalidad de estudio de caso. Luego de discutir algunos aspectos teóricos sobre el aula invertida, el profesor Suárez Huz relata la experiencia vivida con sus estudiantes al aplicar este enfoque. Cierra con algunas reflexiones sobre el trabajo realizado y su potencial didáctico como metodología de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, así como en la formación de docentes. ¿Es el aula invertida una alternativa para enseñar matemática a los llamados *Milenios*? El relato de esta experiencia, realizada con docentes en formación, puede dar pistas al respecto, tanto para quienes investigan sobre ese modelo pedagógico como para los formadores de formadores.

La evaluación de los aprendizajes es el tema abordado por el profesor Williams López de la Universidad Central de Venezuela. Específicamente en la investigación se indaga sobre las concepciones que tienen los docentes de matemáticas de Educación Media acerca de ese importante tema. El trabajo se realizo bajo el paradigma de la investigación cualitativa, utilizando la entrevista como técnica de recolección de la información y la codificación de datos como técnica de análisis para generar teorías a partir de los datos recogidos en el campo; el proceso utilizado se basó en la Teoría de Fundamentada. Se reporta cómo se concibe la evaluación y el tipo de instrumentos dominantes en esa actividad, además el tipo de evaluación que prefieren utilizar. La evaluación de los aprendizajes en matemáticas es de esos temas que tiene poco terreno si se le compara con las investigación que se realizan sobre el aprendizaje o la enseñanza, de allí que esté capitulo sea de interés para quienes investigar o reflexionar sobre ese tema.

Los profesores William González Calderón y Óscary Ávila-Hernández, de la Universidad Autónoma de Bucaramanga (Colombia), presentan un trabajo sobre la argumentación y la demostración en Educación Secundaria. Presentan los resultados, cualitativos y cuantitativos, de tres pruebas diagnósticas aplicadas a 61 estudiantes del grado noveno (9º) de secundaría de 2 colegios rurales. Consideran que el aula de clases, las formas de argumentación matemática y las conjeturas, potencialmente están ligadas a los escenarios epistemológicos y al currículo de la misma institución educativa. Para ellos en el arte de la argumentación y la demostración se cruzan dos desafíos: ¿cómo evaluar esta competencia matemática? y ¿de qué manera la resolución de problemas puede fortalecer dicho arte? Las respuestas a estas preguntas podrían estar en la aritmética de los números naturales, abordada y estudiada en la teoría de números. La argumentación es de esas competencias que se espera que los estudiantes logren durante su formación en educación media, en este capítulo hay algunas posibles respuestas para lograrlo.

Bajo el modelo de razonamiento geométrico de los Van-Hiele, la Dra. María Aravena, de la Universidad Católica del Maule (Chile) expone una propuesta de trabajo en el tema de semejanza de figuras planas y espaciales. Luego de una revisión de los lineamientos teóricos del modelo de razonamiento de Van-Hiele, se expone la propuesta que incluye actividades diseñadas para cada nivel de razonamiento del modelo. Las actividades fueron diseñadas considerando la visualización, el razonamiento y la construcción de los objetos geométricos, como elementos claves para desarrollar habilidades geométricas. El trabajo cierra con algunas recomendaciones respecto de la actuación del profesorado y del alumnado al trabajar con las actividades en el aula. La geometría es de esas áreas de la matemática que suelen ser problemáticas para los profesores, por lo que este capítulo puede ser de mucha ayuda tanto para docentes como para formadores de docentes.

El libro se cierra con el trabajo *Enseñar Estadística para Alfabetizar Estadísticamente y Desarrollar el Razonamiento Estadístico* la Dra. Estrella Soledad, de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, (Chile). En este trabajo articulan tres aspectos fundamentales para la educación estadística: los niveles cognitivos, las ideas fundamentales y los modelos de enseñanza de la estadística. Primero se exponen aspectos básicos de los niveles cognitivos de uso más frecuente en la literatura especializada: alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico. Luego se tocan las ideas fundamentales de la estadística, consideradas como el centro de la enseñanza de esa área. Por último se tratan modelos de enseñanza de la estadística y la probabilidad: la guía GAISE, el ciclo investigativo PPDAC, la inferencia estadística informal ISI y el ambiente para el aprendizaje del razonamiento estadístico SRLE; y cómo se integran otros conceptos expuestos para iniciar el desarrollar del pensamiento estadístico. Un trabajo que seguro será de mucha utilidad para maestros y profesores interesados en la enseñanza de la estadística.

3. A MANERA DE CIERRE

Una de las grandes tareas que enfrentan la escuela es preparar a los estudiantes de la mejor forma posible para su vida futura. Que cinco de los ocho trabajos que se aceptaron para este libro estén relacionados con el docente y su formación puede ser un indicio de la importancia del tema para la educación matemática. Cualquier transformación que se quiera hacer de la educación parte de los docentes. Son ellos los que están es el aula, por lo tanto, los que pueden poner en marcha y gestionar los cambios que se deseen introducir en la Educación Matemática. De allí la importancia de estos capítulos. Los otros tres trabajos tocan aspectos puntuales muy interesantes en las demostraciones, la enseñanza de la geometría y la enseñanza de la estadística. Todos con perspectivas actuales y con información valiosa para docentes e investigadores.

Con los trabajos aquí publicados se espera aportar un grano de arena para los restos que debe enfrentar la Educación Matemática para el siglo XXI, los cuales, en el fondo, son semejantes a los planteados por Condorcet en 1792, ayudar a formar ciudadanos racionales, críticos, capaces de cumplir las leyes pero también de impulsar su reforma cuando sea necesario para el bien común. Esto solo se puede logara en democracia, no se puede ser racional, crítico y capaz de impulsar cambios para el bien común si se deben cumplir los designios de un líder eterno. La ciudadanía solo es posible en democracia y la Educación Matemática es un instrumento fundamental para la formación de ciudadanos, ergo, para la vida democrática.

No se trata de la matemática avanzada que algunos tiene oportunidad de estudiar en la universidad dependiendo de la carrera que cursen, sino de la que necesita la mayoría de los ciudadanos que paseen por los niveles previos al universitario. Aquellas matemáticas que necesitan usar en su vida cotidiana las personas de una sociedad democrática para ser ciudadanos activos, críticos y participativos, asumiendo el doble rol de sujetos independiente – autónomos y sujetos sociales, en posesión de derechos y responsable de sus deberes. Se trata de ciudadanos que puedan usar su conocimiento matemático para conocer y criticar la realidad, además de hacer propuestas de cambio para transformarla, en caso de ser necesario. Esa es la Educación Matemática que se necesita para el siglo XXI.

Para finalizar, agradecemos a los autores que enviaron sus trabajos para que fueran considerados para este libro, su confianza es un honor. Asimismo, es importante reconocer la labor realizada por los evaluadores de los trabajos, la lectura de las distintas propuesta permitió seleccionar un grupo artículos que da una idea de la investigación que se realiza en la actualidad en Educación Matemática; además, sus observaciones y recomendaciones coadyuvó a elevar la calidad de cada capítulo. A todos muchas gracias.

No queda más que invitar a todos los lectores a revisar con detalle cada uno de los capítulos que constituyen este libro. Creemos que todos serán de ayuda para docentes e investigadores en Educación Matemática, el tiempo dirá si se logró el objetivo.

Referencias

Condorcet (1792): *L'organisation générale de l'instruction publique (20 et 21 avril 1792)*. http://www2.assemblee-nationale.fr/decouvrir-l-assemblee/histoire/grands-moments-d-eloquence/condorcet-20-et-21-avril-1792

Laboratorio Latinoamericano para la Evaluación de la Calidad de la Educación (LLECE). Base de datos Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo (TERCE). 2013. http://www.unesco.org/new/es/santiago/terce/databases/.

UNESCO (2005) *Aspects of literacy assessment*. Temas derivados de la reunión de expertos de la UNESCO realizada del 10 al 12 de junio de 2003 en París. París: UNESCO. http://unesdoc.unesco.org/images/0014/001401/140125eo.pdf

Valero, P. (2004). Socio-Political Perspectives on Mathematics Education. En P. Valero y R. Zevenbergen (Eds.), *Researching the Socio-political Dimensions of Mathematics Education: Issues of Power in Theory and Methodology*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 5-24.

AUDY SALCEDO

Universidad Central de Venezuela, Venezuela

audy.salcedo@ucv.ve

APRENDIZAJE DE LA PROBABILIDAD EN EDUCACIÓN INFANTIL Y PRIMARIA. ASPECTOS A CONSIDERAR EN LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO

CLAUDIA VÁSQUEZ ORTIZ

RESUMEN: Producto de la reciente incorporación del estudio de la probabilidad en los currículos de Educación Infantil y Primaria de diversos países (e.g. Estados Unidos, España, Chile, etc.), surge la necesidad de contar con una didáctica especializada hacia la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad en dichos niveles. Como un primer acercamiento a esta didáctica, en este estudio se presenta una síntesis de las principales investigaciones vinculadas al aprendizaje de la probabilidad en Educación Infantil y Primaria, con el propósito de entregar orientaciones a ser consideradas en la formación del profesorado y de este modo contribuir al desarrollo de una enseñanza idónea de la probabilidad en el aula.

Palabras Clave: Probabilidad; aprendizaje; educación infantil; educación primaria; formación del profesorado.

1. INTRODUCCIÓN

Las investigaciones en relación con el aprendizaje de la probabilidad y más específicamente al desarrollo de la cognición probabilística es muy amplia, por lo que este estudio se centra en algunos de los trabajos más representativos y clásicos, que han tratado de caracterizar el razonamiento probabilístico en los niños, como los de Piaget e Inhelder (1951) y Fischbein (1975), considerando además otros más recientes, que al igual que los primeros, aportan información de interés para estudiar el conocimiento matemático y didáctico que deben poseer los profesores de Educación Infantil y Primaria para una enseñanza idónea de la probabilidad. Dado que el profesor al momento de planificar la enseñanza de la probabilidad, debe tener claridad sobre:

Vásquez O., C. (2017). Aprendizaje de la probabilidad en Educación Infantil y Primaria. Aspectos a considerar en la formación del profesorado. En: Salcedo, A. (Comp.). *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI*, (pp. 19 – 43). Caracas: Centro de Investigaciones Educativas, Escuela de Educación. Universidad Central de Venezuela.

¿cómo se desarrolla el razonamiento probabilístico en los niños?, ¿cómo aprenden probabilidad los niños?, ¿cuáles son los errores y dificultades a los que sus alumnos pueden verse enfrentados?, ¿qué tipos de actividades puede desarrollar en relación a determinado tipo de concepto y según la edad de sus alumnos? En la búsqueda de una primera aproximación de respuestas a las preguntas anteriores, en este estudio se ha realizado una recopilación y síntesis de las principales investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad en alumnos de Educación Infantil y Primaria. El contar con este tipo de información es de gran importancia para una enseñanza idónea de la probabilidad, sobre todo si consideramos que el estudio de la probabilidad involucra el trabajo con ideas abstractas, por ejemplo, la noción de aleatorio, que no siempre se encuentran conectadas a la experiencia directa de los niños, como ocurre con otros conceptos matemáticos que si pueden ser abordados de forma concreta. Se finaliza con algunas orientaciones, que surgen a partir de las investigaciones expuestas, a considerar en la formación del profesorado tanto de Educación Infantil como de Primaria.

2. APRENDIZAJE DE LA PROBABILIDAD EN EDUCACIÓN INFANTIL Y PRIMARIA

Dentro de los estudios más significativos y clásicos en relación con el desarrollo del razonamiento probabilístico en los niños, están los de Piaget e Inhelder (1951) y Fischbein (1975), quienes entienden el aprendizaje como un proceso lento y gradual mediante el cual los alumnos deben enfrentarse a nuevas ideas o situaciones problemas, que produzcan un conflicto cognitivo o desequilibrio al chocar con las ya existentes, que deben tratar de superar, resolver y comprender utilizando sus conocimientos previos, los que se acomodan y expanden producto de la asimilación, siendo considerados fundamentales para el aprendizaje. Es así como plantean que el desarrollo cognitivo del niño puede ser clasificado en varias etapas, según el nivel de desarrollo intelectual que presenta en relación con la comprensión formal de los conceptos matemáticos: sensorio motor (0-2 años), pre operacional (2-7 años), operaciones concretas (7-11 años) y operaciones formales (11-15 años). El orden de estas etapas es fijo, sin embargo la edad en que pueden ser alcanzadas puede variar de un niño a otro dependiendo de los contenidos. No obstante, el paso de una etapa a otra presenta siempre el mismo patrón el cual es producto de los procesos de asimilación y acomodación (Piaget, 1975). Las características y planteamientos de las etapas anteriores se han podido constatar en base a distintos experimentos que Piaget e Inhelder (1951) plantean a niños en entrevistas clínicas con el propósito de estudiar sus razonamientos sobre variados conceptos relacionados con el razonamiento probabilístico, tales como: azar, comparación de probabilidades, razonamiento combinatorio, etc. es que los autores consideran que la idea de azar no se encuentra presente de forma *innata* en el niño, pues ésta es vista como complementaria a la relación causa-efecto, y al igual que la de probabilidad, no pueden ser totalmente comprendidas hasta la etapa de las operaciones formales (11- 15 años) en que se desarrolla el razonamiento combinatorio. Según Piaget e Inhelder (ob. cit.) para que un niño pueda comprender el azar, es necesaria una comprensión de operaciones irreversibles, en que el azar es considerado complementario a la composición lógica de operaciones reversibles, requiriendo, además, de un razonamiento combinatorio que permita identificar las distintas combinaciones que pueden darse en un fenómeno aleatorio. En consecuencia, un niño no sería capaz de diferenciar entre situaciones aleatorias y deterministas. Un experimento piagetano clásico, en el cual se puede observar la necesidad de esquemas combinatorios y de la apreciación del carácter irreversible de una mezcla, es el experimento de la bandeja. Este consiste en mostrar a los niños una bandeja con dos compartimentos; en uno de los cuales hay 8 bolas blancas y en el otro 8 bolas negras. La bandeja se hace bascular hasta que las bolas se mezclan de manera progresiva. Al preguntar a los niños cuestiones del tipo ¿qué sucederá con las bolas blancas y negras si repetimos muchas veces el movimiento de la bandeja? Se pudo observar que los niños que se encuentran en la etapa pre operacional (2-7 años) afirman que luego de repetir muchas veces el movimiento de la bandeja las bolas volverán a su lugar original, o bien que las bolas negras quedarán en el lugar de las blancas y viceversa. Este tipo de respuesta es interpretado por Piaget e Inhelder como que el niño antes de los 7 años no es capaz de comprender la naturaleza irreversible de la mezcla aleatoria dado que su pensamiento aún es demasiado determinista, lo que les impediría comprender que al mover la bandeja repetidamente las bolas se mezclan en forma aleatoria. Esto a su vez se complementa con el hecho de que el niño a esta edad aún no comprenden del todo la relación causa-efecto, lo que les dificultaría entender por qué el movimiento de la bandeja lleva a que las bolas se mezclen. Por otro lado, dado que carecen de un razonamiento combinatorio completo (pues pueden realizar, de manera empírica, sólo algunas combinaciones, permutaciones y variaciones) durante la etapa pre operacional (2-7 años), tampoco son capaces de imaginar cómo se pueden dar las distintas permutaciones en este caso entre las bolas blancas y las bolas negras. Es producto de las razones antes expuestas que Piaget e Inhelder consideran que los niños durante esta etapa no cuentan con los mecanismos necesarios para alcanzar una apreciación del azar.

Es a partir de la etapa de las operaciones concretas (7-11 años) que el niño adquiere esquemas operacionales espacio-temporales comenzando a desarrollar un razonamiento lógico-matemático, que aunque se encontraría ligado al nivel concreto, le permitiría comprender en cierta medida algunos aspectos ligados al azar, como por ejemplo la capacidad de distinguir entre el azar y lo deducible, en el caso del experimento de la bandeja, podría comprender que determinar la posición final de las bolas, luego de repetir muchas veces el movimiento de la bandeja, es impredecible. Sin embargo, aún no cuenta con un razonamiento combinatorio, que le permita imaginar todas las posibilidades de permutar las bolas. De acuerdo a lo expuesto por Piaget e Inhelder este tipo de razonamiento combinatorio se desarrolla en la etapa de las operaciones formales (11-15 años), pues durante esta etapa "el niño adquiere la capacidad de usar procedimientos sistemáticos para realizar inventarios de todas las permutaciones posibles, variaciones y combinaciones de un conjunto dado de elementos" (Godino, Batanero y Cañizares, 1987, p. 45). Esto le permitiría comprender la idea de azar, conduciéndole de este modo a lograr una comprensión adecuada del concepto probabilidad. Sin embargo, Fischbein (ob. cit.) rechaza la opinión de Piaget e Inhelder pues discrepa en varios de aspectos. Sobre todo en lo que se refiere a la intuición primaria (que surge a partir de la experiencia del sujeto) del azar, es decir, la capacidad de distinguir entre un fenómeno aleatorio y uno determinista, la cual para él se encuentra presente antes de los 7 años y sin instrucción previa sobre el tema. Para afirmar esto se fundamenta en el hecho de que al observar la conducta de los niños al practicar juegos de azar sencillos, éstos son capaces de emitir juicios probabilísticos estimando de forma intuitiva las posibilidades a favor de algún suceso, llegando a elegir la opción con mayores probabilidades de ganar. Un ejemplo sencillo que se presenta en Godino *et al.,* (ob. cit.) mediante el cual se puede observar la intuición primaria del azar descrita por Fischbein, consiste en presentar a los alumnos experimentos en lo que, por ejemplo, debe elegir entre dos cajas con diferente contenido, y elegir aquella que ofrezca más posibilidades de obtener una bola de un determinado color. Incluso en algunas investigaciones (Yost, Siegel y Andrews, 1962; Davies, 1965; Goldberg, 1966; Falk, Falk y Levin, 1980) ha quedado en evidencia que el porcentaje de respuestas correctas a experimentos como el anterior, y contrariamente a lo que se pude pensar, el niño de educación infantil razona correctamente y de mejor manera que aquellos que han alcanzado la etapa de las operaciones formales (11-15 años). No obstante, si bien Fischbein señala que las intuiciones primarias sobre el azar se encuentran presentes en los niños antes de los 7 años, es después de esta edad cuando los niños alcanzan, poco a poco, una estructura conceptual distinta y organizada, producto de la enseñanza recibida sobre el tema, la cual desempeña un rol fundamental para el desarrollo completo del razonamiento probabilístico (intuición secundaria). El efecto de la enseñanza en el desarrollo de los juicios probabilísticos intuitivos fue ampliamente estudiado por Fischbein demostrando que por medio de la instrucción se pueden alcanzar esquemas en la etapa de las operaciones concretas que de acuerdo a lo planteado por Piaget e Inhelder (ob. cit.) solo podían ser alcanzados en la etapa de las operaciones formales. Es bajo este enfoque que Fischbein, Pampu y Minzat (1970) elaboran una serie de lecciones experimentales dirigidas a trabajar los siguientes conceptos con niños de 12 a 14 años: suceso, espacio muestral, suceso elemental y compuesto, probabilidad como medida del azar, frecuencia relativa y análisis combinatorio. La investigación consistió en comparar el razonamiento probabilístico del grupo al cual se aplicaron las lecciones con un grupo control que no recibió instrucción en el tema. Los resultados muestran un efecto positivo del proceso de instrucción, pues se exhibe una mejora del razonamiento probabilístico del grupo con instrucción. Además, se concluyó que con apoyo de instrucción elemental es conveniente enseñar probabilidad a partir de los 10 años, incluso en ausencia de la proporcionalidad. Sin embargo, si se desea enseñar comparación de probabilidades, es necesario que los alumnos tengan un dominio de la comparación de fracciones, por lo que será necesario presentar tareas de comparación de probabilidades que se organicen de acuerdo a los estadios que Noelting (1980) atribuye a cada etapa del desarrollo de la noción de fracción y proporcionalidad (incompleta, cualitativa, aditiva, pre-proporcional y proporcional).

Años más tarde Fischbein y Gazit (1984) deciden profundizar en el efecto que tiene la instrucción en las intuiciones y concepciones probabilísticas de un grupo de niños entre 10 y 13 años. Para esto se diseñaron 12 lecciones que presentaban situaciones de incertidumbre en diversos contextos vinculadas al concepto de suceso seguro, posible e imposible; sucesos en un experimento aleatorio; posibilidades; probabilidad y frecuencia relativa y la relación entre ellos, en las cuales los alumnos debían experimentar para calcular probabilidades. Una vez implementadas estas lecciones se aplicaron dos cuestionarios, el primero buscaba medir la eficacia de las lecciones, es decir, si los alumnos a los cuales se aplicó el programa especial de instrucción aprendieron los conceptos y si son o no capaces de aplicarlos. Mientras que el segundo cuestionario se aplicó a todos los alumnos, tanto a los del grupo experimental como a los del grupo control, pues con éste se buscaba medir el efecto indirecto que tiene cualquier programa de enseñanza sobre los errores intuitivos de los niños en relación a la probabilidad. En base a los resultados obtenidos de la aplicación de ambos cuestionarios, se pudo observar que para los alumnos de 10 a 11 años la mayoría de las nociones fueron de gran dificultad pues no lograron dar ejemplo ni si quiera de nociones básicas como lo son las de suceso seguro, posible e imposible. Sin embargo, el grupo de alumnos de 11 a 12 años si fueron capaces de comprender y aplicar correctamente los conceptos involucrados, al igual que los alumnos de 12 a 13 años quienes comprendieron y aplicaron sin ninguna dificultad los distintos conceptos vinculados a la probabilidad. Por lo que Fischbein y Gazit concluyen que desde los 11 años en adelante un programa de instrucción sistemático tendría un efecto positivo en la mejora de los juicios e intuiciones probabilísticas de los alumnos. Para Fischbein el contar con un adecuado programa de instrucción es fundamental en el desarrollo del razonamiento probabilístico, planteando que sin una instrucción sistemática muchos adultos nunca alcanzarían un nivel formal de comprensión y estimación de probabilidades. Estos resultados respaldan completamente algunos planteamientos anteriores de Fischbein, en los que manifiesta que:

> "En el mundo contemporáneo, la educación científica no puede ser reducida, de forma rentable, a una interpretación unívocamente determinista de los sucesos. Una cultura científica eficaz exige una educación del pensamiento estadístico y probabilístico… Para ello, es necesario educar, desde la primera infancia, la compleja base intuitiva relevante para el pensamiento probabilístico; de esta manera se puede conseguir un balance genuino y constructivo entre lo posible y lo determinado, en el funcionamiento de la inteligencia" (Fischbein, 1975, p. 131).

Así por medio de este estudio Fischbein y Gazit (Ob. cit.) además de analizar el efecto de la enseñanza en los juicios probabilísticos, pudieron examinar algunos errores en relación a la asignación de probabilidades y al lenguaje probabilístico. Tales errores se manifiestan mayoritariamente en niños de 9 a 14 años, para quienes la noción de seguro presenta mayores dificultades que la de probable, dado que asocian esta noción con un resultado único y posible con variados resultados; caracterizando, además, raro con imposible, e imposible con incierto, esto se debería a que se basan en sus experiencias subjetivas o creencias. Los resultados de Piaget e Inhelder (1951) no tan solo fueron complementados por Fischbein en sus investigaciones, sino que han sido numerosos los estudios que buscan caracterizar el desarrollo del razonamiento probabilístico en los niños, a continuación se describen brevemente aquellos que consideramos más relevantes para nuestro estudio.

Yost, Siegel y Andrews (1962) realizan modificaciones al método experimental de Piaget, pues este no consideraba ciertos aspectos tales como las dificultades para expresarse verbalmente de niños pequeños, ni su capacidad de memorización para recordar la composición de los conjuntos, además de que la muestra de estudio es considerada muy pequeña y no se realizó un análisis estadístico apropiado de ella. Por lo que plantean analizar la presencia del razonamiento probabilístico en niños de educación infantil por medio de un experimento que consideró las limitaciones anteriores. Para ello, usaron dos cajas de plástico transparente (así los niños podían ver que había en su interior y no tenían que memorizar como se distribuía el contenido de las cajas) que contenían en su interior fichas de dos colores diferentes y en diferentes proporciones. El experimento consistía en pedir a 10 niños y 10 niñas de edades alrededor de los 5 años que señalaran en cuál de las dos cajas existía mayor posibilidad de extraer una bola de un determinado color. De esta manera se pudo concluir, contrariamente a lo expuesto por Piaget e Inhelder, que los niños desde los 4 años aún cuando no cuentan todavía con un concepto completo de probabilidad, si poseen las capacidades para realizar estimaciones intuitivas de posibilidades. Por su parte Davies (1965) amplia los estudios de Yost, *et al*. (ob. cit.), a 112 niños cuyas edades fluctúan entre los 3 y 9 años, realizando con ellos un experimento que consistía en dar una recompensa a aquellos niños que en variadas situaciones escogían una bola de un determinado color. En base a este experimento pudo observar que en experimentos sencillos los niños manifiestan la existencia de una intuición probabilística, permitiéndoles incluso estimar posibilidades de ciertos sucesos, en base ya fuera a la información percibida de forma directa o en base a su percepción. Por otro lado, corroboró que el concepto de probabilidad es adquirido de manera progresiva puesto que el porcentaje de respuestas correctas a las distintas situaciones incrementaba a medida que aumentaba la edad de los niños. Goldberg (1966) reproduce la investigación de Yost, *et al.* (ob. cit.), evidenciado que los niños pequeños de educación infantil no basan sus elecciones en las proporciones, sino en la comparación de los valores absolutos. Asimismo, pudo constatar que en aquellas situaciones cercanas a la equiprobabilidad presentan una mayor dificultad para los niños de educación infantil, puesto que el número de respuestas incorrectas aumenta en este tipo de situaciones.

Hoemann y Ross (1975) sostienen la hipótesis de que los niños de educación infantil ante situaciones en las cuales deben emitir un juicio probabilístico, no basan sus respuestas en las probabilidades sino en la comparación de magnitudes absolutas. Por lo que deciden someter a un grupo de niños entre los 4 a 10 años de edad, a cuatro experimentos probabilísticos que permitan distinguir si los niños están dando sus respuestas en base a juicios probabilísticos o a partir de comparaciones perceptuales. Uno de los experimentos consistió en presentar a los niños dos ruletas de distinto tamaño, coloreadas con dos colores que se distribuyen en distintas proporciones. Luego dividen la muestra de niños en dos grupos, en el primero de ellos se estudia si utilizan una estimación probabilísticas para responder a la pregunta: si tuvieras que elegir una ruleta ¿en cuál de ellas hay una mayor probabilidad de que salga un determinado color?, mientras que al segundo grupo se plantea la pregunta ¿Cuál de las dos ruletas tiene mayor cantidad de un determinado color? Con estas preguntas se busca observar si los niños utilizan una estimación de magnitudes para fundamentar sus respuestas. Finalmente, al comparar las respuestas otorgadas por ambos grupos, los autores concluyen que no existe diferencia entre ellos, siendo la estimación de magnitudes suficiente para dar respuesta a las preguntas planteadas, sin necesidad de utilizar la comparación de proporciones ni la estimación de probabilidades para resolver las situaciones planteadas. El segundo experimento consistió en presentar a los niños, una sola ruleta y preguntar sobre ¿en qué color consideraban se detendría la aguja? (comparación probabilística), además de ¿de qué color hay más? (comparación de magnitudes). A partir de las respuestas obtenidas, se pudo observar que para la pregunta de comparación probabilística el número de errores cometidos por los niños era mayor que en la pregunta de comparación de magnitudes. En consecuencia, los autores afirman que los juicios probabilísticos de los niños, entre los 4 y 8 años de edad, en los experimentos con ruletas son muy pobres. Los otros dos experimentos consistían en enfrentar a los niños a situaciones similares a las planteadas con las ruletas pero ahora con urnas con bolitas de colores. Los resultados obtenidos fueron similares a los anteriores, con la diferencia de que este tipo de experimento sí les permitió distinguir entre un razonamiento de tipo proporcional y uno de tipo probabilístico. Además, se pudo observar que la proporción de errores cometidos cuando se presentaba la situación con dos urnas era menor que cuando se trabajaba con una sola urna; según Hoemann y Ross (ob. cit.), esto se debe a que dado que se utilizan dos conjuntos el niño se limita solo a elegir de cuál de ellos prefiere realizar la extracción, mientras que cuando se debe focalizar en un solo conjunto, se centra en lo que se debe predecir.

Falk, Falk y Levin (1980) plantean a un grupo de niños entre 4 y 11 años 9 problemas sobre comparación de probabilidades que involucran el uso de urnas, ruletas y peonzas. Estos problemas se encuentran clasificados de acuerdo al contexto y al tipo de fracción involucradas en la comparación con respecto a si la proporción es mayor, menor o igual a ½. De este modo los problemas se clasificaron según si: a) el número de casos favorables es menor, mayor o igual en el conjunto de mayor probabilidad; b) el número de casos favorables es menor mayor o igual en el conjunto de menor probabilidad; c) los dos conjuntos son equiprobables y el número de casos favorables es menor, mayor o igual en el primer conjunto presentado. Los resultados observados muestran que desde los 6 años los niños presentan un razonamiento probabilístico, sin importar el contexto con el cual estuvieran realizando el experimento. Uno de los errores más frecuentes fue el inclinarse por elegir aquel conjunto con mayor número de casos favorables. Así a partir de lo anterior, los autores concluyen que el concepto de probabilidad se encontraría conformado por los subconceptos de azar y proporción. Sin embargo, para lograr una comprensión adecuada de la probabilidad, no basta con saber calcular proporciones, sino que además hay que poseer una comprensión acabada de la imposibilidad de controlar o predecir los resultados.

Kahneman, Slovic y Tversky (1982) estudian desde el campo de la psicología la existencia de errores sistemáticos y conductas estereotipadas que se manifiestan al momento de tomar decisiones de tipo probabilístico. Los autores han identificado heurísticas y sesgos presentes en el razonamiento probabilístico, producto de factores que afectarían negativamente la forma de razonar en probabilidad, sus investigaciones se orientan a identificar dichas formas así como los factores que en ellas influyen. Puesto que la presencia de estas heurísticas y sesgos en algunos casos se muestra resistente a la enseñanza, imposibilitando de este modo la asimilación de los conceptos formales. Dentro de los tipos de errores más característicos se encuentran: 1) La heurística de la representatividad (Tversky y Kahneman, 1982) que consiste en que los sujetos para asignar probabilidades a un suceso se basan en la semejanza de éste con respecto a la población de la cual se extrae; y 2) La heurística de la disponibilidad (Tversky y Kahneman, 1974), se refiere a la tendencia de realizar predicciones sobre la probabilidad de un suceso, basándose para ello en la mayor o menor facilidad con la que se pueden construir o recordar ejemplos de ese suceso.

Green (1983) a diferencia de otros autores que se basan en experimento o entrevistas clínicas, construye un cuestionario especial de conceptos probabilísticos, con una amplia validez de contenido, que aplica a una muestra de 2930 niños elegidos en forma representativa y aplicando la técnica del escalograma de Guttman que se caracteriza por medir la intensidad de la actitud a través de un conjunto de ítems. Para así, analizar los conceptos o intuiciones aleatorias que se encuentran presentes en la mente de niños desde los 11 a 16 años de edad. Dicho cuestionario consta de 26 ítems, que abordan diversos aspectos para establecer niveles de razonamiento probabilístico y la edad promedio en que éstos son alcanzados, los cuales se clasifican en tres categorías: la capacidad de comprensión del niño del lenguaje de probabilidad y su aplicación a situaciones de incertidumbre, la capacidad de razonamiento combinatorio y probabilístico, así como las intuiciones de los alumnos sobre aleatoriedad. De esta forma, por medio de los ítems que conforman las distintas categorías, el autor logra situar a los niños en distintos niveles de razonamiento probabilístico, los cuales guardan cierta similitud con las etapas del desarrollo de la idea de azar propuestas por Piaget e Inhelder (1951). Dentro de los principales resultados de la investigación de Green (ob. cit.) podemos mencionar que: (1) el nivel de desarrollo del razonamiento probabilístico es inferior en las niñas; (2) los ítems que involucran realizar permutaciones de 4 o 5 objetos no lograron ser respondidos correctamente, por lo que la combinatoria es considerada uno de los conceptos vinculados a la probabilidad que mayor dificultad presenta para estos alumnos, además de la aplicación del principio multiplicativo y de los diagramas de árbol; (3) unos de los conceptos que se evidencia como fundamental para una adecuada comprensión de la probabilidad es el de razón; (4) existe un bajo dominio y comprensión del lenguaje vinculado a la probabilidad por parte de los alumnos. De esta manera a la luz de los resultados obtenidos de la aplicación del cuestionario, es que el autor concluye que gran parte de los alumnos no alcanza el nivel de las operaciones formales en relación al concepto de razón, aún cuando han superado la edad esperada para alcanzar dicho nivel de acuerdo con las etapas piagetanas. Lo que conduce a Green a pensar que los alumnos finalizan su formación escolar estando en la etapa de las operaciones concretas para dicho concepto, lo que incide directamente en la adecuada comprensión de la probabilidad desde un punto de vista clásico. Bajo esta perspectiva es que Green (ob. cit.) propone desarrollar un programa de actividades de clase prácticas y vinculadas a la experimentación, que permitan eliminar los errores de pensamiento probabilístico y construir de manera progresiva, y acorde a cada edad, experiencias que conduzcan a desarrollar un razonamiento probabilístico desde las primeras edades.

Konold, Pollatsek, Well, Lohmeier y Lipson (1993) estudian cómo entienden el concepto de probabilidad un grupo de estudiantes de primaria. Para ello, les presentan un problema vinculado al lanzamiento de una moneda honesta que es lanzada 5 veces, preguntándoles ¿qué resultado es el más y menos probable? de las siguientes secuencias: a) cccss, b) sccsc, c) scsss, d) cscsc y e) las cuatros secuencias son igualmente probables. En base a las respuestas se observó que gran parte de los estudiantes respondió correctamente la pregunta sobre el resultado más probable. Mientras que sólo un 38% respondió correctamente la pregunta sobre el resultado menos probable, justificando sus respuestas en base a la heurística de la representatividad (Tversky y Kahneman, 1982). Los resultados se atribuyen a que los estudiantes presentan un razonamiento probabilístico basado en los resultados.

Truran (1994) analiza la utilización de la comprensión probabilística por parte de un grupo de 32 estudiantes de 8 a 15 años, cuando se ven enfrentados a situaciones en las que deben elegir entre dos opciones, aquella urna que contiene una mayor proporción de bolas de un determinado color. Por medio de los resultados amplia notablemente la *gamma* de estrategias, que hasta ese momento habían sido descritas en investigaciones anteriores, incluyendo, entre otras, los siguientes tipos: no da razón para la elección, simple descripción del contenido de las urnas sin hacer una elección, respuesta correcta pero sin justificación (intuición), utilizar estrategias diferentes para cada caja, inclinación hacia el número menor, comparación de probabilidades entre las dos urnas, por mencionar algunas. Además, en su investigación evidencia que los niños de estas edades son capaces de utilizar adecuadamente el lenguaje probabilístico, así como de otorgar buenos argumentos para sucesos seguros e imposibles.

Watson, Collis y Moritz (1997) analizaron las interpretaciones que los alumnos dan a los diagramas de barras para determinar si un dado es honesto o no, encontrándose con que gran parte de los alumnos argumentaban que debían experimentar con el lanzamiento del dado para determinar si éste es o no sesgado.

Fischbein y Schnarch (1996) estudian la evolución de las heurísticas y sesgos probabilísticos con la edad (Kahneman *et al*., 1982), con el objeto de dilucidar si éstas se forman durante la infancia o producto de una pobre instrucción en probabilidad. Para ello, administraron un cuestionario conformado por 7 problemas que se enfocaban en los errores probabilísticos de: representatividad, los efectos de recencia positiva y negativa (falacia del jugador), sucesos simples y compuestos, la falacia de la conjunción, la influencia del tamaño de la muestra, disponibilidad y la falacia del eje temporal. Al analizar las respuestas de los estudiantes cuyas edades fluctuaban entre los 10 y 16 años se concluye que para los errores analizados, se dan tres tipos de evolución a medida que la edad aumenta: los que permanecen estables (sucesos simples y compuestos), los que disminuyen (la heurística de la representatividad y el efecto de recencia negativa y falacia de la conjunción) y los que se incrementan (influencia del tamaño de la muestra, disponibilidad y falacia del eje temporal). Según los autores estos resultados se deben a que existen esquemas intelectuales (principios generales) que con la edad se hacen más claros e influyentes en sus decisiones.

Serrano (1996) entrevista a 10 alumnos de 16 años y les plantea problemas de probabilidad desde el punto de vista del enfoque frecuencial. Los resultados muestran que los alumnos de esta edad tienen un razonamiento combinatorio correcto a partir de la secuencia de resultados que se les presentó, además de comprender el carácter imprevisible de los fenómenos aleatorios y de la regularidad de las frecuencias de los posibles resultados. Pese a lo anterior estos alumnos muestran heurísticas incorrectas para la asignación de probabilidades, como la representatividad, además de ideas incorrectas que los llevan a generalizar la regla de Laplace a contextos en los que no es pertinente, es decir, presentan el sesgo de la equiprobabilidad (Lecoutre y Durand, 1988; Lecoutre, 1992), además del sesgo de insensibilidad al tamaño de la muestra. Así a partir de estos resultados Serrano (ob. cit.) diseña un cuestionario conformado por 10 ítems que permiten evaluar el reconocimiento y generación de secuencias aleatorias y la interpretación frecuencial de la probabilidad. Este cuestionario es aplicado a estudiantes de 13 y

17 años, observándose que en relación al reconocimiento y generación de secuencias aleatorias, los estudiantes esperan que éstas presenten alternancias entre las distintas posibilidades y en ausencia de patrones establecidos, además de que esperan que la frecuencia relativa converja a la probabilidad teórica. Por último, en lo que se refiere a la interpretación frecuencial de la probabilidad, estos estudiantes presentaron dificultades para interpretar la probabilidad desde este enfoque.

Cañizares (1997) estudia la influencia del razonamiento proporcional y combinatorio, y de las creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias. Para ello, realiza un análisis entre las investigaciones realizadas por Piaget e Inhelder (1951) y Green (1983) desde una perspectiva clásica de la probabilidad versus las de Fischbein (1975) realizadas desde una perspectiva intuitiva de la probabilidad, puesto que para la autora ambas perspectivas o significados son complementarios para el adecuado desarrollo en los niños de la probabilidad y de los conceptos vinculados a ésta. Además, realiza un análisis estructural de los instrumentos de evaluación del razonamiento probabilístico intuitivo de los niños utilizados en las investigaciones de Green (ob. cit.) y de Fischbein y Gazit (1984) dilucidando que en el cuestionario de Fischbein y Gazit (ob. cit.) se otorga gran importancia a la aproximación intuitiva de la probabilidad basada en las creencias y factores culturales, incluyendo además contextos cotidianos como vinculados a las loterías. Tales aspectos y contextos no se encuentran presentes en el cuestionario de Green (ob. cit.) pues este se centró mayoritariamente en abordar una amplia *gamma* de conceptos vinculados a la probabilidad, mientras que Fischbein y Gazit (ob. cit.) se abocaron solo a aspectos vinculados a la comparación de probabilidades. Luego de este análisis realiza una comparación experimental de los dos cuestionarios por medio del estudio de la correlación existente entre ambos instrumentos. Para ello, aplicó el cuestionario de Green (ob. cit.) a una muestra de 251 estudiantes de 11 a 14 años, y el cuestionario de Fischbein y Gazit (ob. cit.) a una muestra ampliada a 320 niños entre los 10 y 14 años. En general, los resultados de ambas aplicaciones fueron mejores que los obtenidos por Green (ob. cit.) y

Fischbein y Gazit (ob. cit.), pues, ambas muestras de niños mostraron nociones intuitivas correctas en relación al carácter impredecible de experimentos aleatorios, comparación de probabilidades sencillas, probabilidades geométricas y condicional. Asimismo, se pudo observar que estos alumnos utilizan un mayor número de estrategias para la resolución de problemas avanzados que se fundamentan en un razonamiento de tipo proporcional, por otro lado muestran una mejor comprensión y utilización del lenguaje probabilístico a excepción de los términos improbable e imposible ante los cuales manifiestan cierta dificultad. Sin embargo, y pese a lo anterior, este grupo presentó grandes dificultades en varios aspectos, tales como: (1) el cálculo de probabilidades en experimentos compuestos; (2) interpretación de diagramas de árbol; (3) independencia vinculada a los juegos de lotería; (4) comprensión de sucesos imposibles; (5) resolución de problemas que involucran permutaciones; (6) razonamiento combinatorio y proporcional escaso. También, se pudo observar la presencia de los sesgos clásicos de equiprobabilidad, representatividad, recencia positiva y negativa, además de concepciones erróneas en relación a la aleatoriedad semejantes a las reportadas por Serrano (1996). En consecuencia, a partir de los resultados obtenidos de ambas aplicaciones, Cañizares (1997) concluye que si bien las intuiciones probabilísticas mejoran con la edad, algunos sesgos como la heurística de la representatividad o la incapacidad para reconocer independencia en contexto de juegos de loterías no mejora, e incluso empeoran levemente con la edad. En relación con la comparación experimental de los dos cuestionarios el análisis factorial mostró la existencia de factores independientes en ambos cuestionarios, además de una falta de correlación entre ellos. Es por esta razón que Cañizares (ob. cit.) decide confeccionar un nuevo instrumento compuesto por 16 ítems, de los cuales 7 fueron tomados del cuestionario de Fischbein y Gazit (ob. cit.), 7 del cuestionario de Green (ob. cit.) y dos de elaboración propia. Este nuevo cuestionario, enfocado en la comparación de probabilidades simples y el uso de factores subjetivos en la asignación de probabilidades como componentes específicos del razonamiento probabilístico de los niños, fue aplicado a una nueva muestra de 143 niños de 10 a 14 años, de los cuales se eligieron a 8 alumnos a quienes se aplicó una entrevista en profundidad. Dentro de las conclusiones que se obtuvieron con la aplicación de este tercer cuestionario destacamos las siguientes: (1) se evidencia una adecuada comprensión de las nociones de suceso seguro, aunque en algunos casos es confundido con la noción de suceso posible; (2) se observó un escaso razonamiento combinatorio, además de una fuerte presencia del sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992) y del enfoque en el resultado (Konold, 1991) los cuales aumentarían ligeramente con la edad; (3) el nivel de razonamiento proporcional involucrado en la resolución de problemas de comparación de probabilidades fue escaso en relación a los niveles propuestos por Noelting (1980); (4) a partir de las entrevistas se pudo observar casi nula relación entre la existencia de supersticiones y el nivel de razonamiento proporcional.

Pratt (1998, 2000, 2005) analiza los significados que conceden a los fenómenos aleatorios niños de 10 y 11 años antes y después de un proceso de instrucción asistido por *software*. Para ello, entrevistó a los niños preguntándoles ¿qué significado dan al término aleatorio?, los resultados muestran que para este grupo un fenómeno aleatorio es entendido como algo impredecible, irregular, incontrolable y equitativo. Luego de la entrevista se solicitó a los niños trabajar con un *software* que permite realizar simulaciones con dados, monedas y ruletas y de este modo establecer conjeturas sobre los resultados y sus relaciones con determinados conceptos probabilísticos. Una vez finalizado el experimento se observa que el *software* tuvo un efecto positivo en los niños, pues éstos comprenden de mejor manera qué es un fenómeno aleatorio, además de aprender algunos conocimientos sobre probabilidad frecuencial, el efecto del número de ensayos sobre las frecuencias relativas, así como distribuciones iniciales sobre probabilidades.

Jones, Thornton Langrall, y Mogill (1996) analizaron la habilidad para identificar el espacio muestral de situaciones aleatorias en niños de 8 y 9 años, observando que alrededor del 40% de éstos no consideraba que todos los resultados del espacio muestral se pueden dar realmente en un experimento aleatorio simple. Según los autores esto se debería a que el concepto de espacio muestral es concebido desde un punto de vista determinista. Mientras que otro porcentaje importante de la muestra presentó problemas para determinar los elementos del espacio muestral, lo que de acuerdo con Batanero, Navarro-Pelayo y Godino (1997) puede deberse a una falta de razonamiento combinatorio, o bien a que es un concepto poco tratado dentro del currículo (English, 2005).

Amir y Williams (1999) estudian la influencia de los factores culturales, creencias religiosas o actitudes fatalistas en las heurísticas, sesgos y intuiciones probabilísticas, entrevistando para ello a 38 estudiantes de 11 y 12 años pertenecientes a distintas razas y diferentes contextos culturales y religiosos. A partir de las respuestas dadas por los alumnos se concluye que éstos utilizan, para la asignación de probabilidades, un razonamiento de tipo mixto (racional e irracional), el cual se vería fuertemente influenciado por las experiencias pasadas, y las creencias siendo estas últimas las más influyentes en el razonamiento probabilístico.

Cañizares, Batanero, Serrano y Ortiz (1999) analizan las concepciones sobre juego equitativo en niños de 10 y 14 años, para ampliar y profundizar los resultados obtenidos en estudios anteriores (Cañizares, Batanero, Serrano y Ortiz, 1997; Cañizares y Batanero, 1998). Para ello realizaron entrevistas a los niños, en las que se pudo observar que algunos alumnos no son capaces de diferenciar entre un suceso equiprobable y uno no equiprobable, sin embargo, la gran mayoría muestra una concepción adecuada de juego equitativo, siendo capaz de resolver correctamente los problemas presentados.

Aspinwall y Tarr (2001) realizan un estudio sobre el efecto de un programa de instrucción cuyo objetivo es facilitar la comprensión de la ley de los grandes números en 23 estudiantes de 6º grado. Para cumplir con dicho objetivo el programa constaba de cinco sesiones en las que se abordaban tareas de simulación de fenómenos aleatorios, además de preguntas clave orientadas a visualizar si los estudiantes comprenden el rol que juega el tamaño de la muestra en la estimación de probabilidades desde un enfoque frecuencial, y por último se les solicitaba un reporte escrito para analizar su razonamiento probabilístico en profundidad. Para analizar la eficacia de este programa se aplicó un pre test y un post test a los alumnos, arrojando una diferencia significativa entre ambos por lo que Aspinwall y Tarr concluyeron que el programa de instrucción tiene un efecto positivo en el aprendizaje de la ley de los grandes números en alumnos de 11 y 12 años.

Polaki (2002) comparó la comprensión de la probabilidad en dos grupos de 12 niños de 4º y 5º grado de educación primaria que recibieron instrucción sobre el tema pero con metodologías diferentes. El primer grupo recibió instrucción desde una perspectiva clásica, por medio de la generación de muestras pequeñas con datos experimentales a partir de los cuales se determinaban probabilidades considerando el espacio muestral generado. El segundo grupo recibió instrucción desde una perspectiva frecuencial en la que se realizaban simulaciones de experimentos por medio de un computador, de manera previa al análisis de la estructura del espacio muestral. Para analizar el efecto en el aprendizaje de las dos metodologías de instrucción se aplicó una prueba a ambos grupos. Los resultados reflejaron un efecto positivo de ambas metodologías en el desarrollo del pensamiento probabilístico de los niños, pues las diferencias de los resultados a la prueba entre ambos grupos no fueron significativas. Por otro lado, se evidenció que los niños de estos grados no lograron comprender el efecto que tiene en la convergencia de los datos el tamaño de la muestra, lo que lleva a pensar a los autores que el estudio de la probabilidad desde un enfoque frecuencial puede ser demasiado abstracto para niños de este nivel, sobre todo si no se encuentran familiarizados con el uso de la computadora para la simulación de experimentos aleatorios.

3. CONSIDERACIONES FINALES

El surgimiento de la probabilidad no ha estado exento de grandes debates principalmente filosóficos en los cuales se encuentran involucrados distintos significados, lo que ha influido directamente en su enseñanza. Es por esta razón que por medio de este estudio se ha buscado evidenciar, a través de la revisión de diversas investigaciones realizadas sobre los diferentes aspectos relacionados con el proceso de aprendizaje de la probabilidad, considerando investigaciones clásicas sobre el aprendizaje de la probabilidad en niños de Educación Infantil y Educación Primaria relacionadas con los posibles errores y dificultades que los alumnos de tales niveles pueden tener con la probabilidad y los conceptos vinculados a su estudio, dejando para estudios posteriores el análisis de otros elementos que pueden influir en el aprendizaje de la probabilidad, como lo es, por ejemplo, la incorporación de la tecnología en los procesos de enseñanza. Pues, dada la reciente incorporación de la probabilidad en el currículo urge entonces, contar con profesores mejor preparados, que sean capaces de generar aprendizajes efectivos en sus estudiantes. Con esto no se quiere decir que sea necesario que los profesores cuenten con conocimientos matemáticos acabados de probabilidad, como teoría de la medida, pero sí se requiere que tengan un conocimiento profundo del contenido a enseñar y de cómo enseñarlo. En nuestro caso un conocimiento y una comprensión profunda de la probabilidad, "conocimientos que debería poseer un profesor, para ejercer en plenitud su tarea de enseñar matemáticas" (Ma, 1999, p. 13), es decir, conocimientos vinculados a la enseñanza de la probabilidad, que lleven al profesorado a desarrollar de manera idónea la tarea de enseñar.

Finalmente, al analizar las principales investigaciones, antes expuestas, referidas al aprendizaje de la probabilidad en Educación Infantil y Primaria, es posible dilucidar que la primera fase de adquisición de conocimientos probabilísticos se caracteriza por la adquisición de lenguaje probabilístico. Lo anterior, propicia el desarrollo progresivo del pensamiento probabilístico por medio de la construcción de conocimiento matemático en situaciones donde este tenga sentido, así como a través de la experimentación, intuición y capacidad para relacionar y abstraer conceptos. Desde esta perspectiva, este análisis sugiere que en el momento de iniciar el estudio de la probabilidad se considere el desarrollo de las primeras nociones y elementos de aproximación hacia la adquisición y el desarrollo del lenguaje probabilístico (Vásquez y Alsina, 2017). En otras palabras, el profesorado debe estar consciente que los conceptos de probabilidad son complejos con un alto grado de abstracción, por lo que al momento de diseñar e implementar el proceso de enseñanza y aprendizaje es necesario avanzar de manera gradual hacia la comprensión adecuada de la probabilidad (la cual puede iniciarse ya en la Educación Infantil) por medio del uso de lenguaje específico presente en situaciones de vida cotidiana, para así aproximarse progresivamente a la cuantificación de la incerteza, y finalmente al cálculo de probabilidades en los últimos cursos de Educación Primaria.

AGRADECIMIENTOS

Trabajo realizado en el marco del proyecto FONDECYT INICIACIÓN Nº 11150412 financiado por la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica de Chile.

REFERENCIAS

Amir, G., y Williams, J. (1999). The influence of children's culture on their probabilistic thinking. En J.P. Pontes y J.F. Matos (Eds.), *Proceedings of the XVIII Conference on the Psychology of Mathematics Education* (Vol.2, pp. 24-31). Lisboa: Universidad de Lisboa.

Aspinwall, L., y Tarr, J. E. (2001). Middle school students' understanding of the role sample size plays in experimental probability. *The Journal of Mathematical Behavior*, 20(2), pp. 229-245.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. y Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, 32, pp. 181-199.

Cañizares, M. J. (1997). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Cañizares, M. J. y Batanero, C. (1998). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades. *UNO*, 14, pp. 99-114.

Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L. y Ortiz, J. J. (1997). Subjective elements in children's comparison of probabilities. En E. Pehkonen (Ed), *Proceedings of the 21st Conference on the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (v.2, pp. 49-56). Lahti.

Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L. y Ortiz, J. J. (1999). Comprension de la idea de juego equitativo en los niños. *Números*, 37, pp. 37-55.

Davies, C. M. (1965). Development of the probability concept in children. *Child Development*, 36(3), pp. 779–788.

English, L. D. (2005). Combinatories and the development of children's combinatorial reasoning. In G. A. Jones (Ed), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 121-141). New York: Springer.

Falk, R., Falk, R., y Levin, I. (1980). A potential for learning probability in young children. *Educational Studies in Mathematics*, 11, pp. 181-204.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, 15, pp. 1-24.

Fischbein, E., Pampu, I., y Minzat, I. (1970). Effects of age and instruction on combinatory ability in children. *British Journal of Educational Psychology*, 40(3), pp. 261-270.

Fishbein, E., y Schnarch, D. (1996). Intuitions and schemata in probabilistic thinking. En Puig, L. y Gutierrez, A. (Eds.), *Proceedings of the XX Conference on the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 353-360). Universidad de Valencia.

Godino, J. D., Batanero, C., y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y Probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.

Goldberg, S. (1966). Probability judgments of preschool children: Task conditions and performance. *Child Development*, 37, pp. 158–167.

Green, D. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics, 2, Teaching Statistics Trust*. (pp. 766-783).

Hoemann, H. W., y Ross, B. M. (1975). Children's concepts of chance and probability. In C. Brainerd (Ed.), *Children's logical and mathematical cognition: Progress in cognitive developmental research* (pp. 93–121).

Jones, G. A., Thornton, C. A., Langrall, C. W. y Mogill, T. A. (1996). Using children's probabilistic thinking to inform instruction. En L. Puig y A. Gutérres (Eds), *Proceedings of the XX Conference on the Psychology of Mathematics Education* (v.2, pp. 137-144). Universidad de Valencia.

Kahhenam, P., Slovic, A., y Tversky (Eds.) (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge: Cambridge University Press.

Konold, C., Pollatsek, A., Well, A., Lohmeier, J. y Lipson, A (1993). Inconsistencies in students' reasoning about probability. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(5), pp. 392-414.

Konold. C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. En E. von GLASERSFELD (Ed.), *Radical constructivism in Mathematics Education* (pp. 139-156). Dordrecht: Kluwer.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive Models and Problem spaces in "Purely Random" Situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, pp. 557-568.

Lecoutre, M. P. y Durand, J. L. (1988). Jugéments probabilistes et modéles cognitifs: étude d´une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics* (19), pp. 357-368.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ration concept. Part I: Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, 11 (2), pp. 217-253.

Piaget, J. (1975). *Problemas de psicología genética*. Barcelona: Ariel.

Piaget, J., e Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.

Polaki, M. V. (2002). Using instruction to identify key features of Basotho elementary students' growth in probabilistic thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 4, pp. 285-314.

Pratt, D. (1998). The co-ordination of meanings for randomness. *For the Learning of Mathematics*, 18(3), pp. 2-11.

Pratt, D. (2000). Making sense of the total of two dice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, pp. 602-625.

Pratt, D. (2005). How do teachers foster students' understanding of probability? En G. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School* (pp. 171-189). New York: Springer.

Serrano, L. (1996). *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Truran, J. (1994). Examination of a relationship between children's estimation of probabilities and their understanding of proportion. En J. P. Ponte and J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the XVIII Psychology of Mathematics Education Conference* (Vol. 4, pp. 337-344). Lisboa: Universidad de Lisboa.

Tversky, A., y Kahneman, D. (1974). Judgement under uncertainity: Heuristics and biases. *Science*.185, pp. 1124-1131.

Tversky, A., y Kahneman, D. (1982). On the psychology of prediction. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 69-83). Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Vásquez, C. y Alsina, Á. (2017). Lenguaje probabilístico: un camino para el desarrollo de la alfabetización probabilística. Un estudio de caso en el aula de Educación Primaria. *Revista Bolema*, v. 31, n. 57, p. xx-xx.

Watson, J. M., Collis, K. F. y Moritz, J. B. (1997). The development of chance measurement. *Mathematics Education Research Journal*, 9, pp. 60-82.

Yost, P. A., Siegel, A. E., y Andrews, J. M. (1962). Nonverbal probability judgments by young children. *Child Development*, 33, pp. 769–780.

PROBABILITY LEARNING IN EARLY CHILHOOD AND PRIMARY EDUCATION. ASPECTS TO CONSIDER IN TEACHER TRAINING

ABSTRACT. As a result of the recent incorporation of the study of probability in the curricula of Primary and Secondary Education in different countries, especially in Latin America, there is a need for a specialized didactics towards teaching and learning about probability at these levels. As a first approach to this didactic, this study presents a summary of the main research related to the learning of probability in Early Childhood and Primary Education, so as to provide some orientations and key ideas to be considered in teacher training and thus contribute to the development of a suitable teaching of probability in the classroom.

Keywords: Probability; learning; Child education; Primary education; teacher training.

CLAUDIA VÁSQUEZ ORTIZ

Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

cavasque@uc.cl

Monumento a los Caídos de la Generación del 28 (1978).
Autor: Ernest Maragall.
Ubicación: Tierra de Nadie, Universidad Central de Venezuela.
Foto: Aquiles Salcedo Bolívar.

EL DESARROLLO PROFESIONAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS DE EDUCACIÓN MEDIA: REFERENTES CONTEXTUALES E INSTITUCIONALES PARA UN ESTUDIO DE CASO

ZORAIDA PÉREZ-SÁNCHEZ Y SANDRA CASTILLO VALLEJO

RESUMEN: Esta producción constituye el reporte parcial de una investigación en desarrollo, la cual se propone contribuir con el fortalecimiento de las prácticas y saberes de los profesores de matemática de educación media en Venezuela, a través de una aproximación a las realidades percibidas y experiencias de los propios actores en relación a su proceso de formación. Se trata de un estudio documental que analiza acontecimientos perfiladores de la problemática y que revisa las políticas públicas e institucionales aplicadas a la materia. Todo esto con el objetivo de configurar un fundamento contextual e institucional en el dominio del desarrollo profesional del profesor de matemática de educación media en Venezuela. Una revisión sistemática de documentos consideró leyes y decretos, declaraciones públicas de expertos y estudios previos referidos al tema de interés. Un análisis de contenido de los documentos permitió conocer y reflexionar sobre lo que está aconteciendo con la formación del profesor de matemáticas de educación media en Venezuela, lo cual, salvando algunas particularidades, presenta similitudes con la situación de los demás profesores del subsistema de educación básica. Se destaca como hallazgos: la existencia de un déficit de docentes de matemáticas alimentada por una subvaloración social e institucional de la profesión docente, que se materializa en una muy baja demanda de estudiantes que desean ingresar a la carrera de Educación Matemática. Así mismo, emergentes políticas públicas, a través de un nuevo sistema de ingreso y ascenso, establece vías expeditas de formación no universitaria, que corren el riesgo de tener una función utilitaria más que formativa.

Palabras Clave: Formación docente, Profesor de Matemática en Venezuela, educación continua

Pérez-Sánchez, Z. y Castillo Vallejo, S. (2017). El desarrollo profesional del profesor de matemáticas de educación media: Referentes contextuales e institucionales para un estudio de caso. En: Salcedo, A. (Comp.). *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI*, (pp. 45 – 64.) Caracas: Centro de Investigaciones Educativas, Escuela de Educación. Universidad Central de Venezuela.

1. INTRODUCCIÓN

El trabajo que se expone a continuación forma parte de una investigación en desarrollo que busca contribuir con el fortalecimiento de las prácticas y saberes de los profesores de matemática de educación media y, por ende, con la calidad del sistema educativo venezolano. Dicha investigación consiste en un estudio de caso cualitativo cuyo propósito es conocer acerca de las perspectivas que tienen los profesores de matemática en ejercicio, en relación a su proceso de desarrollo profesional. Su objetivo consiste en identificar necesidades y expectativas partiendo de sus concepciones y experiencias en torno a este proceso. Desde un enfoque interpretativo y fenomenológico, se está estudiando la realidad percibida por un grupo de profesores que trabajan en liceos de Ciudad Guayana, Estado Bolívar, Venezuela. El diseño metodológico se apoya en los principios de la Teoría Fundamentada desarrollada por Glaser y Strauss (1967) y en las técnicas y estrategias analíticas recomendadas en Strauss y Corbin (2002). Con ello se quiere de dar aportes que impulsen la consideración de la voz del propio profesor de matemáticas, tanto en la formulación de políticas públicas materializadas en resoluciones y decretos, como en los diseños curriculares que atienden la formación del profesor de matemáticas.

Partiendo de la idea de que la formación del profesor de matemáticas puede ser abordado desde tres perspectivas (Llinares, Sánchez, García y Escudero, 2000): como contexto práctico, como ámbito institucional y como dominio de investigación, en este trabajo se presenta un estudio documental realizado con el propósito de establecer los referentes contextuales e institucionales en materia de desarrollo profesional de los profesores de matemática de educación media en Venezuela. La presentación de los referentes teóricos se deja para un próximo trabajo.

La configuración de estos referentes, contextuales e institucionales, se llevó a cabo mediante la búsqueda y revisión de material bibliográfico y hemerográfico, fuentes de acontecimientos y situaciones del contexto, de políticas públicas y lineamientos institucionales relacionados con el desarrollo profesional del docente en Venezuela. Un método *ad hoc* de análisis del contenido de los documentos revisados permitió, entre otros aspectos, comprender el fenómeno, pudiéndose identificar problemas medulares en este ámbito y explorar acerca de las políticas públicas de la formación docente en Venezuela.

Como hallazgos se destaca que existe una subvaloración institucional de la profesión docente, la cual incide en la subvaloración de la misma en el ámbito social. Una visión utilitaria de la formación docente, como mecanismo de ascenso y obtención de mejores sueldo por parte de los docentes, y por otro lado, como mecanismo de control institucional, ideológico y político, por parte de los entes gubernamentales.

2. Desarrollo

El estudio documental realizado se sirvió de las orientaciones metodológicas proporcionadas por Galeano (2004), para quien este tipo de investigación constituye una estrategia a través de la cual se *entrevistan* textos mediante las preguntas de investigación que el investigador se ha planteado, puesto que sus fuentes de información están conformadas por documentos.

Se realizó una revisión sistemática de documentos, de notas de prensa escrita y de entrevistas de radio, con la finalidad de actualizar información acerca de lo que acontece en torno al desarrollo profesional de los profesores de matemática de educación media.

El diseño metodológico se apoyó en los aportes de Llinares et al. (2000), quienes sostienen que la formación del profesor de matemática puede ser abordada desde tres perspectivas: como un contexto práctico, como ámbito institucional y/o como un dominio de investigación. De esta manera se plantea la búsqueda en tres direcciones que dan lugar a tres tipos de referentes: los referentes contextuales que aluden a todo aquello relacionado con lo que percibe el colectivo común que se está haciendo en materia de formación docente en Venezuela; los referentes institucionales que muestran las acciones del Estado docente y de las instituciones venezolanas que contemplan en su misión la formación de profesores de matemática. El tercer ámbito corresponde a los referentes teóricos, que muestran cómo ha sido abordado el tema desde la investigación educativa, y particularmente desde la Educación Matemática.

La revisión documental y el análisis de contenido constituyeron las técnicas principales de esta investigación. Se revisaron documentos oficiales, prensa escrita, entrevistas de radio, artículos y libros académicos, disponibles en físico o en Internet. Para la selección de documentos se realizó un muestreo intencional, bajo el criterio de dirigir la mirada hacia el encuentro de acontecimientos y situaciones del contexto, de políticas públicas y lineamientos institucionales, así como de investigaciones y estudios previos relacionados con el desarrollo profesional del docente en Venezuela. Se siguió un método *ad hoc* de análisis del contenido de los documentos revisados, con el propósito de conseguir patrones subyacentes en estos dos ámbitos o perspectivas de acercamiento (contextual e institucional) al fenómeno de la formación del profesor de matemáticas en Venezuela.

3. Resultados

De acuerdo con el alcance de esta investigación, los resultados han sido estructurados en dos grandes apartados: los referentes del contexto y los referentes institucionales.

Referentes del contexto

En atención a la revisión y análisis de los acontecimientos más relevantes ocurridos en Venezuela, en materia de formación de profesores de matemática, se encontraron algunos aspectos que forman parte de la problemática, y que han de servir como referentes para el trabajo empírico, en ciernes, de la investigación que está en desarrollo.

Déficit de docentes especialistas en la enseñanza de la matemática:

A nivel nacional, en su Memoria y Cuenta del año 2014, el Ministerio del Poder Popular para la Educación reporta, entre otras necesidades (Figura 1), que se requiere «formar 451 docentes para impartir Matemática» (Pineda, 2015)

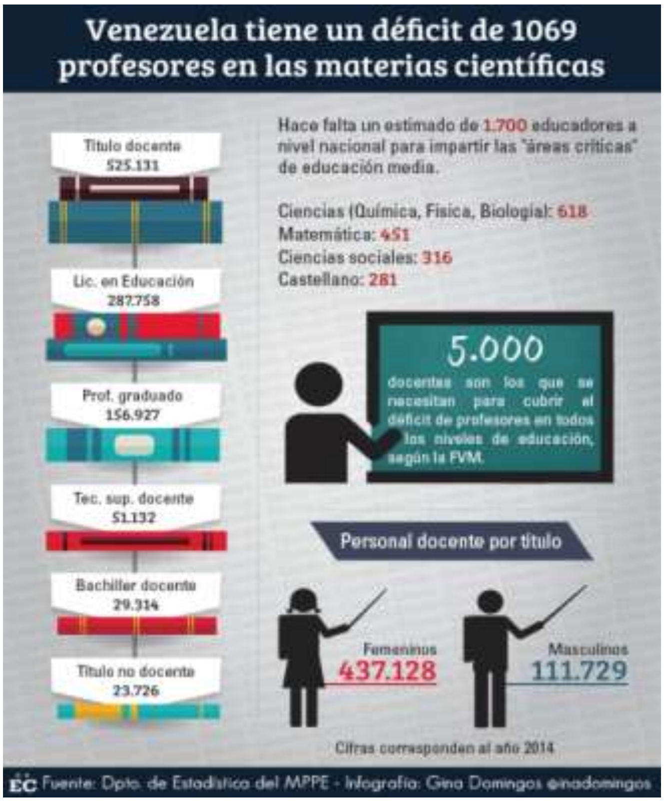


Figura 1. Déficit de profesores en materias científicas. Pineda, 2015

En la región de Guayana, son pocos los profesores de matemática de educación media especialmente formados para el buen desempeño de su oficio. Siendo considerada la Matemática como una de las asignaturas más críticas en la educación media de la región, registros provenientes de la Zona Educativa del Estado Bolívar reportaron que en el año escolar 2010-2011 esta asignatura era atendida por un total de 247 docentes, de los cuales sólo el 34% eran profesores graduados en la especialidad de matemática; superados por los docentes egresados de Educación Integral (45%). También se encontró que había bachilleres enseñando Matemáticas (9%) y profesionales no docentes (13%) (Gráfico 1). Estas cifras perfilan las necesidades más inmediatas de formación en Ciudad Guayana, principalmente hacia la especialización en educación matemática de los docentes integrales y de los profesionales no docentes.

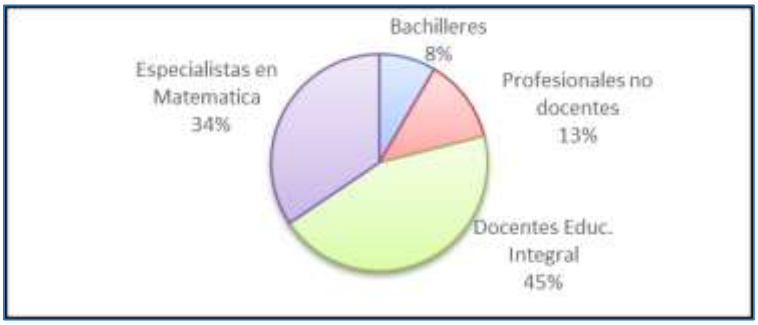


Gráfico 1. Profesión de los profesores de Matemática de Secundaria.
Fuente: Zona Educativa del Edo. Bolívar (2011)

La carrera de Educación, mención matemática se muestra poco atractiva para los aspirantes a ingresar al sistema de educación universitaria.

La carrera de Educación mención Matemática es una de las últimas opciones consideradas por los estudiantes que egresan de los liceos, tal como lo refleja la siguiente nota de prensa:

> La Oficina de Planificación del Sector Universitario (OPSU) tiene aún disponibles 19.803 cupos en ciencias básicas de universidades públicas, de los que les corresponde asignar (...) estos cupos corresponden a aquellos que no fueron escogidos por los estudiantes durante el proceso de selección de carreras. Algunas de las carreras con cupos disponibles son: Educación (mención Matemática) Física, Geografía e Historia, Procesos Químicos, Mecánica, Química Pura, Agroalimentaria, Electricidad y Administración Informativa, Higiene y Seguridad Laboral. (Asociación Venezolana de Noticias, 2014).

Datos más recientes se encontraron en el Libro de Oportunidades de Estudios Universitarios (Oficina de Planificación del Sector Universitario, 2016).Aunque esta fuente no reporta los datos correspondientes a las carreras de Educación, mención Matemática, es preocupante lo que se aprecia en el Gráfico 2 cuando para el año 2015, sólo 23 bachilleres escogieron la carrera de Matemática, mención Docencia en Matemática como primera opción en el Sistema Nacional de Ingreso, si lo comparamos los 28.934 bachilleres que aplicaron como primera opción de estudio la carrera de Medicina (ob.cit.). Esto refuerza la tesis de que la carrera de Educación Matemática es poco atractiva para la gran mayoría de los bachilleres que quieren realizar estudios universitarios.

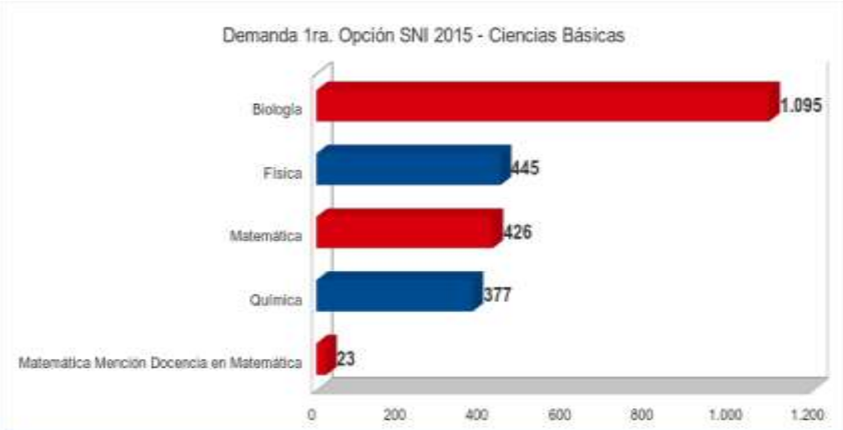


Gráfico 2. Demanda 1ra. Opción en el Sistema Nacional de Ingreso-Ciencias Básicas. Fuente: OPSU (2016)

Los estudios de postgrado conducentes a título como vía para obtener ascensos.

De las experiencias particulares que han tenido las autoras, como formadoras de profesores de matemática, y al haber participado en el diseño e implementación de programas de formación de la Universidad Nacional Experimental de Guayana (UNEG) para profesores de matemática de educación media, se ha podido observar que:

Hay poco interés de los profesores de matemáticas de educación media por participar en programas de formación no conducentes a título, puesto que no se les reconoce como medio de ascenso de categoría y, por ende, no como vía para obtener mejoras salariales en las instituciones donde trabajan. La primera oferta académica UNEG, del programa de Estudios Avanzados en Educación Matemática, realizada en Puerto Ordaz en el año 2011, se declaró desierta debido a que menos de cinco personas de las que acudieron para solicitar información, aplicaron para participar en dicho programa. La pregunta más frecuente que hacían los profesores que solicitaban información era, si dicho programa conducía a algún título; ante la respuesta negativa, no se inscribían en el programa.

Expectativas de los profesores de matemáticas en relación a los programas de formación

Para ese año 2011, el mismo programa de estudios avanzados se ofertó en Ciudad Bolívar, donde sí se pudo llevar a cabo. En el primer módulo denominado *Reflexiones sobre el proceso de aprendizaje-enseñanza de la matemática escolar*, luego de indagar acerca de las expectativas iniciales que tenían los profesores participantes, se conoció que éstos pensaban que los cursos iban a tener como propósito principal la enseñanza exclusiva de contenidos matemáticos. Una anécdota que la profesora de este módulo refirió como experiencia, fue la de una participante que se habría comprado una calculadora porque pensaba que el programa iba dirigido a trabajar exclusivamente con el contenido matemático, sin esperar que estuvieran contemplados espacios para la reflexión y discusión de la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Esta experiencia da pie para plantearse preguntas de investigación respecto a lo que los propios profesores de matemática esperan de un programa de formación.

Métodos deductivos en el diseño de programas de formación:

De las experiencias que las autoras han tenido en la participación del diseño de dos programas para la formación de profesores de Matemática de Educación Media se ha visto que los métodos utilizados para tales tareas han sido deductivos en su mayoría, principalmente por la necesidad de dar respuestas inmediatas a exigencias institucionales. Es decir, los programas de formación docente se realizan a partir del perfil de un egresado “ideal”, donde el establecimiento de las competencias está fundamentado en posturas teóricas, propuestas pedagógicas y producciones, principalmente provenientes del campo de la Didáctica de las

Matemáticas; procedimiento que no se critica pero que muchas veces subestima el contexto, de donde pueden aflorar las necesidades reales de los docentes.

Referentes institucionales

Según Maragall (en Rondón, 2016), los tres grandes retos en cuestión de políticas públicas que el Estado debe asumir para atender el sistema educativo venezolano, son: «que todos los niños vayan a las escuelas, que esas escuelas estén en buenas condiciones y que esos niños tengan buenos maestros». Si llevamos esta idea al tema que nos ocupa, el último reto que se menciona invita a buscar cuál ha sido la actuación del Estado venezolano en materia de desarrollo profesional del profesor de matemática de educación media. En este sentido, de la investigación realizada se encontraron los siguientes puntos de atención:

¿Suficientes Ofertas Académicas para la formación del profesor de matemática?

Según León, Beyer, Serres e Iglesias (2013), la primera institución destinada a formar docentes de educación media en Venezuela fue el Instituto Pedagógico Nacional (IPN), creado en 1936, graduándose los primeros profesores de matemática de secundaria en el año de 1942. En 1959 se crea en Barquisimeto el segundo IPN. En la década de los años setenta se crean otros institutos pedagógicos: (En 1971: IPN-Maturín e IPN-Maracay; en 1976: I.P. Siso Martínez e I.P. Arias Blanco). También para esa época, en algunas universidades se abren las carreras de licenciatura en Educación, con mención en Matemática. Con la Ley Orgánica de Educación de 1980 (LOE-1980) los institutos pedagógicos pasan a tener rango de universidades. Además, la formación inicial de docentes para los primeros niveles de educación básica también queda a cargo de las universidades y de los pedagógicos. Actualmente, la oferta académica para la formación inicial del profesor de matemáticas en Venezuela, se distribuye de acuerdo a lo descrito en la Tabla 1.

En dicha Tabla se aprecia que doce instituciones universitarias ofrecen carreras para formar profesores de matemática. Particularmente la Universidad Nacional Abierta (UNA) ofrece oportunidades de estudio en 50 núcleos. Al parecer, la oferta de programas de formación inicial de profesores de matemática, a nivel nacional, podría cubrir cómodamente la demanda de 451 profesores de matemáticas, cifra estimada por el MPPE (ver Figura 1).

Tabla 1. Distribución de la oferta académica 2015, de carreras relacionadas con la formación inicial del profesor de matemáticas. Fuente: Sistema Nacional de Ingreso, 2016, MPPEUCT.

Títulos que se otorga	Institución (1)	N° de Programas	Subtotal	Acumulado
Licenciado en Educación Mención Matemática	UNA	50	66	77
	UNESR	7		
	UNELLEZ	5		
	ULA	2		
	UDO	1		
	UNEG	1		
Profesor. Especialidad: Matemática	UPEL	5	5	
Licenciado en Educación Mención Matemática y Física	LUZ	1	2	
	UNERMB	1		
Licenciado en Educación Mención Física y Matemática	UCAB	2	3	
	ULA	1		
Licenciado en Educación Mención Informática o Licenciado en Educación Mención Informática y Matemática	UCT	1	1	
Licenciado en Matemática	UNA	51	51	58
	UCV	1	1	
	ULA	1	1	
	UC	1	1	
	USB	1	1	
	UDO	1	1	
	UNIMET	1	1	
	UCLA	1	1	
				135

Fuente: Oficina de Planificación del Sistema Universitario. Libro de Oportunidades de Estudios Universitarios. Consultado 15-04-2016

(1) Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL), Universidad de Carabobo (UC), Universidad Central de Venezuela (UCV), Universidad de Oriente (UDO), Universidad de Los Andes (ULA), Universidad Nacional Experimental "Rómulo Gallegos" (UNERG), Universidad Centro-Occidental "Lisandro Alvarado" (UCLA), Universidad Nacional Experimental de Guayana (UNEG), La Universidad del Zulia (LUZ), Universidad Simón Bolívar (USB), Universidad Metropolitana (UNIMET), Universidad Nacional Abierta (UNA), Universidad Nacional Experimental de los Llanos Ezequiel Zamora (UNELLEZ), Universidad Nacional Experimental Rafael María Baralt (UNERMB), Universidad Católica del Táchira (UCT).

En cuanto a los programas de postgrado en educación matemática que se ofertan en Venezuela, a los cuales pueden optar los profesores de matemática de educación media, Malizia y González (2013) reportan que hasta el año 2007, la oferta académica se distribuía según se describe en la Tabla 2.

Si bien la oferta académica para una formación en el nivel de postgrado, del profesor de matemática no es tan numerosa como en nivel de pregrado, es preciso reconocer el esfuerzo que se ha hecho para levantar, desde las universidades, una disciplina de la educación matemática que respalde estos programas de formación, ya que la investigación en muchas de las universidades, en la práctica no es una actividad prioritaria.

Tabla 2. Distribución de la oferta académica de postgrados ofrecidos para la formación de profesores de matemática. Fuente: Malizia y González (2013)

Institución (1)	Ubicación de la Sede	Programas de Postgrado	N° de programas	Tipos de programas
UVM	Trujillo	Especialización Didáctica de las Matemáticas	2	ESPECIALIZACIÓN
USB	Miranda			
UPEL	Caracas	Maestría en Educación Mención Enseñanza de la Matemática	10	MAESTRÍAS EN EL CAMPO DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA
	Barquisimeto			
	Maracay			
	Maturín			
UNERG	S.J.de los Morros			
UDO	Cumaná	Maestría en Educación, Mención Enseñanza de la Matemática Básica		
UCLA	Barquisimeto	Maestría en Enseñanza de la Matemática		
UC	Caracas (sic)	Maestría en Educación Matemática		
LUZ	Zulia	Maestría en Educación Matemática		
UNEG	Puerto Ordaz	Maestría en Cs de la Educación. Mención Enseñanza de las Mat. (2)		
UPEL	Maracay	Doctorado en Educación Matemática	1	DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LUZ	Zulia	Maestría en Matemáticas Mención Docencia	7	PROGRAMAS DE POSTGRADO EN MATEMÁTICA ASOCIADOS CON LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA
UCV	Caracas	Postgrado en Matemáticas		
UDO	Cumaná	Postgrado en Matemáticas		
ULA	Mérida	Maestría en Matemáticas		
USB	Miranda	Maestría en Matemáticas		
ULA	Mérida	Doctorado en Matemáticas		
USB	Miranda	Doctorado en Matemáticas		
UCLA	Barquisimeto	Maestría en Ciencias mención Matemática	1	MAESTRÍA EN CIENCIAS MENCIÓN MATEMÁTICA

Fuente: Malizia y González (2013). (Información sustraida del Cuadro 4: Programas Venezolanos de Postgrado Asociados con la Educación Matemática, p.172)

(1) Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL), Universidad de Carabobo (UC), Universidad Central de Venezuela (UCV), Universidad de Oriente (UDO), Universidad de Los Andes (ULA), Universidad Nacional Experimental "Rómulo Gallegos" (UNERG), Universidad Centro-Occidental "Lisandro Alvarado" (UCLA), Universidad del Valle de Momboy (UVM), Universidad Nacional Experimental de Guayana (UNEG), La Universidad del Zulia (LUZ), Universidad Simón Bolívar (USB).

(2) Este programa fue actualizado y autorizado en 2015. Ahora se denomina Maestría en Educación Matemática (Nota de las autoras)

Además de estos programas de formación de pregrado y postgrado, también se ofrecen algunos programas de actualización docente no conducentes a título, tales como:

- El Programa *Samuel Robinson va al liceo* (SRL): desde 1998 forma parte del programa Samuel Robinson, Universidad Central de Venezuela UCV. Entre sus objetivos está conformar equipos líderes de profesores en los liceos, así como propiciar espacios de reflexión y actualización docente. (Serres, 2007)
- El programa de Estudios Avanzados en Educación Matemática de la UNEG, diseñado por investigadores en

la Línea de Educación Matemática, el cual tiene una duración aproximada de un año, con un total de 336 horas presenciales, distribuidas en siete módulos o cursos. (Universidad Nacional Experimental de Guayana, 2011)

Lineamientos y Políticas para la Formación de Profesores de Matemática

En cuanto al currículo para la formación inicial del profesor de matemáticas: El primer IPN ofrecía estudios de tres años, y contemplaba: Un curso general para cubrir contenidos de filosofía, psicología, pedagogía, métodos y práctica docente, un curso general de idiomas y los cursos de la especialidad: Aritmética e introducción a la teoría de los números; Geometría elemental; Trigonometría plana y esférica; Álgebra superior, Geometría analítica; Cálculo diferencial e integral; Física elemental; Física superior y Química general. Para el año 1969 entra en funcionamiento la primera reforma del Pedagógico que, para la formación de profesores de matemáticas, se fundamenta en el modelo conductista y en la llamada *Matemática Moderna*. Esta corriente de enseñanza estaría vigente hasta la promulgación de la Ley Orgánica de Educación en 1980, cuando se elimina de los pensa de estudio del sistema de educación básica. Se vuelve a los contenidos básicos (ob.cit.).

En cuanto a lineamientos y políticas de formación docente, la resolución N°12, emitida en el año 1983, aportaba lineamientos nacionales que definían las políticas a seguir en materia de formación docente. Con ello se daban las pautas para construir «los fundamentos del perfil de los egresados, la estructura curricular para el subsistema, los títulos y certificados de competencia, los requisitos de ingreso y permanencia dentro del subsistema, la profesionalización, entre otros elementos» (León y otros, 2013; p. 94). Ésta resolución fue sustituida, en el año 1996, por la resolución N°1, en la cual se propuso un nuevo perfil del egresado en educación, y una nueva estructura curricular basada en cuatro áreas de formación: General, Pedagógica, Especializada y Prácticas profesionales.

En el año 2009 se aprueba la vigente Ley Orgánica de Educación, la cual, en su artículo 38 declara que la formación permanente del docente es «un proceso integral continuo que mediante políticas, planes, programas y proyectos, actualiza y mejora el nivel de conocimientos y desempeño de los y las responsables y los y las corresponsables en la formación de ciudadanos y ciudadanas» (Ley Orgánica de Educación, 2009). Para esta Ley quedó pendiente la reglamentación por la cual debía regirse, diversos aspectos, para el sistema de educación básica, entre ellos estaba la reglamentación para la carrera docente.

Vista la situación crítica de déficit de docentes, en el año 2013 se produjeron acciones coordinadas entre: el Ministerio del Poder Popular para la Educación (MPPE), el Ministerio del Poder Popular para la Educación Universitaria (MPPEU) y el entonces Ministerio del Poder Popular para la Ciencia, Tecnología e Innovación (MPPCTI), para trabajar por la conceptualización y diseño de una micro-misión de formación de docentes para educación media, un programa de dos años de duración dirigido a «docentes en servicio o que estén ingresando a cumplir funciones en educación media» (Ministerio del Poder Popular para la Educación Universitaria, 2013). El programa, en su primera fase, comenzaría con la asignatura de Matemática y luego con Física, Química y Biología, consideradas las áreas más críticas en cuanto a déficit de profesores especialistas» (ob.cit.). A pesar de que este programa fue puesto en marcha a finales del año 2014, expertos en materia educativa opinan que el mismo no ha cubierto hasta ahora las expectativas de solventar el déficit de profesores en educación media. Por ejemplo, el profesor Tulio Ramírez, expresa que este programa «no ha tenido la convocatoria esperada; así como también han llamado a profesionales no docentes en estos campos y a profesores jubilados, quienes se han negado a participar por los bajos beneficios socioeconómicos del ministerio» (El Impulso, 2015).

En el mes de abril de 2014 se llevó a cabo una Consulta Nacional por la Calidad Educativa con el propósito de recabar la opinión de los actores para desarrollar lineamientos y nuevas políticas públicas en materia de educación básica. El plan contempló la propuesta de diez grandes temas a consultar, de los cuales el séptimo correspondía a *La carrera profesional de las y los trabajadores académicos y de apoyo*. A partir de los resultados se realizarían 29 estudios diagnósticos a profundidad. De los cuales, tres estaban referidos al tema docente: La caracterización del personal académico y de apoyo, además de la carrera profesional en perspectiva histórica; los planes de formación del profesorado venezolano en lógica comparativa con América Latina y El Caribe; y la autopercepción donde las y los docentes expresen actitudes, disposiciones, criterios y perspectivas vinculados al ejercicio de sus funciones (Ministerio del Poder Popular para la Educación, 2014). Entre los resultados difundidos en medios oficiales se destaca que «el 53% de los consultados privilegia la formación docente como elemento clave para el mejoramiento de la calidad educativa» (Asociación Venezolana de Noticias, 2014). La misma fuente indica que «los docentes exigen la creación de criterios para el ingreso a la carrera, como formación, actualización, experiencia significativa, desempeño docente, años de servicio y participación comunitaria, entre otros» (ob.cit.).

Para junio del mismo año, y como parte de la Consulta Nacional por la Calidad Educativa se incorpora un proceso de consulta sectorial a algunas universidades que tienen programas de formación inicial de docentes, realizándose siete encuentros en siete estados del país, entre los que no estaba incluido el Estado Bolívar. Como producto de esta actividad se publicó el informe *La formación docente como pilar de una educación de calidad* (Ministerio del Poder Popular para la Educación, 2014b).

Siguiendo con las acciones del Estado en materia de formación docente, en enero de 2015, el MPPE dio a conocer el proyecto del *Reglamento de Ingreso y Ascenso a la carrera docente (RIACD),* el cual fue aprobado el 22 de julio del mismo año. Además de establecer la normativa para tales procesos (ingreso y ascenso) dicho reglamento contempla un sistema de registro permanente de docentes en ejercicio y aspirantes a la carrera docente. Es importante señalar que, a pesar de que el proyecto fue objeto de análisis y de serias críticas por parte de gremios e instituciones de la educación tales como el Colegio Nacional de Profesores (Centro de Reflexión y Planificación Educativa, 2015), y la Comisión Especial Inter-gremial para el Estudio y Análisis del Reglamento de Ingresos y Ascensos presentado por el MPPE (2015), al parecer las recomendaciones emanadas no fueron tomadas en cuenta (Villanueva, 2015). Una de las observaciones más relevantes, referida al proceso de ingreso a la carrera docente es que no se especifican cuáles son los requisitos que debe cumplir el aspirante, en cuanto a grado de instrucción y/o especialidad. El proceso consiste en una preselección de acuerdo a criterios geográficos, y luego en una capacitación que duraría entre ocho y catorce semanas. Para ascender, se establecen requisitos de antigüedad, de aprobación de cursos y de informes que hagan constar cabal cumplimiento de funciones. De acuerdo a la nota de prensa siguiente, la Micro-misión Simón Rodríguez sería el medio para llevar a cabo dicha capacitación.

> El jefe de la división de Educación, Planificación y Control de Estudio de la Zona Educativa del estado Bolívar, Carlos Marcano, fue el vocero de la actividad, en la que se explicó a los maestros que la nueva modalidad para ingresar a trabajar para el magisterio es a través del Ministerio de Educación (MPPE): los docentes interesados deben ingresar a la página web www.me.gob.ve, hacer la solicitud y el MPEE hará una "preselección". Los docentes que queden seleccionados para dar clases en las instituciones públicas recibirán capacitación a través de la llamada "Micro-misión Simón Rodríguez", en la que son instruidos en las materias Matemática, Castellano, Biología, Geo-historia e Inglés. (Faoro, 2015)

Para finalizar, en septiembre de 2015, se inicia el proceso de cambio curricular en educación media, comenzando con un proceso de consulta a los actores, miembros de la comunidad educativa, en el año escolar 2015-2016. Estos cambios curriculares plantean nuevos retos para la formación del profesor de matemáticas.

4. Conclusiones

El estudio documental ha permitido conocer acerca de los referentes contextuales e institucionales, importantes a ser considerados en el estudio del Desarrollo Profesional del Profesor de

Matemáticas de Educación Media en Venezuela, sirviendo como fundamento para el diseño del trabajo empírico de la investigación macro que realizan las autoras y que está centrada en conocer sobre esta problemática desde la perspectiva del profesor.

En el ámbito del Subsistema de Educación Básica en Venezuela, es preocupante la situación crítica que viene presentándose en la práctica de la enseñanza de las matemáticas. Son pruebas contundentes de ello, el déficit de docentes especialistas en la enseñanza de las matemáticas, alimentado por una subvaloración social que a su vez se materializa en una demanda muy baja de bachilleres que desean ingresar a la carrera de Educación, mención Matemática. También se percibe una subvaloración de fuente institucional, manifestada por la falta de atención por parte del Estado en el reconocimiento de salarios justos y de posibilidades de ascenso que garanticen una mejor calidad de vida del docente.

Una visión utilitaria sobre la formación docente se muestra en algunos profesores, quienes se animan a cursar estudios de postgrado a fin de poder disfrutar de los beneficios establecidos de ascenso y de aumento de sueldo, lo cual no es criticable, siempre y cuando no se desestime o subvalore el verdadero propósito, como lo es el fortalecimiento de sus competencias y su motivación en la tarea de enseñar.

Las emergentes políticas públicas, actualmente en pleno desarrollo, encabezadas por la implementación de un nuevo reglamento de ingreso y ascenso a la carrera docente, establecen vías expeditas de formación no universitaria, como la micro misión Simón Rodríguez, que corren el riesgo de tener una función utilitaria, más que formativa, tanto para los entes gubernamentales como para el docente. En el primer caso, permitiría un mayor control institucional, pero también ideológico y político sobre los docentes, puesto que tanto el ingreso como los ascensos dependen de cursos e informes de cumplimiento de funciones, cuyos programas, métodos y sistemas de evaluación no han sido dados a conocer.

La planificación y el diseño de los programas de profesionalización de los docentes de matemática, realizados de manera deductiva no involucran la voz del profesor, por lo que corren el riesgo de alejarse de sus necesidades y expectativas.

Referencias

Asociación Venezolana de Noticias. (2014, Noviembre 6). *53% de la comunidad educativa considera que formar al docente mejora calidad de la educación*. Obtenido de http://www.avn.info.ve/contenido/53-comunidad-educativa-considera-que-formar-al-docente-mejora-calidad-educaci%C3%B3n

Centro de Reflexión y Planificación Educativa. (2015, Agosto 14). *La profesión docente en riesgo.* Obtenido de http://www.cerpe.org.ve/noticias-lector-principal/items/378.html

Comisión Especial Inter-gremial para el estudio y análisis del Reglamento de Ingresos y Ascensos presentado por el MPPE (2015, mayo). *Informe preliminar.* Obtenido de https://sinditem.wordpress.com/2015/05/29/informe-preliminar-analisis-reglamento-ingreso-y-ascenso-por-la-comision-intergremial-mayo-2015-educacion/. Consulta: [2016, Febrero 22]

El Impulso.com (2015, Enero14). *Día del maestro en medio del conflicto laboral: Un apostolado que exige reconocimiento*. [Artículo de prensa]. Disponible: http://www.elimpulso.com/noticias/nacionales/dia-del-maestro-en-medio-del-conflicto-laboral-un-apostolado-que-exige-reconocimiento. [Consulta 2016, febrero 16]

Faoro, O. (2015, Febrero 24). Zona Educativa explica nuevo reglamento de ingresos y ascensos docentes . *Correo del Caroní*.

Galeano, M. (2004). *Estrategias de investigación social cualitativa.*Medellín-Colombia: La Carreta Editores.

Glaser, B., & Strauss, A. (1967). *The Discovery of Grounded Theory.* New York: Aldine Publishing Company.

León, N., Beyer, W., Serres, Y. e Iglesias, M. (2013). Informe sobre la formación inicial y continua del docente. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. Año 8. Especial Noviembre. Costa Rica*, 89-129.

Ley Orgánica de Educación. (2009). Gaceta Oficial de la República Bolivariana de Venezuela, 5.929 (Extraordinario). *Agosto 16, 2009*.

Llinares, S., Sánchez, V. , García, M. y Escudero, I. (2000). Didáctica de la matemática y la formación de profesores de matemática de enseñanza secundaria. En A. Martinón C. (Coor.) *Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos* (págs. 211-214). España: Universidad de La Laguna: Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas: Nivola.

Malizia, S. y González, F. (2013). Factores condicionantes del desarrollo de la Educación Matemática como campo científico en Venezuela: 1975-2007. *Unión. Revista iberoamericana de educación matemática. Número 36. Diciembre de 2013*, 165-177.

Ministerio del Poder Popular para la Educación. (2014). *Consulta Nacional por la Calidad Educativa. Folleto General de la Consulta.* Obtenido de http://consultacalidadeducativa.me.gob.ve/wp-content/uploads/2014/04/FOLLETO-GENERAL-DE-LA-CONSULTA.pdf

Ministerio del Poder Popular para la Educación. (septiembre de 2014b). *Informes de la Consulta Nacional por la Calidad Educativa. La Formación Docente como pilar de una educación de calidad.* Obtenido de http://araguaney.me.gob.ve/?page_id=278

Ministerio del Poder Popular para la Educación. (2015, Septiembre). *Proceso de Cambio Curricular en Educación Media*. Obtenido de http://www.cerpe.org.ve/tl_files/Cerpe/contenido/documentos/Actualidad%20Educativa/Formacion%20Tecnica/PROCESO%20DE%20CAMBIO%20CURRICULAR%20(PRIMERA%20VERSION)(1).pdf

Ministerio del Poder Popular para la Educación Universitaria (2013, Junio 11). *Micromisión de formación de docentes para educación media.* Prensa MPPEU. Obtenido de http://www.misionsucre.gob.ve/websitens/frontend.php/noticias/detallenoticia?id=2553. [Consulta: 2015, Febrero, 13]

Oficina de Planificación del Sector Universitario. (2016, Abril 16). *Libro de oportunidades de estudios universitarios*. Obtenido de Ministerio del Poder Popular para la Educación Universitaria, la

Ciencia y la Tecnología: http://loeu.opsu.gob.ve/vistas/index.php#2

Pineda, J. (2015, Octubre 10). Educación Media necesita cerca de 1.700 profesores para cubrir el déficit nacional. *Efecto Cocuyo*. Obtenido de http://efectococuyo.com/efecto-cocuyo/educacion-media-necesita-cerca-de-1-700-profesores-para-cubrir-el-deficit-de-docentes

Rondón, C.M. (productor y entrevistador) (2015, Marzo 15) *Evaluación de la memoria y cuenta del Ministerio de Educación.* [Grabación de audio del Foro realizado en programa de radio Cesar Miguel Rondón. Caracas]. Disponible en https://www.mixcloud.com/unionradionet/%C3%A9xitos-juan-maragall-y-leonardo-carvajal-conversaron-con-c%C3%A9sar-miguel-rond%C3%B3n/ [Consulta: 2016, Abril 24]

Serres, Y. (2007). Un estudio de la formación profesional de docentes de matemática a través de investigación-acción. *Revista de Pedagogía, Vol. 28, N°82, Escuela de Educación, UCV, mayo-agosto 2007*, 287-310.

Strauss, A., & Corbin, J. (2002). *Bases de la Investigación Cualitativa.* Colombia: Universidad de Antioquia.

Universidad Nacional Experimental de Guayana. (2011). *Programa de Estudios Avanzados en Educación Matemática.* . Obtenido de Coordinación General de Investigación y Postgrado. : http://servicios.uneg.edu.ve/postgradoweb/admision/documentos/educacion_2014/PROGRAMA_EDUC_MATEMATICA.pdf

Villanueva, M. (26 de julio de 2015). *@javiertarazona :Reglamento de la carrera docente Legaliza la ideologización y el adoctrinamiento.* Obtenido de PemexTV; Regionales, Educación: http://pemextv.com.ve/noticias/?@javiertarazona-:Reglamento-de-la-carrera-docente--Legaliza-la--ideologizaci%C3%B3n-y-el-adoctrinamiento-&n=92a08bf918f44ccd961477be30023da1

PROFESSIONAL DEVELOPMENT OF MATHEMATICS TEACHERS SECONDARY EDUCATION: CONTEXTUAL, INSTITUTIONAL AND THEORETICAL REFERENCES FOR A CASE STUDY

ABSTRACT: This paper comprehends the partial report of an ongoing research that pursues to contribute with strengthening the practices and knowledges of the mathematics professors in the medium level education in Venezuela, approaching through the perceived realities and experiences of the same actors regarding to their own formation process. It is a documentary study, which analyses profiling occurrences of the problematic and revises the public and institutional policies applied to this topic. All this aiming to configure a contextual and institutional fundament in the domain of the formation of the mathematics professor of the medium education level. A systematic review of documents related to the topic. A content analysis of the documents allowed familiarizing and reflecting on what is going on with the formation of the mathematics professor in the medium level education in Venezuela, which, putting aside some particularities is similar to the situation of other professors of the basic education subsystem. As highlighted findings, it shows as follows: the existence of a mathematics professor's deficit promoted by a social and institutional undervalue of the teaching profession, evidenced by a scarce demand for students who want to enter the career of Mathematics Education. In addition, emerging public policies through a new system of entry and promotion for the teaching profession sets expeditious ways of non-university formation, at risk of having a more utilitarian function rather than a formative one.

Keywords: Professional Development math teacher, teacher formation in Venezuela, math teacher medium level education.

ZORAIDA PÉREZ-SÁNCHEZ

Universidad Nacional Experimental de Guayana, Venezuela

zoraidaperezs@gmail.com

SANDRA CASTILLO VALLEJO

Universidad Nacional Experimental de Guayana, Venezuela

sandralilianacastillo@gmail.com

DISEÑO DE TAREAS Y DESARROLLO DE UNA MIRADA PROFESIONAL SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS DE ESTUDIANTES PARA MAESTRO

PERE IVARS, ÀNGELA BUFORN Y SALVADOR LLINARES

RESUMEN: En primer lugar, describimos cómo usar la conceptualización de la competencia docente "mirar profesionalmente" para diseñar tareas en los programas de formación de maestros en el ámbito de la educación matemática. En segundo lugar, caracterizamos el desarrollo de esta competencia a través de la manera en la que los estudiantes para maestro dotan de sentido a aspectos de la práctica de enseñar matemáticas mediante el uso del conocimiento teórico. Esta aproximación a la formación de maestros en el ámbito de la didáctica de la matemática y a la caracterización de lo que se entiende por aprendizaje del estudiante para maestro intenta superar la dicotomía teoría-practica, y la discusión sobre una formación de maestros basada en la escuela o una formación basada en la universidad.

Palabras clave: Aprendizaje del estudiante para maestro; Mirada profesional; Educación Matemática; Tareas.

1. INTRODUCCIÓN

Durante los últimos años los formadores de maestros en el ámbito de la Educación Matemática han estado enfatizando la necesidad de vincular el aprendizaje de los estudiantes para maestro del conocimiento teórico de Didáctica de la Matemática con la práctica. Esta perspectiva se apoya en la valoración del conocimiento teórico de los procesos de enseñanza-aprendizaje, reunidos por las investigaciones en Didáctica de la Matemática, al mismo tiempo que subraya la necesidad de que los estudiantes para maestro consideren pertinente dicho conocimiento para gestionar las situaciones de enseñanza de las matemáticas.

Ivars, P., Buforn À. y Llinares, S. (2017). Diseño de tareas y desarrollo de una mirada profesional sobre las situaciones de enseñanza de las matemáticas de estudiantes para maestro. En: Salcedo, A. (Comp.). *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del siglo XXI* (pp. 65 – 87). Caracas: Centro de Investigaciones Educativas, Escuela de Educación. Universidad Central de Venezuela.

Un aspecto particular de esta perspectiva general ha sido la generación de un foco específico de indagación sobre la manera en la que los maestros dan sentido a las situaciones de enseñanza, como un aspecto de la competencia docente del profesor denominada "mirar profesionalmente" (Jacobs, Lamb y Phillip, 2010; Mason, 2002; Sherin, Jacobs y Philipp, 2011). Es decir, la caracterización de la manera en la que los maestros dotan de sentido a aspectos de la práctica de enseñar matemáticas (Llinares, 2009; 2012-a). En particular, el foco se sitúa en cómo el profesor identifica aspectos relevantes en una situación de enseñanza según el objetivo pretendido y en cómo infiere algún tipo de información sobre lo que está observando para justificar lo que puede realizar a continuación. Es decir, cómo el profesor es consciente de lo que es esencial en una situación de enseñanza particular para generar posibles cursos de acción. Esta competencia docente es, en sí misma, una manifestación del uso del conocimiento teórico de didáctica de la matemática que es pertinente para entender la situación de enseñanza en la que se encuentra el profesor. El conocimiento teórico está formado aquí por proposiciones derivadas de los resultados de investigaciones empíricas sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, en un contexto de formación de maestros, los resultados de investigación deben ser convertidos en el conocimiento teórico considerado como contenido del programa de formación.

Desde esta perspectiva, los formadores de maestros nos enfrentamos a un doble desafío para dar cuenta del objetivo que se genera: desarrollar la competencia docente "mirar profesionalmente" las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la educación primaria (Llinares, 2014). Por una parte, pensar en el tipo de tareas-actividades y entornos de aprendizaje que debemos presentar a los estudiantes para maestro (Ivars, Fernández, y Llinares, 2016-c), y por otra, explicitar cómo podemos dar cuenta del desarrollo de dicha competencia (Ivars, Fernández y Llinares, 2016-b; Llinares, 2013-a; Llinares y Valls, 2009). Aquí, los programas de formación deben conseguir que los estudiantes para maestro lleguen a ser capaces de discernir aspectos relevantes de la situación de enseñanza de las matemáticas que no eran capaces de discernir antes de entrar en el programa de formación. Este doble desafío viene generado al constatar la dificultad que tienen los estudiantes para maestro para "usar" el conocimiento teórico proporcionado en el programa de formación en la práctica de enseñanza de las matemáticas.

En este capítulo, describimos algunas de las aproximaciones que estamos generando para dar respuesta a este doble desafío, como una forma de apoyar el desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" (Llinares, 2013-b; Llinares, 2016). Para ello, las tareas y los entornos de aprendizaje que se puedan generar en el programa se apoyan en el desarrollo del "uso del conocimiento" en un intento de conseguir que los estudiantes para maestro lleguen a considerar pertinente la información teórica en las situaciones de enseñanza de las matemáticas. La premisa que apoya estas aproximaciones es que las situaciones de enseñanza de las matemáticas en la educación primaria son demasiado complejas como para asumir la existencia de "recetas mágicas" que puedan ser usadas en todas las situaciones. Por ello, las aproximaciones generadas dirigidas al desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" se apoyan en fortalecer la relación entre la capacidad del estudiante para maestro de discernir los detalles que pueden ser juzgados relevantes para el aprendizaje de las matemáticas, e inferir características de la comprensión matemática de esos estudiantes para poder derivar cursos de acción en ese contexto específico (Llinares 2012-b). Esta hipótesis en la organización de los programas de formación de maestros implica una traslación hacia una formación de maestros apoyada en la relación entre los registros de la práctica y el conocimiento teórico, que implique el desarrollo de un conocimiento práctico entendido como la capacidad de uso de la teoría en situaciones prácticas.

2. RELACIÓN TEORÍA Y PRÁCTICA EN EL DISEÑO DE TAREAS PARA PROMOVER UNA "MIRADA PROFESIONAL"

El diseño de tareas para los programas de formación dirigidas a promover el desarrollo de una "mirada profesional" implica considerar la manera de establecer relaciones entre el conocimiento teórico y la práctica. Por tanto, las tareas y los entornos de aprendizaje en los que se articulan deben permitir crear los contextos para facilitar que los estudiantes para maestro aprendan a discernir los aspectos relevantes en la enseñanza de las matemáticas. Es decir, favorecer el desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" como una manifestación de la transformación del conocimiento teórico y las experiencias previas de los estudiantes para maestro (como por ejemplo sus creencias) en conocimiento práctico personal. La idea de "uso del conocimiento" (Eraut, 1994) es la que organiza el diseño de tareas en el programa de formación. Este diseño de tareas nos permite reflexionar sobre cómo el conocimiento teórico, junto a la experiencia previa de los estudiantes para maestro y la experiencia en la resolución de las tareas propuestas en el programa de formación, puede llegar a transformarse en conocimiento práctico personal (conocimiento profesional) (Llinares, 2012-b).

Las tareas para promover la competencia docente "mirar profesionalmente" tienen como objetivo proporcionar oportunidades para que los estudiantes para maestro desarrollen la capacidad de identificar en los registros de la práctica, aquellos aspectos que pueden ser considerados clave para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Llegar a ser, progresivamente, más conscientes de estas características está vinculado a la manera en la que el conocimiento teórico es integrado en las "maneras de mirar" de los estudiantes para maestro. La resolución de las tareas diseñadas a tal fin por parte de los estudiantes para maestro debe considerar el cauce a través del cual el conocimiento teórico pueda llegar a ser usado como "instrumento conceptual" (Llinares, 2009).

El conocimiento teórico debe ayudar a discernir los detalles relevantes en el registro de la práctica y proporcionar apoyos para dotar de sentido a la situación. Este proceso debe permitir que los estudiantes para maestro lleguen a ser cada vez más conscientes de los aspectos claves en una situación de enseñanza. Estos aspectos claves en la enseñanza de las matemáticas que se convierten en puntos focales para la atención de los estudiantes para maestro pueden ser variados. Por ejemplo,

- sobre la gestión de una discusión sobre la resolución de un problema en gran grupo,
- sobre la planificación de una lección, y la anticipación de posibles respuestas de los estudiantes, y
- sobre las estrategias empleadas por los estudiantes como evidencia de las características de su pensamiento matemático

Cuando el punto focal es el pensamiento matemático de los estudiantes, las tareas pueden adoptar forma de casos (Stein, Smith, Henningsen, y Silver, 2000). Los casos, junto con las guías para que el formador facilite la discusión, han sido usados en formación de maestros desde hace algún tiempo. Los casos pueden ser entendidos como descripciones de una situación de aula (un retrato de la práctica) cuyo estudio permite discernir aspectos que pueden ser relevantes para explicar la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo, una situación de enseñanza de las matemáticas sobre un tópico particular en la que se han recogido diferentes respuestas de estudiantes a las actividades propuestas por la maestra, permite centrar la atención sobre

- qué significa "comprender ese tópico matemático",
- qué evidencias podemos identificar en las respuestas de los estudiantes que nos permitan reconocer diferentes grados de comprensión,
- qué puede llegar a hacer el maestro para enseñar este tópico y
- qué debe hacer el estudiante para llegar a aprenderlo.

Un ejemplo de este tipo de tareas se incluye a continuación. En esta tarea, se describe una situación en la que una maestra de 6º curso de educación primaria (niños de 11 a 12 años) define como un objetivo de aprendizaje dotar de sentido al algoritmo para la suma de fracciones a través de la resolución de problemas. La maestra utiliza un contexto de resolución de problemas en el que proporciona como recurso-guía una cuadrícula para que los niños puedan representar las diferentes cantidades. Los números usados 2/4 y 1/3 tienen que ver con la forma que adopta el papel cuadriculado como recurso-guía (se representa la unidad formada por 12 cuadraditos).

Cuadro 1. Tarea Práctica: Introducción de la Suma de Fracciones

Clara es la tutora de una clase de 6º curso de Educación Primaria en un centro público de un barrio en una ciudad dormitorio cercana a la capital. Clara intenta coordinarse con Júlia, que es la maestra encargada del segundo ciclo, ya que ella recoge al alumnado que Júlia deja y está intentando aplicar la misma metodología que Júlia. Al igual que Júlia ha detectado que el contenido de las fracciones es uno de los más difíciles para sus alumnos. En sus clases predomina el trabajo grupal e intenta potenciar el desarrollo de las ideas de sus alumnos mediante las discusiones y el intercambio de las resoluciones de las tareas que propone. Este año tutoriza un grupo de 25 estudiantes y durante las próximas semanas tiene como objetivo de aprendizaje desarrollar el significado de las operaciones con fracciones. En particular de la suma y la resta de fracciones.

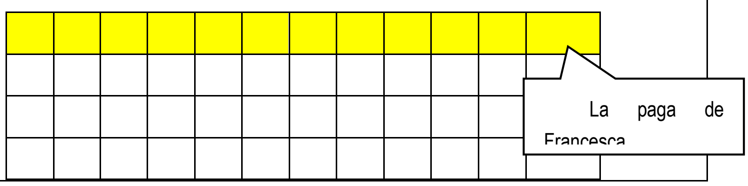
Para dotar de significado a las operaciones eligió una situación presentando a sus alumnos una cuadrícula para ayudarles a representar las fracciones. En la primera sesión de clase la maestra presenta la siguiente actividad para que sea resuelta por parejas.

Ficha 1.- Las Fracciones

Nombres________________________________

Problema para resolver y justificar por parejas

Francesca ha recibido su paga semanal y ha gastado 2/4 de la paga para comprar a su hermana un regalo de cumpleaños y 1/3 de la paga para comprar un cómic. ¿Qué fracción de su paga ha gastado en total?



El problema

Clara proyecta sobre la Pizarra Digital el problema y lo lee detenidamente en voz alta y plantea preguntas para intentar que sus alumnos comprendan lo que el problema pide. Una vez considera que sus alumnos comprenden lo que pide el problema, les recuerda que deben justificar su respuesta para poder convencer a sus compañeros de la forma en la que han resuelto el problema en la puesta en común. Mientras los alumnos están intentando resolver los problemas, Clara va pasando por las mesas observando los procedimientos usados y pensando en cómo planteará la fase de discusión colectiva.

Después de un cierto tiempo pidió a Olivia y Roque que presentaran su resolución:

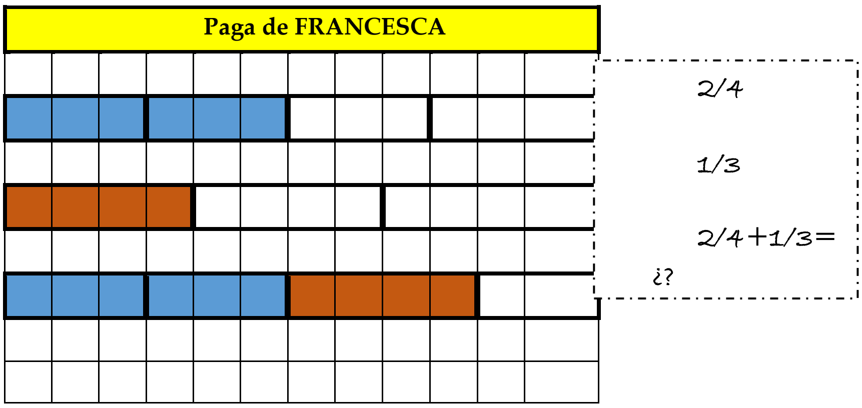
Clara: Bien, Olivia y Roque… ¿Cuál es vuestra respuesta?

Olivia: Bueno… Creemos que ha gastado como dos tercios y medio…

Clara: ¿Podéis explicarnos cómo lo sabéis?

Roque: Sí, claro… hemos hecho así… Si esto es la paga de Francesca (señalando la fila de cuadraditos sombreada) Pues la dividimos en 4 partes y sombreamos 2, que es lo que se ha gastado en el regalo de su hermana. Ahora lo que hemos hecho es…

Olivia: Bueno, ahora dibujamos lo que se ha gastado en el cómic, es decir 1/3 de su paga (mientras dibuja la tercera fila, la divide en 3 partes iguales y sombrea 1). Entonces, si ponemos juntas lo que se ha gastado en las dos cosas, vemos que ocupa lo mismo que 2 tercios y medio, ¿ves? (señalando la fila anterior)

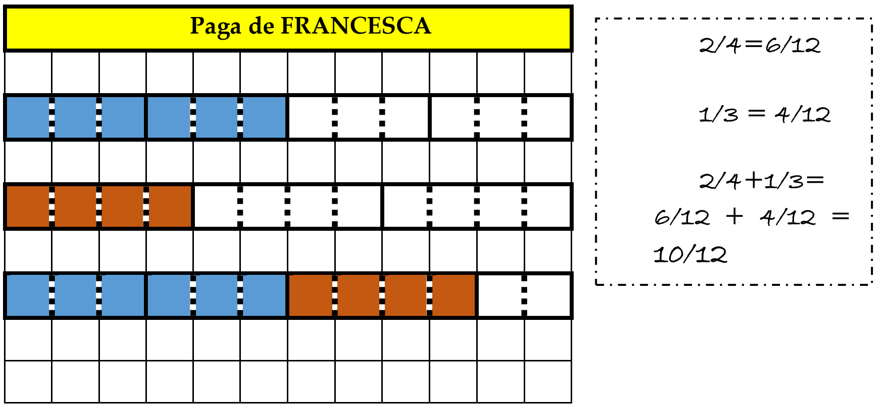


Clara preguntó a los demás - ¿estáis todos de acuerdo?-

Varias parejas levantaron la mano y ella solicitó a Toni y Salva que salieran a explicar su solución.

Toni: Bueno…nosotros lo hemos hecho muy parecido a ellos dos… Lo que pasa es que… claro, para sumar las dos partes…. Bueno…. Debemos encontrar una misma cantidad que nos diga que miden las dos cantidades de dinero gastado. Es decir, para juntar dos cantidades deben estar medidas con la misma unidad. Si quiere sumar 2/4 que es lo que se gastó en el regalo de su hermana (representas 2/4 *en la segunda línea) y 1/3 que se gastó en el cómic (representa 1/3 en la tercera línea) pues eso, que para sumar, las partes tienen que ser iguales…*

Salva: Sí eso, así que hacemos eso… (divide las dos barras en doceavos) y ahora ya las podemos sumar … porque 2/4 son 6/12 y 1/3 es lo mismo que 4/12 (añade ambas fracciones sombradas en la cuarta fila) es decir… ¿ves? Son... seis por aquí (representa 6/12) y cuatro más por aquí (representa 4/12) en total, ¡10/12!



Clara: Muy bien, ¿Alguien lo ha hecho de alguna manera diferente?

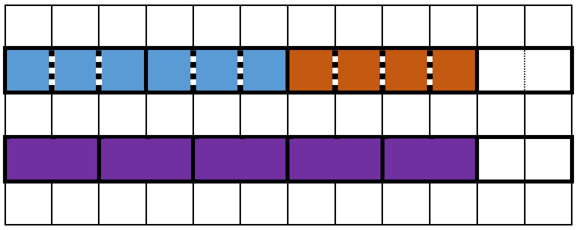
Pepa: Bueno… Maite y yo también hemos obtenido lo mismo pero lo que hemos hecho ha sido sumar directamente 2/4 + 1/3 = 6/12 + 4/12 que nos da 10/12… o lo que es lo mismo 5/6.

Clara: ¿Y cómo habéis llegado a esa respuesta?

Maite: Pues bueno,… porque sabemos que hay que sumar las dos fracciones y como no tienen el mismo denominador, pues no se pueden sumar. Para sumarlas hallamos un denominador común es decir 12. Eso es lo que ha hecho Salva cuando ha dividido las barras en doceavos, ¿ves? (mientras que señala la representación gráfica hecha por la anterior pareja). Bueno pues entonces es lo que tenemos 2/4 son 6/12 y 1/3 son 4/12. Ahora ya podemos sumarlo y nos da 10/12.

Clara: ¿Y por qué decís que son 5/6?

Pepa: Pues porque es lo mismo. Son equivalentes… si divides el numerador y denominador de 10/12 entre 2 te da eso, 5/6. También se puede ver en el dibujo de ellos… (Partiendo de la última representación de sus anteriores compañeros) Ellos tienen aquí 10/12 y eso es lo mismo que esto (representa 5/6) que son 5/6.



Las cuestiones

Cuestión 1. Identifica las **características de la comprensión** de los niños**,** justificándolas mediante fragmentos de sus respuestas, e indica los **elementos matemáticos** que están implícitos.

Cuestión 2. Según las características de la comprensión identificadas en la cuestión 1, ¿en qué **nivel de comprensión** situarías a cada niño? Justifica tu respuesta.

Cuestión 3. Suponiendo que tú eres uno/a de los maestros/as de estos niños, define **un objetivo de aprendizaje y** propón **una tarea** para cada niño que les permita seguir avanzando en la comprensión de las fracciones.

El caso describe la organización de la enseñanza (presentación del problema, trabajo en grupo, puesta en común posterior en la que se valora las diferentes aportaciones), y presenta diferentes respuestas generadas por los estudiantes. Estas respuestas muestran diferentes características del pensamiento de los estudiantes sobre la suma de fracciones reflejando diferentes aspectos del avance conceptual de los estudiantes. Lo importante es que los estudiantes para maestro están ante respuestas específicas y no descripciones generales de lo que los niños pueden o no pueden llegar a hacer. Finalmente, para organizar el proceso de análisis de los estudiantes para maestro, se presentan tres cuestiones dirigidas a:

- identificar los elementos relevantes en las respuestas de los estudiantes al problema planteado y reconocer lo que puede ser considerado un avance conceptual en el aprendizaje de la suma de fracciones, y
- proponer un determinado curso de acción a partir de la inferencia realizada sobre el pensamiento matemático de los estudiantes.

Estas cuestiones pretenden centrar la atención de los estudiantes para maestro en lo que los niños están realmente haciendo, permitiéndoles comparar las respuestas de cada pareja de estudiantes como una manera de reconocer diferencias conceptuales entre ellas, y crear oportunidades para decidir qué es lo que se podría hacer en la próxima lección. Este último paso es relevante ya que permite hacer explícita la conexión entre lo que el maestro puede hacer y lo que los niños pueden hacer. Esta conexión está vinculada a las decisiones que el estudiante para maestro toma para ayudar a los niños a avanzar conceptualmente en su comprensión. Explicitar la conexión entre las decisiones del maestro y las características del aprendizaje de los niños permite vincular la enseñanza y el aprendizaje con el conocimiento sobre la situación generado por el estudiante para maestro. En este caso, las cuestiones-guía que forman parte de la tarea práctica para el estudiante para maestro, ayudan a realizar un análisis más particularizado que debería apoyar el desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente".

En la realización de estas actividades, desempeña un papel relevante la información teórica proporcionada que permite articular la manera en la que los estudiantes para maestro miran el registro de la práctica. La teoría debe ayudar al estudiante para maestro a fijarse en determinados aspectos de la práctica, y a dotarles de un determinado sentido a través de un proceso de interpretación. Además, en estas situaciones la información teórica puede ayudar al estudiante para maestro a ser más consciente de los aspectos particulares del registro de la práctica. En el caso anterior, la información teórica tiene que ver con las características del proceso de construcción del significado de los procedimientos de cálculo con las fracciones. Este significado se desarrolla a través de tres niveles de comprensión que constituyen un avance conceptual en la progresión de la comprensión de la suma de fracciones.

En el primer nivel, los niños realizan sumas (restas) de fracciones con distinto denominador si se les proporcionan representaciones o material físico con algún tipo de guía que les permita elegir adecuadamente la unidad (todo). Elegir una unidad común para representar las dos cantidades es un primer paso en la comprensión de la suma de fracciones, por lo que constituye una evidencia de la progresión conceptual. En el segundo nivel, la comprensión se consigue al realizar repetidamente las actividades con materiales indicados y reconocer que hay que usar una misma unidad de medida para cada fracción (la idea de fracción unitaria como una unidad de medida, a/b = a x 1/b). En este nivel, el avance conceptual se evidencia al tener que "medir" las dos fracciones con una unidad común (la fracción unitaria 1/12), lo que permite dotar de sentido al proceso de nombrar las dos fracciones con el mismo denominador. Finalmente en el nivel tres, los estudiantes comprenden por qué funciona el algoritmo de la suma de fracciones, por lo que pueden usar dibujos o material para explicar su funcionamiento. En este nivel, por ejemplo, los niños pueden imaginarse cuántos cuadraditos necesita tener la unidad para operar (antes necesitaban tener el todo dividido en esas partes (común denominador)), por lo que entienden que para sumar 1/3 + 1/5, el número de cuadros en la unidad puede ser 15 y que cualquier par de fracciones con denominador común a las dos fracciones originales permite solucionar el problema (Cuadro 2).

Cuadro 2. Niveles teóricos para describir los avances conceptuales en el aprendizaje de la suma de fracciones

<table>
<tr><td>Pueden operar y resolver problemas aritméticos simples con ayuda de guías/apoyo (primero con fracciones del mismo denominador, y luego con fracciones de distinto denominador pero sencillas).
Para la suma y la resta, reconocen que hay que usar un mismo todo unidad para representar las dos fracciones, como evidencia de un avance conceptual</td><td rowspan="3">Construcción del significado de los procedimientos de cálculo con las fracciones</td></tr>
<tr><td>Pueden operar y resolver problemas aritméticos simbólicamente, identificando patrones. Justifican gráficamente lo que realizan pero solo en situaciones sencillas (teniendo en cuenta los números usados).
Para la suma y la resta, hacen uso de la idea de fracción unitaria común para "medir" las fracciones dadas, como evidencia de un avance conceptual</td></tr>
<tr><td>Comprenden por qué funcionan los algoritmos de cálculo con las fracciones, y pueden usar dibujos para explicar su funcionamiento</td></tr>
</table>

En el proceso de interpretación de la situación práctica, entendida como una oportunidad de aprendizaje para los estudiantes para maestro, el conocimiento teórico puede o no llegar a tener sentido para ellos, generándose diferentes niveles de desarrollo del uso del conocimiento. En este proceso, el desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" (desde la perspectiva del aprendizaje del estudiante para maestro) se evidencia en la medida en que los elementos de la teoría empiezan a determinar lo que los estudiantes para maestro son capaces del discernir de la práctica, haciéndoles más conscientes de los aspectos que se pueden considerar relevantes para el aprendizaje de las matemáticas en esta situación.

Desde este punto de vista, el proceso por el cual se desarrolla la competencia docente "mirar profesionalmente" está vinculado a la realización del tipo de tareas descritas anteriormente de manera sucesiva y modificando el tópico sobre el que se "mira" (sucesión de actividades prácticas). Es decir, los estudiantes para maestro deberían tener la posibilidad de resolver una variedad amplia de este tipo de tareas en las que los registros de la práctica y el conocimiento teórico se interrelacionan (Figura 1). En este sentido, el análisis guiado sucesivo de registros de la práctica en interacción con el conocimiento teórico, puede empezar a influir en la manera en la que los estudiantes para maestro "miran" la enseñanza de las matemáticas, discerniendo los aspectos relevantes al hacerles más conscientes de su existencia.

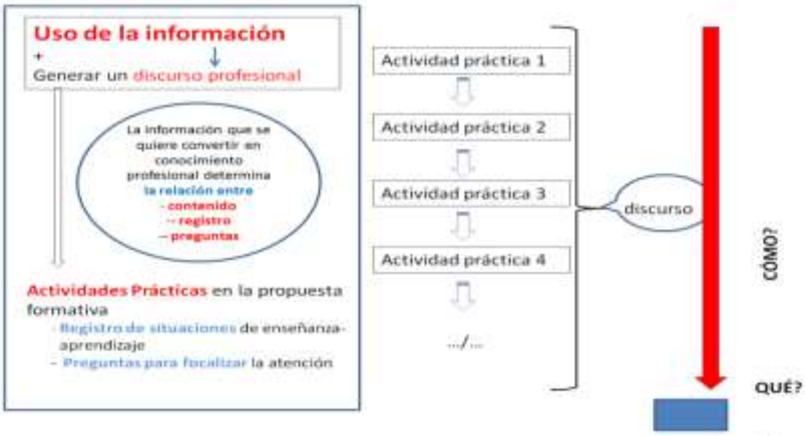


Figura 1. Interacción del análisis de la práctica y conocimiento teórico en el desarrollo de un discurso profesional vinculado a la competencia docente "mirar profesionalmente"

3. REFERENCIAS PARA ENTENDER EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA "MIRAR PROFESIONALMENTE"

La clave para caracterizar el desarrollo en los estudiantes para maestro de la competencia docente "mirar profesionalmente", radica en la manera en la que los aspectos particulares de la situación interaccionan con el conocimiento teórico. Como consecuencia, el grado de desarrollo de esta competencia está relacionado con la manera en la que los estudiantes para maestro generan un discurso en el que las evidencias de la situación práctica se relacionan con los elementos teóricos cuando se está intentando comprender el registro de la práctica. Esta forma de entender el desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se apoya en la idea de que solo con la experiencia no es suficiente para su desarrollo. Para el desarrollo de esta competencia es necesaria la integración del conocimiento teórico en el análisis de las situaciones prácticas. Es decir, los programas de formación de maestros deberían presentar la teoría como una manera de comprender mejor los registros de la práctica, intentando que los estudiantes para maestros lleguen a ser conscientes de los aspectos relevantes de las situaciones de enseñanza-aprendizaje específicas.

Por ello, las tareas que debemos proponer en el programa de formación deben ayudar a que los estudiantes para maestros perciban estos aspectos relevantes en las situaciones prácticas. Es por esto que en el diseño de las tareas se integra, la descripción de un contexto real, respuestas de estudiantes conceptualmente diferentes, y las cuestiones para guiar el reconocimiento de los aspectos claves (Cuadro 1).

En determinados momentos, el conocimiento teórico puede ayudar a los estudiantes para maestro a ser más conscientes de la existencia de ciertos aspectos relevantes en una situación de enseñanza o en las respuestas de los estudiantes (influencia desde la teoría a la situación práctica). En estos casos, el conocimiento teórico puede guiar la mirada del estudiante para maestro ayudándole a discernir aspectos relevantes en los registros de la práctica. Consecuentemente, la teoría permite dar un cierto sentido a los registros de la práctica. Sin embargo, también el registro de la práctica puede influir en el reconocimiento de las características teóricas que definen un avance conceptual. Esta influencia, desde el registro de la práctica a la teoría, se evidencia cuando los estudiantes para maestro resuelven tareas como la descrita anteriormente en la que hay respuestas de estudiantes conceptualmente diferentes. Esta diferencia, y su propia experiencia práctica, a veces les pueden hacer centrarse en esos aspectos que les ayudan a considerar pertinente el conocimiento teórico. Desde este punto de vista, el registro de la práctica es el que puede ayudar a dar sentido al conocimiento teórico.

Este proceso paulatino de desarrollo de la capacidad de reconocer, discernir y dotar de sentido a aspectos relevantes de la enseñanza en interacción con la teoría es lo que denominamos desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente". El conocimiento teórico procedente de los resultados de la investigación en didáctica de la matemática que proporcionamos a los estudiantes para maestro en forma de textos y documentos, debe ser integrado con el conocimiento sobre los contextos específicos para generar las referencias que los estudiantes para maestro usarán para aprender a discernir lo que puede ser relevante en cada situación. La cuestión que se genera es cómo podemos los formadores de maestros reconocer y dar cuente del desarrollo de esta competencia docente que se apoya en el uso de un conocimiento que es la integración del conocimiento teórico con el conocimiento práctico sobre las situaciones específicas.

Por ejemplo, un estudiante para maestro hipotético puede responder a la cuestión 1 de la tarea práctica anterior escribiendo lo siguiente (Cuadro 3):

Cuadro 3. Respuesta hipotética de un estudiante para maestro a la cuestión 1 de la situación práctica descrita en el cuadro 1.

Cuestión 1. Identifica las **características de la comprensión** de los niños**,** justificándolas mediante fragmentos de sus respuestas, e indica los **elementos matemáticos** que están implícitos.

Olivia y Roque representan las dos fracciones usando una misma representación para el todo. Dividen la unidad en 4 partes y sombrean dos, y con otra representación del todo, la dividen en tres partes y sombrean una. La suma de las dos fracciones la ven juntando las dos cantidades. Los niños representan adecuadamente las dos fracciones y reconocen que deben usar una misma representación del todo. Luego intentan nombrar la fracción resultante, usando intuitivamente las representaciones gráficas para sumar las fracciones con diferente denominador, pero parece que no comprenden la necesidad de usar una misma unidad de medida para nombrar las dos fracciones dadas para encontrar la fracción suma.

Salva y Toni usan de manera pertinente la ayuda del papel cuadriculado como una guía y renombrando las fracciones considerando la fracción 1/12 (un cuadradito) como la misma unidad para nombrar las dos fracciones. Esto les permite renombrar las dos fracciones usando una unidad de medida común (1/12 que es un cuadradito) y nombrar adecuadamente la fracción suma apoyándose en el papel cuadriculado proporcionado por la maestra. Esta pareja usa el papel cuadriculado proporcionado por la maestra como guía para identificar una fracción unitaria para renombrar las fracciones dadas (que escriben como un denominador común de ambas fracciones) apoyado en la idea de fracción unitaria 1/12 (un cuadradito). Esto les permite nombrar las dos fracciones iniciales (2/4, 1/3) usando como referente la misma fracción unitaria.

La última pareja, Pepa y Maite, resuelve el problema sin apoyarse en la representación gráfica. Calculan fracciones equivalentes para 2/4 y 1/3 usando como denominador común 12, y suman las dos fracciones para obtener 10/12. Posteriormente, simplifican la fracción 10/12, para obtener la fracción irreducible

(5/6). Lo que es importante en la respuesta de Pepa y Clara es que son capaces de justificar lo que han hecho a nivel de símbolos usando los gráficos (se apoyan en representaciones gráficas para justificarlo).

En el discurso generado por el estudiante para maestro se identifican las diferencias entre las tres respuestas reconociendo lo que puede ser considerado un avance conceptual de una respuesta a otra en relación a la comprensión de la suma de fracciones. Este estudiante para maestro, reconoce, en la primera respuesta, la importancia de considerar una misma unidad para representar las dos fracciones que deben ser sumadas. También reconoce que tener en cuenta una unidad común para las dos fracciones que deben ser sumadas no es suficiente, sino que es necesario considerar una fracción unitaria común (1/12) que permita juntar (sumar) la misma cantidad (fracción unitaria) lo que permite representar la fracción suma [para sumar es necesario tener las dos cantidades (fracciones) medidas por la misma unidad (la fracción unitaria 1/b como unidad de medida)]. Es decir, usar una fracción unitaria común para juntar las cantidades dadas por las fracciones, se considera un avance conceptual. La comprensión de este elemento matemático que constituye un avance conceptual en el aprendizaje de la suma de fracciones es el significado de lo que se conoce en el dominio de la aritmética de las fracciones como buscar un denominador común de las dos fracciones para sumarlas. Este avance es reconocido al describir adecuadamente la respuesta de la segunda pareja que identifica la fracción que representa la suma considerando una fracción unitaria común (1/12). Finalmente, reconoce que los niños de la tercera pareja usan el significado de la idea de fracción unitaria y de la necesidad de considerar una unidad común para justificar las manipulaciones realizadas a nivel de símbolos. En este sentido, este estudiante para maestro reconoce que explicar las razones de por qué funciona el algoritmo de la suma de fracciones representa un nivel de comprensión alto en el aprendizaje de la suma de fracciones.

Este estudiante para maestro, en la narrativa escrita para dar cuenta de las respuestas de las tres parejas de estudiantes, hace uso de los elementos relevantes que le permiten discernir las diferencias conceptuales en las respuestas de los niños (uso de un mismo todo, necesidad de usar una fracción unitaria común para representar las dos fracciones, y justificar lo realizado a nivel de símbolos usando los significados de las fracciones como parte-todo en un contexto de medida). El discurso generado por este estudiante para maestro en la narrativa proporcionada, relaciona de manera significativa las ideas teóricas con los registros de la práctica, al mismo tiempo que integra un lenguaje matemático con un lenguaje sobre la comprensión de las matemáticas. Este discurso evidencia que este estudiante para maestro identifica los elementos relevantes de la situación (lo matemático y lo relativo a la enseñanza de las matemáticas reflejado en la descripción de las características de la comprensión), y es capaz de dotarlos de sentido desde el conocimiento teórico proporcionado por el programa de formación. La relación establecida por el estudiante para maestro entre los diferentes conceptos teóricos, relevantes para reconocer los avances conceptuales de los niños, a partir de la manera en la que estos resolvían de manera específica el problema propuesto por la maestra, es una evidencia del desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" las situaciones de enseñanza aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, podemos considerar que el estudiante para maestro hace un uso adecuado de los elementos teóricos.

Sin embargo, no siempre los estudiantes para maestro son capaces de generar un discurso tan articulado entre los elementos teóricos y los registros de la práctica, usando de manera adecuada los elementos procedentes de la teoría. Para dar cuenta de cómo los estudiantes para maestro dotan de sentido a los elementos teóricos usándolos de manera significativa al hablar sobre la práctica podemos caracterizar diferentes niveles de logro (Cuadro 4). La caracterización de estos diferentes niveles de logro intenta dar cuenta de las diferencias en el discurso sobre la práctica de los estudiantes para maestro considerando:

- el papel desempeñado por el conocimiento de matemáticas en el análisis de la práctica (Buforn y Fernández, 2014; Buforn, Fernández y Llinares, 2015),

- cómo se establecen las relaciones entre las evidencias y los elementos de la teoría (Ivars et al., 2016-b, 2016-c; Llinares y Valls, 2009; 2010),
- el nivel de generalidad-especificidad del discurso (Ivars, Buforn, Llinares, 2016), o
- la integración del uso de los elementos matemáticos y los relativos a la comprensión (Callejo y Zapatera, 2016; Ivars, Fernández y Llinares, 2016-a,).

Cuadro 4. Una caracterización de niveles de desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente"(Llinares y Valls, 2009).

Niveles	Caracterización
N1 Descriptivo	El estudiante describe de manera "natural" lo que ve, sin utilizar los términos que dan cuenta de las ideas teóricas que son relevante para analizar la situación
N2 Retórico	Se usan los términos que describen las ideas teóricas para construir un discurso sin establecer relaciones entre estas ideas o con las evidencias de la situación. Falta de cohesión en el discurso
N3 Identificación e inicio de uso instrumental de la información	Identifica uno o varios aspectos relevantes de la situación y los interpreta utilizando ideas teóricas
N4 Teorizar - conceptualizar. Integración relacional	La información se transforma en herramienta conceptual que se relaciona e integra para analizar la situación práctica

Estas descripciones pretenden dar cuenta de los niveles de logro en el desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente” e intentan reflejar diferentes características del discurso sobre la práctica usando de manera más o menos significativa un vocabulario específico procedente de la teoría.

Un discurso articulado que evidencia un desarrollo alto de la mirada profesional permite a los estudiantes para maestro hablar sobre las situaciones prácticas como expertos, ayudándoles no solo a discernir los detalles relevantes, sino a comprender lo que es observado en el registro de la práctica para poder tomar decisiones de acción (qué hacer a continuación en la enseñanza). Los cuatro niveles considerados para caracterizar el discurso escrito de los estudiantes para maestro son útiles para describir los niveles de logro de la competencia docente "mirar profesionalmente" en un momento dado en el programa de formación, pero también para describir trayectorias de desarrollo de dicha competencia a lo largo de un periodo de tiempo de formación.

Los diferentes niveles de logro considerados permiten dar cuenta de diferentes características en el discurso de los estudiantes para maestro. Desde un discurso que solo describe lo que ha sucedido sin reconocer los elementos relevantes de la situación, pasando por el discurso que usa de manera no significativa los términos teóricos y genera un discurso vacío, hasta los primeros indicios de un uso adecuado de los términos teóricos para relacionar los registros de la práctica con la teoría de manera significativa, lo que permite empezar a generar interpretaciones aunque puede, que solo de algunas aspectos de la práctica. Finalmente, el último nivel considerado permite dar cuenta de la manera en la que los elementos de la teoría se instrumentalizan en el sentido de ayudar a reconocer lo relevante en la situación y a dotarlo de sentido.

El nivel último que denominamos de "integración relacional" entre teoría y práctica, permite dar cuenta de un nivel de desarrollo de la "mirada profesional" que subraya el uso del conocimiento del elemento teórico por parte del estudiante para maestro enraizado en el análisis de los registros de la práctica. Por ejemplo, cuando el estudiante para maestro llega comprender y usar la información sobre el aprendizaje de la suma de fracciones vinculado al caso de la maestra Clara y la situación de su aula descrita en la tarea práctica anterior.

4. EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA "MIRAR PROFESIONALMENTE" COMO UN ASPECTO DEL APRENDIZAJE DEL ESTUDIANTE PARA MAESTRO

Definir como un objetivo en el programa de formación de maestros el desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" las situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, como lo hemos descrito en este trabajo, puede hacer más efectivo al programa de formación. Esta aproximación a la formación de maestros intenta superar la dicotomía teoría-practica, y la discusión sobre una formación de maestros basada en la escuela o una formación basada en la universidad. Superar esta dicotomía y discusión es posible cuando llevamos los registros de la práctica a la universidad (al programa de formación) y generamos oportunidades para la interacción entre el conocimiento teórico y el análisis de la práctica.

De todas maneras, implementar programas de formación de maestros en el ámbito de la educación matemática desde los principios descritos aquí no es una tarea fácil. Los contextos institucionales en los que se insertan los programas de formación pueden llegar a condicionar lo que los educadores matemáticos piensan que deben hacer.

AGRADECIMIENTO

Esta investigación ha recibido el apoyo de los Proyectos I+D+i, EDU2014-54526-R del Ministerio de Economía y Competitividad, España y por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte para la Formación de Profesorado Universitario (España) FPU14/07107.

REFERENCIAS

Buforn, A.; Fernández, C. y Llinares, S. (2015). *El papel del conocimiento de matemáticas en la identificación de la comprensión de los estudiantes: el significado de razón*. Comunicación presentada en el XIV CIAEM, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México. Mayo.

Buforn, A. y Fernández, C. (2014). Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de primaria en relación al razonamiento proporcional. *BOLEMA, 28*(48), 21-41.

Callejo, M.L. y Zapatera, A. (2016). Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education*, DOI 10.1007/s10857-016-9343-1.

Eraut, M. (1994). *Developing Professional Knowledge and Competence*. London: Falmer: Press.

Ivars, P.; Buforn, A. y Llinares, S. (2016). Características del aprendizaje de estudiantes para maestro de una trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones para apoyar el desarrollo de la competencia "mirar profesionalmente". *Acta Scientiae, 18*(4), 48-66.

Ivars, P.; Fernández, C.; y Llinares, S. (2016-a) Cómo estudiantes para maestro miran de manera estructurada la enseñanza de las matemáticas al escribir narrativas. *La matematicae la sua didattica,* Bologna, v.24, n.1-2, p.79-96.

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2016-b). Descriptores del desarrollo de una mirada profesional sobre la enseñanza de las matemáticas en estudiantes para maestro. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 305-314). Málaga: SEIEM.

Ivars, P.; Fernández, C. y Llinares, S. (2016-c). *Preservice teachers' learning to notice students' fractional thinking.* The design of a learning environment through a Learning Trajectory. En ERME TOPIC CONFERENCE ETC3. Humbold-Universiät zu Berlin, Octubre.

Jacobs, V.R., Lamb, L.L. y Philipp, R. (2010). Professional Noticing of Children's Mathematical Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Llinares, S. (2009). Competencias docentes del maestro en la docencia en matemáticas y el diseño de programas de formación. *UNO. Revisa de Didáctica de las Matemáticas, 51*, 92-101.

Llinares, S. (2012-a). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática, nº 2*, 53-70.

Llinares, S. (2012-b). Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 7*(10), 53-62.

Llinares, S. (2013-a). El desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Educar em Revista, Parana, nº 50*, p.117-133.

Llinares, S. (2013-b). Professional noticing: A component of the mathematics teacher's professional practice. *SISYPHUS. Journal of Education,* 1(3), p.76-93.

Llinares, S. (2014). Experimentos de enseñanza e investigación. Una dualidad en la práctica del formador de profesores de matemáticas. *Educación Matemática, nº extraordinario*, marzo, 31-51.

Llinares, S. (2016). ¿Cómo dar sentido a las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas? Algunos aspectos de la competencia docente del profesor. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11*(15), 57-67.

Llinares, S. y Valls, J. (2009). The building of preservice primary teachers' knowledge of mathematics teaching: interaction and online video case studies. *Instructional Science, 37*, 247-271

Llinares, S. y Valls, J. (2010). Prospective primary mathematics teachers' learning from on-line discussions in a virtual video-based environment. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13,* 177-196.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The Discipline of noticing.* London: Routledge-Falmer.

Sherin, M.G., Jacobs, V.R. y Philipp, R. (Eds.) (2011). *Mathematics Teacher Noticing: seeing through Teachers' eyes*. New York: Routledge.

Stein, M.K., Smith, M. Sch., Henningsen, M. y Silver, E.A. (2000). *Implementing Standards-based mathematics instruction. A Casebook for Professional Development*. New York- Reston, VA: Teacher College Press-NCTM.

TASK DESIGN AND PRE-SERVICE PRIMARY TEACHERS' DEVELOPMENT OF PROFESSIONAL NOTICING ABOUT MATHEMATICS TEACHING

ABSTRACT. We firstly describe the use of the conceptualization of the professional noticing skill to design tasks in primary teacher education programs related to mathematics education. Secondly, we characterize the development of this skill taking into account ways in which pre-service primary teachers make sense of the specific mathematics teaching situations using the theoretical knowledge. This approach to primary teacher education in the field of mathematics education and the characterization of what is understood by pre-service teachers' learning attempt to overcome the theory-practice dichotomy and the discussion on university-based or school-based teacher education.

Keywords: Pre-service primary teachers' learning; Professional noticing; Mathematics education; Tasks.

PERE IVARS

Universidad de Alicante, España

pere.ivars@ua.es

ÀNGELA BUFORN

Universidad de Alicante, España

angela.buforn@ua.es

SALVADOR LLINARES

Universidad de Alicante, España

sllinares@ua.es

Amphion (1953). Autor: Henri Laurens.
Ubicación: Plaza Cubierta, Universidad Central de Venezuela.
Foto: Aquiles Salcedo Bolívar.

UN CURSO DE MATEMÁTICA BÁSICA BAJO EL ENFOQUE DE AULA INVERTIDA. UNA EXPERIENCIA CON ESTUDIANTES PARA PROFESORES

YERIKSON SUÁREZ HUZ

RESUMEN: El modelo de aula invertida representa una alternativa innovadora frente al enfoque tradicional que aún prevalece en la enseñanza de la Matemática. Dicho modelo conjuga el uso de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC), destacando las herramientas de la Web 2.0, promueve un rol protagónico en el alumno, al incorporar actividades de aprendizaje basadas en el estudiante, con alto componente interactivo y colaborativo. Parece necesario que los futuros profesores de Matemática conozcan dicho modelo. Por ello, y basado en las deficiencias en el manejo de contenidos matemáticos detectadas en quienes ingresan a la carrera de formación docente en esta especialidad, se describe un plan de acción, bajo la perspectiva de aula invertida –flipped classroom– para la nivelación, de contenidos matemáticos fundamentales, de un grupo de estudiantes para profesores de Matemática del primer semestre de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, inscritos en el Instituto Pedagógico de Maracay, en Venezuela. Metodológicamente se trata de un estudio descriptivo sustentado en el paradigma socio-crítico, de campo, bajo la modalidad de estudio de caso. La apreciación de la experiencia de aprendizaje fue positiva desde la visión de los estudiantes y del docente del curso. Los estudiantes se sintieron más motivados, mostraron mayor participación en sus clases presenciales con la profesora del curso, y se evidenció un mejor rendimiento académico. El uso de esta estrategia requiere del docente, un dominio adecuado de las TIC y del dominio del contenido matemático, de tal modo que pueda seleccionar o diseñar los recursos más idóneos y de calidad Así mismo, se reflexionó acerca del enfoque de aula invertida y su potencial didáctico como metodología de enseñanza-aprendizaje de esta disciplina y el interés de los estudiantes en aprender sobre el mismo.

Palabras Clave: Aula invertida; Matemática; Web 2.0; TIC, formación docente.

Suárez Huz, Y. (2017) Un curso de matemática básica bajo el enfoque de aula invertida. Una experiencia con estudiantes para profesores de la UPEL-Maracay. En: Salcedo, A. (Comp.). *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI* (pp. 89 – 106). Caracas: Centro de Investigaciones Educativas, Escuela de Educación. Universidad Central de Venezuela.

1. INTRODUCCIÓN

Durante las últimas décadas la sociedad ha sido testigo del enorme uso de las tecnologías digitales y de una revolución en este ámbito, la cual ha devenido en la modificación de muchos hábitos y conductas dentro de la misma. En particular, donde mayor ha sido la transformación es en lo que tiene que ver con la forma en la cual nos comunicamos, quizás por ser esta una capacidad vital para todos los que conforman la sociedad. De allí que el impacto de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) abarquen un importante espectro de situaciones y contextos, entre los que destaca el ámbito educativo, donde su presencia ha influido notablemente en el comportamiento del hombre a modo individual y como colectivo. Al respecto, Aristizábal (2012) recalca que

> La tecnología está presente en la sociedad actual, por lo tanto, es imprescindible su presencia dentro de las aulas, los entornos de comunicación actuales son ricos y variados y es allí donde el docente debe implementar estrategias que le posibiliten comunicarse de forma más eficiente y eficaz con sus estudiantes, los cuales son individuos de la era tecnológica. (p. 31)

De allí, que uno de los contextos más influenciados por las TIC es el escolar. Idea que es apoyada por Salazar (2012), cuando manifiesta que éstas "tienen, cada vez más, una mayor presencia en los procesos educativos y formativos, generando espacios de innovación educativa" (p. 2). Adicionalmente, el empleo de la tecnología digital en el accionar educativo ha de implicar necesariamente un redimensionamiento del papel que deberá desempeñar el docente, la función que se le asigne a los recursos y materiales didácticos, las estrategias pedagógicas utilizadas, el proceso de evaluación y los medios de comunicación. En palabras de Cortés (2011)

> Lo que ofrece las TIC es obtener nuevas herramientas de trabajo con el fin de crear nuevas estrategias para la enseñanza. Para así mismo crear ambientes de aprendizaje, acercamientos vivenciales con los estudiantes enriquecidos de

> tecnología permitiendo una educación de calidad; ya que esto hace que se creen nuevas competencias (p. 136)

Lo anterior puede sugerir que los roles que desempeñaban docentes y estudiantes habrían de ser transformados según empleen herramientas digitales en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Tomando en consideración que las TIC no constituyen, desde ningún punto de vista, una panacea a los problemas educativos ni al proceso antes mencionado y, a pesar de que la tecnología no puede ser, en sí misma, la respuesta a ninguno de los problemas actuales asociados a la enseñanza y el aprendizaje, es insostenible el intentar ignorar sus potencialidades en el aula.

Por otro lado, los métodos tradicionales de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, que en opinión de quien escribe este trabajo, aún persisten en gran medida; conciben que la clase debe girar en torno al papel del profesor, quien es el centro y foco único de atención, por ser el conocedor de la verdad y el experto, cuya única función se restringe casi exclusivamente a transmitir la información a sus estudiantes. Sin embargo, con la avasallante evolución ocurrida en el mundo de la tecnología, y su penetración en el ámbito de la enseñanza de esta disciplina, las TIC han venido a modificar los roles y comportamientos de aquellos quienes tienen la responsabilidad de educar, y también ha reformado la forma de aprender. Por ello, persiste en la actualidad una nueva visión donde, gracias al uso de las TIC, se hace mayor énfasis en el trabajo colectivo, colaborativo, el aprendizaje como proceso y no como resultado, la socialización del saber y la construcción en conjunto del conocimiento. Para Fernández y Muñoz (2007), otro elemento importante del uso de las TIC, y en particular de recursos disponibles en la Internet, es el referido a la posibilidad de que cada estudiante aprenda a su propio ritmo y en atención a sus necesidades, pues afirman que

> El material de matemáticas al que se puede acceder, por ejemplo en Internet, es muy útil para atender a la diversidad de nuestras aulas. Ya que cada alumno puede desenvolverse a su ritmo natural de trabajo y que muchas

> actividades pueden ajustarse a distintos niveles de dificultad, las herramientas de las que disponemos nos permiten tener trabajando a todos los alumnos, cada uno dentro de sus capacidades y aptitudes. (p. 212)

Por ello, las TIC forman parte de un cúmulo importante de recursos que pueden ser empleados en la enseñanza de la matemática. Poveda y Gamboa (2007) postulan con relación al uso de la tecnología en la enseñanza de la matemática que "la introducción de la tecnología ha transformado y continúa modificando la forma de enseñar y aprender Matemáticas. Es por ello que se ha desarrollado una forma de aprendizaje que contempla la incorporación de ésta en dicho proceso" (p. 133). Es aquí donde entra el juego la metodología de *Flipped Classroom* o Aula Invertida, la cual emerge como una alternativa al enfoque tradicional de la enseñanza de la Matemática. El Aula Invertida puede ser considerada como un modelo pedagógico a través del cual el estudiante se hace más responsable de su proceso de aprendizaje gracias al apoyo de la tecnología. Para ello, y antes de asistir a su clase en el centro educativo, los alumnos realizan una serie de actividades como la revisión de videos, la lectura de documentos, escuchan audios, realizan actividades en línea, y ven presentaciones multimedia; para posteriormente discutirlos con la guía del profesor en el salón.

Por otra parte, la Universidad Pedagógica Experimental Libertado (UPEL) es una institución de educación superior pública venezolana creada en 1983 cuyo propósito fundamental es el de formar, capacitar, actualizar y perfeccionar recurso humano en el ámbito de la labor docente "capaz de generar conocimientos útiles para implementar procesos pedagógicos innovadores e impulsar la transformación de la realidad social, y así contribuir al logro de una sociedad más próspera, equitativa y solidaria" (UPEL, 2012).

En Venezuela, la UPEL tiene la misión de preparar y capacitar a los docentes que demanda el sistema educativo venezolano en sus distintos niveles y modalidades (UPEL, 1999); es en esta institución junto con las facultades de educación de otras universidades, donde se forman los profesores que enseñan Matemáticas en las escuelas y liceos; por ende se espera que los planes de estudio permitan examinar con exhaustividad los contenidos matemáticos que dichos profesores deberán impartir a los alumnos de las aulas que les corresponda regentar. Sin embargo, se han detectado diversas carencias en aquellos que aspiran ingresar a la carrera de educación en la especialidad de Matemática del Instituto Pedagógico de Maracay (IPMAR) de la UPEL. En este orden de ideas, los estudiantes nuevo ingreso evidencian en diversas evaluaciones realizadas al inicio de su formación profesional, poco dominio de conceptos matemáticos fundamentales como el desarrollo de productos notables, factorización, operaciones aritméticas con racionales, noción del concepto de función, así como su representación gráfica y aplicaciones, los cuales que son imprescindibles para el abordaje de teorías matemáticas de mayor profundidad. De aquí, que surja la necesidad de atender esas carencias, fallas, y concepciones erróneas desde el inicio de su preparación, y así procurar un mejor desenvolvimiento de sus estudios.

Por ello, se reporta este trabajo cuyo objetivo es *describir una experiencia de aprendizaje basada en el desarrollo de un plan de acción, sustentado en la metodología de aula invertida (flipped class), para el estudio de contenidos matemáticos básicos por parte de un grupo de estudiantes nuevo ingreso de la carrera de educación mención matemática de la UPEL-IPMAR en Venezuela.*

2. MARCO REFERENCIAL

La *Metodología de Aula Invertida* es un enfoque innovador para la enseñanza y aprendizaje. La expresión proviene de la frase anglosajona Flipped Classroom, que significa voltear la clase. El término tiene sus orígenes a mediados del 2007 cuando se consolida (Bergmann y Sams, 2012). Se trata entonces de una modalidad de estudio en la que se pretende invertir el acto educativo en el aula de clase, en contraposición a la manera tradicional como se ha llevado a cabo. Así, en vez de que los estudiantes reciban inicialmente los contenidos en el salón, tomen apuntes, y se les asignen tareas~~;~~ la metodología de Aula Invertida pretende que a través del uso de las

TIC, los estudiantes accedan a la información y contenidos de la asignatura, que realicen actividades, compartan conocimiento, y posteriormente se reúnan en el aula para aclarar dudas, debatir, construir conocimiento, y afianzarlo con el apoyo y guía del docente. En este sentido, Sáez y Ros (2014) señalan que

> Este modelo invierte los modelos tradicionales del proceso de enseñanza-aprendizaje y consiste en proveer a los alumnos de materiales audiovisuales, que les resulten atractivos, y que les faciliten los conocimientos teóricos que en la enseñanza tradicional el profesor les ofrecía en clase. El estudiante trabaja esos materiales fuera del aula, y el tiempo de clase queda reservado para debatir solucionar dudas o trabajar actividades prácticas con el profesor. La tecnología y las actividades de aprendizaje son dos componentes clave en este modelo (p. 345)

Esta estrategia metodológica se han visto influenciadas por las transformaciones e innovaciones constantes a nivel tecnológico, lo que ha generado nuevos modos de comunicación dentro de los espacios educativos, caracterizados por posicionamientos constructivistas que le atribuyen al estudiante un rol cada vez más activo y dinámico en la construcción y la socialización del conocimiento. Aunque en la práctica se emplean mucho los videos y tutoriales en línea para la presentación de los contenidos, Suárez (2014) señala que es posible contar con variedad de recursos de la Web 2.0 para la adaptación del aula invertida en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

Algunas ventajas acerca de la incorporación del enfoque de aula Invertida, gracias al uso particular de la Web 2.0, son destacadas en Suárez (2014) quien menciona (a) *la flexibilidad*, al permitir que los ritmos y procesos de aprendizaje se adecuen a las necesidades de cada estudiante; (b) *su personalización*, en el sentido de que la práctica de aprendizaje de cada sujeto no se reduce a un mismo proceso o contenido de estudio sino que puede ser vivido de modo personal y variado utilizando los recursos que más le convenga; y (c) *la* *interactividad*, ya que se ofrecen la posibilidad de que sea el propio estudiante quien experimente construya, verifique, compruebe y juzgue, asistido por sus pares; y orientado, dirigido y apoyado por el profesor.

Tomando en consideración el trabajo de Achútegui (2014), es posible realizar una distinción entre lo que es el fenómeno del Aula Invertida, y lo que no es; así como el rol de los estudiantes y del docente. En este sentido, señala que el Aula invertida se fundamenta en un nuevo modo de interacción entre el contenido, el docente y los estudiantes; donde estos últimos tienen un rol protagónico en su propio proceso de estudio, y el maestro es un guía de dicho proceso. Se cimienta en la perspectiva constructivista del aprendizaje y en una educación más personalizada. El trabajo previo al encuentro en el aula debe planificarse, relacionarse y organizarse de acuerdo a ciertos criterios y lineamientos establecidos por el docente, quien diseña actividades basado en las herramientas TIC disponibles y de acuerdo a su intencionalidad didáctica y pedagógica.

Por otro lado, y en relación con lo que no es el aula invertida, sostiene que no se trata solo de ver videos en línea, evitando así que ahora se convierten en sustitutos del profesor; sino que son un complemento utilizado previo a la clase presencial, por lo que no es un curso en línea, y que además contempla la posibilidad de uso de otros recursos y herramientas tecnológicas digitales del mundo de la Web. Entre algunas de las herramientas Web 2.0 que destacan por su uso en la enseñanza de la Matemática y que pueden ser empleadas en la modalidad de Aula Invertida, destacan los Blog, las Wikis, las redes sociales, editores de presentaciones multimedia en línea como Slideshare, y plataformas de cursos virtuales como Moddle, entre otros. Estas herramientas servirán para que los estudiantes revisen los diversos contenidos, previo a su clase en aula, y puedan ser capaces de generar debate sobre lo estudiado; criticar, aclarar dudas, ofrecer soluciones a problemas, presentar otros puntos de vistas, todo bajo la orientación del docente, quien ya no se dedicará a dar clases magistrales y depositarias del contenido en sus estudiantes.

3. Procedimiento de Investigación

Se trata de un estudio a nivel descriptivo, desarrollado bajo el paradigma socio-crítico ya que se buscó trasformar la realidad de los estudiantes para profesores de Matemática en cuanto a su concepción acerca de la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina, y el rol que debe tener un estudiante dentro del estudio de esta área de conocimiento. La investigación se apoya en un trabajo de campo en virtud de que la información que se recopiló en las distintas etapas de la misma se obtuvieron directamente de los mismos estudiantes y de la profesora asignada al curso. Para el desarrollo de la experiencia se tomó en consideración la metodología seguida por la investigación-acción, que comprende las siguientes fases o etapas, (a) diagnóstico de necesidades, (b) diseño del plan de acción, (c) ejecución y finalmente, (d) reflexión. En cuanto a las técnicas y los instrumentos para la recolección de la información, se consideraron las entrevistas en profundidad, la aplicación de cuestionarios y la discusión grupal. La investigación se llevó a cabo con 12 estudiantes nuevo ingreso de la carrera de educación mención Matemática de la UPEL-IPMAR en la ciudad de Maracay, Venezuela.

4. Resultados y Discusión

Se describirá el plan de acción llevado a cabo, en función de las etapas propuestas en la sección del abordaje metodológico. En primer lugar, el diagnóstico de necesidades con los estudiantes participantes de la investigación, que son cursantes, por primera vez, de la asignatura obligatoria denominada Introducción al Cálculo, del área de Análisis, perteneciente al pensum de estudios. Mediante conversaciones con la profesora del curso, fue posible realizar algunos encuentros y reuniones con los estudiantes para determinar sus necesidades y carencias en torno a contenidos matemáticos fundamentales contemplados en el programa de la asignatura. De allí, basándose en las discusiones grupales con los estudiantes, en evaluaciones diagnósticas realizadas por la docente facilitadora de la materia, así como en conversaciones con el mismo; se pudo obtener un conjunto de temas matemáticos prioritarios, entre los que destacan, *conjuntos, conjuntos numéricos, funciones, productos notables, factorización, y graficación en el plano cartesiano*, los cuales fueron abordados en la experiencia de aprendizaje a través de la modalidad de aula invertida. En cuanto al acceso, uso y dominio de las TIC, todos los participantes expusieron contar con servicio de internet y de su disposición a formar parte de la experiencia. Además expresaron el dominio de algunas herramientas básicas como el uso del correo electrónico, la búsqueda de información a través de la web, y el manejo de redes sociales.

La segunda y tercera fase del estudio consistió en el diseño y ejecución de un plan de acción, el cual estuvo sustentado en las necesidades descritas por los estudiantes y las dificultades y errores detectados por el docente del curso a través de las evaluaciones diagnósticas. El plan fue orquestado en atención a la metodología de Aula Invertida, por lo que se requirió del diseño y la selección de un conjunto de recursos digitales que serían revisados por los estudiantes, previo a las 6 sesiones de trabajo presenciales que se organizaron (de 3 horas c/u), las cuales fueron precedidas por el desarrollo de las actividades virtuales. Vale recalcar que se trataba de actividades que se realizarían en paralelo con las del curso de Introducción al cálculo, y por tanto se dispuso de un horario diferente al asignado originalmente y que la asistencia y participación eran de carácter voluntario, ya que se trataba de horas extra de clase.

Vale destacar que previo a las sesiones presenciales de trabajo, se realizó una reunión con los estudiantes y el docente de la asignatura, con la finalidad de explicarles en qué consistía el trabajo bajo la perspectiva del Aula Invertida, la necesidad de contar con acceso a internet y el manejo de algunas herramientas como redes sociales. Cada uno de los recursos digitales se acompañó por una guía de apoyo elaborada por el investigador para orientar a los alumnos en su trabajo virtual. Así que cuando los estudiantes revisaran los contenidos fuera del aula y previo a la clase, no solo los verían sino que estarían atentos a las indicaciones y orientaciones de la guía de actividades creada por el investigador para el desarrollo de la experiencia. La idea es que ellos reflexionen y disciernan acerca de los contenidos matemáticos, además de llevar a cabo algunas prácticas de carácter formativo. A continuación se describen en los siguientes gráficos algunos de estos recursos, los cuales se dispusieron en un *grupo virtual de Facebook.*

Es importante mencionar que algunos de estos contenidos digitales fueron creados por el investigador de acuerdo a la experiencia del mismo y en conjunto con el docente de la asignatura para ese momento. Otros recursos fueron seleccionados de internet, como es el caso de algunos videos de YouTube, algunas presentaciones multimedia, y ciertas aplicaciones en línea para la realización de prácticas, simulaciones, conjeturas y experimentación. En todo caso, para cada uno de ellos se desarrolló un guion de trabajo para orientar al estudiante al momento de realizar la revisión de los temas. En la figura 1 se presenta la portada del grupo de Facebook creado para facilitar la interacción, denominado *volteando las clases de Matemática* Inicialmente se colocó un video y una presentación acerca del uso del Aula invertida en educación matemática.

Figura 1. Grupo de Facebook para Aula Invertida en Matemática.

Entre algunos de los contenidos matemáticos abordados, se encuentra el de productos notables. Para su estudio, el investigador dispuso de un presentación en línea y de un video para enseñar aspectos teóricos y prácticos referidos a este tema, tal y como se puede apreciar en la figura 2. Generalmente este tema es uno de los más deficientes en los estudiantes para profesores de Matemática que ingresan a la UPEL-Maracay. Aunado a ello, este contenido es fundamental para el desarrollo de teorías matemáticas más avanzadas; y de hecho, se podría considerar como un asunto transversal; ya que se trata de multiplicaciones de dos o más factores que obedecen a ciertas reglas prefijadas en función de la forma de los factores que constituyen la multiplicación, y que pueden aparecer en el abordaje de distintos contenidos. En este sentido, su enseñanza muchas veces se limita a la presentación de las fórmulas de dichos productos notables, y a la realización de ejercicios para el desarrollo algorítmico de los cálculos; dejando de lado la justificación y argumentación de dichas expresiones. Para ello, se puede recurrir tanto al enfoque algebraico como al enfoque geométrico. Considerando que esta última perspectiva permite que el estudiante visualice y hasta manipule objetos tangibles que de alguna manera le sirvan de justificación a la deducción de la fórmula de los productos notables; se elaboraron tales presentaciones animadas y videos para ilustrar así la razón de ser de las expresiones de los productos notables.

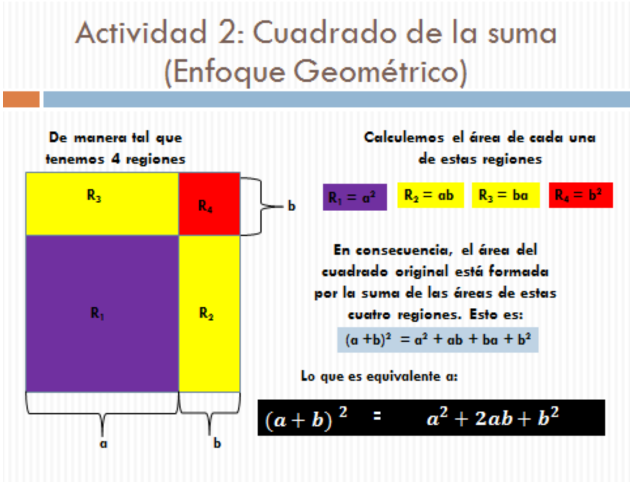


Figura 2. Presentación y video del tema de productos notables.

Otro tema matemático abordado fue el de las funciones, su representación gráfica y aplicaciones. El tema de las funciones es central en el estudio de la matemática. El desarrollo del cálculo (diferencial e integral), y del análisis matemático, se centran precisamente en este objeto matemático. En evaluaciones diagnósticas aplicadas a los estudiantes del primer semestre de la especialidad de Matemática de la UPEL-IPMAR, se ha podido corroborar la existencia de errores y dificultades en el abordaje de este contenido; entre las que vale la pena mencionar el desconocimiento formal del concepto de función, confusiones en la clasificación (inyectiva, sobreyectiva y biyectiva), deficiencias en la representación gráfica (diagramas de Venn, y fundamentalmente gráficas en el plano cartesiano), y las aplicaciones del concepto de función a problemas reales. Para contribuir a la asimilación de estos aspectos bajo la metodología de aula invertida, se realizaron presentaciones en línea desarrolladas por el investigador, se elaboró un video, y se propusieron actividades interactivas en línea con un software para el trazado de gráfico de funciones reales, tal y como se puede ver en la figura 3.

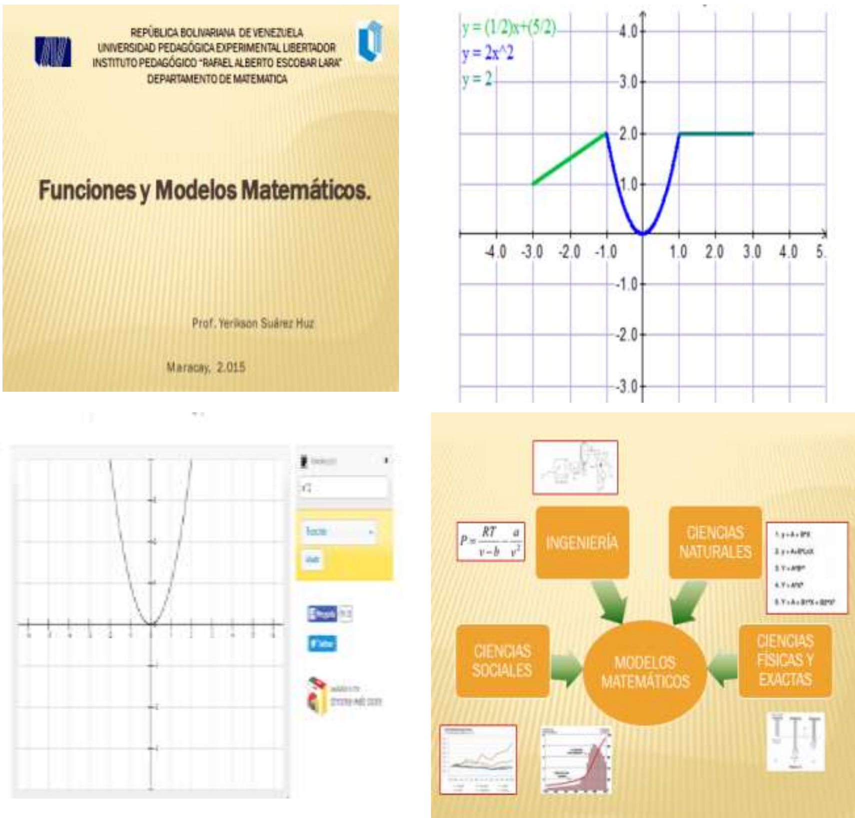


Figura 3 Tema de funciones. Presentación en línea, simulación con software, y video para aplicaciones.

De manera similar se fueron desarrollando las actividades virtuales y presenciales con el resto de los temas. Basados en la revisión de videos y presentaciones, así como en la preguntas de reflexión y ejercicios formativos que se indicaban en la hoja guía de trabajo; los estudiantes en conjunto con el profesor debatían acerca de lo estudiado, aclaraban las dudas y ponían en prácticas tareas de mayor nivel de exigencia, procurando integrar los contenidos..

Finalmente, la cuarta y última etapa del estudio, implicaba la evaluación y retroalimentación que se deriva de la ejecución del plan de acción que se llevó a cabo. En este sentido, los estudiantes demostraron interés hacia el uso de la modalidad de Aula Invertida, aunque hacen especial énfasis en la necesidad de la constante participación del docente. Así mismo, expresan que la manera en la que se presenta la información y los contenidos les parece muy agradable y fácilmente asimilable. Sin embargo, se percibió que algunos pocos de los estudiantes no eran constantes en la revisión de los contenidos virtuales, o los revisaban pocas horas antes de la clase, y no realizaban las actividades sugeridas en la guía de trabajo. Esto trajo como consecuencia que muchas veces no comprendieran de lo que se hablaba en el aula, y esto a su vez tendía a retardar el trabajo, al tener que explicar ciertos elementos teóricos que se encontraban explícitamente en el material digital dispuesto en el grupo.

5. CONCLUSIONES

La valoración de la experiencia de aprendizaje basada en el uso de la perspectiva de Aula Invertida, es positiva tanto desde el punto de vista de los estudiantes, como desde la visión del docente del curso. Los estudiantes señalan que se trata de una modalidad que presenta la información de modo atractivo, que les permite interactuar, discutir, y experimentar. Con el desarrollo de la experiencia, el docente del curso señala que en sus clases ya no tiene que invertir mayor tiempo en el abordaje de temas que se supone los estudiantes deben dominar pues forman parte de su formación como egresados del bachillerato. Además, existe una mejor disposición a aprender. La profesora facilitadora del curso expresó su satisfacción en el desempeño de los estudiantes y reseñó las bondades de la experiencia así como la posibilidad de que pueda utilizarse en los siguientes semestres bajo la guía del preparador. Los estudiantes se sintieron más motivados, mostraron mayor participación en sus clases presenciales con la profesora del curso, y se evidenció a través de las calificaciones de las estrategias contempladas en el plan de evaluación, que su rendimiento era mejor que el de otras secciones en períodos académicos anteriores. Los temas que presentaron mejores resultados fueron los de factorización y producto notable, ya que los estudiantes no tenían un dominio conceptual y procedimental de estos contenidos.

Sin embargo, hay que llamar la atención a ciertos aspectos como el tiempo de planificación y selección de recursos que debe hacer el docente, así como la necesidad de incorporar hojas de orientación para cada recurso y que así el estudiante sepa por qué debe revisar cada uno. Así mismo, algunos estudiantes pudieron revisar los contenidos desde sus teléfonos celulares, tanto antes de la clase como en el trascurso de la misma. Además señalan la necesidad de contar con acceso a internet constante, lo cual no se daba en todos los casos. Al inicio de la experiencia no había suficiente participación en el grupo de Facebook, lo que hacía que las dudas fueran aclaradas en el aula de clase, y muchas veces eran similares, por lo que se procuró que las preguntas se hicieran en voz alta para que todos las escucharan e incluso pudieran opinar al respecto.

En definitiva, se trata de una modalidad que requiere de un gran esfuerzo por parte del estudiante, y donde debe tener un alto sentido de la responsabilidad. La mayoría de los alumnos así lo expresaron y lo hicieron, lo que repercutió en su aprobación del curso y en continuar con este enfoque en cursos posteriores. Del mismo modo, requiere de parte del docente, un dominio adecuado de las TIC y del dominio del contenido matemático, de tal modo que pueda seleccionar o diseñar los recursos más idóneos y de calidad, ya que desde la visión del Aula Invertida serán el primer acercamiento al tema para los estudiantes.

REFERENCIAS

Achútegui, S. (2014). *Posibilidades didácticas del modelo Flipped Clasroom en la educación primaria*. Trabajo de Grado no publicado.

Universidad de la Rioja. España. Disponible: http://biblioteca.unirioja.es/tfe_e/TFE000712.pdf [Consulta: 2015, septiembre 04]

Aristizábal, D. (2012). *Propuesta Metodológica para el Acercamiento del Análisis Combinatorio y Probabilidades a Situaciones Cotidianas* [Versión completa en línea] Trabajo grado de Maestría no publicado. Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias. Medellín. Disponible: http://www.bdigital.unal.edu.co/7497/1/43209762.2012.pdf [Consulta: 2015, septiembre 04]

Bergmann, J. y Sams, A. (2012). Flip your classroom: reach every student in every class every day. Eugene, OR. *International Society for Technology in Education.* Disponible: https://goo.gl/IItlrk [Consulta: 2015, Septiembre 04]

Cortés, H. (2011). Las herramientas web 2.0 en la enseñanza de la Matemática fundamental. *Dialéctica, Revista de Investigación*, 130-149

Fernández, J. y Muñóz, J. (2007). Las TIC como herramienta educativa en Matemática. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. [Revista en línea], 9, 119-147. Disponible: http://goo.gl/zdQJ23 [Consulta: 2015, septiembre 04]

Poveda, R. y Gamboa, R. (2007). Incorporación de la tecnología en el proceso de formación de profesores en la escuela de matemática de la universidad nacional. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* [Revista en línea], 2(3), 133-152. Disponible: http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6895 [Consulta: 2015, septiembre 04]

Sáez, B. y Ros. M. (2014). *Una experiencia de FlippedClasrrom*. XI Jornadas Internacionales de Innovación Universitaria. Disponible: http://abacus.universidadeuropea.es/handle/11268/3618 [Consulta: 2015, septiembre 04]

Salazar, A. (2012). *Página web como apoyo en educación presencial.* [Documento en línea] Disponible: http://goo.gl/HMbz0M [Consulta: 2015, abril 26]

Suárez, Y. (2014). *El mapa de enseñanza-aprendizaje y la web 2.0: organizadores del contenido matemático*. Trabajo de Ascenso no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara", Maracay.

Universidad Pedagógica Experimental Libertador. (2012). [Página Web en línea] http://www.upel.edu.ve/. [Consulta: 2015, septiembre 04]

Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay (1999). Material de apoyo de iniciación universitaria. (Folleto). Maracay: FEDEUPEL.

BASIC MATH COURSE UNDER THE FLIPPED CLASSROOM APPROACH. AN EXPERIENCE WITH STUDENTS FOR TEACHERS

ABSTRACT: The flipped classroom model represents an innovative alternative to the traditional approach that still prevails in the teaching of mathematics, which is based on the reproduction and transmission of knowledge. This model combines the use of Information Technology and Communication (ICT), highlighting the tools of Web 2.0, and promotes a leading role in the student, incorporating learning activities based on the student, with high interactive and collaborative component. From there, it seems necessary that future mathematics teachers know that model. Therefore, and based on deficiencies in the management of mathematical content detected in those who enter the career of teacher training in this field, an action plan is described under the perspective -flipped inverted classroom classroom - for leveling , fundamental mathematical content, a group of students to teachers of mathematics in the first half of the Pedagogical University Experimental Libertador, enrolled in the Pedagogical Institute of Maracay in Venezuela. Methodologically it is a descriptive study supported by the socio-critical paradigm field, in the form of case study. The appreciation of the learning experience was positive from the perspective of students and teachers of the course. Students felt more motivated, showed greater involvement in their classroom with the teacher of the course classes, and better academic performance was evidenced. Similarly, the use of this strategy requires the teacher, an adequate ICT skills and mastery of mathematical content, so you can select or design the most appropriate resources and quality Likewise, it reflected on the flipped classroom approach and its educational potential as a teaching-learning this discipline and students' interest in learning about it.

Keywords: Flipped classroom; Math; Web 2.0; TIC; teacher training.

YERIKSON SUÁREZ HUZ

UPEL - Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara" de Maracay, Venezuela

yhuz553@gmail.com

CONCEPCIONES QUE TIENEN LOS DOCENTES DE MATEMÁTICAS ACERCA DE LA EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES EN EL NIVEL DE MEDIA DIVERSIFICADA

WILLIAMS LÓPEZ

RESUMEN. Esta investigación estuvo centrada en conocer la concepción que tienen los docentes de matemáticas acerca de la evaluación de los aprendizajes. La investigación tuvo como propósito el contribuir a la comprensión de las concepciones teóricas que tienen los docentes de matemática de Educación Media Diversificada acerca de la evaluación de los aprendizajes. El objetivo de la misma fue analizar las concepciones que tienen los docentes de matemáticas acerca de la evaluación de los aprendizajes en el nivel de Educción Media y Diversificada y los paradigmas de evaluación subyacentes. La metodología de la investigación se presentó bajo el paradigma de la investigación cualitativa, puesto que su objetivo no fue cuantificar datos, sino analizarlos de una manera comprensiva. La misma se consideró de tipo descriptiva porque consistió en la caracterización y descripción de las concepciones de la evaluación educativa por parte de docentes del área de matemática. El método se basó en la indagación de registro, en este caso la entrevista. Como instrumento para la recolección de datos utilizó la entrevista como técnica fundamental para la recogida de los datos. Se usó la Codificación de Datos como técnica de análisis para generar teorías a partir de los datos recogidos en el campo; el proceso utilizado se basó en la Teoría de Fundamentada (Strauss y Corbin, 2002). Como resultados se evidenció en los docentes que la finalidad del proceso de evaluación es fijar una nota en el estudiante; por lo cual se separa el proceso de evaluar del proceso didáctico; los docentes asumen que la evaluación es continua en función del tiempo (cada dos semanas); y no, en función de detectar habilidades, destrezas y errores más frecuentes en el desarrollo de la competencias matemáticas, entre otros.

Palabras Clave: Evaluación continua; Teoría fundamentada; Aprendizaje.

López, W. (2017). Concepciones que tienen los docentes de matemáticas acerca de la evaluación de los aprendizajes en el Nivel de Media Diversificada. En: Salcedo, A. (Comp.). *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI*, (pp. 107 – 129.). Caracas: Centro de Investigaciones Educativas, Escuela de Educación. Universidad Central de Venezuela.

1. INTRODUCCIÓN

La investigación tiene como objetivo el contribuir a la comprensión de las concepciones teóricas que tienen los docentes de matemática de Educación Media Diversificada acerca de la evaluación de los aprendizajes.

En principio se desarrolla el planteamiento del problema en donde se describe el proceso de la evaluación educativa, y cómo ésta se ha modificado en la práctica en función de las creencias o concepciones de los docentes. Luego se describen los objetivos que orientan la investigación. Posteriormente se presenta la relevancia del estudio, donde se muestra la justificación que sustenta la acción investigativa.

Después se describe la metodología usada para abordar la investigación: las entrevistas y su análisis: codificaciones. Por último se presentan los resultados arrojados de la investigación, la concepción de la evaluación educativa surgida del proceso de la Teoría Fundamentada: emergente, y por último las reflexiones de dichos resultados.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La evaluación es un proceso que hoy más que nunca debe ser considerado en el ámbito educativo como pieza clave en el proceso de enseñanza y aprendizaje; lo anterior obedece a que cada año los países registran una mayor deficiencia en cuanto a las competencias que deben alcanzar los estudiantes en las diferentes áreas o asignaturas del sistema escolar. Razón por la cual el Informe: Estrategia educación y formación, emitido por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España en 2013, revela que en los últimos años la mayoría de los países han emprendido reformas en su estructura curricular con la intención de fortalecer el desarrollo de las competencias y habilidades, de mejorar los aspectos transversales y de hacer mayor hincapié en la aplicación de las matemáticas a la vida cotidiana.

Cuando se habla de la evaluación en los procesos educativos, el concepto de evaluación, inmediatamente se asocia a la actividad de realizar mediciones sobre determinadas características de un objeto, hecho o situación en particular (Barriga y Hernández, 2006). Lo anterior implica que la evaluación lleva implícito diferentes actividades de consideración cualitativa o cuantitativa; las cuales son necesarias; sin embargo, también incluye otros factores determinantes que la definen.

Partiendo de lo anterior, la evaluación debería –en su justa aplicación- servir para replanificar y reorientar la práctica del docente; conocer lo que ocurre en el aula a partir de los procesos de enseñanza y aprendizaje aplicados y su incidencia en los alumno, reorientar las veces que sean necesario los procesos durante su desarrollo; lo cual es una de las funciones más importantes de la evaluación.

Entre las diferentes situaciones que genera el bajo rendimiento en el área de matemáticas en el país, podemos citar, la concepción errónea que tienen los docentes sobre a evaluación, desde la teoría y acentuada con mayor énfasis en la práctica. Asumen la misma como: objetivo dado objetivo evaluado, y se continua con el siguiente objetivo. Es decir, el objetivo evaluado, sin importar los resultados, no se vuelve a retomar ni a reforzar de forma sistematizada. Lo cual no permite que el alumno desarrolle las habilidades y destrezas matemáticas necesarias, por una parte, y por otra, genera que los estudiantes no recuerden lo aprendido "supuestamente" en la clase anteriores.

Por lo ante expuesto es que se plantea estudiar las concepciones que tienen los docentes de matemáticas acerca de la evaluación de los aprendizajes en el nivel de Educación Media y Diversificada de Media General, con el fin de dar respuesta a la siguiente interrogante: ¿Cuáles son las concepciones que tienen los docentes de matemáticas acerca de la evaluación de los aprendizajes en el nivel de Media Diversificada y cuál es el paradigma subyacente?

3. Objetivos de Investigación

Objetivo General

Analizar las concepciones que tienen los docentes de matemáticas acerca de la evaluación de los aprendizajes en el nivel de Educación Media y Diversificada y los paradigmas de evaluación subyacentes.

Objetivos Específicos

Determinar las concepciones que tienen los docentes de matemática de las Unidades Educativas "Alianza - Fe y Alegría" y "Juan Landaeta", acerca de la evaluación de los aprendizajes.

Analizar dichas concepciones en función de los paradigmas de evaluación subyacentes.

4. Paradigmas de Evaluación

Existe una gran diversidad de agrupaciones de los modelos, enfoques y concepciones de la evaluación; con el propósito de caracterizar los elementos comunes, tantos teóricos como metodológicos y de contextualizarlos en su momento histórico, se presentan cuatro generaciones (Alves y Acevedo, 1999), siendo estas las más estudiadas en el campo de la educación.

En la primera generación o generación de la medición, la evaluación se entiende como sinónimo de cuantificar o medir. Aparece en un momento en que prevalecía la creencia que en la escuela se enseñaba la verdad y los contenidos se evaluaban de memoria. El evaluador es un técnico que aplica instrumentos válidos para medir cualquier atributo o conjunto de ello. Estudios previos permiten crear los instrumentos que hacen posible evaluar.

En la segunda generación o generación de descripción; nace por la insuficiencia de la primera que sólo es capaz de producir datos. Esta evaluación se caracteriza por la descripción de criterios de fuerza y debilidad con respecto al verdadero estado de los objetivos (Guba y Lincoln, 1990). El papel del técnico evaluador se mantiene y se utiliza la mediación como herramienta que permite realizar la descripción. Según Hernández Poveda (1998), además de su naturaleza técnica, la evaluación se asume como útil para describir la competitividad del individuo, en función de parámetros establecidos (objetivos) en un currículo previamente diseñado.

La tercera generación o generación de juicios, surge porque los objetivos del enfoque descriptivo presentaban serias fallas. Se caracterizó por el esfuerzo para realizar juicios y en que el evaluador asume su papel de juez. Guba y Lincoln (1990) señalan algunos problemas con este método: la tendencia al direccionalismo, el fracaso para acordar el valor plural y la obligación con el paradigma de investigación científica. Esta generación se caracteriza porque el evaluador se convierte en un juez, que adopta la figura externa, para no influir subjetivamente en el proceso.

Cuarta generación: constructivista, respondiente o de negociación. Surge como un enfoque alternativo a las críticas y limitaciones de las generaciones anteriores. Se considera que es respondiente porque las bondades y limitaciones no son establecidas a priori, sino se dan por un proceso interactivo de la negociación donde participan los involucrados. Y se considera constructivista por considerarla apropiada para la tarea de evaluar: niega la dualidad sujeto-objeto por la interacción existente entre observador – observado; niega la existencia de un objeto real y afirma las construcciones sociales como un conocimiento científico, y rechaza los controles y manipulaciones (experimentos) y las sustituyen por un proceso dialectico-hermenéutico que se considera de mayor ventaja.

Por otra parte, esta generación demanda la cercanía y participación del evaluador en el proceso mismo de la evaluación. El objetivo es comprender fenómenos de ocurrencia natural en su contexto natural de ocurrencia. Los modelos más difundidos por esta generación son la evaluación iluminativa de Parlett y Hamilton y la evaluación naturalista de Lincoln y Guba.

Tipos de Evaluación

La Evaluación sumativa coincide en grandes líneas con la evaluación tradicional, es la más utilizada en nuestras instituciones educativas y la que se conoce con mayor precisión. Se caracteriza por aplicarse al final de cada período de aprendizaje: final del lapso. La misma puede ser periódica y hasta frecuente; pero en todo caso presenta el carácter de ser aplicada después de finalizar un determinada período de instrucción.

En cuanto a su finalidad es de carácter selectivo: determina la posición relativa del alumno en el curso o grupo, calificarlo a efecto de promoción o no promoción, de titulación o no, de situarle en determinados niveles de eficiencia según una determinada escala. La característica más destacada de este tipo de evaluación es quizás la generalidad del juicio que en ella se formula sobre el aprendizaje de los alumnos.

En cuantos a los efectos didácticos, hay que destacar el hecho de que la evaluación sumativa, al constituir un elemento final del proceso didáctico, extiende su efecto sobre la unidad siguiente (contenido) desvinculándose de la unidad anterior.

La evaluación diagnóstica, este tipo de evaluación es de carácter eminentemente específico, trata de determinar la existencia o no en el alumno de las habilidades requeridas para un determinado aprendizaje. Entre sus características específicas tenemos: tiene lugar al comienzo del proceso de aprendizaje; su finalidad consiste en determinar el grado o nivel de preparación del alumno ante de enfrentarse a una unidad de aprendizaje; determinar cuáles pueden ser las dificultades y aciertos necesarios en el contenido base para el aprendizaje de la unidad requerida.

En la medida en que la evaluación diagnóstica se centre en la determinación de habilidades y ya no en aprendizajes concretos, es factible la utilización en ella de instrumentos estandarizados, válidos para áreas extensas de la población.

Evaluación formativa, este tipo de evaluación se caracteriza por aplicarse durante el propio proceso de didáctico de aprendizaje; es decir, a lo largo del mismo. La finalidad de la evaluación formativa estriba en el perfeccionamiento del proceso didáctico en un momento donde todavía puede producirse.

En cuanto al grado de generalidad del juicio emitido, la evaluación formativa es eminentemente específica, trata de detectar el nivel de aprovechamiento del alumno en cada habilidad de aprendizaje, y los tipos de errores más frecuentes que se dan en el mismo. Pedagógicamente, la evaluación formativa viene a construir una constatación permanente del nivel de aprendizaje de cada alumno en cada unidad instructiva. Dicha constatación se puede realizar a través de la aplicación de evaluaciones continuas y de forma sistemática desde las competencias a lograr.

5. Paradigma, Método y Diseño de Investigación

La investigación se presenta bajo el paradigma de la investigación cualitativa, puesto que su objetivo no es cuantificar datos, sino analizarlos de una manera comprensiva. La misma se considera de tipo descriptiva porque consiste en la caracterización y descripción de las concepciones de la evaluación educativa por parte de docentes del área de matemática. El método se basa en la indagación de registro, en este caso la entrevista.

Se usará la Codificación de Datos como técnica de análisis para generar teorías partir de los datos recogidos en el campo. Cabe señalar que el proceso utilizado se basa en la Teoría de Fundamentada (Strauss y Corbin, 2002) la cual explicaremos a continuación.

Diseño del instrumento para la recolección de los datos

En la presente investigación se utilizó la entrevista como técnica fundamental para la recogida de los datos. Se utilizó esta técnica por ser muy valiosa en la investigación cualitativa en cuanto a la recogida de todo tipo de información acerca del problema estudiado. Se utilizó el tipo de entrevista estructurada por ser más organizada y formalizada en cuanto a la información que se requiere; y por otra parte, porque este tipo de entrevista permite establecer el tópico y orden de las preguntas.

Especificaciones para el protocolo de recolección de datos

Objetivo General: Analizar son las concepciones que tienen los docentes de matemáticas acerca de la evaluación de los aprendizajes en el nivel de Media diversificada					
Objetivo	Constructo	Definición Conceptual	Definición operacional	Dimensiones	Ítems
Analizar las concepciones (conceptualizaciones) de evaluación de docentes de educación media	Concepción (conceptualización) de evaluación	Son las ideas claves utilizadas para formular un concepto de la evaluación.	Términos asociados a la evaluación en el discurso de los docentes	Contextual Disciplinar Temporal Criterios Estándares Instrumentos estudiantes Paradigma Modelo (generación: juicio de expertos, medición, logro, como sistema y para la toma de decisiones, democrática, negociación) Vinculación con enseñanza Utilización de resultados	– ¿Qué es para ti la evaluación educativa? – ¿Quién debe evaluar? – ¿Para qué y por qué de evalúas? – ¿Quién o quiénes deben evaluar? – ¿Qué tipo de evaluación aplicas con mayor énfasis? – ¿Por qué este tipo de evaluación? – ¿Con qué periodicidad evalúas? – ¿Qué instrumentos utilizas? – ¿Cómo utilizas los resultados?

Preguntas para la entrevista

1.- ¿Qué es para ti la evaluación educativa? (Conocer la concepción general que se tiene de la evaluación en el ámbito educativo); 2.- ¿Por qué y para qué evalúas? (Conocer la justificación o propósito del para qué de evaluar); 3.- ¿Quién debe evaluar? (Conocer si asume la evaluación como un proceso integral: alumnos –docente); 4.- ¿Qué tipo de valuación aplicas con mayor énfasis? (Conocer el tipo de evaluación predominante en el entrevistado); 5.- ¿Por qué ese tipo de evaluación? (Conocer los elementos que justifica ese modelo de evaluación); 6.- ¿Con qué periodicidad evalúas?

(Saber la tendencia de la evaluación: formativa o sumativa); 7.-¿Qué evalúas en tus estudiantes? (Conocer hacia a donde enfoca la evaluación: conocimientos, actitudes, procedimientos, etc.); 8.- ¿Qué instrumentos utilizar para evaluar? (Conocer los instrumentos evaluativos aplicados por el profesor); 9.- ¿Cómo utilizas los resultados de la evaluación? (Conocer qué hace el profesor con los resultados)

Recolección de datos

Con la presente investigación se pretende conocer la concepción que tienen los docentes sobre la evaluación continua en el nivel de Educación Media Diversificada. Para lo cual se parte de cuatro entrevistas realizadas a docentes del área de matemática del nivel ya mencionado y perteneciente a dos instituciones educativas diferentes: "Alianza – Fe y Alegría" y "Juan Landaeta".

Protocolo de entrevista

1. El entrevistador se presenta ante el entrevistado.
    1.1. Agradece la oportunidad al entrevistado por realizar la misma.
    1.2. El entrevistador (WL) explica al entrevistado El tema a tratar, los objetivos y finalidad de la entrevista.
2. El entrevistador brinda un espacio para que el entrevistado aclare posibles dudas.
3. El entrevistador solicita al entrevistado información personal y académica (nombre, apellido, profesión, cargo, tiempo, entre otros…); y entrega al entrevistado el Acta de Consentimiento Informado, para su aceptación (firma).
4. Se da inicio a la entrevista.
5. Al final de la entrevista el entrevistador reitera el agradecimiento al entrevistado por su valiosa información y tiempo dedicado.
6. El entrevistador se compromete a compartir los resultados una vez finalizada la investigación.

A continuación se transcriben las entrevistas que se realizaron; recordando que los nombres de los profesores entrevistados han sido cambiados con el fin de proteger su privacidad. En tal sentido los profesores entrevistados se identifican con los seudónimos: Profesor 1, profesor 2, profesor 3 y profesor 4.

Entrevistas n° 1

Transcripción y construcción de categorías, las mismas se indican en paréntesis.

WL: - ¿Qué es para ti la evaluación educativa?

1.1 Bueno la evaluación considero que es una…un estudio que se hace a alumnos (evaluación de alumno)
1.2 para saber el nivel (conocer) que tienen o
1.3 que tanto aprendizaje (aprender) se obtuvo
1.4 de la clase (contexto de la evaluación),
1.5 o lo que han traído de los grados anteriores;
1.6 en este caso se hace un estudio diagnóstico (evaluación diagnóstica),
1.7 el cual se hace con la evaluación para saber (conocer) qué es lo que saben…
1.8 es captar sus debilidades y fortalezas (evaluación diagnóstica).

WL: - ¿Por qué y para qué evalúas?

Bueno la respuesta creo que ya está dentro de lo que ya dije.

1.9 Exactamente se evalúa para saber (conocer) el nivel que llevan,
1.10 y saber qué (conocer) …
1.11 qué detalles tienen o están faltando (identificar errores)
1.12 Si el error es de los años anteriores (identificar errores),
1.13 y por qué…bueno yo creo que se evalúa por todas las razones anteriores.

WL: - ¿Quién o quiénes consideras que deben evaluar?

1.14 Bueno yo creo que no sólo el profesor…
1.15 creo que todos debemos hacer una auto evaluación (evaluación de sí mismo).
1.16 Es decir, cada uno debe hacerla para saber (conocer) y

1.17 estar consciente de en donde está fallando (identificar errores),
1.18 eso es algo fundamental.

WL: - ¿Qué tipo de valuación aplicas con mayor énfasis?

1.19 ¿Cómo así…?

WL: - -me refiero a evaluaciones formativas, sumativas…

1.20 Ah, ok. Bueno yo voy más a evaluaciones continua (evaluación continua),
1.21 e incluso podría decir que las evaluaciones (evaluar), este año han sido muchos más (número de evaluaciones).
1.22 Pero yo no los mando a hacer trabajos (forma de no evaluar),
1.23 yo creo que eso en matemática no es bueno (creencia).
1.24 Eso es puro corta y pega de internet. A parte de que no es tan fácil aprender algo (conocer) de matemática leído y
1.25 mucho más si nunca lo ha visto es más complicado (dificultad).
1.26 Claro si los mando a buscar conceptos (investigar) y
1.27 los discutimos en clase (discernir).

WL: - ¿Por qué te identificas más con la evaluación continua?

1.28 Si, lo que pasa es que anteriormente cuando
1.29 hacía prueba de lapso (instrumento de evaluación),
1.30 se veía que…que se saturan de información y temas para estudiar.
1.31 Las notas disminuyen (poco conocimiento)
1.32 en las pruebas, de lapsos (instrumento de evaluación).
1.33 Yo les hago evaluaciones continuas (evaluación continua), y salen bien,
1.34 pero cuando llegan las pruebas de lapso (instrumento de evaluación),
1.35 salen mal (poco conocimiento)

WL: - ¿Con qué periodicidad evalúas?

1.36 Casi que cada dos clases una evaluación (ritmo de evaluación),

1.37 ya sea un tallercito (instrumento de evaluación) en pareja o
1.38 una prueba individual (Evaluación individual).

WL: - ¿Qué evalúas en tus estudiantes?

1.39 ¿Qué evalúo…? En línea generales desde la parte de …de …si es ordenado (evaluación de actitud),
1.40 si desarrolla paso a paso los procedimientos (evaluación de procedimientos)…
1.41 considero, si el estudiante es más activo y salta los pasos para llegar al resultado (evaluación de aptitud).
1.42 Este… cómo trabaja, toda esa parte, e incluso para corregir yo si soy un poco más flexible (evaluación flexible).
1.43 Si yo veo que tiene todo el procedimiento (evaluación de procedimientos)…
1.44 y el resultado malo, le considero algo.

WL: - ¿Qué instrumentos utilizar para evaluar?

1.45 Yo voy por las pruebas (instrumento de evaluación).
1.46 Las pruebas individuales (instrumento de evaluación individual).
1.47 Porque las de grupos, siempre trabajan 1 ó 2 estudiantes y los demás solo aparecen anotados.
1.48 Los talleres (instrumento de evaluación grupal) los realizo en pareja.
1.49 El taller para que refuercen (instrumento de evaluación grupal)
1.50 y luego las pruebas individuales (instrumento de evaluación individual).

WL: - ¿Cómo utilizas los resultados de la evaluación?

1.51 Bueno…esto…trato de enfocarme en los errores más comunes (identificar errores), ,
1.52 en lo que se equivocan (identificar errores),
1.53 Bueno en este caso me tomo un momento de la clase para reforzar y corregir los errores (identificar errores).
1.54 Es decir, aclarar dudas (corregir errores)

Entrevistas n° 2

Transcripción y construcción de categorías

WL:- ¿Qué es para ti la evaluación educativa?

2.1 Es la manera de cómo se puede medir el conocimiento (medir conocimiento)

2.2 de los estudiantes (evaluar estudiantes)

WL: - ¿Por qué y para qué evalúas?

2.3 Para saber el grado de conocimiento (evaluar conocimiento), valga la redundancia, que tienen los alumnos.

2.4 Claro luego de haber dado los contenidos y temas (evaluación de contenidos).

WL: - ¿Quién debe evaluar?

2.5 Para mi deben evaluar todos (coevaluación) .

2.6 Tanto los docentes como los alumnos deben evaluarse mutuamente (co evaluación),

2.7 y para ello existen las hetero, co y auto evaluaciones.

WL: - ¿Qué tipo de valuación aplicas con mayor énfasis?

2.8 Mira, siempre al principio del año escolar tendemos a hacer una evaluación explotaría – diagnóstica (evaluación diagnóstica).

2.9 Luego de allí, comenzamos con las evaluaciones continuas (evaluación continua)

2.10 y la prueba de lapso (evaluación de lapso).

2.11 Yo, aplico con mayor énfasis la continua (evaluación continua)

WL: - ¿Por qué ese tipo de evaluación?

2.12 Con la continua, los alumnos salen mejor porque se evalúan al momento los contenidos dados (evaluación al momento).

2.13 Aunque siempre salen mal en la prueba de lapso (instrumento de evaluación).

2.14 Yo creo que es porque ya se les ha olvidado los temas (aprendizaje no consolidado).

WL: - ¿Con qué periodicidad evalúas?

2.15 Mira, cada 15 días según el contenido dado (número de evaluaciones).

WL: - ¿Qué evalúas en tus estudiantes?

2.16 El conocimiento que tienen sobre el tema dado (evaluación de aptitud).

WL: - ¿Qué instrumentos utilizar para evaluar?

2.17 Pruebas cortas y talleres (instrumento de evaluación)

WL:- ¿Cómo utilizas los resultados de la evaluación?

2.18 Para reforzar los contenidos vistos o en donde los alumnos están fallando (corregir errores y reforzar)

Entrevistas n° 3

Transcripción y construcción de categorías.

WL:- ¿Qué es para usted la evaluación educativa?

3.1 Es un proceso amplio y complejo (proceso)

3.2 que nos permite conocer el rendimiento de los estudiantes según al área evaluada (evaluar).

WL:- ¿Por qué y para qué evalúas?

3.3 Para medir en qué proporción han logrado los estudiantes los contenidos dados (medición de contenidos).

WL:- ¿Quién debe evaluar?

3.4 El profesor es la persona más idónea para evaluar la materia (evalúa el profesor).

3.5 El profesor es el que conoce los contenidos y temas de estudio (evaluación de experto)

WL:- ¿Qué tipo de evaluación aplicas con mayor énfasis?

3.6 Generalmente pruebas corta y prácticas (instrumento de evaluación) por ser del área de matemática, y

3.7 algunas veces talleres en pareja (instrumento de evaluación.

3.8 Todo mediante evaluación continua (evaluación continua)

WL:- ¿Por qué ese tipo de evaluación?

3.9 Con los talleres los estudiantes aclaran dudas entre ellos y con el profeso (mejorar el rendimiento) e incluso les permito sacar apuntes y cuadernos.

3.10 Esto los ayuda a reforzar las dudas (mejorar rendimiento). Luego aplico una prueba individual de los contenidos vistos (instrumento de evaluación)

WL:- ¿Con qué periodicidad evalúas?

3.11 Según el tema cada dos semanas (periodicidad -número de evaluación)

WL:-¿Qué evalúas en tus estudiantes?

3.12 El conocimiento sobre el tema desarrollado en clase (evaluación de conocimiento)

WL:- ¿Qué instrumentos utilizar para evaluar?

3.13 Pruebas cortas y talleres (instrumentos de evaluación)

WL:- ¿Cómo utilizas los resultados de la evaluación?

3.14 Para fijar las notas (asentar notas) y

3.15 de ser necesario aclarar las dudas (aclarar dudas)

Entrevista n° 4

Transcripción y construcción de categorías

WL: - ¿Qué es para usted la evaluación educativa?

4.1 Es un proceso que permite al docente medir los logros y alcances de los estudiantes (evaluar – medir)

4.2 en cuanto a los objetivos dados

WL:- ¿Por qué y para qué evalúas?

4.3 Para saber si se fijó o aprendió en los alumnos lo que se le dio (fijación de conocimiento)

WL:- ¿Quién debe evaluar?

4.4 El personal calificado, es decir el docente (docente como único evaluador)

WL:- ¿Qué tipo de valuación aplicas con mayor énfasis?

4.5 La formativa y la sumativa. La formativa la desarrollo durante toda la clase (evaluación formativa);

4.6 mientras que la sumativa es parte de las evaluaciones continuas (evaluación continua)

WL:- ¿Por qué ese tipo de evaluación?

4.7 La sumativa me permite medir lo que se va logrando (evaluar- medición)
4.8 cada dos semanas aproximadamente (número de evaluaciones)

WL:- ¿Con qué periodicidad evalúas?

4.9 Aproximadamente 8 evaluaciones por lapso (número de evaluación);
4.10 que es lo que llamo evaluaciones continuas (evaluación continua).
4.11 Al final del mismo lapso realizó una evaluación general llamada prueba de lapso.(instrumento de evaluación)

WL:- ¿Qué evalúas en tus estudiantes?

4.12 En clase evalúo la participación (evaluación de actitud),
4.13 el logro de los objetivos (evaluación de conocimiento)
4.14 en comportamiento (evaluación de actitud), en general todo eso.

WL:- ¿Qué instrumentos utilizar para evaluar?

4.15 Registro de participación, escala de participación, lista de cotejo y las pruebas cortas (instrumentos de evaluación)

WL:- ¿Cómo utilizas los resultados de la evaluación?

4.16 Al final de lapso me permite saber si los estudiantes aprendieron o no (evaluar conocimiento) y
4.17 para fijar las notas (colocar notas).

6. ANÁLISIS DE LOS DATOS

De las entrevistas realizadas a los profesores surgen elementos esenciales del proceso de enseñanza y aprendizaje, tales como: alumno, procesos, clase, evaluación, grado o niveles educativos, diagnósticos, conocimiento, debilidades, fortalezas, errores entre otros. Todos estos elementos son fundamentales en el proceso de evaluación.

Coinciden los profesores que el acto de evaluar va orientado a conocer mediante la medición (cuantificar) lo aprendido por el estudiante durante el proceso de aprendizaje. Los mismos mantienen que mediante la evaluación continua los estudiantes obtienen mejores resultados, es decir, mayor conocimiento o aprendizaje. Sin embargo, no comprende por qué en las prueba de lapso salen mal.

Por otra parte el conocer e identificar posibles fallas y errores que pudieran cometer los estudiantes es la justificación del proceso de evaluar desde lo educativo presentado por los profesores en las entrevistas. Por lo registrado en las mismas, los profesores recurren a la evaluación continua como medio que les permita lograr identificar posibles errores; y la misma (evaluación continua) se presenta con una periodicidad de cada dos semanas aproximadamente.

Los instrumentos de evaluación más aplicados o utilizados por los profesores son las pruebas y los talleres. Las pruebas son aplicadas de forma individual a los estudiantes y generalmente al final de lapso; mientras que los talleres son realizados por los estudiantes en forma grupal (pareja). No se registra otra forma de evaluar diferentes a las anteriores (pruebas y talleres). De hecho, uno profesor no cree posible el aprendizaje de las matemáticas mediante la elaboración de trabajos, "*yo no los mando a hacer trabajos, yo creo que eso en matemática no es bueno*"; y por otra parte, enfoca la enseñanza de la matemática en lo práctico, dejando en un segundo plano y cuestionada la enseñanza de la misma mediante la teoría, al decir: "aparte de que no es tan fácil aprender algo de matemática leído".

En el análisis de las entrevistas realizadas a los profesores, surgen conceptos que se pueden identificarse como categorías. Primero se describieron las posibles categorías surgidas de la entrevista, seguida de las frases más representativas de las mismas; y luego se identificaron las subcategorías que subyacen en las mismas.

Una vez identificadas las categorías y subcategorías, se realizó la codificación axial y selectiva producto de las mismas.

Categorías y subcategorías encontradas en la entrevista a partir de la triangulación

Categorías: Conocer, identificar errores, evaluar, instrumentos de evaluación y periodicidad de la evaluación.

Subcategorías: Evaluación de los alumnos, aprender, contexto de la evaluación, evaluación diagnostica, evaluación de sí mismo, evaluación continua, creencia, dificultad, investigar, discernir, poco conocimiento, ritmos de evaluación, evaluación individual, procedimiento, actitud, aptitud, evaluación flexible y semanalmente.

Definición de las categorías y su relación con las subcategorías.

Conocer: Esta categoría se refiere a aquellas frases que apuntan a la necesidad averiguar sobre algo o algunas cualidades de alguien. Se ubican en las frases identificadas con los números: 1.1, 1.2, 1.7, 1.9, 1.10, 1.16, 1.21, 1.24, 2.1, 2.3, 2.16, 2.2, 3.3, 3.11, 4.1 y 4.7, entre otras. (Primer digito: número de la entrevista. Segundo digito: número de línea en la entrevista)

Evaluar: Esta categoría se refiere a la intención de emitir un juicio, de juzgar, o de estimar una situación o proceso, y se divide en dos partes: según qué se evalúa y la intención de la evaluación. Según qué se evalúa da origen a tres sub categorías: actitud, aptitud y procedimiento; y según la finalidad se desprenden las subcategorías: corregir errores y fijar notas.

1. Actitud: esta subcategoría se refiere a la evaluación del comportamiento e iniciativa del estudiante. Se ubican en las entrevistas en las líneas:: 1.39, 4.12, 4.14
2. Aptitud: esta subcategoría hace referencia a la evaluación de conocimiento u aprendizaje por parte del estudiante. Se ubican en las entrevistas en las líneas: 1.41, 2.16, 3.11, 4.13 y 4.16
3. Procedimiento: esta subcategoría se refiere a las habilidades y destrezas del estudiante. Se ubican en las entrevistas en las líneas: 1.40 y 1.43
4. Corregir errores: La subcategoría de errores se refiera a todas aquellas frases en la cuales se asume una debilidad, carencia o equivocación. Se ubican en las entrevistas en las líneas: 1.11, 1.12, 1.17, 1.51, 1.52, 1.53, 2.18, 3.9, entre otras.

5. Fijar notas: Esta subcategoría se refiere al propósito de evaluar con miras a fijar o cuantificar el aprendizaje. Se ubica en las entrevistas en las líneas: 3.13 y 4.17

Instrumento de evaluación: Esta categoría se refiere a las frases en donde se evidencian procedimientos y acciones que conducen a la obtención de información. De esta se desprenden dos subcategorías:

1. Prueba de lapso: Esta subcategoría se refiere al proceso que recoge información de forma individual de los temas desarrollados durante el lapso. Se ubican en las entrevistas en las líneas: 1.29, 1.32, 1.34, 1.45, 1.46, 1.50, 4.15
2. Talleres: Se refiere a un procedimiento que recoge información en pareja de un tema desarrollado. Se ubican en las entrevistas en las líneas: 1.37, 1.48, 1.49, 2.17, 3.7, 3.12

Periodicidad de valuación: Esta categoría se refiere a los intervalos de tiempo (días, semanas, etc) entre las evaluaciones. Se ubican en las entrevistas en las líneas: 1.21, 1.36, 2.15 y 3.11, entre otras.

Tipos de evaluaciones: Esta categoría se enfoca en los modelos de evaluación según su finalidad utilizada por los docentes. La misma se clasifica en dos subcategorías:

1. Diagnóstica: Esta subcategoría se centra en la evaluación cuya finalidad es precisar el conocimiento de los estudiantes al comienzo del año escolar. Se ubican en las entrevistas en las líneas: 1.16, 1.18, 2.8
2. Continua: esta subcategoría se refiere a las evaluaciones efectuadas en periodos de tiempos cortos. Se ubican en las entrevistas en las líneas: 1.20, 1.33, 2.9, 2.11, 2.12, 4.6, 4.10

Codificación axial

El énfasis de la codificación axial se pone de manifiesto en el enfoque que hace el profesor sobre de la categoría Evaluar.

La categoría de evaluar se presenta con gran énfasis en la entrevista y la misma va muy ligada a la categoría de conocer. Los entrevistados centran el proceso de la evaluación educativa en la necesidad o propósito de medir el nivel de aprendizaje de los estudiantes, las debilidades y fortalezas, entre otros.

En un primer momento la categoría de evaluar la centran los docentes en el qué evaluar. Es decir, qué evalúan los docentes, en este sentido se identificaron tres aspectos, los cuales clasifican como subcategorías, y estos son: actitudes, aptitudes y procedimientos. En un segundo momento, la categoría de evaluar la justifican los docentes en dos aspectos básicos, los cuales son: corregir errores y fijar notas, ambas identificadas como subcategorías. Sin embargo, aunque los profesores manifiestan la intención de corregir errores, no se evidencia en las entrevistas cómo lo hacen.

Otra categoría importante de señalar es la de Instrumentos de evaluación, esta categoría es planteada por todos los profesores entrevistados, desde dos subcategorías, las cuales se identifican como: pruebas de lapso y talleres. La primera (prueba de lapso) es aplicada por los docentes al final del lapso propiamente dicho, de forma individual y con la única intención de fijar una nota. La segunda (talleres), es el instrumento más utilizado por los profesores como forma de evaluación continua, no tanto por su finalidad, sino por periodicidad con que se efectúa.

La categoría tipo de Evaluación, representa las dos formas de evaluación más aplicadas por los profesores. Los profesores identifican la evaluación continua (subcategoría), en el sentido que las mismas se caracterizan por realizarse cada dos semanas o cada 15 días aproximadamente. Mientras la evaluación diagnóstica (subcategoría) únicamente la efectúan al comienza del lapso.

Codificación selectiva

La categoría central se sigue manteniendo en la evaluación. Pero evaluación como proceso de conocer en el estudiante diferentes procesos (actitudes, aptitudes y procedimientos), con el fin de corregirlos –de haber errores- o fijar una nota. Estos procesos se registraran con diferentes instrumentos de evaluación: talleres y pruebas, y las mismas se harán con un determinado ritmo de evaluación. La finalidad de conocer, los instrumentos y en ritmo de evaluación determinarán el tipo de evaluación utilizado por los docentes.

Teoría emergente

Los docentes conciben la evaluación educativa como el proceso que le permite medir el aprendizaje de los estudiantes, utilizando para esto los instrumentos identificados como: taller y pruebas de lapso; cuya evaluación se efectúa con la finalidad o la intención de corregir posibles errores y fijar una nota.

Y por otra parte, identifican como evaluación continua, a la evaluación realizadas a través de talleres cuyo ritmo de evaluación se efectúen cada dos semanas aproximadamente.

7. Conclusiones

Del presente reporte de investigación se desprenden los siguientes resultados, todos estos enmarcados dentro de la concepción de evaluación presentado por los docentes entrevistados.

- Se evidencia en los docentes que la finalidad del proceso de evaluación es fijar una nota en el estudiante; por lo cual se separa el proceso de evaluar del proceso didáctico.
- Los docentes se ubican en la 1ra y 2da generación de la evaluación: medición y juicio. Lo cual refleja su poca visión de asumir la evaluación como un proceso integrador entre alumno, docente, escuela, comunidad, entre otros.
- Los docentes asumen que la evaluación es continua en función del tiempo (cada dos semanas); y no, en función de detectar habilidades, destrezas y errores más frecuentes en el proceso didáctico.
- Los instrumentos evaluativos aplicados con mayor énfasis son los talleres y pruebas. El no aplicar otros instrumentos (trabajos, mapas mentales) no permite que el docente

evalué otros procesos y aspectos como la creatividad, responsabilidad y el respeto.

- La concepción de los docentes de matemática de los colegios mencionados, se fundamenta en la evaluación como un proceso orientado a la medición –cuantificar- de los aprendizajes de los alumnos.
- Es posible que esta concepción de la evaluación presentada, este muy relacionada con la profesión de los docentes entrevistados. Aunque los 4 docentes se desempeñan como profesores de matemáticas, 3 de ellos son profesionales en el área de ingeniería.

REFERENCIAS

Alves, E., Acevedo, R. (1999). La evaluación cualitativa: Reflexiones para la transformación de la realidad educativa. Ediciones: Cerined.

Barriga, F., Hernández, G. (2006). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo –una interpretación constructivista. México, D.F.: Mc Graw-Hil.

Guba, E. y Lincoln, Y. (2002). Paradigmas en competencia de la investigación cualitativa. Compilación de Denman, C., Haro, J. pp. 113-145.

Guba, E., y Lincoln, Y. (2002). Paradigmas en competencias en la investigación cualitativa. Compilación de Dennan, C., y Haro, J. Antología de métodos cualitativos en la investigación social. P. 113-145. Sonara: Colegio de Sonora.

Hernández, P. (1998). Aprendamos a elaborar exámenes escritos. 3ra ed. EUNED.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2013). Estrategia educación y formación 2020: informe español. Edita: Secretaria general técnico: España.

Parlett, M., y Hamilton, D. (1983). La evaluación como iluminación, en Gimeneo, J. y Pérez, J. (1983): La enseñanza, su teoría y su práctica. Madrid: Akal.

Strauss A., Corbin J. (2002). Bases de la investigación cualitativa. Técnicas de procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada. Editorial: Universidad de Antioquia.

CONCEPTS THAT HAVE TEACHERS OF MATHEMATICS ON THE ASSESSMENT OF LEARNING OUTCOMES AT THE LEVEL OF THE AVERAGE DIVERSIFIED

ABSTRACT. This research was focused on knowing the conception that have teachers of mathematics on the assessment of learning outcomes. The research purpose was to contribute to the understanding of the theoretical concepts that have teachers of mathematics in education Media diversified on the evaluation of learning. The aim was to analyze the conceptions that have teachers of mathematics on the assessment of learning outcomes at the level of average diversified and the underlying paradigms of evaluation. The research methodology was presented under the qualitative research paradigm, since their aim was not to quantify data, but analyze them in a comprehensive way. It was descriptive because it consisted of characterization and description of the conceptions of educational evaluation by teachers in the area of mathematics. The method was based on the investigation of registration, in this case interview. As instrument for data collection used the interview as a fundamental technique for the collection of data. The data coding as analysis technique was used to generate theories from data collected in the field, the process used was based on the grounded theory (Strauss and Corbin, 2002). As a result is evident in the teachers that the purpose of the evaluation is to attach a note to the student; It separates the process of evaluation of the teaching and learning process; teachers assume that the evaluation is ongoing in function of time (every two weeks); and not in function of detecting skills and more frequent errors in the development of the mathematical skills, among others.

Keywords: Continuous assessment; Grounded theory; Learning.

WILLIAMS LÓPEZ

Universidad Central de Venezuela, Venezuela

williamsjld@gmail.com

williams.lopez@ciens.ucv.ve

Tierra de Nadie, vista desde Biblioteca Central. Universidad Central de Venezuela.
Foto: Aquiles Salcedo Bolívar.

PRUEBAS Y DISCURSO MATEMÁTICO EN LOS EDUCANDOS DE SECUNDARIA

WILLIAM GONZÁLEZ CALDERÓN Y ÓSCARY ÁVILA-HERNÁNDEZ

RESUMEN: Desde la época de Aristóteles se ha considerado a la demostración como una característica esencial dentro de las matemáticas, y es celebre la frase "que no entre aquí quien no sepa geometría". Cuando se anhela deliberar y abordar en el aula de clases la transcendencia del arte de la demostración matemática, no es un misterio que este desafío amerita vincular e introducir en el joven educando, el inminente concepto del "argumento-fuerte", y sin lugar a duda la institucionalidad matemática le ha otorgado el reconocimiento a la civilización griega la autoría del método axiomático; y son los Elementos de Euclides los que sustentan dicho reconocimiento. La demostración matemática es la actividad de validación de la cual parte los matemáticos para justificar sus teorías, las cuales han sido definidas gracias a un sistema axiomático. Para finales del siglo XIX las magnas ideas de Georg Cantor sobre la teoría de conjuntos habían logrado imponerse en la comunidad matemática; dicho logro potencialmente se obtuvo en el Congreso Internacional de Matemáticas en 1897, cuando Hadamard señaló la importancia de las aplicaciones de la teoría de conjuntos dentro del área del análisis. Uno de los objetivos, es mostrar resultados cualitativos y cuantitativos frente a tres (3) pruebas diagnósticas aplicadas a 61 estudiantes del grado noveno (9º) de secundaría de 2 colegios rurales e independientes en el departamento de Santander, así mismo se describen parte de los procesos de argumentación matemática efectuadas por los educandos. Con los resultados anteriores se establecerá la siguiente hipótesis-doxa: "El trinomio prueba-conjetura-argumentación debe hacer parte del contexto escolar y social en el joven educando". Reafirmando en este caso, que en el aula de clases, las formas de argumentación matemática y las conjeturas, potencialmente están ligadas a los escenarios epistemológicos y al currículo de la misma institución educativa.

Palabras Clave: Prueba; argumentación; aritmética; socioepistemología; educación matemática.

González Calderón, W y Ávila-Hernández, O. (2017) Pruebas y Discurso Matemático en los Educandos de Secundaria. En: Salcedo, A. (Comp.). *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI*, (pp. 131 – 144). Caracas: Centro de Investigaciones Educativas, Escuela de Educación. Universidad Central de Venezuela.

1. INTRODUCCIÓN

A **partir de los primeros filósofos griegos, originalmente**, el Ser puede ser interpretado como aquella fuerza imperante que emerge y permanece erguida merced a ella misma (López, 2013) y sin temor este autor en su obra señala que el Ser significa: "salir de lo oculto y el sostener a sí". Lo anterior se puede llegar a interpretarse como que el ser tiene la posibilidad de *mostrarse* dentro de los contornos del límite pero también de *ocultarse y encubrirse* en la apariencia. Autores, como Ibañes (2001), han llamado la atención, sobre las 2 actividades, hacer demostraciones y entender demostraciones, la cuales están ligadas en el aprendizaje de la demostración, y podrían llegar a ser consideradas como complementarias la una de la otra. Un tópico de constante discusión y debate en los diversos escenarios de la Educación matemática, es la pertinencia del aprendizaje y la enseñanza de la demostración en la etapa escolar, y muestra de ello en Colombia, son los nobles y cuestionados lineamientos curriculares de Matemáticas emanados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998). Los cuales señalan al razonamiento matemático como una actividad que debe estar ligada con la formulación de hipótesis, elaboración de predicciones, conjeturas y búsqueda de contraejemplos, lo cual desde el año 2014 se convirtió en un requerimiento y parte de la prueba estatal ICFES Saber 11º, y con la cual califican a los educandos de ultimo grado de secundaria.

Ningún docente de matemáticas puede dudar sobre la vital importancia que posee la aritmética en la enseñanza y formación matemática del educando (Canavelli, 2004). En Colombia los niños al iniciar su formación matemática en la secundaria, llevan consigo las nociones, conceptos e ideas desarrollados en la etapa preliminar de la educación primaria; y no es un misterio que parte de estos conceptos están relacionados a modos muy particulares e informales de representación y razonamientos, ya que generalmente los ejercicios y ejemplos de la clase de matemáticas, están colmados, de procedimiento mecánicos donde el estudiante no logra argumenta y refutar, aspectos medulares en los respectivos ejercicios (Villiers, 1993).

El profesor Paul R. Halmos (1960), conocido por el texto "Naive Set Theory", en un artículo señala y pregunta (De Losada, 1983) ¿De qué consiste verdaderamente la matemática?: De ¿Axiomas? ¿Teoremas (como el fundamental de la aritmética)? ¿Conceptos algebraicos como grupos y clases? ¿Fórmulas (como la fórmula de la integral de Cauchy)? ¿Hipótesis (como la de Riemann)? o ¿Consiste en demostraciones, como la del Teorema de los cuatro colores, o como la de Andrew Wiles del último teorema de Fermat?

Desde el siglo XVII, el método deductivo se ha presentado como garantía única de validez del conocimiento, relacionando la experiencia con la racionalidad (Boyer, 1996). Durante nuestra práctica, de manera reiterada hemos escuchado a reconocidos investigadores afirmar que: "las ecuaciones, los conjuntos y los números constituyen parte esencial de las matemáticas", y un selecto grupo de estos dedican su vida a analizar este tipo de objetos, tratando de describir y construir algunas propiedades interesantes a través de una serie de argumentos bien construidos en el marco de una teoría axiomática (Guerrero, 2004). Jean Dieudonné (1996) sintetiza afirmando: "*No puede haber demostración "rigurosa" excepto en el contexto de una teoría axiomática*"

Para la Real Academia de la lengua española (R.A.E), argumento es un razonamiento que se emplea para probar o demostrar una proposición, o bien para convencer a alguien de aquello que se afirma o se niega; y razonamiento es una serie de conceptos encaminado a demostrar algo o a persuadir o mover a oyentes o lectores (Diccionario de la lengua española, Vigésima segunda edición). Con base en las dos definiciones anteriores "podríamos" afirmar que un texto argumentativo es aquel que se ha diseñado para convencer o disuadir a un grupo de interlocutores. Durante largo tiempo, la matemática, ha sido considerada como la ciencia reina colmada y dotada por excelencia de la deducción, y en la cual la verdad de sus afirmaciones se sustenta en el carácter deductivo de la lógica. Sin embargo los conceptos e ideas relacionadas con las demostraciones no han permanecido estáticas, sino que han cambiado notablemente proyectando y plasmando los diversos escenarios socioculturales en los que se desenvolvían y vivían. En (Ibañes, 2001) y (Martínez, 2005) se describe como el término argumentación es utilizado en varios contextos: como en la ciencia, en la vida cotidiana, en el área de las matemáticas, y por supuestos en el aula de clases. Desde la visión aristotélica-matemática, las demostraciones son por excelencia textos-argumentativos, a los cuales tradicionalmente se les ha designado un valor de convencimiento, ya que establece la veracidad de los respectivos enunciados y proposiciones.

Gracias a la observación y a la misma experiencia como estudiantes y profesores de matemáticas, hemos notado que en el aula de clases, las argumentaciones desempeñan distintos roles, en los que se pone sobre la mesa una sucesión de habilidades propias del pensamiento racional (Ávila, 2014). Durante dicho proceso el educando recibe influencias de factores diversos, los cuales varían según el escenario y el contexto académico escolar donde él se encuentre inmerso. En un artículo del profesor Campos (2007) se reseña que el matemático inglés David Wells, en el año de 1990 publicó un artículo en la revista The Mathematical Intelligencer titulado "Which is the most beatiful? en el cual propone escoger el teorema más bello de una lista de 24 afirmaciones teoremas, asignándole una calificación entre 0 y 10. La mayor parte de las respuestas se apoyan en la sencillez y la brevedad. Sencillez que no se debe confundir con facilidad, entre los teoremas se destacan:

(a) El conjunto de los números primos es infinito.
(b) No existe un número racional cuyo cuadrado es igual a 2.
(c) Hay 5 poliedros regulares.
(d) $e^{i\pi} + 1 = 0$
(e) El número π es trascendente.
(f) Formula de Euler para los poliedros: $V - A + C = 2$

Para David Wells (Campos, 2007). "Los teoremas no son usualmente bellos: son las ideas y las demostraciones las que tienen atractivo importante". De inmediato surge 2 leves interrogantes: ¿en la etapa de la secundaria qué tipo de demostración matemática debería llamar la atención al estudiante? y ¿cómo fascinar y atraer al educando hacia la demostración matemática?

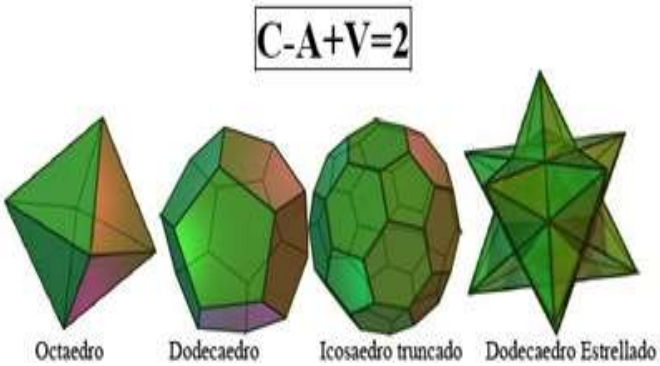


Figura 1. Fórmula para poliedros

Fuente. De la Web para el curso de Seminario de investigación-UNAB

Visión socioepistemológica y sus orígenes

En los últimos 20 años se han efectuado investigaciones sobre las necesidades y dificultades cognitivas de los alumnos durante el aprendizaje del Álgebra. En Malisani (1999). Se afirma que la noción de **obstáculo** está vinculada a la idea de aprendizaje por adaptación, y no es secreto que los conocimientos previos (del niño) en la básica primaria son imprecisos y no todos correctos. Así mismo hay una serie de requisitos que debe cumplir (satisfacer) un obstáculo para que sea categorizado (considerado) como epistemológico.

Un obstáculo es un conocimiento, no una dificultad o falta de conocimiento.

Este tipo de conocimiento, genera respuestas correctas en un determinado contexto, el cual generalmente es conocido (frecuentado) por el alumno.

Pero este conocimiento, genera respuesta falsas fuera del contexto.

El conocimiento produce resistencia a las contradicciones y a la sistematización de un mejor conocimiento.

Después de la toma de conciencia de su falta de precisión, el conocimiento se mantiene de manera obstinada e intempestiva.

Algunos especialistas han señalado que "…*un lenguaje nace con ambigüedad semántica y riqueza de significados al interior de la gramática. Cuando el lenguaje se formaliza se asigna un significado a cada formula y se pierden los significados anteriores*…" **(**Malisani, 1999).

Sin lugar a duda la matemática una actividad cultural y por lo tanto se hace necesario ubicar sus conceptos en el escenario cultural donde han surgido y se han movido. Muestra de lo anterior fue el encuentro del grupo de matemáticos "Bourbaki" después de la segunda guerra mundial. Reunión que buscaba trazar y fundamentar un rumbo en la vía de la axiomatización, para las distintas áreas de la matemática abstracta y formal existente hasta la época.

Reunión del grupo Bourbaki de 1951. De derecha a izquierda se distinguen: André Weil, H. Cartan, J.-P. Serre, J.-L. Koszul y J. Dieudonné.

Figura 2. Grupo Bourbaki. Fuente. De la web para el seminario de investigación (UNAB)

Una demostración es un tipo especial espacial de prueba dotada de argumentos que en general parte de ciertos conocimiento o presunciones de conocimiento, para concluir en otro conocimiento (Vega, 1995). E igualmente señala que "La demonstración puede tener una significación crucial en otras perspectivas, por ejemplo, la demostración constituye parte de un rasgo típico de la imagen tradicional del conocimiento matemático". El reconocido grupo de los Bourbaki dejó escrito: "a partir de los griegos, quien dice matemáticas, dice demostración" (Vega, 1995).

Incluso se podría afirmar que el concepto e idea que tengamos de la demostración, influirá en la visión y construcción de la historia de las matemáticas. Para Cantoral y Farfán (2003) las explicaciones propuestas desde la socioepistemología para el denominado fenómeno social "de conocer", han girado alrededor del ideario de que es en el ejercicio de la actividad cotidiana, normada por prácticas sociales, donde los seres humanos construyen conocimiento.

No es un secreto que durante siglos, la matemática ha sido considerada como una ciencia en donde la verdad de sus afirmaciones se encuentran sustentadas en el carácter deductivo de la lógica, en Crespo y Farfán (2005) se señala que "el conocimiento matemático se sustenta en 2 modos de comprensión y expresión: El primero de forma directa y corresponde a la institución, y el segundo de forma reflexiva, es decir lógica". Tal como lo referencia (Farfán, 2003) la problemática de estudio de la matemática educativa es "el examen de los fenómenos que suceden cuando el saber matemático, constituido socialmente fuera de la institución escolar, se introduce y desarrolla en el sistema de enseñanza", y en la práctica del quehacer matemático del docente, cuando se introducen los saberes matemáticos en el sistema educativo, surgen problemas de carácter tanto teórico como prácticos que necesitan acercamiento teóricos y metodológicos adecuados.

Los objetos, concepciones e ideas que se han ligado a las demostraciones no han permanecido estáticas, por el contario han estado provistas de diversas características de los escenarios socioculturales en los que se desenvolvieron. En educación matemática la investigación de la "construcción social del conocimiento" considera primordial incorporar y dotar en dicha investigación 4 componentes fundamentales en la construcción del conocimiento (Crespo y Farfán 2005). La naturaleza epistemológica, la dimensión cultural, los planos de lo cognitivo, y las diversas formas-modos de transmisión vía la enseñanza (didáctica).

Es de resaltar que en el enfoque socioepistemólogico es fundamental e importante, el rol y papel que desempeña los escenarios históricos, culturales e institucionales en las explicaciones del conocimiento desde la matemática educativa. Según Martínez (2005). "el concepto de escenarios se afianzó a partir de la introducción del estudio de los contextos escolares e institucionales, comprendidos como fundamentales en la construcción del conocimiento matemático.

2. MÉTODO

Las tres (3) pruebas diagnósticas de carácter *ad-hoc* se aplicaron en el mes de octubre del año en curso, en 3 sesiones de 50 minutos a 61 estudiantes de secundaria de grado 9º, de 2 Colegios rurales de carácter público, ubicado en el departamento de Santander (Colombia), y en la organización-clasificación de las respuestas de los educandos, se utilizaran estructuras descritas y articuladas en Balacheff (2000) e Ibañes (2001), donde básicamente se categorizan las demostraciones en deductivas y empíricas. Estas últimas conocidas como esquemas de prueba de convicción externa.

Demostraciones empíricas: Caracterizadas por el uso de ejemplos como elementos de convicción. Los tipos de demostración empírica que abordaremos en nuestro caso son:

(a) Empirismo ingenuo: Cuando en el planteamiento de una conjetura y demostración se usa ejemplos sin ningún criterio específico.

- Perceptivo: El educando recurre a elementos táctiles y visuales.
- Inductivo: El educando acude a relaciones o propiedades (elementos) matemáticas que están vinculadas(os) a los ejemplos.

(b) Experimento crucial: Cuando la conjetura es "demostrada" usando un ejemplo que se escoge porque se presume que en otro va a generar (producir) el mismo resultado.

- Constructivo: El educando sustenta las demostraciones en las construcciones realizadas sobre el ejemplo (ejercicio)
- Basado en un ejemplo: El educando se basa en la ausencia de contraejmplos para su demostración o en la existencia de un único ejemplo.
- Analítico: El joven utiliza ejemplos seleccionados cuidadosamente, y en las demostraciones acude a conceptos, propiedades y elementos auxiliares observados en el ejemplo.

3. Resultados y Discusión

Una pregunta aún abierta y sin solución dentro del marco de la educación escolar, tiene que ver con el relevante aspecto ¿Cuáles son los contenidos y procesos matemáticos que deberían conocer y ser capaces de manejar los educandos a medida que van avanzando en su grado de escolaridad?

En teoría afirmar que las matemáticas no son un área de investigación altamente argumentativa e interconectada con problemas aritméticos del diario vivir sería absurdo, e igualmente no se le podría quitar su propiedad de estar relacionada con diferentes áreas de estudio como la física, la economía, la estadística, la química, la biología y el arte abstracto.

Por ello la propuesta de los 10 estándares del *Consejo Nacional de Profesores de* Matemáticas (NCTM) sobre lo que se debería analizar y valorar en la enseñanza de las matemáticas, pone sobre la mesa una discusión fresca frente al tema de la evaluación del actual modelo de educación en Colombia. Modelo que cada 4 u 8 años viene siendo remendado e introducido con aparentes mejoras basadas en ideas y cuestionadas cifras de "calidad" como el denominado "Índice Sintético" de la jornada institucional del Día E de la "Excelencia Educativa", sacada del sombrero por parte del Ministerio de Educación.

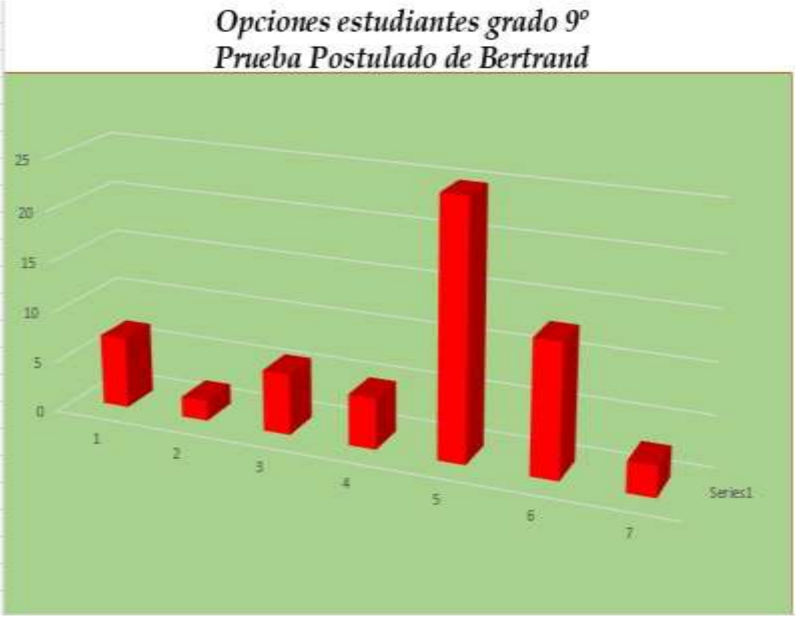


Figura 3. Respuestas de los educandos frente a prueba Postulado Bertrand

La anterior figura refleja y plasma las diferentes respuestas de los educandos de grado 9º frente a una de las tres (3) pruebas aplicadas, la cual involucró el manejo del concepto de número primo ligado al Postulado de Bertrand, el cual afirma que entre n y 2(n) siempre hay un número primo, donde n pertenece al conjunto de los números naturales (IN) y 2 ≤N

En el joven educando se pretende inducir gracias al postulado de Bertrand en el escenario argumentativo que está ligado a la demostración empírica categoría experimento crucial.

4. Conclusiones

Hasta el año 1900 los matemáticos creían haber logrado la cima al admitir la necesidad de términos no definidos, las diversas ramas de la matemática habían sido estructuradas sobre bases axiomáticas rigurosas, y las demostraciones deductivas habían tomado el papel y rol, remplazando a las conclusiones (resultados) basadas(os) en consideraciones empíricas. Pero dicho escenario paradisíaco e innovador no duraría mucho tiempo ya que después de 1900 se encontraron serías contradicciones en ese tipo de pactos y formulaciones. La primera teoría que originó dichas contradicciones fue la teoría de los conjuntos infinitos con el axioma del continuo y el axioma de elección, y a este tipo de "contradicciones" la comunidad matemática la denominó paradojas al considerarlas esporádicas y pasajeras.

El termino demostración en la etapa escolar de la secundaria rural posee muchos significados, los cuales están inherentemente ligados al contexto social del educando y al currículo que mantiene la institución educativa. Es muy frecuente que en los jóvenes estudiantes un caso particular sea utilizado para sacar una conclusión universal, similar a la cuestionada publicidad de la utilización de una prenda blanca para justificar "demostrar" la superioridad de un jabón en polvo.

En el arte de la argumentación y la demostración se cruzan dos desafíos no triviales que son: ¿Cómo evaluar esta competencia matemática? ¿De qué manera la resolución de problemas puede fortalecer dicho arte? y es ahí donde la aritmética de los números naturales (IN) abordada y estudiada en la teoría de números podría ayudar a la solución de estos dos desafíos, ya que la observación, la creatividad y el poco rigor en sus propiedades iniciales, son una fuente y caldo de cultivo para la presentación e introducción del escenario argumentativo en el estudiante de la secundaria.

AGRADECIMIENTO

Los autores expresan un particular agradecimiento a las directivas de los Colegios Luz de la Esperanza en el corregimiento de Berlín, y al Instituto Técnico Agrícola del municipio de Santa Bárbara por su gran apoyo, e igualmente a los jóvenes educandos de grado noveno (9º) de dichas instituciones educativas. Sin la ayuda y colaboración de las mencionadas instituciones educativas este trabajo no hubiera sido posible. Así mismo manifestamos nuestros agradecimientos al grupo de investigación GinCap de la Univeridad Autónoma (UNAB).

REFERENCIAS

Ávila, Ó. (2014). *Pensamiento algebraico en alumnos de grado 7º en la vía del algoritmo de Euclides*. Bucaramanga: Memorias noveno (9º) Encuentro iberoamericano de educación (EIDE).

Balacheff, N. (2000). *Los procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Una Empresa Docente. Universidad de los Andes.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza.

Campos, A. (2007). El más bello teorema. Revista del Instituto de Matemática y Física. Año 10, N° 14, pp. 60-79. http://matesup.utalca.cl/portal/revista/2007/reflexiones.pdf

Canavelli, J. C. (2004). *Notas y Comunicaciones: Aritmética*, por María Elena Becker, Norma Pietrocola y Carlos Sánchez. Yupana, 1(1), pp. 99-101.

Crespo, C. R., y Farfán, R. M. (2005). Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, pp. 8(3), 287-317.

De Losada, M. F. (1983). *Notas: La enseñanza a través de problemas*. Universidad Antonio Nariño de Bogotá.

Dieudonné, J. (1996). The Concept of "Rigorous Proof". *The Mathematical Gazette 80*, pp. 204-206.

Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: un camino de filiaciones y rupturas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 16(1), pp. 5-10.

Guerrero, A. B. (2004). Sobre la axiomatización en matemáticas. *Boletín de matemáticas*, 11(1), pp. 79-94.

Halmos, P. R. (1960). *Naive set theory*. Springer Science & Business Media.

Ibañes, M. (2001). *Cuatro cuestiones en torno al aprendizaje de la demostración*. Memorias del Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Almería, septiembre, pp. 10 – 26.

López, H.F. (2013). Metafísica y Nihilismo. Ediciones Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga.

Malisani, E. (1999). *Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico*. Revista del Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación (IRICE), *13,* pp. 1-25.

Martínez, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8(2), pp. 195-218.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Áreas obligatorias y fundamentales*. Colombia: M.E.N.

Real Academia de la lengua española (RAE). (2014). Diccionario de la lengua española vigesimotercera edicción.

Uriza, R. C., Farfán, R. M., Lezama, J., & Sierra, G. M. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *9*(1), pp. 83-102.

Vega, L. (1995). *En torno a la idea tradicional de demostración: Cuestiones y consideraciones* (auto) críticas. *Laguna*, *3*, pp.9-32.

Villiers, M. (1993). *El papel y la función de la demostración en matemáticas*. Epsilon, 26, pp. 15-30.

PROOFS AND MATHEMATICAL DISCOURSE IN THE HIGH SCHOOL STUDENTS

ABSTRACT. From the time of Aristotle it was considered the demonstration as an essential feature in mathematics, is notorious phrase "do not enter here who does not know geometry". When longs discuss and address in the classroom transcendence art of mathematical proof, it is no mystery that this challenge deserves link and enter in the young student, the imminent concept of "-strong argument," and without a certainly the mathematical institutions have granted recognition to Greek civilization authorship of the axiomatic method; and Euclid's Elements are those that support such recognition. The mathematical proof is the validation activity which part to justify their mathematical theories, which have been defined thanks to an axiomatic system. By the end of the nineteenth century, Georg Cantor magnas ideas on set theory had been imposed in the mathematical community; Potentially this achievement was obtained in the International Congress of Mathematicians in 1897, when Hadamard noted the importance of the applications of set theory within the area of analysis. One of the objective is to show qualitative and quantitative results against three (3) diagnostic tests applied to 61 ninth graders (9th) of 2 rural independent secondary schools , also describes some of the processes mathematical argument made by the students. With previous results declared the following hypothesis-doxa: "The proof-conjecture-argument must be part of the school and social context in educating the young." Reaffirming in this case, in the classroom, the forms of mathematical reasoning and conjecture, are potentially linked to epistemological stages and curriculum of the educational institution.

Keywords: Proof; argumentation; arithmetic; socioepistemología; mathematics education.

WILLIAM GONZÁLEZ CALDERÓN

Universidad Autónoma de Bucaramanga, Colombia

wgonzalez178@unab.edu.co

ÓSCARY ÁVILA-HERNÁNDEZ

Universidad Autónoma de Bucaramanga, Colombia

oavilahe@gmail.com

PROPUESTA PARA EL ESTUDIO DE LAS SEMEJANZAS DE FIGURAS PLANAS Y ESPACIALES BASADA EN EL MODELO DE LOS VAN-HIELE

MARÍA ARAVENA DÍAZ

RESUMEN: Se presenta una propuesta de trabajo en el tema de semejanza de figuras planas y espaciales basada en el modelo de razonamiento geométrico de los Van-Hiele. Se tomó en consideración los estudios que evidencian que en esta área los alumnos presentan dificultades y obstáculos en la resolución de problemas y en la comprensión de los conceptos y procesos geométricos, incluyendo la formación de profesores. Para la elaboración de la propuesta se tomó como base los estudios que muestran la importancia de la visualización, el razonamiento y la construcción de los objetos geométricos, elementos claves para desarrollar habilidades geométricas y los lineamientos teóricos del modelo de razonamiento de Van-Hiele, como marco de referencia para diseñar actividades de geometría. La propuesta se implementó en una muestra representativa de alumnos de secundaria (15 años) de establecimientos públicos vulnerables. Para analizar el nivel de razonamiento del alumnado se utilizó una metodología cuantitativa basada en los procesos distintivos de razonamiento (Gutiérrez y Jaime, 1998). Al inicio de la experiencia, el alumnado solo reconoce atributos físicos de las figuras geométricas presentando dificultades y obstáculos en la descripción de propiedades asociadas a las figuras. Al final, hubo un progreso considerable: la mayoría de los estudiantes reconocen que las figuras geométricas están dotadas de propiedades matemáticas, utilizan definiciones, formulan conjeturas y abordan procesos de demostración, aunque no logren un proceso deductivo-formal (Aravena y Caamaño, 2013; Aravena, Gutiérrez y Jaime, 2016). Tomando en consideración lo anterior, presentamos una secuencia de actividades que puede servir de referencia al profesorado para fomentar las habilidades y potenciar la formación geométrica del alumnado para avanzar en los procesos deductivos.

Palabras Clave: Razonamiento geométrico; Modelo de Van-Hiele; Propuesta de geometría.

Aravena, M. (2017). Propuesta para el estudio de las semejanzas de figuras planas y espaciales basada en el modelo de los Van-Hiele. En: Salcedo, A. (Comp.). *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI*, (145 – 172). Caracas: Centro de Investigaciones Educativas, Escuela de Educación. Universidad Central de Venezuela.

1. Introducción

Tanto en Chile como en Latinoamérica, durante los últimos veinte años, el área de la geometría es la que presenta mayores dificultades y obstáculos en la mayoría de los niveles de enseñanza y también en la formación de profesores, en particular, el alumnado de secundaria presenta enormes debilidades en la comprensión de los conceptos y procesos geométricos puesto que en la mayoría de los establecimientos, salvo contadas excepciones, no se trabajan elementos que son considerados claves de la matemática como son: la visualización, el razonamiento y la construcción de los objetos geométricos, dejándose de lado las representaciones, la exploración, la modelización, la argumentación de los hechos geométricos, la generalización y la demostración (Jaime & Gutiérrez, 1996; Alsina, 2006; Aravena & Caamaño, 2013; Aravena, Gutiérrez & Jaime, 2016).

Por otro lado, la evidencia internacional reconoce la importancia del desarrollo del pensamiento geométrico colocando de manifiesto que el punto clave de la geometría radica en el hecho que el conocimiento geométrico y espacial emerge de la toma de conciencia, de la exposición y expresión de la dinámica de las imágenes mentales, donde además, la educación geométrica posee dificultades propias a diferencia de otras ramas de la educación matemática radicando en la "omnipresente e inevitable dialéctica entre la conceptualización y visualización, o dicho de otro modo entre la experimentación y la demostración" (Fortuny y Giménez, 1998). Se reconoce, además, la conexión interdisciplinar de esta con otras áreas del conocimiento y de la realidad, como lo manifiestan Fortuny y Giménez (1998), la geometría nos permite visualizar conceptos y procesos, es un punto de encuentro entre matemática como teoría y matemática como modelo, facilita la creatividad y el desarrollo de un pensamiento argumentativo y deductivo (Aravena y Caamaño, 2013)

La preocupación por la educación geométrica ha sido puesta de manifiesto en diferentes países donde se han desarrollado varios modelos teóricos que identifican distintas habilidades en la resolución de problemas geométricos y que han sido referentes importantes para las investigaciones a nivel internacional, entre los que se destacan los modelos de Fischbein (1993), Duval (1998) y Van-Hiele (1957,1987).

Uno de los modelos que hemos considerado de interés para diseñar una propuesta de enseñanza, en el tema de semejanza de figuras planas y espaciales, es el Modelo de Van-Hiele, debido a que se ha constituido en un marco de referencia en la organización de las clases de geometría y del currículo en diversos países (Usikin, 1982; Fuys D., Geddes D, Lovett J. & Tischler,R.,1988; Mayberry, 1983; Jaime, 1993; Afonso, 2003; Perdikaris, 2004; Aravena & Caamaño, 2013; Aires, Campos y Poças, 2015, Aravena, Gutiérrez & Jaime, 2016).

Dicho modelo, también ha sido utilizado para caracterizar los niveles alcanzados por los alumnos de diferentes ciclos de enseñanza, incluyendo la formación de profesores y para detectar dificultades y obstáculos en los aprendizajes geométricos. Considerando los planteamientos descritos se diseñó una propuesta para el aula con el objetivo de fomentar habilidades geométricas en el tema de semejanzas de figuras planas y espaciales, ya que en Chile son escasos los estudios que hayan abordado estas temáticas utilizando el modelo de Van-Hiele. Para la implementación en el aula se capacitó a un grupo de profesores, en el modelo descrito, a través de la discusión teórica y práctica de la propuesta, resolviendo los problemas, anticipándose a las posibles respuestas de los alumnos, detectando posibles aciertos, dificultades y obstáculos que se les pudieran presentar en la puesta en práctica en el aula. Dicha capacitación resultó fundamental para que los docentes se apropiaran de las distintas fases del modelo y de los problemas diseñados en cada nivel, generando, además, espacios de regulación y autorregulación de los aprendizajes geométricos.

A continuación damos cuenta del marco de referencia que sirvió de base para el diseño de la propuesta, la capacitación del profesorado y la implementación en el aula.

2. MARCO DE REFERENCIA

El posicionamiento teórico ha tomado como referente diferentes trabajos en la línea de la geometría, donde son varios los modelos que han estudiado los procesos de pensamiento de los estudiantes dando especial énfasis a la visualización, capacidad espacial, razonamiento geométrico, pensamiento espacial o visión espacial (Gutiérrez & Jaime, 1996). Los estudios han permitido caracterizar los procesos cognitivos que se desarrollan cuando se resuelven problemas de geometría. En esta línea se destacan los modelos teóricos de Fischbein (1993), Duval (1998) y Van-Hiele (1957,1987) que han hecho aportes significativos en el aprendizaje de la geometría y que son de interés en este trabajo, ya que identifican diferentes habilidades y niveles en la resolución de problemas geométricos (Aravena, Gutiérrez & Jaime, 2016). También las investigaciones llevadas a cabo por Vinner(1991) y Presmeg (2006) son de relevancia en esta propuesta por la distinción que realizan entre el concepto, la imagen del concepto y la definición de dicho concepto verbalizada por el estudiante (Vinner, 1991; Hershkowitz, 1990; Vinner & Hershkowitz, 1983; Owens, 1999; Gutiérrez, 2004), puesto que el aprendizaje correcto lleva a la identificación de estos tres elementos que en su mayoría se ven como desligados en la enseñanza.

En el diseño de la propuesta hemos asumido el modelo teórico de Van-Hiele puesto que se ha constituido en un marco de referencia para la organización de las clases de geometría y del currículo en diversos países. También ha sido utilizado en diversos estudios para evaluar o describir el nivel de razonamiento de estudiantes y profesores (Usikin, 1982; Mayberry, 1983; Gutiérrez, Jaime & Fortuny, 1991; Jaime, 1993; Afonso, 2003; Perdikaris, 2004; Battista, 2007; Aravena & Caamaño, 2013; Aires, Campos y Poças, 2015, Aravena, Gutiérrez & Jaime, 2016).

Asimismo, los estudios de Jaime (1993) y de Gutiérrez y Jaime (1998), han sido de interés ya que orientan el diseño y aplicación del modelo con diferentes tipos de problemas que han elaborado e implementado en las aulas, identificando, además, las dificultades que manifiestan los alumnos en el trabajo geométrico (Gray, 1999; Guillén, 1996; Jaime & Gutierréz, 1996; Owens, 1999; Gutierrez, Pegg & Lawrie, 2004, Aravena & Caamaño, 2013).

Por último, se analizó las posturas y propuestas sobre la demostración y sus tipos, los diferentes niveles de demostración, las concepciones de los estudiantes, los tipos de demostración que producen y lo que ha sido la postura tradicional enfocada a la demostración deductiva lógica-formal (Harel y Sowder, 1998; De Villiers, 2003; Ibañez y Ortega, 2004; Gutiérrez, 2006; Aravena y Caamaño, 2013).

Tomando en consideración estos elementos, nos enfocamos en una descripción general del modelo de razonamiento geométrico de Van-Hiele a partir de las investigaciones de Gutiérrez & Jaime (1996), quienes presentan una descripción detallada del modelo, explicando que la secuencia de tipos de razonamiento permite a los individuos progresar en su capacidad de abstracción matemática, para lo cual distinguen dos componentes: (1) descripción de los niveles de razonamiento, donde identifican diferentes formas de pensamiento matemático de los individuos, que van desde la más simple hasta la más compleja, donde cada nivel está caracterizado por una forma distinta de comprensión y utilización de los conceptos geométricos, lo cual se refleja en una manera diferente de interpretarlos, definirlos, clasificarlos y hacer demostraciones; (2) sugerencia de unas fases de aprendizaje para que los profesores puedan favorecer el avance de los estudiantes en su nivel de razonamiento geométrico, las que indican cómo organizar la enseñanza y cómo estructurar el trabajo de los estudiantes, de manera que estos puedan adquirir nuevos conocimientos y nuevas experiencias de forma adecuada a su capacidad actual.

El modelo de Van-Hiele

Describimos a continuación las características básicas de cada nivel de razonamiento y las fases de aprendizaje que explicitan la forma de organizar la enseñanza (Jaime, 1993; Gutiérrez y Jaime, 1996).

Niveles de razonamiento

Nivel 1 (de reconocimiento): Los estudiantes perciben las figuras geométricas en su totalidad, pudiendo incluir atributos irrelevantes en las descripciones que hacen. Se limitan a describir el aspecto físico de las figuras; los reconocimientos, diferenciaciones o clasificaciones de figuras que realizan, se basan en semejanzas o diferencias físicas globales entre ellas.

Nivel 2 (de análisis): Es en este nivel donde se presenta por primera vez un tipo de razonamiento que podría llamarse "matemático". Los estudiantes son capaces de deducir y demostrar propiedades empíricamente. Reconocen que las figuras geométricas están dotadas de propiedades matemáticas; pueden describir las partes que integran una figura y enunciar sus propiedades.

Nivel 3 (de clasificación): Es en este nivel donde los estudiantes empiezan a desarrollar la capacidad de razonamiento deductivo. Adquieren la habilidad de conectar lógicamente diversas propiedades de la misma o de diferentes figuras. Son capaces de clasificar diferentes figuras geométricas y dar definiciones matemáticamente correctas. Pueden clasificar lógicamente las diferentes familias de figuras a partir de sus propiedades o relaciones ya conocidas.

Nivel 4 (de deducción formal): El estudiante logra la capacidad de razonamiento lógico matemático y una visión globalizadora del área que se esté estudiando. Esto les permite realizar demostraciones formales de aquellas propiedades que antes habían "demostrado informalmente", como también, descubrir y demostrar nuevas propiedades. Pueden comprender el sentido y la utilidad de términos no definidos, axiomas y teoremas. Aceptan la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas.

Nivel 5 (de rigor): En este nivel el estudiante debe trabajar sistemas axiomáticos distintos del usual, transferencias de conocimientos a otros sistemas. Respecto a este nivel, que no hemos considerado en esta propuesta, las investigaciones muestran que son pocos los alumnos que logran una adquisición alta de razonamiento, y que existe una posición de escepticismo respecto de la validez de las características del quinto nivel y la poca posibilidad de testarlas (Gutiérrez, 1996).

Fases de Aprendizaje

Las fases no están asociadas a un nivel determinado, sino que en cada nivel se comienza con actividades de la primera fase y continúa con las fases siguientes. Las ideas centrales de las cinco fases que serán base del estudio son:

Fase 1. (Información): Se coloca el énfasis en la visualización y la comparación de diferentes objetos geométricos de tal manera que los alumnos reconozcan aspectos semejantes y características de manera informal.

Fase 2. (Orientación dirigida): Los estudiantes exploran el campo de estudio. Se espera que reconozcan características, identifiquen, descubran, comprendan y aprendan cuáles son los conceptos involucrados, las propiedades y las relaciones.

Fase 3. (Explicitación): Los estudiantes intercambien sus experiencias, comentan las regularidades, explicitan cómo han desarrollado las actividades. Esta fase es de estructuración del sistema de relaciones exploradas.

Fase 4. (Orientación libre): Los estudiantes aplican sus conocimientos a otras situaciones, pero con estructura comparada. Deben utilizar los conocimientos para resolver problemas diferentes de los anteriores y, generalmente, más complejos, que contengan nuevas relaciones o propiedades. Problemas más abiertos, en lo posible, con una, varias o ninguna solución.

Fase 5. (Integración): Se trata de condensar en un todo el dominio que ha explorado su pensamiento. Los estudiantes establecen una visión global de lo aprendido sobre el tema y de la red de relaciones que están terminando de formar, integrando estos nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente.

Atributos distintivos en los procesos de razonamiento

También nos basamos en las investigaciones de Gutiérrez y Jaime (1998) quienes articulan los niveles de razonamiento de los Van-Hiele con los atributos distintivos en los procesos de razonamiento de cada uno de los niveles, considerando los siguientes elementos: reconocimiento y descripción que se observan en los niveles 1 y 2; uso de definiciones desde el nivel 2 al 4; formulación de definiciones observables desde el nivel 1 al 4; clasificación de definiciones, desde el nivel 1 al 3 y demostración observable en las producciones de los alumnos desde el nivel 2 al 4. En cuadro 1 mostramos la articulación entre el modelo de los Van-Hiele y los procesos distintivos en los niveles de razonamiento.

Cuadro 1. Atributos distintivos en los procesos de razonamiento de cada uno de los niveles de Van-Hiele (Gutiérrez & Jaime, 1998)

Procesos	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**Nivel 3**	**Nivel 4**
Reconocimiento y descripción	Atributos físicos de las figuras geométricas	Propiedades matemáticas	-----------	------------
Uso de definiciones	----------	Uso de definiciones con estructura simple de las figuras geométricas	Otras definición utilizar definiciones con estructura matemática compleja	Aceptar definiciones equivalentes
Formulación de definiciones	Listado de propiedades físicas	Listado de propiedades matemáticas	Conjunto de propiedades necesarias y suficientes de las figuras geométricas	Prueba la equivalencia de definiciones
Clasificación	Exclusiva basado en atributos físicos	Exclusiva basado en atributos matemáticos	Clasificar con diferentes definiciones inclusiva y exclusiva	-------------
Demostración	--------------	Verificación con ejemplos. Demostraciones empíricas	Demostraciones lógicas informales	Demostración matemática formal

3. SECUENCIA DE APRENDIZAJE DE ACUERDO AL MODELO DE VAN-HIELE

En el diseño de la secuencia didáctica se consideró el tema de semejanza de figuras planas y espaciales que se enseña en el segundo año de educación secundaria de Chile (15 años), donde se implementó el experimento. Se definieron objetivos de aprendizaje para cada uno de los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje propuesto por Van-Hiele que se plasmó en una matriz de niveles, base para el diseño de las actividades de aula. En el cuadro 2 se muestra la matriz que fue diseñada por el equipo de investigadores y validada por jueces expertos en el modelo de Van-Hiele.

Cuadro 2. Niveles y fases de razonamiento geométrico en el tema de semejanza de figuras planas y espaciales (publicada en Aravena, Gutiérrez y Jaime, 2016)

	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Fase 1	Identifica atributos físicos de figuras semejantes y no semejantes del mundo real.		Demuestra de manera deductiva informal la semejanza de polígonos.	
Fase 2	Identifica características visuales de figuras semejantes y establece relaciones.	Construye figuras homotéticas e identifica sus propiedades. Identifica propiedades de figuras congruentes y semejantes.	Descubre, a partir de la experimentación, el teorema de Thales y lo demuestra en forma deductiva informal basándose en la semejanza de triángulos.	Utiliza los criterios de semejanza de triángulos para demostrar el criterio de semejanza de polígonos.

	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Fase 3	Expresa, por escrito y oralmente, las características de dos figuras semejantes. Identifica regularidades en figuras semejantes.	Argumenta de manera empírica sus conclusiones y resultados.	Explica a los compañeros la demostración hecha, utilizando argumentos abstractos.	Presenta, por escrito y oralmente, demostraciones de teoremas usando lenguaje formal.
Fase 4	Utiliza la semejanza para calcular longitudes proporcionales.	Demuestra experimen-talmente y justifica, mencionando definiciones o propiedades, la semejanza de polígonos. Relaciona razón de semejanza entre áreas y entre volúmenes	Establece conjeturas y demuestra informalmente el teorema de Varignon.	Establece conjeturas y demuestra formalmente criterios de semejanza de pirámides.
Fase 5	Realiza una síntesis de las características visuales de figuras semejantes y no semejantes.	Define los conceptos de semejanza y homotecia. Resume los criterios de semejanza y homotecia. Realiza una síntesis de las relaciones entre longitudes, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos semejantes.	Resume las diferentes formas de construcción de figuras semejantes y explicita sus características. Asocia las propiedades de semejanza de triángulos a la semejanza de polígonos.	Determina relaciones entre semejanza de figuras planas y volumen de figuras semejantes. Construye un mapa conceptual sobre el tema de las semejanzas de polígonos y cuerpos geométricos.

Tomando como referencia esta matriz mostramos algunos ejemplos de la secuencia de aula que fue trabajada por el profesorado en el nivel que hemos descrito.

Actividades de aprendizaje

Mostramos algunas actividades que fueron diseñadas para cada nivel de razonamiento y fase siguiendo lo descrito en el cuadro 2. Se debe entender que es necesario presentar un mayor número de actividades en cada nivel y fase, en particular en la fase 2, de orientación dirigida, las necesarias y suficientes para afianzar los conceptos y procesos geométricos.

Ejemplo de actividades para el nivel 1 (N1)

Se apunta al reconocimiento y descripción de atributos físicos de las figuras semejantes. La actividad de la Figura 1 corresponde a la fase 1 (F1), pues su objetivo es averiguar las concepciones intuitivas de los estudiantes sobre semejanza.

ACTIVIDAD 1.1. (N1-F1). Las siguientes figuras corresponden a patrones de la cultura diaguita (norte de Chile).

(1) Determina los elementos geométricos comunes. Explica por qué.

(2) ¿Crees que dichas figuras son semejantes? Justifica tu respuesta.

(3) ¿En qué se parecen las figuras? ¿En qué se diferencian?

Figura 1. Actividad del nivel 1, fase 1

En este nivel se intenta perfeccionar las concepciones intuitivas del alumnado a partir de la observación de la proporcionalidad de longitudes, igualdad de ángulos en figuras semejantes y no semejantes, razón de semejanza (doble, mitad,…) considerando además otros aspectos visuales tales como diferentes posiciones y tamaños. Presentar la congruencia como un caso particular de semejanza de razón 1.

ACTIVIDAD 1.2. N1-F2. Dada la siguiente caja de leche como figura base. Determina si cada una de las cajas son semejantes o no a la caja base. Menciona en qué se diferencian y en qué se asemejan. Justifica por qué.

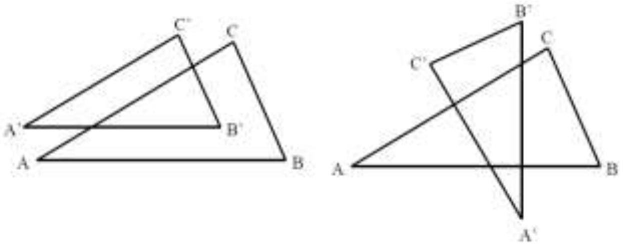
Figura base

Figura 2. Actividad del nivel 1, fase 2

Ejemplo de actividades para el nivel 2 (N2)

Se apunta al reconocimiento de propiedades geométricas, uso de definiciones con estructura simple y demostración de las propiedades de manera empírica (midiendo, haciendo recuentos o cálculos). La actividad de la Figura 3 es un ejemplo de la fase 2, de orientación dirigida, pues su objetivo es caracterizar la proporcionalidad de pares de longitudes como característica básica de la semejanza, identificar la razón de semejanza con la proporcionalidad de longitudes y caracterizar la igualdad de pares de ángulos como característica básica de la semejanza. Se espera que los estudiantes descubran y puedan producir una definición de semejanza de figuras aunque incluya propiedades redundantes (no necesarias).

ACTIVIDAD 2.2. N2-F2. Dados los siguientes triángulos



(1) ¿Qué relación existe entre las medidas de los ángulos correspondientes de estos triángulos?
(2) ¿Cuál es la razón existente entre los lados homólogos? ¿Son proporcionales los lados homólogos?
(3) Crea una definición de triángulos semejantes y discútela con tus compañeros (as).

Figura 3. Actividad del nivel 2, fase 2

Es importante que aprendan a dibujar figuras homotéticas y a utilizar la razón de homotecia para dibujarlas. Se espera que puedan identificar características matemáticas de las figuras homotéticas, tales como paralelismo de segmentos homotéticos, inversión de la figura cuando la razón es negativa, relación entre el cambio de tamaño de las figuras y el valor absoluto de la razón (< 1, =1, >1). Mostramos una actividad relacionada con esta temática.

ACTIVIDAD. 2.2. N2-F2.

Observa la figura y comprueba que dos polígonos semejantes se pueden colocar siempre de manera que sean homotéticos, tanto positiva como negativamente.

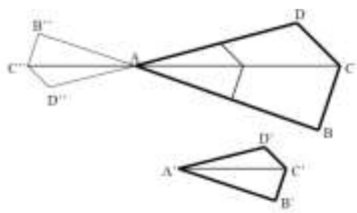


Figura 4. Actividad del nivel 2, fase 2

En la fase 3, de explicitación, los estudiantes explican cómo han resuelto los problemas utilizando preferentemente vocabulario y elementos matemáticos. En este nivel deben comunicar y argumentar matemáticamente sus conclusiones y resultados. Justifican (demuestran) matemáticamente sus afirmaciones, conjeturas, o conclusiones. Esta fase es transversal al nivel y debe ser trabajada en pequeños grupos o con toda la clase, dirigida por el profesor. Mediante la discusión se pretende que los alumnos puedan desarrollar el entendimiento e ir formando una estructura conceptual que les permita aprender en forma independiente. A modo de ejemplificación mostramos, en la Figura 5, un ejemplo de la actividad en esta fase y nivel, entendiéndose que se deben diseñar más actividades que las aquí presentadas para generar la discusión.

ACTIVIDAD 2.3. N2-F3. Análisis grupal

(1) A partir de las actividades trabajadas discute con tu grupo cuándo dos figuras son semejantes y cuándo no lo son. Haz una lista de las características que poseen aquellas figuras que son semejantes.

(2) ¿Cuándo dos figuras son homotéticas? Define lo que son figuras homotéticas.

(3) ¿Qué características deben tener dos figuras para que sean homotéticas?

(4) ¿Cuál es la diferencia entre figuras semejantes y homotéticas?

(5) Qué elementos caracterizan a los triángulos para afirmar que son semejantes. ¿Y a los rectángulos?

(6) Presenta una definición que explicite cuándo dos figuras son semejantes.

(7) Discute las conclusiones obtenidas en las actividades trabajadas anteriormente.

Figura 5. Actividad del nivel 2, fase 3

Descubriendo el número de oro

Durante los últimos siglos creció el mito de que los antiguos griegos estaban sujetos a una proporción numérica específica, esencial para sus ideales de belleza y geometría. Dicha proporción aparece en los elementos de Euclides (en el siglo III a.c.) y ha sido fuente de inspiración en obras arquitectónicas, pinturas famosas, monumentos, edificios, entre otros diseños, desempeñando un papel importante en la historia del arte. Se le han dado diversos nombres tales como: razón aurea, número de oro y divina proporción. El número de oro puede ser trabajado considerando elementos como tarjetas de identidad, tarjetas de crédito bancario, pases escolares y muchos otros elementos de la naturaleza. Mostramos en la Figura 6 algunas actividades que hemos desarrollado con los estudiantes y profesores.

ACTIVIDAD 2.4. N2-F4. Veamos cómo llegamos al número de oro

Dibuja un rectángulo que te parezca más armonioso, con cada integrante del grupo.

(1) Señala por qué te pareció más armonioso.

(2) Mide con una regla aproximadamente el largo y el ancho de tu rectángulo y de los del grupo y completa en una tabla. Determina el cociente. ¿Qué valor da aproximadamente?

(3) Encuentra alguna relación entre la armonía de los rectángulos y los cocientes calculados ¿Cuál es la relación?

Figura 6. Actividades del nivel 2, fase 4

Tal como se menciona en el modelo de Van-Hiele esta actividad del nivel 2 ha sido incorporada en la fase 4, de orientación libre, para que los alumnos la trabajen en forma independiente sin apoyo del profesor. La idea es que puedan afianzar y autorregular el conocimiento aprendido en la fase 2 y discutido en la fase 3 con problemas más complejos pero sin nuevo conocimiento. Mostramos otra actividad del nivel 2, fase 4, relacionada con volúmenes.

ACTIVIDAD 2.5. N2-F4.

El prisma de la figura es la maqueta de un contenedor, las longitudes (en cm.) están en proporción 1:200. ¿En qué proporción estará el volumen? Determina las longitudes reales del contenedor. Calcula los volúmenes de la maqueta y del contenedor.

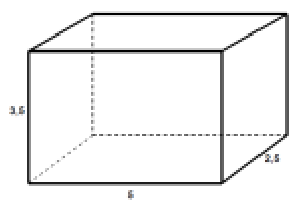


Figura 7 Actividad del nivel 2, fase 4

Como actividad final del nivel se encuentra la fase 5, de integración de los conocimientos adquiridos. El objetivo de esta fase es: definir los conceptos de semejanza y de homotecia mencionando propiedades matemáticas; realizar una síntesis de los criterios de semejanza de triángulos, rectángulos y polígonos, relacionando unos con otros y mostrando las características comunes y sus diferencias; y hacer referencia a las relaciones entre longitudes, áreas y volúmenes.

ACTIVIDAD. 2.6. N2-F5

(1) Define concepto de semejanza y de homotecia.

(2) ¿Cuál es la diferencia entre figuras semejantes y figuras homotéticas?

(3) Menciona características matemáticas de una figura homotética (de un punto, de una recta, de un segmento, de un ángulo, de un triángulo y de un polígono cualquiera).

(4) Enuncia los criterios de semejanza de triángulos (una clasificación general) e identifica la razón.

(5) Realiza un esquema que muestre los criterios de semejanza en polígonos regulares.

(6) Enuncia las condiciones para que los dos polígonos sean semejantes.

(7) Realiza una síntesis de las principales características de figuras semejantes y de figuras homotéticas.

(8) Explicita un método y las estrategias para obtener figuras semejantes y figuras homotéticas.

(9) Realiza una síntesis que muestre las relaciones entre longitudes, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos semejantes.

Figura 8. Actividad del nivel 2, fase 5

Ejemplo de actividades para el nivel 3(N3)

En la actividad de la Figura 9 se pide deducir el teorema a partir de la estrategia de medición que utilizó Thales. La idea de este nivel es realizar demostraciones informales en las que se deben usar los conocimientos aprendidos en el nivel 2. Los enunciados tienen, cuando es posible, la forma de problemas abiertos. Los estudiantes pueden usar ejemplos concretos para generar conjeturas o encontrar caminos para demostrarlas. Durante esta fase deben adquirir un vocabulario matemático más completo (Aravena, Gutiérrez y Jaime, 2016).

ACTIVIDAD 3.1. N3-F2. Midamos como los antiguos

Caso 2. Thales fue un geómetra griego de la antigua ciudad de Mileto. Se dice que fue el primero en medir la altura de la pirámide de Keops en Egipto (ver foto) realizando dichas mediciones con gran exactitud. La historia cuenta que para ello no utilizó ningún instrumento, incluso se sabe que nunca tocó sus paredes para calcular su altura, solo traía un palo de 1 metro y una cinta métrica que le servía para medir la sombra que producían los objetos. La base de la pirámide es cuadrada y sus lados miden aproximadamente 224 m. Está construida de tal forma que sus lados se orientan hacia los cuatro puntos cardinales, de modo que el reflejo de las sombras acusara con una exactitud cronométrica los puntos esenciales del año solar, dando las fechas precisas de los equinoccios de primavera y otoño y los solsticios de invierno y verano.

(1) Explica cómo hizo Thales para medir la altura de la pirámide. Fundamenta tu respuesta.

(2) ¿Se puede usar el método para resolver problemas similares? Por ejemplo distancias inaccesibles. Justifica.

(3) Establece una relación a partir de la semejanza de triángulos. (Esta relación se conoce como Teorema de Thales).

(4) Enuncia con tus palabras el Teorema de Thales y demuestra tu conjetura.

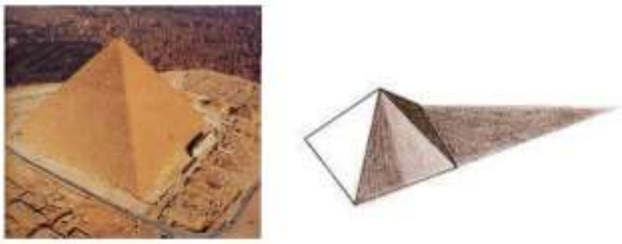


Figura 9. Actividad del nivel 3, fase 2

En la fase 3, de explicitación, se debe discutir en grupo las relaciones encontradas en las actividades de las fases anteriores.

Un ejemplo de la fase 4, que se muestra en la Figura 10, es la generalización y demostración del Teorema de Varignon, donde deben conjeturar y demostrar que los puntos medios de los lados del cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo y conjeturar sobre el perímetro de éste con respecto al cuadrilátero (Aravena, Gutiérrez & Jaime, 2016).

ACTIVIDAD 3.2. N3-F4.

(1) Construye un cuadrilátero convexo cualquiera. Verifica si se cumple que los puntos medios de los lados del cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo. ¿Se cumplirá para cualquier cuadrilátero? Si es así, demuestra tu conjetura.

(2) ¿Qué puedes conjeturar respecto del perímetro del paralelogramo encontrado en (1)? ¿Existe alguna relación? Si es así, ¿cuál es? Fundamenta tu respuesta.

Figura 10. Actividad del nivel 3, fase 4

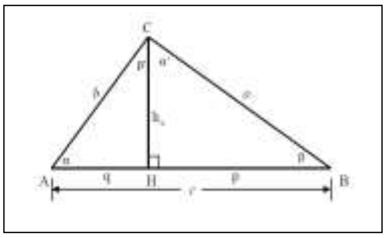
De igual manera en la fase 5 se debe realizar un resumen de integración que tiene por objetivo: resumir las diferentes formas de construcción de figuras semejantes empleadas hasta el momento para compararlas y explicitar sus características matemáticas; organizar el conjunto de definiciones y teoremas estudiados hasta el momento y sintetizar las relaciones entre perímetros, áreas y volúmenes de figuras o sólidos semejantes.

Ejemplo de actividades para el nivel 4(N4)

Con las actividades de este nivel se intenta afianzar el razonamiento deductivo mediante la práctica de los diferentes tipos habituales de demostración formal: directa, contraejemplo, reducción al absurdo, inducción. La actividad que se muestra en la Figura 11 corresponde a la fase 2, de orientación dirigida, donde deben completar de manera formal el estudio de las relaciones entre los teoremas de Thales, Pitágoras y Euclides.

ACTIVIDAD 4.1. N4-F2. DE EUCLIDES A PITÁGORAS.

Considera el triángulo rectángulo de la figura que se presenta a continuación



Utilizando los teoremas de Thales y de Euclides demuestra que:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Figura 11. Actividad del nivel 4, fase 2

Los procesos de demostración son muy importantes para que el alumnado sienta la necesidad de validar sus afirmaciones, por ello se recomienda iniciar el trabajo de demostración empírica en el nivel 2, luego de manera informal, con problemas sencillos, en el nivel 3, para poder posteriormente abordar demostraciones formales en este nivel. En la Figura 12 se muestra otra actividad de este nivel y fase correspondiente al teorema particular de Thales.

ACTIVIDAD 4.2. N4-F2.

Usando demostración directa demuestra el teorema particular de Thales:

"*Toda paralela a un lado de un triángulo determina un segundo triángulo semejante al primero*".

Antes de realizar la demostración identifica y enuncia hipótesis y tesis.

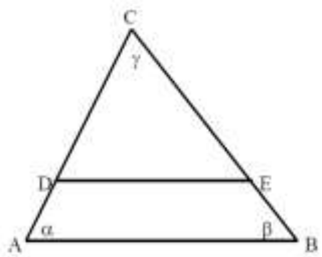


Figura 12. Actividad del nivel 4, fase 2

En la fase 3, de explicitación, los estudiantes intercambian puntos de vista o soluciones y comentan las actividades que han resuelto, utilizando argumentos y lenguaje formal. Identifican las hipótesis y tesis, así como las condiciones necesarias y/o suficientes en las demostraciones de los teoremas.

En la Figura 13 mostramos una actividad del nivel 4, fase 4, de orientación libre, que intenta profundizar en el conocimiento de la semejanza relacionando la semejanza de figuras planas y cuerpos espaciales

ACTIVIDAD 4.3. N4-F4

A partir de los criterios de semejanza de polígonos convexos: enuncia criterios de semejanza de una pirámide de base poligonal.

Establece conjeturas y demuestra formalmente los criterios obtenidos.

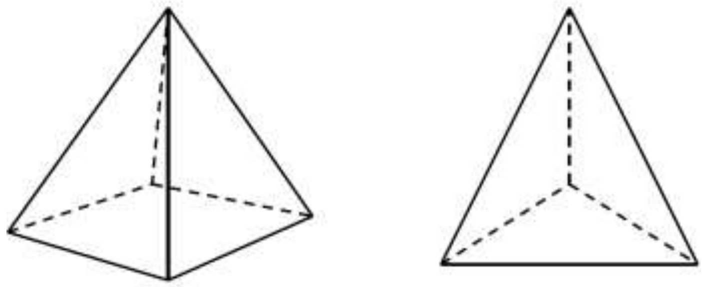


Figura 13. Actividad del nivel 4, fase 4

Finalmente en la fase 5, de integración, se debe sintetizar todos los conocimientos adquiridos organizándolos de manera lógico-deductivo y relacionándolos con otros temas de matemáticas. Se recomienda que los alumnos puedan organizar, en un mapa conceptual (que no está asociado a ningún nivel), una síntesis de lo estudiado en los cuatro niveles. Es importante que los docentes, en cada fase de los distintos niveles, elaboren un resumen de integración para ayudar a organizar el trabajo realizado por el alumnado.

4. RECOMENDACIONES METODOLÓGICAS.

A continuación se presentan algunas recomendaciones que surgieron de la puesta en práctica respecto a la actuación del profesorado y del alumnado en el trabajo de aula mediante la organización diseñada en niveles y fases de aprendizaje.

Sobre la actuación del profesor. Para incorporar este tipo de propuesta es recomendable que el docente, tanto en el diseño de actividades como en el trabajo de aula, tenga un dominio no solo del contenido geométrico que se justifica por sí mismo, sino también de las componentes teóricas y metodológicas sobre los procesos cognitivos, en particular, los tipos de visualización y de razonamiento que se trabajan en geometría.

Un segundo elemento a considerar hace referencia al conocimiento que debe tener el docente sobre las dificultades y obstáculos que pueden manifestar los alumnos en la temática, de tal forma de regular en tiempos oportunos para que puedan progresar en los aprendizajes geométricos.

Un tercer elemento corresponde a apropiarse del modelo teórico de Van-Hiele con el propósito de construir las matrices de niveles y fases para el diseño de actividades en diferentes temas geométricos, elaborando problemas del tipo presentado en esta propuesta.

Un último elemento hace referencia a la regulación y evaluación de los aprendizajes que, mediante los atributos distintivos descritos por Gutiérrez y Jaime (1998), ayuda a los docentes a articular los niveles con dichos procesos, permitiendo reconocer los progresos y las dificultades del alumnado en las actividades diseñadas en los diferentes niveles descritos.

Actuación del alumnado. Hemos podido corroborar que el trabajo en niveles y fases de aprendizaje, con este tipo de actividades o problemas, ha permitido a los alumnos superar una serie de deficiencias que tenían al inicio de la experiencia donde la mayoría ni siquiera sabía cómo organizar los datos del problema, ni enfrentar estrategias de resolución.

Un segundo elemento muestra la potencialidad del modelo, ya que al trabajar de manera independiente, desde lo más simple a lo más complejo, sienten seguridad y confianza de que van progresando en su aprendizaje, perdiendo, incluso, el temor a equivocarse. Considerando el error como algo natural en el hacer matemático.

Por último, la forma en que se han diseñado los problemas en cada nivel, ayuda a la reflexión grupal y discusión de ideas permitiendo la independencia del pensamiento reflexivo y orientarlos en la adquisición del lenguaje geométrico necesario para internalizar las propiedades y las definiciones.

5. CONCLUSIONES E IMPLICACIONES DIDÁCTICAS

Dentro de las principales conclusiones que se han extraído de la experiencia de aula y de los análisis de resultados descritos en Aravena & Caamaño (2013) y en Aravena, Gutiérrez & Jaime (2016) podemos plantear lo siguiente:

(1) Al inicio de la experiencia la mayoría del alumnado solo reconocía atributos físicos de las figuras geométricas, presentando serias dificultades en la descripción de propiedades asociadas a las figuras.

(2) Hubo un progreso considerable en el alumnado, donde la mayoría reconoce que las figuras geométricas están dotadas de propiedades matemáticas, utilizan y formulan definiciones y realizan procesos de demostración empírica.

(3) Un grupo considerable de alumnos es capaz de establecer relaciones, formular conjeturas y abordar procesos de demostración, aunque no logren un proceso deductivo-formal.

(4) Se reconoce como una fortaleza que la organización diseñada, en niveles y fases, fomenta en el alumnado un trabajo geométrico integrador y colaborativo puesto que los grupos se atreven a explicitar sus ideas, argumentar sus procesos y a comunicar sus resultados.

Como implicaciones didácticas podemos sugerir algunas recomendaciones para el trabajo geométrico.

Incorporar, tanto en la formación inicial y continua de profesores, el diseño de actividades a través del modelo de Van-Hiele, de tal manera de generar un cambio en los sistemas tradicionales de enseñanza. También es importante organizar la enseñanza de los diferentes temas geométricos, en base a este tipo de modelo, desde los primeros niveles de enseñanza, considerando en lo posible problemas abiertos, ya que fomenta el desarrollo de habilidades transversales tales como la discusión en equipo y autonomía en la toma de decisiones.

Es necesario fomentar en el alumnado el uso del ejemplo y contraejemplos para que vean la necesidad de validar o refutar sus afirmaciones.

Surge la necesidad de diseñar instrumentos de evaluación y regulación, considerando los atributos distintivos en los procesos de razonamiento por cada nivel, que ayuden al profesorado a valorar y reconocer las habilidades que manifiestan los alumnos en el trabajo geométrico.

Por último, abordar la enseñanza de la geometría mediante este tipo de propuesta es recomendable para superar las deficiencias que se han manifestado por décadas en la mayoría de los establecimientos vulnerables de los países de Latinoamérica y progresar en el desarrollo de las habilidades geométricas de nuestros alumnos.

Agradecimiento

La propuesta forma parte de un Proyecto más amplio que fue financiado por la Comisión de Investigación Científica y Tecnológica de Chile, CONICYT, a través del Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico FONDECYT 1090617.

A los doctores Ángel Gutiérrez R. y Adela Jaime P. de la Universidad de Valencia, España y Carlos Caamaño E. de la Universidad Católica del Maule, miembro del Centro CIEMAE, por

sus aportes y contribución en la investigación y en el diseño de la propuesta.

Referencias

Afonso, M. C. (2003). *Los niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele. Un estudio con profesores en ejercicio* (tesis doctoral). La Laguna, España: Universidad de La Laguna Alsina, C. (1998). *Neither a microscope nor a telescope, just a mathscope*. Proceed. ICTMA-1997

Aires, A. P., Campos, H. y Poças, R. (2015). Raciocínio geométrico versus definição de conceitos: a definição de quadrado com alunos de 6º ano de escolaridade. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18*(2), 151-176.

Alsina, C. (2006). Invitación a la tridimensionalidad. En Ricardo Luengo y Antonio Marín (Eds.) *Geometría para el siglo XXI* (pp 119-139) España. FESPM y SAEM Thales

Aravena, D. M.; Gutiérrez, A. y Jaime A. (2016) Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de enseñanza vulnerables de educación media en Chile. *Revista Enseñanza de las Ciencias,* 34.1 (2016): 107-128

Aravena, M. y Caamaño, C. (2013). Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la Región del Maule. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. (16) 2*, 139-178

Aravena, M.; Caamaño, C.; González, J.; Cabezas, C. y Córdova, F. (2011). *Resolución de problemas en contextos de aplicación. Propuesta Metodológica en la Formación Inicial de Profesores de Matemática.* Talca, Chile: Tabor

Battista, M. T. (2007). The development of geometrical and spatial thinking. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Reston, EE.UU.: NCTM.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon, 26*, 15-30

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana & V.Villani (Eds.). *Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21stCentury* (pp. 37-51). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*, *24*(2), 139-162.

Fortuny, J.M. y Giménez, J. (1998*). Geometría: La forma y las transformaciones geométricas*. Barcelona: Autores.

Fuys D., Geddes D, Lovett J. & Tischler, R. (1988). The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for research in mathematics educations* monograph number 3, Reston: NCTM

Guillén, G. (1996). Identification of Van Hiele Levels of Reasoning in Three-Dimensional Geometry, en Puig, L. y Gutiérrez, A. (eds.) (1996). *Proceedings of the 20th Conference of the In ternational Group for the Psychology of Mathematics Education,* pp. 43-50. València: Universitat de València.

Gutiérrez, A., Pegg, J. y Lawrie, C. (2004). Characterization of students' reasoning and proof abilities in 3-dimensional geometry. *Proceedings of the 28th International Conference for the P.M.E.* (vol. 2, pp. 511-518). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning, *Focus on Learning Problems in Mathematics. Special Issue Elements of Geometry in the Learning of Mathematics* 20 (2 & 3), 27-46.

Gutiérrez, A.; Jaime, A. y Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels, *Journal for Research in Mathematics Education 22(3),* 237-251.

Gutiérrez, A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En Ricardo Luengo y Antonio Marín (Eds.) *Geometría para el siglo XXI* (pp.13-58) España: FESPM y SAEM Thales.

Gray, E. (1999). Spatial strategies and visualization, *Proceedings of the 23th PME Conference 1*, 235-242.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students´ proof schemes: Results from exploratory studies. En E. Dubinski, A. Schoenfeld y J. Kaput (Eds.), *Research on Collegiate Mathematics Education* (vol. 7, pp. 234-283). Providence, EE.UU.: American Mathematical Society.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological Aspects of Learning Geometry. In Nesher, P. y Kilpatrick, J. (Eds.) *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 70-95). Cambridge: Cambridge UP.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2004). Origen, nudo y desenlace de una investigación sobre los esquemas de prueba. Aspectos cognitivos. En R. Luengo (Ed.), *Líneas de investigación en educación matemática* (pp. 21-57). Badajoz: Sociedad Extremeña de Educación Matemática.

Jaime, A. (1993): *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento* (tesis doctoral). Valencia, España: Universidad de Valencia. Recuperado de http://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/Jai93.pdf

Jaime A. y Gutiérrez, A. (1996). *El Grupo de las Isometrías del Plano*. Madrid: Síntesis

Mayberry, J. (1983). The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*(1), 58-69.

Owens, K. (1999). The role of visualization in young students' learning, *Proceedings of the 23th PME Conference 1*, 220-234.

Owens, K., y Outhred, L. (2006). The complexity of learning geometry and measurement. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 83-115). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Perdikaris, S. C. (2004). The problem of transition across levels in the van Hiele theory of geometric reasoning. *Philosophy of Mathematics Education Journal, 18* (revista electrónica sin paginación).

Presmeg, N.C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 205-235). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry* (ERIC Document Reproduction Service Nº ED 220 288). Columbus, EE.UU.: ERIC.

Van Hiele, P.M. (1957). *El problema de la comprensión en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría* (tesis doctoral). Utrecht, Holanda: Universidad de Utrecht.

Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight*. *A theory of mathematics education*. Nueva York: Academic Press.

Vinner, S.; Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 83 (1)*, 20-25.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In *Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library* (pp. 65-79). Cambridge: Board.

PROPOSAL FOR THE STUDY OF SEMEJANZAS OF FLAT AND SPACE FIGURES BASED ON THE VAN-HIELE MODEL

ABSTRACT: A proposal of work in the subject of similarity of flat and space figures is presented, based on the geometric reasoning model of the Van-Hiele. It was taken into consideration the studies that show that in this area students present difficulties and obstacles in solving problems and understanding geometric concepts and processes, including teacher training. For the elaboration of the proposal it was based on the studies that show the importance of the visualization, the reasoning and the construction of the geometric objects, key elements to develop geometric abilities and the theoretical guidelines of the model of reasoning of Van-Hiele, like frame of reference for designing geometry activities. The proposal was implemented in a representative sample of secondary school students (15 years) of vulnerable public institutions. To analyze the student's level of reasoning, a quantitative methodology based on distinctive reasoning processes was used (Gutiérrez & Jaime, 1998). At the beginning of the experiment, students only recognize physical attributes of geometric figures, presenting difficulties and obstacles in the description of properties associated with the figures. In the end, there was considerable progress, most students recognize that geometric figures are endowed with mathematical properties, use definitions, formulate conjectures, and approach demonstration processes, even if they do not achieve a formal deductive process (Aravena & Caamaño, 2013; Aravena, Gutiérrez & Jaime, 2016). Taking into consideration the above, we show a sequence of activities that can serve as reference to teachers to promote the skills and enhance the geometric formation of students, to advance in the deductive processes.

Keywords: Geometric reasoning; Van-Hiele model; Geometry proposal.

MARÍA ARAVENA DÍAZ

Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística. CIEMAE. Facultad de Ciencias Básicas

Universidad Católica del Maule, Talca, Chile

maravena@ucm.cl

maravenadiaz@gmail.com

ENSEÑAR ESTADÍSTICA PARA ALFABETIZAR ESTADÍSTICAMENTE Y DESARROLLAR EL RAZONAMIENTO ESTADÍSTICO

SOLEDAD ESTRELLA

RESUMEN: Según la literatura en Educación Estadística, la enseñanza estadística escolar enfocada en las ideas estadísticas fundamentales puede abordarse mediante modelos específicos del área: la guía GAISE, el ciclo investigativo PPDAC, la inferencia estadística informal ISI y el ambiente para el aprendizaje del razonamiento estadístico SRLE, con el fin de comenzar a desarrollar el pensamiento estadístico según la jerarquía cognitiva de alfabetización estadística, razonamiento y pensamiento estadístico.

Palabras Clave: Didáctica de la estadística; Educación Estadística; enseñanza y aprendizaje; PPDAC; GAISE; ISI; SRLE.

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los derechos civiles más importantes hoy en día es la educación, equitativa y de calidad. El imperativo de la educación es enfrentar la pobreza y propiciar el cambio hacia una buena vida. Nuestra actual sociedad requiere que los ciudadanos sean competentes en evaluar críticamente afirmaciones basadas en datos y en argumentar con fundamentos en la evidencia que entregan los datos. El estudio de la estadística provee a los estudiantes de herramientas, ideas y disposiciones para reaccionar inteligentemente a la ingente información del mundo que les rodea. La sociedad ha demandado que la estadística, la probabilidad y la inferencia estadística sean parte de muchos currículos en el mundo.

Al promover y mejorar la capacidad de los estudiantes a pensar estadísticamente, surge un problema en todos los niveles etarios: los profesores en formación y en ejercicio, tienen escasa preparación en la enseñanza y aprendizaje de la estadística; y como Bruns y Luque

Estrella, S. (2017). Enseñar estadística para alfabetizar estadísticamente y desarrollar el razonamiento estadístico. En: Salcedo, A. (Comp.). *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI*, (173 – 194). Caracas: Centro de Investigaciones Educativas, Escuela de Educación. Universidad Central de Venezuela.

(2014) sostienen, las nuevas evidencias en investigación educativa indican que una vez que los niños entran a la escuela, ningún factor es tan importante como la calidad de los profesores.

Las soluciones en la formación de profesores a nivel gubernamental, serán gestionadas por el Ministerio de Educación, quien es el responsable de proveer actualizaciones de los contenidos disciplinares y didácticos a los profesores en ejercicio vinculándolos con su práctica de aula. En otro nivel, la universidad es la responsable de la formación inicial de profesores, y deberá integrar en sus mallas curriculares asignaturas de los contenidos disciplinares de estadística y probabilidad, así como de las propias didácticas disciplinares asociadas. Finalmente el impacto de la solución en las aulas escolares está en manos de los profesores actuales y futuros, pues cada día y en cada aula, es el profesor quien crea los ambientes para propiciar el aprendizaje y promueve que los estudiantes alcancen una comprensión profunda de la estadística fundamental.

En este escenario desafiante y dinámico, la Didáctica de la Estadística (Educación Estadística) se ha convertido en un creciente y apasionante campo de investigación y desarrollo. La emergente Didáctica de la Estadística como ciencia independiente, proporciona resultados desde sus investigaciones que pueden ser llevados al aula escolar con el fin de promover aprendizajes funcionales, profundos y duraderos.

La Didáctica de la Estadística es incipiente y a nivel hispanoamericano se reconocen el grupo de trabajo en didáctica de la estadística, probabilidad y combinatoria de la sociedad española de investigación en educación matemática; el grupo de investigación sobre educación estadística de la Universidad de Granada; y grupos latinoamericanos de didáctica de la matemática y/o matemática educativa con líneas investigativas en educación estadística de algunos centros universitarios de Argentina, Brasil, Colombia, Chile, México, Venezuela, entre otros. En estos países se investiga y publican estudios, se llevan a cabo congresos y simposios sobre la enseñanza y aprendizaje de la estadística y probabilidad, o se desarrollan programas de posgrado vinculados al área. Los profesores requieren manejar un conocimiento profundo de la estadística de nivel escolar, para que adquieran la capacidad para criticar, producir y analizar datos estadísticos; y para que en su rol de enseñantes posean una comprensión de los errores sistemáticos de los alumnos, del uso apropiado de las herramientas y representaciones, y manejen un amplio repertorio de tareas, preguntas y contextos particulares que ayuden a los aprendices a conectar sus ideas estadísticas (Estrella, Olfos y Mena-Lorca, 2015).

Este escrito trata de articular las propuestas relativas al desarrollo de niveles cognitivos y modelos de enseñanza de la estadística y la probabilidad, conocidos como GAISE, PPDAC, e ISI en un ambiente SRLE, acrónimos que se especifican a continuación. Estos aportes se desarrollan y comentan con el fin integrar las ideas estadísticas fundamentales y de ayudar a enfrentar los desafíos docentes de la Didáctica de la Estadística en el aula escolar.

Desafíos en la inserción de la estadística en la escuela

La inserción de la estadística en la escuela ha forzado una dinámica en las instituciones que no ha sido abordada positiva ni exitosamente en varios países, cuestión que complejiza y dificulta la acción de profesor formado para la enseñanza y aprendizaje de la matemática, al cual el currículo impone la tarea de enseñanza de la estadística para la que no tiene experiencia, ni instrucción que le permita discernir que la práctica de la estadística es diferente de la estadística teórica (del Pino y Estrella, 2012; Franklin et al.,2015). Es de esta manera que, en la mayoría de los países, la estadística se incluye desde los primeros años a través de toda la escolaridad, convirtiéndose en un desafío y en una oportunidad para los formadores de profesores, y difícilmente abordable solo por los mismos profesores quienes deben ayudar a desarrollar este aprendizaje en sus alumnos.

Hoy en día en varios países de Latinoamérica, y también en Chile y, se considera a la educación estadística como parte de la enseñanza y del debate en la sociedad; ella está presente en los medios y en la escuela. La mayoría de los currículos escolares del mundo ha incorporado recientemente un eje de estadística y probabilidades en la asignatura de matemáticas desde los primeros años de escolaridad. Este nuevo contenido tensiona a los profesores en ejercicio y en formación, pues su currículo profesional no contiene propuestas consolidadas en cuanto a estadística y su enseñanza, y tampoco existe en el sistema una tradición de enseñanza de la estadística escolar. Además, ellos no están familiarizados con el análisis de datos como un proceso dinámico, ni con su variabilidad ni con lo no determinista en la matemática (Batanero, Burrill y Reading, 2011; del Pino y Estrella, 2012).

La relación entre la matemática y la estadística escolar no es clara para los profesores; de hecho, no parece que, en general, ellos se cuestionen tal relación. Además, es posible encontrar en las aulas cierta reducción aritmética de la estadística, lo que comporta 'ver' los datos como números y no como números en contexto y desestimar el foco sobre la variabilidad en los datos (Cobb y Moore, 1997; Franklin, 2015). La estadística requiere una manera diferente de pensar, en la matemática el contexto dificulta percibir la estructura, mientras que en el análisis de datos es el contexto el que da sentido. Por su parte, la didáctica de la estadística moviliza una parte importante de los conceptos desarrollados en el campo de la didáctica de la matemática. No obstante, es en la funcionalidad que la estadística y la matemática como herramientas de disciplina se diferencian, para la estadística el contexto en que se presentan los datos es de máxima importancia y la relevancia de la variabilidad le da un sello distintivo, respecto a la matemática (del Pino y Estrella, 2012; Estrella y Olfos, 2013).

En la mayoría de los países, los nuevos cambios curriculares han colocado la enseñanza y aprendizaje de la estadística como un eje transversal en toda la etapa escolar. En la formación de profesores de nivel preescolar y de educación básica, lentamente se van incorporando en las mallas de estudio los contenidos de Estadística y Probabilidades. Sin embargo, los profesores en ejercicio, además de no tener estudios ni prácticas de enseñanza en este tipo de contenidos ni en el proceso estadístico, en general, no poseen prácticas ni acceso a experiencias que les permita entender las dificultades de comprensión de los conceptos estadísticos, o de inferencia o de probabilidad, que exigen procesos distintivos y complejos (del Pino y Estrella, 2012).

2. Marcos referenciales

Se explicitan los marcos conceptuales de la Didáctica de la Estadística, en especial la guía GAISE (Franklin et al., 2007; Franklin et al., 2015), el ciclo investigativo PPDAC (Wild y Pfannckuch, 1999), el enfoque de la inferencia estadística informal ISI y el ambiente para el aprendizaje del razonamiento estadístico SRLE (Ben-Zvi, 2011), para el desarrollo del pensamiento estadístico según la jerarquía cognitiva de alfabetización estadística, razonamiento y pensamiento estadístico (Garfield, 2002).

Niveles cognitivos: desde la alfabetización al pensamiento estadístico

En la década pasada han aparecido tres conceptos importantes dentro del área de la didáctica de la estadística, que desde su origen anglosajón se denominan *statistical literacy, statistical reasoning, y statistical thinking*. Esta jerarquización cognitiva desarrollada por Garfield (2002) se originó en el aprendizaje de la estadística a nivel de la educación superior. A continuación se identifican algunas de las características de cada nivel cognitivo los que deberán desarrollarse a través de la escolaridad, principalmente la alfabetización estadística puede llevarse a cabo con GAISE y PPDAC, y el razonamiento estadístico a través de ISI.

Alfabetización estadística

Esta alfabetización involucra la comprensión y uso de lenguaje básico y las herramientas de estadística: saber lo que significan términos estadísticos, comprender el uso de los símbolos estadísticos, y reconocer y ser capaz de interpretar las representaciones de datos (Rumsey, 2002). Según Ben-Zvi y Garfield (2004) la alfabetización estadística incluye importantes habilidades básicas que se usan para comprender la información estadística, como la capacidad de organizar datos, construir y presentar tablas, y trabajar con diferentes representaciones de datos. Estos autores también incluyen la comprensión de conceptos, vocabulario y símbolos, y una comprensión de la probabilidad como una medida de incertidumbre.

En la Figura 1 elaborada a partir de las ideas del artículo de Garfield y Ben-Zvi (2007), se presentan las características que distinguen a la alfabetización estadística (Estrella, 2014).

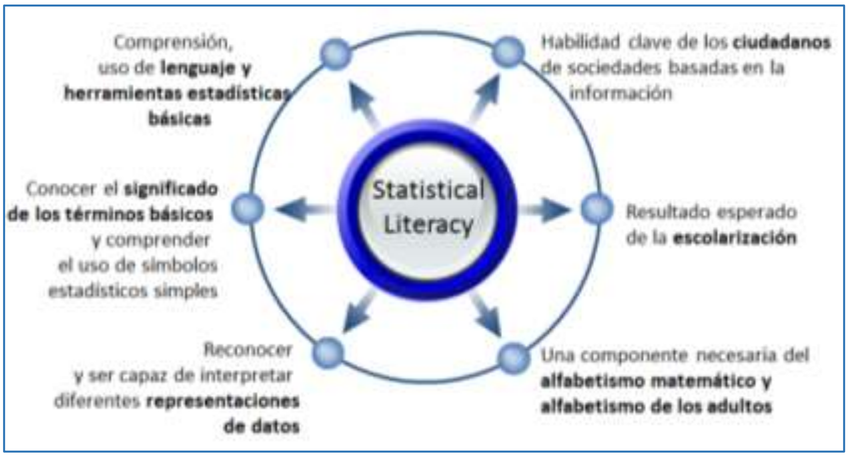


Figura 1. Características de la alfabetización estadística

Razonamiento estadístico

Ben-Zvi y Garfield (2004) establecen que este tipo de razonamiento se puede definir como lo que hacen las personas al razonar con ideas estadísticas y al dar sentido a la información estadística. Esta interpretación implica tomar decisiones basadas en conjuntos de datos, representaciones de los datos, o medidas de resumen de los datos. El razonamiento estadístico puede conectar un concepto a otro (por ejemplo, centro y dispersión), o puede combinar ideas acerca de los datos y el azar. Este razonamiento significa también comprender y ser capaz de explicar e interpretar cabalmente los procesos y los resultados estadísticos.

Pensamiento Estadístico

Si el razonamiento estadístico se entiende como la forma en que las personas razonan con las ideas y dan sentido a la información estadística, este tipo de pensamiento involucra habilidades de pensamiento de orden superior –mayores al razonamiento estadístico–; es la forma de pensar de profesionales estadísticos e incluye el conocer cómo y por qué usar un método particular, el medir, el diseñar o modelar estadísticamente.

El pensamiento estadístico implica una comprensión de por qué y cómo se realizan las investigaciones estadísticas. Esto incluye reconocer y comprender el proceso de investigación completo (desde la pregunta planteada, la recopilación de datos, la elección de los análisis, los supuestos de las pruebas, etc.), la comprensión de cómo los modelos se utilizan para simular fenómenos aleatorios, la comprensión de cómo los datos se originan para estimar las probabilidades, reconociendo cómo, cuándo, y por qué las herramientas de inferencia existentes pueden utilizarse, e involucra ser capaz de comprender y utilizar el contexto de un problema para planificar y evaluar las investigaciones y sacar conclusiones (Chance, 2002), ver Figura 2.

Figura 2. Características del pensamiento estadístico

Los fundamentos en los que descansa el pensamiento estadístico –en general-, descritos por Wild y Pfannkuch (1999), emergen en la acción de los procesos: (1) el reconocer la necesidad de datos; (2) la transnumeración; (3) la percepción de la variación; (4) el razonamiento con modelos, y (5) la integración de la estadística y el contexto.

La componente fundamental, reconocer la necesidad de los datos, base de la investigación estadística, es la reconocer que muchas situaciones reales solo pueden comprenderse a partir del análisis de datos que han sido recogidos adecuadamente.

Las experiencias y creencias personales o la evidencia de tipo anecdótico no son fiables y pueden llevar a la confusión en los juicios o en la toma de decisiones.

La segunda componente es la transnumeración, término que indica la comprensión que surge en el proceso dinámico de cambio de representaciones en diversos registros. Este término, acuñado por Wild y Pfannkuch en 1999, se refiere al proceso de "cambiar de representación para generar comprensión" (1999, p. 227). La transnumeración responde a que a veces en la fase de análisis y organización de datos, una representación puede develar algo nuevo que previamente estaba oculto, entregando más comprensión del problema (Estrella y Olfos, 2015). La transnumeration ocurre en tres casos específicos (Pfannkuch y Rubick, 2002), desde el sistema real y el sistema estadístico en una perspectiva de modelización, entonces la transnumeración ocurre cuando (1) se toman medidas que "capturan" cualidades o características de la situación real, (2) los datos que han sido recolectados se transforman a partir de datos "brutos" en múltiples representaciones gráficas, resúmenes estadísticos, entre otros, en una búsqueda para obtener el significado de los datos, y (3) el significado de los datos, el juicio, tiene que comunicarse en una forma que pueda ser entendida en términos de la situación real por otros.

Kahnemann (2012) afirma que existe una difícil relación entre nuestra mente y la estadística, y que quienes trabajan con datos suelen apegarse a la tradición y a su propia intuición para planificar los experimentos. En este sentido, Pfannkuch y Rubick (2002) sostienen que razonar con datos es complejo y requiere de la imaginación de los estudiantes para producir una red de conexiones entre el conocimiento contextual y el estadístico. Dicha integración permite a los estudiantes construir significados a partir de datos a través de un diálogo constante en una cadena de representaciones estadísticas. Estas autoras describen la transnumeración es pensar acerca de cómo cambiar la representación actual en otra representación para obtener más comprensión, por ejemplo, involucraría pensar sobre reclasificar los datos, o representar los datos en tablas o gráficos.

La tercera componente es la percepción de la variación, que requiere de la comprensión de la variación que hay y se transmite en los datos, así como de la incertidumbre originada por la variación no explicada. La variación afecta la formulación de juicios basados en los datos, ya que sin una comprensión de que los datos varían a pesar de los patrones y tendencias que puedan existir, las personas tienden a expresar generalizaciones basadas en un conjunto particular de datos como certezas en vez de posibilidades.

La cuarta componente es el razonamiento con modelos estadísticos, y se relaciona con cualquier herramienta estadística que representa la realidad, pero diferenciando el modelo de los datos y al mismo tiempo relacionando el modelo con los datos. Para que las personas sean capaces de dar sentido a los datos, el pensamiento estadístico requiere el uso de modelos. A nivel de la estadística escolar de primaria, los modelos apropiados con los cuales los estudiantes podrían razonar incluyen gráficos, tablas, medidas de resumen (tales como mediana, media y rango).

La última componente fundamental del pensamiento estadístico es la integración de la estadística y el contexto, que destaca la realización de conexiones entre el conocimiento del contexto y los resultados de los análisis estadísticos para llegar al significado. Vincular continuamente el conocimiento del contexto de una situación objeto de investigación con el conocimiento estadístico relacionado con los datos de esa situación, permite dar sentido a los datos y una comprensión más profunda de los mismos, y por lo tanto es un indicativo de un nivel mayor de pensamiento estadístico.

Esta integración ayuda a los estudiantes a comprender que la estadística no se desarrolla alejada de los verdaderos problemas, sino que está dentro de un contexto real y con incertidumbre.

Ideas estadísticas fundamentales

En los últimos años, el desarrollo de la Educación Estadística ha llevado a precisar algunas de las ideas estadísticas claves, ellas incluyen: datos, distribución, variación, representación, asociación y modelación de relaciones entre dos variables, modelos de probabilidad, y muestreo e inferencia (Garfield y Ben-Zvi, 2008; Burrill y Biehler, 2011).

Los datos pueden considerarse como el corazón del trabajo estadístico; los sujetos necesitan comprender que los datos son números con un contexto, reconocer la necesidad de datos para tomar decisiones y evaluar la información; los diferentes tipos de datos, los métodos para recolectarlos (vía encuestas) y producirlos (en experimentos), hacen la diferencia en los tipos de conclusiones que se pueden extraer; además, conocer las características de datos con una buena calidad, ayuda a evitar el sesgo y el error de medición.

El concepto de distribución permite comprender que un conjunto de datos puede examinarse y explorarse como una entidad (una distribución), más que como un conjunto de casos separados; que un gráfico de estos datos (cuantitativos) puede resumirse en términos de forma, centro, y dispersión; que las diferentes representaciones de los mismos datos pueden revelar distintos aspectos de la distribución; y que las distribuciones pueden estar formadas desde valores de datos individuales o desde estadísticos de resumen, tales como la media (es decir, distribuciones de medias muestrales).

La variabilidad es una característica omnipresente en el ciclo investigativo estadístico, puesto que permite comprender que los datos varían, algunas veces en forma predecible. Existen fuentes de variabilidad que pueden reconocerse y usarse para explicarla. Algunas veces la variabilidad corresponde al muestreo aleatorio o al error de medición; otras veces, surge de las propiedades de lo que se mide. Una parte importante del análisis de datos es determinar cuán desviados están los datos en la distribución; esto usualmente ayuda a conocer una medida de centro cuando se interpretan medidas de variabilidad, y la elección de estas medidas depende de la forma y otras características de la distribución. Diferentes medidas de variabilidad muestran cuestiones diferentes acerca de la distribución; por ejemplo, la desviación estándar se enfoca principalmente en la distancia típica desde la media, el rango entrega la diferencia entre el valor mínimo y el máximo, y el RIQ, rango intercuartil, entrega la amplitud de la mitad central de los datos. La idea de centro de una distribución como una 'señal en un proceso aleatorio' considera la comparación de dos conjuntos de datos para la toma de decisiones (Konold y Pollatsek, 2002), 'señal' que puede resumirse por una medida estadística, como la media o mediana. Es útil interpretar una medida de centro junto a una medida de dispersión, y estas decisiones a menudo se basan en la forma de la distribución y si existe o no, otras características en los datos, como outliers, agrupaciones, vacíos o asimetrías.

Los modelos estadísticos son útiles para explicar o predecir los valores de los datos. Comparar los datos a un modelo para ver qué tan bien se ajustan los datos, examinando los residuos o desviaciones al modelo. También es posible usar modelos para simular datos, con el fin de explorar propiedades de procedimientos o conceptos.

La aleatoriedad permite comprender que cada resultado de un evento aleatorio es impredecible, y aun así se pueden predecir los patrones a largo plazo.

El concepto de covariación permite comprender que la relación entre dos variables cuantitativas puede variar de una forma predecible. Algunas veces esa relación puede modelarse, lo que permite predecir valores de una variable usando los valores de la otra variable.

El muestreo indica que mucho del trabajo estadístico incluye tomar muestras y usarlas para estimar o tomar decisiones acerca de la población desde la cual se extraen. Las muestras extraídas de la población varían. Freundenthal (1974, citado en Burril y Biehler, 2011) señaló respecto al muestreo, que lo importante para la estadística es la variación de muestra en muestra y que esta variación disminuye a medida que el tamaño muestral aumenta. La inferencia estadística permite hacer estimaciones o tomar decisiones basadas en las muestras de los datos, en estudios observacionales y experimentales. La exactitud de las inferencias está ligada a la variabilidad de los datos, el tamaño muestral y lo apropiado de los supuestos que subyacen a tales muestras aleatorias de los datos, por ejemplo, independencia o equiprobabilidad.

Respecto a la idea de representaciones, todos los diagramas, tablas y gráficos que ayudan a la visualización de relaciones en las representaciones de los datos en estadística, se ven como estructuras relacionales que permiten organizar y ver el comportamiento de los datos, pudiendo entregar conocimiento sobre los datos en cuanto a distribución y variabilidad.

Los estudiantes y enseñantes necesitan comprender a un nivel conceptual profundo varias de las ideas estadísticas fundamentales mencionadas y brevemente precisadas, las cuales pueden guiar las propuestas de enseñanza para el aprendizaje de los estudiantes.

Modelos de enseñanza de la estadística

La abundante investigación en Didáctica de la Estadística en las últimas décadas, y algunos artículos de destacados profesionales estadísticos han ayudado a conformar un cambio de paradigma en la conceptualización de la enseñanza de la estadística.

Pfannkuch y Ben-Zvi (2011) señalan que una reforma en la enseñanza ha evolucionado a partir de los avances tecnológicos, de la identificación y precisión de las características del pensamiento estadístico y de las 'grandes ideas' que sustentan a la estadística. Estos investigadores señalan que la explicación y exploración de estas ideas han contribuido a enfoques que enfatizan el Análisis Exploratorio de Datos, EDA (Tukey, 1977), la atención a la construcción de la comprensión conceptual, y al currículo que tiene como objetivo desarrollar el razonamiento de los estudiantes, el pensamiento y la alfabetización.

PPDAC

Entre las propuestas de marcos para llevar a cabo la práctica estadística a nivel escolar, se destaca la iniciada por Friel y Bright (1998) quienes elaboraron un mapa conceptual para el proceso de investigación estadística basado en cuatro pasos principales: poner la pregunta, recolectar datos, analizar datos e interpretar los resultados. En concordancia con este trabajo, Wild y Pfannkuch (1999) crearon un marco de cuatro dimensiones que abarcaba la práctica empírica de la estadística, la más reconocida de ellas es el ciclo de investigación PPDAC, proceso que comienza con un problema, plan, datos, análisis y conclusiones respecto al problema original (ver Figura 3). El ciclo PPDAC proporciona un marco para la modelización de problemas estadísticos, pues una situación problemática real es explorada y analizada en el mundo de la estadística, para comunicar la solución y conclusiones obtenidas desde el contexto real inicial. Las otras tres dimensiones complementan el PPDAC y cubren los tipos de pensamiento, el ciclo interrogativo y las disposiciones.

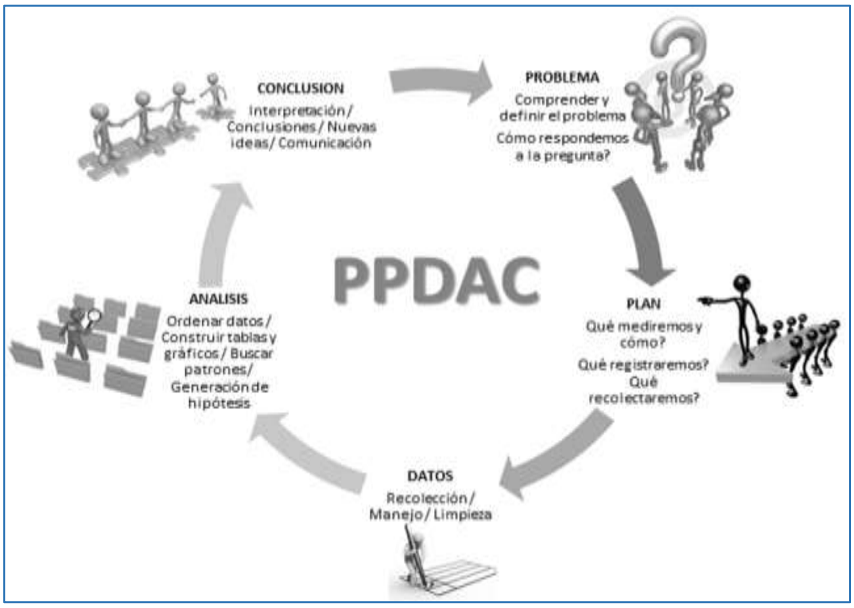


Figura 3. Ciclo investigativo PPDAC.

El informe de GAISE (Guía para la Evaluación e Instrucción en la Educación Estadística) también proporcionó un marco que tenía las cuatro componentes principales: formular preguntas, recopilar datos, analizar datos e interpretar los resultados. La explicación de GAISE de estos cuatro pasos incluyeron las ideas del mapa conceptual de Friel y Bright y el componente del Plan de Wild y Pfannkuch (1999) del PPDAC, así como un enfoque sobre la omnipresencia de la variabilidad en que puede ser cuantificada y explicada.

GAISE

Como se señalaba, es una guía para la evaluación y la instrucción en Educación Estadística. Esta guía fue diseñada por un equipo de profesionales de estadística, matemáticas, educación estadística y educación matemática, cuyo objetivo era promover el razonamiento estadístico y la alfabetización estadística en los estudiantes, desde la etapa preescolar hasta formación universitaria (Franklin et al., 2007).

GAISE plantea que en la enseñanza de la estadística contiene cuatro etapas: la formulación de preguntas, la recolección de datos, el análisis de datos, y la interpretación de resultados. Estas etapas comparten las ideas del modelo PPDAC, aunque en la guía GAISE, por ejemplo, no hay una etapa específica para planear las estrategias para resolver las preguntas de investigación, pero la etapa de recolección de datos involucra un plan.

El informe GAISE propone la variabilidad como el concepto guía fundamental, manifestado de diversas maneras (del Pino y Estrella, 2012). Por ejemplo, las mediciones repetidas en un mismo objeto pueden variar entre sí debido a la imprecisión del instrumento de medición. Por otra parte, es inherente a su naturaleza que haya diferencias entre distintas unidades (personas, semillas, células, piezas producidas por una planta, países, etc.). En el caso de las personas es normal que tengan diferentes alturas, aptitudes, habilidades, opiniones o respuestas emocionales. También es muy conocida la variabilidad muestral. Por ejemplo, en una encuesta política, la proporción de votantes que apoya un candidato se usa para estimar esta proporción sobre todos los votantes; sin embargo, si se extrae una segunda muestra, la proporción será probablemente distinta.

El informe GAISE recomienda: (1) enfatizar alfabetización estadística y desarrollar el razonamiento estadístico, (2) usar datos reales, (3) enfatizar la comprensión conceptual más que el aprendizaje de procedimientos, (4) promover el aprendizaje activo en el salón de clase, (5) usar tecnología para desarrollar comprensión conceptual y analizar datos, no solamente para calcular procedimientos, (6) usar la evaluación para mejorar el aprendizaje (Araneda et al., 2011; Zapata, 2011).

ISI: inferencia estadística informal

El modelo PPDAC "vive" dentro del paradigma del Análisis Exploratorio de Datos (Ben-Zvi, 2016; Tukey, 1977). En la enseñanza escolar, es necesario progresar desde la muestra de datos a la población y llegar a que las conclusiones se conviertan en hipótesis, para ello se requiere iniciar el abordaje de la inferencia estadística a través del paradigma de la inferencia estadística informal, ISI (Ben-Zvi, 2016; Makar, Bakker, Ben-Zvi, 2011) ver Figura 4. ISI se ha propuesto principalmente para la enseñanza de los contenidos estadísticos previos a la enseñanza de las técnicas de la inferencia formal, como las pruebas de hipótesis y los intervalos de confianza.

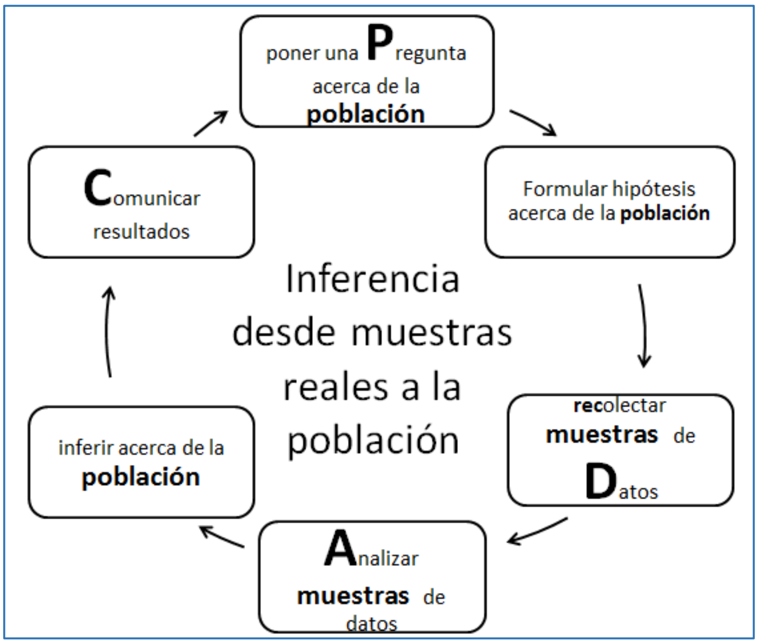


Figura 4. Inferencia estadística informal, ISI (Ben-Zvi, 2016)

ISI se relaciona con el razonamiento acerca de hacer inferencias sobre la población basada en muestras aleatorias de datos que los estudiantes hayan recolectado, y en que los estudiantes proponen una generalización "más allá de los datos", usan los datos como evidencia para apoyar esta generalización, y mediante un lenguaje probabilístico (no determinista) expresan cierta incertidumbre sobre tal generalización (Makar, Bakker, Ben-Zvi, 2011).

SRLE: Ambiente de aprendizaje para el razonamiento estadístico

El Ambiente de aprendizaje de razonamiento estadístico (SRLE, por sus siglas en inglés), es un ambiente que promueve razonar estadísticamente y que pretende desarrollar en los estudiantes una comprensión profunda y significativa de la estadística (Garfield y Ben-Zvi, 2008), ver Tabla 1. Este ambiente propone la combinación de materiales, actividades, normas de la clase, andamiajes, discusión, tecnología, enfoque de enseñanza y evaluación. El modelo está basado en seis principios del diseño de enseñanza (Cobb y McClain, 2004, citados en Ben-Zvi, 2011): enfocar el desarrollo de la comprensión en las ideas estadísticas fundamentales; utilizar datos reales y motivadores que involucren a los estudiantes en la elaboración y prueba de conjeturas e inferencias estadísticas; usar actividades de clase colaborativas basadas en la indagación para apoyar el desarrollo del razonamiento de los estudiantes; integrar el uso de herramientas tecnológicas que permitan a los estudiantes poner a prueba sus conjeturas, explorar y analizar datos de manera interactiva; promover normas del aula que incluyen el discurso y argumentación estadística centrados en las ideas estadísticas fundamentales; y usar métodos de evaluación alternativos para comprender lo que los estudiantes saben y cómo desarrollan su aprendizaje estadístico.

Tabla 1. Ambiente de aprendizaje para el razonamiento estadístico (Ben-Zvi, 2011).

Aspectos	Clase tradicional de Estadística	Clase bajo el modelo SRLE
Foco de clase	Habilidades y procedimientos, cubriendo el contenido	Las grandes ideas estadísticas, el desarrollo de razonamiento y pensamiento estadístico
Centro	Centrado en el profesor	Centrado en el estudiante
Rol del profesor	Entrega conocimiento contando y explicando	Facilita el desarrollo del conocimiento a través de la discusión y las actividades
Rol de la tecnología	Cálculo o revisión de las respuestas, construcción de gráficos	Para explorar datos, ilustrar conceptos, generar simulaciones, conjeturar pruebas, y colaborar
Discurso	Profesor responde preguntas	Profesor plantea preguntas y guía una discusión. Los estudiantes presentan argumentos, responden a las preguntas de otros estudiantes, y se les pregunta si están de acuerdo o en desacuerdo con esas respuestas.
Datos	Pequeño conjuntos de datos para ilustrar y practicar procedimientos.	Ricos, los datos reales involucran a los estudiantes en el pensamiento y el razonamiento y los incentiva a hacer conjeturas. Los conjuntos de datos son generados por los propios estudiantes.
Evaluación	Se enfoca sobre: cálculos, definiciones y fórmulas; sobre respuestas cortas y pruebas de opción múltiple.	Usa una variedad de métodos, evalúa el razonamiento y el pensamiento. La evaluación formal e informal es parte integral del aprendizaje. Los estudiantes explican su razonamiento y justifican sus conclusiones.

Pfannkuch y Ben-Zvi (2011) proponen extender el modelo SRLE a un curso para formación de profesores cuyas componentes incluyen: la comprensión profunda de conceptos estadísticos claves; desarrollar la habilidad para explorar y aprender desde los datos; desarrollar la argumentación estadística; usar evaluación formativa; e incorporan que los profesores comprendan el razonamiento de los alumnos, en especial sus errores y dificultades.

3. CONCLUSIONES

El modelo SRLE, Ambiente de Aprendizaje de Razonamiento Estadístico, favorece el desarrollo de una comprensión significativa de la estadística, y promueve demandas cognitivas altas con el fin de razonar estadísticamente 'haciendo estadística'.

Nuestro interés como investigadores es la continua construcción de una base común de investigación en el área, que permita que la Didáctica de la Estadística pueda seguir evolucionando y aportando al conocimiento y a la sociedad, indagando en los puentes que vinculan los paradigmas de EDA e ISI, e investigando en los emergentes fenómenos didácticos.

La formación de profesores debe caracterizarse por desarrollar el pensamiento estadístico y la comprensión conceptual en los futuros profesores que enseñarán estadística, de manera que aprendan activamente y exploren datos reales, haciendo uso de la tecnología para visualizar conceptos y relaciones, generalizar, discutan sus ideas las expliquen y comuniquen, vivenciando el proceso investigativo estadístico. Por ello, para abordar las características del pensamiento estadístico y los procesos activados en la enseñanza y aprendizaje, es recomendable atender a los niveles cognitivos e ideas fundamentales de la estadística.

Dado que los profesores de primaria son los que operacionalizan la alfabetización estadística, los profesores de secundaria deben propender a lograr esta alfabetización y llegar a la inferencia estadística informal, ISI. Finalizamos promoviendo para la enseñanza de la estadística escolar la adopción del ciclo investigativo

PPDAC en el marco de la alfabetización estadística que permitirá construir la base para iniciar la inferencia estadística informal dentro de un ambiente de aprendizaje como el propuesto por SRLE, que permite a los estudiantes trabajar con datos reales y de interés para ellos, explorando y analizándolos, teniendo la posibilidad de decidir con libertad sus propios criterios para la toma de decisiones, y documentar su razonamiento al hacer predicciones y al contrastarlas y evaluarlas.

REFERENCIAS

Araneda, A., del Pino, G., Estrella, S., Icaza, G. & San Martín, E. (2011). *Recomendaciones para el currículo escolar del eje estadística y probabilidad*. http://www.soche.cl/archivos/Recomendaciones.pdf

Bruns, B. & Luque, J. (2014). *Profesores excelentes: cómo mejorar el aprendizaje en América Latina y el Caribe*. Perú: Banco Mundial, Galese SAC.

Batanero, C., Burrill, G. & Reading, C. (Eds.). (2011). *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education.* A joint ICMI and IASE Study. New York: Springer.

Ben-Zvi, D. (2011). Statistical reasoning learning environment. EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, 2 (2).

Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: Goals, definitions, and challenges. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 3-15). New York: Springer.

Ben-Zvi, D. (2016). Three paradigms in developing students' statistical reasoning. En Estrella et al. (eds), *Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática*, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, (en prensa).

Burrill, G. & Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics.*

Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/IASE study (pp. 57-69). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Chance, B. (2002). Components of statistical thinking and implications for instruction and assessment. *Journal of Statistics Education, 10* (3).

Cobb, G. & Moore, D. (1997). Mathematics, statistics, and teaching. *American Mathematical Monthly, 104* (9), 801-823.

del Pino, G. & Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. Pensamiento educativo. *Revista de Investigación Educacional Latinoamericana, 49* (1), 53-64.

Estrella, S. (2014). Un imperativo moral: la enseñanza de la estadística no puede dejarse al azar. En Andrade, L. (Ed.). *Memorias del Primer Encuentro Colombiano de Educación Estocástica*. Bogotá, Colombia: ACEE. ISSN: 2390-0172.

Estrella, S., Olfos, R., & Mena-Lorca, A. (2015). El Conocimiento Pedagógico del Contenido de Estadística en Profesores de Primaria. *Revista Educacao e Pesquisa, 41*(2), 477-493.

Estrella, S., & Olfos, R. (2015). Transnumeración de los datos: el caso de las tablas de frecuencia. En XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, CIAEM, Chiapas, México.

Estrella, S., & Olfos, R. (2013). Estudio de clases para el mejoramiento de la enseñanza de la estadística en Chile. En A. Salcedo (Ed.), *Educación Estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas* (pp. 167-192). Venezuela: Universidad Central de Venezuela.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). Guidelines and Assessment for Instruction in Statistics Education (GAISE) Report: A Pre¬K-12 Curriculum Framework. Alexandria, VA: ASA.

Franklin, C., Bargagliotti, A., Case, C., Kader, G., Scheaffer, R., & Spangler, D. (2015).*The statistical education of teachers*. Alexandria, VA: The American Statistical Association.

Friel, S. N., & Bright, G. W. (1998). Teach-Stat: A model for professional development in data analysis and statistics for teachers K-6. *Reflections on statistics: Learning, teaching, and assessment in grades K–12*, 89-117.

Garfield, J. (2002). The challenge of developing statistical reasoning. *Journal of Statistics Education, 10* (3).

Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2008). Helping students develop statistical reasoning: Implementing a statistical reasoning learning environment. *Teaching Statistics, 31* (3), 72-77.

Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2007). How students learn statistics revisited: A current review of research on teaching and learning statistics. *International Statistical Review, 75* (3), 372-396.

Kahneman, D. (2012). *Pensar rápido, pensar despacio*. Madrid: Debate.

Konold, C. & Pollatsek, A. (2002). Data analysis as the search for signals in noisy processes. J*ournal for Research in Mathematics Education*, 259-289.

Makar, K., Bakker, A., & Ben-Zvi, D. (2011). The reasoning behind informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning, 13*(1-2), 152-173.

Pfannkuch, M. & Ben-Zvi, D. (2011). Developing teachers' statistical thinking. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education.* A joint ICMI/IASE study (pp. 323-333). Dordrecht, The Netherlands: Springer.014

Pfannkuch, M. & Rubick, A. (2002). An exploration of students' statistical thinking with given data. *Statistics Education Research Journal, 1* (2), 4-21.

Rumsey, D.J. (2002). Statistical literacy as a goal for introductory statistics courses. *Journal of Statistics Education, 10* (3), 6-13.

Tukey, J. W. (1977). *Exploratory data analysis*. Reading, PA: Addison-Wesley.

Wild, C. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67* (3), 223-265.

Zapata, L. (2011). ¿Cómo contribuir a la alfabetización estadística? *Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 1* (33), 234-247.

THE TEACHING OF STATISTICS AS A ROUTE FOR THE LEARNING OF STATISTICAL REASONING

ABSTRACT. According to the literature on Statistical Education, school statistical teaching focused on fundamental statistical ideas can be approached through three specific area models: the GAISE guide, the PPDAC research cycle, the informal statistical inference ISI, and the SRLE statistical reasoning environment, in order to Begin to develop statistical thinking according to the cognitive hierarchy of statistical literacy, reasoning and statistical thinking.

Keywords: Didactics of Statistics, Statistical Education, Teaching and Learning, PPDAC, GAISE, ISI, SRLE.

SOLEDAD ESTRELLA

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

soledad.estrella@pucv.cl

Edición digital del

Centro de Investigaciones Educativas, Escuela de Educación

Universidad Central de Venezuela

Abril 2017

www.saber.ucv.ve

XIV JORNADA DE INVESTIGACIÓN EDUCATIVA Y V CONGRESO INTERNACIONAL DE EDUCACIÓN

ISBN 978-980000284-1

9 789800 002841